



# HORMIGON PRETENSADO

## ULTIMAS NOTICIAS



CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS  
Patronato "Juan de la Cierva" de Investigación Técnica

a

U L T I M O S A V A N C E S

Técnicos en Estructuras

Hormigón Pretensado

Boletín de circulación limitada

Nº 10



- INSTITUTO TÉCNICO DE LA CONSTRUCCIÓN Y DEL CEMENTO -



## I N D I C E

### Págs.

457 - 3 - 1	El problema de las estructuras hiperestáticas. Por A. Paéz. Ing. de Caminos .	1
457 - 3 - 2	Estudio teórico de las estructuras hiperestáticas de hormigón pretensado. Por Y. Guyon .....	14
457 - 3 - 3	El hiperestatismo en el hormigón pretensado. Por el Prof. G. Magnel .....	34

**N O T A . -** El Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y edificación, no se hace responsable del contenido de ningún artículo, y el hecho de que patrocine su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

\* \* \*



INDICE DEL PROXIMO NUMERO

=====

- 1º.- Las bases fundamentales del hormigón pretensado.  
Conferencia pronunciada por A. Páez, Ingeniero de  
Caminos.
- 2º.- Estudio teórico de las estructuras hiperestáticas  
de hormigón pretensado. Por Y. Guyon.- (II Parte)

-----



— Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento —

457 - 3 - 1 EL PROBLEMA DE LAS ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS.

Por: A. Páez. Ingeniero de Caminos.

S I N O P S I S

En este artículo, se describen, de un modo general, — los problemas a que dá lugar el cálculo de los entráramados hiperestáticos de hormigón pretensado, haciéndose, al mismo tiempo — una breve síntesis acerca de las ventajas e inconvenientes que estos tipos de estructuras presentan en comparación con las isos táticas pretensadas.

Es evidente que la principal economía que se puede ob tener en un proyecto, nace siempre del acierto con que se ha es cogido la solución adoptada. La experiencia, y sobre todo, la intuición constructiva del proyectista, juegan en esta primera fase un papel fundamental.

Unas veces la clave del éxito radica en la lógica or-  
denación de las condiciones funcionales que debe satisfacer la  
obra. Otras, la bondad de la solución estriba en el acierto con  
que se ha sabido compaginar el mecanismo resistente y el propio  
proceso constructivo.

Solamente en contados casos, puede aventurarse una — orientación de tipo general, a causa de las distintas variantes



que, en torno a ella, pueden convenir a las circunstancias concretas de que se trate. Un terreno cuya naturaleza hace prever asientos en la cimentación, suele obligar, casi siempre, a la adopción de estructuras isostáticas, al menos exteriormente.

Por el contrario, cuando la base sobre la cual ha de descansar la obra, sea lo suficientemente firme para despreciar toda diferencia de corrimientos verticales en sus pilas o soportes, las estructuras hiperestáticas presentarán aunque no siempre, notables ventajas sobre las isostáticas.

Por un lado, las leyes de momentos que en aquellas se obtienen, suelen distribuirse mejor que en las últimas reduciendo los valores máximos con una paralela economía de material. - Por otra parte, la supresión de juntas o articulaciones, puntos débiles en la técnica del hormigón armado, supone una notable simplificación del proceso constructivo.

Cuando se trata de grandes luces, las vigas Gerber - consiguen una reducción en las áreas de momentos y una compensación de esfuerzos que, en ocasiones, adquieren un papel fundamental. Las articulaciones que es necesario introducir presentan la ventaja de suprimir los secundarios de retracción y variaciones termohigrométricas a cambio de la complicación constructiva que aquellas suponen y de la fuerte concentración de esfuerzos que aparecen en el apoyo del tramo isostático central sobre la menísa.

Tal vez la principal ventaja que las estructuras hiperestáticas presentan sobre las isostáticas la constituye su inudable supremacía en lo que a la seguridad del conjunto se refiere. El fallo o la rotura de un tramo en una viga Gerber, pue



de conducir a la ruina total de la obra como consecuencia del desequilibrio causado. La acción local de una intensa sobre-carga, o la existencia de un inadvertido defecto en una reducida zona de la estructura, pueden ser fácilmente diluidos en un entramado hiperestático mediante una automática redistribución de esfuerzos.

Una burbuja, una sopladura en el interior de una de las dos barras que constituyen la armadura de una viga simplemente apoyada, reduce prácticamente a la mitad la capacidad resistente de tal pieza. El mismo defecto en la sección de empotramiento de una viga hiperestática, conduciría a una prematura entrada del acero en el escalón de fluencia, a unos giros elementales muy superiores a los previstos y, en consecuencia a la virtual formación de una rótula plástica en donde se estimaba existía un empotramiento.

Con todo la pieza podría subsistir. Aún en el caso, mucho más improbable, de que ambas barras tuviesen idéntico defecto, la pieza, en lugar de romperse inmediatamente, como lo haría la isostática, funcionaría como empotrada en un lado y apoyada en el otro, y es evidente, que aun en tan desfavorable hipótesis, su capacidad de resistencia está lejos de estar inmediatamente agotada. Las secciones no afectadas por aquel defecto, corren a prestar su ayuda a la débil, en un régimen de estrecha y fraternal cooperación.

Esa mayor fragilidad de las estructuras isostáticas, debilidad que se acusa al exterior en la dura estrangulación - de las articulaciones o en la falta de continuidad de sus junc



tas, ha sido, tal vez, la causa de que el número de estructuras de este tipo, construidas en hormigón armado, sea en proporción, inferior al de entramados hiperestáticos que lucen por todas partes su orthogonal malla o el reposado y tranquilo perfil de sus limpios arcos.

Si ahora, a renglón seguido, y sin pararse a pensar en el cambio operado, sobre su mecanismo funcional, se examina una colección de obras pretensadas, causa extrañeza la acon tuada preferencia que esta moderna técnica siente por las es tructuras isostáticas. Se diría que siente miedo del monolitismo y de la continuidad; ella que ostenta con orgullo sus posibilidades de enlazar elementos y ensamblar dovelas sin más vínculo de unión entre unos y otros que la poderosa compresión ejercida por la armadura protesa.

Puestos a buscar las razones de este cambio de orientación, pueden encontrarse rápidamente dos causas. La primera consiste en los numerosos cambios de orientación que sufren los cables o hilos, los cuales deben ir pasando de una cara a la opuesta conforme cambian de signo los momentos. La segunda lo constituye la acción que ejercen, con su rigidez, las piezas enlazadas al terreno.

Indudablemente, tanto uno como otro obstáculo puede salvarse con relativa facilidad. Con el fin de mantener los cables o hilos rectos, se acostumbra, siempre que puede hacerse, a curvar el intradós y el trasdós de las piezas de tal modo que la descada excentricidad de la armadura se alcance por trasla-



ción de la directriz respecto a la línea basicéntrica de los cables. Cuando por el contrario, el trazado de la pieza ha de coincidir con una recta preestablecida, no queda más solución que embutir los cables o grupos de alambres dentro de unos conductos especiales, suavizándose los codos en la medida posible y lubricando los puntos de mayor curvatura a fin de reducir la pérdida de tensión de la armadura, a lo largo de su trazado, por rozamiento del cable con su vaina, en el momento en que aquel desliza sobre ésta a causa del alargamiento introducido durante su puesta en carga.

Si las piezas que se pretensan según una dirección horizontal, estuviesen rígida o clásticamente enlazadas al terreno a través de soportes, pilas o estribos, el libre acortamiento que experimentarían bajo la acción de la compresión axilmente introducida, se vería coartado por la rigidez de dichos elementos. Si estos son poco deformables, se precisa disponer unos aparatos de apoyo móviles, que permitan el citado acortamiento sin deformación de las piezas unidas al terreno. Tal es el caso de apoyos sobre pilas o estribos, transformándose los dinteles de los pórticos en simples vigas continuas.

Si la sustentación se realiza a través de soportes verticales o inclinados, se articulan estos en la base y en la coronación, pasando a funcionar como altas bielas destinadas a permitir los corrimientos horizontales de las vigas que unen sus cabezas.

El depósito de agua de Orleans, (Francia) constituye un ejemplo típico de este caso. Todo el recipiente, de -



planta rectangular, se apoya en un conjunto de soportes doblemente articulados a modo de biela con el objeto de no oponerse a las deformaciones impuestas por el pretensado ejercido según dos direcciones ortogonales. Solamente un castillete central se mantiene indeformable con el fin de dotar al conjunto de la necesaria estabilidad y resistencia al empuje horizontal del viento.

Con cualquiera de las dos soluciones, apoyos móviles o articulaciones, la construcción se complica en alto grado, disminuyéndose, en virtud de dichos dispositivos, el grado de hipostatismo del conjunto, incapaz de alcanzar el monolitismo de las estructuras armadas.

Tal vez en el futuro, cuando sea posible controlar y conducir los comentos expansivos de un modo satisfactorio, podrá pensarse en proyectar estructuras hipostáticas de hormigón pretensado del mismo orden de indeterminación estática que las más monolíticas de hormigón armado. Mientras tanto será preciso conformarse con el pretensado de vigas continuas como la más alta expresión del grado de hipostatismo alcanzable.

Si, de un modo general, el cálculo de una estructura hipostática es bastante más penoso que el de una isostática, en el hormigón pretensado el cálculo de las primeras supera en laboriosidad al de una estructura de igual grado de hipostatismo en hormigón armado.

La razón de este nuevo incremento en el número de las operaciones a efectuar se debe a la necesidad de calcular



los nuevos esfuerzos hiperestáticos que aparecen como secundarios al poner en carga la armadura. Estos esfuerzos, dependen de las distintas excentricidades de la línea baricéntrica de las armaduras a lo largo de la directriz, función "a priori" desconocida por estar vinculada a la ley de momentos definitiva.

Siendo  $M_s(\varphi)$  una función dependiente de la ley de espesores y anchos de las distintas piezas que componen la estructura, fácilmente se comprende que cualquier variación en el canto de una sola pieza, es motivo suficiente para alterar la ley  $M_s(\varphi)$  de momentos flectores de toda la estructura. El método para calcular un entramado hiperestático se basa en el rudimentario procedimiento de comprobar los momentos resultantes en una estructura cuyas piezas se han dimensionado "a priori". El número de tentativas necesarias hasta conseguir un satisfactorio ajuste de tensiones, dependerá de la habilidad y experiencia del calculista.

Lo mismo ocurre con la ley de momentos  $M_p(\varphi)$ . Cualquier modificación en la ley de excentricidades, supone una transformación de la ley  $M_p$  cuya importancia depende de la magnitud de aquella. Todo incremento en el esfuerzo de protensado introducido, induce a un proporcional aumento en la magnitud de los secundarios por él creados.



Puesto que el momento total que solicita una sección genérica  $\varphi$  es  $M_t = M_s + M_p$ , se comprende que si la determinación de espesores mediante sucesivos tanteos, a partir del momento  $M_s$  es de por sí penosa en las estructuras no pretensadas, la nueva variable  $M_p$  con su adicional indeterminación, aumenta enormemente la complejidad del problema.

Es cierto que, para cada tipo de estructuras, existe una familia de trayectorias de armaduras, llamadas auto-estáticas que gozan de la propiedad de no producir esfuerzos secundarios de ninguna clase. Si los hilos o cables se disponen según una de esas curvas, determinables a "priori", los momentos  $M_t$  definitivos coinciden, por hipótesis con los  $M_s$  correspondientes a una estructura hiperestática semejante y no pretensada, sometida a iguales sistemas de fuerzas exteriores.

