hormigón y ACERO

nº 147

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO.

COSTILLARES (CHAMARTIN). MADRID-33.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de **"Miembro Protector"**, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de **"Miembros Protectores"** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético.

AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA.— Velázquez, 23. Madrid-1.
ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).— Orense, 10. Madrid-20.
CAMARA, S.A.— Av. de Santander, s/n. Valladolid.
CAMINOS, EDIFICIOS y OBRAS, S.A.— J. Lázaro Galdiano, 4. Madrid-16.
CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.— Grijalba, 9. Madrid-6.
CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE O.P. CENTRO BIBLIOGRAFICO.— Alfonso XII, 3. Madrid-7.
CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A.— Aribau, 185. Barcelona-21.
COMEBA, S.L.— Apartado 408. Castellón de la Plana.
DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Avda. de América, 24. Madrid-2.
ELABORADOS METALICOS, S.A.— Apartado 553, La Coruña.
ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.— Biblioteca. Juan de Mena, 8, Madrid-14.
FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Balmes, 36. Barcelona-7.
FORJADOS DOMO.— Hermosilla, 64. Madrid-1.
FREYSSINET, S.A.— General Perón, 24. Madrid-20.
HEREDIA Y MORENO, S.A.— Princesa, 3. Madrid-3.
HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.— Archs, 10. Barcelona-2.
HORMIGONES GERONA, S.A.— Lorenzana, 45. Gerona.
IBERINSA.— Príncipe de Vergara, 43. Madrid-1.
INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.— Portal de Gamarra, 46. Vitoria.
INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.— Ministerio de O.P. y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. Madrid-3.
INTECSA.— Orense, 70. Madrid-20.
INTEMAC.— Monte Esquinza, 30. Madrid-4.
JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA.— Príncipe de Vergara, 103. Madrid-6.
LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.— Alfonso XII, 3. Madrid-7.
NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.— Fábrica de Forjas de Buelna. LOS CORRALES DE BUELNA (Santander).
PACADAR, S.A.— Hermosilla, 57. Madrid-1.
PRELOAD SISTEMAS, S.A.— Paseo de la Castellana, 140. Madrid-16
PRENSOLAND, S.A.— Calle Industria, s/n. SAN MARTIN DE CENTELLAS (Barcelona).
PRETENSADOS DEL LOURO, S.L.— Atios. PORRIÑO (Pontevedra).
PROCEDIMIENTOS BARREDO.— Av. de América, 40. Madrid-2.
PROMONAL.— Poeta Artola, 12. Valencia-21.
S.A.E. BBR.— Polígono Industrial Barcelonés. Calle Carrero Blanco, s/n. ABRERA (Barcelona).
S.A. ECHEVARRIA.— Apartado 46. Bilbao-8.
TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).— Velázquez, 105. Madrid-6.
TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A.— Monturiol, 5. SANTA MARIA DE BARBARA (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las empresas citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

JORNADAS sobre TECNICAS DEL HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO EN CENTRALES NUCLEARES

EDITADO POR:

aep
asociación técnica
española del pretensado

Precio del ejemplar: 3.000 ptas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO

hormigón y acero

n. 147

2º trimestre, 1983

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales)	2.000,– ptas.	40,– dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas)	5.000,– ptas.	100,– dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	10.000,– ptas.	200,– dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - MADRID - 33

Depósito Legal: M-853-1958
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID
ISSN: 0439-5689

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

ALVISA

PREFABRICADOS ALBAJAR

PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE

HUESCA:

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA
Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON
Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

MADRID

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10
Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4- 8 - TORREJON DE ARDOZ
Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

ZARAGOZA

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Comité de Redacción
de la Revista
Hormigón y Acero

ARENAS, Juan José
AROCA, Ricardo
BARREDO, Carlos
CUVILLO, Ramón del
CHUECA, Rafael
ELICES, Manuel
FERNANDEZ TROYANO, Leonardo
FERNANDEZ VILLALTA, Manuel
FISAC, Miguel
JODAR, Juan
JULIA, Manuel
LLOMBART, José Antonio
MANTEROLA, Francisco Javier
MONEO, Mariano
MORENO TORRES, Juan
PIÑEIRO, Rafael
ROMERO, Rafael
SANCHEZ CASTRO, Carlos
SANCHEZ GALVEZ, Vicente

hormigón y acero

n. 147

índice

Pág.

457-0-80 **Planteamiento directo del método de los elementos de contorno a partir del teorema de reciprocidad** 9
Exposé direct de la méthode d'éléments de contour à partir du théorème de réciprocité.
Direct presentation of the boundary element method based on the reciprocal theorem.
Manuel Martínez Lafuente.

457-0-81 **Dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado. 1ª Parte. Método de las curvaturas de referencia** .. 49
Dimensionnement des supports elancés en béton précontraint. 1er. Partie. Méthode des courbures de référence.
Design of slender supports of prestressed concrete. Part 1. Method of marking curvature.
Hugo Corres Peiretti y F. Morán Cabré.

457-8-91 **Tolerancias dimensionales: Normativa internacional** 69
Tolérances dimensionnelles: Normative internationale.
Dimensional tolerances: International standards.
Julián Salas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Pág.

591-1-36 **Influencia de las imperfecciones en la carga crítica de estructuras de entramados planos** 85
L'influence des imperfections sur la charge critique dans les ossatures plaines.
The influence of imperfections on the ultimate load for plane framework structures.
Germán Gutiérrez y Avelino Samartín.

591-1-38 **Reparto de cargas horizontales entre los elementos de rigidización de un edificio** . 101
Répartition des charges horizontales parmi des éléments de raidissement d'un bâtiment.
Horizontal load distribution among stiffening elements of a building.
A. Recuero y J. Pedro Gutiérrez.

591-9-35 **Un método para el cálculo de zapatas de muros de contención** 129
Une méthode pour le calcul des pieds des murs de soutènement.
A method for the calculation of retaining wall footings.
Francisco Pérez García y M. Montes Tubío.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

RELACION DE EMPRESAS QUE EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO, FIGURAN INSCRITAS EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS"

ESPAÑA

ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION (ATECSA).– Madrid.
AGROMAN, S.A.– Madrid.
ALBISA, S.A.– Algeciras (Cádiz).
ARIDOS LIGEROS, S.A.– Madrid.
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.– Barcelona.
AUXINI, S.A.– Madrid.
AZMA, S.A.– Madrid.
BIGUETES, S.L.– Elche (Alicante).
BUTSEMS, S.A.– Madrid.
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.– Barcelona.
CASTRO HERMANOS, S.L.– Mislata (Valencia).
CASTRO MATELO, V., S.A.– Sigueiro (La Coruña).
CATEDRA DE CONSTRUCCION II DE LA ESCUELA TECNICA DE INGENIEROS AGRONOMOS.– Córdoba.
CEMENTOS MOLINS, S.A.– Sant Vicenc dels Horts (Barcelona).
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.– Madrid.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS.– Madrid.
COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.– Madrid.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES.– La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.– Gerona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. SECCION BIBLIOTECA.– Zaragoza.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. DEPARTAMENTO LABORATORIOS. Sta. Cruz de Tenerife.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CATALUÑA.– Barcelona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. BIBLIOTECA.– Madrid.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.– Bilbao.
COLEGIO OFICIAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.– Málaga.
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR. BIBLIOTECA.– Sevilla.
CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.– Madrid.
CONTROLEX.– Alicante.
COTESA, COLOCACIONES TECNICAS, S.A.– Barcelona.
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.– Barcelona.
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.– Madrid.
CUMBRE MODULAR, S.A.– Barcelona.
DEPARTAMENTO DE TEORIA DE ESTRUCTURAS. ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES. UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA.– Zaragoza.
DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO. MINISTERIO DEL EJERCITO.– Madrid.
DITECO, S.L.– Valencia.
DIVISION DE PLANTEAMIENTO Y PROYECTOS. CENTRO DE ESTUDIO Y APOYO TECNICO.– Valladolid.
ELABORADOS DE HORMIGON, S.A.– Burgos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS (EEPSA).– Manresa (Barcelona).
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA (AUXINI).– Madrid.
ENAGA, S.A.– Pozuelo de Alarcón (Madrid).
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.– Córdoba.
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.– Zumárraga (Guipúzcoa).
ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A.– Madrid.
E.T.S. DE ARQUITECTURA.– Barcelona;
E.T.S. DE ARQUITECTURA.– Sevilla.
EUROESTUDIOS, S.A.– Madrid.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.– Madrid.
FORJADOS DOL.– Esquivias (Toledo).
FORJAS Y ALAMBRES DEL CADAGUA.– Erandio (Bilbao).
GIJON E HIJOS, S.A.– Motril (Granada).
GOMHERSA.– Talavera de la Reina (Toledo).
HIDAQUE, S.A.– Granada.
HISPANO FRANCESA DE VEHICULOS INDUSTRIALES, S.A. BIBLIOTECA.– Madrid.
HORMIGONES GERONA, S.A.– Gerona.
HORMYCER, S.L.– Madrid.
HUARTE Y CIA, S.A.– Madrid.
IBERDUERO, S.A.– Bilbao.
IBERDUERO, S.A. (CENTRO DE DOCUMENTACION).– Bilbao.
IBERTECNICA, S.A.– Madrid.
IDASA, INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A.– La Coruña.
INBADELCA, S.A.– Baracaldo (Vizcaya).
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.– Tarrasa (Barcelona).
INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYSA).– Madrid.
INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.– Barcelona.
INSTITUTO CARTOGRAFICO DE CATALUÑA – Barcelona.
INSTITUTO NACIONAL DE EMPLEO Y PROMOCION SOCIAL. SECCION ASUNTOS GENERALES (SEAF-PPO).– Madrid.
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO.– Madrid.
JULIAN ARUMI, S.L.– Vich (Barcelona).
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.– Sta. Cruz de Tenerife.
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.– Madrid.
LABORATORIO GEOCISA. BIBLIOTECA.– Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE CARRETERAS Y GEOTECNIA JOSE LUIS ESCARIO.– Madrid.
LAING IBERICA, S.A.– Madrid.
LIBRERIA RUBIÑOS.– Madrid.
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).– Castellón de la Plana.
MAHEMA, S.A.– Granollers (Barcelona).
MATERIALES Y TUBOS BONNA, S.A.– Madrid.
MECANOGUMBA, S.A.– Mollet del Vallés (Barcelona).
NUEVA CERAMICA CAMPO.– Lendo-Laracha (La Coruña).
OTEP INTERNACIONAL, S.A.– Madrid.
POSTELECTRICA, S.A.– Palencia.
POSTENSA, S.A.– Bilbao.
PRAINSA – Barcelona.
PRAINSA – Zaragoza.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

PREBETONG CANARIA, S.A.– Sta. Cruz de Tenerife.
PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).– Vitoria.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).– León.
PREFABRICADOS DEL HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).– Valladolid.
PREFABRICADOS NAVARROS, S.A.– Olazagutia (Navarra).
PREFABRICADOS POUSA, S.A.– Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PREFLEX. COMPAÑIA LABORAL, S.A. Gijón (Oviedo).
PRETENSADOS AEDIUM, S.L.– Mutilva Baja (Navarra).
PREYPRESA.– Aranda de Duero (Burgos).
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. HORTE.– Valladolid.
PROTEC, S.L.– Lugones (Oviedo).
REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A.– Pinto (Madrid).
RENFE (Madrid).
SAINCE.– Madrid.
S.E.A.T. (BIBLIOTECA).– Barcelona.
SENER, S.A.– Las Arenas (Vizcaya).
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.– Barcelona.
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.– Gerona.
SIKA, S.A.– Madrid.
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.– Madrid.
SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.– Madrid.
SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS.– Valencia.
SPANDECK CATALANA, S.A.– Barcelona.
SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION. SECCION DE NORMATIVA (MOPU).– Madrid.
SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA (MOPU).- Madrid.
TEJERIAS "LA COVADONGA".– Muriedas de Camargo (Santander).
TEPSA.– Tarrasa (Barcelona).
TOSAM, S.L.– Segovia.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).– Madrid.
UNIVERSIDAD POLITECNICA. HEMEROTECA.– Valencia.
VALLEHERMOSO, S.A.– Madrid.
VIAS Y OBRAS PROVINCIALES.– San Sebastián.
VIGAS REMARRO.– Motril (Granada).

EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.- Montevideo (Uruguay).
ASSOCIAÇAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.– Sao Paulo (Brasil).
BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA. UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES Buenos Aires (Argentina).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

BIBLIOTECA DE INGENIERIA. UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU.– Lima (Perú).
BIBLIOTECA UNIVERSIDAD CATOLICA.– Quito (Ecuador)
CEPIC, S.C.– Córdoba (Argentina).
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.– Buenos Aires (Argentina).
CONSULBAIRES.– Buenos Aires (Argentina).
FACULTAD DE ARQUITECTURA. UNIVERSIDAD DE VALPARAISO.–Valparaiso (Chile).
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA.–Rosario (Argentina).
FACULTAD DE INGENIERIA. BIBLIOTECA.–Caracas (Venezuela).
INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLOGICAS. BIBLIOTECA CENTRAL. Sao Paulo (Brasil).
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.–Luanda (Rep. P. de Angola).
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. DIRECCION DE BIBLIOTECAS. – Santiago (Chile).
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.–Londres (Inglaterra).
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. FACULTAD DE INGENIERIA. Mérida (Venezuela).
UNIVERSIDAD CATOLICA VALPARAISO. BIBLIOTECA CENTRAL. DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO. Valparaiso (Chile).
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. BIBLIOTECA.– Mayaquez (Puerto Rico).

AVISO IMPORTANTE

DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, Madrid-33, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Planteamiento directo del método de los elementos de contorno a partir del teorema de reciprocidad

Manuel Martínez Lafuente

I. GENERALIDADES

I.1. Objeto del trabajo

El objeto del presente trabajo es la exposición de un planteamiento "directo", basado exclusivamente en la aplicación del teorema de la reciprocidad, para la deducción de las relaciones fundamentales en que se basa el METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO. Dicho planteamiento, más simple e intuitivo que los derivados de las técnicas del cálculo integral, ofrece una visión del problema más asequible para el lector que la que se deriva de los anteriormente mencionados, por lo que se juzga como muy conveniente para la iniciación de aquél en el estudio de este nuevo método de análisis elástico.

Tras obtener las relaciones básicas en que se apoya el citado método, pasan a analizarse las "soluciones fundamentales" aplicables a los problemas de carácter tridimensional y bidimensional.

Por último, se expone el planteamiento matricial derivado al abordar la resolución práctica del análisis mediante las técnicas habituales de aproximación numérica.

I.2. Nomenclatura

Sin perjuicio de que se vaya definiendo en el texto el significado de la nomenclatura utilizada, conforme ésta se va introduciendo, recogemos aquí el significado de la terminología más representativa de la exposición que acompaña:

- b_i: Componentes de las fuerzas másicas.
- e_{ij}: Componentes del tensor deformación.
- n_i: Cosenos directores de la normal exterior a una superficie.
- q_i: Componentes de las fuerzas superficiales.
- q_k^f: Componentes de las fuerzas superficiales correspondientes a la solución fundamental.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

- r: Radio vector, o componente del sistema de coordenadas cilíndricas o polares.
- u_i: Componente de los desplazamientos.
- u_k^f: Componentes del desplazamiento correspondientes a la solución fundamental.
- A: Matriz cuadrada, cuya inversión proporciona las incógnitas del contorno.
- E: Módulo de elasticidad.
- F: Vector, cuyas componentes son los datos de las variables que definen el problema elástico en el contorno.
- G: Módulo de rigidez transversal.
- P: Punto genérico perteneciente al dominio elástico.
- U: Vector formado por las componentes de los desplazamientos en el contorno.
- X: Vector, cuyas componentes son las incógnitas del contorno.
- β: Constante, de valor 1 en los puntos interiores al dominio elástico y de valor 1/2 en los puntos del contorno.
- Δ: Operador gradiente.
- δ_{ij}: Deltas de Kronecker.
- ν: Coeficiente de Poisson.
- ∇: Operador laplaciano.
- Γ: Contorno del dominio elástico.
- σ_{ij}: Componentes del tensor tensión.
- Ω: Dominio elástico.

II. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA ELASTICO

II.1. Introducción

La finalidad del análisis elástico es la determinación de los estados de deformación y de solicitación originados en el "medio elástico" como consecuencia de las "acciones" que sobre éste actúan. Dichos estados vienen definidos, respectivamente, por las componentes del desplazamiento (o sus derivadas primeras) y las componentes de la tensión, en un punto genérico del medio elástico. Denominaremos "medio elástico", o "sólido elástico", a aquél que tiene la propiedad de recuperar su forma primitiva cuando dejan de actuar las acciones que le solicitan. Definimos como "acción" a cualquier eventualidad capaz de modificar el estado de deformación o de solicitación del medio elástico (cargas exteriores, deformaciones térmicas, asientos de apoyos, etc.).

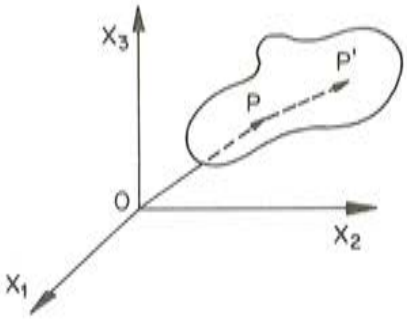
En lo que sigue, admitiremos que el "medio elástico" es homogéneo e isótropo y de tipo hookiano. Además, supondremos que los movimientos son despreciables en comparación con las dimensiones reales del sólido elástico. En definitiva, vamos a situarnos siempre dentro de los límites del análisis lineal.

En estas condiciones, las variables que definen el comportamiento del medio elástico son:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

a) Desplazamientos: Se definen en cada punto por las componentes u_i ($i = 1, 2, 3$) del vector $\overrightarrow{PP'}$ (P: punto inicial; P': punto deformado) con relación a un sistema general de referencia $Ox_1 x_2 x_3$. Las componentes del desplazamiento se expresan en la forma:

$$u_i = u_i (x_1, x_2, x_3) \tag{II.1}$$



Como veremos más adelante, si se determinan explícitamente las funciones u_i, el problema elástico está totalmente definido.

b) Deformaciones: En un punto cualquiera del sólido elástico, la deformación viene definida por las seis componentes del tensor simétrico de segundo orden siguiente:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{II.2}$$

Estas componentes quedan determinadas unívocamente en cada punto del medio elástico a partir de las funciones u_i.

c) Tensiones: Se definen en cada punto por las seis componentes del tensor simétrico de segundo orden σ_{ij} y representan las componentes de la tensión (fuerza por unidad de superficie) que actúan sobre el plano perpendicular al eje "x_i" en dirección paralela al eje "x_j".

Más adelante veremos que dichas componentes se obtienen directamente de las componentes de la deformación a partir de la ley de Hooke generalizada (ecuaciones de Lamé). Por lo tanto, la determinación explícita de las funciones u_i resuelve completamente el problema elástico.

II.2. Condiciones que satisfacen las componentes de la tensión

Supongamos que el "medio elástico" ocupa el dominio Ω limitado por el contorno Γ. Admitamos que en los puntos interiores a Ω pueden actuar "fuerzas másicas", cuyas componentes, por unidad de volumen, denominaremos b_i, y que sobre los puntos del contorno Γ pueden actuar "fuerzas superficiales" cuyas componentes, por unidad de superficie, denominaremos q_i. En estas condiciones, las componentes del tensor tensión han de verificar:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

a) Las ecuaciones de equilibrio interno (en los puntos interiores al dominio Ω). Son tres ecuaciones que se expresan en la forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{II.3}$$

b) Las ecuaciones de equilibrio en el contorno (en los puntos pertenecientes a la superficie Γ). Son otras tres ecuaciones, que se expresan en la forma:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = q_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{II.4}$$

donde n_j representa el coseno director de la normal exterior a la superficie Γ con relación al eje x_j.

c) Las ecuaciones de equilibrio del conjunto. Estas ecuaciones se derivan de las dos anteriores y son:

c-1) Tres ecuaciones de equilibrio de fuerzas:

$$\int_{\Omega} b_i \cdot d\,\Omega + \int_{\Gamma} q_i \cdot d\,\Gamma = 0; \; (i = 1, 2, 3) \tag{II.5}$$

c-2) Tres ecuaciones de equilibrio de momentos:

$$\int_{\Omega} (b_i \cdot x_j - b_j \cdot x_i)\, d\,\Omega + \int_{\Gamma} (q_i \cdot x_j - q_j \cdot x_i)\, d\,\Gamma = 0; \; \left\{ \begin{matrix} i = 1, j = 2 \\ i = 2, j = 3 \\ i = 3, j = 1 \end{matrix} \right\} \tag{II.6}$$

d) Las ecuaciones de compatibilidad. Estas ecuaciones son necesarias para garantizar la existencia unívoca de las funciones u_i y se formulan directamente en términos de las componentes del tensor deformación (ver referencia bibliográfica nº 1). A partir de las relaciones tensión-deformación, dichas ecuaciones pueden expresarse en términos de las componentes del tensor tensión. Así, en el caso de medio elástico homogéneo e isótropo, las ecuaciones de compatibilidad se expresan en la forma:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \, \partial x_j} = - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \Delta(b) - \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) \tag{II.6}$$

donde los diferentes símbolos expresan:

– ∇: Operador laplaciano.

– Δ: Operador divergencia.

– δ_{ij}: Delta de Kronecker.

Como consecuencia, en ausencia de fuerzas másicas, $b_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, o si éstas son constantes, las ecuaciones de compatibilidad se reducen a:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \, \partial x_j} = 0 \tag{II.7}$$

donde θ es la tracción cúbica ($\theta = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$) y ν es el coeficiente de Poisson del material.

Particularizando la expresión (II.7) para los casos en que $i = j$, se obtiene:

$$\nabla^2 \theta = 0 \tag{II.8}$$

lo que indica que el invariante θ es armónico cuando las fuerzas másicas son constantes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

II.3. Relaciones entre las componentes del tensor tensión y las componentes del tensor deformación

En elasticidad lineal las relaciones tensión-deformación se expresan mediante las ecuaciones de Lamé (caso de sólido elástico homogéneo e isótropo) que pueden escribirse en forma compacta como:

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}\, \vartheta + 2\, \mu e_{ij} \tag{II.9}$$

donde:

– λ y μ son las constantes de Lamé, que se definen por:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}\right] \tag{II.10}$$

siendo E el módulo de Young del material y G el módulo de rigidez transversal.

– ϑ es la dilatación cúbica $= e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$

Las relaciones (II.9) pueden expresarse también en la forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\, G\nu}{1-2\,\nu}\, \delta_{ij}\, \frac{\partial\, u_k}{\partial\, x_k} + G\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right) \tag{II.11}$$

que utilizaremos en el capítulo III.

Las relaciones inversas (deformación-tensión) son inmediatas a partir de las ecuaciones (II.9) y se escriben en la forma:

$$e_{ij} = -\frac{\lambda}{2\,\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}\, \delta_{ij}\, \theta + \frac{1}{2\,\mu}\, \sigma_{ij} \tag{II.12}$$

A partir de las ecuaciones (II.9) pueden obtenerse las expresiones de las ecuaciones de equilibrio interno (II.3) y de las ecuaciones de equilibrio en el contorno (II.4) en términos de las componentes del tensor deformación. Dichas expresiones, que omitimos aquí por no ser necesarias para el contexto básico del presente trabajo, constituyen, junto con las ecuaciones de compatibilidad, que exponemos a continuación, el sistema general de ecuaciones que han de satisfacer las componentes del tensor deformación.

II.4. Ecuaciones de compatibilidad

El hecho de que, en un punto cualquiera del medio elástico, las componentes de la deformación vengan definidas a partir de las derivadas de los corrimientos, impone la necesidad de establecer ciertas relaciones entre aquéllas, denominadas ecuaciones de compatibilidad, para asegurar la existencia unívoca de las funciones u_i. Dichas ecuaciones se expresan en la forma:

$$\frac{\partial^2\, e_{ij}}{\partial\, x_k\, \partial\, x_\ell} + \frac{\partial^2\, e_{k\ell}}{\partial\, x_i\, \partial\, x_j} + \frac{\partial^2\, e_{ik}}{\partial\, x_j\, \partial\, x_\ell} + \frac{\partial^2\, e_{j\ell}}{\partial\, x_i\, \partial\, x_k} = 0 \tag{II.13}$$

A partir de las relaciones (II.12) resulta inmediato comprobar que las ecuaciones (II.13) equivalen a las (II.6).

En el sistema anterior es fácil ver que sólo hay seis ecuaciones independientes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

II.5. Estado de tensión plana

Un estado de "tensión plana" contenido en el plano $Ox_1\ x_2$ se caracteriza por verificar:

$$\sigma_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{II.14}$$

que, teniendo en cuenta (II.9), equivale a:

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(e_{11} + e_{22}) \tag{II.15}$$

Si sustituimos las relaciones anteriores en el sistema (II.9), obtenemos las relaciones tensión-deformación correspondientes al estado de tensión plana:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(e_{11} + e_{22}) + 2\mu e_{11} \\ \sigma_{22} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}(e_{11} + e_{22}) + 2\mu e_{22} \\ \sigma_{12} &= \mu(e_{12} + e_{21}) \end{aligned}\right] \tag{II.16}$$

Análogamente, sustituyendo en (II.3) obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio interno ($b_3 = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{II.17}$$

mientras que las ecuaciones de equilibrio en el contorno, correspondientes al estado de tensión plana, resultan:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{12} \cdot n_2 &= q_1 \\ \sigma_{21} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 &= q_2 \end{aligned} \tag{II.18}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en las relaciones (II.6), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\Delta(b) - 2\frac{\partial b_1}{\partial x_1} \\ \nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_2^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\Delta(b) - 2\frac{\partial b_2}{\partial x_2} \\ \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_3^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\Delta(b) \\ \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_2 \partial x_3} &= -\frac{\partial b_2}{\partial x_3} \\ \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_3} &= -\frac{\partial b_1}{\partial x_3} \\ \nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_2} + \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\right) \end{aligned}\right] \tag{II.19}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

donde $\theta_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}$.

Las ecuaciones (II.19) muestran que, en general, σ_{11}, σ_{12} y σ_{22} dependen de x_3, por lo que sólo en el caso en que las fuerzas actuantes satisfagan determinadas condiciones puede asegurarse el estado de tensión plana.

En el caso de placas estrechas de espesor constante cuyas bases estén libres de cargas exteriores puede admitirse, con suficiente aproximación, que el estado tensional resultante es el correspondiente al caso de tensión plana, si las fuerzas actuantes en las caras laterales son simétricas con relación al plano medio de la placa. En este caso se debe verificar:

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_3} = \frac{\partial b_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_3} = 0 \qquad \text{(II.20)}$$

Sustituyendo en (II.17) se obtienen las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial b_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} \\ -\frac{\partial b_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II.21)}$$

que, reemplazadas en la última de las ecuaciones (II.19), nos conducen a:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_3^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \text{(II.22)}$$

lo que demuestra que, incluso en el caso de placas estrechas, la componente σ_{12} depende de x_3 con lo que no se satisfacen estrictamente las condiciones ideales del estado de tensión plana. No obstante, en estos casos resulta razonable admitir que la variación tensional a lo largo del espesor es lo suficientemente pequeña como para despreciarla y suponer que el estado tensional resultante es el que corresponde al caso de tensión plana (ver referencia bibliográfica núm. 1 y núm. 2).

En estas condiciones, si en las ecuaciones (II.13) hacemos $i = j = 1$, $k = \ell = 2$, obtenemos la única ecuación de compatibilidad independiente relativa al estado tensional plano. Dicha ecuación se expresa en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \text{(II.23)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

A partir de (II.16), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\,\sigma_{22}) \\ e_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\,\sigma_{11}) \\ e_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{12} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II.24)}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (II.23) y derivando las ecuaciones de equilibrio interno (II.17), obtenemos, finalmente, la ecuación de compatibilidad correspondiente al caso de tensión plana expresada en términos de las componentes del tensor tensión. Dicha ecuación es:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right](\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\right) \qquad \text{(II.25)}$$

Cuando las fuerzas másicas son constantes, la ecuación (II.25) se escribe así:

$$\nabla_1^2\,\theta_1 = 0 \qquad \text{(II.26)}$$

siendo: $\nabla_1^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ y $\theta_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}$.

II.6. Estado de deformación plana

Un estado de "deformación plana" paralelo al plano $0\,x_1\,x_2$ se caracteriza por:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= u_k(x_1, x_2); \quad (k = 1, 2) \\ u_3 &= 0 \end{aligned}\right] \qquad \text{(II.27)}$$

que, teniendo en cuenta (II.2), equivale a:

$$e_{i3} = 0; \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(II.28)}$$

A partir de (II.9) se obtienen las relaciones tensión-deformación correspondientes al estado de deformación plana:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\,(e_{11} + e_{22}) + 2\,\mu\, e_{11} \\
\sigma_{22} &= \lambda\,(e_{11} + e_{22}) + 2\,\mu\, e_{22} \\
\sigma_{33} &= \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
\sigma_{12} &= \mu\,(e_{12} + e_{21})
\end{aligned}\right] \qquad \text{(II.29)}$$

en el que las componentes σ_{13} y σ_{23} son nulas.

Sustituyendo en el sistema (II.3) obtenemos las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 \qquad &= 0
\end{aligned}\right] \qquad \text{(II.30)}$$

Al ser σ_{33} independiente de x_3, la componente b_3 de las fuerzas másicas debe ser *nula*, con lo que las ecuaciones (II.30) coinciden con las (II.17).

Las ecuaciones de equilibrio en el contorno correspondientes al estado de deformación plana son:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11}\, n_1 + \sigma_{12}\, n_2 &= q_1 \\
\sigma_{21}\, n_1 + \sigma_{22}\, n_2 &= q_2 \\
\sigma_{33}\, n_3 \qquad &= q_3
\end{aligned}\right] \qquad \text{(II.31)}$$

que, exceptuando la última, coinciden con las ecuaciones (II.18) relativas al estado de tensión plana.

La única ecuación de compatibilidad independiente resultante del sistema (II.6) es:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right](\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\right) \qquad \text{(II.32)}$$

que, en el caso particular en que las fuerzas másicas sean constantes, coincide con la ecuación (II.26).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

II.7. Relación entre los estados de tensión plana y de deformación plana

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en los dos apartados anteriores, resulta inmediato obtener una relación entre las soluciones correspondientes a los estados de tensión plana y de deformación plana. Así, si conocemos la solución correspondiente al estado tensional plano actuante sobre un dominio Ω, limitado por el contorno Γ y solicitado por las fuerzas másicas b_i y por las fuerzas superficiales q_i, podemos obtener directamente la solución correspondiente al estado de deformación plana, relativa al mismo dominio solicitado por las mismas fuerzas que en el caso anterior, tomando unas constantes elásticas "ficticias":

$$\left.\begin{aligned} E' &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ \nu' &= \frac{\nu}{1-\nu} \end{aligned}\right] \qquad \text{(II.33)}$$

y adoptando la solución correspondiente al estado de tensión plana, salvo en lo concerniente a la componente tensional σ_{33}, que, para el caso de deformación plana, se obtendrá de la tercera ecuación (II.29).

En el caso en que sean constantes las fuerzas másicas actuantes, la solución tensional, exceptuando la componente σ_{33}, coincide en ambos estados.

Es fácil ver, a partir de las relaciones (II.33) que $G = G'$.

II.8. Solución general del problema elástico

En general, los métodos habituales de análisis elástico pueden clasificarse en dos grandes grupos:

a) los métodos "integrales", llamados así porque contemplan de forma global el comportamiento del dominio elástico, estableciendo las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno e introduciendo las condiciones de contorno apropiadas al caso. Entre éstos tenemos:

a-1) INTEGRACION DIRECTA de la ecuación diferencial. Método puramente matemático, pero de escasa aplicación, pues no es frecuente que el sistema de ecuaciones admita solución directa en forma explícita.

a-2) INTEGRACION MEDIANTE DESARROLLOS EN SERIE. Tal es el caso en el que la solución se obtiene en forma de desarrollos en series de Fourier. Este método ha tenido gran utilización en el análisis de placas rectangulares cargadas en su contorno.

a-3) INTEGRACION NUMERICA. Como es el caso en que la integración de la ecuación diferencial se obtiene utilizando "esquemas numéricos", como, por ejemplo, el método de las diferencias finitas.

a-4) APROXIMACION MEDIANTE PONDERACION. Son métodos en los que se

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

obtiene una solución aproximada minimizando, según diferentes criterios (ver referencia bibliográfica núm. 3), el error ponderado global de la solución. Estos métodos son muy eficaces para obtener resultados particulares (no globales), como, por ejemplo, cargas de pandeo.

b) los métodos de "discretización", llamados así porque se divide el dominio en un conjunto de subdominios (elementos) interconectados entre sí (nodos y aristas). En este caso, tras admitir determinadas leyes de comportamiento en cada subdominio, se establecen las ecuaciones de compatibilidad y de equilibrio en los elementos de conexión entre subdominios. Asimismo, se establecen las condiciones globales de equilibrio del conjunto y se garantizan las compatibilidades de movimientos en los enlaces exteriores del dominio elástico (apoyos). De esta forma se llega a un sistema de ecuaciones lineales completo, cuya solución se aborda fácilmente utilizando las técnicas habituales de cálculo matricial. En la actualidad, gracias a la incorporación de los ordenadores electrónicos, puede afirmarse que estos métodos han desplazado totalmente a los anteriores. Entre éstos, establecemos la clasificación siguiente:

b-1) METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. En este caso, los elementos cubren todo el dominio elástico (interior y contorno) y se caracterizan porque, en general, las leyes de comportamiento admitidas dentro de cada uno de ellos satisfacen las ecuaciones de compatibilidad, pero no verifican las ecuaciones de equilibrio interno. Fueron desarrollados fundamentalmente durante la década de los años sesenta (ver referencia bibliográfica núm. 4) y vienen utilizándose habitualmente desde entonces.

b-2) METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO. En este caso, los elementos sólo cubren el contorno (o contornos) del dominio elástico, y se caracterizan porque, en éstos, las leyes de comportamiento admitidas verifican las ecuaciones de equilibrio interno. Estos métodos se han desarrollado recientemente (ver referencias bibliográficas núm. 3 y núm. 5) y puede afirmarse que todavía nos encontramos en una fase de adaptación en la que, progresivamente, éstos desplacen o complementen a los anteriores en la práctica habitual concerniente a la problemática general del análisis elástico.

III. DEDUCCION DIRECTA DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PARTIR DEL TEOREMA DE RECIPROCIDAD

III.1. Introducción

Consideremos un sólido elástico sometido, alternativamente, a dos sistemas de fuerzas másicas y superficiales (b_k, q_k) y (b'_k, q'_k) bajo cuyo efecto se producen en el mismo, respectivamente, los desplazamientos u_k y u'_k. En estas condiciones, siempre que se satisfagan las condiciones correspondientes al estado elástico lineal (validez del principio de superposición) el teorema de Betti (ver referencia bibliográfica núm. 1) se expresa en la forma:

$$\int_{\Omega} b_k\, u'_k\, d\Omega + \int_{\Gamma} q_k\, u'_k\, d\Gamma = \int_{\Omega} b'_k\, u_k\, d\Omega + \int_{\Gamma} q'_k\, u_k\, d\Gamma \qquad \text{(III.1)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

donde se utiliza la nomenclatura siguiente:

- $b_k(b'_k)$: componentes de las fuerzas másicas actuantes en el interior del sólido elástico (dominio Ω).
- $q_k(q'_k)$: componentes de las fuerzas superficiales actuantes en el contorno del sólido elástico (superficie Γ).
- $u_k(u'_k)$: componentes del desplazamiento en el sólido elástico bajo la actuación de los sistemas (b_k, q_k) ó (b'_k, q'_k).

Supongamos que el sólido elástico está realmente solicitado por el sistema (b_k, q_k), y que conocemos la solución, que denominaremos "fundamental", en la que los desplazamientos en un punto cualquiera del sólido vienen definidos por u^f_k, las fuerzas másicas por b^f_k, y las fuerzas superficiales por q^f_k. En estas condiciones, sustituyendo en el sistema (III.1), obtenemos:

$$\int_\Omega b_k\, u^f_k\, d\Omega + \int_\Gamma q_k\, u^f_k\, d\Gamma = \int_\Omega b^f_k\, u_k\, d\Omega + \int_\Gamma q^f_k\, u_k\, d\Gamma \qquad \text{(III.2)}$$

que podemos escribir también en la forma:

$$\int_\Omega b^f_k\, u_k\, d\Omega = \int_\Gamma (q_k\, u^f_k - q^f_k\, u_k)\, d\Gamma + \int_\Omega b_k\, u^f_k\, d\Omega \qquad \text{(III.3)}$$

Imaginemos que adoptamos como "solución fundamental" aquélla en la que en un punto cualquiera, P, del sólido elástico actúa una fuerza unitaria en la dirección "s", siendo ésta la única acción interna que solicita al medio elástico. En este caso, la ley de fuerzas actuantes puede expresarse en la forma:

$$\left.\begin{aligned} b^f_k &= \delta_{sk} \text{ en el punto P} \\ b^f_k &= 0 \text{ en el resto de } \Omega \\ q^f_k &= q^f_k(P, s) \text{ en el contorno} \end{aligned}\right] \qquad \text{(III.4)}$$

siendo $q^f_k(P, s)$ las fuerzas superficiales introducidas en el contorno por la actuación de una fuerza unitaria de dirección "s" en el punto P.

Sustituyendo (III.4) en (III.3), obtenemos:

$$u_s(P) = \int_\Gamma (q_k\, u^f_k(P, s) - q^f_k(P, s)\, u_k)\, d\Gamma + \int_\Omega b_k\, u^f_k(P, s)\, d\Omega \qquad \text{(III.5)}$$

siendo:

- $u_s(P)$: desplazamiento del punto P en la dirección "s"
- $u^f_k(P, s)$: desplazamientos del medio elástico debidos a la actuación en P de una carga unitaria de dirección "s" (solución fundamental propiamente dicha).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La expresión (III.5), evidentemente, sólo es aplicable a los puntos "interiores" al dominio Ω.

En general, la "solución fundamental" correspondiente a un determinado problema depende, entre otros factores, de las condiciones de contorno del mismo (geometría y disposición de enlaces en Γ), aunque, bajo un punto de vista matemático, es suficiente con que dicha solución satisfaga las ecuaciones de equilibrio interno, las ecuaciones de compatibilidad y las ecuaciones de equilibrio en el contorno. Por esto, y tratando de evitar una excesiva multiplicidad de soluciones, podemos adoptar en todos los casos la misma "solución fundamental", que es la que se obtiene al considerar el sólido elástico como indefinido y solicitado por una fuerza puntual en un punto interior, P, y por fuerzas superficiales iguales a las que se producen a lo largo del contorno Γ en el sólido elástico indefinido. Esta solución, obviamente, cumple todos los requisitos anteriormente mencionados para poder ser considerada como "solución fundamental".

III.2. Extensión del método a los puntos del contorno

Cuando el punto P pertenece al contorno del sólido (Γ), la ecuación (III.3) sigue siendo aplicable, aunque su integración no es tan inmediata como en los casos en que dicho punto sea interior a aquél. Para obviar este inconveniente, admitiendo como "solución fundamental" la misma que en el caso anterior, reemplazamos la carga superficial unitaria actuante en P por una distribución uniforme de fuerzas másicas sobre un elemento infinitesimal de volumen centrado con P, de forma que la resultante de ambos sistemas de cargas sea coincidente (de hecho, bajo un punto de vista físico, las cargas puntuales sólo se conciben como situaciones límite de cargas másicas actuantes sobre elementos de volumen infinitesimales). Si Ω' es el elemento de volumen sobre el que actúan dichas fuerzas, la ley de cargas actuante en el medio se puede definir en la forma:

$$\left.\begin{aligned}
&b_k^f = \frac{1}{\Omega'}\,\delta_{sk} \quad \text{en } \Omega' \\
&b_k^f = 0 \text{ en el resto de } \Omega \\
&q_k^f = q_k^f\,(P, s) \text{ en la parte de } \Gamma \text{ exterior a } \Omega' \\
&q_k^f = p_k^f\,(P, s) \text{ en la parte de } \Gamma \text{ interior a } \Omega'
\end{aligned}\right] \qquad \text{(III.6)}$$

Descomponiendo la integral del primer miembro en (III.3) en la forma siguiente:

$$\int_\Omega b_k^f \cdot u_k \cdot d\Omega = \int_{\Omega-\Omega''} b_k^f \cdot u_k \cdot d\Omega + \int_{\Omega''} b_k^f \cdot u_k \cdot d\Omega \qquad \text{(III.7)}$$

donde Ω'' es el volumen comun a Ω y Ω', obtenemos:

$$\int_\Omega b_k^f \cdot u_k \cdot d\Omega = \int_{\Omega''} b_k^f \cdot u_k \cdot d\Omega = \frac{\Omega''}{\Omega'}\,u_s\,(P) = \alpha \cdot u_s\,(P) \qquad \text{(III.8)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

siendo α función de la geometría del contorno. Si éste es "suficientemente liso", es decir, si el plano tangente a Γ en P es único, se verifica:

$$\alpha = \frac{\Omega''}{\Omega'} = \frac{1}{2} \tag{III.9}$$

Análogamente, descomponiendo el segundo término de la primera integral del segundo miembro de (III.3), obtenemos:

$$\int_{\Gamma} q_k^f \cdot u_k \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma'} q_k^f (P, s) \cdot u_k \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma'} p_k^f (P, s) \cdot u_k \cdot d\Gamma \tag{III.10}$$

Es fácil ver que, en los casos en que el contorno es "suficientemente liso", la segunda integral del segundo miembro de (III.10) es nula. Así, en dichos casos, puede identificarse, en la práctica, Γ' con su proyección sobre el plano tangente a Γ en P, y, al resultar la distribución tensional p_k^f (P, s) antimétrica con relación a dicho plano tangente, la integración extendida a lo largo del mismo (parte común con Ω') debe ser nula (*).

En la expresión (III.10) Γ' designa la parte de contorno (Γ) interior al elemento infinitesimal de volumen Ω'.

Por consiguiente, en los casos en que el contorno del sólido elástico sea "suficientemente liso", la particularización de las expresiones (III.3) a los puntos de Γ puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{2} \cdot u_s (P) = \int_{\Gamma} (p_k \cdot u_k^f (P, s) - q_k^f (P, s) \cdot u_k) \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} b_k \cdot u_k^f (P, s) \cdot d\Omega \tag{III.11}$$

donde las funciones $u_k^f(P, s)$ y $q_k^f(P, s)$ tienen el mismo significado que en el caso anterior.

Si el contorno del sólido no es "suficientemente liso", la ecuación (III.11) no es válida, aunque, como veremos en el capítulo VI, en los casos habituales puede obviarse este inconveniente mediante la introducción de condiciones suplementarias de compatibilidad.

III.3. Solución general del problema elástico a partir de la solución de contorno

Teniendo en cuenta las relaciones (III.5) y (III.11) podemos formular los desplazamientos, correspondientes al dominio elástico Ω limitado por el contorno Γ, mediante la expresión:

$$\beta \cdot u_s(P) = \int_{\Gamma} (q_k \cdot u_k^f (P, s) - q_k^f (P, s) \cdot u_k) \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} b_k \cdot u_k^f (P, s) \cdot d\Omega \tag{III.12}$$

siendo:

– β: constante, que vale 1 para los puntos interiores al dominio Ω y 1/2 para los puntos situados en el contorno Γ.

– $u_s(P)$: componente del desplazamiento del punto P en la dirección "s".

– q_k: componentes de las fuerzas superficiales actuantes en Γ.

(*) La antimetría se entiende referida a las condiciones de integración.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

– b_k: componentes de las fuerzas másicas actuantes en Ω

– u_k: componentes de los desplazamientos del sólido elástico bajo la actuación del par de fuerzas de componentes q_k y b_k.

– $u_k^f(P, s)$: componentes del desplazamiento en un punto cualquiera del sólido elástico motivadas por la actuación de una carga unitaria de dirección "s" en el punto P ("solución fundamental").

– $q_k^f(P, s)$: componentes de las fuerzas superficiales actuantes en Γ cuando una carga unitaria de dirección "s" actúa en el punto P.

Como consecuencia, llegamos a la conclusión de que los desplazamientos del sólido elástico quedan determinados si se conoce, además de una solución fundamental, la solución correspondiente al contorno.

Para que tenga validez la ecuación (III.12) es necesario que la solución fundamental corresponda a un dominio elástico Ω' cuyo contorno Γ' sea exterior a Ω. Como vimos en III.1, en lo sucesivo, denominaremos "solución fundamental" a la que corresponde al medio elástico indefinido solicitado por una carga unitaria interior. Obviamente, esta solución es válida en la práctica para el análisis genérico del problema elástico en el medio homogéneo e isótropo tridimensional.

Conocidos los desplazamientos del medio elástico, las componentes del tensor tensión quedan determinadas de la forma siguiente:

– en el contorno del sólido, a partir de las componentes q_k, mediante las ecuaciones de equilibrio en el contorno (II.4).

– en los puntos interiores al dominio Ω mediante las ecuaciones de Lamé, particularizadas en las expresiones (II.11).

Así, si derivamos las ecuaciones (III.12) con respecto a las variables independientes obtenemos, en los puntos interiores, la siguiente relación:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_m} = \int_\Gamma \left(q_k \cdot \frac{\partial u_k^f}{\partial x_m} - u_k \cdot \frac{\partial q_k^f}{\partial x_m}\right) \cdot d\Gamma + \int_\Omega b_k \cdot \frac{\partial u_k^f}{\partial x_m} \cdot d\Omega \qquad \text{(III.13)}$$

donde $u_k^f = u_k^f(P, r)$ y $q_k^f = q_k^f(P, r)$.

Sustituyendo (III.13) en (II.11), obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = &\int_\Gamma \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial u_k^f}{\partial x_r} + G\left(\frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^f}{\partial x_i}\right)\right) q_k \, d\Gamma - \\ &- \int_\Gamma \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial q_k^f}{\partial x_r} + G\left(\frac{\partial q_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j^f}{\partial x_i}\right)\right) u_k \, d\Gamma + \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial u_k^f}{\partial x_r} + G\left(\frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^f}{\partial x_i}\right)\right) b_k \, d\Omega \qquad \text{(III.14)}\end{aligned}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Introduciendo la notación:

$$\left.\begin{aligned} D_{kij} &= \frac{2\,G\,\nu}{1-2\,\nu}\,\delta_{ij}\,\frac{\partial u_k^f}{\partial x_r} + G\left(\frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^f}{\partial x_i}\right) \\ S_{kij} &= \frac{2\,G\,\nu}{1-2\,\nu}\,\delta_{ij}\,\frac{\partial q_k^f}{\partial x_r} + G\left(\frac{\partial q_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j^f}{\partial x_i}\right) \end{aligned}\right] \qquad \text{(III.15)}$$

la expresión (III.14) puede escribirse en la forma:

$$\sigma_{ij} = \int_\Gamma D_{kij}\,q_k\,d\Gamma - \int_\Gamma S_{kij}\,u_k\,d\Gamma + \int_\Omega D_{kij}\,b_k\,d\Omega \qquad \text{(III.16)}$$

cuya aplicación sólo se extiende a los puntos interiores al dominio Ω.

Hemos obtenido, pues, las dos relaciones fundamentales, (III.12) y (III.16), en las que se apoya el "método de los elementos de contorno" partiendo exclusivamente de los teoremas básicos del análisis elástico lineal: principio de superposición y teorema de reciprocidad. Dichas expresiones son coincidentes con las que resultan de aplicar el "método directo" convencional, basado en la integración de las ecuaciones de equilibrio interno mediante la fórmula de Green (ver referencias bibliográficas núm. 3 y núm. 5).

En los capítulos IV y V se exponen, respectivamente, las soluciones fundamentales correspondientes a los problemas elásticos tridimensionales y bidimensionales y se obtienen las expresiones explícitas de las funciones características introducidas en el presente capítulo.

Las relaciones anteriormente obtenidas muestran que, al menos bajo un aspecto puramente teórico, la problemática habitual del análisis elástico lineal queda totalmente resuelta en cuanto se conozcan las soluciones correspondientes al contorno, lo que, por otra parte, resulta a todas luces evidente considerando el problema como un caso particular de sistema de ecuaciones diferenciales lineales (ver referencia bibliográfica núm. 6). Como consecuencia, el problema elástico queda reducido, una vez determinada la "solución fundamental", a la determinación de la solución particular de contorno de cada problema concreto. Para abordar este último problema puede procederse de dos formas distintas:

a) por el "método directo", consistente en particularizar para el contorno las relaciones (III.12) y resolver el sistema de ecuaciones integrales resultantes por alguna de las técnicas habituales de integración. Este procedimiento, exceptuando contadas aplicaciones cuya simplicidad permita abordar el problema sin excesivas complicaciones matemáticas, resulta en la práctica desechable por su complejidad.

b) por "métodos indirectos", entre los que se encuentran, por ejemplo, los "métodos de discretización". En estos últimos se discretiza el contorno del dominio elástico en un número finito de elementos, denominados "elementos de contorno", en los que se admiten determinadas leyes de variación, normalmente polinómicas, para los desplazamientos y fuerzas superficiales, de manera que en cada elemento dichas distribuciones queden definidas a partir de un número reducido de incógnitas. Si se particularizan las expresiones (III.12) para determinados puntos del contorno ("nodos") se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de fácil solución con las

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

técnicas convencionales de análisis matricial. En el capítulo VI exponemos el planteamiento matricial del método, denominado METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

III.4. Extensión del método a los problemas de carácter no lineal

Pese a que el fundamento del método de los elementos de contorno está basado en las propiedades características del análisis lineal, puede éste extenderse, utilizando el recurso de considerar como fuerzas exteriores a los términos no lineales del problema, a los problemas de carácter no lineal (ver referencias bibliográficas núm. 3 y núm. 5). No entraremos aquí en más detalles sobre el particular, por considerar que su exposición rebasa ampliamente los límites del planteamiento del presente trabajo.

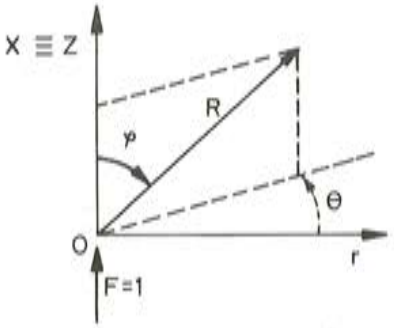
IV. ESTUDIO DE LA SOLUCION FUNDAMENTAL PARA EL MEDIO ELASTICO TRIDIMENSIONAL

IV.1. Introducción

Como vimos en el capítulo III, la "solución fundamental" es la correspondiente al medio elástico indefinido solicitado por una carga puntual unitaria en un punto interior al mismo. Este problema fue resuelto por Lord Kelvin (1848), quien obtuvo la solución que pasamos a exponer a continuación (ver referencia bibliográfica núm. 7).

IV.2. Estado tensional del sólido elástico indefinido solicitado por una carga unitaria actuante en su interior

Comenzaremos por considerar el caso en que la fuerza unitaria es paralela al eje Ox_3. El estado tensional correspondiente, referido a un sistema de coordenadas cilíndricas con origen en el punto de aplicación de la fuerza, viene expresado mediante las relaciones:



$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{z}{R^3}\left(\frac{3z^2}{R^2}+1-2\nu\right)\\
\sigma_r &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{z}{R^3}\left(\frac{3r^2}{R^2}-1+2\nu\right)\\
\sigma_\theta &= \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{z}{R^3}\\
\tau_{rz} &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{r}{R^3}\left(\frac{3z^2}{R^2}+1-2\nu\right)
\end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.1)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Es fácil comprobar que la solución anterior satisface las siguientes condiciones:

a) Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.2)}$$

b) Ecuaciones de compatibilidad:

$$\left.\begin{aligned} &r \frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1+\nu} s\right) - \sigma_r + \sigma_\theta = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} s\right) + r \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1+\nu} s\right) - 2 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.3)}$$

donde $s = \sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta$

c) Las condiciones de contorno:

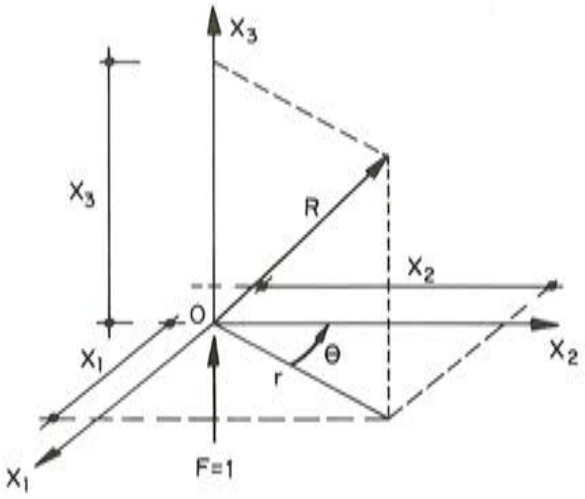
$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi (\sigma_r \operatorname{sen}^2 \omega + \tau_{rz} \operatorname{sen} \omega \cos \omega)\, d\omega = 0 \\ &\int_0^\pi (\tau_{rz} \operatorname{sen}^2 \omega + \sigma_z \operatorname{sen} \omega \cos \omega)\, d\omega = -\frac{1}{2 R^2} \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.4)}$$

donde: $r = R \operatorname{sen} \varphi$ y $z = R \cos \varphi$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{r \to \infty} \sigma_r = \lim_{r \to \infty} \sigma_\theta = \lim_{r \to \infty} \sigma_z = \lim_{r \to \infty} \tau_{rz} = 0 \\ &\lim_{z \to \infty} \sigma_r = \lim_{z \to \infty} \sigma_\theta = \lim_{z \to \infty} \sigma_z = \lim_{z \to \infty} \tau_{rz} = 0 \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.5)}$$

Pasando a un sistema cartesiano de referencia, $0x_1x_2x_3$, la solución tensional anterior se transforma mediante las relaciones siguientes:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \left[\frac{x_1}{r}\right]^2 \sigma_r + \left[\frac{x_2}{r}\right]^2 \sigma_\theta \\
\sigma_{22} &= \left[\frac{x_1}{r}\right]^2 \sigma_\theta + \left[\frac{x_2}{r}\right]^2 \sigma_r \\
\sigma_{33} &= \sigma_z \\
\sigma_{12} &= \frac{x_1 x_2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \\
\sigma_{13} &= \frac{x_1}{r} \tau_{rz} \\
\sigma_{23} &= \frac{x_2}{r} \tau_{rz}
\end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.6)}$$

que, sustituidas en (IV.1) dan:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_3}{R^3} \left(3 \frac{x_1^2}{R^2} - 1 + 2\nu\right) \\
\sigma_{22} &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_3}{R^3} \left(3 \frac{x_2^2}{R^2} - 1 + 2\nu\right) \\
\sigma_{33} &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_3}{R^3} \left(3 \frac{x_3^2}{R^2} + 1 - 2\nu\right) \\
\sigma_{12} &= -\frac{3}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2 x_3}{R^5} \\
\sigma_{13} &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{R^3} \left(3 \frac{x_3^2}{R^2} + 1 - 2\nu\right) \\
\sigma_{23} &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_2}{R^3} \left(3 \frac{x_3^2}{R^2} + 1 - 2\nu\right)
\end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.7)}$$

Si hubiésemos tomado la dirección del eje $0x_1$ coincidente con la de la carga actuante, la solución tensional resultante se obtendría directamente de (IV.7) dando una rotación de noventa grados al triedro elemental alrededor el eje $0x_2$ en el sentido de las agujas del reloj. En este caso, la distribución tensional sería:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{1}{8\,\pi\,(1-\nu)}\,\frac{x_1}{R^3}\left(3\,\frac{x_1^2}{R^2}+1-2\,\nu\right)\\
\sigma_{22} &= -\frac{1}{8\,\pi\,(1-\nu)}\,\frac{x_1}{R^3}\left(3\,\frac{x_2^2}{R^2}-1+2\,\nu\right)\\
\sigma_{33} &= -\frac{1}{8\,\pi\,(1-\nu)}\,\frac{x_1}{R^3}\left(3\,\frac{x_3^2}{R^2}-1+2\,\nu\right)\\
\sigma_{12} &= -\frac{1}{8\,\pi\,(1-\nu)}\,\frac{x_2}{R^3}\left(3\,\frac{x_1^2}{R^2}+1-2\,\nu\right)\\
\sigma_{13} &= -\frac{1}{8\,\pi\,(1-\nu)}\,\frac{x_3}{R^3}\left(3\,\frac{x_1^2}{R^2}+1-2\,\nu\right)\\
\sigma_{23} &= -\frac{3}{8\,\pi\,(1-\nu)}\,\frac{x_1\,x_2\,x_3}{R^5}
\end{aligned}
\right]
\qquad \text{(IV.8)}
$$

Por último, si la dirección de la fuerza coincide con el eje $0x_2$, la solución tensional resultante se obtiene de (IV.8) intercambiando los subíndices 1 y 2 en todas las expresiones.

IV.3. Desplazamientos del sólido elástico indefinido solicitado por una carga unitaria actuante en su interior

Introduciendo de nuevo el sistema de coordenadas cilíndricas utilizado en el apartado anterior, las deformaciones en un punto cualquiera del medio elástico pueden expresarse en la forma (ver referencia bibliográfica núm. 8):

$$
\left.
\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{1}{E}\,[\sigma_r - \nu\,(\sigma_z + \sigma_\theta)]\\
\epsilon_\theta &= \frac{1}{E}\,[\sigma_\theta - \nu\,(\sigma_r + \sigma_z)]\\
\epsilon_z &= \frac{1}{E}\,[\sigma_z - \nu\,(\sigma_r + \sigma_\theta)]\\
\gamma_{rz} &= \frac{2\,(1+\nu)}{E}\,\tau_{rz}
\end{aligned}
\right]
\qquad \text{(IV.9)}
$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Sustituyendo las expresiones (IV.1) en (IV.9), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_r &= -\frac{1}{8\pi E(1-\nu)}\frac{z}{R^3}\left[\frac{3}{R^2}(r^2-\nu z^2)-1+2\nu\right]\\
\epsilon_\theta &= \frac{1}{8\pi E(1-\nu)}\frac{z}{R^3}(1+\nu)\\
\epsilon_z &= -\frac{1}{8\pi E(1-\nu)}\frac{z}{R^3}\left[\frac{3}{R^2}(z^2-\nu r^2)+1-4\nu^2\right]\\
\gamma_{rz} &= -\frac{1+\nu}{4\pi E(1-\nu)}\frac{r}{R^3}\left(\frac{3z^2}{R^2}+1-2\nu\right)
\end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.10)}$$

Si denominamos u al corrimiento radial y w al corrimiento vertical (según el eje 0z), se verifican las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}\\
\epsilon_\theta &= \frac{u}{r}\\
\epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\\
\gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.11)}$$

De las segundas ecuaciones (IV.10) y (IV.11) se deduce:

$$u = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\frac{rz}{R^3} \qquad \text{(IV.12)}$$

ecuación que, lógicamente, satisface las primeras ecuaciones (IV.10) y (IV.11). Si la derivamos con relación a z, obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\frac{r}{R^5}(R^2-3z^2) \qquad \text{(IV.13)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Sustituyendo la tercera de las ecuaciones (IV.9) en la tercera de las ecuaciones (IV.10) e integrando, resulta:

$$w = \frac{1+\nu}{8\pi ER(1-\nu)}\left[4(1-\nu) - \frac{r^2}{R^2}\right] + f(r) \qquad \text{(IV.14)}$$

donde f (r) es una función arbitraria de "r".

Derivando (IV.14) respecto de r y sustituyendo (IV.13) en la cuarta de las ecuaciones (IV.11), llegamos a:

$$5 - 4\nu - 3\frac{r^2 - z^2}{R^2} - \frac{8\pi E(1-\nu)\,R^3}{(1+\nu)\,r} f'(r) = \frac{6z^2}{R^2} + 2 - 4\nu \qquad \text{(IV.15)}$$

que equivale a:

$$f'(r) = 0 \qquad \text{(IV.16)}$$

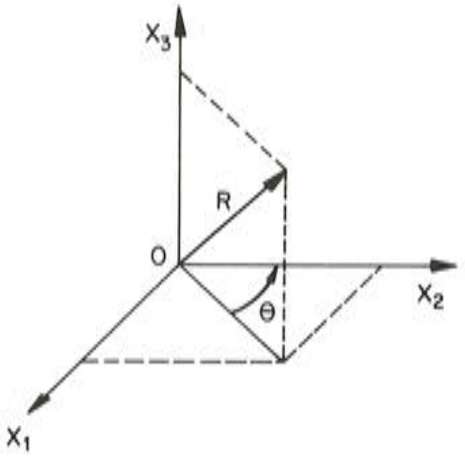
Sustituyendo (IV.16) en las expresiones (IV.13) y (IV.14) obtenemos, finalmente:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\,\frac{rz}{R^3} \\ w &= \frac{1+\nu}{8\pi ER(1-\nu)}\left(3 - 4\nu + \frac{z^2}{R^2}\right) + A \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.17)}$$

donde A es una constante, que representa un movimiento rígido del conjunto del sólido paralelamente al eje 0z, es decir, en la dirección de la carga interior.

Las ecuaciones (IV.17) proporcionan, en coordenadas cilíndricas, la solución en desplazamientos correspondiente al sólido elástico indefinido solicitado internamente por una carga unitaria de dirección coincidente con la del eje 0z. Puede comprobarse fácilmente que dichas ecuaciones satisfacen las condiciones generales de equilibrio y de compatibilidad expuestas en el capítulo II (condiciones generales que satisfacen las componentes del tensor deformación).

Pasando a un sistema cartesiano de referencia $0x_1x_2x_3$, la solución anterior se transforma mediante las relaciones siguientes:



$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u \cdot \operatorname{sen}\theta \\ u_2 &= u \cdot \cos\theta \\ u_3 &= w \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.18)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

que, sustituídas en (IV.17) dan:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\,\frac{x_1 x_3}{R^3} \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\,\frac{x_2 x_3}{R^3} \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{8\pi ER(1-\nu)}\left(3-4\nu+\frac{x_3^2}{R^2}\right)+A \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.19)}$$

Si hubiésemos tomado la dirección del eje $0x_1$ coincidente con la de la carga, la solución en desplazamientos resultante se obtendría análogamente (basta con dar una rotación al triedro de referencia de noventa grados, en sentido horario, alrededor del eje $0x_2$), expresándose en la forma:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{8\pi ER(1-\nu)}\left(3-4\nu+\frac{x_1^2}{R^2}\right)+A' \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\,\frac{x_1 x_2}{R^3} \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\,\frac{x_1 x_3}{R^3} \end{aligned}\right] \qquad \text{(IV.20)}$$

donde A' es una constante arbitraria, que representa un movimiento rígido del conjunto paralelamente al eje $0x_1$.

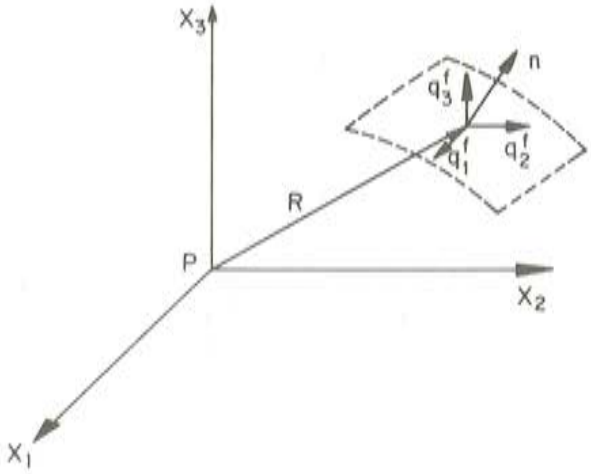
Por último, si la dirección de la carga coincidiese con la del eje $0x_2$, la solución en desplazamientos se obtendría directamente de (IV.20) intercambiando los subíndices 1 y 2.

IV.4. Solución fundamental en elasticidad tridimensional

A partir de las ecuaciones (IV.19) y (IV.20) resulta inmediato obtener la solución en desplazamientos correspondiente al medio elástico indefinido solicitado internamente por una carga unitaria, actuante en un punto P en la dirección "s" (solución fundamental). Dicha solución puede escribirse en la forma:

$$u_k^f(P,s) = \frac{1+\nu}{8\pi ER(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\,\delta_{sk}+\frac{x_s x_k}{R^2}\right] \qquad \text{(IV.21)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



A partir de las condiciones de equilibrio en el contorno (II.4) y de las ecuaciones (IV.7) y (IV.8) se deduce la siguiente "solución fundamental" tensional en elasticidad tridimensional:

$$q_k^f(P, s) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2}\left\{\frac{\partial R}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{sk} + 3\frac{x_s x_k}{R^2}\right] - (1-2\nu)\left[\frac{x_s}{R}\cdot n_k - \frac{x_k}{R}\cdot n_s\right]\right\} \qquad \text{(IV.22)}$$

En las expresiones (IV.21) y (IV.22) se ha introducido la siguiente nomenclatura:

- R: distancia del punto P al punto considerado.
- δ_{sk}: deltas de Kronecker.
- x_i: proyección sobre el eje $0x_i$ del radio vector (cuyo módulo es R) que une el punto P con el punto considerado.
- n: normal exterior a la superficie sobre la que se evalúan las tensiones y desplazamientos.
- n_i: cosenos directores de dicha normal.

- $\frac{\partial R}{\partial n}$: proyección unitaria del radio vector sobre la normal exterior a la superficie $= \frac{x_i n_i}{R}$.

Particularizando las expresiones (III.15) para las funciones definidas anteriormente, obtenemos:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$D_{kij} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3}\left[(1-2\nu)(\delta_{ki}\cdot x_j + \delta_{kj}\cdot x_i - \delta_{ij}\cdot x_k) + 3\frac{x_i x_j x_k}{R^2}\right] \qquad \text{(IV.23)}$$

$$S_{kij} = -\frac{G}{4\pi(1-\nu)R^3}\left\{\frac{3}{R}\frac{\partial R}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{ij}\cdot x_k + \nu(\delta_{ik}\cdot x_j + \delta_{jk}\cdot x_i) - \frac{5}{R^2}x_i\cdot x_j\cdot x_k\right] + \frac{3\nu}{R^2}(n_i\cdot x_j\cdot x_k + n_j\cdot x_i\cdot x_k) + \frac{1-2\nu}{R^2}\left[(3\cdot n_k\cdot x_i\cdot x_j + (\delta_{ik}\cdot n_j + \delta_{jk}\cdot n_i)R^2\right] - (1-4\nu)\delta_{ij}\cdot n_k\right\} \qquad \text{(IV.24)}$$

Hemos, pues, obtenido las expresiones características del análisis elástico tridimensional referidas a la "solución fundamental", aplicable en el METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

En las expresiones (IV.21) no se incluyen los términos procedentes de movimientos rígidos del conjunto, puesto que éstos no modifican el estado tensional del medio elástico.

V. ESTUDIO DE LA SOLUCION FUNDAMENTAL PARA EL MEDIO ELASTICO BIDIMENSIONAL

V.1. Introducción

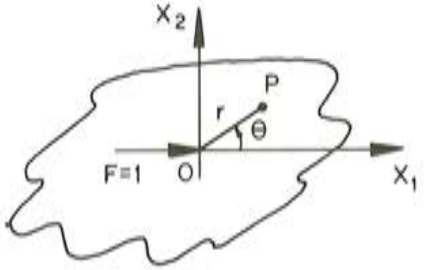
Cuando nos encontramos con problemas elásticos bidimensionales (estados de "tensión plana" o de "deformación plana") la "solución fundamental" se obtiene resolviendo el estado consistente en considerar el medio como indefinido y solicitado internamente por una carga puntual unitaria. Dicha solución fundamental difiere según se trate de un estado de "tensión plana" o de "deformación plana", pero, tal como vimos en el capítulo II, basta con conocer la solución correspondiente a uno de estos estados para poder obtener la correspondiente al otro. Por este motivo, sólo vamos a estudiar aquí la solución fundamental del estado de tensión plana, dejando para el final la formulación de la solución aplicable al estudio de los problemas de deformación plana.

En el estado de tensión plana, la solución fundamental es la que corresponde al caso de una "laja" indefinida solicitada por una carga unitaria actuante en su interior. Dicha solución, que pasamos a exponer a continuación viene recogida en la mayoría de los tratados de Elasticidad (ver referencias bibliográficas n° 1, n° 2 y n° 8) y puede obtenerse directamente por integración de la solución tridimensional expuesta en el capítulo anterior (para el caso de deformación plana).

V.2. Estado tensional de la laja indefinida solicitada por una carga unitaria actuante en un punto interior

Comencemos por considerar el caso en que la fuerza es paralela al eje $0x_1$. El estado tensional resultante, referido a un sistema de coordenadas polares con origen en el punto de aplicación de la carga, viene expresado mediante las relaciones:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{3+\nu}{4\pi}\,\frac{\cos\theta}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{1-\nu}{4\pi}\,\frac{\cos\theta}{r} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1-\nu}{4\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \end{aligned}\right] \qquad \text{(V.1)}$$

Puede comprobarse fácilmente que las expresiones anteriores verifican las condiciones siguientes:

a) Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ &\frac{1}{r}\,\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\,\tau_{r\theta}}{r} = 0 \end{aligned}\right] \qquad \text{(V.2)}$$

b) Ecuaciones de compatibilidad:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right](\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \qquad \text{(V.3)}$$

c) Las condiciones de contorno:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \operatorname{sen}\theta)\, r\, d\theta = -1 \\ &\int_0^{2\pi} (\sigma_r \operatorname{sen}\theta + \tau_{r\theta} \cos\theta)\, r\, d\theta = 0 \end{aligned}\right] \qquad \text{(V.4)}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_r = \lim_{r\to\infty} \sigma_\theta = \lim_{r\to\infty} \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{(V.5)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Pasando a un sistema cartesiano de referencia $0x_1 x_2$, la solución tensional anterior se transforma mediante las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\theta \operatorname{sen}^2\theta - 2\,\tau_{r\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \\
\sigma_{22} &= \sigma_r \operatorname{sen}^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta + 2\,\tau_{r\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \\
\sigma_{12} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{r\theta}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)
\end{aligned}\right] \qquad (V.6)$$

Sustituyendo (V.5) en (V.6), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{\cos\theta}{4\pi r}\,[(3+\nu)\cos^2\theta + (1-\nu)\operatorname{sen}^2\theta] \\
\sigma_{22} &= -\frac{\cos\theta}{4\pi r}\,[(1+3\nu)\operatorname{sen}^2\theta - (1-\nu)\cos^2\theta] \\
\sigma_{12} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi r}\,[(3+\nu)\cos^2\theta + (1-\nu)\operatorname{sen}^2\theta]
\end{aligned}\right] \qquad (V.7)$$

Si hubiésemos tomado la dirección del eje $0x_2$ coincidente con la de la carga, la solución tensional resultante se obtendría directamente de (V.7) dando un giro de noventa grados alrededor del eje perpendicular al plano $(0x_3)$. Dicha solución se expresa en la forma:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi r}\,[(1-\nu)\operatorname{sen}^2\theta - (1+3\nu)\cos^2\theta] \\
\sigma_{22} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi r}\,[(3+\nu)\operatorname{sen}^2\theta + (1-\nu)\cos^2\theta] \\
\sigma_{12} &= -\frac{\cos\theta}{4\pi r}\,[(3+\nu)\operatorname{sen}^2\theta + (1-\nu)\cos^2\theta]
\end{aligned}\right] \qquad (V.8)$$

V.3. Desplazamientos de la laja indefinida solicitada por una carga unitaria actuante en un punto interior

Introduciendo de nuevo el sistema de coordenadas polares utilizado en el apartado anterior, las deformaciones en un punto cualquiera de la laja vienen definidas por las expresiones:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta) = -\frac{3 + 2\,\nu - \nu^2}{4\,\pi\,E}\,\frac{\cos\theta}{r} \\
\epsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) = \frac{(1+\nu)^2}{4\,\pi\,E}\,\frac{\cos\theta}{r} \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{1-\nu^2}{2\,\pi\,E}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}
\end{aligned}\right] \qquad (V.9)$$

Si denominamos u al corrimiento radial y v al corrimiento tangencial (perpendicular al radio), las componentes del tensor deformación se derivan de éstos mediante las relaciones:

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\
\epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r\,\partial\theta} - \frac{v}{r}
\end{aligned}\right] \qquad (V.10)$$

Sustituyendo (V.9) en (V.10) e integrando la primera ecuación resultante, obtenemos:

$$u = -\frac{3 + 2\,\nu - \nu^2}{4\,\pi\,E}\cos\theta\,\log_e r + f(\theta) \qquad (V.11)$$

donde $f(\theta)$ es una función arbitraria de θ.

Sustituyendo (V.11) en la segunda ecuación (V.10) e igualando a la segunda ecuación (V.9), deducimos:

$$\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{(1+\nu)^2}{4\,\pi\,E}\cos\theta + \frac{3 + 2\,\nu - \nu^2}{4\,\pi\,E}\cos\theta\,\log_e r - f(\theta) \qquad (V.12)$$

Integrando la ecuación anterior, obtenemos:

$$v = \frac{(1+\nu)^2}{4\,\pi\,E}\operatorname{sen}\theta + \frac{3 + 2\,\nu - \nu^2}{4\,\pi\,E}\operatorname{sen}\theta\,\log_e r - \int f(\theta)\,d\theta + g(r) \qquad (V.13)$$

donde $g(r)$ es una función arbitraria de r.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Sustituyendo (V.11) y (V.13) en la tercera de las ecuaciones (V.10) e igualando a la tercera de las ecuaciones (V.9), deducimos:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{3 + 2\,\nu - \nu^2}{4\,\pi\,E}\,\text{sen}\,\theta\,\log_e r - \int f(\theta)\,d\theta + g(r) - r\,g'(r) \qquad (V.14)$$

Si derivamos (V.11) respecto de θ e igualamos a (V.14), se obtiene:

$$\int f(\theta)\,d\theta + f'(\theta) = g(r) - r\,g'(r) = 0 \qquad (V.15)$$

La integración de las ecuaciones (V.15) conduce a:

$$\left.\begin{aligned} g(r) &= A\,r \\ f(\theta) &= B\,\text{sen}\,\theta + C\cos\theta \end{aligned}\right] \qquad (V.16)$$

donde A, B y C son tres constantes arbitrarias, que representan un movimiento rígido del conjunto.

Sustituyendo (V.16) en (V.11) y (V.13) obtenemos la solución en desplazamientos buscada:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{3 + 2\,\nu - \nu^2}{4\,\pi\,E}\cos\theta\,\log_e r + B\,\text{sen}\,\theta + C\cos\theta \\ v &= \frac{\text{sen}\,\theta}{4\,\pi\,E}\,[(1+\nu)^2 + (3 + 2\,\nu - \nu^2)\log_e r] + B\cos\theta - C\,\text{sen}\,\theta + A\,r \end{aligned}\right] \qquad (V.17)$$

donde $\log_e$ designa a la función "logaritmo neperiano".

Pasando al sistema de referencia cartesiano $0x_1x_2$, los desplazamientos se transforman mediante las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta \\ u_2 &= u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta \end{aligned}\right] \qquad (V.18)$$

Si sustituimos las expresiones (V.17) en las ecuaciones (V.18), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{4\,\pi\,E}\left[(3 + 2\,\nu - \nu^2)\log_e r + (1+\nu)^2\,\frac{x_2^2}{r^2}\right] + C - A\,x_2 \\ u_2 &= \frac{(1+\nu)^2}{4\,\pi\,E}\,\frac{x_1 x_2}{r^2} + B + A\,x_1 \end{aligned}\right] \qquad (V.18')$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Si hubiésemos tomado la dirección del eje $0x_2$ coincidente con la de la carga, los desplazamientos resultantes se obtendrían análogamente, viniendo expresados por las ecuaciones:

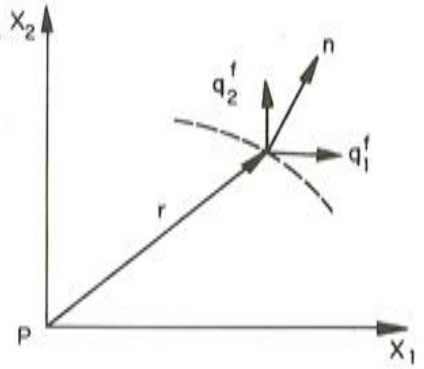
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{(1+\nu)^2}{4\pi E}\,\frac{x_1 x_2}{r^2} + C' - A' x_2 \\ u_2 &= -\frac{1}{4\pi E}\left[(3+2\nu-\nu^2)\log_e r + (1+\nu)^2\,\frac{x_1^2}{r^2}\right] + B' + A' x_1 \end{aligned}\right] \qquad (V.19)$$

donde A', B' y C' representan también constantes arbitrarias y son las componentes de un movimiento rígido del conjunto (traslación: C', B' y giro A').

V.4. Solución fundamental en tensión plana

A partir de las ecuaciones (V.18) y (V.19) resulta inmediato obtener la solución en desplazamientos correspondiente a la laja indefinida solicitada por una carga puntual unitaria, actuante en un punto P en la dirección "s" (solución fundamental en tensión plana). Dicha solución puede escribirse en la forma:

$$u_k^f(P, s) = -\frac{1+\nu}{4\pi E}\left[(3-\nu)\log_e r\,\delta_{sk} - (1+\nu)\,\frac{x_s x_k}{r^2}\right] \qquad (V.20)$$



Teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio en el contorno (II.18) y las ecuaciones (V.6) y (V.8), se obtiene la siguiente "solución fundamental" tensional para el estado de tensión plana:

$$q_k^f(P, s) = -\frac{1}{4\pi r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-\nu)\,\delta_{sk} + 2\,\frac{x_s x_k}{r^2}\,(1+\nu)\right] - (1-\nu)\left(\frac{x_s}{r}\,n_k - \frac{x_k}{r}\,n_s\right)\right\} \qquad (V.21)$$

En las expresiones (V.20) y (V.21) se ha introducido la nomenclatura siguiente:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

– r: distancia del punto P al punto considerado

– δ_{sk}: deltas de Kronecker

– x_i: proyección sobre el eje $0x_i$ del radio vector (cuyo módulo es r) que une el punto P con el punto considerado.

– n: normal exterior a la superficie sobre la que se evalúan las tensiones y desplazamientos.

– n_i: cosenos directores de dicha normal.

– $\partial r/\partial n$: proyección del radio vector sobre la normal exterior a la superficie dividida por el módulo de dicho radio vector (proyección unitaria) $= x_i\, n_i/r$.

Si particularizamos las expresiones (III.15) para las funciones definidas con anterioridad, obtenemos:

$$D_{kij} = -\frac{1}{4\,\pi\, r^2}\left[(1-\nu)\,(\delta_{ki}\, x_j + \delta_{kj}\, x_i - \delta_{ij}\, x_k) + 2\,\frac{1+\nu}{r^2}\, x_i\, x_j\, x_k\right] \qquad (V.22)$$

$$S_{kij} = -\frac{G}{2\,\pi\, r^2}\left\{\frac{2}{r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\,(1-\nu)\,\delta_{ij}\, x_k + \nu\,(\delta_{ik}\, x_j + \delta_{jk}\, x_i) - 4\,\frac{1+\nu}{r^2}\, x_i\, x_j\, x_k\right] + \right.$$

$$+\frac{2\,\nu}{r^2}\,(n_i\, x_j\, x_k + n_j\, x_i\, x_k) + \frac{1-\nu}{r^2}\left[2\, n_k\, x_i\, x_j + (\delta_{kj}\, n_i + \delta_{ki}\, n_j)\, r^2\right] -$$

$$\left. -\,(1-3\,\nu)\,\delta_{ij}\, n_k\right\} \qquad (V.23)$$

Hemos, pues, obtenido las expresiones características del análisis tensional en régimen de tensión plana aplicables en el METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

En las expresiones (V.20) no se incluyen los términos procedentes de movimientos rígidos del conjunto, puesto que éstos no modifican el estado tensional.

V.5. Solución fundamental en deformación plana

Las expresiones obtenidas en el apartado anterior pueden transformarse a partir de las relaciones (II.33) en las correspondientes a la solución fundamental en el estado de deformación plana. Las expresiones resultantes de dicha transformación son:

$$u_k^f(P, s) = -\frac{1}{8\,\pi\, G\,(1-\nu)}\left[(3-4\,\nu)\,\log_e r\,\delta_{sk} - \frac{x_s\, x_k}{r^2}\right] \qquad (V.24)$$

$$q_k^f(P, s) = -\frac{1}{4\,\pi\,(1-\nu)\, r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\,\nu)\,\delta_{sk} + 2\,\frac{x_s\, x_k}{r^2}\right] - \right.$$

$$\left. -\,(1-2\,\nu)\left[\frac{x_s}{r}\, n_k - \frac{x_k}{r}\, n_s\right]\right\} \qquad (V.25)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$D_{kij} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)(\delta_{ki}x_j + \delta_{kj}x_i - \delta_{ij}x_k) + \frac{2}{r^2}x_i x_j x_k\right] \qquad (V.25')$$

$$S_{kij} = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2}\left\{\frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{ij}x_k + \nu(\delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{4}{r^2}x_i x_j x_k\right] + \frac{2\nu}{r^2}(n_i x_j x_k + n_j x_i x_k) +$$

$$\left. + \frac{1-2\nu}{r^2}[2 n_k x_i x_j + (\delta_{kj} n_i + \delta_{ki} n_j) r^2] - (1-4\nu)\delta_{ij} n_k\right\} \qquad (V.26)$$

Al mismo resultado podría llegarse por integración de las expresiones (IV.21) a (IV.24) correspondientes a la solución tridimensional.

VI. FORMULACION MATRICIAL DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

VI. 1. Introducción

Como vimos en el capítulo III, el estado de desplazamientos de un sólido elástico lineal, solicitado por fuerzas másicas de componentes b_i y por fuerzas superficiales de componentes q_i, puede definirse en la forma:

$$\beta u_s(P) = \int_\Gamma (q_k u_k^f(P, s) - q_k^f(P, s) u_k)\, d\Gamma + \int_\Omega b_k u_k^f(P, s)\, d\Omega \qquad (VI.1)$$

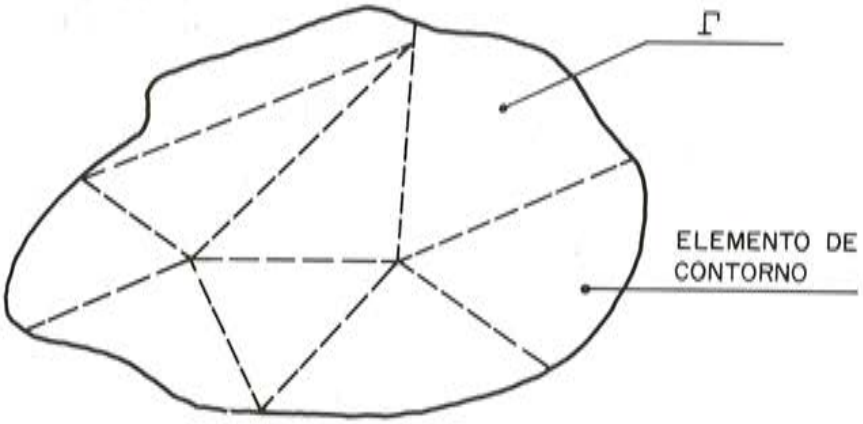
donde Ω representa el dominio elástico considerado y Γ a su contorno.

Como vemos, la ecuación (VI.1) permite obtener los desplazamientos en cualquier punto del sólido elástico una vez se hayan determinado los desplazamientos y las tensiones en el contorno, puesto que las restantes funciones que intervienen en ésta son conocidas a priori (según hemos visto en los capítulos IV y V). Por lo tanto, si el problema elástico es conocido en el contorno, podemos afirmar que también es conocido en todo el dominio (al menos teóricamente). Lamentablemente, la integración de las ecuaciones (VI.1) no puede abordarse directamente mas que en determinados casos particulares. En general, los valores de las componentes q_k sólo se conocen en parte del contorno (Γ_1), mientras que las componentes u_k sólo están prefijadas en otra parte del mismo (Γ_2), con lo que las ecuaciones (VI.1) resultan ser ecuaciones integrales de difícil solución analítica. Por esto, como veremos a continuación, suele recurrirse en la práctica a procedimientos numéricos de resolución, entre los que se encuentra el método de discretización, que, para el planteamiento efectuado, adopta la denominación de METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

VI.2. Definición de los elementos de contorno

Dividamos el contorno Γ en un conjunto de "n" elementos, denominados elementos de contorno, en los que supondremos que las funciones incógnitas, q_k y u_k, pueden expresarse mediante "funciones de forma" determinadas. Dichas funciones, normalmente polinó-



micas, determinan unívocamente los valores de las incógnitas en cualquier punto del elemento de contorno. En particular, admitamos que dichas funciones quedan definidas cuando se conocen sus valores en determinados puntos del elemento, denominados "nodos", y que se expresan en la forma:

$$\left.\begin{aligned} u_k^i &= \Phi_{kj}\, u_j^i \\ q_k^i &= \Psi_{kj}\, q_j^i \end{aligned}\right] \qquad \text{(VI.2)}$$

donde el índice "i" designa al elemento de contorno "i".

En cada elemento, los nodos se sitúan en los puntos de conexión con otros elementos, en puntos interiores al mismo, o, simultáneamente, en ambos sitios, dependiendo del carácter de las funciones Φ_{kj} y Ψ_{kj}.

En general, para las "funciones de forma", también denominadas "funciones de interpolación", se adoptan las mismas que en el METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (ver referencia bibliográfica núm. 4), siendo las más frecuentes las de tipo polinómico, que podemos clasificar en:

a) Funciones constantes: $\Phi_{kj} = \Psi_{kj} = \delta_{kj}$. En este caso sólo habrá un nodo por elemento, situado normalmente en su baricentro.

b) Funciones lineales: $\Phi_{kj} = \Psi_{kj} = \varphi_{ks}\, \delta_{sk}$, donde las funciones φ_{ks} son lineales. En este caso, si los elementos son planos (caso tridimensional) o lineales (caso bidimensional), suelen disponerse los nodos en los "vértices" o puntos extremos del elemento, siendo éstos los puntos donde se conecta con otros elementos.

c) Funciones de grado superior al lineal: $\Phi_{kj} = \Psi_{kj} = \varphi_{ks}\, \delta_{sk}$, donde las funciones φ_{ks} son de grado superior al lineal. En este caso, los nodos se disponen, además de en los vértices, en puntos interiores del elemento, siendo el número total de éstos variable, dependiendo del grado de las funciones φ_{ks}.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Hemos supuesto, como es frecuente, que las funciones de interpolación Φ_{kj} y Ψ_{kj} son del mismo orden, aunque resulta más consistente tomar las funciones Ψ_{kj} de un orden inferior a las Φ_{kj}, si bien, no es necesario para el desarrollo del método que expondremos a continuación.

En cuanto a la forma de los elementos, éstos suelen ser planos (en los problemas tridimensionales) o lineales (en los problemas bidimensionales), aunque pueden utilizarse indistintamente todas las tipologías habituales en el método de los elementos finitos para el análisis de láminas (si el problema es tridimensional).