A la vista de la distribución de momentos  $M_t = M_s$  obtenidos, pueden dimensionarse las armaduras en las distintas secciones críticas. Finalmente, ajustando el trazado de los alambres en las restantes secciones al más conveniente perfil auto-estático, se obtiene una solución posible del problema ya que, bajo estas últimas condiciones no se introduce modificación alguna en los momentos definitivos.

Evidentemente, la solución, anterior constituye una buena simplificación para el cálculo, cuyo desarrollo viene a alcanzar así, la misma extensión que en los entramados hiperestáticos no pretensados. El proyectista puede escoger cualquier trazado auto-estático, e incluso determinar la magnitud del esfuerzo de precompresión con la seguridad de que, disponiendo los cables según una de aquella curvas, la ley de mo-



mentos definitivos no se altera al poner en carga la armadura.

Esta libertad de movimientos permite dimensionar la armadura con una relativa comodidad, ajustándola a las condiciones exigidas en cada sección, por los momentos extremos que la solicitan. El problema es muy semejante al de los entramados hiperestáticos de hormigón armado en los que el número y diámetro de barras necesarias, vienen definidos en función de las preestablecidas dimensiones geométricas de cada sección y de los momentos flectores que sobre ellas actuan.

Con ser grandes las ventajas que el calculista obtiene a partir de esta hipótesis simplificativa, la solución de ella deducida no goza de la propiedad de ser la óptima. Parece lógico preferir una distribución de armaduras tal que, no solo los esfuerzos por ella creados se limiten a comprimir de un modo conveniente las secciones, sino que, de rechazo, los secundarios hiperestáticos introducidos por su puesta en carga, reduzcan lo más posible los momentos máximos  $M_f$ . No existe, evidentemente, la razón alguna, que permita suponer que la solución óptima, es decir, aquella que conduce a un mínimo peso de armadura, corresponda a una de las curvas que se han dado en llamar auto-estáticas.

Estos trazados que, como ya se ha dicho, se definen por la propiedad de anular las reacciones hiperestáticas creadas por el pretensado, constituyen una primera aproximación. Un primor tanto a baso de tal supuesto, conduce a un conocimiento, relativamente rápido de los momentos flectores. Una vez que la ley de espesores de las distintas piezas se haya ajustado, puede calcularse la armadura auto-estática por un mé-



todo semejante al seguido en las piezas isostáticas.

La solución definitiva no corresponderá a la deducida en esta primera aproximación, pero salvo en casos excepcionales, solo queda variar ligeramente la posición de los codos de las armaduras, con el fin de conseguir una reducción de los momentos totales  $M_t$ , mediante la incorporación de los momentos hiperestáticos secundarios  $M_p$  que, ahora, aparecen al separarse el cable de un trazado auto-estático.

El procedimiento no constituye, precisamente, un deschado de sencillez. La poca experiencia que se posee, dado el reducido número de estructuras que existen de este tipo, hace aún más penosa la segunda serie de tanteos.

Aún así el problema no está resuelto. Las cargas introducidas, actuando permanentemente sobre el hormigón y el acero, hacen que tanto uno como otro material, sufran importantes deformaciones lentas. Como consecuencia, el estado de tensión interno, aún en la quimérica hipótesis de que se mantengan constantes las sobrecargas exteriores, sufre una continua evolución a medida que transcurre el tiempo.

En ese constante fluir del hormigón y del acero, los esfuerzos iniciales introducidos por la acción del pretensado, van reduciéndose con variable incremento, dudándose, en el momento actual, que tiendan hacia un valor de estabilización como primitivamente habían admitido la mayoría de los autores.

Los ensayos llevados a cabo sobre probetas de hormigón, algunas de las cuales cuentan ya con más de 15 años de ininterrumpida observación, acusan una cierta tendencia a la



estabilización de las deformaciones lentas bajo cargas mantenidas. Por el contrario los estudios cristalográficos y los ensayos acelerados sobre probetas de acero especial a altas temperaturas, justifican y registran la presencia de un periodo en el cual las deformaciones lentas son directamente proporcionales al tiempo.

Facilmente se comprende la gravedad de este importante extremo. Desgraciadamente, el estado actual de la técnica no permite establecer una dudosa correlación entre temperaturas y tiempos, y así no existe posibilidad de aventurar un cálculo dedicado a estimar, siquiera de un modo aproximado, el plazo límite a partir del cual, un acero especial, cargado a una tensión constante determinada, se interna en ese peligroso periodo quasi viscoso, preludio de una inexorable rotura en un intervalo de pocos años.

En todo caso, la teoría y la experiencia han servido - por lo menos, para demostrar la invalidez de la extrapolación - en los ensayos sobre fluencia de aceros. El carácter marcadamente logarítmico de los diagramas deformaciones-tiempos a corto plazo, solo sirve de innecesaria justificación a la existencia de un primer periodo transitorio, totalmente independiente de otro posterior pseudo-newtoneano, cuya iniciación, amplitud y desarrollo, oscuras funciones tanto de la magnitud del esfuerzo a que se haya sometido el material como de la composición y proceso metalúrgico del acero en cuestión, permanecen ocultas bajo el complejo mecanismo reológico del conglomerado cristalino.

El proyectista, perplejo ante el tupido caos de tan confusos fenómenos, solo puede arriesgar unos valores medios



con justificada desconfianza, proyectar unos anclajes visitables y aptos no solo para corregir las imprevisibles pérdidas de tensión, sino también para permitir la reposición de aquellas armaduras cuyo comportamiento ofrezca serias dudas acerca de su viscoso régimen de trabajo.

Adoptando estas precauciones, y aventurando un valor medio para la pérdida de tensión de la armadura, correspondiente a un intervalo de unos cuantos años, pueden volverse a calcular los nuevos momentos ( $M_p$ ) por directa proporcionalidad entre tensiones inicial y final. Bajo el nuevo régimen de precompresiones la estructura deberá estar facultada para resistir la acción de las cargas exteriores en las condiciones de seguridad preestablecidas.

Aunque, de hecho, esta segunda comprobación se realice con relativa rapidez, obliga, algunas veces, a introducir determinadas correcciones en el dimensionamiento inicialmente previsto.

\*

La seguridad de los entramados hiperestáticos, aún cuando aparece implicitamente ligada al grado de indeterminación estática, suele ser siempre superior a la de las estructuras isostáticas. Los posibles asientos de la cimentación y la extensa gama de imprevisibles defectos que se pueden deslizar durante la ejecución de la obra, con sus distintas características, impide formular una concreta valoración de este incremento de seguridad a favor de los entramados monolíticos.



Frente a esta apreciable ventaja, las estructuras isostáticas ofrecen, con sus cables de más simple trazado, - una menor posibilidad de pérdidas por rozamiento a causa de las maniobras de tesado. Las hiperestáticas son muy sensibles a cualquier defecto o error en la colocación de los cables. Las piezas isostáticas no suelen exigir alambres de distintas longitudes y la puesta en carga de la armadura pue de realizarse en el orden más conveniente desde un punto de vista constructivo.

La experiencia, una vez más, es la encargada de sancionar este incipiente pleito entre las estructuras hiper estáticas pretensadas y sus gemelas las isostáticas. La fase actual, constituye un período de verdadera experimentación, y los resultados, que aún no se perfilan, serán la más firme prueba documental de un sumario cuyo fallo, aún parece tardará largos años en pronunciarse.

\* \* \*



457 - 3 - 2 ESTUDIO TEORICO DE LAS ESTRUCTURAS HIPERESTATICASDE HORMIGON PRETENSADO

(A theoretical treatment of continuity in prestressed concrete)

"SYMPOSIUM Nº 7 de la S.T.U.P." Septiembre, 1951

AUTOR: Y. Guyon

S I N O P S I S

En el presente artículo (cuya II parte se publicará en el próximo número), se estudia el trazado que ha de darse a las armaduras de las estructuras de hormigón pretensado estáticamente indeterminadas.

En su primer parte, se considera una viga en la cual los únicos esfuerzos aplicados son los originados por el preten sado y se deducen las condiciones que, en tales circunstancias, debe cumplir la armadura, con el fin de que, al pretensar, no - se originen reacciones adicionales en los apoyos.

A continuación, se estudian los efectos a que da lu - gar la superposición de las cargas exteriores y en la tercera - parte, se indican algunos métodos para determinar las llamadas trayectorias autoestáticas de los cables, que son aquellas que satisfacen la condición antes mencionada de no producir momen - tos adicionales,

Seguidamente, se aplica este método al estudio de es - tructuras más complejas y se examina con especial detalle el ca so de pórticos.

Finalmente, se expone la técnica a seguir para la pues - ta en carga de la armadura, por medio de gatos, de tal forma que los efectos producidos sobre la estructura sean precisamente los



indicados por el cálculo y se hace notar la dificultad que se presenta, como consecuencia de las deformaciones lentas, etc., para mantener, a lo largo del tiempo, las tensiones adecuadas.

I P A R T E

=====

Al tratar de construir una estructura hiperestática, ya sea pretensada o no, se presenta siempre grandes dificultades, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico. Pero estas dificultades se duplican en el caso de las estructuras pretensadas pues a las complicaciones originadas por la acción de las solicitudes exteriores, vienen a sumarse las creadas por el propio esfuerzo de pretensado. Los inconvenientes, se presentan no sólo en el cálculo y al disponer los distintos elementos, sino en la construcción del conjunto de la estructura.

1.- Los efectos del pretensado.- Caso particular: las vigas continuas.-

Considerérese, primeramente, el efecto producido por el sólo esfuerzo del pretensado, como si fuera ésta la única solicitud que actúa sobre la estructura. Este estado de pretensado puro, podrá o no, ser posible en la práctica pero, en teoría, puede ser estudiado aisladamente, superponiéndole después los efectos causados por la aplicación de las cargas exteriores, de tal forma que se cumplan las distintas condiciones de estabilidad bajo los diferentes estados de carga.



En una estructura internamente pretensada, bajo la sola acción de los esfuerzos de pretensado y suponiendo que éstos constituyen por sí mismos un sistema en equilibrio, las reacciones en los apoyos serán nulas si la estructura es estáticamente determinada; pero si no lo es, dejarán de ser cero pues los distintos elementos no podrán ya deformarse libremente. Un sencillo ejemplo servirá para aclarar esta cuestión. Sea una viga continua de dos tramos de luces iguales (fig. 1) pretensada mediante un cable colocado en las proximidades de su borde inferior y paralelo a su eje horizontal longitudinal. Si se suprime el apoyo central, la viga se hace estáticamente determinada y las reacciones en los apoyos que se mantienen, se anulan. La línea de presiones coincide con el trazado del cable.

Como la presión en el borde inferior de la viga es mayor que en el borde superior, la pieza tomará la forma de un arco circular, dejando de apoyarse en el soporte central. Si se quiere volver a llevarla a su posición primitiva, será necesario ejercer sobre dicha sección central un esfuerzo vertical de magnitud  $R$ . La reacción del apoyo central, por consiguiente, deberá ser  $-R$  y, por lo tanto, las de los apoyos extremos valdrán  $+ \frac{R}{2}$ , en cada uno de ellos. Es decir, que las reacciones no serán ya nulas y la línea de presiones, en consecuencia, dejará de coincidir con el cable para tomar, en cada tramo, la dirección de la resultante de los esfuerzos de pretensado  $F$  y de la reacción  $+ \frac{R}{2}$ .