Como veremos a continuación, la única discretización necesaria para abordar numéricamente el análisis elástico es la constituída por los elementos de contorno anteriormente definidos, de ahí la denominación del método como METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

VI.3. Planteamiento matricial del problema

Teniendo en cuenta las expresiones (VI.2), podemos aproximar las integrales, a lo largo del contorno, que figuran en el segundo miembro de la ecuación (VI.1) mediante las sumatorias siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \int_\Gamma q_k\, u_k^f(P, s)\, d\Gamma &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\int_{\Gamma_i} u_k^f(P, s)\, \Psi_{kj}\, d\Gamma \right) q_j^i \\ \int_\Gamma u_k\, q_k^f(P, s)\, d\Gamma &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\int_{\Gamma_i} q_k^f(P, s)\, \Phi_{kj}\, d\Gamma \right) u_j^i \end{aligned}\right] \qquad \text{(VI.3)}$$

Las integrales que figuran en los segundos miembros de las expresiones (VI.3) suelen evaluarse numéricamente mediante "cuadraturas" (ver referencias bibliográficas núm. 9 y núm. 10), pues, exceptuando el caso en que las funciones de interpolación sean constantes, o a lo sumo lineales, la integración directa suele ser compleja. Por otra parte, teniendo en cuenta que la resolución numérica se aborda habitualmente con ordenador, carece de interés, en general, el obtener analíticamente las expresiones de las "funciones primitivas" de las integrales, puesto que su evaluación numérica puede obtenerse fácilmente con gran aproximación. En cualquier caso, sea cual fuere el procedimiento de integración de los segundos términos de las expresiones (VI.3), obtenemos los coeficientes siguientes:

$$\left.\begin{aligned} Q_{ij}(P, s) &= \int_{\Gamma_i} q_k^f(P, s)\, \Phi_{kj}\, d\Gamma \\ U_{ij}(P, s) &= \int_{\Gamma_i} u_k^f(P, s)\, \Psi_{kj}\, d\Gamma \end{aligned}\right] \qquad \text{(VI.4)}$$

con los que la ecuación (VI.1) puede escribirse en la forma:

$$\beta\, u_s(P) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(U_{ij}(P, s)\, q_j^i - Q_{ij}(P, s)\, u_j^i \right) + \int_\Omega b_k\, u_k^f(P, s)\, d\Omega$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La integral que figura en el segundo miembro de la ecuación anterior puede evaluarse, bien por integración directa, bien numéricamente. Habitualmente, por análogas razones a las expuestas con anterioridad, suele recurrirse a este último procedimiento, recurriendo, para ello, a discretizar internamente el dominio en "m" elementos. Estos elementos interiores sólo intervienen en el proceso de evaluación numérica de dichas integrales y no tienen el carácter de "elementos elásticos" propiamente dichos, como sucede, por ejemplo, en el método de los elementos finitos. De una u otra forma, obtenemos los siguientes coeficientes:

$$B(P, s) = \int_{\Omega} b_k \, u_k^f(P, s) \, d\Omega = \sum_{r=1}^{r=m} \int_{\Omega_i} b_k \, u_k^f(P, s) \, d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{r=1}^{r=m} b_k \, u_k^f(P, s) \, d\Omega$$

que permiten expresar la ecuación (VI.1) como:

$$\beta \, u_s(P) = \sum_{i=1}^{i=n} (U_{ij}(P, s) \, q_j^i - Q_{ij}(P, s) \, u_j^i) + B(P, s) \qquad \text{(VI.5)}$$

Si particularizamos la expresión (VI.5) para los "nodos", obtenemos un sistema de "α n" ecuaciones con "α n" incógnitas (donde α es el producto del número de nodos de cada elemento por el número de grados de libertad de cada nodo) que puede expresarse en la forma:

$$\beta \, u_s^r = \sum_{i=1}^{i=n} (G_{ij} \, q_j^i - \hat{H}_{ij} \, u_j^i) + B_s^r \qquad \text{(VI.6)}$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} G_{ij} &= U_{ij}(r, s) \\ \hat{H}_{ij} &= Q_{ij}(r, s) \\ B_s^r &= B(r, s) \end{aligned}\right] \qquad \text{(VI.7)}$$

Las ecuaciones (VI.6) pueden escribirse abreviadamente, siguiendo la notación matricial, en la forma:

$$C \, U + \hat{H} \, U = G \, P + B \qquad \text{(VI.8)}$$

donde:

- C: matriz diagonal cuyos coeficientes valen $\delta_{ij}/2$
- U: vector, o matriz columna, formado por las componentes de los desplazamientos en los nodos.
- $\hat{H}$: matriz cuadrada cuyos elementos son los coeficientes $\hat{H}_{ij}$
- G: matriz cuadrada cuyos elementos son los coeficientes G_{ij}
- B: vector o matriz columna, cuyos elementos son los coeficientes B_s^r.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La ecuación (VI.8) equivale a:

$$H\,U = G\,P + B \tag{VI.9}$$

siendo H una matriz cuadrada cuyos términos son:

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}\,\delta_{ij} \tag{VI.10}$$

Obsérvese que no es preciso obtener directamente los valores de los términos diagonales de la matriz C (1/2 para los puntos situados en contornos suficientemente lisos), puesto que no hemos utilizado las condiciones generales de equilibrio del conjunto, que, como sabemos, equivalen a imponer que no se producen variaciones tensionales en el medio elástico cuando éste se ve sometido a movimientos rígidos. Así, si suponemos un movimiento unidad en todos los nodos del conjunto, la ecuación (VI.9) se escribe en la forma:

$$H\,I = 0 \tag{VI.11}$$

donde I es el vector cuyas componentes valen todas uno. De la ecuación (VI.11) resulta inmediato:

$$H_{ii} = -\sum_{i \neq j} H_{ij} \tag{VI.12}$$

De una u otra forma, la ecuación final (VI.9) constituye un conjunto de "α n" ecuaciones lineales con "α n" incógnitas, cuya resolución proporciona las incógnitas necesaria para que puedan determinarse los estados de tensión y de deformación en todo el dominio elástico.

VI.4. Solución de la ecuación de contorno

Como vimos en (VI.1), en general, se conocen los valores de las componentes de las fuerzas superficiales en cierta parte del contorno (Γ_1), mientras que los desplazamientos vienen prefijados en otra parte del mismo (Γ_2), verificándose que:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \tag{VI.13}$$

Sea $p = \alpha\,n$ el número total de ecuaciones del sistema (VI.9). Denominemos p_1 al número total de componentes conocidas de las fuerzas superficiales (nodos pertenecientes al subconjunto Γ_1) y p_2 al número total de componentes conocidas de los desplazamientos en los nodos (nodos pertenecientes al subconjunto Γ_2). Teniendo en cuenta (VI.13) se debe verificar:

$$p = p_1 + p_2 \tag{VI.14}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

con lo que resulta que el sistema (VI.9) posee tantas ecuaciones como incógnitas. Podemos, por tanto, escribir dicha ecuación en la forma:

$$A \cdot X = F \qquad \text{(VI.15)}$$

siendo:

– A: matriz cuadrada obtenida a partir de los coeficientes de las p incógnitas del sistema (VI.9).

– X: vector compuesto por p_1 componentes de desplazamientos y p_2 componentes de fuerzas superficiales.

– F: vector cuyas p componentes son conocidas.

La resolución del sistema de ecuaciones (VI.15) por cualquiera de las técnicas habituales de cálculo matricial proporciona las p incógnitas buscadas:

– p_1 componentes de desplazamientos (nodos del subconjunto Γ_1)

– p_2 componentes de fuerzas superficiales (nodos del subconjunto Γ_2).

En general, la matriz A no es simétrica, lo que diferencia a este método de otros habituales en análisis elástico.

Una vez determinadas las componentes nodales, las ecuaciones (VI.2), unidas a las (III.12) y (III.16) resuelven totalmente el problema elástico en los puntos interiores al dominio Ω.

VI.5. Extensión del método a los contornos no lisos

Como vimos en el capítulo III, la deducción de la ecuación (VI.1), base del planteamiento matricial anterior, quedaba condicionada en el contorno a que éste fuese "suficientemente liso", no resultando válida en caso contrario. En la práctica, en la mayor parte de los casos puede asimilarse el contorno, o contornos, del dominio elástico a un conjunto de elementos lisos que lo reproduzcan con suficiente aproximación, siendo, por tanto, aplicable sin modificación el procedimiento de cálculo anteriormente descrito. No obstante, en ciertos casos particulares, resulta necesario tomar en consideración las posibles discontinuidades del contorno. Tal es el caso, por ejemplo, en que se trate de analizar el estado tensional en un cilindro, donde los puntos situados en el perímetro de las bases tienen distinto plano tangente, según se les considere como pertenecientes a las bases o a la superficie lateral del cilindro, a uno u otro lado de los mismos. En estos casos, la aplicación del método anteriormente expuesto conduce a discontinuidades en dichos nodos, que resultan incompatibles con las condiciones generales de deformación y de solicitación admitidas en el cálculo elástico.

Para obviar este inconveniente hay que introducir determinadas condiciones suplementarias, que garanticen la continuidad de la solución en dichos puntos del contorno. La forma más simple de hacerlo, aunque ello incremente el número de ecuaciones del sistema (VI.15), es la introducción de "nodos múltiples" (ver referencia bibliográfica n° 5), entendiendo por tales a aquéllos que se sitúan junto a los nodos teóricos y que se suponen pertenecen, independientemente, a cada uno de los elementos de contorno que allí concurren. Procediendo de esta forma, se incluyen en el sistema (VI.9) las ecuaciones correspondientes a cada uno de los nodos en que se desdobla el "nodo múltiple", con lo que se incrementa el número de incógnitas. Sin embargo, también podemos aumentar el número de ecuaciones

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

para conseguir un sistema completo, puesto que los nodos que concurren en el mismo "nodo múltiple" han de verificar:

a) La igualdad de desplazamientos.

b) La compatibilidad de deformaciones.

c) La compatibilidad tensional.

Este grupo de condiciones colabora al conjunto siempre con el suficiente número de ecuaciones auxiliares como para que el sistema sea completo. La utilización de unas u otras de las condiciones a), b) o c) depende de la naturaleza del problema de contorno considerado (nodo perteneciente al subconjunto Γ_1 o al subconjunto Γ_2).

VI.6. Aplicaciones prácticas

No vamos a exponer aquí resultados correspondientes a la aplicación práctica del método, puesto que rebasaríamos con mucho el cometido del presente trabajo. No obstante, y remitiéndonos a las referencias bibliográficas n° 3 y n° 5, podemos afirmar que la aproximacion de resultados conseguida con el presente método es más que satisfactoria, rebasando incluso, en determinados problemas, a la conseguida con el método de los elementos finitos.

VII COROLARIO

VII. 1. Introducción

A la vista de lo expuesto en anteriores capítulos, podemos afirmar que la solución general del problema elástico en un dominio genérico queda definida en cuanto se conozca: una "solución fundamental", relativa al problema elástico sobre un dominio "exterior" al considerado, y la solución particular de contorno correspondiente al propio dominio en cuestión. Dicha conclusión, general para los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, se ha obtenido aquí directamente por aplicación sistemática del TEOREMA DE RECIPROCIDAD a la determinación de desplazamientos genéricos en el medio elástico, coincidiendo los resultados obtenidos con los que se derivan de la integración de las ecuaciones de equilibrio interno mediante las fórmulas de Green (método directo convencional). Procediendo de esta forma, creemos haber acercado más al lector a la significación física del problema planteado, huyendo, a su vez, de la complejidad inherente al planteamiento puramente matemático del problema.

En cuanto a la "solución fundamental", hemos visto que, para los problemas de carácter tridimensional, podemos utilizar la solución dada por Lord Kelvin para el estado tensional del medio elástico indefinido solicitado internamente por una carga unitaria de dirección arbitraria.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

VII.2. Comparación con el método de los elementos finitos

Si tratamos de comparar el METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO con el METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS, encontramos como más destacables los siguientes aspectos:

a) La discretización del M.E.C. sólo se extiende al contorno, mientras que en el M.E.F. abarca a todo el dominio elástico.

b) Los elementos resultantes de la aplicación del M.E.C. tienen una dimensión menos que los correspondientes de la aplicación del M.E.F.

c) Los puntos nodales considerados en el M.E.C. no tienen necesariamente que estar situados en las zonas (vértices o aristas) de interconexión entre elementos, como ocurre en el M.E.F.

d) Las soluciones fundamentales consideradas en el M.E.C. se caracterizan por verificar, en el interior del dominio elástico, las ecuaciones de equilibrio interno, mientras que las funciones de forma aplicables al M.E.F. satisfacen, todas o en parte, las condiciones de contorno.

e) Con el M.E.C. pueden analizarse dominios indefinidos con contornos situados en el infinito, lo que no puede hacerse con el M.E.F., a no ser que se reduzca el "dominio real" y se asimile mediante un "dominio ficticio" de dimensiones finitas.

f) En general, la aplicación del M.E.C. conduce a una reducción considerable del número de ecuaciones a resolver, frente a las necesarias con el M.E.F., lo que lógicamente repercute en una mayor "economía" de explotación.

g) En general, con el M.E.C. se necesitan menos "datos" para definir el problema a analizar que con el M.E.F., considerando el problema desde la perspectiva de su resolución mediante programas de ordenador.

h) La aproximación de resultados conseguida con el M.E.C. es, en general, superior a la proporcionada con el M.E.F., pues, si bien con este último se consigue una gran aproximación en la estimación de los valores de las variables incógnitas iniciales (desplazamientos en los problemas elásticos) dicha precisión se va perdiendo a medida que aumenta el grado de derivación de las mismas (caso de las tensiones).

i) En general, las matrices resultantes de la aplicación del M.E.C. tienen un ancho de banda superior a las que se derivan de la aplicación del M.E.F., lo que hace aconsejable, en ocasiones, el subdividir el dominio global en varios dominios parciales interconectados entre sí.

VII.3. Conclusiones finales

Como resumen de cuanto acabamos de exponer, estamos en condiciones de afirmar que el METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO presenta múltiples ventajas, frente a otros métodos convencionales, de cara a su utilización para la resolución de problemas característicos del análisis elástico. Esto hace suponer que su incorporación a la práctica habitual del ejercicio profesional va a efectuarse rápidamente en los próximos años, sustituyendo o complementando a los métodos tradicionales de análisis. Al respecto, queremos destacar que dicha incorporación no implica necesariamente la caída en desuso de otras técnicas convencionales de cálculo, sino, por el contrario, su perfeccionamiento y utiliza-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ción conjunta. En particular, la aparición del método de los elementos de contorno ha supuesto un complemento de gran importancia para el método de los elementos finitos, ofreciendo entre ambos grandes posibilidades de utilización conjunta en determinado tipo de problemas cuyas características singulares aconsejen abordar el análisis simultáneamente por ambos procedimientos. No entraremos aquí en más detalles sobre el particular, remitiendo al lector interesado en el planteamiento conjunto del problema elástico con ambos métodos a las referencias bibliográficas n° 3 y n° 5.

VIII. BIBLIOGRAFIA

Las referencias bibliográficas incluidas en el texto corresponden a las obras siguientes:

– (1): SOKOLNIKOFF. "Mathematical Theory of Elasticity". Segunda Edición. Mc Graw-Hill Book Co., 1956.

– (2): TIMOSHENKO. "Teoría de la Elasticidad". Traducción española de la segunda edición original. Ediciones Urmo, 1968.

– (3): BREBBIA: "The Boundary Element Method for engineers". Pentech Press, 1978.

– (4): ZIENKIEWICZ: "The Finite Element Method in Engineering Science". Segunda Edición. Mc Graw-Hill Book Co., 1971.

– (5): BREBBIA: "Recent Advances in Boundary Element Methods". Pentech Press, 1978.

– (6): DOU: "Ecuaciones en Derivadas Parciales". Editorial Dossat, S.A., 1970.

– (7): LOVE: "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity". Cuarta Edición. Dover Publications, 1944.

– (8): TORROJA: "Elasticidad". Cuarta Edición. Editorial Dossat, S.A., 1967.

– (9): ABELLANAS: "Matemática para Físicos e Ingenieros". Editorial Romo, 1963.

– (10): STROUD y SECREST: "Gaussian quadrature formulas". Prentice Hall, 1966.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado. 1ª Parte. Método de las curvaturas de referencia

Hugo Corres Peiretti
Dr. Ingeniero de Caminos
ATEP. Instituto Eduardo Torroja

Francisco Morán Cabre
Dr. Ingeniero de Caminos
Instituto Eduardo Torroja

1ª Parte. Método de las curvaturas de referencia

1. INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de estructuras esbeltas de hormigón armado constituye un problema con grandes complicaciones debido a que se trata de un fenómeno altamente no lineal.

Existe por un lado, la no linealidad geométrica debida a la influencia no despreciable de la deformación sobre los esfuerzos. Este problema es habitualmente conocido con el nombre de efecto de segundo orden.

Existe además, la no linealidad física debida a la respuesta no lineal del hormigón armado. El diagrama momento-curvatura de una sección de hormigón armado es un diagrama no lineal.

La complejidad es aun mayor debido a que en este tipo de estructuras es necesario comprobar dos estados límites últimos: el estado límite último de agotamiento, que se produce cuando la estructura deformada alcanza un estado de equilibrio estable con deformaciones que constituyen un estado de agotamiento en la sección crítica, y el estado límite último de inestabilidad, que se produce cuando la estructura deformada alcanza un estado de equilibrio inestable sin que en ninguna sección se produzca un estado de deformación de agotamiento.

Las consecuencias inmediatas de las particularidades comentadas, respecto al análisis y dimensionamiento de este tipo de estructuras, pueden sinterizarse de la siguiente forma:

1. No es posible realizar el análisis de esfuerzos y el dimensionamiento de secciones en forma independiente, tal como se hace corrientemente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Para conocer los esfuerzos teniendo en cuenta la deformación de la estructura es necesario evaluar esta deformación utilizando los diagramas momento-curvatura de las distintas secciones.

El diagrama momento-curvatura de una sección de hormigón armado depende de la forma de la sección, cuantía y distribución de armaduras, características de los materiales constitutivos y axil actuante.

2. No se cumple el principio de superposición. La estructura se debe comprobar para cada hipótesis de carga independiente.

3. Es necesario comprobar dos estados límites últimos: el de agotamiento, que depende de las deformaciones de la sección, y el de inestabilidad, que depende de la deformación de la estructura.

En la actualidad existen dos procedimientos disponibles para el análisis de este tipo de estructuras:

I - Comprobación global mediante cálculo no lineal

Este procedimiento sólo permite la comprobación de estructuras esbeltas de hormigón armado. Para su utilización es necesario partir de un predimensionamiento tanto de las dimensiones geométricas como de la cuantía y distribución de armadura de cada sección.

La comprobación constituye un proceso iterativo hasta encontrar el estado deformado compatible y equilibrado, utilizando los diagramas momento-curvatura de cada sección que representan la respuesta de la misma para cada estado de solicitación.

Un procedimiento de este tipo implica necesariamente la utilización de grandes ordenadores. Por otra parte es necesario tener en cuenta que la única información que se obtiene se refiere a la respuesta de la estructura frente a cada hipótesis de carga. Un análisis de este tipo no permite conocer directamente el grado de sobredimensionamiento que pudiera existir.

II - Soporte equivalente

Constituye el procedimiento simplificado más difundido y representa una alternativa posible para el dimensionamiento de este tipo de estructuras.

Este procedimiento propone el análisis de esfuerzos mediante un cálculo elástico lineal de primer orden, y el dimensionamiento de cada elemento esbelto sustituyéndolo por un soporte equivalente biarticulado de sección constante.

El soporte equivalente se considera sometido a los esfuerzos obtenidos en el cálculo elástico lineal de primer orden, y el efecto sobre el mismo del resto de la estructura se tiene en cuenta considerando una longitud adecuada para dicho soporte.

Para la obtención de la longitud del soporte equivalente existen distintas propuestas aunque las más difundidas son el estudio de la deformada elástica de la estructura (1) (2) o el uso de nomogramas (3) (4).

El estado actual del análisis y dimensionamiento del soporte equivalente puede describirse en forma rápida tal como sigue:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

I - Métodos de comprobación.

Los métodos de comprobación de soportes equivalentes permiten, con una propuesta más simple, la comprobación mediante cálculo no lineal de este tipo de estructuras.

La no linealidad mecánica se tiene en cuenta mediante el diagrama momento-curvatura de la sección del soporte equivalente.

La no linealidad geométrica se tiene en cuenta en forma simplificada a través de la hipótesis de deformada conocida del soporte. Esta hipótesis consiste en admitir que la deformada del soporte se puede expresar por una función conocida, y tiene la ventaja importante de que permite, en forma más o menos sencilla, obtener una relación entre la deformación total de la sección más solicitada y su curvatura, que se conoce como directriz geométrica.

Las condiciones de equilibrio y compatibilidad se plantean sólo en la sección más solicitada y se cumplen simultáneamente en los puntos comunes del diagrama momento-curvatura y la directriz geométrica.

Los métodos de comprobación para soportes equivalentes más difundidos son:

a) Método de la Columna Modelo (MCM) (1) (2)

b) Método de la Deformada Senoidal (MDS) (5) (6) (7) (8) (9).

Los métodos de comprobación propuestos permiten representar con adecuada precisión el comportamiento de los soportes equivalentes, aunque mantienen los inconvenientes indicados para la comprobación global mediante cálculo no lineal: no permiten el dimensionamiento y necesitan el uso de ordenadores.

II - Tablas y ábacos de dimensionamiento

Mediante la aplicación de los métodos de comprobación en forma sistemática se presentan en la bibliografía tablas y ábacos de dimensionamiento:

a) Diagramas de interacción de soportes esbeltos (1) (10) (11)

b) Tablas de dimensionamiento (1)

c) Nomogramas (12)

Estos elementos, que constituyen un medio de dimensionamiento directo (permiten obtener directamente la cuantía estricta correspondiente al soporte estudiado), no proponen en sí mismos un medio de dimensionamiento y tienen el inconveniente de que, debido a la gran cantidad de parámetros que intervienen en el problema, una colección que tenga en cuenta los parámetros más frecuentes debería tener un gran número de ábacos o tablas. Por otra parte obligan a interpolaciones para los valores no considerados que dificultan notablemente su uso, ya que suelen ser necesarias interpolaciones entre distintos gráficos o tablas.

III - Fórmulas de dimensionamiento indirecto.

El procedimiento más frecuentemente empleado son las fórmulas de dimensionamiento indirecto propuestas en las normas de los distintos países:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

a) Excentricidad o Momento complementario (1) (13) (14) (15)

b) Magnificación del Momento (4) (10)

c) Excentricidad ficticia (17) (18).

La filosofía general de estas fórmulas consiste en reducir el problema del soporte equivalente a un problema de flexión compuesta utilizando como esfuerzos de cálculo los obtenidos en el análisis de primer orden transformados mediante las distintas fórmulas (excentricidad o momento complementario, coeficiente de magnificación del momento, excentricidad ficticia) para tener en cuenta los efectos de la esbeltez.

Estas fórmulas, muy cómodas para el uso cotidiano del proyectista, constituyen simplificaciones más o menos groseras que conducen a resultados generalmente muy de lado de la seguridad y en algunos casos a resultados inseguros.

Un análisis crítico del estado actual del análisis y dimensionamiento de los soportes equivalentes permite obtener las siguientes conclusiones:

I - Los métodos de comprobación (dado el soporte completamente definido) permiten representar el comportamiento de los soportes equivalentes con adecuada precisión.

II - No existe en la bibliografía un método de dimensionamiento directo.

III - Las fórmulas de dimensionamiento indirecto, ampliamente difundidas, constituyen simplificaciones groseras que conducen el problema a un dimensionamiento en flexión compuesta (nuevamente diagramas de interacción o fórmulas simplificadas) y dan resultados inseguros o muy del lado de la seguridad.

2 METODO DE LAS CURVATURAS DE REFERENCIA

El Método de las Curvaturas de Referencia (MCR) (19) (20) (21) que se presenta constituye el resultado de un trabajo de investigación planteado con objeto de encontrar un método de dimensionamiento directo para soportes equivalentes que resolviese los problemas que presentan actualmente los procedimientos existentes.

El objetivo que se persiguió en el transcurso de la investigación fue encontrar un método de dimensionamiento directo que pudiese satisfacer las siguientes exigencias:

I - Generalidad: Se intentaba buscar un procedimiento válido para soportes con sección transversal de forma cualquiera y con distintas distribuciones de armadura, así como para distintas características del hormigón y el acero.

II - Precisión: Tal como se ha comentado en el apartado anterior, los métodos existentes de mejor precisión son los métodos de comprobación. Se intentaba buscar un procedimiento que permitiese obtener resultados de precisión comparable con los MCM o MDS.

III - Representación del fenómeno físico: Dada la complejidad del fenómeno tratado es necesario que las simplificaciones que se realizan para obtener un procedimiento operativo permitan siempre dejar claro el fenómeno que se está analizando. Las fórmulas simplificadas utilizadas por los distintos códigos para el dimensionamiento de soportes esbeltos, representan el efecto de la esbeltez como un aumento de momento que siempre conduce al agotamiento de la sección más solicitada y no se puede deducir de ninguna forma que el dimensionamiento puede ser debido, y frecuentemente lo es, al estado límite último de inestabilidad.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

IV - Facilidad de uso: El método buscado ha de servir para uso cotidiano del proyectista y por lo tanto debería ser de cómoda aplicación.

En los siguientes apartados se exponen de forma detallada las distintas hipótesis adoptadas y su justificación, así como las ideas fundamentales del funcionamiento del método propuesto.

2.1. No linealidad mecánica. Hipótesis relativas a los diagramas momentos-curvaturas

Debido al comportamiento no lineal del hormigón y el acero, así como al fenómeno de fisuración, no existe proporcionalidad entre las curvaturas y los momentos para un axil dado.

Esta no linealidad intrínseca del hormigón armado debe tenerse adecuadamente en cuenta, ya que resulta imprescindible para la evaluación correcta de las deformaciones del soporte.

En el MCR la no linealidad mecánica se tiene en cuenta utilizando el diagrama momento curvatura correspondiente a la sección del soporte que se analiza.

Para la obtención de los diagramas momentos-curvaturas se han utilizado las siguientes hipótesis, que corresponden a las propuestas en la Instrucción Española y por el CEB:

I - Las secciones normales a la directriz se mantienen planas y normales a ella durante la deformación.

Esta hipótesis, que es generalmente aceptada, es particularmente válida para el caso de elementos esbeltos como los que se estudian.

II - Bajo la acción de las solicitaciones, las armaduras tienen la misma deformación que el hormigón que las rodea. Se acepta la existencia de perfecta adherencia entre el hormigón y el acero.

III - Se admite que la tensión de la fibra de hormigón corresponde unívocamente al valor de la deformación en dicha fibra, de acuerdo con el diagrama tensión-deformación de la figura 1a.

Para deformaciones de compresión el diagrama adoptado es el parábola rectángulo. Este diagrama, propuesto por el C.E.B. para el cálculo de esfuerzos resistentes en agotamiento, no representa adecuadamente el módulo de elasticidad inicial, y por lo tanto para pequeñas curvaturas puede resultar insatisfactorio. Sin embargo, si se tiene en cuenta que la sección más solicitada presenta un estado de deformación importante cuando se produce tanto el estado límite último de agotamiento como el de inestabilidad, y si se considera que el equilibrio y compatibilidad del soporte sólo se plantean en esta sección, los estados en los que las deformaciones son pequeñas no suelen influir en el dimensionamiento. Por esta razón, y dado que utilizar otro tipo de diagrama tensión-deformación para el hormigón en compresión, que represente adecuadamente el módulo de elasticidad inicial, puede plantear complicaciones de cálculo numérico, se justifica la decisión adoptada.

Para deformaciones de tracción se considera siempre tensión nula, esto es, se desprecia la colaboración de la resistencia a tracción del hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

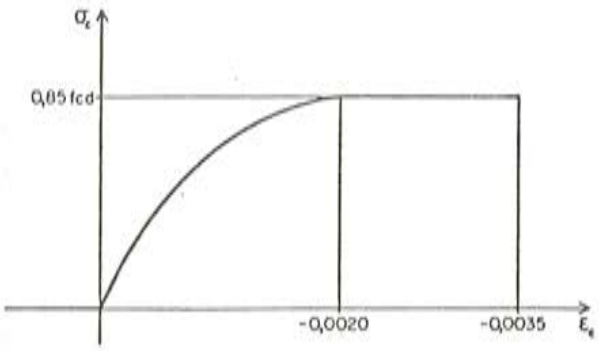


Fig. 1a. Diagrama tensión - deformación del hormigón.

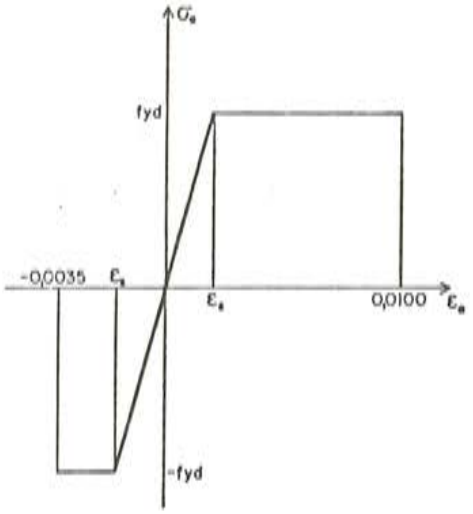
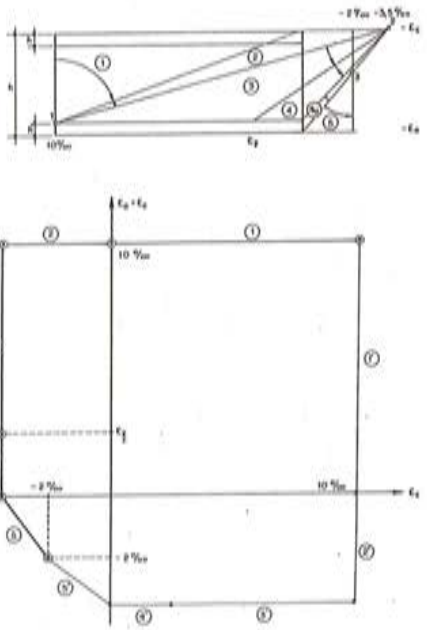


Fig. 1b. Diagrama tensión-deformación del acero.

IV - La deformación en cualquier armadura se obtiene a partir de la deformación de la fibra correspondiente de acuerdo con el diagrama tensión-deformación de la figura 1b.

Solamente se ha considerado acero dureza natural ya que éste es el acero más frecuentemente utilizado. Sin embargo el MCR (Método de las Curvaturas de Referencia) se puede utilizar para secciones armadas con aceros endurecidos en frío, sólo que en este caso el diagrama momento-curvatura debe obtenerse utilizando el diagrama tensión-deformación correspondiente.

V - Se admiten como dominios de deformación del hormigón y el acero en el estado límite último de agotamiento los indicados en la figura 2. En ella se representa el diagrama de pivotes y los distintos estados de deformación de agotamiento definidos por las deformaciones de la fibra de hormigón más comprimida y la deformación de la armadura más traccionada.



Dig. 2. Estados de deformación de agotamiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Definidas las hipótesis, el diagrama momento-curvatura de una sección determinada para un axil dado se obtiene mediante un proceso iterativo a través del cual se resuelve para cada curvatura el sistema de ecuaciones siguientes:

$$N_i = \int_0^{x_1} \sigma_c(\epsilon_c)\, b(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si}\,(\epsilon_{si})\, A_i \qquad \text{ec. 1}$$

$$M_i = \int_0^{x_n} \sigma_c(\epsilon_c)\, b(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si}\,(\epsilon_{si})\, x_i\, A_i \qquad \text{ec. 2}$$

siendo:

N_i = Axil resistente;
M_i = Momento resistente;
σ_c = Tensión de una fibra genérica de hormigón;
ϵ_c = Deformación de una fibra genérica de hormigón;
σ_s = Tensión de una fibra genérica de acero;
ϵ_s = Deformación de una fibra genérica de acero;
$b(x)$ = Anchura de la sección de hormigón a una profundidad x;
x = Profundidad de una fibra genérica de hormigón;
x_i = Profundidad de una fibra genérica de acero;
x_n = Profundidad del eje neutro.

Para cada curvatura se varía la posición del eje neutro hasta que la ecuación 1 de un axil igual al existente de la sección. Resolviendo luego la ecuación 2 con estos valores de curvatura y profundidad del eje neutro se obtiene el momento que con la curvatura de partida define un punto del diagrama momento-curvatura.

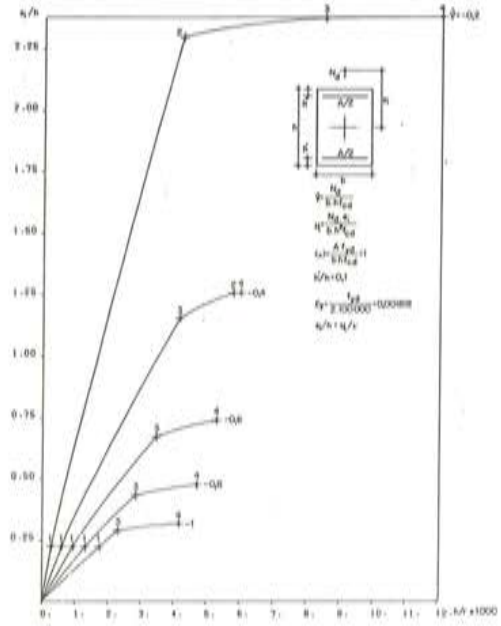
Variando con un incremento adecuado las curvaturas de la sección, desde 0 a la curvatura de agotamiento correspondiente, se puede definir por puntos el diagrama momento-curvatura.

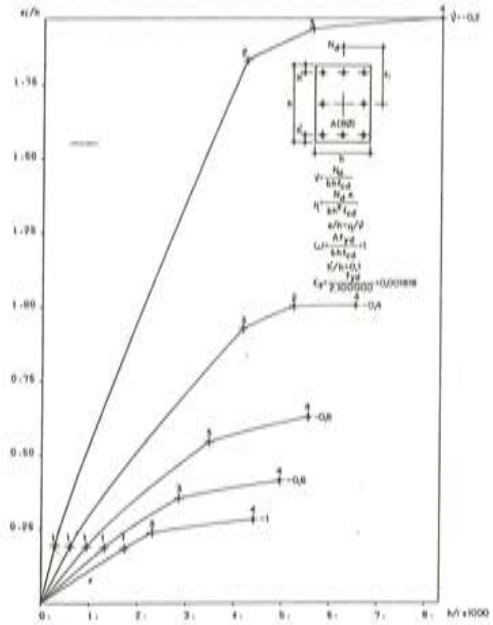
A los efectos del MCR se ha utilizado una representación diferente de los diagramas momentos curvaturas, conocida como directriz mecánica, que relaciona las excentricidades y las curvaturas.

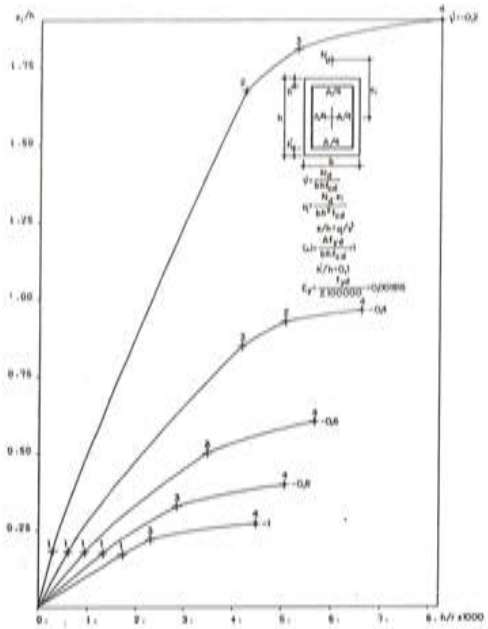
En las figuras 3a, 3b y 3c se muestran las directrices mecánicas correspondientes a secciones rectangulares con diferente distribución de armadura y distintos axiles.

Tal como puede pensarse, la construcción de las directrices mecánicas (22) constituye una tarea laboriosa que necesita del uso de un ordenador. Por esta razón, la idea más significativa del MCR es la de utilizar una simplificación adecuada de la directriz mecánica que facilita y permite el dimensionamiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025







Figs. 3a, b, c. No linealidad mecánica. Directrices mecánicas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

2.2. No linealidad geométrica. Hipótesis de deformada conocida

Se entiende como no linealidad geométrica el efecto producido por las deformaciones sobre los esfuerzos.

Para conocer el estado real de deformaciones de un soporte es necesario integrar doblemente el diagrama de curvaturas reales del mismo y proceder iterativamente hasta encontrar una deformada que sea compatible y equilibrada.

Una hipótesis muy difundida, que ha sido adoptada desde las primeras investigaciones sobre soportes esbeltos, es la de suponer que se conoce la forma que tiene la deformada del soporte. En otras palabras suponer una distribución adecuada de curvaturas a lo largo del elemento, y plantear el equilibrio y la compatibilidad, sólo en una sección, la sección más solicitada o sección crítica.

De esta forma es posible obtener una relación que vincula la excentricidad total y la curvatura de la sección más solicitada, y que se conoce con el nombre de directriz geométrica.

Utilizar el concepto de directriz geométrica simplifica notablemente el proceso de cálculo de una deformada compatible y equilibrada para un soporte con unas determinadas condiciones de carga. Sólo se trata de buscar puntos comunes de la directriz geométrica y mecánica, que representan estados de equilibrio.

Los métodos de comprobación para soportes equivalentes siempre utilizan esta hipótesis.

En el MCM se considera que el soporte tiene una distribución de curvaturas de tipo senoidal.

Definida una distribución de curvaturas se puede conocer, tal como se ha indicado, la deformada del soporte que resulta de la doble integral de las curvaturas. Siendo la distribución de curvaturas senoidal su doble integral será una senoidal.

Evaluando la expresión de la deformada para la sección crítica, se puede obtener la expresión:

$$e^{II} = \frac{\ell^2}{10} \frac{1}{r} \qquad \text{ec. 3}$$

siendo:

e^{II} = Excentricidad de segundo orden de la sección crítica;
ℓ = Longitud del soporte equivalente;
$1/r$ = Curvatura de la sección crítica;
$10 \sim \pi^2$

que vincula la excentricidad de segundo orden y la curvatura de la sección crítica.

En este caso, que sólo permite analizar soportes con excentricidades de primer orden iguales en los extremos, se puede expresar la relación entre la excentricidad total y la curvatura de la acción crítica como sigue:

$$e^t = e_0 + \frac{\ell^2}{10} \frac{1}{r} \qquad \text{ec. 4}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

siendo:

e^t = Excentricidad total;
e_0 = Excentricidad de primer orden.

En general, conocida la longitud de un soporte equivalente y la excentricidad de primer orden es posible obtener su directriz geométrica correspondiente. Definida la forma, dimensiones, cuantía y distribución de armaduras de la sección transversal y las características de los materiales que la constituyen, y con el axil correspondiente, se puede además obtener su directriz mecánica.

La comprobación consiste en estudiar ambas directrices y averiguar si existen puntos de intersección entre ambas. Cualquier punto de intersección representa un estado de equilibrio del soporte.

En la figura 4 se muestra gráficamente el MCM para un soporte genérico. Como puede observarse, la directriz geométrica ($e_1/e_2 = 1$) corta a la directriz mecánica en dos puntos.

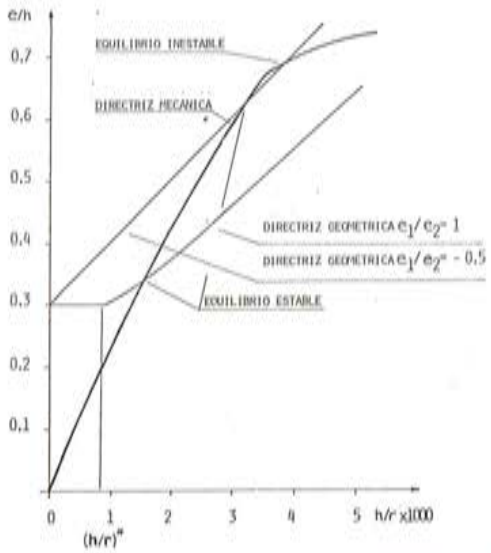


Fig. 4. No linealidad geométrica. Hipótesis de distribución de curvaturas senoidal MCM.

El primero representa un estado de equilibrio estable, ya que para pequeñas variaciones de curvatura el soporte siempre restablecerá su equilibrio para la curvatura correspondiente a la intersección. El segundo representa un estado de equilibrio inestable, ya que cualquier aumento de curvatura conduce irremediablemente a incrementos mayores de los esfuerzos solicitantes (directriz geométrica) que los resistentes (directriz mecánica).

Si bien la hipótesis de distribución de curvaturas senoidal adoptada por el MCM conduce a resultados de suficiente precisión, y da lugar a una expresión sencilla de la directriz geométrica, tiene el inconveniente de no ser directamente aplicable al caso de soportes con excentricidades desiguales en las articulaciones.

Para la solución de este problema el MCM propone una simplificación, que consiste en admitir que el comportamiento de un soporte con excentricidades desiguales en las articulaciones puede asimilarse al comportamiento del mismo soporte con una excentri-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

cidad equivalente constante en su longitud y cuyo valor está definido por la siguiente expresión:

$$e_{0eq} = 0{,}6\, e_2 + 0{,}4\, e_1 \qquad \text{ec. 5}$$

siendo:

e_{0eq} = Excentricidad equivalente;
e_2 = La mayor, en valor absoluto, de las excentricidades de primer orden en los extremos del soporte;
e_1 = La menor, en valor absoluto, de las excentricidades de primer orden en los extremos del soporte.

La directriz geométrica así definida resulta del tipo de la dibujada en la figura 4, indicada con $e_1/e_2 \neq 1$.

Como puede verse, la directriz geométrica de soportes con excentricidades distintas en las articulaciones se compone de dos tramos rectos. El primero, horizontal, representa el rango de curvaturas para el que la excentricidad máxima sigue siendo la máxima de primer orden. En este tramo existen excentricidades de segundo orden en las secciones interiores del soporte, pero la suma de éstas y las de primer orden correspondientes no supera la máxima de la articulación. La sección crítica es la sección de la articulación con mayor excentricidad de primer orden. El segundo tramo, inclinado, representa estados de deformación para los que la sección crítica es interior al soporte.

Una hipótesis más adecuada, especialmente porque tiene en cuenta el caso de soportes con excentricidades desiguales en las articulaciones, es la que propone el MDS.

En este método se supone que las excentricidades totales siguen una ley senoidal con valores predeterminados de las excentricidades en las articulaciones. Esta hipótesis da lugar a una expresión indirecta de la directriz geométrica, puesto que es explícita en curvaturas, y sin duda más complicada que en el caso anterior:

$$\frac{1}{r} = \frac{e^t}{\ell^2} \left(\arccos \frac{e_2}{e^t} - \arccos \frac{e_1}{e^t} \right)^2 \qquad \text{ec. 6}$$

$$\frac{1^*}{r} = \frac{e_2}{2} \left(\arccos \frac{e_1}{e_2} \right)^2 \qquad \text{ec. 7}$$

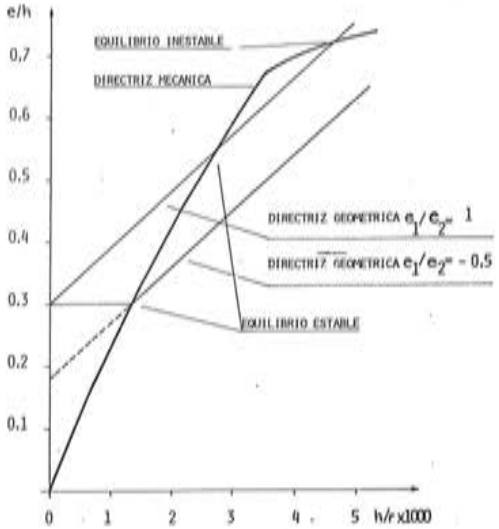


Fig. 5. No linealidad geométrica. Hipótesis de distribución senoidal de excentricidades totales MDS.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En la figura 5 se presenta gráficamente el MDS. Para el caso de $e_1/e_2 = 1$ la directriz geométrica está constituída por una curva monótona creciente parecida a la recta del MCM. Para excentricidades desiguales la directriz geométrica tiene dos tramos, uno horizontal hasta la curvatura $1/r^*$ con idéntico significado que en el caso anterior y otro constituido por una curva monótona creciente.

El MCR propuesto utiliza la hipótesis de deformada conocida, es decir, la idea de la directriz geométrica. Ha sido presentado utilizando las dos hipótesis explicadas, del MCM y MDS, pero es compatible con cualquier otra directriz geométrica. En este sentido los autores piensan que el tema de la directriz geométrica es un campo donde todavía se pueden hacer interesantes aportaciones tendentes a dar mayor generalidad y precisión al estudio de los soportes esbeltos.

2.3. Estados límites últimos

Tal como se ha indicado en la introducción, los soportes esbeltos de hormigón armado pueden dar origen a dos estados límites últimos: de inestabilidad y de agotamiento de la sección crítica.

El estado límite último de agotamiento de la sección crítica se produce cuando el soporte alcanza un estado de equilibrio estable con deformaciones de tal magnitud que los esfuerzos en la sección crítica son los de agotamiento de la sección.

La figura 6a muestra gráficamente el caso de un soporte que alcanza este estado límite último, según la representación del MCM. Como puede verse se produce un estado de equilibrio estable, ya que existe un punto de intersección entre la directriz geométrica y la mecánica que coincide justamente con el último punto de la directriz mecánica que representa el agotamiento de la sección.

La sección crítica habrá sufrido una deformación de segundo orden de magnitud igual a la diferencia de ordenadas entre la ordenada al origen de la directriz geométrica, que representa la excentricidad inicial, y la ordenada del punto de intersección de ambas directrices.

El estado límite último de inestabilidad se produce cuando el soporte alcanza un estado de equilibrio inestable.

En la figura 6b se muestra el caso de un soporte que alcanza este estado límite último, utilizando también el MCM. Tal como se explicará, se produce un estado de equilibrio inestable cuando la directriz mecánica y geométrica son tangentes en un punto.

La curvatura correspondiente al punto de tangencia es una curvatura inferior a la de agotamiento.

Existe finalmente una situación de transición en la que el soporte alcanza ambos estados límites últimos al mismo tiempo. Siguiendo con la representación del MCM, este caso correspondería a un soporte para el que la directriz mecánica y geométrica son tangentes en el último punto de la directriz mecánica.

Como puede comprenderse, debido a la existencia de los estados límites últimos explicados, no resulta fácil establecer un método preciso que permita resolver el problema del dimensionamiento de soportes equivalentes con un modelo que representa únicamente el estado límite último de agotamiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

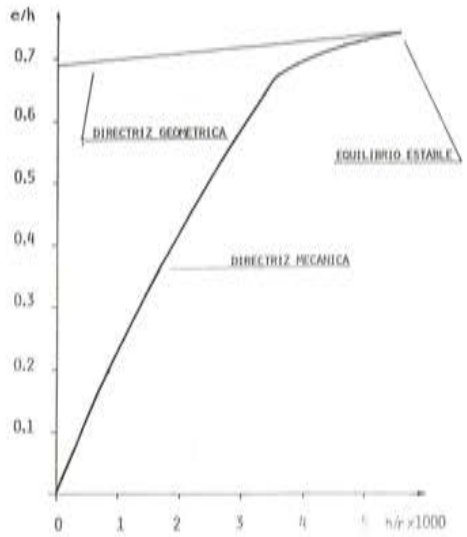


Fig. 6a. Estado límite último de agotamiento de la sección crítica.

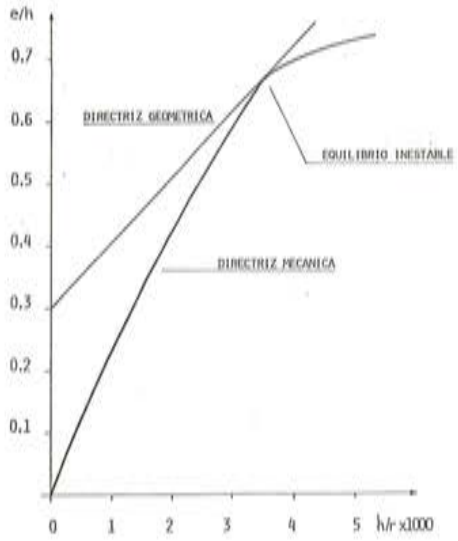


Fig. 6b. Estado límite último de inestabilidad.

2.4. Método de las Curvaturas de Referencia

El planteamiento del problema del dimensionamiento de un soporte equivalente puede resumirse como sigue:

I - El proyectista dispone de los siguientes datos:

- l: = Longitud del soporte equivalente;
- e_1, e_2 = Excentricidades de primer orden en las articulaciones;
- N: = Axil.

II - El proyectista debe elegir, según criterios arquitectónicos, constructivos, etc.:

- Forma y dimensiones de la sección transversal;
- Distribución de armadura;
- f_{yd}, f_{cd}: resistencias de cálculo del hormigón y del acero.

III - El problema de dimensionamiento estricto consiste en obtener la cuantía de armadura mínima de la sección transversal, para la que el soporte alcanza un estado límite último.

Conocidas las excentricidades de las articulaciones e_1, e_2 y la longitud al soporte equivalente, y utilizando la hipótesis de deformada conocida, es posible definir la directriz geométrica del soporte a dimensionar.

Si por otro lado se conoce el axil y la forma, dimensiones, distribución de armaduras y características de los materiales de la sección transversal, es posible definir para distintas cuantías de armadura directrices mecánicas que representan el comportamiento resistente de la sección a dimensionar.

Finalmente la cuantía correspondiente a la directriz mecánica que con la geométrica defina un estado límite último (apartado 2.3) será la cuantía estricta de dimensionamiento, correspondiente al soporte analizado.

Se considera en primer lugar el caso de soportes que alcanzan el estado límite último de agotamiento de la sección crítica utilizando, por ejemplo, la hipótesis de distribución senoidal de curvaturas del MCM, figura 7.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

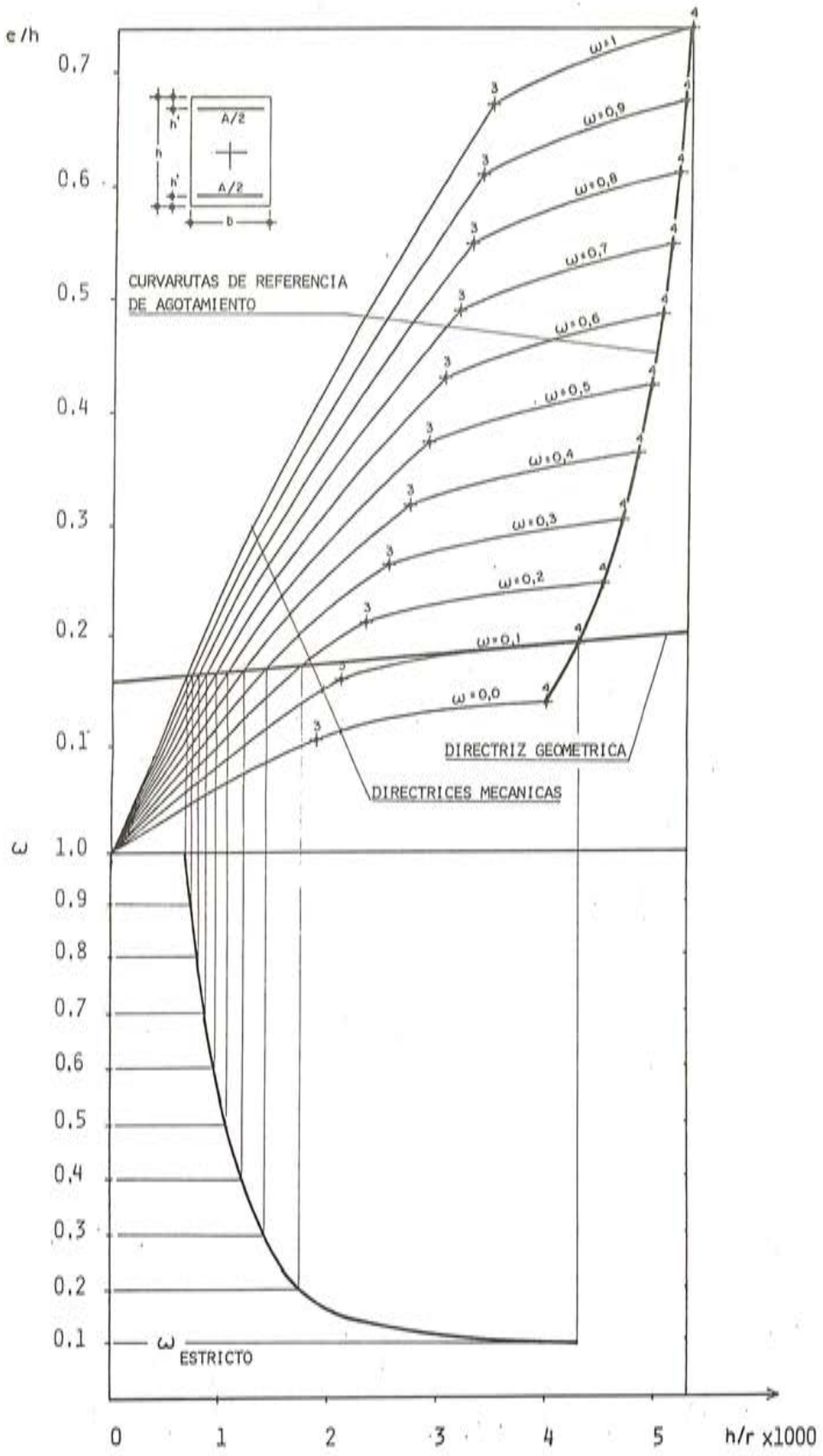


Fig. 7. Curva de Curvaturas de Referencia de Agotamiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En este caso la armadura de dimensionamiento estricto será la que corresponda a la directriz mecánica que se intersecta con la directriz geométrica en el último punto de la directriz mecánica.

Para cualquier cuantía superior a la mínima, el soporte tendrá un estado de equilibrio estable, ya que la directriz geométrica tendrá por lo menos un punto de intersección con la mecánica correspondiente, y en estos casos no se habrá alcanzado el estado límite último.

Si se representan en un diagrama $\omega - h/r$ los puntos del equilibrio correspondientes a las distintas cuantías, tal como se muestra en la parte inferior de la figura 7, se obtiene una curva monótona descendente.

La curva $\omega - h/r$ representa estados de equilibrio estable para todas las cuantías y un estado de equilibrio estable y agotamiento de la sección en el último punto correspondiente a la cuantía mínima.

Si se conociese a priori que el soporte rompe por agotamiento de la sección crítica se habría obtenido la mínima cuantía de dimensionamiento utilizando en vez de las directrices mecánicas completas, de laboriosa obtención, los últimos puntos de las mismas para distintas cuantías. Esta curva, llamada *curva de curvaturas de referencia de agotamiento,* está formada por dos últimos puntos de las directrices mecánicas, y representa la relación entre la excentricidad y la curvatura ($e/h - h/r$) para un axil (ν) y diferentes cuantías (ω).

La intersección de la directriz geométrica y la curva de curvaturas de referencia de agotamiento, graduada en cuantías, da directamente la cuantía de dimensionamiento estricto. En el caso de soportes cortos ($\lambda = 0$) la directriz geométrica se transforma en una recta horizontal y la cuantía correspondiente a su intersección con la curva de curvaturas de referencia de agotamiento corresponde a un dimensionamiento estricto de la sección, igual al que se obtendría utilizando los diagramas de interacción de secciones.

En definitiva, la curva de curvaturas de referencia de agotamiento permite el dimensionamiento estricto de soportes que alcanzan el estado límite último de agotamiento con la misma precisión que los métodos de comprobación (MCM o MDS) para el caso de soportes esbeltos y que los diagramas de interacción de secciones para soportes cortos.

Para soportes en los que se alcanza el estado límite último de inestabilidad, figura 8, la cuantía estricta de dimensionamiento es la que corresponde a la directriz mecánica que es tangente a la geométrica en un punto de la directriz mecánica a la izquierda del que representa el agotamiento de la sección.

La curva $\omega - h/r$ en este caso es una curva que presenta un mínimo relativo que corresponde a la cuantía estricta, con un tramo descendente para curvaturas inferiores a la de tangencia y otro ascendente para curvaturas mayores que la de tangencia. La rama descendente representa estados de equilibrio estable y la rama ascendente estados de equilibrio inestable.

En principio el punto de la directriz mecánica para el que se produce la inestabilidad puede ser cualquiera excepto el que representa el agotamiento de la sección, ya considerado.

Un detallado estudio sobre las directrices mecánicas y sobre roturas de soportes esbeltos por inestabilidad ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

I - En las directrices mecánicas correspondientes a esfuerzos axiles bajos ($\nu \geqslant -0{,}4$) el punto correspondiente a la curvatura para la que se produce la deformación del límite elástico del acero en la armadura más traccionada constituye un punto crítico en el que se observa un repentino cambio de pendiente de la directriz mecánica (punto 2 de la figura 3).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

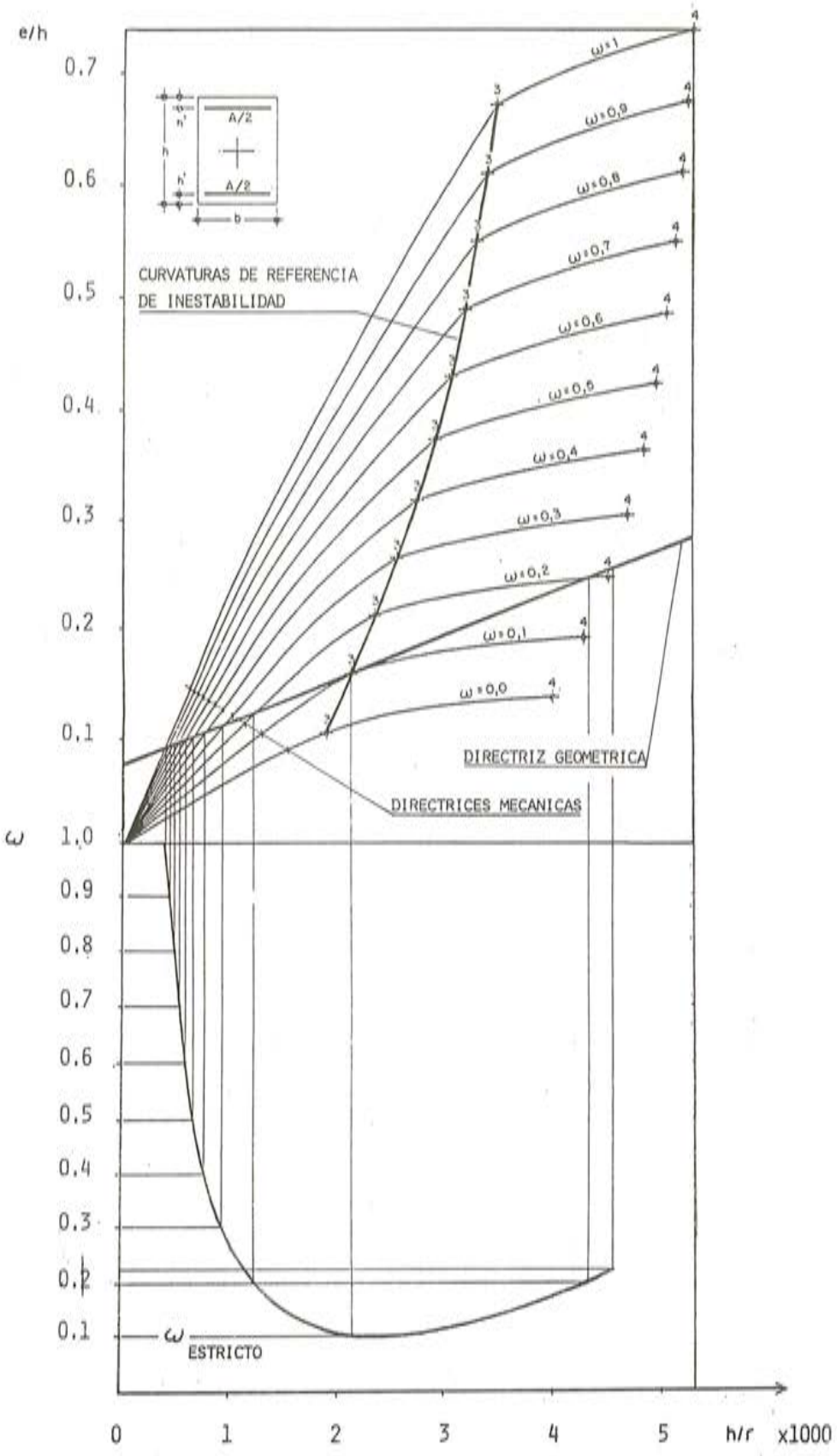


Fig. 8. Curva de Curvaturas de Referencia de Inestabilidad.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

II - En las directrices mecánicas correspondientes a esfuerzos axiles elevados ($\nu \leqslant -0{,}4$) el punto correspondiente a la curvatura para la que se produce la deformación del límite elástico del acero en la armadura más comprimida constituye un punto crítico en el que se observa también un cambio brusco de pendiente en la directriz mecánica (punto 3 de la figura 3).

III - En la mayor parte de los casos el estado límite último de inestabilidad corresponde a uno de estos puntos.

IV - Las curvas $\omega - h/r$ tienen un mínimo relativo que corresponde a la cuantía de diseño y presentan una extensa zona plana en el entorno de este punto. Por este motivo, si el estado límite último de inestabilidad se produce en otro punto distinto de los puntos críticos indicados en I y II, el error que se comete en la evaluación de la cuantía estricta es pequeño y siempre del lado de la seguridad.

Consecuentemente es posible definir una *curva de curvaturas de referencia de inestabilidad* para el dimensionamiento de soportes que alcanzan este estado límite último. Esta curva está formada por los puntos críticos indicados en I y II de las directrices mecánicas, según la magnitud del axil considerado, y representa la relación entre la excentricidad y la probable curvatura de inestabilidad ($e/h - h/r$) para un valor de axil (ν) y diferentes cuantías (ω),

La intersección de este curva con la directriz da directamente la cuantía estricta de diseño para soportes que rompen por inestabilidad, o por lo menos, una estimación de suficiente precisión y siempre del lado de la seguridad.

Finalmente, el MCR propuesto puede resumirse como sigue:

I - El MCR utiliza la idea de directriz geométrica, es decir, la hipótesis de deformada conocida, y es compatible tanto con la propuesta en el MCM como en el MDS.

II - Propone la sustitución de las directrices mecánicas, de laboriosa obtención, por las llamadas curvas de *Curvaturas de Referencia de Agotamiento e Inestabilidad,* vinculadas a los estados límites últimos de agotamiento de la sección crítica y de inestabilidad, respectivamente.

III - El dimensionamiento estricto de la armadura de un soporte consiste en leer las cuantías correspondientes a la intersección de su directriz geométrica con las curvas de *Curvaturas de Referencia de Inestabilidad y Agotamiento,* y tomar como cuantía estricta la menor de las obtenidas (figura 9).

2.5. Efecto de las cargas permanentes. Fluencia

Las cargas permanentes producen efectos importantes sobre el comportamiento de los soportes esbeltos: en general, provocan un aumento de la deformación debido a la fluencia del hormigón bajo carga, y en el caso de soportes muy esbeltos pueden provocar una rotura por inestabilidad debida a fluencia.

Existen en la bibliografía (1) dos procedimientos para tener en cuenta el efecto de las cargas permanentes en el caso de soportes equivalentes:

I - Procedimiento no lineal: Este procedimiento, puesto a punto para los métodos de comprobación, consiste en considerar una directriz mecánica que tenga en cuenta el efecto del aumento de deformaciones debido a fluencia. Para ello se construye la directriz mecánica utilizando como diagrama tensión deformación el correspondiente a carga instantánea con una transformación homotética en deformaciones a través de un coeficiente de fluencia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

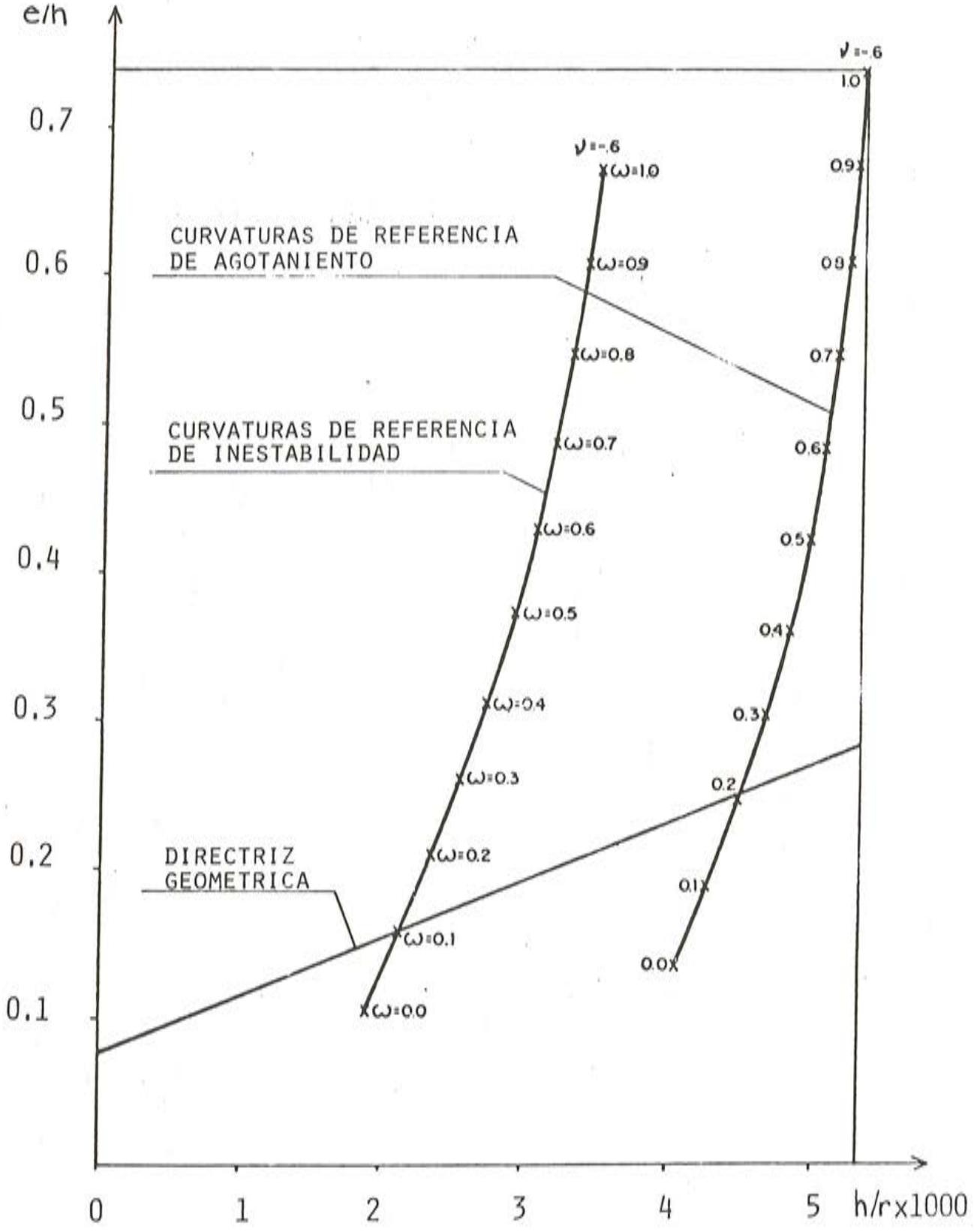


Fig. 9. Método de las Curvaturas de Referencia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

II - Procedimiento lineal: Este procedimiento consiste en considerar que el efecto de las cargas permanentes se traduce en un aumento de la excentricidad de la sección crítica.

Utilizando un modelo de fluencia lineal y sección homogénea se puede evaluar este aumento de excentricidad, considerándolo como parte de la excentricidad de primer orden.

Si bien el MCR propuesto se ha presentado sin discriminar el tipo de axil a considerar, es perfectamente compatible con ambos procedimientos.

Utilizando el procedimiento no lineal, para cada axil deberían calcularse las curvas de Curvaturas de Referencia a partir de directrices mecánicas obtenidas con un coeficiente de fluencia adecuado.

Utilizando el procedimiento lineal sólo debe evaluarse la excentricidad debida a fluencia considerando las características del axil existente y tomando como excentricidad de primer orden para la definición de la directriz geométrica, la suma de la excentricidad de primer orden real más la excentricidad debida a fluencia calculada.

3. CONCLUSIONES

I - El MCR presentado constituye un método de dimensionamiento directo general, ya que permite la obtención directamente de la cuantía, tanto para soportes cortos como para soportes esbeltos de forma contínua.

Para el caso de soportes cortos permite obtener igual precisión que la que dan los diagramas de interacción de secciones.

Para soportes esbeltos que alcanzan el estado límite último de agotamiento de la sección crítica, la precisión es igual que la de los métodos de comprobación MCM y MDS.

Para soportes esbeltos que alcanzan el estado límite último de inestabilidad, los resultados coinciden con los de los MCM y MDS o resultan ligeramente del lado de la seguridad.

II - El MCR permite representar adecuadamente el fenómeno físico de soportes esbeltos ya que se tienen en cuenta separadamente los estados límites últimos de inestabilidad y de agotamiento de la sección crítica.

III - Respecto a su utilización, el MCR ha sido implementado mediante Abacos de Dimensionamiento y Fórmulas de Dimensionamiento, que se describen en las partes segunda y tercera de este artículo. Asimismo puede utilizarse cómodamente con ordenador, ya que constituye un algoritmo directo.

BIBLIOGRAFIA

1. Comité Européen du Béton. BULLETIN D'INFORMATION N° 123 CEB - FIP MANUAL OF "BUCKLING AND INSTABILITY". Diciembre 1977.
2. Jakobsen, K. DESIGN OF SLENDER REINFORCED CONCRETE FRAMES. Institut für Baustatik. Zurich, Noviembre 1973.
3. Johnston, B.C. THE COLUMN RESEARCH COUNCIL GUIDE TO DESIGN CRITERIA FOR METAL COMPRESSION MEMBERS. 2° Edición. J. Wiley. New York 1976.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

4. ACI Committe 318. BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR REINFORCED CONCRETE (ACI 318 - 77). American Concrete Institute. Detroit 1978.

5. Baumamn, O. DIE KNICKUNG DER EISEN BETON - SAULEN. Eidg Material prüfungsanstalt an der E.T.H. in Zürich. Bericht N° 89. Zurich 1934.

6. Broms, B., Viest, M. ULTIMATE STRENGTH ANALYSIS OF LONG HINGED REINFORCED CONCRETE COLUMNS. Proceeding ASCE. ST1. Enero 1958.

7. Broms, D., Viest, M. ULTIMATE STRENGTH ANALYSIS OF LONG RESTRAINED REINFORCED CONCRETE COLUMNS. Proceeding ASCE. ST3. Marzo 1958.

8. Robinson, J., Fouré, B., Bourghli, A. LE FLAMBEMENT DES POTEAUX EN BETON ARME CHARGES AVEC DES EXCENTRICITES DIFFERENTES LEURS EXTREMITES. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. N° 333. Noviembre 1975.

9. Broms, B., Viest, M. DESIGN OF LONG REINFORCED CONCRETE COLUMNS. Proceeding ASCE. ST4. Julio 1958.

10. Capra, A., Davidovici, V. GUIDE PRACTIQUE D'UTILISATION DES REGLES B.A.E.L. 80. Edition Eyrolles, Paris 1980.

11. Arenas de Pablo, J. CALCULO DE SOPORTES DE HORMIGON ARMADO EN TEORIA DE SEGUNDO ORDEN. Editores Técnicos Asociados, S.A. Barcelona 1980.

12. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. BETON UND STAHL BETON BAU, BEMESSUNG UND AUSFÜHRUNG. DIN 1045. 1942.

13. Comité Européen du Béton. Fédération Internationale de la Précontrainte. INTERNATIONAL RECOMMENDATIONS FOR THE DESIGN AND CONSTRUCTION OF CONCRETE STRUCTURES. Praga (Checoslovaquia). Junio 1970.

14. Cranston, W. ANALYSIS AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE COLUMNS. Cement and Concrete Association. Research report N° 20. 1972.

15. British Standards Institution. BRITISH STANDARD CODE OF PRACTICE FOR THE STRUCTURAL USE OF CONCRETE. CP 110 - 1972. Londres 1972.

16. Mac Gregor, J., Breen, J., Pfrang, E. DESIGN OF SLENDER CONCRETE COLUMNS. ACI Journal. Enero 1980.

17. Van Leeuwen, J., Van Riel, C. ULTIMATE LOAD DESIGN OF AXIALY AND ECCENTRICALLY COMPRESSED STRUCTURAL MEMBERS. Heron 1966.

18. Comisión Permanente del Hormigón. INSTRUCCION PARA EL PROYECTO Y EJECUCION DE OBRAS DE HORMIGON EN MASA O ARMADO EH-80. Madrid, junio 1981.

19. Corres, H. DIMENSIONAMIENTO DE SOPORTES ESBELTOS DE SECCION CONSTANTE DE HORMIGON ARMADO EN ESTADO LIMITE ULTIMO DE AGOTAMIENTO O INESTABILIDAD. METODO DE LAS CURVATURAS DE REFERENCIA. Tesis Doctoral. Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid 1980.

20. Corres H, Morán, F. THE REFERENCE CURVATURE METHOD FOR THE DIRECT DESIGN OF SLENDER REINFORCED CONCRETE COLUMNS. Communication to the 4'h Meeting of CEB Permanent Commission III "Buckling and Instability". Roma, Abril 1981.

21. Corres, H. Morán F. 1.3.3. REFERENCE CURVATURE METHOD. Contribution to the next CEB Bulletin on "Buckling and Instability". Madrid, Mayo 1981.

22. Corres H. ANALISIS, OBTENCION Y SISTEMATIZACION DE DIAGRAMAS MOMENTO - CURVATURA DE SECCIONES DE HORMIGON ARMADO. Hormigón y Acero (en preparación).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

457-8-91

Tolerancias dimensionales: Normativa internacional

Julián Salas, Ing. Industrial
Instituto Eduardo Torroja - Madrid

SUMARIO:

Palabras clave: Tolerancias; normativa; calidad; control; elementos; industrialización.

El trabajo pretende exponer la panorámica internacional respecto de los criterios sobre tolerancias dimensionales de los elementos y/o componentes constructivos. Para ello se analiza la normativa propuesta por algunas instituciones: ISO, CEB y PCI así como normas y recomendaciones de tipo nacional: Alemania, Suecia, Unión Soviética, Polonia y Holanda.

Mediante un tratamiento gráfico de los datos recopilados, se ponen en evidencia los principales puntos de concurrencia y se concluye con unas orientaciones a modo de conclusiones.

INTRODUCCION

El tema de las tolerancias dimensionales presenta un doble aspecto: teórico y práctico. El tratamiento teórico es similar al de cualquier sector productivo industrial en que se emplea. Se trata de un problema de estadística aplicada, y de condiciones de fabricación y montaje de los que hay excelente bibliografía (1).

Ante el enfoque de este "Primer Simposio" (*) hemos optado por tratar el tema desde el punto de vista de la normativa práctica internacional, de cuyo análisis comparativo pueden obtenerse importantes conclusiones en la perspectiva del segundo de los objetivos del Simposio:

– "Confrontar el avance de la Normalización Técnica en el sector de la Construcción y formular recomendaciones para incentivar su desarrollo".

Ha de distinguirse claramente que una cosa son las tolerancias de elementos aislados y otra distinta el problema que se plantea al considerar dichos elementos formando parte de un conjunto que a su vez tiene unas tolerancias iguales o distintas entre sí.

* Este trabajo fue presentado al "Simposio Iberoamericano de Control de la Calidad en la Construcción", celebrado en Bogotá (Colombia) del 2 al 5 de diciembre de 1980.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El concepto de tolerancia tiene un significado "legal" en el sentido de diferencia entre la mayor y la menor de las medidas *permisibles*. En el fondo del tema subyace un condicionamiento económico, ya que el conseguir un nivel u otro de calidad, dentro de ciertos límites, es básicamente un problema de costes.

A título de ejemplo práctico, y basándonos en los criterios de la norma "Fachadas Prefabricadas de Paneles" de las Normas Tecnológicas de la Edificación (2), puede comprobarse (tabla 1) que para una tolerancia de la distancia entre ejes de juntas verticales de ± 3 mm (para A = 2.000 mm) resultan, de acuerdo con el resto de los factores, juntas verticales de 6 mm de ancho mínimo (valor E) y de 12 mm. de ancho básico (valor G). Si la tolerancia, manteniendo el resto de las condiciones, varía de ± 3 mm a + 7 mm y −5 mm, el ancho mínimo de la junta seguiría siendo 6 mm pero el ancho básico pasaría de 12 mm a 20 mm, lo que supone entre otras consecuencias un 66,6 por 100 de aumento de material sellante, caso de que fuesen selladas, o de disponer de una solución adecuada caso de que fuesen abiertas.

El fijar una serie de tolerancias concretas debe ser resultado de un cierto pacto entre promotores, constructores y fabricantes de elementos que puede ser propiciado por la Administración en función de las características específicas de cada caso.

CRITERIOS DEL COMITE EUROPEO DEL HORMIGON (C.E.B.) Y DEL PRECAST CONCRETE INSTITUTE (P.C.I.)

El objetivo básico de la norma CEB (3) es la ejecución de estructuras mediante la unión de grandes paneles, para lo cual admite como tolerancia en centímetros sobre las grandes dimensiones o sobre la diagonal de un panel $\pm 1/8 \sqrt[3]{d}$; siendo "d" la longitud de que se trate, en centímetros. (Véase fig. 1).

Para el caso de espesores de los elementos (h) en centímetros, la tolerancia fijada es + 0.5 cms y $-1/8 \sqrt[3]{h}$ cms estando "h" igualmente expresado en centímetros. (Véase fig. 2)

Los efectos de coplaneidad entre aristas opuestas deben ser tales que la distancia de un vértice del rectángulo formado por el paramento de un panel al plano determinado por los otros tres vértices sea inferior 1/250 de la dimensión pequeña del panel.

La normativa del PCI (4) presenta como tolerancias dimensionales de los elementos en el desmoldeo "altura y anchura totales medidas en la superficie adyacente al molde en el momento del vaciado" las representadas en la figura 1, en dimensiones métricas, equivalente a incrementos de ± 1/16" en la tolerancia por cada 10 pies de magnitud.

Los espesores de elemento, para cualquier valor, han de estar comprendidos en la zona de variación de + 6,3 mm (+ 1/4") y −3,2 mm (− 1/8").

NORMA SOVIETICA SN-I-61

La norma soviética arranca de una filosofía distinta a las anunciadas anteriormente en las que se desvinculaban tolerancias y tipos de usos. Muy al contrario, el factor fundamental de la normativa soviética no es la magnitud sino el tipo de uso de los elementos. Por tanto, las tolerancias se fijan en virtud de resultados estadísticos de mediciones y de criterios de uso dictados por la práctica.

En la tabla 2 adjunta (5) se recogen las tolerancias admitidas por esta norma, según tipos de elementos y dimensiones fundamentales de los mismos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

d > h

A o B

Deformación sellante > t > E o F, G o J, L o H

Coeficiente de dilatación térmica d en mm m °C: 0,004 / 0,006 / 0,008 / 0,010 / 0,012 / 0,014 / 0,016 / 0,018 / 0,020

Coeficiente de hinchamiento h en mm/m: 0,1 0,2 0,3

Deformación real permanente máxima admisible del sellante en %

t en mm	A o B en mm: 1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000
±1	1 3 997	1,5 3,5 1.496	2 4 1.995	2,5 4,5 2.495	3 5 2.995	3,5 5,5 3.494	4 6 3.994
±3	1 7 993	1,5 7,5 1.492	2 8 1.992	2,5 8,5 2.491	3 9 2.991	3,5 9,5 3.490	4 10 3.990
±5	1 11 989	1,5 11,5 1.488	2 12 1.988	2,5 12,5 2.487	3 13 2.987	3,5 13,5 3.486	4 14 3.986
+7 −5	1 15 985	1,5 15,5 1.484	2 16 1.984	2,5 16,5 2.483	3 17 2.983	3,5 17,5 3.482	4 18 3.982
±7	1 15 985	1,5 15,5 1.484	2 16 1.984	2,5 16,5 2.483	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	2 4 996	3,0 5,0 1.495	4 6 1.994	5,0 7,0 2.493	6 8 2.992	7,0 9,0 3.491	8 10 3.990
±3	2 8 992	3,0 9,0 1.491	4 10 1.990	5,0 11,0 2.489	6 12 2.988	7,0 13,0 3.487	8 14 3.990
±5	2 12 988	3,0 13,0 1.487	4 14 1.986	5,0 15,0 2.485	6 16 2.984	7,0 17,0 3.483	8 18 3.982
+7 −5	2 16 984	3,0 17,0 1.493	4 18 1.982	5,0 19,0 2.481	6 20 2.980	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±7	2 16 984	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	3 5 995	4,5 6,5 1.493	6 8 1.992	7,5 9,5 2.490	9 11 2.989	10,5 12,5 3.487	12 14 3.986
±3	3 9 991	4,5 10,5 1.489	6 12 1.988	7,5 13,5 2.486	9 15 2.985	10,5 16,5 3.483	12 16 3.982
±5	3 13 987	4,5 14,5 1.485	6 16 1.984	7,5 17,5 2.482	9 19 2.981	10,5 20,5 3.479	⚠ ⚠ ⚠
+7 −5	3 17 983	4,5 18,5 1.481	6 20 1.980	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	4 6 994	6,0 8,0 1.492	8 10 1.990	10,0 12,0 2.488	12 14 2.986	14,0 16,0 3.484	16 18 3.982
±3	4 10 990	6,0 12,0 1.488	8 14 1.986	10,0 16,0 2.484	12 18 2.982	14,0 20,0 3.480	16 22 3.978
±5	4 14 986	6,0 16,0 1.484	8 18 1.982	10,0 20,0 2.480	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
+7 −5	4 18 982	6,0 20,0 1.480	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	5 7 993	7,5 9,5 1.490	10 12 1.988	12,5 14,5 2.485	15 17 2.983	17,5 19,5 3.480	20 22 3.978
±3	5 11 989	7,5 13,5 1.486	10 16 1.984	12,5 18,5 2.481	15 21 2.979	17,5 23,5 3.476	⚠ ⚠ ⚠
±5	5 15 985	7,5 17,5 1.482	10 20 1.980	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
+7 −5	5 19 981	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	6 8 992	9,0 11,0 1.489	12 14 1.986	15,0 17,0 2.483	18 20 2.980	21,0 23,0 3.476	24 26 3.974
±3	6 12 988	9,0 15,0 1.485	12 18 1.982	15,0 21,0 2.479	18 24 2.976	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±5	6 16 984	9,0 19,0 1.481	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
+7 −5	6 20 980	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	7 9 991	10,5 12,5 1.487	14 16 1.984	17,5 19,5 2.480	21 23 2.977	24,5 26,5 3.473	⚠ ⚠ ⚠
±3	7 13 987	10,5 16,5 1.483	14 20 1.980	17,5 23,5 2.476	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±5	7 17 983	10,5 20,5 1.479	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	8 10 990	12,0 14,0 1.486	16 18 1.982	20,0 22,0 2.478	24 26 2.974	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±3	8 14 986	12,0 18,0 1.482	16 22 1.978	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±5	8 18 982	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	9 11 989	13,5 15,5 1.484	18 20 1.980	22,5 24,5 2.475	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±3	9 15 985	13,5 19,5 1.480	18 24 1.976	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±5	9 19 981	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	10 12 988	15,0 17,0 1.483	20 22 1.978	25,0 27,0 2.473	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±3	10 16 984	15,0 21,0 1.479	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±5	10 20 980	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	11 13 987	16,5 18,5 1.481	22 24 1.976	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±3	11 17 983	16,5 22,5 1.477	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	12 14 986	18,0 20,0 1.480	24 26 1.974	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±3	12 16 982	18,0 24,0 1.476	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±1	13 15 985	19,5 21,5 1.478	26 28 1.972	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
±3	13 19 981	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠	⚠ ⚠ ⚠
	E F H	E F H	E F H	E F H	E F H	E F H	E F H
	o o o	o o o	o o o	o o o	o o o	o o o	o o o
	G J L	G J L	G J L	G J L	G J L	G J L	G J L

⚠ Disminuir tolerancia de fabricación y/o utilizar sellante con mayor deformación real permanente máxima admisible.

Ejemplo

Datos

Panel, prefabricado pesado, macizo de hormigón, de las siguientes características:

Coeficiente de dilatación térmica = 0,010 mm/m °C

Coeficiente de hinchamiento = 0,10 mm/m

Deformación real permanente máxima admisible del sellante: 20 %

Tolerancia de fabricación: ± 3 mm

Dimensiones de coordinación:

A = 2.000 mm B = 3.000 mm

Resultados en la Tabla 3

Dimensiones básicas de fabricación del panel:

Anchura, L = 1.998 mm

Altura, H = 2.985 mm

Juntas verticales:

E = 6 mm

G = 12 mm

Juntas horizontales:

F = 9 mm

J = 15 mm

TABLA 1

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

NORMATIVA I.S.O.

Siguiendo los criterios mantenidos por Volbeda (6), la definición de cualquier procedimiento de tolerancias dimensionales puede caracterizarse por dos rasgos fundamentales: el "método o ley de formación" y la "gradación" de niveles de calidad.

La normativa ISO, en el campo de las tolerancias dimensionales, presenta una ley de formación meridianamente clara al establecer la ecuación:

$$i = 0.45 \sqrt[3]{L} + 0{,}001\ L$$

en la que "L" es la dimensión nominal en milímetros e "i" la tolerancia básica expresada en micras.

Para pasar de las tolerancias básicas, función únicamente de "L", a la determinación de la gradación de niveles o clases de calidad, ISO establece la siguiente relación:

$$T = \sqrt[\frac{5}{K-1}]{10}\ .\ i$$

en la que T es la tolerancia en mm y K el nivel o clase de calidad. De acuerdo con esto, los valores de las tolerancias de un cierto nivel de calidad son iguales a las del nivel precedente multiplicados por $\sqrt[5]{10}$.

TABLA 2

Errores dimensionales admisibles de los elementos prefabricados de grandes dimensiones, según la norma soviética SN-1-61

TIPO DE ELEMENTO	Errores admisibles (mm)		
	Sobre el largo	Sobre el ancho de la sección	Sobre el espesor o la altura de la sección
Losa de forjado	±10	±5	±5
Losa de cubierta	±10-5	±5-10	±5
Panel de muro	±10	±5	±5
Bloques de cimentación de edificios de vivienda y construcciones industriales:			
– Dimensiones totales	±15	±15	±10
– Dimensiones de los huecos	±15	±15	±20
Soportes:			
– Dimensiones totales	±10	±5	± 5
– Entre la base y la superficie superior de la ménsula o del capitel	–5	–	–
Viga que soporta un puente grúa	±10	±5	±5
Viga de alma llena o de celosía hasta 18 m de luz	±10	±5	±5
Viga de alma llena o de celosía de más de 18 m de luz	±20	±5	±5
Viga principal	±10-5	±5	±5
Tramo de escalera	± 5	±5	±5
Losa meseta de escalera	± 8-5	±5	±5-3

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

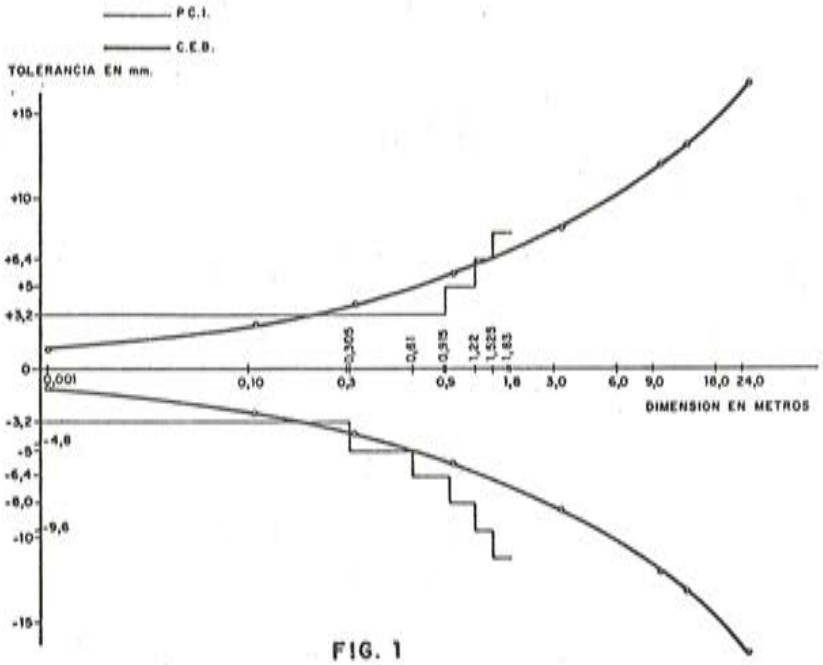


FIG. 1

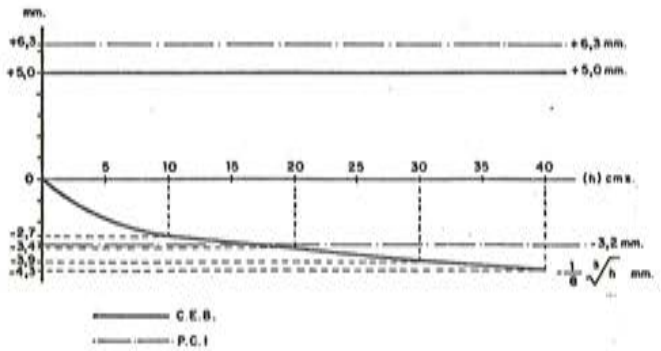


FIG. 2

Básicamente, éstos son los conceptos generales de los que han arrancado la mayoría de las normas nacionales que se ocupan del tema tolerancias en el sector construcción. De la adecuación a las circunstancias específicas, de la ley de formación, selección de los intérvalos de "L" y niveles de calidad, depende el éxito de la implantación de este tipo de normativa y que cale o no como forma de entendimiento entre proyectistas y productores.

Veremos seguidamente algunas aplicaciones a casos de normativas nacionales, de la filosofía ISO expuesta.

LA NORMA ALEMANA TGL 7255

La norma alemana enfoca el tema de las tolerancias con una amplitud y profundidad que ha sentado precedente en el planteamiento normativo de diferentes países desarrollados. El criterio básico, en el campo de los elementos prefabricados a base de hormigón, es el relacionar el valor de la tolerancia con el proceso productivo empleado, y con la magnitud del parámetro bajo control.

La génesis de la norma TGL 7255 parte de una familia de curvas experimentales resultantes de representar en abscisas dimensiones nominales y en ordenadas tolerancias dimensionales como intervalos de variabilidad simétricos respecto a la dimensión nominal (fig. 3). El número de curvas, en el caso concreto de la norma alemana, es de diez, correspondientes a otros tantos niveles de precisión. Posteriormente se establecieron los intervalos dimensio-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TOLERANCIAS
DIMENSIONALES

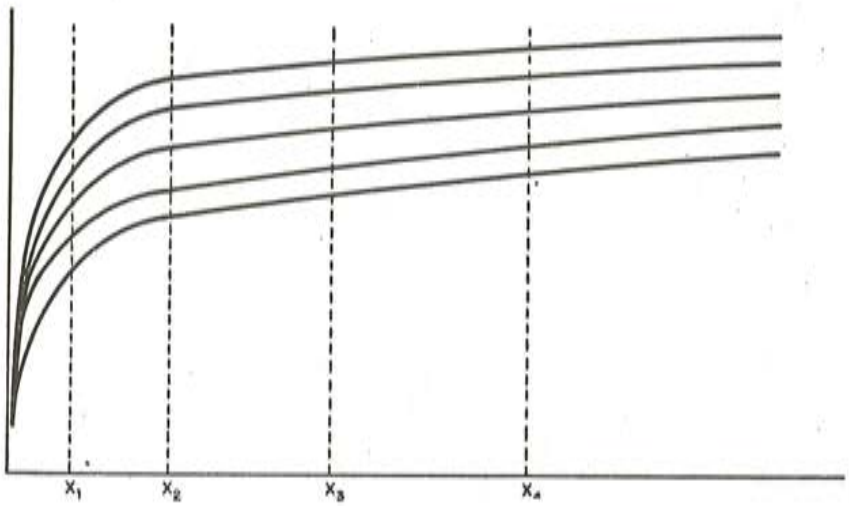


Fig. 3

DIMENSIONES NOMINALES

nales de acuerdo con la práctica cotidiana, quedando fijados los seis siguientes: 0-100 mm; 100-300 mm; 300-900 mm; 900-3.000 mm; 3.000-9.000; > 9.000 mm; con lo que aparecían de forma inmediata los saltos de tolerancias.