Este comportamiento mecánico es fácilmente generalizable a los distintos tipos de estructuras y en todos ellos ocurrirá que, como en el ejemplo antes mencionado, las reacciones hiperestáticas debidas al pretensado, formarán un sistema



en equilibrio, cuyo efecto vendrá a superponerse al de los esfuerzos de pretensado que, por su parte, constituyen por si mismos otro sistema en equilibrio.

Debe hacerse notar que, en el citado ejemplo, el resultado será el mismo tanto si el pretensado se ejerce por medio de cables, como si se realiza mediante gatos apoyados sobre estribos extremos. Posteriormente, se volverá sobre esta cuestión, pero por el momento se considerará exclusivamente el caso de vigas pretensadas por cables.

Se admite también la hipótesis de que existe un sólo cable que se considera obtenido sustituyendo el conjunto de alambres de la armadura por su resultante, de tal forma que la tensión de este cable pueda variar de una sección a otra a causa de la aplicación de nuevos esfuerzos adicionales de pretensado.

En definitiva, en toda estructura, existirán dos sistemas distintos, cada uno de ellos en equilibrio: el cable y el hormigón, los cuales reaccionarán uno sobre otro.

El hormigón está sujeto a la acción de las siguientes fuerzas:

- 1º.- Las fuerzas ejercidas por los anclajes del cable (Fuerzas F).
- 2º.- Las fuerzas ejercidas por la deformación de la pieza o la curvatura del cable, en el momento de su puesta en carga (Fuerzas b).
- 3º.- Las reacciones originadas por el pretensado sobre los apoyos (Fuerzas R) y que constituyen, por si mismas, un sistema en equilibrio.



El cable a su vez, está sometido a los esfuerzos que sobre él ejerce el hormigón y que son iguales y opuestos a las fuerzas mencionadas anteriormente en los apartados 1º y 2º. - (Fuerzas  $-F$ , ejercidas por los anclajes y  $-b$  producidas por el hormigón como consecuencia de la flexión de la pieza o curvatura del cable). Sobre él no actúan en cambio, las fuerzas del apartado 3º.

Como quiera que el cable es flexible, la resultante de las fuerzas que sobre él se ejercen, en cada punto, deberá ser tangencial a la trayectoria de la armadura. Así, la línea de acción de las fuerzas  $-F$  y  $-b$  (y, por consiguiente, la de sus opuestas  $+F$  y  $+b$  que actúan sobre el hormigón) coincidirá con el trazado del cable. Sin embargo, como el hormigón está también sometido a las fuerzas  $R$ , los momentos producidos por estas fuerzas sobre la viga, modificarán el punto de aplicación de la resultante de los esfuerzos aplicados en cada sección,

Si las reacciones  $R$  no producen compresión (caso de una viga continua horizontal, apoyada sobre rodillos) el esfuerzo normal será constante a lo largo de la viga. Si se desprecia el rozamiento del cable, y la inclinación de éste respecto al eje de la viga es suficientemente pequeña para poder sustituir el esfuerzo de pretensado, tangente a la trayectoria del alambre, por su proyección sobre el eje de la viga, entonces el esfuerzo normal será  $F$ , o sea, la suma de las fuerzas ejercidas por los anclajes del cable a la izquierda de la sección consideradas.



Si  $M$  es el momento producido por las reacciones  $R$  - (Fig. 3), este momento provocará en la sección una translación "u" de la linea de acción de la fuerza  $F$ , con relación a la trayectoria del cable, de tal forma que se verifique:

$$F \cdot u = M \quad u = \frac{M}{F}$$

En el caso de vigas simplemente apoyadas, las reacciones  $R$  son nulas y por lo tanto "M" y "u" también lo serán y la linea de presiones coincidirá con el cable.

Pero si la viga es hiperestática las reacciones  $R$ , en general, no son nulas y, por consiguiente, la linea de presiones no coincide con la citada trayectoria, existiendo entre una y otra, en cada sección, una distancia igual a "u" (Fig. 3). Para que ambas líneas se superpongan, será necesario encontrar un trazado para la armadura tal que haga que las reacciones  $R$  sean nulas. A las trayectorias que satisfacen esta condición, se les denomina "auto-estáticas". Su determinación constituye uno de los problemas fundamentales en el estudio de las estructuras hiperestáticas, de hormigón pretensado.

Siempre que la disposición de la armadura no se ajuste a una de estas trayectorias "auto-estáticas", el pretensado originará más reacciones que reciben el nombre de "reacciones hiperestáticas debidas al pretensado" o más simplemente "reacciones debidas al pretensado".

Es evidente que en el caso que se acaba de considerar (Fig. 3) la diferencia entre la linea de presiones y la trayectoria del cable, en cada sección es una función lineal de la abscisa medida a partir de uno de los apoyos (por ejemplo, el izquier



do) de cada tramo. Efectivamente; las reacciones debidas al pretensado, aparecen únicamente aplicadas en los apoyos. Por tanto, el momento  $M$  será una función lineal de la abscisa, y en consecuencia, también lo será la distancia "u".

La linea efectiva de presiones, en cada tramo, se obtendrá, por consiguiente, sumando a la ordenada del cable, la correspondiente ordenada de una determinada linea recta. Así, la linea de presiones tendrá la misma curvatura que el cable, teniendo en cuenta que, como las trayectorias que se consideran son casi rectas, su curvatura viene dada por la derivada segunda de la ordenada, y las funciones " $y$ " (ordenada del cable) y " $y + A + B \propto$ " (ordenada de la linea de presiones, siendo  $A$  y  $B$  constantes) tienen la misma derivada segunda respecto a  $\propto$ .

En virtud de cuanto antecede, la linea de presiones quedará completamente definida en cuanto se conozcan sus ordenadas en las secciones correspondientes a los apoyos, ó, de un modo más general, en las secciones extremas de cada tramo. En consecuencia, si se conocen los momentos  $M$  creados en las secciones de los apoyos por las reacciones debidas al pretensado, se podrá conocer también la magnitud de la distancia  $u = \frac{M}{F}$ . O, lo que viene a ser igual, si se conocen los momentos  $M'$  originados en las secciones de apoyo por la combinación de los esfuerzos debidos al pretensado (fuerzas  $F$  y  $b$ ) y las reacciones hiperestáticas, se podrá calcular también la excentricidad  $e = \frac{M'}{F}$  respecto al centro de gravedad, en las secciones correspondientes a los apoyos.

Este cálculo no ofrece dificultad y puede ser realizado por los métodos corrientes (por ejemplo, aplicando el teorema de los tres momentos), ya que se conoce la resultante del sistema  $F+b$ , en magnitud y posición, (y, por lo tanto, su momento). -



Dicha resultante, coincide con el cable. Si "y" y "z" son las ordenadas del cable y el eje neutro, respectivamente, con relación a un origen común (la cuerda del eje neutro, por ejemplo), el momento producido por las fuerzas ( $F+b$ ), será igual a  $F(y+z)$  (Fig. 4). Este momento sería el que actuaría en cada sección, si se considerase cada tramo como independiente y simplemente apoyado en sus extremos. El teorema de los tres momentos, o - cualquier otro método equivalente, permitiría entonces, por consiguiente, calcular los momentos  $M'$  que actúan sobre los apoyos de la viga continua.

Pero existen además otros métodos de cálculo más directos, fundados en ciertas propiedades que, analíticamente, han sido demostradas de un modo satisfactorio.

Las reacciones hiperestáticas de protensado (Fuerzas  $R$ ) son producidas por las fuerzas " $F$ " y " $b$ " que actúan sobre la viga (es decir, las de los anclajes y las originadas por la curvatura del cable). Inversamente, el cable se encuentra estirado en virtud de las fuerzas iguales y opuestas a las mencionadas ( $-F$  y  $-b$ ), pudiendo éstas ser sustituidas por un sistema equivalente, en equilibrio, que actuará sobre un cable cuyo trazado es conocido. Como quiera que en el momento de la puesta en carga de la armadura, el hormigón que la rodea se encuentra ya fraguado, el cable no puede modificar su trazado, quedando, por consiguiente, sometido a la acción de las reacciones producidas en el hormigón (fuerzas  $b$ ) de tal forma que la trayectoria que adopta el cable es el polígono funicular de dichas reacciones. Como consecuencia de las conocidas propiedades de los polígonos funiculares, estas reacciones se distribuirán



rán de tal forma que su magnitud en cada punto sea  $-q = -\frac{F}{r}$  por unidad de longitud, siendo  $r$  el radio de curvatura del cable. Si el rozamiento de éste en su vaina, puede considerarse como despreciable, las fuerzas  $-q$  serán normales al cable.

Lo anteriormente expuesto se verifica aun cuando la trayectoria de la armadura no sea una curva continua. En los puntos de discontinuidad, el radio de curvatura se hace cero y entonces, para una longitud infinitesimal el valor de " $q$ " resulta infinito. Esto significa que, en este caso, el hormigón ejercerá sobre el cable una reacción concentrada  $-Q$ , cuya dirección será la bisectriz del ángulo formado por las dos ramas del alambre que se encuentran en el punto de discontinuidad. Como, en la práctica, la curvatura de la trayectoria del cable, suele ser muy pequeña, las fuerzas " $q$ " y " $Q$ ", pueden considerarse como verticales.

En definitiva, por lo tanto, puede suponerse un cable sometido a la acción de varias fuerzas verticales, y a una tracción axial ( $F$  (Fig. 5)). Su equilibrio queda asegurado por las dos fuerzas  $F$ , tangenciales al alambre, ejercidas por los anclajes en los dos extremos de la armadura. Estas reacciones  $F$ , pueden descomponerse en dos direcciones: la vertical (fuerzas  $V_A$  y  $V_B$ ) y la de la cuerda A B (fuerzas  $F'_A$  y  $F'_B$ ).

Las fuerzas  $V_A$  y  $V_B$ , están en equilibrio con las " $q$ " y " $Q$ ", y las  $F'_A$  y  $F'_B$ , se equilibran entre sí. Evidentemente, esto ha de ser así si el sistema de todas estas fuerzas, en conjunto, ha de estar en equilibrio. Si la pendiente de las tangentes en los extremos A y B, con relación a la cuerda



AB, es pequeña, la fuerza  $F'_A = F'_B$ , es prácticamente, igual a  $F$ .

En tal hipótesis, el efecto total que la armadura produce sobre el hormigón (efecto que será igual y contrario al producido por el conjunto de fuerzas antes mencionado) vendrá representado por:

- a).- Un esfuerzo de compresión  $F$ , que actua a lo largo de la cuerda AB desde los puntos de anclaje - extremos.
- b).- Un conjunto de cargas verticales repartidas  $q = \frac{F}{r}$
- c).- Las fuerzas verticales concentradas  $Q$ , que actuan en los puntos de discontinuidad y las  $V_A$  y  $V_B$  que se ejercen en los extremos del cable.