En la tabla 3, se recogen siete niveles de precisión de GK3 a GK9 que son los adecuados para la gama de elementos a base de hormigón y que en la fig. 4 se representan de forma gráfica.

Básicamente, cada nivel de precisión se corresponde con uno o varios procedimientos de producción o, si se quiere, cada proceso productivo ha de buscar el nivel de precisión que le es más idóneo. A título de ejemplo, el nivel GK3 sería para elementos producidos en moldes a base de plásticos reforzados; GK4 ÷ GK5 para moldes rígidos de acero; GK4 ÷ GK6 moldes de hormigón; GK5 ÷ GK8 batería de moldes de acero de diferentes calidades; GK5 ÷ GK8 moldes metálicos desmontables, y los niveles GK7 ÷ GK8 para elementos producidos en moldes de madera ensamblada a base de cuñas y/o tornillos.

De la normativa genérica, se deducen tablas específicas de aplicación donde se concretan en detalle las distintas amplitudes del campo de variación dimensional, como es el caso de la tabla 4.

Enlazando con la idea básica de que la tolerancia de los elementos prefabricados de hormigón debía ser función del tipo de molde empleado en su producción, se ha llevado a término en Polonia una masiva toma de datos sobre elementos de distintas procedencias y para diferentes usos (7). La agrupación (fig.5) de las desviaciones respecto a las dimensiones teóricas, se ha realizado teniendo en cuenta el tipo de producción de los elementos: en moldes de madera (curva A); de madera o metálicos desmontables (curva B); metálicos (curva C) o a base de soluciones mixtas o complejas (curva ABC).

En base a los resultados del trabajo polaco mencionado se establecieron seis niveles de calidad o clases de precisión y sobre las curvas A, B y C se establecieron los escalones de tolerancias que se visualizan en la figura mencionada y cuantifican en la tabla 5.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 3

Dimensión nominal del componente en mm.		TIPOS DE PRECISION						
Desde	Hasta	GK 3	GK 4	GK 5	GK 6	GK 7	GK 8	GK 9
	100	0,5	1	2	3	4	6	10
100	300	1	2	3	4	6	10	16
300	900	2	3	4	6	10	16	25
900	3.000	2	3	5	8	12	20	32
3.000	9.000	3	4	6	10	16	25	40
9.000		3	5	8	12	20	32	50
		TOLERANCIA FUNDAMENTAL (6 σ) EN MM.						

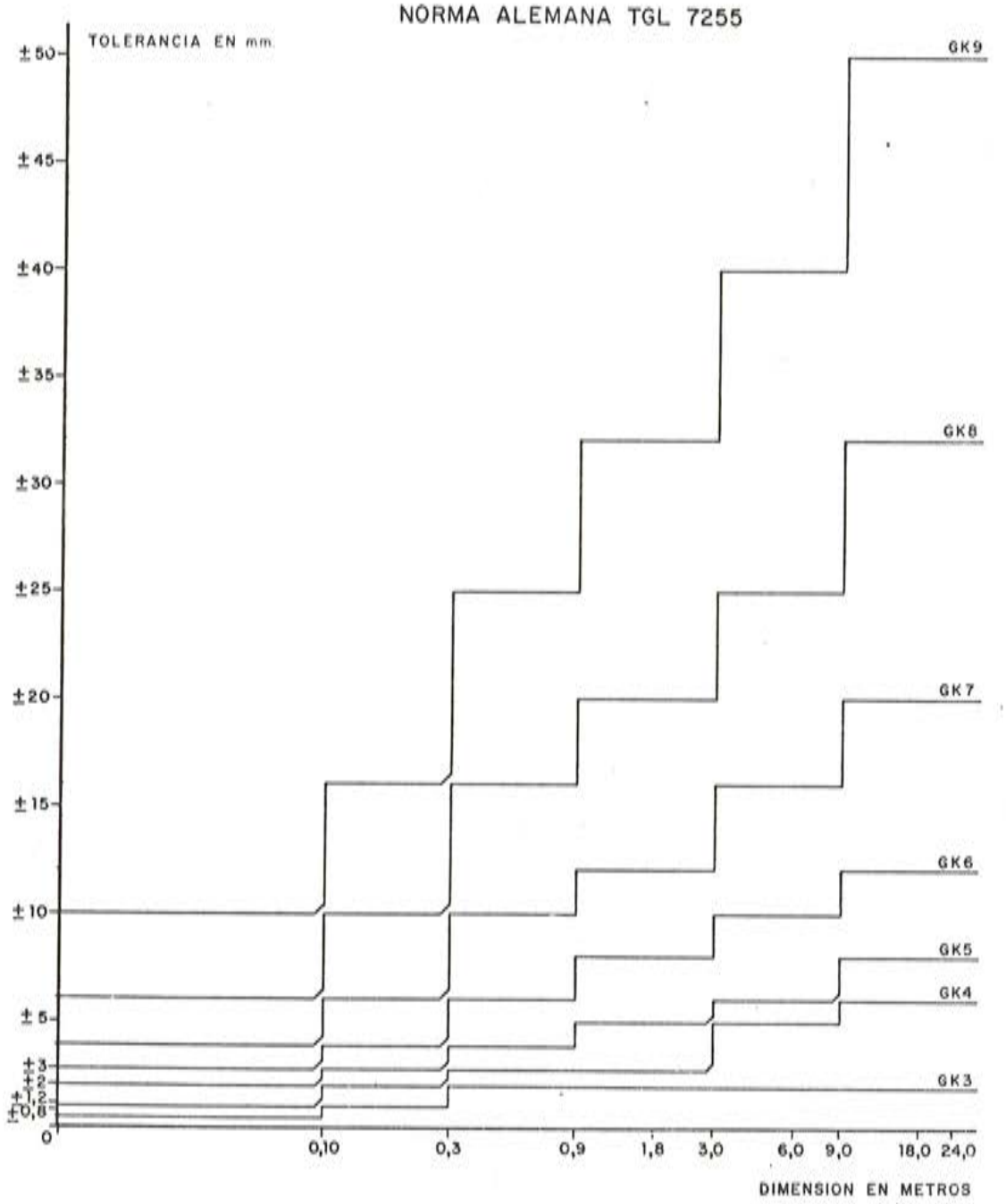


Fig. 4.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 4

Discrepancias admisibles según el tipo o clase de precisión

Tipo de precisión	Aplicable a	Tolerancias para el intervalo de medidas nominales de						
		Hasta 25	Más de 25 hasta 100	Más de 100 hasta 250	Más de 250 hasta 1.000	Más de 1.000 hasta 2.500	Más de 2.500 hasta 10.000	Más de 10.000
GK 6	Medidas de anchuras y longitudes	± 1	± 1,5	± 2	± 3	± 4	± 2	± 6
	Límites de control 3) para GK 6	± 0,5	± 1	± 1,2	± 2	± 2,5	± 3	± 4
	Medidas de alturas	± 1	± 1,5	± 2,5	± 4	± 5	± 8	± 8
	Límites de control 3) para GK 6	± 0,5	± 1	± 1,5	± 2,5	± 3	± 4	± 5
	Medidas de profundidades	± 0,5	± 2	± 3	± 5	± 6	± 8	±10
	Límites de control 3) para GK 6	± 1	± 1,2	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6
GK 7	Medidas de anchuras y longitudes	± 1,5	± 2	± 3	± 5	± 5	± 8	±10
	Medidas de alturas	± 1,5	± 2,5	± 4	± 6	± 8	±10	±12
	Medidas de profundidades	± 2	± 3	± 5	± 8	±10	±12	±16
GK 8	Medidas de anchuras y longitudes	± 2	± 3	± 5	± 8	±10	±12	±16
	Medidas de alturas	± 2,5	± 4	± 6	±10	±12	±16	±20
	Medidas de profundidades	± 3	± 5	± 8	±12	±16	±20	±25
GK 9	Medidas de anchuras y longitudes	± 3	± 5	± 8	±12	±16	±20	±25
	Medidas de alturas	± 4	± 6	±10	±16	±20	±25	±30
	Medidas de profundidades	± 5	± 8	±12	±20	±25	±30	±40
GK 10	Medidas de anchuras y longitudes	± 5	± 8	±12	±20	±25	±30	±40
	Medidas de alturas	± 6	±10	±16	±25	±30	±40	±50
	Medidas de profundidades	± 8	±12	±20	±32	±40	±50	±60

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

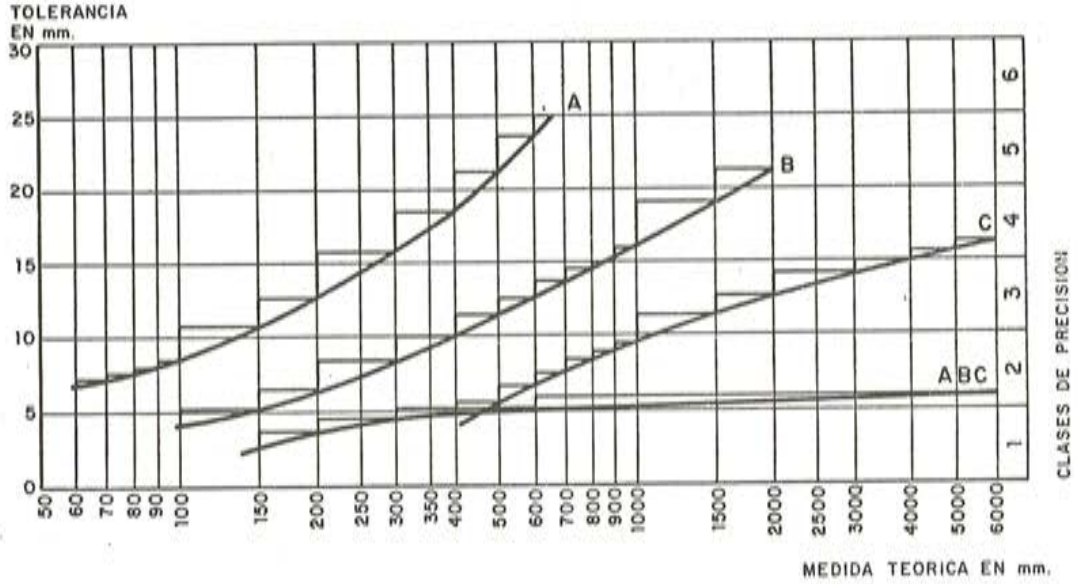


Fig. 5.

TABLA 5

Dimensión teórica	Tolerancia de fabricación		
	A mm	B mm	C mm
60	6,8		
70	7,4		
80	7,8		
90	8,2		
100	8,7	3,8	
150	10,8	5,4	
200	12,6	6,5	
250	14,4	7,5	
300	15,8	8,5	
350	17,4	9,2	
400	18,6	9,8	
500	21,0	11,0	5,8
600	23,5	12,4	6,8
700	25,6	13,4	7,7
800		14,3	8,5
900		15,0	9,0
1.000		15,8	9,5
1.500		19,0	11,4
2.000		21,0	12,6
2.500			13,5
3.000			14,2
4.000			15,0
5.000			15,8
6.000			16,2

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

EL SISTEMA DE TOLERANCIAS HOLANDES

El sistema holandés es idéntico al ISO para dimensiones inferiores o iguales a 500 mm. Para dimensiones superiores a 500 mm utiliza como ley de formación: $i = aL + b$, en la que los coeficientes "a" y "b" están basados en un análisis de los datos de medida.

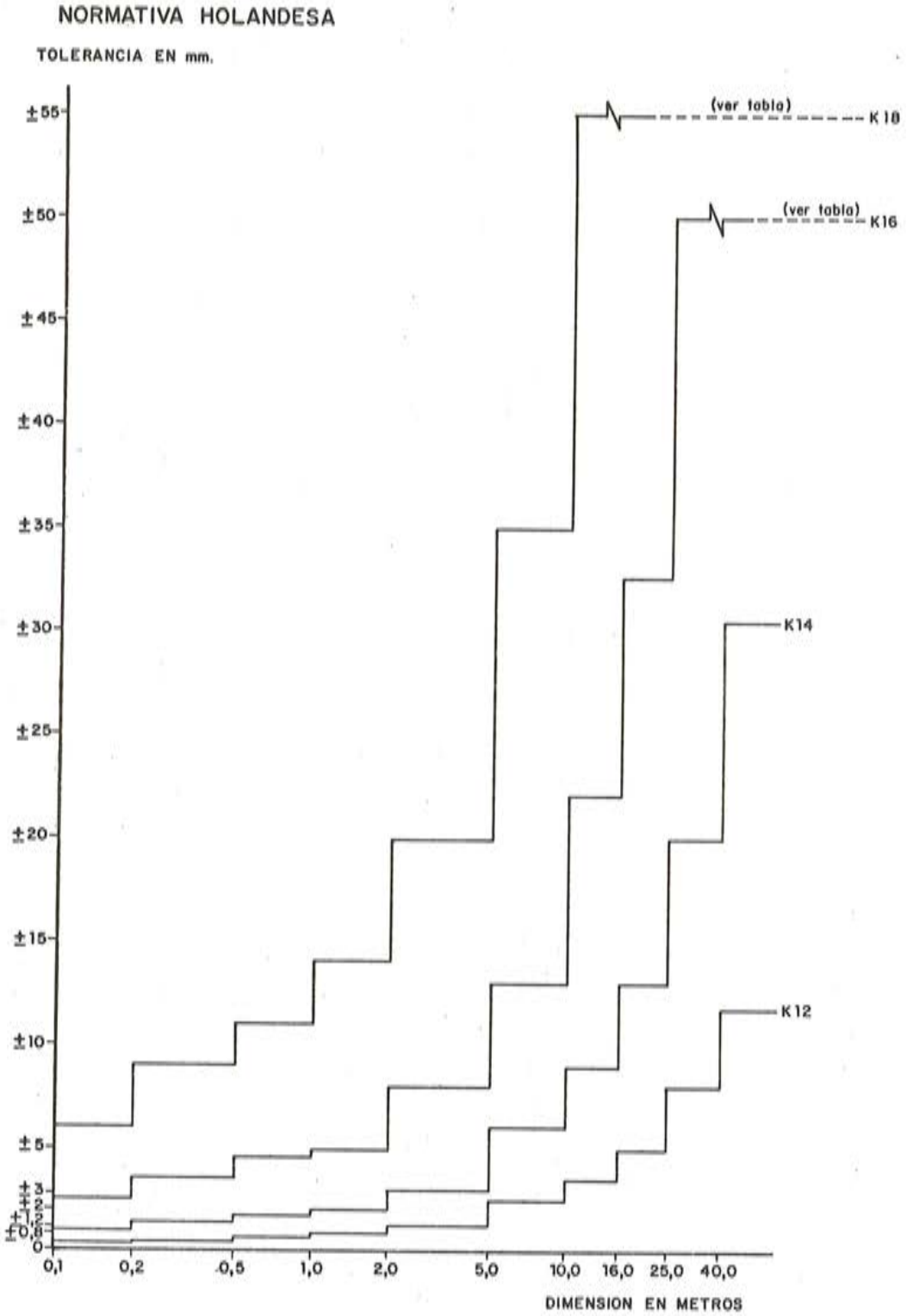


Fig. 6.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 6

Tabla de tolerancias

		Valores de k			
		12	14	16	18
Valores de L	0,1 – ≤ 0,2	0,4	1,0	2,5	6
	0,2 – ≤0,5	0,5	1,4	3,5	9
	0,5 – ≤ 1	0,7	1,7	4,5	11
	1 – ≤ 2	0,9	2	5	14
	2 – ≤ 5	1,3	3	8	20
	5 – ≤10	2,5	6	14	35
	10 – ≤16	3,5	9	22	55
	16 – ≤25	5	13	33	85
	25 – ≤40	8	20	50	125
	40 –	12	31	80	200

Un resumen de los valores correspondientes para las clases cualitativas 12, 14, 16 y 18, que son las empleadas en el sector construcción, fija para Holanda los valores recogidos en la tabla 6 y representados en la fig. 6.

ESPECIFICACIONES SUECAS HusAMA 72

Recogiendo la rica experiencia práctica de Suecia en la construcción a base de elementos de procedencia industrial, el amplio cuerpo normativo sobre coordinación modular y no pocos trabajos de investigación en los que se sustentan las bases teóricas, aparecieron las especificaciones HusAMA (8) en las que centraremos nuestra atención.

La característica fundamental de este cuerpo normativo es la de intentar transvasar la simple enumeración de valores cuantitativos de tolerancias dimensionales para acercarse a posibilitar un diseño que tenga en cuenta las tolerancias.

No trata de acotar las desviaciones admisibles de elementos en abstracto, sino de partes de un todo constructivo que han de cumplir funciones diferenciadas.

La filosofía de la HusAMA 72 presenta las siguientes singularidades:

a. Recoge la forma de cuantificación de tolerancias señalada por la ISO a base de escalones dimensionales estableciendo (fig. 7) cuatro intervalos de medida de "L": 0,00 - 1,80 m ; 1,80 - 6,0 m; 6,0 - 18,0 m. y siete niveles cualitativos: B, C,...H.

b. Establece HusAMA 72 dos componentes constituyentes de la desviación final: la tolerancia de fabricación y la de emplazamiento.

c. Distingue o concreta gamas de tolerancias para cada familia de elementos funcionales: muros, pilares, elementos de forjado... y tecnologías más usuales: prefabricación. estructuras metálicas, aparejos tradicionales...

d. Fija hasta cuatro clases diferentes, o niveles de precisión, para cada gama de valores.

De lo dicho, puede deducirse que el criterio fundamental en el que se basan las especificaciones suecas es el valor de la magnitud ("L") matizado por el tipo de uso, el tipo de tecnología y una gradación cualitativa con cuatro posibles niveles.

A título de ejemplo, recogemos en las tablas 7 y 8 las tolerancias de fabricación y del emplazamiento del elemento funcional "muro" a base de "hormigón prefabricado" según cuatro clases cualitativas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ESPECIFICACIONES SUECAS HusAMA 72

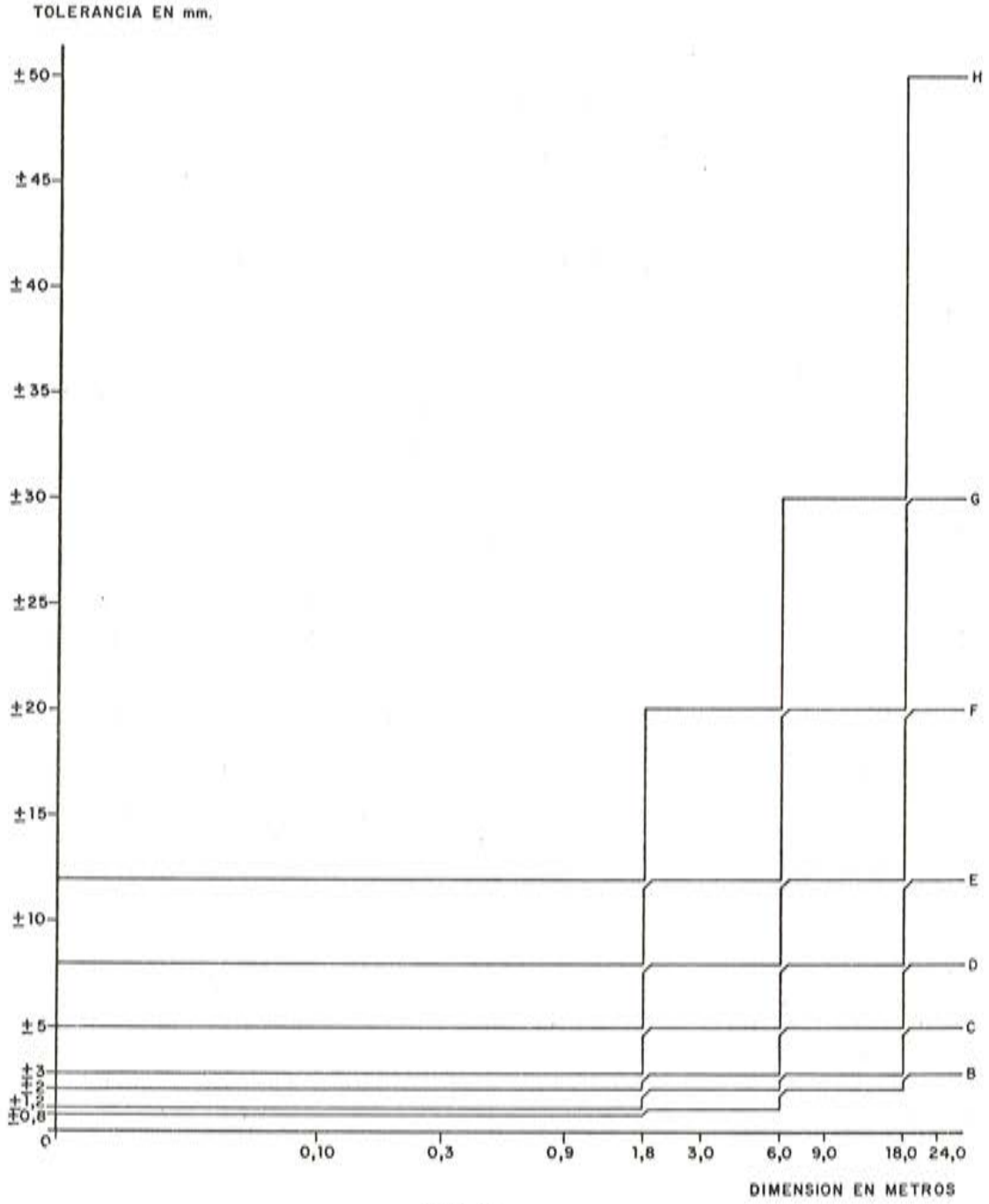


FIG. 7

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 7

Tolerancias de fabricación
TAB G/6: Muros

Dimensión	Longitud medida (m)	Desviación permitida (mm)			
		Clase 1	Clase 2	Clase 3	Clase 4
Longitud	L	D	E	F	G
Altura	L	D	E	F	G
Espesor	L	± 3	± 5	± 8	± 10
Posicionamiento de componentes embebidos	L	D	E	F	G
Curvatura de arista	L	B	C	D	E
Deformación a lo largo de un lado	L	B	C	D	E
Deformación a lo largo de la diagonal	L	B	C	D	E
Alabeo	L	C	D	E	F
Desviación angular lado/altura	L	D	E	F	G

TABLA 8

Tolerancias de emplazamiento
TAB G/7: Muros

Dimensión	Longitud medida (m)	Desviación permitida (mm)			
		Clase 1	Clase 2	Clase 3	Clase 4
Posicionamiento		± 8	± 12	± 20	± 30
Distancia entre paños adyacentes		± 8	± 12	± 20	± 30
Ancho de junta		± 3	± 5	± 8	± 12
Resalto de junta exterior		3	5	8	12
Resalto de junta interior		2	3	5	8
Desplazam. de la junta hacia el ext.		± 5	± 8	± 12	± 20
Nivelac. de la parte sup. del elemen		± 5	± 8	± 12	± 20
Resalto de la junta sup. del elemen. (plano de carga)		3	5	8	12
Deformación	L	D	E	F	G
Inclinación	L	D	E	F	G

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ALGUNAS CONCLUSIONES EN BASE A LOS DATOS EXPUESTOS

Una conclusión obvia, es el constatar que de una forma u otra existe en todas las normas recogidas, una cierta relación entre la magnitud de la tolerancia y la del parámetro bajo control o medición.

No hay tanta concurrencia de criterio a la hora de valorar qué tipo de relación debe existir entre ambos parámetros, ni sobre qué otros criterios deben tenerse en cuenta, aunque básicamente son dos las opciones manejadas: tipo de fabricación o función a la que se destina el elemento, y en el caso de la HusAMA una combinación de ambas.

Existe práctica unanimidad en establecer, aún dentro del sector construcción, y para cada país en concreto, diversos grados o niveles de calidad, lo que abre el abanico de posibilidades a la hora de fijar la gama más adecuada para cada producción de elementos u obra concreta.

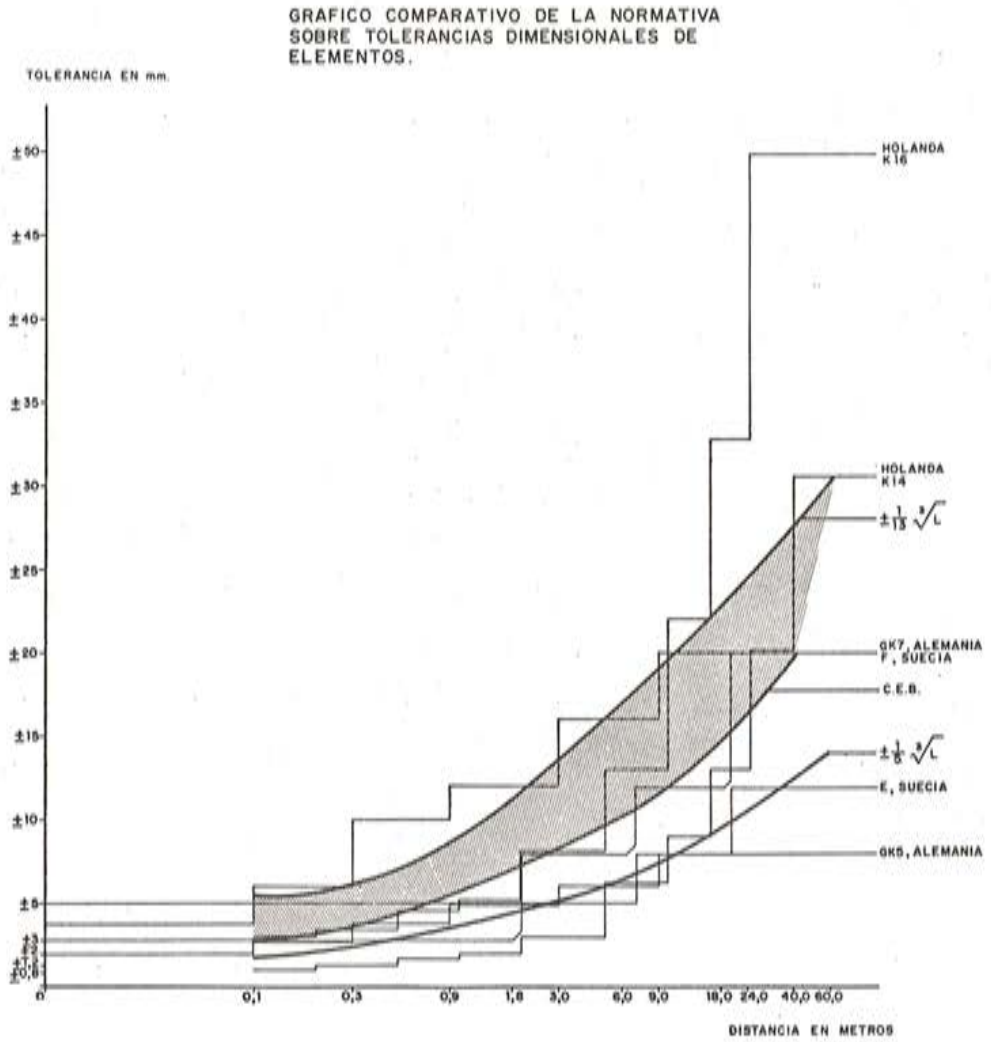


Fig. 8.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 9

"L" (cm)	C.E.B. $\pm 1/8\sqrt[3]{L}$ (mm)	Nivel de mayor exigencia $\pm 1/8\sqrt[3]{L} : \sqrt[5]{10} \simeq \pm \frac{1}{13}\sqrt[3]{L}$ (mm)	Nivel de menor exigencia $\pm 1/8\sqrt[3]{L} . \sqrt[5]{10} \simeq \pm \frac{1}{5}\sqrt[3]{L}$ (mm)
10	2,69	1,65	4,30
30	3,87	2,38	6,20
90	5,60	3,45	8,96
180	7,05	4,34	11,28
300	8,36	5,15	13,38
600	10,54	6,48	16,86
900	12,06	7,42	19,30
1.800	15,20	9,35	24,32
2.400	16,72	10,29	26,76
4.000	19,84	12,21	31,74
6.000	22,71	13,98	36,34

A modo de resumen, de la normativa expuesta, hemos recogido en la fig. 8 lo que podíamos llamar "zona media" de los niveles de permisibilidad. Hemos representado la curva propuesta por el C.E.B., los niveles GK5 y GK7 de la normativa alemana; los K12 y K14 de la holandesa y los niveles E y F de la sueca. Dado que la curva de tolerancias propuesta por el C.E.B. se ajusta a lo que podía ser eje de simetría de todos los valores representados, hemos optado por introducir dos niveles de calidad en base a la "ley de formación" del C.E.B. y al criterio I.S.O. de tomar $\sqrt[5]{10}$ como factor de proporcionalidad. Siguiendo estos criterios (véase tabla 9) aparecen las curvas $\pm \frac{1}{13}\sqrt[3]{L}$ y $\pm \frac{1}{5}\sqrt[3]{L}$. De lo representado en la fig. 8 deducimos:

a. Que los niveles de exigencia son globalmente altos por tratarse de normas de países con una gran tradición y experiencia en la producción y empleo de componentes, lo cual no es poco.

b. Que debería darse tratamiento distinto a las pequeñas dimensiones y espesores, (inferiores a un metro por ejemplo), del resto de las magnitudes, como es el caso de la normativa C.E.B. y P.C.I.

c. Que las normas estudiadas barren una banda con muchas zonas en común y algunas particularidades:

- La norma holandesa se muestra extremadamente rígida con los pequeños valores, de 0,10 a 5,00 m, y laxa con los grandes valores > 18,0 m.
- Los niveles E y F de las especificaciones suecas, prácticamente quedan insertos en el espacio limitado por los niveles GK5 y GK7 de la normativa alemana.

d. Que el área comprendida entre las curvas $y = \pm \frac{1}{5}\sqrt[3]{L}$ e $y = \pm \frac{1}{13}\sqrt[3]{L}$ prácticamente recogen la zona media del espacio normativo común a todos los casos estudiados, y que para países sin la tradición industrial de los expuestos, el situar su normativa entre las curvas $\pm \frac{1}{8}\sqrt[3]{L}$ y $\pm \frac{1}{13}\sqrt[3]{L}$ (zona tramada) sería un excelente objetivo o meta para alcanzar, no sin un importante esfuerzo y un plazo dilatado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

BIBLIOGRAFIA

(1) Desde el punto de vista de la teoría aplicada:
"Tolleranze Dimensionalli in Edilizia". Associazione Italiana Prefabbricazione (A.I.P.) Milán 1975.
"Construcción Industrializada y Diseño Modular", Cap. 21, H. Niessen y Uve Dtlevsen. Editorial Blume. España.

(2) "Normas Tecnológicas de la Edificación". Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid, Espapaña.

(3) "Recomendaciones para la construcción a base de elementos de grandes dimensiones". Tomo IV del C.E.B. Traducción al castellano del ponente y editado por el IETcc.

(4) "Fachadas Prefabricadas de Hormigón". Comité del P.C.I. Editorial Blume. España.

(5) Tabla tomada de "Prefabricación. Teoría y Práctica". Seminario de Prefabricación. Editores Técnicos Asociados, Barcelona 1972, trabajo del que fue coordinador el ponente.

(6) "Tolerance systems: comparison of four systems". A. Volbeda. 5º Congreso del CIB. París 1971.

(7) "Tolerancje Wymaròww i Pasowania w Boduwnictivie, Wydawnictwo". S. Janicki. "Arkady". Varsovia 1958.

(8) "Designing with tolerances". Olov Agri and Anders Norrbelius. The National Swedish Institute for Building Research". Estocolmo 1974.

Referencia bibliográfica

CALCULO DE ESTRUCTURAS DE PUENTES DE HORMIGON
Por Avelino F. Samartín Quiroga

En este libro se hace una exposición ordenada de los distintos métodos generales de Cálculo de Estructuras, dedicando una especial atención a su aplicación al análisis de puentes.

El puente, y en particular su tablero, constituye el principal elemento a considerar como estructura típica que sirve para comprobar la eficacia, validez y limitaciones de cada procedimiento de cálculo.

El impresionante desarrollo alcanzado durante las últimas décadas en el cálculo de estructuras se restringe en este libro al análisis lineal y elástico, que corresponde al caso típico de la situación de servicio de los tableros de puentes.

El libro aspira a superar la vertiente teórica de un tratado general sobre Cálculo de Estructuras y a constituir un elemento de ayuda al especialista de puentes, en sus tareas de diseño, análisis y comprobación estructural. Se muestra en detalle la problemática y especifidad, que aparece en la aplicación de cada método de cálculo a un tablero real.

El objetivo del presente libro es impulsar un mayor y eficiente uso del computador en el cálculo práctico de tableros de puentes.

Este texto representa el fruto de dos décadas de experiencia práctica y docente del autor en el cálculo de estructuras y en especial de los puentes.

Este volumen, de Editorial Rueda, consta de 763 páginas, 65 tablas, 322 figuras. Su precio es de 3.480 pesetas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Influencia de las imperfecciones en la carga crítica de estructuras de entramados planos

Por: Germán Gutiérrez y Avelino Samartín
Dres. Ingenieros de Caminos
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Departamento de Análisis de Estructuras. Santander

1. INTRODUCCION

La aparición de errores o pequeñas diferencias entre la situación ideal prevista y la real durante la ejecución o proyecto de una obra constituye un fenómeno inherente a la limitación humana. Las Normas Oficiales suelen recoger en su articulado tolerancias máximas admisibles para estos errores deducidos, muchas veces, mediante criterios empíricos. Un planteamiento acaso más racional será indicar los valores límites de las imperfecciones de la obra en función del nivel de seguridad adoptado. En este artículo, se estudia desde este punto de vista, la influencia de los errores de ejecución en el valor de la carga crítica de la estructura. Evidentemente, las imperfecciones no deben ser limitadas únicamente por criterios de estabilidad global de la estructura, puesto que existen otras causas de colapso de la misma, que pueden verse afectados más seriamente por las imperfecciones y por consiguiente ser más exigentes en los niveles de las tolerancias máximas.

Las imperfecciones que se consideran aquí, corresponden a valores relativamente pequeños producidos por un conjunto de causas simultáneas y por lo tanto son susceptibles de un tratamiento estadístico. Se excluyen de este estudio las equivocaciones o errores groseros cuya descripción matemática mediante métodos probabilistas no es adecuada.

Se utilizarán aquí la conjunción de dos técnicas de cálculo –un modelo estructural basado en la teoría de la inestabilidad elástica lineal y un modelo probabilista con distribución gaussiana o uniforme– que se desarrollan de un modo numérico mediante el procedimiento de simulación de Monte-Carlo. Se comprende que la extensión del procedimiento de Monte-Carlo al análisis de otros tipos de modelos estructurales más refinados o bien que consideren otros mecanismos de colapso, así como distintas imperfecciones, es directo a causa del carácter eminentemente numérico del método.

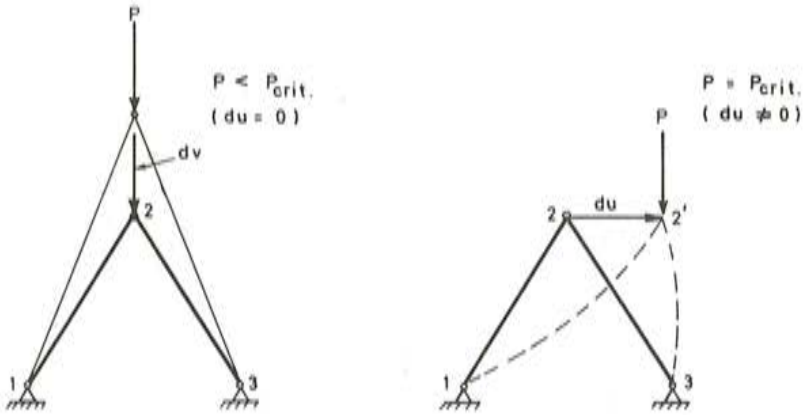
Antes de comentar la descripción de los modelos anteriores, conviene revisar brevemente los resultados más importantes que la teoría ha deducido sobre la influencia de las imperfecciones en la carga crítica de una estructura que depende fundamentalmente de su forma de pandeo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

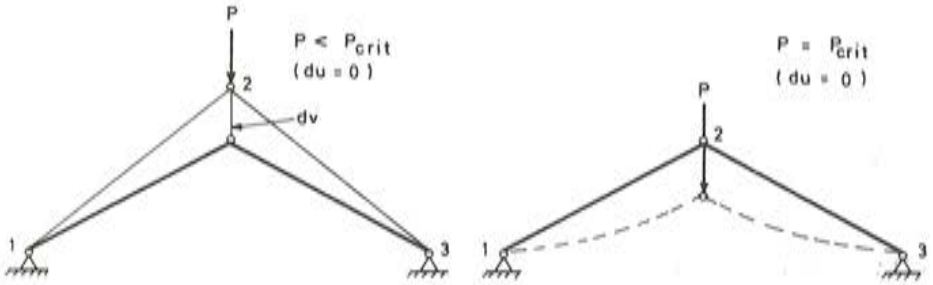
2. TIPOS DE INESTABILIDAD ESTRUCTURAL

Sea una estructura que se encuentra en una situación de equilibrio bajo un conjunto de cargas. Si se introducen unos pequeños movimientos a partir de su posición de equilibrio puede ocurrir que la estructura sea estable, o sea, alcance otra nueva posición de equilibrio. Por el contrario, si los movimientos que se han introducido, se incrementan indefinidamente, sin aumento de las cargas actuantes, es decir no se alcanza una posición de equilibrio, se dice que la estructura es inestable.

Se pueden distinguir dos tipos de inestabilidad y, con objeto de ilustrarlos, se considera la figura 1 que representa una celosía plana, simétrica, bajo la acción de una carga vertical concentrada. En la situación que muestra la figura 1-a correspondiente a una estructura aperaltada al aumentar la carga P sólo existe, debido a la simetría, una deformación simétrica (el movimiento horizontal del nudo 2 es nulo). Sin embargo si la carga P alcanza el valor de la carga crítica de la estructura, ésta se hace inestable apareciendo un movimiento horizontal del vértice 2, que antes no existía. Este tipo de pandeo es conocido con el nombre de bifurcación de equilibrio. La figura 1-b expresa una situación diferente a la anterior, con la estructura rebajada cuya carga crítica produce una deformación que no implica la aparición de otro tipo de movimiento. Se denomina el pandeo, en este caso, pandeo por punto límite.



a) Estructura aperaltada. Pandeo por bifurcación de equilibrio



b) Estructura rebajada. Pandeo por punto límite

FIGURA 1. - TIPOS DE INESTABILIDAD

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En la simple celosía estudiada se han distinguido dos tipos de pandeo cuyas características fundamentales se pueden aplicar a otras formas estructurales más complejas.

El primer tipo de pandeo, denominado por bifurcación de equilibrio, corresponde al fenómeno consistente en la aparición de una deformación que antes no existía. El segundo tipo, llamado por punto límite, se produce cuando la estructura disminuye su rigidez de un modo gradual al aumentar las cargas sobre ella aplicadas y el modo de pandeo presenta la misma dirección que tenía lugar en el desplazamiento.

Se puede demostrar (1) que la determinación de la carga crítica de pandeo de una estructura, puede llevarse a cabo mediante un análisis linealizado, con suficiente aproximación, si éste aparece como una bifurcación de equilibrio. En caso contrario, de pandeo por punto límite, es preciso una formulación global de cálculo en términos no lineales.

Se comprende tras estos comentarios, la gran importancia en distinguir durante el estudio del pandeo de una estructura el tipo de inestabilidad que ocurre. De esta distinción depende el tipo de formulación que debe utilizarse y, en el fondo, implica conocer la cuestión fundamental: si al ocurrir la situación de pandeo la geometría de la estructura ha cambiado apreciablemente o no. Por otra parte, el estudio de la inestabilidad de las estructuras con pequeñas deformaciones iniciales se basa en su comportamiento en las proximidades del pandeo. A este objeto es interesante representar de un modo esquemático, la relación entre la fuerza P (o el factor de amplificación de la carga) y el movimiento v (o módulo del vector de movimientos característicos en el caso de estructuras con varios grados de libertad), como se indica en la figura 2. Se observa en ella la diferencia entre el pandeo por punto límite y por

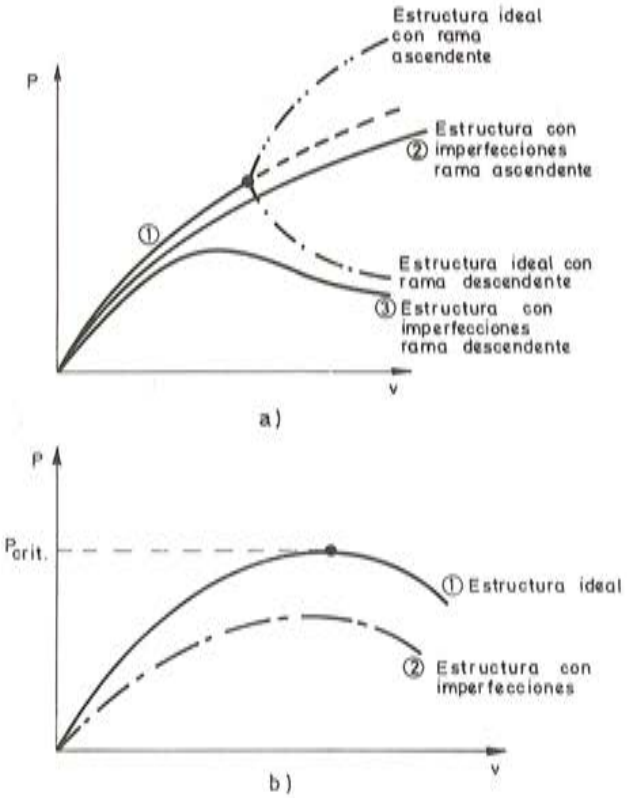


FIGURA 2

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

bifurcación de equilibrio. En este último caso, es interesante observar si la rama de postpandeo es ascendente o descendente, puesto que ello representa un distinto comportamiento estructural frente a las pequeñas imperfecciones. En efecto si la rama desciende, la estructura imperfecta se comporta, al alcanzar la carga de pandeo, como si fuera tipo punto límite;y no existe inestabilidad real en el caso de rama ascendente.

El estudio de la estabilidad y su clasificación puede llevarse a cabo mediante la expresión de la energía potencial total V de la estructura (suma de las energías de deformación y de la energía potencial de las fuerzas exteriores).

Como es sabido, las condiciones de equilibrio de una estructura bajo un nivel de cargas se obtiene mediante la condición de estacionaridad de V, es decir:

$$\delta V = 0 \tag{1}$$

En el entorno de la posición de equilibrio deducida de la ecuación (1), se puede estudiar la variación del signo de $\delta^2 V$ y se obtiene la siguiente regla para la posición de equilibrio:

"Si $\delta^2 V > 0$ significa que la estructura se encuentra en equilibrio estable y si $\delta^2 V < 0$, implica inestabilidad. El caso de $\delta^2 V = 0$ expresa que el equilibrio es neutro o crítico".

Como inicialmente (con carga nula) se supone la estructura estable ($\delta^2 V > 0$), se comprende que al incrementar las cargas hasta transformarla en inestable ($\delta^2 V < 0$) es preciso que para un cierto nivel de las cargas (carga crítica) el valor de $\delta^2 V$ sea nulo. De una manera algebráica se puede expresar $\delta^2 V$ en la siguiente forma:

$$\delta^2 V = \delta u^T \, . \, K_T \, . \, \delta u$$

en donde δu es el vector variación de los movimientos de la estructura desde la posición de equilibrio y K_T es la matriz de rigidez tangente. Si $\delta^2 V$ es positiva para todos los valores de δu, se deduce que K_T es positiva y definida y por lo tanto que todos los autovalores de K_T son positivos. Por el contrario, si existe un autovalor negativo de K_T existe una dirección (la determinada por el autovector correspondiente) a lo largo de la cual $\delta^2 V$ es negativo. La situación de equilibrio neutro corresponde al nivel de cargas que hace que el menor autovalor de la matriz K_T sea nulo. Asimismo, es posible estudiar el modo de pandeo (correspondiente a la dirección del autovector asociado al menor autovalor nulo) analizando el signo de $\delta^3 V$. En efecto, si $\delta^3 V = 0$ existe un caso de bifurcación de equilibrio y si $\delta^3 V \neq 0$ el pandeo corresponde a un punto límite. Por último, el comportamiento postpandeo de la estructura puede ser detectado mediante el signo de $\delta^4 V$ (si es positivo la rama es ascendente y en caso contrario, descendente) supuesto que $\delta^3 V = 0$.

Con relación a las imperfecciones, se suelen denominar estructuras con sensibilidad a las imperfecciones a las estructuras que presentan un pandeo por bifurcación de equilibrio y rama descendente. En este caso, el comportamiento de la estructura imperfecta parece como si fuera por punto límite. Si la rama es ascendente, la estructura imperfecta puede soportar cargas mayores que la crítica de pandeo de la estructura ideal.