Si se supone que los puntos de discontinuidad se encuentran sobre las verticales que pasan por los apoyos intermedios, y los anclajes A y B sobre los apoyos extremos (Fig. 6) - es evidente que los momentos  $M'$  producidos en los apoyos por los esfuerzos ejercidos por el cable, serán independientes de las fuerzas concentradas  $V_A$ ,  $V_B$  y  $Q$ , ya que las líneas de acción de éstas, pasan por dichos apoyos. Esto significa que los momentos  $M'$  producidos por un cable sometido a la tensión  $F$ , dependerán lamente de la posición de la cuerda AB (o sea, de las excentricidades  $e_o$  y  $e_n$  de los anclajes en los extremos) y de las cargas verticales  $q = \frac{F}{r}$  ejercidas por el cable (y, por lo tanto, en definitiva, del radio de curvatura de la armadura).

Se comprende que, por consiguiente, dos trayectorias a y b de armadura (Fig. 6), que tengan los mismos puntos de anclaje extremos y la misma forma intrínseca en cada tramo (es de-



cir, la misma curvatura en cada sección vertical) darán la misma "línea de presión efectiva" aunque sus trayectorias reales en el interior de la estructura sean distintas. Esta "línea de presión efectiva", será una curva "s" que tendrá, a su vez, la misma forma intrínseca que el cable, en los distintos tramos, y cuya excentricidad en cada apoyo será:  $e_1 = \frac{M'_1}{F}$  ..  $e_2 = \frac{M'_2}{F}$  etc. siendo  $M'_1$ ,  $M'_2$  .. etc., los momentos producidos en los sucesivos apoyos de la viga hiperestática que se considere, por las fuerzas  $F$  (que actúan a lo largo de A-B) y por las cargas - verticales  $\tilde{q}$ .

Por consiguiente, las excentricidades de los cables en los apoyos intermedios podrán variarse sin que ello afecte al trazado de la línea de presiones efectiva "s". A estas variaciones se les dá el nombre de "transformaciones lineales" para expresar el hecho de que la diferencia entre las distintas trayectorias, en cada tramo, puede ser representada por una función lineal. Estas distintas trayectorias se obtendrán manteniendo la curvatura del cable en cada tramo y ~~deslizándolo~~ hacia arriba o hacia abajo, su punto de intersección con las verticales correspondientes a los diferentes apoyos.

Sin embargo, estas "transformaciones lineales" afectarán, como es lógico, a las reacciones en los apoyos, como consecuencia de las variaciones que introducen en las fuerzas concentradas  $Q$ .

Si el cable se dispone según la línea "S", coincidirá con la línea de presiones y por consiguiente, las reacciones en los apoyos serán nulas. A este trazado se le denomina "auto-est-



"tático" y a la línea de presiones correspondiente, "curva estática".

La posibilidad de trasladar el cable sin variar la línea de presiones, es del mayor interés desde el punto de vista práctico, ya que permite obtener la conveniente línea de presiones efectiva eliminando en la trayectoria de la armadura discontinuidades que harían imposible el tesado de los alambres.

Ahora, es necesario estudiar el efecto producido por el esfuerzo de compresión en la dirección AB. Sea una viga continua de "n" tramos (Fig. 7) y A', B', C', D', E', etc., los puntos en los cuales su eje neutro atraviesa las secciones correspondientes a los distintos apoyos. Supóngase, para mayor generalidad, que el eje neutro es curvo. Primeramente, se puede descomponer la fuerza F aplicada en el punto A, según una paralela a la primera cuerda A'C', y una vertical V<sub>A</sub>. Análogamente, la fuerza F aplicada en B, puede descomponerse según E'B' y V<sub>B</sub>. Las componentes V<sub>A</sub> y V<sub>B</sub>, no ejercerán acción alguna sobre la viga ya que resultarán neutralizadas por las reacciones verticales de los apoyos. Por otra parte y como quiera que la pendiente de AB, suele ser pequeña, las componentes paralelas a A'C' y E'B', serán, prácticamente, iguales a F.

Sin alterar el equilibrio del sistema, se pueden introducir en A' y en la dirección A'C', dos fuerzas iguales y contrarias (+F) y (-F), y hacer lo mismo en B'. La fuerza de compresión, paralela a AB, que actuaba en A, queda así sustituida por la +F que actúa a lo largo de A'C' y el par +F•AA'. Lo mismo ocurre en B. Si e<sub>o</sub> y e<sub>n</sub> son, respectivamente, las excentricidades en A' y B', la viga se encontrará sometida en sus



extremos a los momentos  $e_o F$  y  $e_n F$ , los cuales producirán en los apoyos intermedios nuevos momentos que pueden ser fácilmente calculados y que disminuyen rápidamente a medida que se alejan de los apoyos extremos.

Existe, además, la compresión a lo largo de la cuerda  $A'G'$ . En  $C'$ , esta compresión se reparte entre el soporte  $C'$  y la cuerda  $C'D'$ . La componente según esta última, al llegar a  $D'$  sufrirá análogo desdoblamiento, y así irá sucediendo, sucesivamente, dando lugar a la aparición de reacciones  $R'$ , en cada apoyo y a la compresión de las diferentes cuerdas, hasta llegar al tramo final en el cual, la compresión según  $E'B'$  deberá compensarse con la fuerza  $F$  aplicada en  $B'$ . Las reacciones  $R'$ , tampoco ejercerán acción sobre la viga. Por lo tanto, cada uno de los tramos quedará comprimido según la dirección de la cuerda de su eje neutro.

Sea ahora  $r'$ , el radio de curvatura (variable) del eje neutro en un tramo tal como el  $C'D'$  (Fig. 8) y suponganse aplicadas a lo largo de este eje dos cargas verticales, uniformemente distribuidas, de signo contrario y de magnitud  $q' = \frac{F}{r'}$  las cuales producirán en los extremos  $C'$  y  $D'$  las reacciones  $\pm V'C'$  y  $\pm V'D'$ .

El efecto de las cargas  $q'$  hacia abajo y sus reacciones, y el de la compresión  $F$ , es someter el eje neutro a una compresión axial igual a  $F$ , en cada punto, toda vez que el eje neutro es precisamente el polígono funicular de dichas cargas. Existe además la carga vertical hacia arriba  $\frac{F}{r'}$ , cuya acción sobre el referido eje no aparece compensada.



De esta forma, la compresión  $F$  a lo largo de la cuerda, se ha transformado en una compresión  $F$  según el eje neutro y una carga vertical hacia arriba  $\frac{F}{r'}$ . La flexión producida por esta carga, será la única que influya en la excentricidad de la línea de acción de la fuerza  $F$ , ya que todas las demás cargas no crean momentos. Si el eje neutro es recto,  $r'$  se hace infinito y por lo tanto, la solicitación no compensada, o sea, la carga hacia arriba  $\frac{F}{r'}$ , se anula.

En los apoyos extremos, las excentricidades de la línea efectiva de presiones, son evidentemente, iguales a las  $e_o$  y  $e_n$  de los anclajes, y por consiguiente, los momentos en las secciones correspondientes a dichos apoyos, valdrán  $F.e_o$  y  $F.e_n$ .

Sin embargo, si se introducen esfuerzos adicionales de pretensado, que se supondrán aplicados en las secciones de los apoyos intermedios, la fuerza  $F$  variará de un tramo a otro. Así por ejemplo, si en la sección del apoyo i se considera aplicada una fuerza adicional de pretensado  $F_i$ , con una excentricidad  $e_i$ , además de la nueva compresión  $F_i$ , (que de la misma manera que se hizo anteriormente, puede tomarse como dirigida a lo largo del eje neutro) un nuevo momento  $F_i e_i$  aparecerá en cada uno de los demás apoyos, menos en los dos extremos, ya que en estos el momento ha de permanecer invariablemente igual a  $F_o e_o$  y  $F_n e_n$ . En las distintas secciones coincidentes con los apoyos situados a uno y otro lado del i, se obtienen así momentos que son alternativamente positivos y negativos y cuya magnitud



decrece rápidamente a medida que aumenta su distancia a i (\*)

En resumen, los efectos producidos por el pretensado sobre una viga continua, en el caso de que los apoyos sean, únicamente capaces de originar reacciones verticales, son los siguientes:

El eje neutro, resulta sometido a una compresión, debida a la fuerza  $F$  que es la resultante de todos los anclajes que actúan a la izquierda de la sección que se considere, y cuya magnitud es igual a la tensión total que solicita al cable.

---

(\*) En otras palabras, si  $k_i, k_{i-1}, k_{i-2} \dots$  etc, son los coeficientes de transmisión hacia la izquierda y  $k'_{i+1}, k'_{i+2} k'_{i+3}$  los de transmisión hacia la derecha, los momentos originados por el  $F_i e_i$  en los sucesivos apoyos, serán: En los situados a la izquierda de i:

$$\begin{aligned} & - F_i k_i e_i; \\ & + F_i k_i k_{i-1} e_i; \\ & - F_i k_i k_{i-1} k_{i-2} e_i; \text{ etc.} \\ & - F_i k'_{i+1} e_i; \\ & + F_i k'_{i+1} k'_{i+2} e_i; \\ & - F_i k'_{i+1} k'_{i+2} k'_{i+3} e_i; \text{ etc. en los si} \end{aligned}$$

tuados a la derecha de i. Estos momentos se sumarán a los producidos por las fuerzas  $\frac{F}{r}$  y  $\frac{F}{r'}$ . Tales relaciones son igualmente aplicables a la determinación de los efectos originados por los momentos  $F_o e_o$  y  $F_n e_n$  en los sucesivos apoyos intermedios.



Además, la viga experimenta la flexión producida por la curvatura del cable y la del eje neutro. En cada sección existe un momento flector igual al producido por las cargas verticales  $\frac{F}{r} + \frac{F}{r'}$ , suma de los empujes no compensados del cable y de la viga. A este momento flector, hay que añadir los que en toda viga continua se originan por la acción de los momentos de empotramiento extremos.

El momento flector debido al pretensado, será así  $M$  en cualquier sección y  $M_1, M_2$ , etc. en las sucesivas secciones de - apoyo. En éstas, las excentricidades valdrán:  $e_1 = \frac{M_1}{F}$ ,  $e_2 = \frac{M_2}{F}$  etc., y entre ellas la linea de presiones tendrá la misma forma intrínseca que la trayectoria del cable, o sea, la misma curvatura en cualquier sección vertical.

La linea efectiva de presiones así determinada, se denomina "curva estática".

Dos trayectorias de armadura que tengan los mismos puntos extremos (y, con mayor generalidad, los mismos puntos de anclaje intermedios, en el caso de que existan anclajes adicionales sobre los apoyos interiores) y la misma forma intrínseca en los distintos tramos, o sea, que se diferencien solamente por su ordenada en las secciones verticales correspondientes a aquellos apoyos en los que no haya anclajes, darán lugar a la misma linea de presiones ya que producirán las mismas cargas no compensadas y los mismos momentos de anclaje.

Entre todas las posibles trayectorias que puede adoptar la armadura, existe una para la cual el esfuerzo de pretensado no produce reacciones hiperestáticas; es aquella que coincide con la linea estática de presiones y se designa con el nombre de "trayec-



toria auto-estática".

Análogas conclusiones pueden deducirse fácilmente, mediante un estudio analítico del problema. Si "z" e "y" son las ordenadas del eje neutro y del cable respecto a la cuerda de dicho eje neutro, en un tramo dado, (ver Fig. 4), el esfuerzo de pretensado producirá en dicho tramo un momento  $F(y + z)$ , igual al creado por la carga vertical  $F(y'' + z'')$ , siendo  $y''$ ,  $z''$  las segundas derivadas de "y" y "z" respecto a " $\varphi$ ". Sin embargo, teniendo en cuenta la pequeña curvatura de los trazados que se consideran,  $r = \frac{1}{y''}$  y  $r' = \frac{1}{z''}$  y, por lo tanto, los momentos serán los producidos por la suma de las cargas no compensadas  $\frac{F}{r} + \frac{F}{r'}$ , más, desde luego, los momentos en los anclajes.

No obstante, resulta, en general, más sencillo en la práctica, para los casos numéricos, calcular los momentos sobre los apoyos sin tener en cuenta las cargas no compensadas, admitiendo la hipótesis de que el momento  $F(y + z)$  es el que se produciría en el tramo considerado, si fuese independiente.

Hay casos, sin embargo, en los que parece recomendable el método de las cargas no compensadas. Por ejemplo cuando el trazado del cable es parabólico. Entonces, el radio de curvatura  $r$ , es virtualmente, constante y por lo tanto, la carga no compensada  $\frac{F}{r}$ , es uniforme. Analogamente, si el eje neutro de la pieza es parabólico, se encontrará sometido a una carga hacia arriba, uniforme,  $\frac{F}{r}$ , debida a la compresión que experimenta a lo largo de su cuerda. Cualquier discontinuidad, bien sea en el trazado del cable o bien en el eje neutro de la pieza, (caso, por ejemplo, de las vigas con cartabones) resulta



equivalente a una carga concentrada. Los momentos producidos en los apoyos, podrán siempre calcularse, con toda facilidad mediante las fórmulas dadas en este trabajo, bien para vigas uniformemente cargadas, o bien para piezas sometidas a la acción de cargas concentradas.

Un caso muy frecuente en la práctica es el de vigas continuas, simétricas con relación a un tramo o apoyo central, y con los cables de pretensado dispuestos también simétricamente. (Fig. 9). En estas condiciones, la correspondiente armadura auto-estática posee ciertas propiedades que facilitan su determinación. Si el cable es uniforme, sin anclajes intermedios, estas propiedades son las que se resumen a continuación.

Se supone primeramente que el cable es rectilíneo. Como la línea estática de presiones tiene la misma curvatura que la armadura, será también recta dentro de cada tramo y a lo largo de la viga describirá una línea poligonal cuyos vértices coincidirán con las verticales de los distintos apoyos. Dicha poligonal, quedará completamente determinada en cuanto se conozcan las excentricidades en los dos apoyos extremos, que dada la simetría de la viga, serán iguales. Sea  $e_0$  su valor.

Cada uno de los lados de esta poligonal, viene, por consiguiente, definido como una función del parámetro  $e_0$ . Las excentricidades en los extremos del tramo que se considere - ( $e_i$  y  $e_{i+1}$ ) serán funciones lineales de  $e_0$ , ya que poseen un término constante (el correspondiente a la carga no neutrali-



zada  $\frac{F}{r}$ ) y otro proporcional a  $e_0$  (el debido a los momentos de empotramiento).

Pero, según se sabe, toda línea recta cuya ecuación depende de una función paramétrica de primer grado, pasa siempre por un punto fijo y, en consecuencia, si varia la excentricidad de los anclajes extremos, cada uno de los lados de la poligonal que constituye la línea de presiones, girará alrededor de este punto fijo.

Es evidente que si el cable no es recto pero su trayectoria está constituida por una serie de curvas de forma constante en cada tramo (por ejemplo, paráolas de tangente dada) las cuerdas de dichas curvas seguirán gozando de la propiedad que se acaba de indicar. Como la forma de estas curvas (o, si se prefiere, su ecuación en función de su cuerda) es conocida, el punto de la curva situado en la misma sección vertical que el punto fijo de su cuerda, será también fijo.

En consecuencia, cualquiera que sea la forma de la trayectoria del cable en los diferentes tramos, y con tal de que la misma sea previamente determinada, la poligonal de lados curvos o rectos que constituye la línea de presiones de la viga, pasará, en cada tramo, por un punto que se mantiene fijo aún cuando varíe la excentricidad de la armadura sobre los apoyos extremos. Este punto fijo recibe el nombre de "punto nodal" del tramo.

La abscisa de este punto puede calcularse fácilmente. El método a aplicar, ha sido expuesto por el autor en su comunicación al Congreso celebrado en Gante, en Septiembre de 1951.



La abscisa viene dada por las mismas ecuaciones que sirven para determinar la posición del foco, pero los puntos nodales no son los mismos que los focos por variar las condiciones límites de dichas ecuaciones, y por lo tanto las constantes.

Una vez determinadas las abscisas, basta trazar una cualquiera de las curvas estáticas, por ejemplo, la correspondiente a la excentricidad nula en los extremos y la intersección de ésta con las verticales levantadas por las diferentes abscisas, dará los puntos nodales de cada tramo. Elegida la forma de la trayectoria del cable en cada tramo, las diferentes armaduras auto-estáticas posibles, se obtendrán haciendo girar las curvas representativas del trazado escogido, alrededor del correspondiente punto nodal. Todas estas trayectorias, han de ir forzosamente a coincidir en los anclajes extremos, y los puntos intermedios pueden desplazarse verticalmente, con arreglo al método de las transformaciones lineales, para evitar, en lo posible discontinuidades en el trazado de la armadura.

Esta doble libertad de rotación y desplazamiento vertical (que, en realidad, equivale a otra rotación) facilita enormemente la solución del problema.

(Continuará en el próximo número)

\* \* \*



~ Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento ~

457 - 3 -3 EL HIPERESTATISMO EN EL HORMIGON PRETENSADO

(Continuity in prestressed concrete)

"SYMPORIUM Nº 4 DE LA CEMENT AND CONCRETE ASSOCIATION" Sep. 1951

AUTOR: Prof. G. Magnel.

S I N O P S I S

El autor expone las razones que justifican el empleo del hormigón pretensado en la construcción de estructuras continuas estáticamente indeterminadas, e indica las principales dificultades tanto teóricas como prácticas que el problema presente.

Se mencionan algunos ejemplos de estructuras hiperestáticas pretensadas construidas en Bélgica: un edificio de dos plantas, en Bruselas; otro, de cuatro plantas, en Leopoldville; y el puente de Sclayn, sobre el río Mosa, que, hasta el presente, constituye la más importante aplicación dada a este tipo de estructuras.

Finalmente, se incluye un apéndice en el que se resumen los resultados obtenidos en determinadas experiencias realizadas para medir las pérdidas de tensión ocasionadas por el rodamiento de la armadura con el hormigón.

Al principio, como es natural, la nueva técnica del pretensado se aplicó exclusivamente, a la construcción de vigas simplemente apoyadas, que son las que menos dificultades presentan. Sin embargo, pronto se sintió la necesidad de ampliar este primer y reducido campo de aplicación, extendiéndolo a las -



estructuras hiperestáticas las cuales resultan imprescindibles en muchos casos, como por ejemplo:

- a) En las estructuras de edificios de varias plantas.
- b) En los puentes de dos o más tramos en los que por necesidades de gálibo, el canto del tablero en el punto medio de la luz, haya de ser muy pequeño. Al hacer la estructura hiperestática los momentos máximos se trasladan del centro del tramo a los apoyos, lo que permite reducir el canto en clave.
- c) En la construcción de edificios que, aún siendo de una sola planta, se encuentran ubicados en zonas sísmicas.

Las estructuras hiperestáticas, además, suponen una economía de anclajes y reducen el precio de las vigas pretensadas de pequeña luz aun en el caso de que se utilicen dispositivos especiales para el anclaje de las armaduras.

Dificultad del problema.- Al proyectar una estructura pretensada estáticamente indeterminada, se tropieza con un gran número de dificultades entre las cuales por su importancia, destacan las siguientes:

A primera vista, parece que no existe un procedimiento directo de cálculo, para estas estructuras. Diversos técnicos han propuesto métodos propios, pero todos ellos son equivalentes (en realidad se reducen a la aplicación de la ley de (Hooke) por lo cual, en cada caso, deberá escogerse aquel que mejor se conozca y más veces haya sido practicado.

Un pequeño desplazamiento accidental de la armadura en una viga continua (y lo mismo ocurre en todas las estructu -



ras estáticamente indeterminadas) produce una importante variación en los momentos originados por el pretensado, los cuales reciben el nombre de "momentos secundarios". Sean, por ejemplo, dos vigas continuas, de tres y dos tramos, respectivamente, de 14,93 m. de luz cada tramo, cuyos momentos secundarios en los apoyos interiores se indican en el cuadro I que se incluye a continuación. Como puede verse, en el primer caso (viga de tres tramos) el momento secundario varia considerablemente, incluso de signo, para una diferencia de 2,5 cm. en la excentricidad de la armadura. Debe hacerse notar que, sin embargo, y como quiera que el valor absoluto del momento secundario es, en este caso, casi despreciable, esta modificación no tiene gran importancia.

En el segundo ejemplo (viga de dos tramos) una variación inferior a 2,5 cm. en la posición de la armadura, produce una diferencia de 16% en el valor del momento secundario, lo que representa una variación de 10 Kg/cm<sup>2</sup> en la tensión de la viga, o sea, aproximadamente, un 7% de la tensión admisible.

De todo ello se deduce que es preciso siempre colocar la armadura exactamente en la forma indicada en el proyecto. Por su parte, el técnico, al calcular una estructura debe determinar, con todo detalle, la posición y trazado de los cables.

Al intentar construir una viga hiperestática, surge también otra serie de dificultades en el orden práctico, de las cuales, quizás las más importantes, sean las siguientes:

La primera es la necesidad de eliminar el rozamiento de los cables en sus alojamientos. En las vigas simplemente apoyadas, con armaduras curvas, también se produce una pérdida en -



prefabricada, de hormigón pretensado, simplemente apoyada sobre los citados cantilever. Otra solución es construir la parte central del cuarto tramo en hormigón armado ordinario enlazándola, mediante clavijas o pasadores, a los extremos de los repetidos cantilever.

Un procedimiento análogo al últimamente citado, se está utilizando en Bélgica, para construir una placa-hongo. El recuadro central, que apoya sobre el soporte, se hace de hormigón pretensado en dos direcciones y el resto de la placa se construirá de hormigón armado ordinario.

No debe, sin embargo, darse excesiva importancia a las dificultades antes mencionadas. No hay que olvidar que, actualmente, los cálculos que se realizan con el fin de valorar las tensiones, son poco exactos ya que se basan en la teoría elástica del hormigón. Este material, tiene la facultad de poderse adaptar por si mismo a diferentes estados de solicitud, especialmente en el caso de estructuras hiperestáticas. Además, en general, se adoptan para el hormigón coeficientes de seguridad muy elevados y para las estructuras pretensadas, no sólo se cuida más la calidad del material, sino que su curado se efectúa en condiciones más favorables. Finalmente, en el momento del pretensado, el hormigón se encuentra ya fraguado, al menos parcialmente.

En opinión del autor, lo más importante es conocer exactamente el valor del esfuerzo de pretensado inicialmente introducido en la armadura y esto puede hacerse (y se viene haciendo) con una aproximación del 5%.



Por consiguiente, no parece oportuno complicar los cálculos para conseguir una mayor aproximación. Todos los esfuerzos deben encaminarse a obtener estructuras perfectamente concebidas y ver la forma de realizar las operaciones de puesta en carga de la armadura de la mejor manera posible.

Algunos ejemplos de estructuras hiperestáticas, en Bélgica.- Las fig. 10 a 14 representan diversos aspectos de una estructura de edificio construida en hormigón pretensado. Las Figs. 10, 11 y 12, se refieren al caso de un pórtico sencillo, de 20 m. de luz. En ellas se indican dos posibles soluciones.