Objetivo principal de este artículo es intentar cuantificar la influencia de las imperfecciones en el valor de la carga crítica. Con esta finalidad, se considera un tipo usual de estructuras, compuesto por barras rectas, con posibilidad de deformación únicamente en su plano. Las cargas son fundamentalmente de tipo gravitatorio y las imperfecciones se suponen actuán aleatoriamente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

3. DETERMINACION DE LA CARGA CRITICA

El modelo estructural considerado corresponde a un entramado plano, con un comportamiento lineal del material elástico (hoockeano), pequeñas deformaciones (linealidad geométrica o cinemática) y grandes movimientos (no linealidad estática). La teoría así desarrollada corresponde a la denominada inestabilidad elástica. El cálculo estructural se plantea en términos de movimientos, mediante el conocido método de la matriz de rigidez o equilibrio.

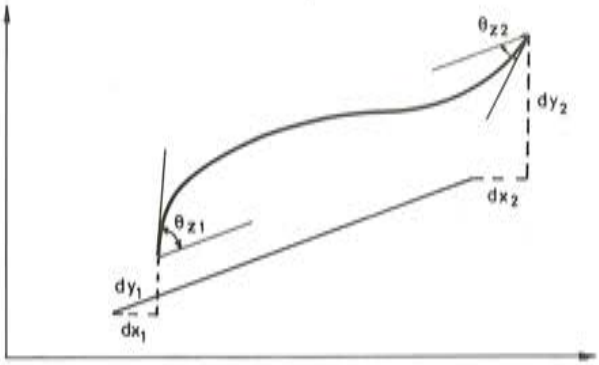


Fig. 3.

La matriz de rigidez k de una barra aislada 1-2 (figura 3) considerando únicamente la influencia del axil en la flexión (viga-columna) está definida por la igualdad:

$$P = k \, . \, d \tag{2}$$

o bien, en forma particionada:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

siendo:

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ m_{zi} \end{bmatrix} , \quad d_i \begin{bmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix}$$

$$k_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}\, s & (-1)^{i+1}\, \bar{k}\, \frac{1-c}{\alpha}\, l \\ 0 & (-1)^{i+1}\, \bar{k}\, \frac{1-c}{\alpha}\, l & \bar{k}\, \frac{s-c\,\alpha}{\alpha^2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$k_{12} = k_{21}^T = \begin{bmatrix} \frac{-EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{k}\, s & \bar{k}\, \frac{1-c}{\alpha}\, l \\ 0 & -\bar{k}\, \frac{1-c}{\alpha}\, l & \bar{k}\, \frac{s-\alpha}{s}\, l \end{bmatrix}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\overline{k} = \frac{EI}{l^3} \frac{\alpha^3}{2(1-c) - s\alpha}$$

$$\alpha = l\sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \text{(Parámetro adimensional)}$$

$$s = \operatorname{sen} \alpha$$

$$c = \cos \alpha$$

$$P = p_{x1} = -p_{x2}$$

Si la carga axil de compresión es nula ($P = 0$) resulta la bien conocida expresión de la matriz de rigidez lineal de una barra recta, prismática, de un entramado plano. Por último, si el esfuerzo axil es de tracción ($P = -p_{x1} = p_{x2}$) se deduce una matriz de rigidez análoga a la anterior, cambiando las funciones circulares por las correspondientes hiperbólicas.

Utilizando las técnicas convencionales del cálculo matricial de estructuras, la ecuación final que se deduce para toda la estructura es del tipo:

$$p_{NL} = k_{NL}\, d \tag{5}$$

en donde p_{NL} contiene todas las fuerzas actuantes en los nudos (o en los extremos de las barras en el caso de cargas sobre éstas) (*), k_{NL} se deduce de las matrices de cada barra mediante ensamblaje y d colecciona los movimientos de todos los nudos de la estructura. Se observa que los elementos de las matrices p_{NL} y k_{NL} dependen de los axiles existentes en cada barra, que constituyen un resultado a determinar en el cálculo una vez resuelta la ecuación (5). Por lo tanto, las matrices anteriores contienen elementos que son funciones de los movimientos d; y la ecuación (5) es una ecuación no lineal. Si los axiles fueran nulos (o su influencia en la flexión despreciable) en cada barra, la ecuación (5) se convertiría en la ecuación lineal que rige el comportamiento de la estructura:

$$p_L = k_L \cdot d$$

con $p_L = p_{NL}$ y $k_L = k_{NL}$, supuestos axiles nulos en las barras.

La técnica utilizada en la resolución de la ecuación (5) ha sido de tipo iterativo, es decir de acuerdo con los siguientes pasos:

1º Suponer un estado de axiles conocido en la estructura (normalmente nulos).

2º Resolver la ecuación $p_{NL} = k_{NL} \cdot d$ para el nivel conocido de axiles.

3º A partir de d obtener las fuerzas en todas las barras.

4º Comparar los axiles obtenidos con los supuestos en el cálculo. Si son iguales dentro de una cierta tolerancia, finalizar este cálculo; en caso contrario, deducir los nuevos valores de las matrices p_{NL} y k_{NL} e ir a 2º.

(*)NOTA: Conviene recordar que las cargas sobre las barras se trasladan a los nudos extremos mediante las reacciones de empotramiento rígido (solución inicial) que, evidentemente, se ven afectadas por coeficientes función del parámetro α, es decir, del axil existente en la barra. De ahí procede la introducción del subíndice NL en p_{NL} para indicar el carácter no lineal de este vector cuyas componentes dependen de los movimientos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El método de cálculo indicado corresponde a un análisis no lineal de estructuras. Si se desea obtener el valor del parámetro crítico(**) (λ_{crit}), definido como el factor que multiplicando a todas las cargas conduce a una situación de equilibrio inestable, el procedimiento que debe seguirse es el que se indica a continuación.

Se resuelve el problema no lineal anterior para niveles sucesivos de cargas definidos por el parámetro λ:

$$(\lambda = 0, 0.1, 0.2, ...)$$

deduciéndose en cada caso una matriz de rigidez final, k_{NL}, cuyos elementos son funciones del valor del axil final y, en definitiva, del nivel de cargas λ.

Se obtiene el valor de λ_{crit} como el menor valor del parámetro λ que convierte a la matriz k_{NL} en singular (menor autovalor nulo).

Se comprende que la determinación de la carga crítica exige la resolución de sucesivos problemas no lineales, correspondientes a los diferentes valores del parámetro λ, y constituye un problema de autovectores no clásico, ya que los elementos de k_{NL} son funciones trascendentes del parámetro λ. El vector de desplazamientos (autovector) asociado con la matriz singular k_{NL} para $\lambda = \lambda_{crit}$, indica el modo de pandeo de la estructura.

Con objeto de deducir este primer autovalor de la matriz de rigidez no lineal, se propone en (2) una técnica de descomposición, de Cholesky, de k_{NL}. Esta permite asegurar la determinación de este primer autovalor sin saltar al segundo, mediante divisiones sucesivas del intervalo entre los valores de λ consecutivos, para los que k_{NL} pasa de definida positiva a definida negativa, recontando coeficientes negativos de la diagonal principal de la matriz triangular de la descomposición de Cholesky. Para detalles de la técnica consúltese (2).

4. SIMULACION DE MONTE-CARLO

Con objeto de cuantificar la influencia de las imperfecciones en el valor de la carga crítica, se ha considerado el siguiente modelo estadístico.

Una imperfección en una estructura se produce de una manera aleatoria.

En una estructura perfecta o ideal, el valor de la carga crítica depende únicamente de las características geométricas y mecánicas (θ) de las barras que definen la estructura, es decir:

$$p_{crit} = \psi_1 (\theta) \tag{6}$$

siendo ψ_1 una función compleja de las características θ.

En una estructura con imperfecciones, el valor de la carga crítica es ahora:

$$p_{crit} = \psi_2 (\theta, x_1 \ldots x_n) \tag{7}$$

siendo ψ_2 una función que depende, no sólo de las características θ sino también de los distintos parámetros $x_1 \ldots x_n$ que definen las imperfecciones, las cuales son variables aleatorias. Por lo tanto se deduce que p_{crit} es asimismo una variable aleatoria.

(**) NOTA: La carga crítica se define como el conjunto de cargas nominales actuando sobre la estructura, multiplicadas por el parámetro crítico, es decir:

$$P_{crit} = \lambda_{crit} \cdot p$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La distribución de p_{crit} será una transformación de la función de distribución conjunta de las variables aleatorias x_i:

$$P = P(x_1 \ldots x_n) \tag{8}$$

por intermedio de la función ψ_2.

Esta función ψ_2 no es conocida analíticamente y únicamente se pueden obtener valores de esta función para valores específicos de las variables $x_1 \ldots x_n$. Por lo tanto no es posible deducir la función de p_{crit}, en probabilidad, de un modo analítico.

Para resolver este problema se ha utilizado el método de Monte-Carlo que consiste en definir aleatoriamente una muestra de los valores de las imperfecciones que intervienen en el proceso, obteniéndose, al calcular el valor de p_{crit} para la estructura imperfecta, otra muestra de la distribución de p_{crit}.

Si se asimila la probabilidad de que el valor P_{crit} pertenezca al intervalo $Z, Z + \Delta Z$, a la frecuencia de aparición de p_{crit} en dicho intervalo, se puede deducir una estimación de la distribución de p_{crit} que será tanto más aproximada, en términos de probabilidad, a la real, cuanto mayor sea el número de muestras considerado.

Con un número suficientemente elevado de valores puede estimarse la forma de la función de distribución por medio de un histograma de frecuencias, del tipo de la figura 4. Otros tamaños de muestra, relativamente reducidos, pueden permitir estimar los parámetros básicos de la distribución, como son la media y la desviación típica; y, en este sentido, se ha realizado el estudio que se recoge en este artículo.

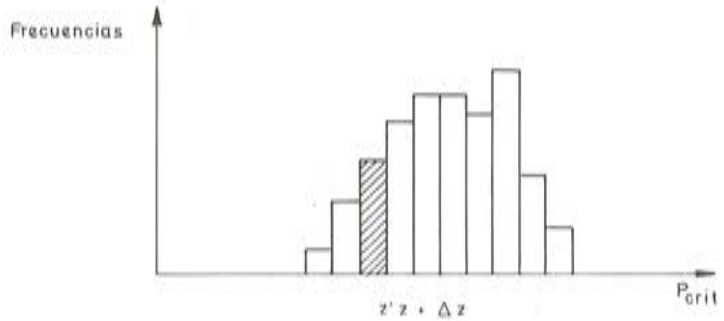


Fig. 4.

5. CASOS ESTUDIADOS

Se han considerado dos entramados planos (estructuras A y B) que se indican en la figura 5 y que corresponden a dos casos extremos de estructuras típicas de edificación: Edificio alto, con varias plantas y pocas crujías, y edificio bajo de pocas plantas y muchos vanos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Fig. 5.1. Edificio A, carga total

Fig. 5.2. Edificio A, carga alternada

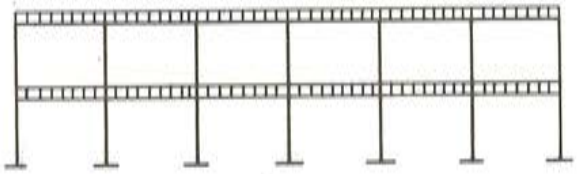


Fig. 5.3. Edificio B, carga total

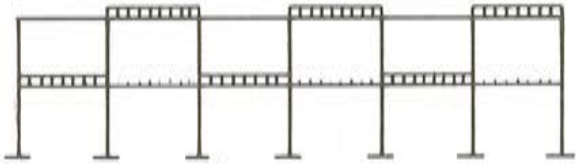


Fig. 5.4. Edificio B, carga alternada

Por otra parte se ha contemplado la posibilidad de actuación de dos tipos de carga: carga total uniforme en los dinteles y carga alternada, tipo damero.

Los valores de las cargas críticas de cada uno de estos casos en las estructuras ideales, se indican en la tabla 1.

TABLA 1

Carga crítica. Estructuras ideales

Estructura	Carga uniforme	Carga alternada
A	10,2653	20,5111
B	23,9150	47,1920

Las estructuras ideales anteriores se han supuesto afectadas por cada uno de los siguientes tipos de imperfecciones, que se relacionan en la tabla 2.

Se ha supuesto que cada una de las imperfecciones sigue una distribución de probabilidad, bien del tipo gaussiano (normal) o bien uniforme, tal como se indica en la mencionada tabla 2.

Los valores característicos de estas funciones se basan en las siguientes consideraciones:

–Para el caso de estudio con distribución gaussiana, se ha realizado un truncamiento en las zonas extremas, de modo que se satisfaga la condición:

$$\int_{-\infty}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx < \frac{\delta}{2}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

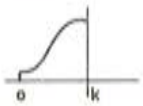
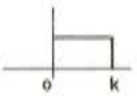
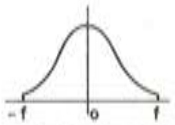
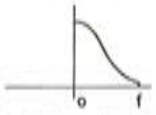
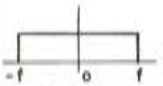
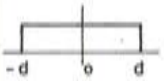
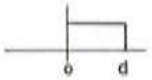
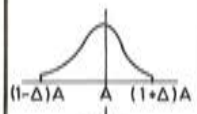
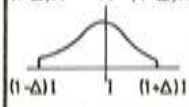
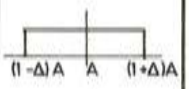
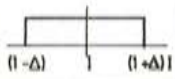
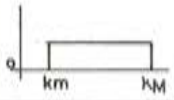
IMPERFECCION	DISTRIBUCION	
	GAUSSIANA	UNIFORME
a) CONEXIONES DE BARRAS - Nudos no rígidos		
b) GEOMETRICAS b_1) En las barras - Preflecha parabólica aleatoria - " sinusoidal " - " parabólica orientada - " sinusoidal "	 	
b_2) En los soportes - Verticalidad aleatoria - Verticalidad orientada	 	 
c) CARACTERISTICAS MECANICAS - Areas - Inercias	 	 
d) CIMENTACION - Cimentación elástica		

TABLA 2.- IMPERFECCIONES ESTUDIADAS

con objeto de evitar valores anómalos. El valor impuesto de δ ha sido de 0,1%.

—En la imperfección de las conexiones de las barras, el valor del parámetro de rigidez de extremo, k, se ha hecho variar entre 0 y 25, que corresponde numéricamente, dada la precisión del ordenador utilizado, a las situaciones de articulación y empotramiento perfecto, respectivamente (*).

—En el caso de imperfección de preflechas, el valor simulado ha estado comprendido entre las cotas $-\frac{l}{1.500}$ y $\frac{l}{1.500}$ siendo l la longitud de la barra. Esta limitación del valor máximo de la preflecha corresponde a la preconizada en el artículo 6.42 de la norma MV-104-1966.

(*) La rigidez del nudo se ha medido mediante el coeficiente adimensional k o relación entre las rigideces del nudo y de la barra en el extremo correspondiente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

—Para el estudio de la verticalidad de soportes, se ha limitado el desplome de los correspondientes soportes a lo indicado en la norma MV-104-1966, es decir, al valor $\frac{h}{1.000}$, siendo h la distancia entre dos pisos consecutivos.

—En el estudio de las características mecánicas, área e inercia, éstas pueden tener unos valores que difieren del valor nominal, A ó I, una cierta proporción de éste (10%).

—En el estudio de una cimentación elástica, únicamente se ha considerado una distribución uniforme, en la cual se han simulado valores de rigidez al giro de la cimentación, comprendidos entre $k_m = 35.000 \frac{mT}{rad}$ y $k_m = 350.000 \frac{mT}{rad}$, que corresponden a dos valores extremos del módulo de elasticidad de las arcillas.

6. RESULTADOS

Utilizando el método de Monte-Carlo se han analizado las características media y desviación típica de la carga crítica de pandeo. El número de muestras considerado ha sido de 10 y una de ellas se representa en la figura 6, que corresponde a un caso de imperfección de flecha aleatoria en vigas. Asimismo, en la tabla 3 se indica, a modo de ejemplo, los valores obtenidos en la totalidad de las muestras para el caso de conexiones semirígidas. El valor indicado en las tablas, $\overline{p}_{crit}$, se define como:

$$\overline{p}_{crit} = \frac{p_{crit}\ (\text{muestra})}{p_{crit}\ (\text{estructura ideal o sin imperfecciones})}$$

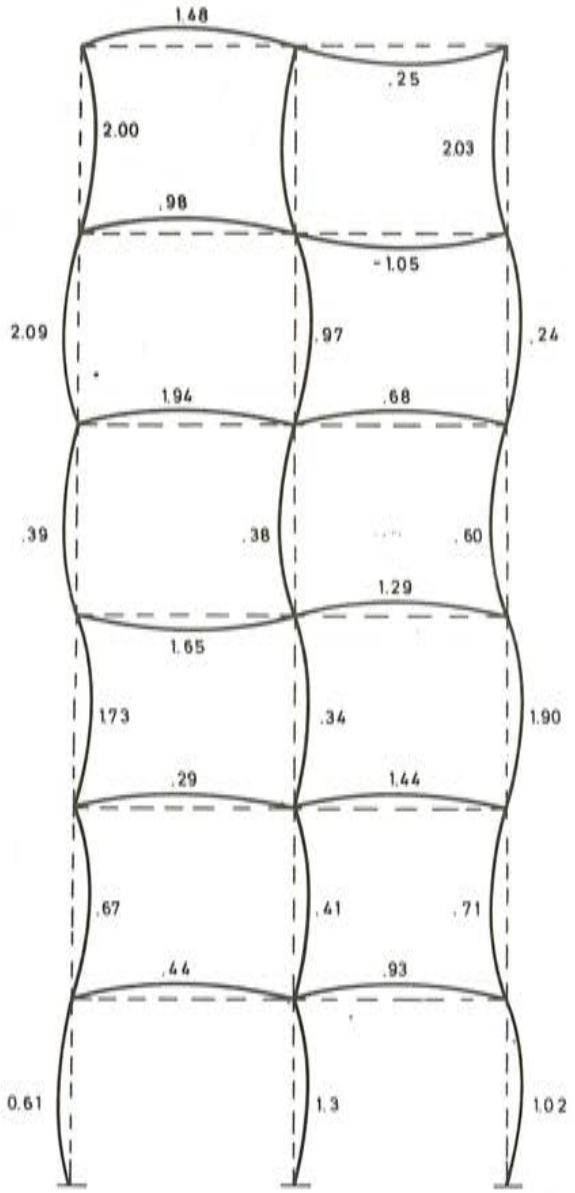


Fig. 6. Preflecha aleatoria (mm.).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En la tabla 4 se recogen los valores característicos de cada una de las imperfecciones en estudio.

Por otra parte, y con objeto de conocer la influencia del tamaño de la muestra —diez en el análisis de todas las imperfecciones— se amplió este número a 20, y los resultados obtenidos, para el caso de la imperfección de conexiones semirígidas, se muestran en la tabla 5. Se observa allí la práctica coincidencia en los resultados finales, lo que permite confiar en los órdenes de magnitud de los resultados presentados aquí.

TABLA 3

Resultados obtenidos para la imperfección de conexiones semirígidas

		Factores de estabilidad p_{crit})								
		Edificio alto					Edificio bajo			
		Distrib.	Uniforme		Gaussiana		Uniforme		Gaussiana	
		Carta	Total	Alter.	Total	Alter.	Total	Alter.	Total	Alter.
MUESTRA		1	,9941	,9898	,9252	,9961	,9902	,9862	,9690	,9972
		2	,9708	,9849	,9939	,9807	,9672	,0046	,9869	,9953
		3	,9902	,9830	,9982	,9770	,9653	,9814	,9472	,9918
		4	,9953	,9745	,9738	,9918	,9455	,9890	,9817	,9871
		5	,9995	,9807	,9791	,9837	,9743	,9955	,9699	,9775
		6	,9878	,9596	,9967	,9947	,9276	,9960	,9960	,9914
		7	,9366	,9766	,9953	,9824	,9676	,9793	,9694	,9844
		8	,9772	,9856	,9840	,9733	,9684	,9772	,9756	,9775
		9	,9938	,9412	,9949	,9902	,9756	,9829	,9649	,9977
		10	,9366	,9915	,9870	,9837	,9653	,9979	,9745	,9945
VALORES CARACTERISTI.	E (p_{crit})		,9777	,9767	,9893	,9854	,9641	,9890	,9775	,9900
	σ (p_{crit})		,0231	,0155	,0093	,0070	,0171	,0080	,0117	,0074

Por último, se ha intentado representar, a efectos ilustrativos, la situación real de concomitancia de aparición simultánea de varios tipos de imperfecciones. Evidentemente, en este caso, si se desean resultados fiables, el tamaño de la muestra debe incrementarse. No obstante, en la tabla 6 se muestran, para solamente diez casos simulados, los valores característicos de p_{crit} —media y desviación típica— para el caso de edificio bajo. Se observa la influencia, apreciable en este caso, de la aparición de las imperfecciones, en la disminución de la carga crítica de la estructura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 4

Resumen de los valores característicos de cada una de las imperfecciones

		Factores de estabilidad							
		Edificio alto				Edificio bajo			
		Uniforme		Gaussiana		Uniforme		Gaussiana	
Imperfección		**Total**	**Alter.**	**Total**	**Alter.**	**Total**	**Alter.**	**Total**	**Alter.**
Preflecha	E	1.0001	1.0000	1.0000	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Parabólica aleatoria	σ	.0001	.0002	.0001	.0001	.0001	.0002	33E-04	.0001
Preflecha	E	1.0001	1.0001	1.0001	1.0000	1.0001	1.0001	1.0000	1.0000
Parabólica orientada	σ	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.33E-6	.47E-4
Preflecha	E	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Sinusoidal aleatoria	σ	.0001	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.47E-4	.0001
Preflecha	E	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	1.0000	1.0000	1.0001
Sinusoidal orientada	σ	.0001	.0001	.0002	.0001	.0002	.0001	.81E-4	.47E-4
Verticalidad de	E	.9803	.9791	.9921	.9859	.9567	.9958	.9854	.9990
soportes aleatoria	σ	.0106	.0129	.0080	.0100	.0325	.0058	.0194	.0014
Verticalidad de	E	.9605	.9667	.9666	.9762	.9923	.9901	.9906	.9944
soportes orientada	σ	.277	.0246	.0196	.0215	.0128	.0077	.0065	.0045
Variación de áreas	E	1.0002	1.0002	1.0001	1.0000	1.0000	.9999	1.0000	1.0000
de las barras	σ	.0001	.0002	.0002	.0001	.15E-4	.0001	.24E-4	.0001
Variación de inercias	E	.9972	1.0025	1.0243	.9803	.9841	.9846	.9982	.9908
de las barras	σ	.0240	.0133	.0345	.0081	.0244	.0287	.0124	.0118
Cimentación	E	.9250	.9382	–	–	.8851	.9028	–	–
elástica	σ	.0294	.0294	–	–	.0343	.0298	–	–

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 5

Resultados obtenidos con 20 muestras

		Carga	Total
MUESTRA		1	.9902
		2	.9672
		3	.9653
		4	.9455
		5	.9743
		6	.9276
		7	.9676
		8	.9684
		9	.9756
		10	.9653
		11	.9846
		12	.9633
		13	.9648
		14	.9366
		15	.9687
		16	.9901
		17	.9405
		18	.9377
		19	.9847
		20	.9642
VALORES CARACTE-RISTICOS	$E(p_{crit})$		.9641
	$\sigma(p_{crit})$		.0180

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 6

Resultados obtenidos en el caso de edificio bajo, con carga uniforme, con concomitancia de imperfecciones de inercia de barras, verticalidad de soportes, conexiones semirígidas de las barras y cimentación elástica

	Carga	Total
	1	.9135
	2	.9337
	3	.9058
	4	.8343
	5	.7902
	6	.8267
	7	.8541
	8	.8241
	9	.9001
	10	.8766
VALORES CARACTE-RISTICOS	$E(p_{crit})$	.8659
	$\sigma(p_{crit})$	.0470

7. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos indicados en las tablas 3 y 4 se pueden deducir las siguientes conclusiones:

–Se observa que, en general, para un mismo grado de dispersión, la distribución uniforme de la probabilidad de aparición de una imperfección, representa un modelo más pesimista que la correspondiente normal o gaussiana.

–Con respecto a la conexión semirígida, los edificios bajos, con carga simétrica, son las estructuras menos favorables.

–La imperfección de deformación previa, no constituye un tipo de imperfección, que conlleve un descenso grave en el factor de estabilidad.

–Con relación a la verticalidad de soportes, su incidencia es particularmente acusada en los edificios altos, sometidos a carga total.

–Modificaciones ligeras en los valores de las características mecánicas de las secciones lineales de las barras, no son importantes en la modificación de la carga crítica de pandeo global de la estructura. Esto es particularmente cierto en el caso de las áreas, donde la incidencia es nula.

–El caso de imperfecciones en la cimentación, constituye un tipo con influencia importante en la estabilidad general de la edificación, independientemente de si se trata de edificación alta o baja. Probablemente, la importancia de esta imperfección crece más con el número de puntos de cimentación que con relación al tipo de estructuras.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

BIBLIOGRAFIA

(1) SAMARTIN, A. "Cálculo de estructuras clásicas geométricamente no lineales". Publicación AE-3-79-ET.S.I.C.C.P. Santander, 1979.

(2) GUTIERREZ, G., y SAMARTIN, A. "Influencia de los errores de ejecución en la carga crítica de pandeo de estructuras reticulares planas". Tesis doctoral. Publicación AE-1-81. E.T.S.I.C.C.P. Santander 1981.

* * *

INFORMACION DE LA F.I.P.

Miembros Individuales

Atendiendo las numerosas peticiones recibidas, el Consejo de la Federación Internacional del Pretensado (F.I.P.), ha acordado establecer una nueva categoría de Miembros, que serán designados "Miembros Individuales", de particular interés para aquellas personas residentes en países en los que no existan Grupos nacionales afiliados a la F.I.P., y para las librerías y Universidades que deseen mantenerse puntualmente informadas sobre las últimas noticias relativas a la Federación y sobre las publicaciones por ella editadas.

Mediante el pago de una cuota anual de 16,– Libras, los Miembros Individuales recibirán el Boletín Técnico "FIP NOTES", que se publica cuatro veces al año y contiene informes y artículos sobre los últimos avances en la técnica del pretensado, detalles sobre las actuales y futuras actividades de la F.I.P., e información sobre otras reuniones internacionales.

Las FIP NOTES, se enviarán por correo aéreo a los países no europeos, con el fin de asegurar su más rápida recepción.

Los Miembros Individuales podrán también adquirir un ejemplar de las diferentes publicaciones de la F.I.P., con un descuento especial de 35%. Los ejemplares suplementarios que soliciten, les serán facturados al precio normal.

Si Vd. desea inscribirse como Miembro Individual de la F.I.P., deberá enviar a la Secretaría de dicha Federación, la adjunta hoja de solicitud, debidamente cumplimentada.

FIP INDIVIDUAL MEMBERSHIP APPLICATION

I wish to become an FIP Individual Member and to receive FIP NOTES, and regular information about FIP meetings and publications.

I enclose a cheque/postal order/ UNESCO Coupon for £16 net made payable to FIP.

Name .....
(Individual, Library, Department etc.)

Full Postal Address .....

.....

.....

.....

Country .....

Signature .....

Date .....

The completed form, with remittance, should be sent to:

FIP Secretariat
Wexham Springs
Slough SL3 6PL, England

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Reparto de cargas horizontales entre los elementos de rigidización de un edificio

Alfonso Recuero
Dr. Ingeniero de Camino

José - Pedro Gutiérrez
Ingeniero de Caminos
Instituto Eduardo Torroja

RESUMEN

En el artículo se presenta un método de reparto de acciones horizontales entre las estructuras que forman la rigidización lateral de un edificio.

El método está basado en las matrices de rigidez lateral de cada elemento rigidizador.

Para el caso de estructuras aporticadas se ha escrito un programa de cálculo en FORTRAN IV para el miniordenador HP 21 MX.

Este programa, cuyo listado figura en el apéndice, obtiene la matriz de rigidez lateral de cada pórtico a partir de la matriz de rigidez global del mismo, utilizando un algoritmo general de condensación de grados de libertad; y realiza el reparto de cargas horizontales de acuerdo con el método expuesto. Se incluye ademas un ejemplo de aplicación con entrada de datos y salida de resultados.

1. INTRODUCCION

El análisis de edificios de altura frente a acciones horizontales, requiere en general dos etapas de cálculo. La primera, estimar como se reparten las acciones horizontales entre los elementos rigidizadores de un edificio y la segunda proceder al cálculo de las solicitaciones internas en los miembros que forman cada uno de los elementos anteriores a partir del reparto realizado en la primera etapa.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El término elemento rigidizador tiene un sentido amplio y engloba cualquier tipo de esqueleto resistente que pueda existir en un edificio.

Los diferentes tipos de elementos para resistir las fuerzas horizontales que actúan sobre un edificio pueden clasificarse según distintos criterios. De una forma simple los encuadraríamos en dos grandes grupos: Elementos planos y elementos espaciales. Los elementos planos tienen rigidez lateral predominantemente en una dirección y nula en la dirección perpendicular, los espaciales tienen rigidez lateral importante en cualquier dirección. Pertenecen al primer grupo los pórticos y pantallas planas, estructuras mixtas pórtico-pantalla en un plano, etc., y al segundo grupo las pantallas espaciales, núcleos, pórticos tridimensionales, etc.

Otra clasificación, más interesante desde el punto de vista estructural, está basada en las diferentes formas de comportamiento o respuesta de los elementos rigidizadores cuando están sometidos a carga lateral.

Si se toma como parámetro de respuesta la deformación lateral del elemento, éste puede clasificarse de la siguiente forma:

Elemento con deformación tipo cortante, elemento con deformación tipo flexión, y elemento con deformación mixta o intermedia entre las dos anteriores. Un pórtico de nudos rígidos pertenece al primer grupo; una pantalla cuya relación altura/canto sea elevada, pertenece al segundo grupo, y una estructura mixta pórtico-pantalla o un tubo porticado pertenecen al tercer grupo.

Las acciones horizontales que actúan sobre un edificio someten a éste no sólo a solicitaciones de flexión, sino también de torsión. Estas últimas son debidas a excentricidades de la carga lateral, disimetrias geométricas y/o resistentes en la planta estructural del edificio, o por ambas causas a la vez. Ante este tipo de solicitación, junto a la capacidad torsional del conjunto puede considerarse también la capacidad torsional individual de cada uno de los elementos rigidizadores. Desde el punto de vista torsional puede establecerse una nueva clasificación de dichos elementos: aquellos con resistencia importante a torsión y aquellos cuya resistencia a torsión sea despreciable. Los primeros pueden analizarse de acuerdo con la teoría de Saint Venant, la teoría de Vlasov de torsión no uniforme, y la teoría de torsión por alabeo, dependiendo del tipo de elemento.

La complejidad de comportamientos que se han señalado anteriormente frente a solicitaciones de flexión y torsión, queda representada para cada elemento por las matrices de flexibilidad lateral y flexibilidad torsional respectivamente, o bien por sus inversas, es decir por las matrices de rigidez lateral, y torsional.

En el presente artículo se describe un método que tiene por objeto encontrar la distribución de carga lateral entre los diversos elementos rigidizadores de una estructura de edificio, compatibilizando desplazamientos horizontales en todas las plantas y suponiendo que cada forjado es infinitamente rígido en su plano.

El método está basado en la utilización de las matrices de flexibilidad o rigidez lateral de cada subestructura.

En el programa que se presenta en el apéndice y para estructuras aporticadas o idealizables como tales, estas matrices se calculan con un algoritmo de condensación de grados de libertad a partir de la matriz de rigidez global de cada subestructuras. Este mismo algoritmo puede utilizarse para calcular las matrices de rigidez lateral, o de rigidez torsional de otros tipos de estructuras, a partir de la matriz general correspondiente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

2. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL CALCULO

El método que se presenta adopta las siguientes hipótesis básicas:

1ª – Los forjados son infinitamente rigidos en sus planos.

2ª – Los forjados no poseen rigidez fuera de sus planos.

3ª – Las fuerzas horizontales que actúan sobre la estructura estan concentradas a nivel de cada forjado.

La primera hipótesis supone que la rigidez de cada forjado en su plano es grande comparada con las rigideces de pórticos y pantallas que estabilizan el edificio. Es por lo tanto normal suponer que el forjado actúa como diafragma rígido y se desplaza sin deformarse. Esta hipótesis reduce considerablemente los grados de libertad de la estructura y en consecuencia el tiempo y coste del análisis.

La hipótesis es suficientemente aproximada cuando la relación de dimensiones del forjado no es grande. En caso contrario, por ejemplo estructuras con planta muy alargada, la flexión en el plano del forjado puede ser importante y el comportamiento del mismo se asemeja a una viga de gran canto soportada por apoyos elásticos que simulan la rigidez lateral de cada pórtico o pantalla del edificio en el nivel del forjado considerado.

La segunda hipótesis supone que la rigidez a flexión del forjado fuera de su plano es despreciable frente a la que presentan los elementos rigidizadores ante fuerzas horizontales, y por lo tanto el forjado no introduce ninguna coacción al giro en los planos de deformación de dichos elementos.

En edificios donde la estructura horizontal está formada por losas de espesor uniforme conectadas a la estructura vertical con capacidad suficiente para absorber momentos de flexión, la hipótesis sigue siendo válida si se incorpora la rigidez del forjado mediante la consideración de anchos eficaces de losa que simulen el comportamiento del mismo fuera de su plano.

La tercera hipótesis no resta generalidad al análisis, y esta simplificación se adopta cuando se estudia el comportamiento global de la estructura frente a acciones horizontales. Las dos clases más importantes de este tipo de acciones son las de viento y sismo.

Los cerramientos de la estructura transmiten directamente al forjado la acción del viento y esta acción a nivel de forjado se sustituye por su resultante actuando en una dirección determinada. Por otro lado la masa de un edificio, en la mayor parte, está concentrada a nivel de forjado y la acción sísmica puede suponerse concentrada en el centro de masa del mismo.

Formulación del método

La estructura objeto del análisis tiene "n" plantas y está formada por "m" elementos rigidizadores –pórticos, pantallas, etc.–, cuya distribución puede ser arbitraria tal y como se indica en la figura 1.

Se elige un sistema de ejes generales cartesiano dextrogiro O', X', Y', Z', como el mostrado en el figura 2. Las fuerzas y movimientos en este sistema tienen los sentidos positivos indicados en la misma figura.

Cada elemento rigidizador w (w = 1, 2 ... m) tiene un sistema local de coordenadas de-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

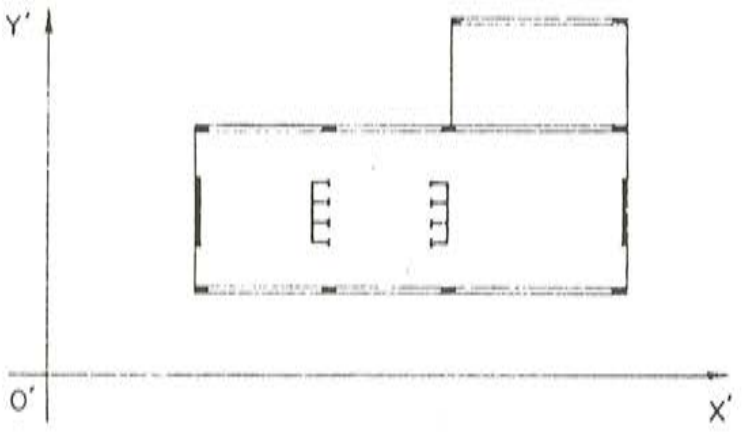


Fig. 1. Planta estructural.

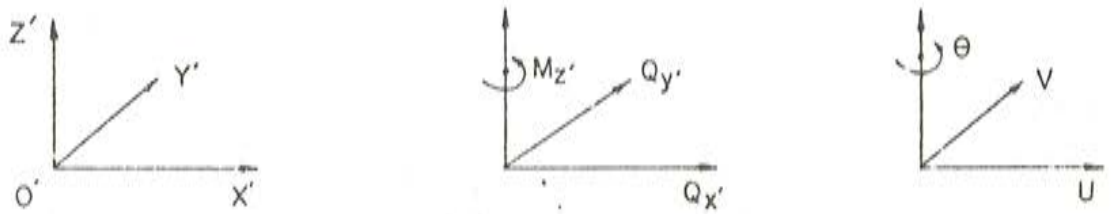


Fig. 8. Sistema de ejes.

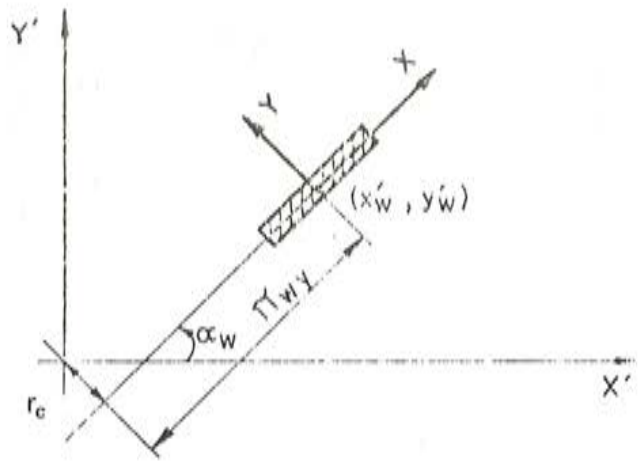


Fig. 3. Posición de un elemento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

finido por dos ejes cuyas direcciones coinciden con los principales de inercia de la sección del elemento y pasan por el centro de esfuerzos cortantes de la misma.

Un elemento rigidizador "w" viene representado en planta por las coordenadas (x'_w, y'_w) del centro de esfuerzos cortantes, y el ángulo α_w que forma el eje local X con el eje X' general de la estructura. El eje Y, local, se obtiene del X local, girándolo un ángulo de 90° en el sentido antihorario, figura 3.

Llamamos U, V, Θ, el movimiento de conjunto de una planta del edificio, en las direcciones X', Y', y giro de eje Z', y que representa el movimiento del punto del eje Z' situado a la misma altura de la planta considerada, moviéndose solidario con el forjado de dicha planta (movimiento de sólido rígido).

Si llamamos u_w, v_w, Θ_w el movimiento del elemento rigidizador "w" en su sistema local de referencia, en la planta considerada, se tiene que:

$$\begin{aligned} u_w &= a_w\, U + b_w\, V + r_{wx}\, \Theta \\ v_w &= -\, b_w\, U + a_w\, V + r_{wy}\, \Theta \\ \Theta_w &= \Theta \end{aligned} \qquad (1)$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_w &= \cos \alpha_w \\ b_w &= \operatorname{sen} \alpha_w \\ r_{wx} &= x'_w \operatorname{sen} \alpha_w - y'_w \cos \alpha_w \\ r_{wy} &= x'_w \cos \alpha_w + y'_w \operatorname{sen} \alpha_w \end{aligned} \qquad [2]$$

Si llamamos {U}, {V}, {Θ} los vectores del movimiento global de todas las plantas y $\{u_w\}$, $\{v_w\}$, $\{\Theta_w\}$ los vectores movimiento del elemento rigidizador "w" en su sistema local, y suponemos además que a_w, b_w, r_{wx}, r_{wy} no varían con la altura del edificio, puede escribirse:

$$\begin{aligned} \{u_w\} &= a_w\, \{U\} + b_w\, \{V\} + r_{wx}\, \{\Theta\} \\ \{v_w\} &= -\, b_w\, \{U\} + a_w\, \{V\} + r_{wy}\, \{\Theta\} \\ \{\Theta_w\} &= \{\Theta\} \end{aligned} \qquad [3]$$

Las relaciones fuerzas movimientos para el elemento "w" pueden expresarse mediante las matrices de flexibilidad de la forma:

$$\begin{aligned} \{u_w\} &= [F_x^w] \cdot \{P_x^w\} \\ \{v_w\} &= [F_y^w] \cdot \{P_y^w\} \\ \{\Theta_w\} &= [F_z^w] \cdot \{M_z^w\} \end{aligned} \qquad [4]$$

donde:

$[F_x^w]$ es la matriz de flexibilidad lateral en la dirección X, formada por los coeficientes $f^w_{x,ij}$ que representan el desplazamiento en el nivel z_i cuando actúa una fuerza unidad en el nivel z_j.

$[F_y^w]$ es la matriz de flexibilidad lateral en la dirección Y, formado por los coeficientes $f^w_{y,ij}$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$[F_z^w]$ es la matriz de flexibilidad torsional formada por los coeficientes $f_{z,ij}^w$ que representan el giro en el nivel z_i cuando actúa un momento torsor unidad en el nivel z_j.

$\{P_x^w\}$, $\{P_y^w\}$, $\{M_z^w\}$ son los vectores fuerzas en las direcciones X, Y, y momentos de eje Z respectivamente.

Las ecuaciones [4] pueden escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \{P_x^w\} &= [F_x^w]^{-1} \cdot \{u_w\} = [K_x^w]\{u_w\} \\ \{P_y^w\} &= [F_y^w]^{-1} \cdot \{v_w\} = [K_y^w]\{v_w\} \\ \{M_z^w\} &= [F_z^w]^{-1} \cdot \{\Theta_w\} = [K_z^w]\{\Theta_w\} \end{aligned} \qquad [5]$$

representando $[K_x^w]$, $[K_y^w]$, $[K_z^w]$, las matrices de rigidez lateral en las direcciones X, Y, y torsional respectivamente.

Representaremos por $\{Q_{x'}\}$, $\{Q_{y'}\}$, $\{M_{z'}\}$, los vectores de carga exterior referidos al sistema general de ejes.

Cuando la acción exterior puede representarse por un único vector $\{Q\}$ actuando en una dirección fija que forma un ángulo α_c con el eje X' general y cuyo brazo con respecto al origen es r_c, figura 4, los vectores de carga exterior son:

$$\begin{aligned} \{Q_{x'}\} &= \{Q\} \cdot a_c \\ \{Q_{y'}\} &= \{Q\} \cdot b_c \\ \{M_{z'}\} &= \{Q\} \cdot r_c \end{aligned} \qquad [6]$$

siendo: $a_c = \cos \alpha_c$, $b_c = \operatorname{sen} \alpha_c$, $r_c = x'_c \operatorname{sen} \alpha_c - y'_c \cos \alpha_c$; donde x'_c, y'_c representan las coordenadas de un punto cualquiera de la recta de acción de la carga exterior.

Las ecuaciones de equilibrio del conjunto son:

$$\begin{aligned} &\Sigma \{P_x^w\} a_w - \Sigma \{P_y^w\} b_w = \{Q_{x'}\} \\ &\Sigma \{P_x^w\} b_w + \Sigma \{P_y^w\} a_w = \{Q_{y'}\} \\ &\Sigma \{P_x^w\} r_{wx} + \Sigma \{P_y^w\} r_{wy} + \Sigma \{M_z^w\} = \{M_{z'}\} \end{aligned} \qquad [7]$$

en donde la sumatoria, se realiza para todo elemento rigidizador $w = 1, 2 \ldots m$.

Sustituyendo en [7] las expresiones de $\{P_x^w\}$, $\{P_y^w\}$, $\{M_z^w\}$ dadas por [5] y susti -

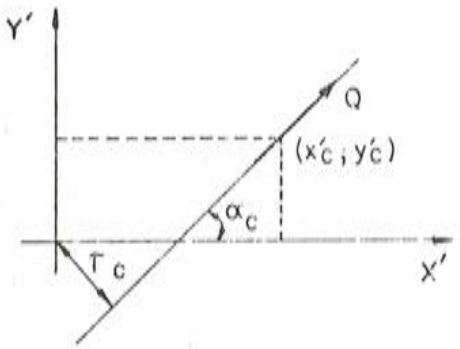


Fig. 4. Fuerza exterior.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

tuyendo $\{u_w'\}$, $\{v_w'\}$, $\{\Theta_w\}$ por la expresión [3] se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} K_{11}\ \{U\} + K_{12}\ \{V\} + K_{13}\ \{\Theta\} &= \{Q_{x'}\} \\ K_{21}\ \{U\} + K_{22}\ \{V\} + K_{23}\ \{\Theta\} &= \{Q_{y'}\} \\ K_{31}\ \{U\} + K_{32}\ \{V\} + K_{33}\ \{\Theta\} &= \{M_{z'}\} \end{aligned} \qquad [8]$$

donde:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \Sigma\ ([K_x^w]\ a_w^2 + [K_y^w]\ b_w^2) \\ K_{12} &= \Sigma\ ([K_x^w] - [K_y^w])\ a_w\ b_w \\ K_{21} &= K_{12}^T \\ K_{13} &= \Sigma\ ([K_x^w]\ a_w\ r_{wx} - [K_y^w]\ b_w\ r_{wy}) \\ K_{31} &= K_{13}^T \\ K_{22} &= \Sigma\ ([K_x^w]\ b_w^2 + [K_y^w]\ a_w^2) \\ K_{23} &= \Sigma\ ([K_x^w]\ b_w\ r_{wx} + [K_y^w]\ a_w\ r_{wy}) \\ K_{32} &= K_{23}^T \\ K_{33} &= \Sigma\ ([K_x^w]\ r_{wx}^2 + [K_y^w]\ r_{wx}^2 + [K_z^w]) \end{aligned} \qquad [9]$$

Resuelto el sistema de ecuaciones [8], simétrico, para las incógnitas $\{U\}$, $\{V\}$, $\{\Theta\}$, el movimiento de un elemento "w" viene dado por las ecuaciones [3] y las fuerzas internas vienen dadas por [5].