La viga del dintel, puede hacerse, bien monolítica, con la armadura alojada en su interior (Fig. 11), o bien mediante la unión de bloques prefabricados, con los cables colocados exteriormente a los dos lados del alma (Fig. 12). En ambos casos, las cabezas de los montantes sirven de bloques extremos para la viga. Los soportes se construyen de hormigón pretensado, o de hormigón armado normal.

Las Figs. 13 y 14, representan, respectivamente, una estructura de un sólo tramo y varias plantas, y otra de varios tramos y una sola planta.

La Fig. 15, reproduce la sección transversal de un edificio de dos plantas construido en hormigón pretensado, en plan experimental. La luz de la estructura es de unos 16 m. Las vigas se construyeron con bloques prefabricados cuya sección se indica también en la citada Fig. 15. Los cables van colocados a los dos lados del alma de la vi-



ga. En las Figs. 16 y 17, puede verse el edificio durante distintas fases de su construcción.

Otro edificio de cuatro pisos, para oficinas, se ha construido en Leopoldville (Congo Belga) (Fig. 18). La luz es de 14 m. y la altura entre plantas, 4,5 m. Las Figs. 19 a 22 reproducen diversos aspectos de la construcción del edificio.

Finalmente, como ejemplo más importante de estructura hiperestática pretensada debe mencionarse el puente carretero de Sclayn, en Bélgica. Consta de dos tramos de 62,7 m. de luz. La calzada mide 7 m. de ancho y lleva dos andenes laterales de 1,50 m. de ancho cada uno. La estructura está constituida por una viga cajón de 1,94 m. de canto total en el centro de cada tramo y 4,83 m. sobre el apoyo central. Las Figs. 23 y 24, representan el alzado y la sección transversal del puente, cuyo conjunto, ya terminado, puede verse en la Fig. 27. En la Fig. 25 se aprecian algunos detalles de las armaduras y en la Fig. 26, los gatos de pretensado. Los cables son rectos en cada tramo, estando sobre el apoyo central 0,86 cm. más altos que sobre los apoyos extremos.

La viga, está dividida en tres compartimentos dentro de los cuales van colocados los cables. En total se emplearon 36 cables, de 48 alambres cada uno. Cada alambre tiene  $1,78 \text{ cm}^2$  de sección. Se tesaron simultáneamente por ambos extremos a  $8.500 \text{ Kg/cm}^2$ , lo que representa un esfuerzo inicial, total de pretensado de 5.650 T., las cuales, con el tiempo, quedaron reducidas a unas 4.800 T., aproximadamente. La tensión de trabajo admisible del hormigón, era de  $154,67 \text{ Kg/cm}^2$ . El momento reflector secundario producido por el protensado, era, inicialmen



te, de -9.272.300 m. Kg., mientras que el de peso muerto y sobrecarga móvil, sobre el apoyo central, se elevaba a 17.815.800 m.Kg.

Estas cifras demuestran que, en este caso, el momento flector secundario no es, ni mucho menos, despreciable. Es favorable sobre los apoyos pero perjudicial en el centro del tramo donde se suma al de -3.940.000 m.Kg. producido por el peso propio y la sobrecarga.

Si los cables se colocan en otra posición distinta, - el valor del momento secundario varia considerablemente. El deber del proyectista consiste en encontrar la disposición que resulte más económica.

Los ingenieros belgas, aprovechando la oportunidad que les ofrece este gran puente, han realizado diversos ensayos para determinar las pérdidas de tensión que se producen a lo largo del tiempo. Para ello, se colocaron en la viga cajón dos cables suplementarios, de 8 alambres cada uno, que se dejaron al descubierto para poder medir, periódicamente, las pérdidas de tensión que se iban produciendo.

Hasta ahora, (transcurridos ya más de dos años desde el testado inicial) las anotaciones registradas indican que las caídas de tensión son bastante menores que las que, generalmente, se admiten por los proyectistas.

Apéndice. - Resultados de los ensayos realizados para determinar las pérdidas de tensión por rozamiento.

En la Fig. 28 se reproduce un esquema del dispositivo de ensayo utilizado. Un alambre (de 5 ó 7 mm. de diámetro) se



fija en uno de sus extremos A y se une a un gato D, por su otro extremo B. Por medio de un mecanismo especial, se separa el punto medio C, del alambre, de su posición inicial, una magnitud determinada  $e$ . La longitud del alambre antes de estirarlo es  $l = 13,4$  m. En los dos puntos indicados en la Fig. 28, se colocan sendos elongámetros unidos al alambre. Para el estirado del alambre se utilizan placas de fundición (c) cuyo detalle se indica en la Fig. 29.

Se han realizado ensayos para diferentes valores de  $e$ , estirando el alambre mediante los gatos y midiendo las diferencias en las deformaciones indicadas por los dos elongámetros, para los distintos valores de carga aplicados al gato.

En el cuadro II se resumen los resultados obtenidos en las experiencias efectuadas sobre alambres de 5 mm. y en el III los correspondientes a los alambres de 7 mm.

Los diagramas de las Figs. 30 y 31 dan las pérdidas de tensión en función del ángulo  $\alpha$  para distintos valores de carga. Se ha podido comprobar que la velocidad de carga, es decir, el tiempo que tarda el alambre en alcanzar su máxima tensión, no tiene, virtualmente, influencia alguna sobre la magnitud de las pérdidas ocasionadas por rozamiento.

\* \* \*



C U A D R O II

Pérdidas de tensión, por rozamiento, en alambres de 5 mm.

Desviación cm.	$\alpha$	Pérdidas de tensión ( en kg. por $\text{mm}^2$ ) por rozamiento, bajo cargas							
		25 kg. por $\text{mm}^2$	50 kg. por $\text{mm}^2$	75 kg. por $\text{mm}^2$	100 kg. por $\text{mm}^2$	elongá- metros	gatos	elongá- metros	gatos
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	2° 31'	0,5	---	0,8	---	0,8	---	1,2	---
48	4° 51'	0,7	---	1,4	---	1,4	---	2,0	---
72	6° 10'	1,0	---	1,6	---	2,2	---	3,4	---
100	8° 30'	1,2	---	2,0	---	2,8	---	4,0	---
124	10° 30'	1,4	1,0	2,4	---	3,4	2,5	5,0	3,1
148	12° 30'	1,7	1,5	3,0	4,1	4,1	4,6	5,6	5,6
176	14° 40'	2,0	2,0	4,1	4,1	4,0	4,6	5,9	5,6
200	16° 40'	2,3	2,5	4,2	4,1	5,6	6,6	8,0	8,1
224	18° 30'	2,5	3,0	4,0	4,6	6,2	6,6	9,1	8,1



C U A D R O III

Pérdidas de tensión por rozamiento, en alambres de 7 mm.

Desviación	$\alpha$	Pérdidas de tensión ( en kg. por $\text{mm}^2$ ), por rozamiento, bajo cargas								
		25 kg. por $\text{mm}^2$	50 kg. por $\text{mm}^2$	75 kg. por $\text{mm}^2$	100 kg. por $\text{mm}^2$	elongá- metros	gatos	elongá- metros	gatos	elongá- metros
e cm.	elongá- metros	gatos	elongá- metros	gatos	elongá- metros	gatos	elongá- metros	gatos	elongá- metros	gatos
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	2° 3'	0,8	---	1,2	---	1,2	0,9	1,5	1,6	
48	4° 5'	0,6	0,6	0,8	1,0	1,2	1,3	2,0	2,1	
72	6° 10'	0,3	0,9	0,5	1,0	1,8	1,9	2,5	2,6	
100	8° 30'	0,3	1,7	1,1	2,1	1,8	2,4	2,7	3,6	
124	10° 30'	1,5	1,3	2,2	2,1	3,2	3,6	4,2	4,4	
148	12° 30'	1,2	2,1	3,0	3,2	4,2	4,9	5,0	6,7	
172	14° 40'	1,3	2,1	3,6	3,9	4,3	5,2	6,2	7,1	
200	16° 40'	2,8	2,1	4,2	3,9	5,2	6,2	7,8	8,2	
224	18° 30'	2,6	2,1	5,1	4,9	7,6	7,0	9,0	9,1	



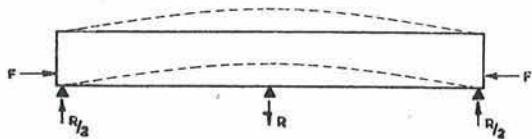


Fig. 1.

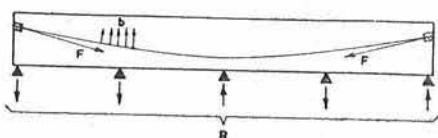


Fig. 2.

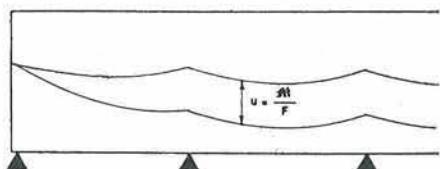


Fig. 3.

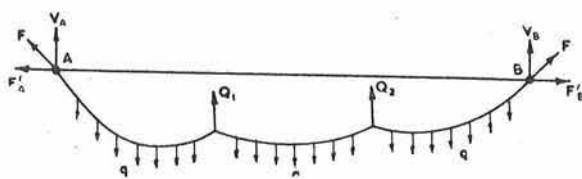


Fig. 5.

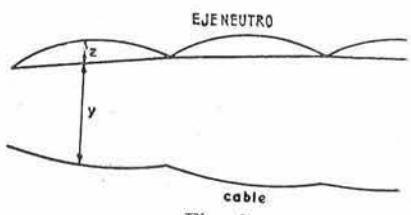


Fig. 4.

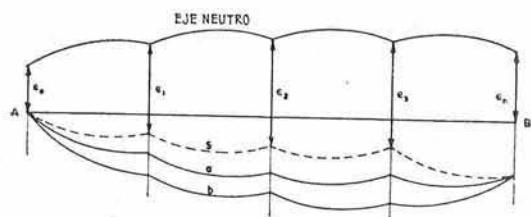


Fig. 6.

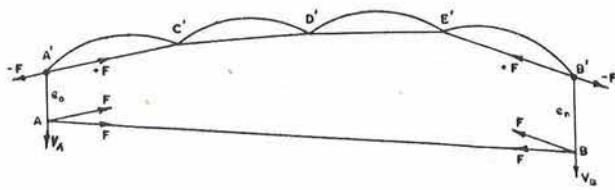


Fig. 7.

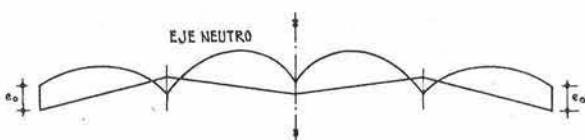


Fig. 9.

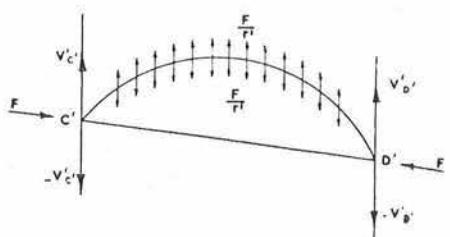


Fig. 8.

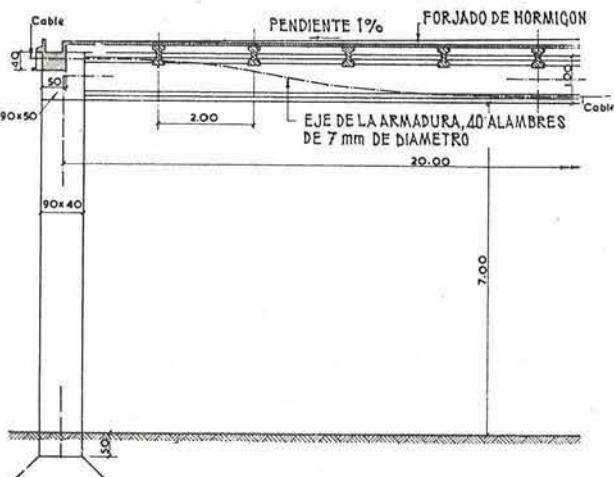


Fig. 10

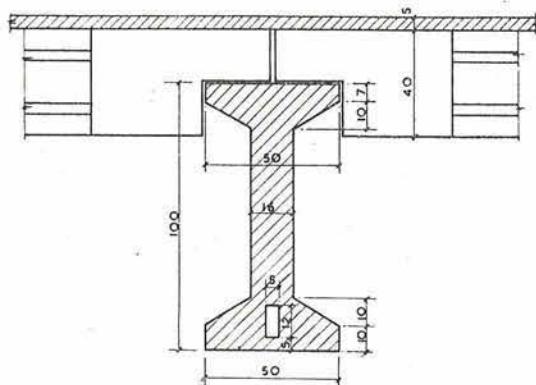


Fig. 11.

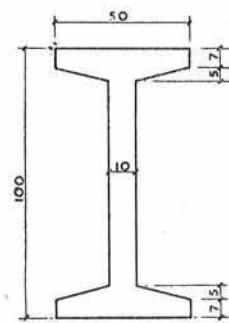


Fig. 12.

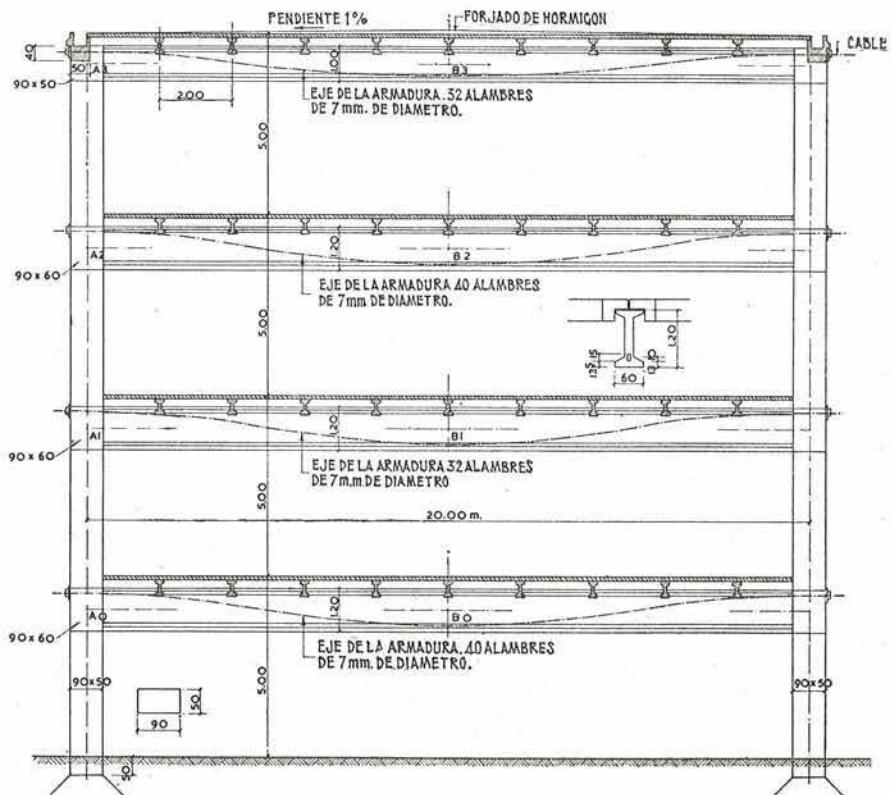


Fig. 13.

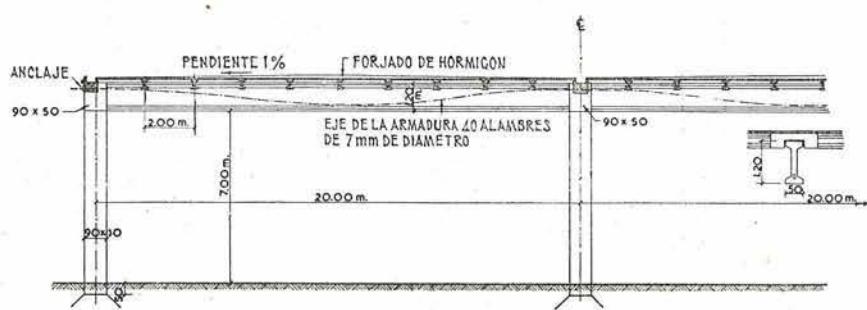


Fig. 14

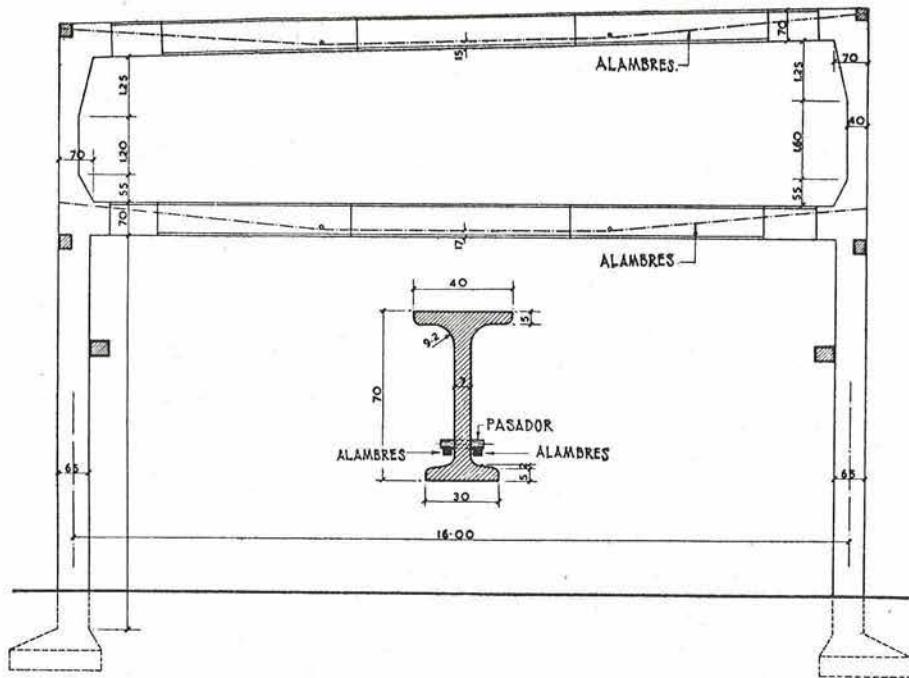


Fig. 15.

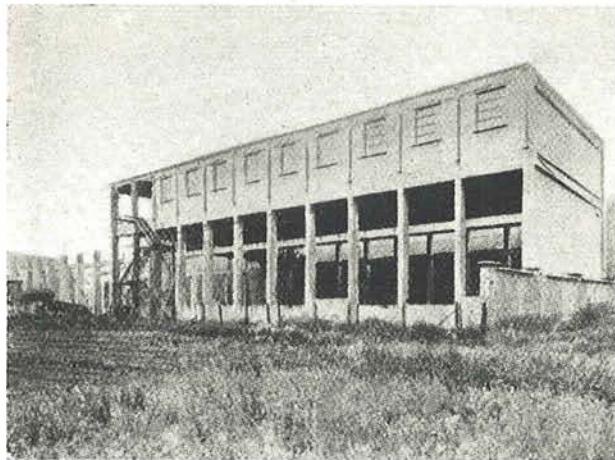


Fig. 16.

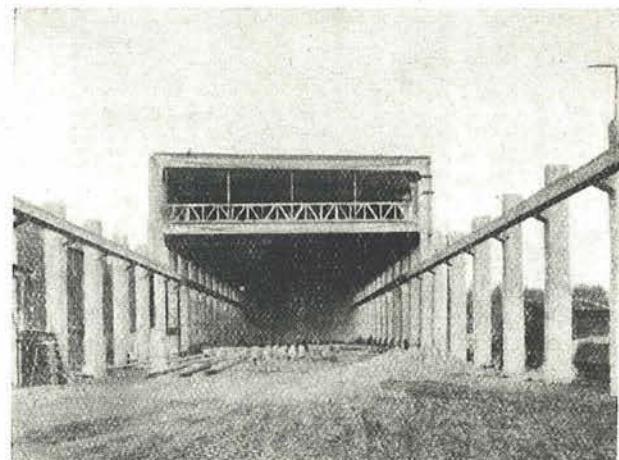


Fig. 17.

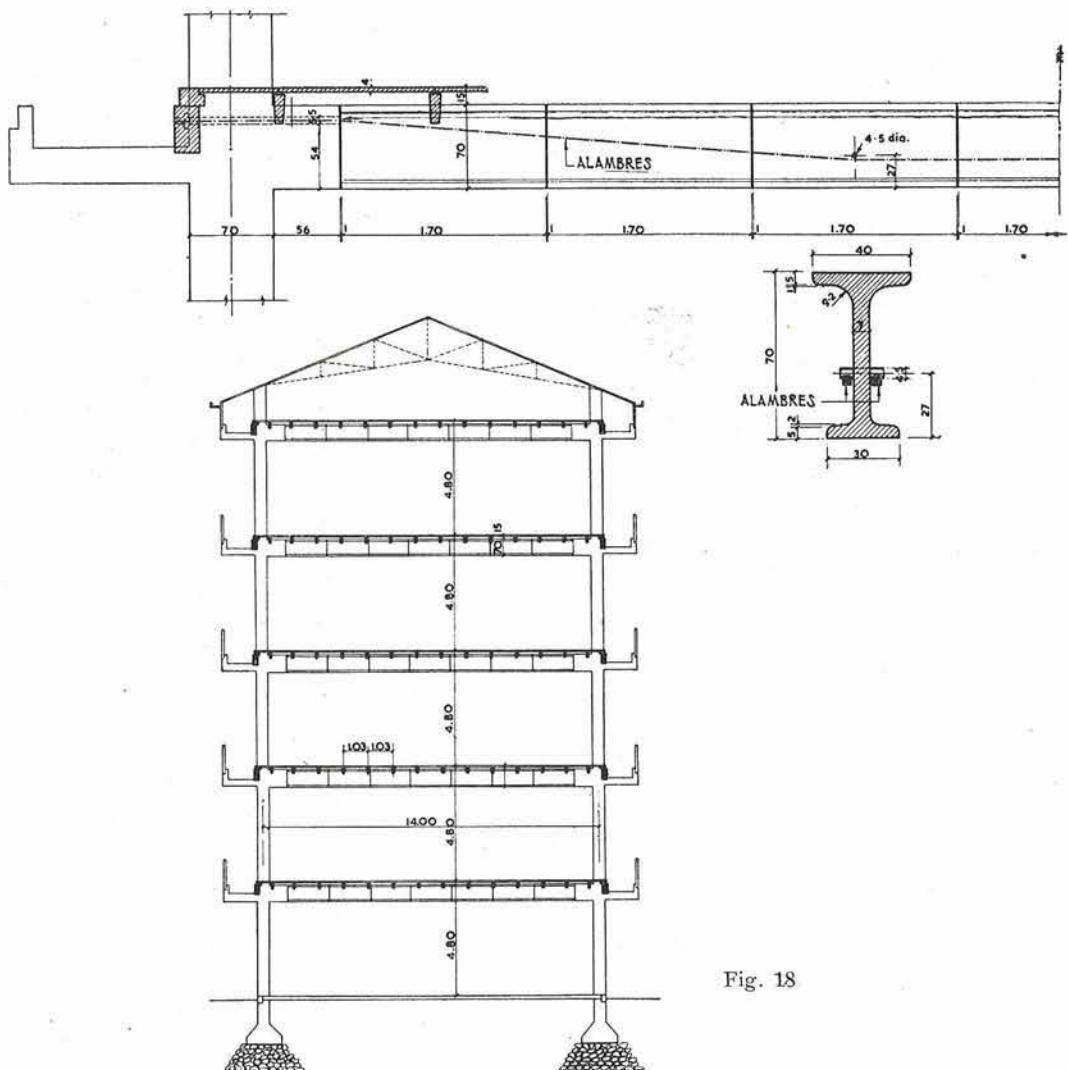


Fig. 18

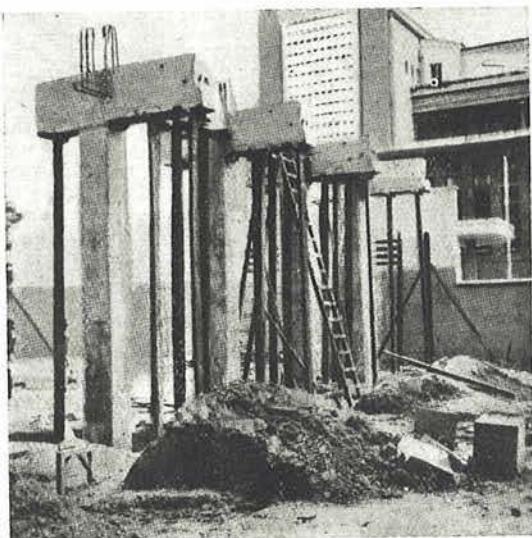


Fig. 19.

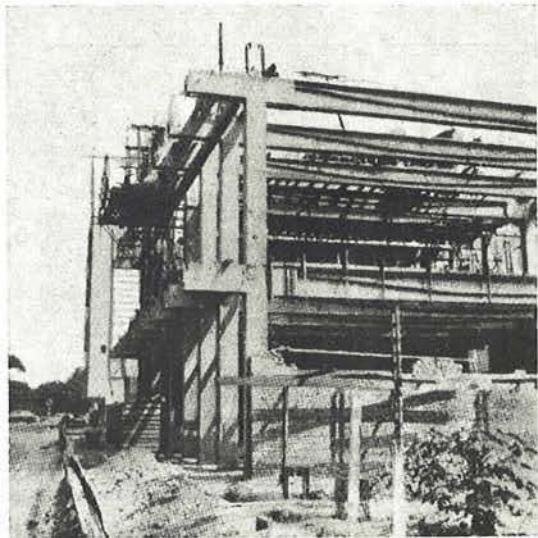


Fig. 20.

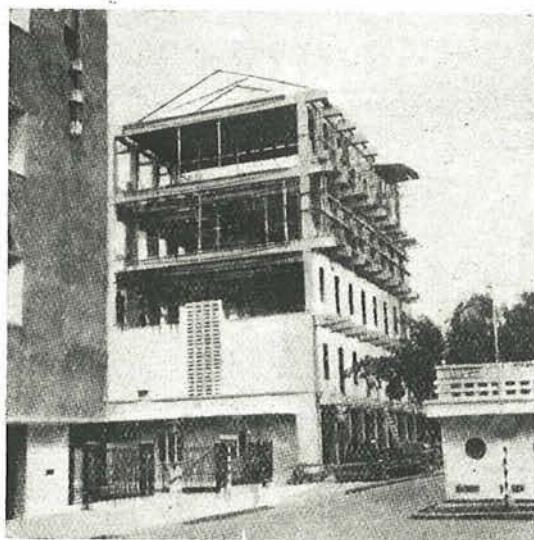


Fig. 21.



Fig. 22.

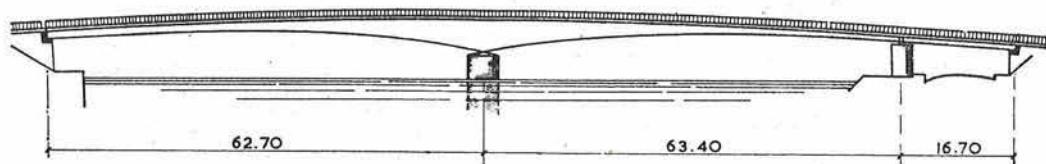


Fig. 23

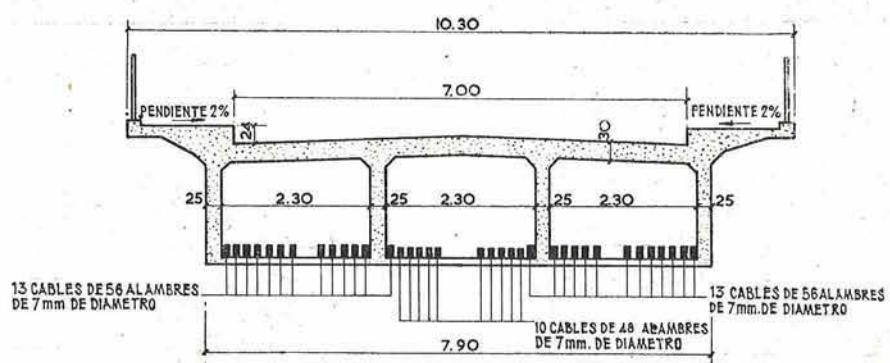


Fig. 24.

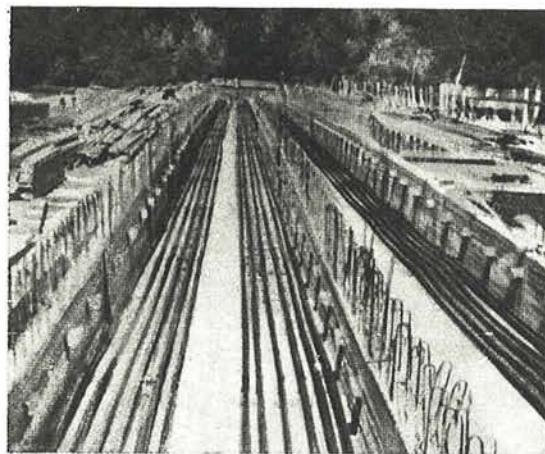


Fig. 25.

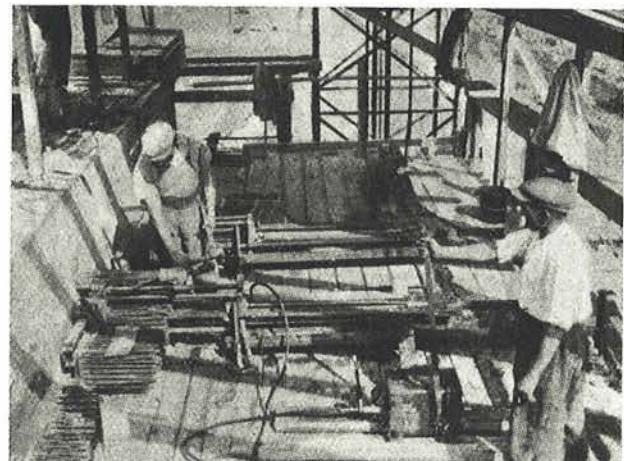


Fig. 26.



Fig. 27.

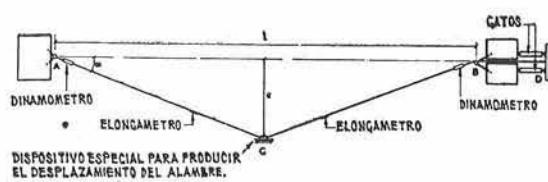
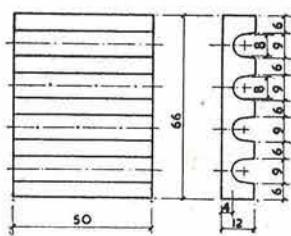
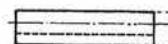
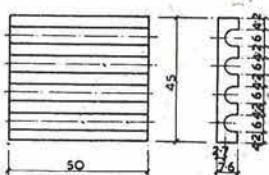


Fig. 28.



PARA ALAMBRES DE 7 mm.



PARA ALAMBRES DE 5 mm.

Fig. 29.

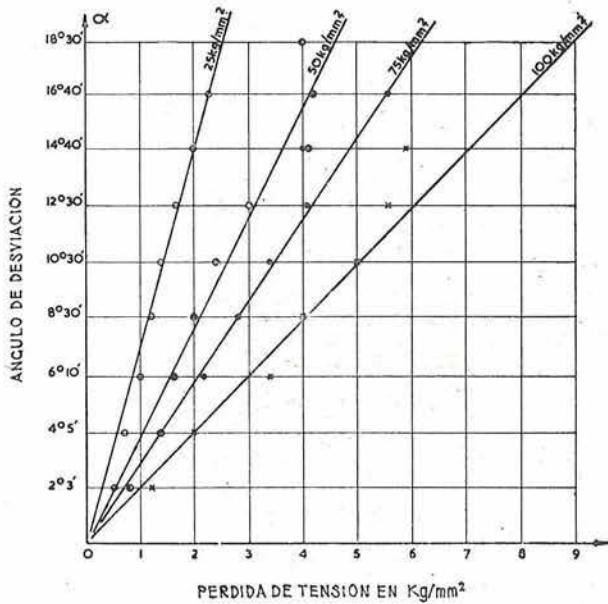


Fig. 30.

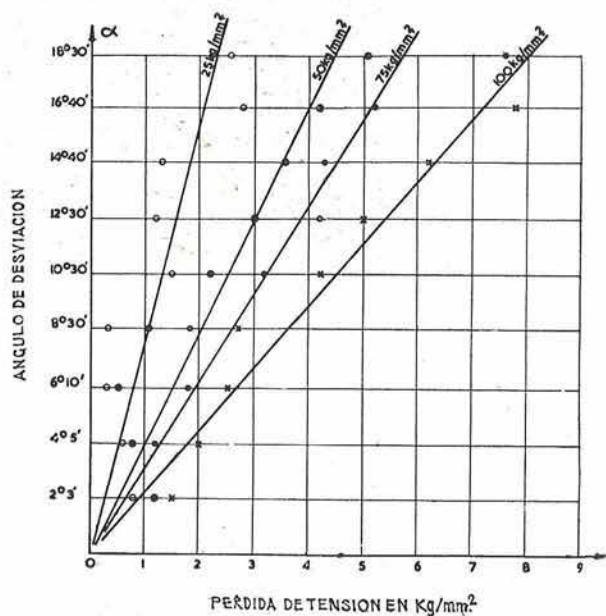


Fig. 31.