Cuando los contravientos de un edificio poseen rigidez lateral en una sola dirección, por ejemplo la dirección X, y se desprecia además la rigidez torsional de los mismos, se obtiene un caso particular muy frecuente en edificación, en donde las estructuras de contraviento son pórticos planos o pantallas planas.

Con la simplificación anterior, el grupo de igualdades [9] queda reducido a:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \Sigma\ [K_x^w]\ a_w^2 \\ K_{12} &= \Sigma\ [K_x^w]\ a_w\ b_w \\ K_{13} &= \Sigma\ [K_x^w]\ a_w\ r_{wx} \\ K_{22} &= \Sigma\ [K_x^w]\ b_w^2 \\ K_{23} &= \Sigma\ [K_x^w]\ b_w\ r_{wx} \\ K_{33} &= \Sigma\ [K_x^w]\ r_{wx}^2 \end{aligned} \qquad [10]$$

3. PROGRAMA DE CALCULO

A partir del método desarrollado en el apartado anterior se ha escrito un programa de cálculo en FORTRAN IV para el ordenador HP-21MX con sistema operativo RTE II, cuyo listado se encuentra en el apéndice.

El programa está preparado únicamente para elementos que sean idealizables como pórtico plano cuya matriz de rigidez es ampliamente conocida y fácilmente calculable.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Con ligeras modificaciones puede ampliarse a otros tipos de elementos siempre que se conozca la matriz de rigidez de los mismos.

El programa se ha desarrollado en varias fases y consta de un programa principal o director y tres segmentos. Las funciones de cada uno de ellos se describen a continuación.

Programa RALER

Es el programa director y su única misión es llamar sucesivamente a cada uno de los tres segmentos restantes.

Programa LECTU

Este segmento realiza la lectura de datos generales del problema a través de la subrutina GLEE. También crea el archivo MRLATE donde se grabarán las matrices de rigidez lateral de cada subestructura.

Programa LMAT2

Este segmento calcula la matriz de rigidez lateral de un pórtico a partir de la matriz de rigidez global del mismo. Para este fin se utiliza un algoritmo general de condensación de grados de libertad cuya descripción detallada se encuentra en la referencia 1.

Programa GMAT4

Este segmento realiza el reparto de carga lateral entre los distintos contravientos de la estructura. Para ello ensambla las matrices de rigidez lateral de todos los elementos de acuerdo con el método expuesto en el apartado 2, resuelve el sistema de ecuaciones [8] y calcula los desplazamientos y fuerzas en cada elemento utilizando las ecuaciones [3] y [5] respectivamente.

El listado del programa puede encontrarse en el apéndice.

Un esquema general de la entrada de datos se encuentra en el ejemplo desarrollado a continuación.

4. EJEMPLO DE CALCULO

Para ilustrar el manejo del programa de cálculo que se presenta en el apéndice, se ha desarrollado un ejemplo que corresponde a una estructura formada por pórticos cuyo esquema en planta se recoge en la figura 5. Los tipos de pórticos se indican en la figura 6, y las hipótesis de cargas en la figura 7.

Los datos y salida de resultados figuran en las hojas siguientes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

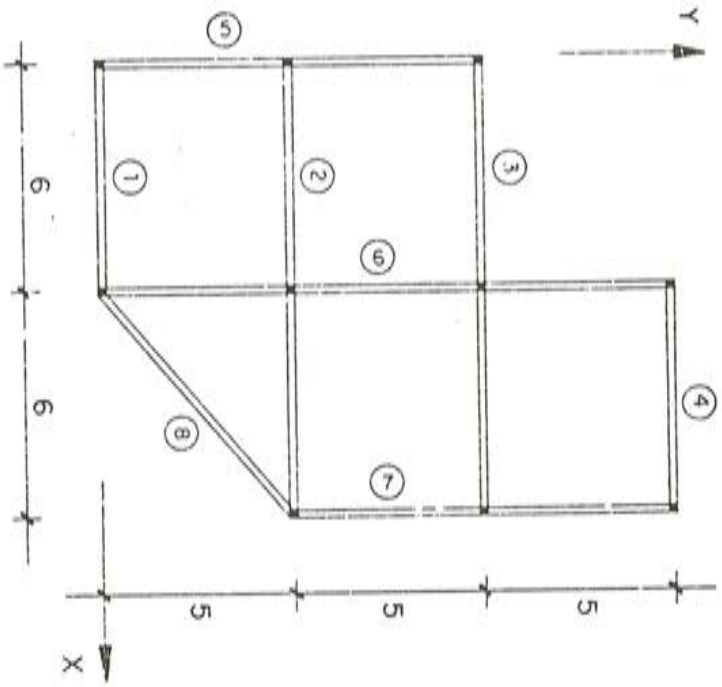


Fig. 5. Planta de la estructura.

PLANTA	HIP-I			HIP-II		
	Fx	Fy	M	Fx	Fy	M
1	0	2.88	17.28	-3.6	2.88	53.28
2	"	"	"	"	"	"
3	"	"	"	"	"	"
4	"	"	"	"	"	"
5	"	"	"	"	"	"
6	"	"	"	"	"	"
7	"	"	"	-1.2	"	26.28
8	"	"	"	-1.2	"	"
9	"	"	"	-1.2	"	"
10	0	1.44	8.64	-0.6	1.44	13.14

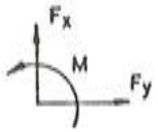


Fig. 7. Hipótesis de cargas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

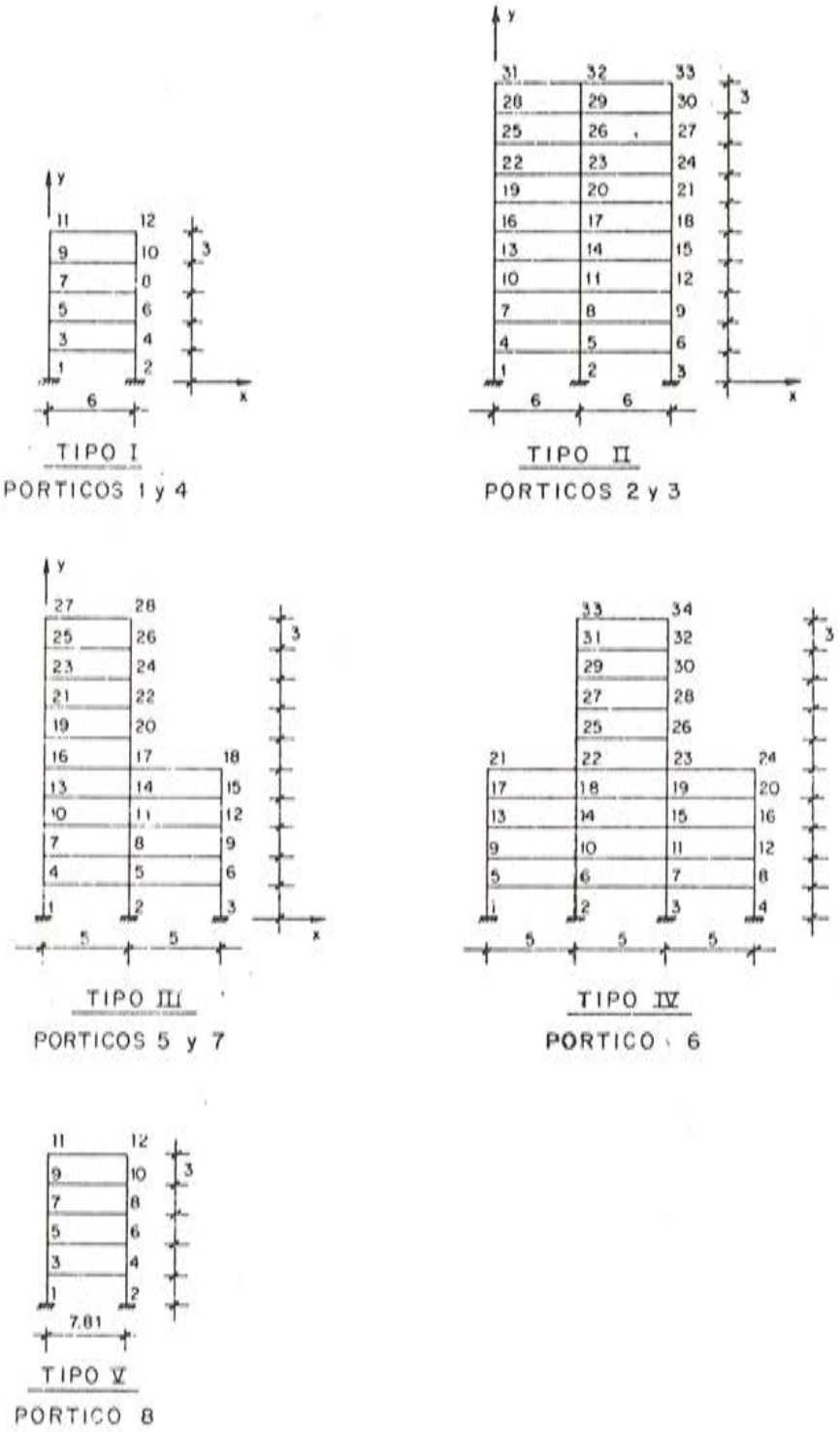


Fig. 6. Tipos de pórticos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
JPGARF T=00003 IS ON CR00010 USING 00024 BLKS R=0000

0001  EDIFICIO 10 PLANTAS-PORTICOS DE HORMIGON (JPG & ARF)
0002  /DATOS GENERALES
0003  /NP   NER   NM   NTIPOS
0004   10    8     2     5
0005  /
0006  /PARA CADA TIPO DE PORTICO : PLANTA COMIENZO,PLANTA TERMINO
0007  0   5
0008  0  10
0009  0  10
0010  0  10
0011  0   5
0012  /
0013  /DEFINICION EN PLANTA DE LA POSICION DE CADA PORTICO
0014  /    X          Y          ANGULO      TIPO DE PORTICO
0015       3          0            0              1
0016       6          5            0              2
0017       6         10            0              2
0018       9         15            0              1
0019       0          5          270              3
0020       6          7.5         90              4
0021      12         10           90              3
0022       9          2.5         39.8055         5
0023  /
0024  /DEFINICION DE LOS TIPOS DE PORTICOS
0025  /
0026  /PORTICO TIPO I    (PORTICOS 1,4)
0027  /
0028  /NUDOS  BARRAS  APOYOS RIGIDOS  APOYOS ELASTICOS  M.ELASTICIDAD
0029    12      15          2                0              2000000
0030  /
0031  /COORDENADAS DE LOS NUDOS (EN SISTEMA DE EJES DE CADA PORTICO)
0032  /COORDENADAS  X
0033  0  6   0  6   0  6   0  6   0  6
0034  /COORDENADAS  Y
0035  0  0  3  3  6  6  9  9  12  12  15  15
0036  /
0037  /N. TIPOS SECCIONES  ,  CODIGO (0=DAR INERCIA Y AREA)
0038  /                              (1=DAR ANCHO Y CANTO)
0039              3                 1
0040  /DEFINICION DE CADA TIPO DE SECCION(B*H)
0041    0.40   0.40  / TIPO 1 PILARES PLANTAS 1,2
0042    0.30   0.30  / TIPO 2    "      "    3,4,5
0043    0.25   0.40  / TIPO 3 VIGAS DE TODAS LAS PLANTAS
0044  /
0045  /DEFINICION DE BARRAS Y TIPO DE SECCION DE CADA BARRA
0046  /NUDO ORIGEN(NI)  NUDO EXTREMO(NJ)  TIPO SECCION   (NI<NJ)
0047          1                3                1
0048          3                5                1
0049          5                7                2
0050          7                9                2
0051          9               11                2
0052          2                4                1
0053          4                6                1
0054          6                8                2
0055          8               10                2
0056         10               12                2
0057          3                4                3
0058          5                6                3
0059          7                8                3
0060          9               10                3
0061         11               12                3
0062  /
0063  /DEFINICION DE APOYOS  (0=COARTADO , 1=LIBRE)
0064  /   NUDO   DIR.-X   DIR.-Y   GIRO
0065       1       0       0       0
0066       2       0       0       0
0067  /
0068  /N. DE GRADOS DE LIBERTAD A CONSERVAR
0069         5
0070  /
0071  /NUDO    DIR.-X    DIR.-Y    GIRO
0072     3       1         0         0        /(0=NO CONSERVAR)
0073     5       1         0         0        /(1=CONSERVAR)
0074     7       1         0         0
0075     9       1         0         0
0076    11       1         0         0
0077  /FIN DE DATOS PARA PORTICO TIPO I
0078  /
0079  /PORTICO TIPO II (PORTICOS 2,3)
0080  /
0081  /NUDOS   BARRAS  APOYOS RIGIDOS  APOYOS ELASTICOS  M.ELASTICIDAD
0082    33      50          3                0              2000000
0083  /
0084  /COORDENADAS DE LOS NUDOS (EN EL SISTEMA DE EJES DE CADA PORTICO)
0085  /COORDENADAS  X
0086  0  6  12   0  6  12   0  6  12   0  6  12   0  6  12   0  6  12/
0087  0  6  12   0  6  12   0  6  12   0  6  12   0  6  12
0088  /COORDENADAS  Y
0089   0   0   0   3   3   3   6   6   6   9   9   9  12  12  12/
0090  15  15  15  18  18  18  21  21  21  24  24  24  27  27  27/
0091  30  30  30
0092  /
0093  /SECCIONES
0094  4  1
0095  0.50  0.50  /PILARES
0096  0.40  0.40
0097  0.30  0.30
0098  0.25  0.40  /VIGAS
0099  /
0100  /BARRAS
0101  /
0102   1   4  1
0103   4   7  1
0104   7  10  2
0105  10  13  2
0106  13  16  2
0107  16  19  2
0108  19  22  3
0109  22  25  3
0110  25  28  3
0111  28  31  3
0112   2   5  1
0113   5   8  1
0114   8  11  2
0115  11  14  2
0116  14  17  2
0117  17  20  2
0118  20  23  3
```


Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
0119  23  26  3
0120  26  29  3
0121  29  32  3
0122   3   6  1
0123   6   9  1
0124   9  12  2
0125  12  15  2
0126  15  18  2
0127  18  21  2
0128  21  24  3
0129  24  27  3
0130  27  30  3
0131  30  33  3
0132   4   5  4
0133   5   6  4
0134   7   8  4
0135   8   9  4
0136  10  11  4
0137  11  12  4
0138  13  14  4
0139  14  15  4
0140  16  17  4
0141  17  18  4
0142  19  20  4
0143  20  21  4
0144  22  23  4
0145  23  24  4
0146  25  26  4
0147  26  27  4
0148  28  29  4
0149  29  30  4
0150  31  32  4
0151  32  33  4
0152  /
0153  /APOYOS
0154  1  0  0  0
0155  2  0  0  0
0156  3  0  0  0
0157  /
0158  /GRADOS DE LIBERTAD
0159  10
0160   4  1  0  0
0161   7  1  0  0
0162  10  1  0  0
0163  13  1  0  0
0164  16  1  0  0
0165  19  1  0  0
0166  22  1  0  0
0167  25  1  0  0
0168  28  1  0  0
0169  31  1  0  0
0170  /
0171  /
0172  /PORTICO TIPO III (PORTICOS 5,7)
0173  /
0174  28  40  3  0  2000000
0175  /COORDENADAS  X
0176  0  6  12  0  6  12  0  6  12  0  6  12  0  6  12  0  6  12/
0177  0  6      0  6      0  6      0  6      0  6
0178  /COORDENADAS  Y
0179   0   0   0   3   3   3   6   6   6   9   9   9  12  12  12/
0180  15  15  15  18  18  21  21  24  24  27  27  30  30
0181  /SECCIONES
0182  4  1
0183  0.50  0.50  /PILARES
0184  0.40  0.40
0185  0.30  0.30
0186  0.25  0.40  /VIGAS
0187  /
0188  /BARRAS
0189  /
0190   1   4  1
0191   4   7  1
0192   7  10  2
0193  10  13  2
0194  13  16  2
0195  16  19  2
0196  19  21  3
0197  21  23  3
0198  23  25  3
0199  25  27  3
0200   2   5  1
0201   5   8  1
0202   8  11  2
0203  11  14  2
0204  14  17  2
0205  17  20  2
0206  20  22  3
0207  22  24  3
0208  24  26  3
0209  26  28  3
0210   3   6  1
0211   6   9  1
0212   9  12  2
0213  12  15  2
0214  15  18  2
0215   4   5  4
0216   5   6  4
0217   7   8  4
0218   8   9  4
0219  10  11  4
0220  11  12  4
0221  13  14  4
0222  14  15  4
0223  16  17  4
0224  17  18  4
0225  19  20  4
0226  21  22  4
0227  23  24  4
0228  25  26  4
0229  27  28  4
0230  /
0231  /APOYOS
0232  /
0233  1  0  0  0
0234  2  0  0  0
0235  3  0  0  0
0236  /GRADOS DE LIBERTAD
0237  10
0238   4  1  0  0
```

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
0239   7  1  0  0
0240  10  1  0  0
0241  13  1  0  0
0242  16  1  0  0
0243  19  1  0  0
0244  21  1  0  0
0245  23  1  0  0
0246  25  1  0  0
0247  27  1  0  0
0248  /
0249  /
0250  /PORTICO TIPO IV  (PORTICO 6)
0251  /
0252  34  50  4  0 .2000000
0253  /COORDENADAS  X
0254  0  6  12  18  0  6  12  18  0  6  12  18  0  6  12  18/
0255  0  6  12  18  0  6  12  18  6  12/
0256     6  12        6  12        6  12        6  12
0257  /COORDENADAS  Y
0258   0   0   0   0   3   3   3   3   6   6   6   6   9   9   9   9/
0259  12  12  12  12  15  15  15  15  18  18  21  21  24  24/
0260  27  27  30  30
0261  /
0262  /SECCIONES
0263  /
0264  4  1
0265  0.50  0.50
0266  0.40  0.40
0267  0.30  0.30
0268  0.25  0.40
0269  /
0270  /BARRAS
0271  /
0272   1   5  1
0273   5   9  1
0274   9  13  2
0275  13  17  2
0276  17  21  2
0277   2   6  1
0278   6  10  1
0279  10  14  2
0280  14  18  2
0281  18  22  2
0282  22  25  2
0283  25  27  3
0284  27  29  3
0285  29  31  3
0286  31  33  3
0287   3   7  1
0288   7  11  1
0289  11  15  2
0290  15  19  2
0291  19  23  2
0292  23  26  2
0293  26  28  3
0294  28  30  3
0295  30  32  3
0296  32  34  3
0297   4   8  1
0298   8  12  1
0299  12  16  2
0300  16  20  2
0301  20  24  2
0302   5   6  4
0303   6   7  4
0304   7   8  4
0305   9  10  4
0306  10  11  4
0307  11  12  4
0308  13  14  4
0309  14  15  4
0310  15  16  4
0311  17  18  4
0312  18  19  4
0313  19  20  4
0314  21  22  4
0315  22  23  4
0316  23  24  4
0317  25  26  4
0318  27  28  4
0319  29  30  4
0320  31  32  4
0321  33  34  4
0322  /APOYOS
0323  1  0  0  0
0324  2  0  0  0
0325  3  0  0  0
0326  4  0  0  0
0327  /
0328  /GRADOS DE LIBERTAD
0329  /
0330  10
0331   6  1  0  0
0332  10  1  0  0
0333  14  1  0  0
0334  18  1  0  0
0335  22  1  0  0
0336  25  1  0  0
0337  27  1  0  0
0338  29  1  0  0
0339  31  1  0  0
0340  33  1  0  0
0341  /
0342  /
0343  /PORTICO TIPO V   (PORTICO 8)
0344  /
0345  12  15  2  0  2000000
0346  /COORDENADAS  X
0347  0  7.81  0  7.81  0  7.81  0  7.81  0  7.81  0  7.81
0348  /COORDENADAS  Y
0349  0  0  3  3  6  6  9  9  12  12  15  15
0350  /SECCIONES
0351  3  1
0352  .40  .40
0353  .30  .30
0354  .25  .40
0355  /BARRAS
0356   1   3  1
0357   3   5  1
0358   5   7  1
```


Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
0359   7   9  1
0360   9  11  2
0361   2   4  1
0362   4   6  1
0363   6   8  2
0364   8  10  2
0365  10  12  2
0366   3   4  3
0367   5   6  3
0368   7   8  3
0369   9  10  3
0370  11  12  3
0371  /APOYOS
0372  1  0  0  0
0373  2  0  0  0
0374  /GRADOS DE LIBERTAD
0375   5
0376   3  1  0  0
0377   5  1  0  0
0378   7  1  0  0
0379   9  1  0  0
0380  11  1  0  0
0381  /HIPOTESIS DE CARGAS
0382  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0/
0383  2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  1.44/
0384  17.28  17.28  17.28  17.28  17.28  17.28  17.28  17.28  17.28  8.64/
0385  -3.6  -3.6 -3.6 -3.6 -3.6 -3.6 -1.2 -1.2 -1.2 -.6/
0386  2.88  2.88 2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  2.88  1.44/
0387  53.28  53.28  53.28  53.28  53.28  53.28  26.28  26.28  26.28  13.14/
```

HIPOTESIS 1

DESPLAZAMIENTOS

PLANTA	DIRECCION X	DIRECCION Y	GIRO Z
1	-.00027	.00252	-.00002
2	-.00080	.00737	-.00006
3	-.00152	.01341	-.00011
4	-.00218	.01909	-.00016
5	-.00272	.02423	-.00020
6	-.00290	.03052	-.00021
7	-.00296	.03878	-.00022
8	-.00297	.04511	-.00022
9	-.00298	.04914	-.00022
10	-.00299	.05104	-.00022

HIPOTESIS 1

ELEMENTO RIGIDIZADOR 1

X= 3.000 Y= .000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00027	.753
2	-.00080	-.060
3	-.00152	-.023
4	-.00218	-.023
5	-.00272	-.239
6	-.00290	.000
7	-.00296	.000
8	-.00297	.000
9	-.00298	.000
10	-.00299	.000

ELEMENTO RIGIDIZADOR 2

X= 6.000 Y= 5.000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00017	-.043
2	-.00051	.057
3	-.00096	-.110
4	-.00138	.014
5	-.00172	-.020
6	-.00184	-.001
7	-.00167	-.001
8	-.00188	-.000
9	-.00188	.000
10	-.00189	-.000

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ELEMENTO RIGIDIZADOR 3

X= 6.000 Y= 10.000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00007	-.035
2	-.00021	.020
3	-.00041	-.044
4	-.00058	.000
5	-.00072	-.175
6	-.00077	.001
7	-.00078	.001
8	-.00078	.000
9	-.00079	-.000
10	-.00079	.000

ELEMENTO RIGIDIZADOR 4

X= 9.000 Y= 15.000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	.00003	-.002
2	.00008	.003
3	.00015	.003
4	.00022	-.002
5	.00027	.027
6	.00030	.000
7	.00031	.000
8	.00031	.000
9	.00031	.000
10	.00031	.000

ELEMENTO RIGIDIZADOR 5

X= .000 Y= 5.000 ANGULO= 270.000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00252	-1.112
2	-.00737	-.740
3	-.01341	-.884
4	-.01909	-1.108
5	-.02423	-.240
6	-.03052	-.786
7	-.03878	-.980
8	-.04511	-.956
9	-.04914	-.963
10	-.05104	-.469

ELEMENTO RIGIDIZADOR 6

X= 6.000 Y= 7.500 ANGULO= 90.000

PLANTA	DESP-X	FX
1	.00240	.733
2	.00702	1.329
3	.01274	1.123
4	.01813	.648
5	.02303	2.301
6	.02924	1.308
7	.03748	.919
8	.04380	.967
9	.04782	.954
10	.04973	.503

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ELEMENTO RIGIDIZADOR 7

X= 12.000 Y= 10.000 ANGULO= 90.000

PLANTA	DESP-X	FX
1	.00228	.971
2	.00667	.828
3	.01208	.727
4	.01717	1.116
5	.02184	-.334
6	.02796	.786
7	.03617	.981
8	.04249	.956
9	.04651	.963
10	.04841	.469

ELEMENTO RIGIDIZADOR 8

X= 9.000 Y= 2.500 ANGULO= 39.805

PLANTA	DESP-X	FX
1	.00133	.100
2	.00368	-.025
3	.00699	.227
4	.00993	.013
5	.01266	1.051
6	.01649	.000
7	.02172	.000
8	.02576	.000
9	.02833	.000
10	.02954	.000

HIPOTESIS 2

DESPLAZAMIENTOS

PLANTA	DIRECCION X	DIRECCION Y	GIRO Z
1	-.00191	.00173	.00012
2	-.00550	.00516	.00035
3	-.00994	.00952	.00061
4	-.01396	.01384	.00081
5	-.01734	.01800	.00096
6	-.02028	.02350	.00108
7	-.02339	.03147	.00113
8	-.02566	.03774	.00114
9	-.02707	.04174	.00114
10	-.02770	.04362	.00115

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

HIPOTESIS 2

ELEMENTO RIGIDIZADOR 1

X= 3.000 Y= .000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00191	.290
2	-.00550	-.724
3	-.00994	-.134
4	-.01396	-.028
5	-.01734	-1.531
6	-.02028	.000
7	-.02339	.000
8	-.02566	.000
9	-.02707	.000
10	-.02770	.000

ELEMENTO RIGIDIZADOR 2

X= 6.000 Y= 5.000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00953	-1.786
2	-.00724	-.626
3	-.01297	-1.301
4	-.01802	-1.335
5	-.02212	-.034
6	-.02568	-1.447
7	-.02903	-.582
8	-.03135	-.600
9	-.03278	-.600
10	-.03343	-.299

ELEMENTO RIGIDIZADOR 3

X= 6.000 Y= 10.000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00315	-2.368
2	-.00897	-.818
3	-.01599	-1.719
4	-.02208	-1.811
5	-.02690	.182
6	-.03108	-2.153
7	-.03467	-.618
8	-.03703	-.600
9	-.03849	-.600
10	-.03916	-.301

ELEMENTO RIGIDIZADOR 4

X= 9.000 Y= 15.000 ANGULO= .000

PLANTA	DESP-X	FX
1	-.00377	.333
2	-.01070	-1.461
3	-.01902	-.420
4	-.02614	-.334
5	-.03163	-2.435
6	-.03648	.000
7	-.04031	.000
8	-.04272	.000
9	-.04420	.000
10	-.04488	.000

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ELEMENTO RIGIDIZADOR 5

X= .000 Y= 5.000 ANGULO= 270.000

PLANTA	DESP-x	Fx
1	-.00173	-.386
2	-.00516	-.537
3	-.00952	-.756
4	-.01384	-.615
5	-.01800	-.006
6	-.02350	-.180
7	-.03197	-.988
8	-.03774	-.956
9	-.04174	-.963
10	-.04362	-.469

ELEMENTO RIGIDIZADOR 6

X= 6.000 Y= 7.500 ANGULO= 90.000

PLANTA	DESP-x	Fx
1	.00247	.769
2	.00724	1.318
3	.01315	1.187
4	.01671	.691
5	.02374	2.498
6	.02998	1.314
7	.03824	.918
8	.04456	.967
9	.04458	.956
10	.05049	.503

ELEMENTO RIGIDIZADOR 7

X= 12.000 Y= 10.000 ANGULO= 90.000

PLANTA	DESP-x	Fx
1	.00322	1.783
2	.00932	1.000
3	.01679	1.358
4	.02358	1.651
5	.02948	.194
6	.03647	1.386
7	.04500	.973
8	.05139	.956
9	.05543	.963
10	.05736	.468

ELEMENTO RIGIDIZADOR 8

X= 9.000 Y= 2.500 ANGULO= 39.805

PLANTA	DESP-x	Fx
1	.00012	-.090
2	.00041	.039
3	.00079	-.034
4	.00125	-.121
5	.00148	.283
6	.00362	.000
7	.00651	.000
8	.00881	.000
9	.01030	.000
10	.01104	.000

5. CONCLUSION

El problema principal que se presenta cuando se analiza una estructura de edificio frente a acciones horizontales, es encontrar la distribución de esta acción entre los elementos rigidizadores del edificio.

Es práctica extendida entre los calculistas realizar este reparto de forma aproximada, asignando a cada pórtico la carga correspondiente al área tributaria de fachada en el caso de viento, o el área tributaria de forjado en el caso de sismo.

Este método al no tener en cuenta la rigidez relativa de cada pórtico puede estar en algunos casos del lado de la inseguridad, y el efecto torsional del conjunto cuando hay disimetría de cargas, de rigideces o ambas cosas a la vez, hace que unos pórticos soporten más carga que la correspondiente a un simple reparto tributario.

Por este motivo es necesario disponer de un método de cálculo como el presentado en este artículo que refleje con mayor aproximación el comportamiento real de la estructura.

Dicho método al manejar matrices de orden elevado, es adecuado para el cálculo con ordenador. Para este fin se ha preparado el programa de cálculo que figura en el apéndice, escrito para el miniordenador HP-21 MX, del que se han utilizado 11K palabras de memoria central, y un disco como memoria periférica de almacenamiento.

El programa tiene la ventaja de calcular directamente la matriz de rigidez lateral de un pórtico a partir de la matriz global, utilizando un algoritmo de condensación de grados de libertad.

REFERENCIAS

1.–A. Recuero. "Cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, referida a grados de libertad seleccionados", Hormigón y Acero núm. 140, 1981.

2.– A. Recuero y J.P. Gutiérrez. "Análisis de edificios de altura sometidos a acciones horizontales: sistemas planos".
Monografía N° 338 del I.E.T. Madrid, Noviembre 1976.

3.– A. Recuero y J.P. Gutiérrez. "Contribución al análisis de grandes estructuras en pequeños ordenadores".
Monografía N° 341 del I.E.T. Madrid, Abril 1977.

4.– A. Recuero y J.P. Gutiérrez. "Consideraciones sobre la formación de la matriz de rigidez de una estructura."
Monografía N° 356 del I.E.T. Madrid, Febrero 1979.

5.– C.A. Prato. "Simplified Analysis of Wall-Frame Building Structures." Journal of the Structural Division. ST 12. Decembre 1976.

6.– M.C. Stamato, y E. Mancini. "Three-Dimensional Interaction of Walls and Frames".
Journal of the Structural Division, ST 12. Decembre 1973.

7.– A. Ghali y A.M. Neville. "Three-Dimensional Analysis of Shear Walls".
Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2. Paper 7462, 1972.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

APENDICE

LISTADOS DE PROGRAMAS

A continuación se incluyen los listados FORTRAN IV de los programas desarrollados para el ordenador HP-21MX.

Las limitaciones actuales de dichos programas son:

Número de plantas NP $\leqslant$ 18

Número de elementos rigidizadores NER $\leqslant$ 8

Número máximo de nudos por pórtico NNUDOS $\leqslant$ 60

Número máximo de barras por pórtico NBAR $\leqslant$ 120

Número máximo de tipos de sección de barras NTIPO $\leqslant$ 10

Además debe cumplirse para cada pórtico la condición:

$$\text{NNUDOS} \times (\text{NBAN} + 1) \leqslant 200$$

Siendo NBAN la máxima diferencia que existe entre la numeración del nudo origen y nudo extremo de una barra.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
SPRDS1 T=00007 IS ON CR00010 USING 00002 BLKS R=0000

0001  FTN4,L
0002        PROGRAM RALFR(3)
0003        DIMENSION NP1(3),NP2(3),NP0(3)
0004        COMMON IIII(20),NAME1(3),IDCB1(144),XW(8),YW(8),ANG(8),N(8),
0005       *IRIG(8,5),NCON(8),NLIB(8)
0006        COMMON NP,NER,NH,NTIPOS
0007        COMMON NHDES,NHCAR,NUDOS,NBAR,NAPOY,NBALAS,E,NCBAR,NFASE,NSEC,
0008       *LUR,LUW,INI,NEQU,NBAN,NHIP,NT,A(1800),NI(120),NJ(120),ITIPO(120)
0009       *,SEC(10,2),DESP(3),F(60),Y(60)
0010        DATA IET/1/
0011        DATA NP0/2HLE,2HCT,2HU /
0012        DAT. NP1/2HLM,2HAT,2H2 /
0013        DATA NP2/2HG=,2HAT,2H2 /
0014        IF(IET.NE.1)GO TO 100
0015        IET=2
0016        NFASE=1
0017        CALL EXEC(8,NP0)
0018    100 GOTO(1,2,3)NFASE
0019      1 CALL EXEC(8,NP1)
0020      2 CALL EXEC(8,NP2)
0021      3 CALL PURGF(IDCB1,IERR,NAME1)
0022        STOP
0023        END
0024        END$
```

```
SLFCTU T=00007 IS ON CR00010 USING 00002 BLKS R=0000

0001  FTN4,L
0002        PROGRAM LECTU(5)
0003        DIMENSION F(18,18),NP1(3),NP2(3),IS(2)
0004        COMMON IIII(20),NAME1(3),IDCB1(144),XW(8),YW(8),ANG(8),N(8),
0005       *IRIG(8,5),NCON(8),NLIB(8)
0006        COMMON NP,NER,NH,NTIPOS
0007        COMMON NHDES,NHCAR,NUDOS,NBAR,NAPOY,NBALAS,E,NCBAR,NFASE,NSEC,
0008       *LUR,LUW,INI,NEQU,NBAN,NHIP,NT,A(1800),NI(120),NJ(120),ITIPO(120)
0009       *,SEC(10,2),DESP(3),F(60),Y(60)
0010        LUR=5
0011        LUW=6
0012        NAME1(1)=2HKR
0013        NAME1(2)=2HLA
0014        NAME1(3)=2HTF
0015        CALL GLEE
0016  C
0017  C     CREAC ION DEL ARCHIVO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL
0018  C
0019        NREG=0
0020        DO 22 I=1,NTIPOS
0021        DO 22 J=1,3
0022     22 NREG=NREG+IRIG(I,J)
0023        IS(1)=NP*NP*NREG/64+1
0024        CALL CREAT(IDCB1,IERR,NAME1,IS,1)
0025        CALL RALFR
0026        END
0027        SUBROUTINE GLEE
0028        COMMON IIII(20),NAME1(3),IDCB1(144),XW(8),YW(8),ANG(8),N(8),
0029       *IRIG(8,5),NCON(8),NLIB(8)
0030        COMMON NP,NER,NH,NTIPOS
0031        LUR=5
0032        READ(LUR,1000)IIII
0033   1000 FORMAT(20A2)
0034        READ(LUR,*)NP,NER,NH,NTIPOS
0035        NT=(3*NP+1)*(3*NP+1)/2+3*NP*NH
0036        IF(NT.GT.1800)STOP
0037  C
0038  C     LECTURA DE DATOS GENERALES DE CADA ELEMENTO RIGIDIZADOR
0039  C
0040        DO 20 I=1,NTIPOS
0041        READ(LUR,*)IRIG(I,4),IRIG(I,5)
0042        IRIG(I,1)=1
0043        IRIG(I,2)=0
0044     20 IRIG(I,3)=0
0045        DO 21 I=1,NER
0046     21 READ(LUR,*)XW(I),YW(I),ANG(I),N(I)
0047        NCON(1)=1
0048        DO 30 I=2,NTIPOS
0049     30 NCON(I)=NCON(I-1)+IRIG(I-1,1)+IRIG(I-1,2)+IRIG(I-1,3)
0050        RETURN
0051        END
0052        END$
```

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
$EJECUT I=00001 IS 04 CR00012 USING C0026 BLK9 R=0000

0001  FTN4,L
0002        PROGRAM LMAT2(5)
0003        DIMENSION F(18,18),B(220),IG(21)
0004        COMMON ITTT(20),NAME1(3),IOCB1(100),XW(8),YW(8),ANG(8),N(8),
0005       *IRIG(4,5),NCON(8),NLIB(8)
0006        COMMON NP,NER,NM,NTIPOS
0007        COMMON NNODES,NMCER,NUDOS,NBAR,NAPOY,NBALAS,E,NCBAR,NFASE,NSEC,
0008       *LUR,LUW,INT,NEQU,NBAN,NHIP,NT,A(1800),NI(120),NJ(120),ITIPO(120)
0009       *,SEC(10,2),DESP(3),X(60),Y(60)
0010        IN0(I,J)=(I-1)*NG-(I-1)*(I-2)/2+J-I+1
0011        CALL OPEN(IOCB1,IERR,NAME1)
0012  C
0013        LUR=5
0014        LUW=6
0015        LONGA=1800
0016        DO 999 IREG=1,NTIPOS
0017    500 READ(LUR,*)NUDOS,NBAR,NAPOY,NBALAS,E
0018        READ(LUR,*)(X(I),I=1,NUDOS)
0019        READ(LUR,*)(Y(I),I=1,NUDOS)
0020        READ(LUR,*)NSEC,NCOD
0021  C     SI NCOD=0 INERCIA Y AREA
0022  C     SI NCOD=1 A  Y  B
0023        DO 1 I=1,NSEC
0024        READ(LUR,*)SEC(I,1),SEC(I,2)
0025        IF(NCOD.EQ.0)GO TO 1
0026        B=SEC(I,1)
0027        H=SEC(I,2)
0028        SEC(I,1)=B*H*H*H/12
0029        SEC(I,2)=B*H
0030      1 CONTINUE
0031        NBAN=0
0032        DO 2 I=1,NBAR
0033        READ(LUR,*)NI(I),NJ(I),ITIPO(I)
0034        N1=NJ(I)-NI(I)
0035        IF(N1.GT.NBAN)NBAN=N1
0036      2 CONTINUE
0037        NEQU=3*NUDOS
0038        NBAN=3*NBAN+3
0039        NT=NBAN
0040  C
0041  C     FORMACION DE LA MATRIZ
0042  C
0043        DO 5 I=1,LONGA
0044      5 A(I)=0
0045        DO 4 I=1,NBAR
0046    502 N1=NI(I)
0047        N2=NJ(I)
0048        C=X(N2)-X(N1)
0049        S=Y(N2)-Y(N1)
0050        XL=1/SQRT(C*C+S*S)
0051        C=C*XL
0052        S=S*XL
0053        K=ITIPO(I)
0054        XINER=SEC(K,1)*E*XL
0055        AREA=SEC(K,2)*E*XL
0056        CC=C*C
0057        SS=S*S
0058        CS=C*S
0059        N3=3*(N2-N1)
0060        N1=3*(N1-1)+NT+1
0061        N2=3*(N2-1)+NT+1
0062  C
0063        AUX=AREA*CC+12.*XINER*XL*XL*SS
0064        A(N1)=A(N1)+AUX
0065        A(N2)=A(N2)+AUX
0066        A(N1+N3)=-AUX
0067        AUX=(AREA-12.*XINER*XL*XL)*CS
0068        A(N1+1)=A(N1+1)+AUX
0069        A(N2+1)=A(N2+1)+AUX
0070        A(N1+N3+1)=-AUX
0071        A(N1+NT+N3-1)=-AUX
0072        AUX=6*XINER*XL*S
0073        A(N1+2)=A(N1+2)+AUX
0074        A(N1+N3+2)=AUX
0075        A(N2+2)=A(N2+2)-AUX
0076        A(N1+2+NT+N3-2)=-AUX
0077        N1=N1+NT
0078        N2=N2+NT
0079        AUX=AREA*SS+12.*XINER*XL*XL*CC
0080        A(N1)=A(N1)+AUX
0081        A(N2)=A(N2)+AUX
0082        A(N1+N3)=-AUX
0083        AUX=6.*XINER*XL*C
0084        A(N1+1)=A(N1+1)-AUX
0085        A(N2+1)=A(N2+1)+AUX
0086        A(N1+N3+1)=-AUX
0087        A(N1+NT+N3-1)=AUX
0088        N1=N1+NT
0089        N2=N2+NT
0090        AUX=4.*XINER
0091        A(N1)=A(N1)+AUX
0092        A(N2)=A(N2)+AUX
0093        A(N1+N3)=0.5*AUX
0094      4 CONTINUE
0095  C     CONSIDERACIONES DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO
0096     20 IF(NAPOY.EQ.0)GO TO 25
0097        DO 22 I=1,NAPOY
0098        READ(LUR, )N1,DESP
0099        N1=3*(N1-1)+NT+1
0100        DO 23 J=1,3
0101        IF(DESP(J).EQ.0.)A(N1)=1.E+30
0102     23 N1=N1+NT
0103     22 CONTINUE
0104     25 IF(NBALAS.EQ.0)GO TO 30
0105        DO 26 I=1,NBALAS
0106        READ(LUR,*)N1,DESP
0107        N1=3*(N1-1)+NT+1
0108        DO 27 J=1,3
0109        A(N1)=A(N1)+DESP(J)
0110     27 N1=N1+NT
0111     26 CONTINUE
0112  C
0113  C     GRADOS DE LIBERTAD A CONSERVAR
0114  C
0115     30 READ(LUR,*)NGRAD
0116        NG=0
0117        DO 40 I=1,NGRAD
0118        READ(LUR,*)N1,DESP
```

```
      N2=(N1-1)*3
      DO 41 J=1,3
      IF(DESP(J).EQ.0.)GO TO 41
      NG=NG+1
      IG(NG)=N2+J
   41 CONTINUE
   40 CONTINUE
      NLIB(IREG)=NG
      CALL ELIM(A,NEQU,NT,IG,NG,B)
      NTB=NP*(NP+1)/2
      CALL TRANS(IDCB1,1,IREG,1,NTB,1,B)
      I1=1
      I2=NG
      DO 50 I=1,NG
      WRITE(6,1001),(B(J),J=I1,I2)
  100 FORMAT(* ECUACION N. ",I3,(/,5(2X,E12.6)))
      I1=I2+1
      I2=I2+NG-I
   50 CONTINUE
  999 CONTINUE
      CALL CLOSE(IDCB1)
      NFASE=2
      CALL RALER
      STOP
      END
      INTEGER FUNCTION IN(I,IG,NG)
C
C     COMPRUEBA SI EL NUMERO I ESTA EN LA LISTA IG. SI NO ESTA
C     DEVUELVE EL VALOR 0
C
      DIMENSION IG(NG)
      DO 1 IN=1,NG
      IF(I.EQ.IG(IN))RETURN
    1 CONTINUE
      IN=0
      RETURN
      END
      INTEGER FUNCTION INDEX(I,J,NT)
C
C     DEVUELVE LA POSICION DEL ELEMENTO TEORICO A(I,J)
C
      IDIF=J-I
      INDEX=(I-1)*NT+1+IDIF
      IF(IDIF.LE.NT-1)RETURN
      IDIF=MOD(IDIF,NT-1)
      IF(IDIF.EQ.0)IDIF=NT-1
      INDEX=(I-1)*NT+IDIF+1
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ELIM(A,NEQU,NT,IG,NG,B)
C
C     CONDENSACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE MATRIZ SIMETRICA
C     Y EN BANDA
C     A=SEMIBANDA DE LA MATRIZ A CONDENSAR
C     NEQU=NUMERO DE ECUACIONES DEL SISTEMA
C     NT=SEMIANCHO DE BANDA DEL SISTEMA
C     IG=LISTA DE VARIABLES A CONSERVAR
C     NG=NUMERO DE VARIABLES A CONSERVAR
C     B=ZONA TRIANGULADA SUPERIOR DE LA MATRIZ CONDENSADA
C
      DIMENSION A(1),IG(NG),B(1)
C
C     DEVUELVE LA POSICION DEL ELEMENTO TEORICO B(I,J)
C
      IND(I,J)=(I-1)*NG-(I-1)*(I-2)/2+J-I+1
      IT=NG*(NG+1)/2
C
C     PUESTA A CERO DE LA MATRIZ
C
      DO 1 I=1,IT
    1 B(I)=0
      IFIL4=0
      ID=0
      NT1=NT-1
      DO 2 I=1,NEQU
      I1=I+1
      IDIAG=INDEX(I,I,NT)
      JFIN=I+NT.
      IF(JFIN.GT.NEQU)JFIN=NEQU
      IF(IN(I,IG,NG).EQ.0)GO TO 10
C
C     TRASPASO DE COEFICIENTES DE LA MATRIZ A A LA MATRIZ B
C
      IFIL4=IFIL4+1
      DO 3 L=IFIL4,NG
      ID=ID+1
      J=IG(L)
      IF(J.GT.JFIN)GO TO 3
      J3=J-I
      B(ID)=A(IDIAG+J3)
      A(IDIAG+J3)=0
    3 CONTINUE
      GO TO 2
   10 IF(I.EQ.NEQU)GO TO 20
C
C     ACTUACION DE LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES A GRADOS DE
C     LIBERTAD A ELIMINAR SOBRE LAS ECUACIONES POSTERIORES
C
      DO 11 J=I1,JFIN
      J3=J-I
      N1=INDEX(J,J,NT)
      AUX=A(IDIAG+J3)/A(IDIAG)
      IF(AUX.EQ.0)GO TO 11
      DO 12 K=J3,NT1
      A(N1)=A(N1)-A(IDIAG+K)*AUX
   12 N1=N1+1
   11 CONTINUE
   20 IF(IFIL4.EQ.0)GO TO 2
C
C     ACTUACION DE LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES A GRADOS DE
C     LIBERTAD A ELIMINAR SOBRE LAS ECUACIONES ANTERIORES
C
      DO 21 L=1,IFIL4
      J=IG(L)
      N1=INDEX(J,I,NT)
      AUX=A(N1)/A(IDIAG)
      IF(AUX.EQ.0)GO TO 21
C
C     MODIFICACION DE LOS COEFICIENTES QUE RESIDEN EN B
C
```


Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
      DO 22 L1=L,NG
      J1=IG(L1)
      IF(J1.GT.JFIN)GO TO 22
      K1=INDEX(L,L1)
      K2=INDEX(J1,I,NT)
      IF(J1.GT.I)K2=INDEX(I,J1,NT)
      A(K1)=A(K1)-A(K2)*AUX
   22 CONTINUE
C
C     MODIFICACION DE LOS COEFICIENTES QUE RESIDEN EN A
C
      DO 23 K=I,JFIN
      K1=INDEX(J,K,NT)
      K2=IDIAG+K-I
      A(K1)=A(K1)-A(IDIAG+K-I)*AUX
      IF(IN(K,IG,NG).GT.0)A(K1)=0
   23 CONTINUE
   21 CONTINUE
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TRANS(NF,KEY,NI,NE,NT,NX,X)
C     DATA TRANSFERENCES BETWEEN CORE AND FILE NF1 IN DISK
      DIMENSION NF(144),BUFL(64),BUF1(64),X(1),IB1(128),IBL(128)
      EQUIVALENCE (IB1(1),BUF1(1)),(IBL(1),BUFL(1))
      IX=NX
      NREG=(NI-1)/64*NT+MOD(NI-1,64)*NT/64+1
      N1=MOD(NI-1,64)*NT
      NG=MOD(N1,64)+1
      NPAL=NT+NF
      IF(KEY)5,4,5
    4 NUM=0
      INI=NG
   44 CALL READF(NF,IERR,IBL,128,K,NREG)
      DO 59 I=INI,64
      NUM=NUM+1
      X(IX)=BUFL(I)
      IX=IX+1
      IF(NUM.GE.NPAL)GO TO 6
   59 CONTINUE
      INI=1
      NREG=NREG+1
      GO TO 44
    5 CALL READF(NF,IERR,IBL,128,K,NREG)
      INI=NG
      NUM=0
   63 DO 64 I=INI,64
      BUFL(I)=X(IX)
      NUM=NUM+1
      IX=IX+1
      IF(NUM.GE.NPAL) GO TO 66
   64 CONTINUE
      INI=1
      CALL WRITF(NF,IERR,IBL,128,NREG)
      NREG=NREG+1
      GO TO 63
   66 CALL READF(NF,IERR,IB1,128,K,NREG)
      DO 67 J=1,1
      BUF1(J)=BUFL(J)
   67 CONTINUE
      CALL WRITF(NF,IERR,IB1,128,NREG)
    6 CONTINUE
      RETURN
      END
      END$
```

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
SCHAT  T=00009 IS ON CP00010 USING 00002 RLKS R=0000

0001  FTN4,L
0002        PROGRAM GHATG(5)
0003        DIMENSION F(18,18),TETA(18),PX(18),XK(18),YK(18),B(220)
0004        COMMON ITIT(20),NAME1(3),IDCB1(144),XW(8),YW(8),ANG(8),N(8),
0005       *IRIG(6,5),NCON(8),NLIB(8)
0006        COMMON NP,NER,NM,NTIPOS
0007        COMMON NNOES,NMCAR,NUDOS,NBAR,NAPOY,NBALAS,E,NCBAP,NFASE,NSEC,
0008       *LUR,LUM,INI,NFOU,NBAN,NMIP,NT,A(1800),NI(120),NJ(120),ITIPO(120)
0009       *,SEC(10,2),DESP(3),X(60),Y(60)
0010        IND(I,J)=(I-1)*NG-(I-1)*(I-2)/2+J-I+1
0011  C
0012  C     FORMACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
0013  C
0014        CALL OPEN(IDCB1,IERR,NAME1)
0015        NT4=(3*NP)*(3*NP+1)/2+3*NP*NM
0016        DO 358 I=1,NT4
0017    358 A(I)=0
0018        NTB=NP*(NP+1)/2
0019        FAC=3.14159265/180.
0020        DO 50 II=1,NER
0021        ANR=ANG(II)*FAC
0022        AM=COS(ANR)
0023        BM=SIN(ANR)
0024        RMX=XW(II)*BM-YW(II)*AM
0025        RMY=XW(II)*AM+YW(II)*BM
0026        NTIP=N(II)
0027        I1=NCON(NTIP)
0028        NG=NLIB(NTIP)
0029        A2=AM*AM
0030        B2=BM*BM
0031        AB=AM*BM
0032        ARX=AM*RMX
0033        ARY=AM*RMY
0034        BRX=BM*RMX
0035        BRY=BM*RMY
0036        RX2=RMX*RMX
0037        RY2=RMY*RMY
0038        DO 80 JJ=1,2
0039        IF(IRIG(NTIP,JJ).EQ.0)GO TO 70
0040        CALL TRANS(IDCB1,0,I1,1,NTB,1,B)
0041        NP1=IRIG(I1,4)
0042        NP2=IRIG(I1,5)
0043        DO 10 I=1,NP
0044        DO 10 J=1,NP
0045     10 F(I,J)=0
0046        DO 21 I=1,NP2
0047        DO 21 J=I,NP2
0048        IDIR=IND(I,J)
0049        F(NP1+I,NP1+J)=B(IDIR)
0050        F(NP1+J,NP1+I)=B(IDIR)
0051     21 CONTINUE
0052        DO 62 J=1,NP
0053        DO 62 I=1,J
0054        K=J*(J-1)/2+I
0055     62 A(K)=A(K)+F(I,J)*A2
0056  C
0057        DO 63 J=1,NP
0058        L=NP+J
0059        DO 63 I=1,NP
0060        K=L*(L-1)/2+I
0061     63 A(K)=A(K)+F(I,J)*AB
0062  C
0063        DO 64 J=1,NP
0064        L=2*NP+J
0065        DO 64 I=1,NP
0066        K=L*(L-1)/2+I
0067     64 A(K)=A(K)+F(I,J)*ARX
0068  C
0069        DO 65 J=1,NP
0070        L=NP+J
0071        DO 65 I=1,J
0072        M=NP+I
0073        K=L*(L-1)/2+M
0074     65 A(K)=A(K)+F(I,J)*B2
0075  C
0076        DO 66 J=1,NP
0077        L=2*NP+J
0078        DO 66 I=1,NP
0079        M=NP+I
0080        K=L*(L-1)/2+M
0081     66 A(K)=A(K)+F(I,J)*BRX
0082  C
0083        DO 67 J=1,NP
0084        L=2*NP+J
0085        DO 67 I=1,J
0086        M=2*NP+I
0087        K=L*(L-1)/2+M
0088     67 A(K)=A(K)+F(I,J)*RX2
0089  C
0090        I1=I1+IRIG(NTIP,JJ)
0091     70 AUX=A2
0092        A2=B2
0093        B2=AUX
0094        AB=-AB
0095        AUX=ARX
0096        ARX=-BRY
0097        BRY=AUX
0098        AUX=BRX
0099        BRX=ARY
0100        ARY=AUX
0101        AUX=RX2
0102        RX2=RY2
0103        RY2=AUX
0104        RY2=AUX
0105     80 CONTINUE
0106        JJ=3
0107        IF(IRIG(NTIP,JJ).EQ.0) GO TO 50
0108        CALL TRANS(IDCB1,0,I1,1,NTB,1,B)
0109        NP1=IRIG(I1,4)
0110        NP2=IRIG(I1,5)
0111        DO 810 I=1,NP
0112        DO 810 J=1,NP
0113    810 F(I,J)=0
0114        DO 821 I=1,NP2
0115        DO 821 J=I,NP2
0116        IDIR=IND(I,J)
0117        F(NP1+I,NP1+J)=B(IDIR)
0118        F(NP1+J,NP1+I)=B(IDIR)
```


Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
  821 CONTINUE
      DO 86 J=1,NP
      L=2*NP+J
      DO 86 I=1,J
      M=2*NP+I
      K=L*(L-1)/2+M
   86 A(K)=A(K)+F(I,J)
   50 CONTINUE
C
C     HA QUEDADO FORMADA LA MATRIZ DE RIGIDEZ
C
      N2=3*NP
      N1=N2*(N2+1)/2
      DO 110 I=1,NH
      N3=N1+1+N2*(I-1)
      N4=N3+N2-1
  110 READ(5,*)(A(K),K=N3,N4)
      N8=3*NP
      CALL RSEC4(A,N8,NH)
      DO 120 I=1,NH
      N3=N1+1+N2*(I-1)
      DO 130 J=1,NP
      N4=N3-1+J
  130 X(J)=A(N4)
      DO 140 K=1,NP
      N5=N3-1+NP+K
  140 Y(K)=A(N5)
      DO 150 L=1,NP
      N6=N3-1+2*NP+L
  150 TETA(L)=A(N6)
 2000 FORMAT("1")
      WRITE(6,1010)I
 1010 FORMAT("1",//,32X,"HIPOTESIS ",I3,3/,30X,"DESPLAZAMIENTOS",
     *3/,3X,"PLANTA     DIRECCION X      DIRECCION Y            GIRO Z",/)
C
      DO 1500 J=1,NP
      WRITE(6,1001)J,X(J),Y(J),TETA(J)
 1001 FORMAT(8X,I3,3(6X,F10.5))
 1500 CONTINUE
C
      WRITE(6,1666)I
 1666 FORMAT("1",2/,32X,"HIPOTESIS ",I3)
      LLIN=3
      DO 160 NE=1,NER
      NTIP=N(NE)
      II=NCON(NTIP)
      NG=NLIB(NTIP)
      ANR=ANG(NE)*FAC
      AM=COS(ANR)
      BM=SIN(ANR)
      RMX=XW(NE)*BM+YW(NE)*AM
      RMY=XW(NE)*AM+YW(NE)*BM
      DO 161 JJ=1,NP
      XK(JJ)=X(JJ)*AM+Y(JJ)*BM+TETA(JJ)*RMX
      YK(JJ)=-X(JJ)*BM+Y(JJ)*AM+TETA(JJ)*RMY
  161 CONTINUE
      CALL TRANS(IDCB1,0,II,1,NTB,1,B)
      NP1=IRIG(II,4)
      NP2=IRIG(II,5)
      DO 910 IL=1,NP
  910 F(IL,JL)=0
      DO 921 IL=1,NP2
      DO 921 JL=IL,NP2
      IDIR=IND(IL,JL)
      F(NP1+IL,NP1+JL)=B(IDIR)
      F(NP1+JL,NP1+IL)=B(IDIR)
  921 CONTINUE
      DO 163 M=1,NP
      PX(M)=0.
      DO 163 M1=1,NP
  163 PX(M)=PX(M)+F(M,M1)*XK(M1)
      I1=I1+IRIG(NTIP,J)
C
C     IMPRESION DE RESULTADOS PARA UNA HIPOTESIS DADA SE ESCRIBE
C     LOS MOVIMIENTOS Y ACCIONES QUE ACTUAN SOBRE CADA ELEMENTO
C     RIGIDIZADOR
C
      IF(LLIN.GE.40)WRITE(6,2000)
      IF(LLIN.GE.40)LLIN=0
      WRITE(6,1003)NE,XW(NE),YW(NE),ANG(NE)
 1003 FORMAT(5/,23X,"  ELEMENTO RIGIDIZADOR  ",I3,2/,
     *10X," X= ",F7.3,"     Y= ",F7.3,"     ANGULO= ",F7.3,/)
      WRITE(6,1004)
 1004 FORMAT(/," PLANTA        DESP-X         FX      ",1/)
C
C     SOLO EXISTE RIGIDEZ EN LA DIRECCION X
C
      LLIN=LLIN+10
      DO 302 L=1,NP
      IF(LLIN.GE.60)WRITE(6,2000)
      IF(LLIN.GE.60)LLIN=0
      LLIN=LLIN+1
  302 WRITE(6,1006)L,XK(L),PX(L)
 1006 FORMAT(I4,5X,F10.5,3X,F10.3)
  160 CONTINUE
  120 CONTINUE
      CALL CLOSE(IDCB1)
      NFASE=3
      CALL RALER
      STOP
      END
      SUBROUTINE RSEC4(A,N,NH)
C     RESOLUCION DE UN SIS. ECU. POR GAUSS CON LA MATRIZ A SIMETRICA
C     Y ALMACENADA EN LINEA POR COLUMNAS. AL FINAL LAS HIP POR COLU.
      DIMENSION A(1)
C     COMIENZA TRIANGULACION
      IPIV=0
      DO 10 I=2,N
      IPIV=IPIV+1
      IDIAG=0
      DO 10 J=1,I-1
      IPIV=IPIV+1
      IDIAG=IDIAG+J
      TERM=A(IPIV)/A(IDIAG)
      IFIL4=IDIAG
      IMOD=IPIV
      DO 10 K=J,I-1
      IMOD=IMOD+1
      IFIL4=IFIL4+K
```

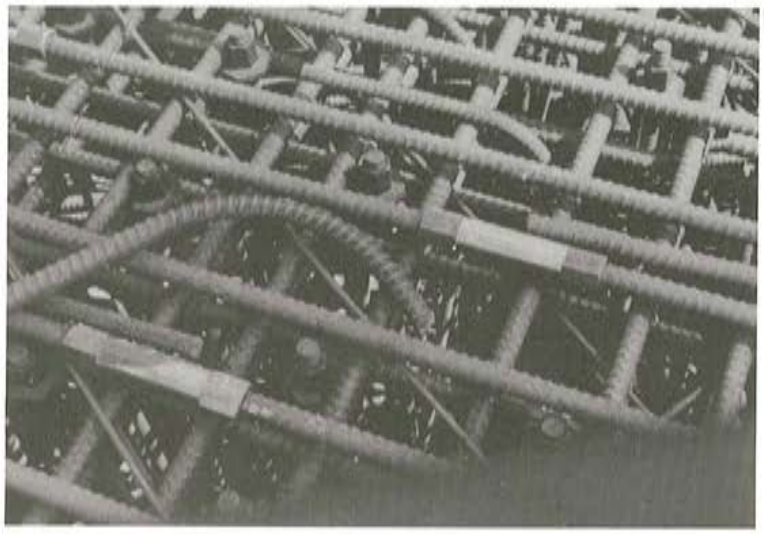
Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

```
      A(IMOD)=A(IMOD)-A(IFILA)*TERM
   10 CONTINUE
C     TRIANGULACION DE TERMINOS INDEPENDIENTES
      DO  20 I=1,NM
      IDIAG=0
      IPIV=IPIV+1
      DO 20 J=1,N-1
      IDIAG=IDIAG+J
      IPIV=IPIV+1
      IFILA=IDIAG
      TERM=A(IPIV)/A(IDIAG)
      IMOD=IPIV
      DO 20 K=J,N-1
      IMOD=IMOD+1
      IFILA=IFILA+K
   20 A(IMOD)=A(IMOD)-A(IFILA)*TERM
C     FIN TRIANGULACION
      IDIAG=N*(N+1)/2
      IM1=IDIAG
      DO 31 J=N,1,-1
      IM2=IM1
      IFILA=IDIAG
      IF(J.EQ.N) GO TO 32
      DO 33 K=J,N-1
      IFILA=IFILA+K
      IM2=IM1
      DO 33 I=1,NM
      IM2=IM2+N
   33 A(IM2)=A(IM2)-A(IFILA)*A(IM2+K-J+1)
   32 IM2=IM1
      DO 34 I=1,NM
      IM2=IM2+N
   34 A(IM2)=A(IM2)/A(IDIAG)
      IM1=IM1-1
   31 IDIAG=IDIAG-J
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TRANS(NF,KEY,NI,NE,NT,NX,X)
C     DATA TRANSFERENCES BETWEEN CORE AND FILE NF1 IN DISK
      DIMENSION NF(144),BUFL(64),BUF1(64),X(1),IB1(128),IBL(128)
      EQUIVALENCE (IB1(1),BUF1(1)),(IBL(1),BUFL(1))
      IX=NX
      NREG=(NI-1)/64*NT+MOD(NI-1,64)*NT/64+1
      N1=MOD(NI-1,64)*NT
      NG=MOD(N1,64)+1
      NPAL=NT*NE
      IF(KEY)5,4,5
    4 NUM=0
      INI=NG
   44 CALL READF(NF,IERR,IBL,128,K,NREG)
      DO 54 I=INI,64
      NUM=NUM+1
      X(IX)=BUFL(I)
      IX=IX+1
      IF(NUM.GE.NPAL)GO TO 6
   54 CONTINUE
      INI=1
      NREG=NREG+1
      GO TO 44
    5 CALL READF(NF,IERR,IBL,128,K,NREG)
      INI=NG
      NUM=0
   63 DO 64 I=INI,64
      BUFL(I)=X(IX)
      NUM=NUM+1
      IX=IX+1
      IF(NUM.GE.NPAL) GO TO 66
   64 CONTINUE
      INI=1
      CALL WRITF(NF,IERR,IBL,128,NREG)
      NREG=NREG+1
      GO TO 63
   66 CALL READF(NF,IERR,IB1,128,K,NREG)
      DO 67 J=1,I
      BUF1(J)=BUFL(J)
   67 CONTINUE
      CALL WRITF(NF,IERR,IB1,128,NREG)
    6 CONTINUE
      RETURN
      END
      END$
```


Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A.

Paseo de la Habana, 14, Madrid-16.
Teléfono 261 29 85 – Telex: 23533.



Barras roscadas sistema GEWI para armaduras, fabricadas por AZMA, S.A. Accesorios para uniones y anclajes.

Sistemas DYWIDAG con aceros de alto límite elástico. Barra ϕ 15 mm. Calidad 90/110, fabricada por AZMA, S.A., para sujeción de encofrados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Un método para el cálculo de zapatas de muros de contención

Francisco Pérez García
Catedrático de Construcción II
Manuel Montes Tubío
Profesor Adjunto de Construcción I
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos, Universidad de Córdoba.

1. INTRODUCCION

Cuando se proyecta un muro en ménsula, el dimensionamiento de la zapata se suele realizar mediante varios tanteos, referidos tanto a la longitud total de la misma, como a la longitud del talón y de la puntuera, hasta que se consigue que los coeficientes de seguridad al vuelco y al deslizamiento, así como la presión sobre el terreno de asiento se encuentren comprendidos entre los límites admisibles.

En el presente estudio se plantean unas ecuaciones que han servido de base para la confección de ábacos, los cuales, con coeficientes de seguridad elegidos, permiten determinar las dimensiones óptimas de la zapata.

2. HIPOTESIS DE CALCULO

Para el cálculo de la zapata establecemos las hipótesis que a continuación se indican:

a) No se considera la componente vertical del empuje, sino exclusivamente la componente horizontal del mismo.

b) El empuje está aplicado a un tercio de la altura total H, y su valor es $K \cdot H^2$, siendo K, según la teoría de Coulomb,

$$K = \frac{1}{2}\gamma \frac{\cos^2 \varphi}{\left[1 + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\varphi + \varphi') \cdot \operatorname{sen}(\varphi - \delta)}{\cos \cdot \varphi' \cdot \cos \delta}}\right]^2} \qquad (1)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

donde γ es el peso específico del terreno, φ el talud natural, φ' el ángulo de rozamiento interno entre muro y terreno y δ el ángulo de talud superior de las tierras contenidas.

c) El peso de la pantalla del muro, más las acciones que eventualmente actúen en la coronación del mismo, supone una resultante vertical de valor N.

d) Unicamente a efectos de fijar la línea de acción de dicha resultante vertical N, se considera un espesor de pantalla equivalente a la décima parte de su altura total.

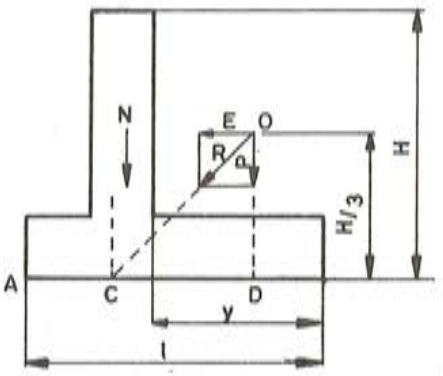
e) Igual espesor, 0,1 . H, se adoptará para el dimensionamiento de la zapata.

f) El peso específico del hormigón para el cálculo del peso de la zapata, se fija en 2,5 Tm/m^3.

3. FORMULACION PARA EL DESARROLLO

3.1. Valores a considerar

a) Peso del sistema



Comprende el peso del terreno que carga sobre el talón de la zapata, el peso propio de la zapata, y la carga vertical que transmite la pantalla de contención.

Fig. 1.

$$P = \gamma \,.y\,.\,0{,}9\,.\,H + 2{,}5\,.\,0{,}1\,.\,H\,.\,\ell + N = 0{,}9\,\gamma\, yH + 0{,}25\,H\,\ell + N \qquad (2)$$

b) Momentos estabilizantes y de vuelco

Considerando como posible eje de giro la arista inferior de la zapata, A, el momento estabilizante es:

$$M_e = 0{,}9\,\gamma\, y\, H\,(\ell - \frac{y}{2}) + 0{,}25\,H\,\ell\,.\,\frac{\ell}{2} + N\,(\ell - y - 0{,}05\,H) \qquad (3)$$

Este momento M_e ha de equilibrar el momento de vuelco, para que exista estabilidad en el conjunto; dicho momento, debido al empuje horizontal sobre la pantalla, viene dado por la expresión,

$$M = K\,.\,H^3/3 \qquad (4)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

c) Presión del cimiento sobre el terreno

Supondremos un reparto constante de la presión ejercida por la zapata sobre el terreno en que se asienta, lo cual no supone en los resultados que buscamos diferencias sensibles con otro tipo de hipótesis de reparto, tales como triangular, ofreciendo la ventaja de una formulación más sencilla en el siguiente desarrollo.

En este caso la presión sobre el suelo es:

$$\sigma = \frac{P}{2\,\overline{AC}} \tag{5}$$

A es el punto extremo de la puntera y C el punto de la zapata por el que pasa la resultante del peso y el empuje.

$$\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} \tag{6}$$

El momento que produce la fuerza P en el punto A es:

$$M_e = P\,.\,\overline{AD} \tag{7}$$

Por otra parte podemos establecer la siguiente relación de semejanza entre el triángulo rectángulo OCD y el triángulo de fuerzas E, P, R

$$\frac{\overline{CD}}{H/3} = \frac{E}{P}\text{, de donde} \tag{8}$$

$$\overline{CD} = \frac{E\,.\,H/3}{P} = \frac{M_v}{P}\text{, y de aquí:} \tag{9}$$

$$\overline{AC} = \frac{M_e - M_v}{P} \tag{10}$$

La tensión unitaria sobre el terreno será por consiguiente:

$$\sigma = \frac{P^2}{2\,(M_e - M_v)} \tag{11}$$

d) Coeficientes de seguridad al vuelco

Normalmente se adopta un valor numérico igual o superior a 1,7 para el coeficiente de seguridad al vuelco.

Como sabemos, dicho coeficiente viene dado por la razón entre los momentos de equilibrio y vuelco:

$$C_{sv} = \frac{M_e}{M_v} \tag{12}$$

e) Coeficiente de seguridad al deslizamiento

El coeficiente de seguridad al deslizamiento viene dado por la expresión siguiente:

$$C_d = \frac{P\,.\,\mu + F}{E} \tag{13}$$

donde hemos introducido dos nuevas variables: μ (coeficiente de rozamiento entre suelo y zapata) y F (fuerzas independientes de rozamiento que se oponen al deslizamiento).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Se suele expresar el valor F como porcentaje del empuje horizontal E

$$F = \alpha \, . \, E \tag{14}$$

siendo α la constante de proporcionalidad.

De aquí, la ecuación (13) se transforma en:

$$C_d = \frac{P \mu}{E} + \alpha \tag{15}$$

fórmula que nos da el coeficiente de seguridad al deslizamiento, el cual se considera admisible cuando alcanza valores iguales o superiores a 1,5.

4. ECUACIONES DE ESTABILIDAD

A partir de las ecuaciones obtenidas en (3) y (12) podemos escribir:

$$0{,}9 \, \gamma \, y \, H \, (\ell - y/2) + 0{,}125 \, H \, \ell^2 + N \, (\ell - y - 0{,}05 \, H) = C_{sv} \, . \, M_v \tag{16}$$

Mediante una sencilla operación y sustituyendo el momento de vuelco por su valor dado en (4) obtenemos:

$$-0{,}45 \, \gamma \left(\frac{yH}{N}\right)^2 + 0{,}125 \left(\frac{\ell H}{N}\right)^2 + 0{,}9 \, \gamma \left(\frac{yH}{N}\right) . \left(\frac{\ell H}{N}\right) + \frac{\ell H}{N} - \frac{yH}{N} =$$

$$= \frac{C_{sv} \, . \, K}{3} \, . \left(\frac{H^2}{N}\right)^2 + 0{,}05 \, \frac{H^2}{N} \tag{17}$$

El segundo término de la ecuación anterior podemos escribirlo como

$$C_{sv} \left[\frac{K}{3} \left(\frac{H^2}{N}\right)^2 + 0{,}05 \, \frac{H^2}{N}\right] + (1 - C_{sv}) \, 0{,}05 \, \frac{H^2}{N}$$

Si despreciamos el segundo sumando, la anterior ecuación quedará de la siguiente forma:

$$-0{,}45 \, \gamma \left(\frac{yH}{N}\right)^2 + 0{,}125 \left(\frac{\ell H}{N}\right)^2 + 0{,}9 \, \gamma \left(\frac{yH}{N}\right) . \left(\frac{\ell H}{N}\right) + \frac{\ell H}{N} - \frac{yH}{N} =$$

$$= C_{sv} \left[\frac{K}{3} \left(\frac{H^2}{N}\right)^2 + 0{,}05 \, \frac{H^2}{N}\right] \tag{18}$$

El hecho de llevar a cabo esta simplificación supone que si el coeficiente de seguridad al vuelco que fijamos es C_{sv}, tengamos en realidad otro C'_{sv}, cumpliéndose:

$$0{,}05 \, \frac{H^2}{H} + C'_{sv} \, . \, \frac{K}{3} \left(\frac{H^2}{N}\right)^2 = C_{sv} \left[\frac{K}{3} \left(\frac{H^2}{N}\right)^2 + 0{,}05 \, \frac{H^2}{N}\right] \tag{19}$$

es decir:

$$C'_{sv} = C_{sv} + \frac{0{,}15 \, (C_{sv} - 1)}{K \, . \, \frac{H^2}{N}} \tag{20}$$

con lo que el error cometido es por exceso, quedándose, por tanto, del lado de la seguridad.

La magnitud de dicho sobredimensionamiento en el valor de C_{sv} es, en los casos más desfavorables de altos valores de N y, simultáneamente, valores pequeños del coeficiente K y la altura de la pantalla H, del orden de un veinte por ciento sobre el valor prefijado C_{sv}.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Con esta simplificación, y llamando I al valor del paréntesis que aparece en el segundo miembro de (19), esto es:

$$I = \frac{K}{3}\left(\frac{H^2}{N}\right)^2 + 0{,}05\,\frac{H^2}{N}, \tag{21}$$

podemos escribir de nuevo la anterior ecuación como:

$$-0{,}45\,\gamma\left(\frac{yH}{N}\right)^2 + 0{,}125\left(\frac{\ell H}{N}\right)^2 + 0{,}9\,\gamma\left(\frac{yH}{N}\right).\left(\frac{\ell H}{N}\right) + \frac{\ell H}{N} - \frac{yH}{N} = C_{sv}\,.\,I \tag{22}$$

Por otra parte, según (11) el valor de la presión unitaria sobre el terreno viene dado por:

$$\sigma = \frac{P^2}{2\,(M_e - M_v)} \tag{23}$$

cuyo denominador es dos veces la diferencia siguiente

$$M_e - M_v = M_v\,(C'_{sv} - 1) = \frac{KH^3}{3}\,(C'_{sv} - 1) \tag{24}$$

Por consiguiente podemos expresar la fatiga del terreno como:

$$\sigma = \frac{P^2}{\frac{2}{3}\,K\,.\,H^3\,.\,(C'_{sv} - 1)} \tag{25}$$

Dividiendo ambos miembros por la altura del muro, y llamando S a la razón obtenida de dicho cociente, tenemos:

$$S = \frac{P^2}{\frac{2}{3}\,K\,.\,H^4\,.\,(C'_{sv} - 1)}\text{, o bien} \tag{26}$$

$$S = \frac{(P/N)^2}{\frac{2}{3}\,K\,.\left(\frac{H^2}{N}\right)^2 (C'_{sv} - 1)} \tag{27}$$

Sustituyendo C'_{sv} por su valor, dado en (20), la anterior expresión queda de la forma:

$$S = \frac{1}{2}\;\frac{\left(\frac{P}{N}\right)^2}{\frac{K}{3}\,.\left(\frac{H^2}{N}\right)^2.\left[C_{sv} + \frac{0{,}05\,(C_{sv} - 1)}{K\,.\,H^2/N} - 1\right]} \tag{28}$$

que mediante ordenación conveniente y ayudándonos de la simplificación establecida en (21), se reduce a:

$$S = \frac{1}{2}\,.\,\frac{(P/N)^2}{I\,(C_{sv} - 1)} \tag{29}$$

El valor de P, establecido en (2) nos permite escribir de nuevo la igualdad anterior bajo la forma:

$$2.S.I.\,(C_{sv} - 1) = \left[0{,}9\left(\frac{yH}{N}\right) + 0{,}25\,.\left(\frac{\ell H}{N}\right) + 1\right]^2, \tag{30}$$

o bien:

$$0{,}9\left(\frac{yH}{N}\right) + 0{,}25\,.\left(\frac{\ell H}{N}\right) + 1 - \sqrt{2.S.I.\,(C_{sv} - 1)} = 0, \tag{31}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ya que la solución negativa de la raíz no tiene significación real.

Con respecto a la seguridad al deslizamiento, tenemos la ecuación (15)

$$C_d = \frac{P\,\mu}{E} + \alpha$$

Según se deduce de (29)

$$P = N\sqrt{2\,S\,I\,(C_{sv} - 1)}$$

y

$$E = K\,H^2\text{, sustituyendo:}$$

$$C_d = \frac{N\,\mu\,.\sqrt{2\,S\,I\,(C_{sv} - 1)}}{K\,H^2} + \alpha$$

o bien:

$$C_d = \frac{\sqrt{2\,S\,I\,(C_{sv} - 1)}}{\frac{K}{\mu}\,.\,\frac{H^2}{N}} + \alpha \qquad (32)$$

5. ABACOS PARA EL DIMENSIONAMIENTO

5.1. Confección de los ábacos

Repetimos aquí las dos ecuaciones (22) y (31)

$$-0{,}45\,\gamma\left(\frac{yH}{N}\right)^2 + 0{,}125\left(\frac{\ell H}{N}\right)^2 + 0{,}9\,\gamma\left(\frac{yH}{N}\right)\left(\frac{\ell H}{N}\right) + \left(\frac{\ell H}{N}\right) - \left(\frac{yH}{N}\right) = C_{sv}\,I$$

$$0{,}9\,\gamma\left(\frac{yH}{N}\right) + 0{,}25\left(\frac{\ell H}{N}\right) + 1 - \sqrt{2\,S\,I\,(C_{sv} - 1)} = 0$$

Para cada uno de los pesos específicos 0,6, 0,8, 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8 y 2 Tm/m^3, se dibujan las familias de curvas correspondientes a las ecuaciones (22) y (31), las cuales se obtienen al dar sucesivos valores a los términos C_{sv} I, que llamaremos V, y S.I (C_{sv} − 1) que llamaremos B, siendo por lo tanto:

$$V = C_{sv}\,.\,I \qquad (33)$$

$$B = S.I.\,(C_{sv} - 1) \qquad (34)$$

En ordenadas se obtienen los valores de $\left(\frac{\ell H}{N}\right)$ y en abcisas los de $\left(\frac{yH}{N}\right)$.

Como es evidente la longitud de la zapata, ℓ, ha de ser mayor o igual que el talón, y, más 0,1 H que es el espesor dado del muro, tendremos:

$$\ell \geqq y + 0{,}1\,H, \qquad (35)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\ell H}{N} \geqslant \frac{y\,H}{N} + 0{,}1\,\frac{H^2}{N} \qquad (36)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Dado que N será en la mayoría de los casos el peso del muro, si su espesor es 0,1 H, tomará el valor:

$0{,}1\ H^2 \times 2{,}5 = 0{,}25\ H^2$, que sustituido en la anterior expresión nos conduce a:

$$\frac{\ell H}{N} \geqslant \frac{y H}{N} + 0{,}4 \qquad (37)$$

La recta $\frac{\ell H}{N} = \frac{yH}{N} + 0{,}4$ será la recta límite de los posibles valores que nos solucionen el problema.

Con respecto a la seguridad al deslizamiento, la ecuación (32) junto con (34) nos da:

$$C_d = \frac{\sqrt{2B}}{\frac{K}{\mu}\frac{H^2}{N}} + \alpha, \text{ de donde:} \qquad (38)$$

$$\alpha = C_d - \frac{\sqrt{2B}}{\frac{K}{\mu}\frac{H^2}{N}} \qquad (39)$$

Como una seguridad al deslizamiento de 1,5 se considera generalmente suficiente, el valor de α deberá cumplir:

$$\alpha \geqslant 1{,}5 - \frac{\sqrt{2B}}{\frac{K}{\mu}\frac{H^2}{N}} \qquad (40)$$

5.2. Utilización de los ábacos

El proceso a seguir para la resolución del problema ayudándose de los ábacos es el siguiente:

a) Se fijan los valores que nos definen la estructura y que son:

γ = Peso específico del material a sostener en Tm/m^3.

H = Altura total en metros.

N = Peso del muro y acciones que gravitan sobre él en Tms.

K = Coeficiente de empuje.

σ = Coeficiente máximo de trabajo del terreno en Tm/m^2.

C_{sv} = Coeficiente mínimo de seguridad al vuelco que se desee.

b) A continuación se calculan los siguientes parámetros:

$$I = \frac{H^2}{N}\left(0{,}05 + \frac{K}{3}\frac{H^2}{N}\right); \qquad S = \frac{\sigma}{H}$$

$$V = C_{sv} \cdot I$$

$$B = S.I.(C_{sv} - 1)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

c) Con los valores de V y B se entra en el ábaco correspondiente a la densidad γ, y el punto de intersección de ambas curvas nos da los valores de $(\frac{\ell H}{N})$ y $(\frac{yH}{N})$ con los que se calculan ℓ e y.

Al ser el valor de I independiente de las dimensiones y forma de la zapata, todos los puntos de la curva con V cte., tienen el mismo valor de C_{sv}.

Por otra parte, como B depende de I, C_{sv} y S, siendo, según se ha señalado, I independiente de las dimensiones de la zapata, podremos tomar un valor de B menor al calculado, si el punto de corte de ambas curvas se sale fuera de los límites de los ábacos, con lo cual disminuiremos el coeficiente de trabajo del terreno.

La zapata más económica corresponderá al menor valor de $\frac{\ell H}{N}$.

6. EJEMPLO DE UTILIZACION DE ABACOS

Sea un terraplén con una densidad de 1,6 Tm/m³ y cuyo coeficiente de empuje activo K = 0,3, con una altura de 4,5 mts.

El muro transmite a la zapata un peso

$$N = 5 \text{ Tm/m} \cdot \ell$$

la resistencia máxima del terreno de asiento a compresión la fijaremos en 1,5 K_p/cm^2, y el coeficiente mínimo de seguridad al vuelco

$$C_{sv} = 1,8$$

Con todo lo anterior calculamos los siguientes parámetros:

$$I = \frac{H^2}{N}\left(0,05 + \frac{K}{3} \cdot \frac{H^2}{N}\right) = \frac{4,5^2}{5}\left(0,05 + \frac{0,3}{3} \cdot \frac{4,5^2}{5}\right) = 1,84$$

$$V = I \cdot C_{sv} = 3,312$$

$$B = \frac{\sigma}{H} I (C_{sv} - 1) = \frac{15}{4,5} \cdot 1,84 \cdot 0,8 = 4,9$$

Para estos valores, el correspondiente ábaco de 1,6 Tm/m³ nos da el punto de coordenadas

$$\frac{\ell H}{N} = 1,88$$

$$\frac{yH}{N} = 1,166$$

De donde:

$$\ell = 1,88 \times \frac{5}{4,5} = 2,09$$

$$y = 1,166 \times \frac{5}{4,5} = 1,3$$

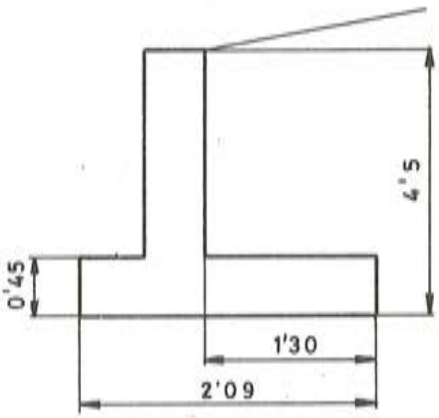


Fig. 2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El coeficiente de seguridad al deslizamiento será:

$$C = \frac{\sqrt{2\,B}}{\frac{K}{\mu}\,\frac{H^2}{N}}$$

$$\text{Si } \mu = 0{,}6$$

$$C_d = 1{,}54$$

Si no se considera aceptable, y se desea mayor, por ejemplo de $C_d = 2$, habrá de confiar a fuerzas distintas a la del rozamiento, por ejemplo al empuje pasivo sobre la puntera, una parte del empuje igual al C_d que se desea menos el C_d calculado, en nuestro caso:

$$2 - 1{,}54 = 0{,}46$$

Por lo tanto es necesario encontrar para la estructura una fuerza que se oponga al deslizamiento, igual a:

$$0{,}46 \,.\, E = 0{,}46 \,.\, K \,.\, H^2 = 0{,}46 \,.\, 0{,}3 \,.\, 4{,}5^2 = 2{,}79 \text{ Tm.}$$

Si se desea obtener esta seguridad al deslizamiento con sólo la fuerza de rozamiento, habrá que aumentar el valor de B de forma que:

$$2 = \frac{\sqrt{2.B}}{\frac{K}{\mu}\,\frac{H^2}{N}}$$

de donde en nuestro caso resulta

$$B = 8{,}2$$

Puesto que $\frac{\sigma}{H}$ e I no pueden aumentar, habría que aumentar el valor de C_{sv} que resultaría

$$C_{sv} = 1 + \frac{B}{\frac{\sigma}{H} \,.\, I} = 1 + \frac{8{,}2}{\frac{15}{4{,}5} \,.\, 1{,}84} = 2{,}34$$

Con lo cual V sería:

$$V = C_{sv} \,.\, I = 2{,}34 \,.\, 1{,}84 = 4{,}3$$

Para estos valores de B y V nos da el ábaco el nuevo punto de coordenadas

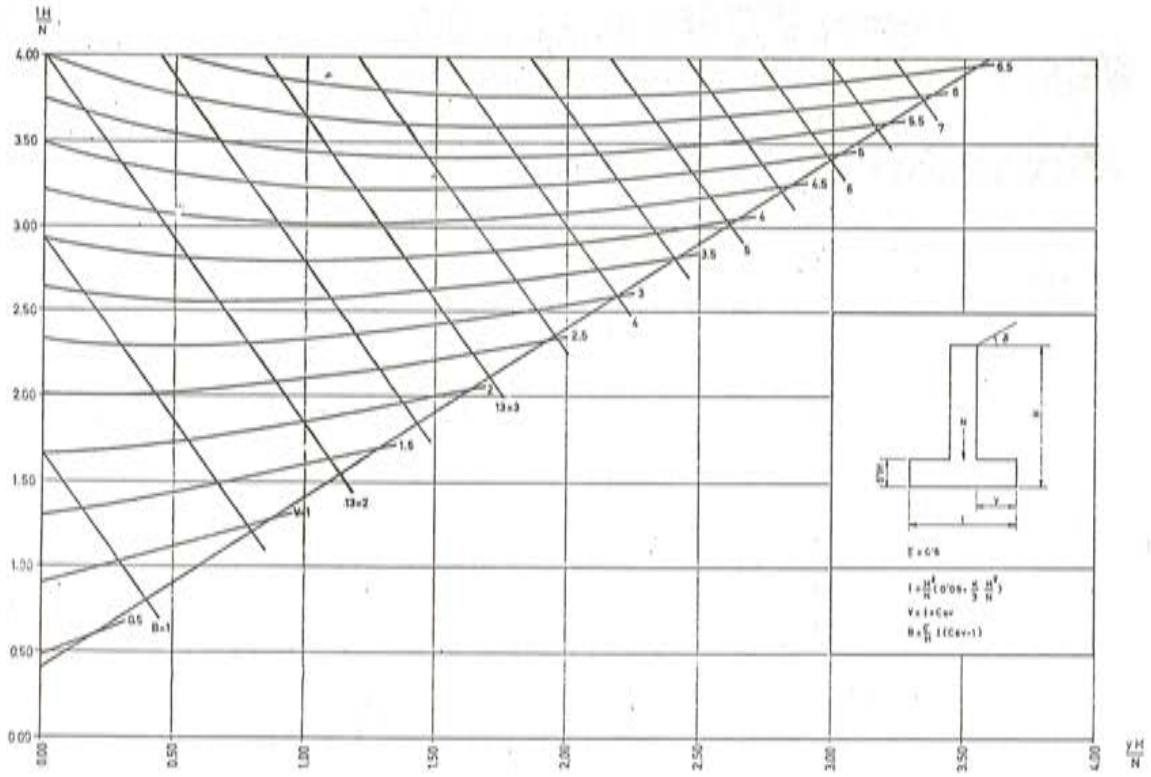
$$\frac{\ell H}{N} = 1{,}6 \qquad 1 = 2{,}4 \text{ mts.}$$

$$\frac{y H}{N} = 1{,}65 \quad y = 1{,}83$$

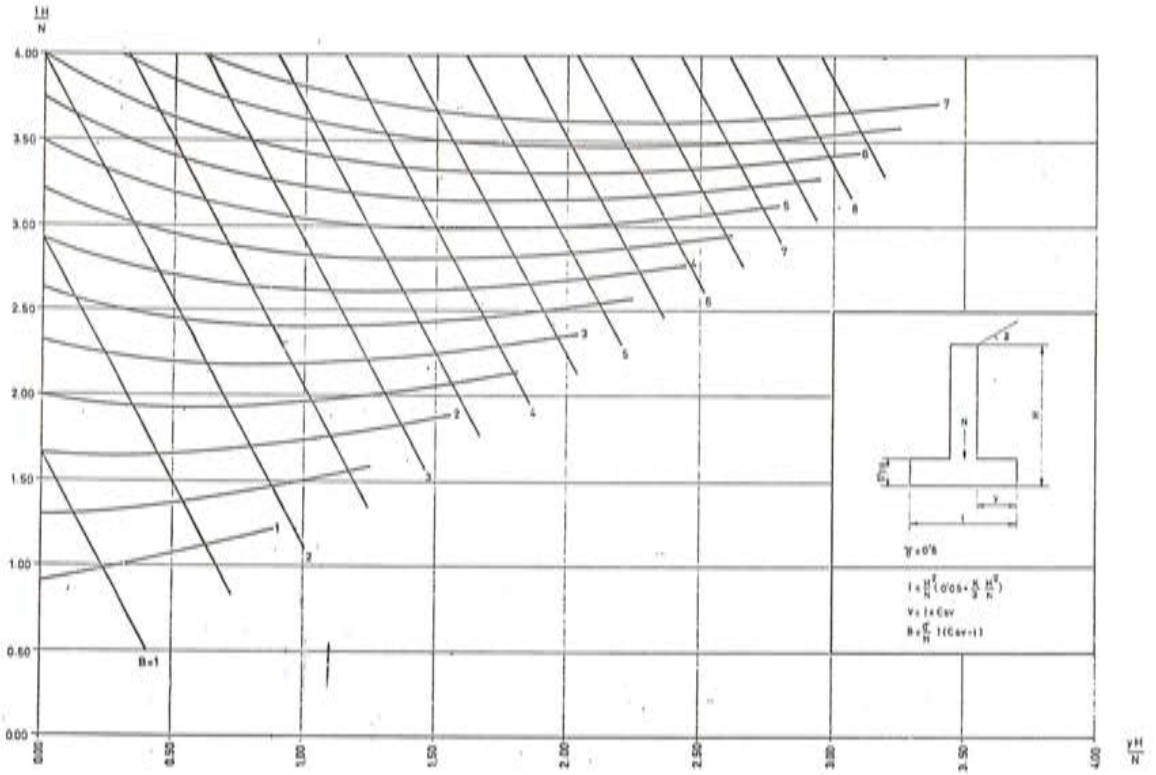
BIBLIOGRAFIA

1. Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. EH-73.
2. Construcciones Metálicas. F. Rodríguez Avial.
3. Hormigón Armado. P. Jiménez Montoya.
4. Un método para el proyecto de muros de contención. J. Calavera Ruiz.
5. Funciones de estabilidad y economía en muros monolíticos resistentes para cerramiento de almacenes graneros. F. Pérez García.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

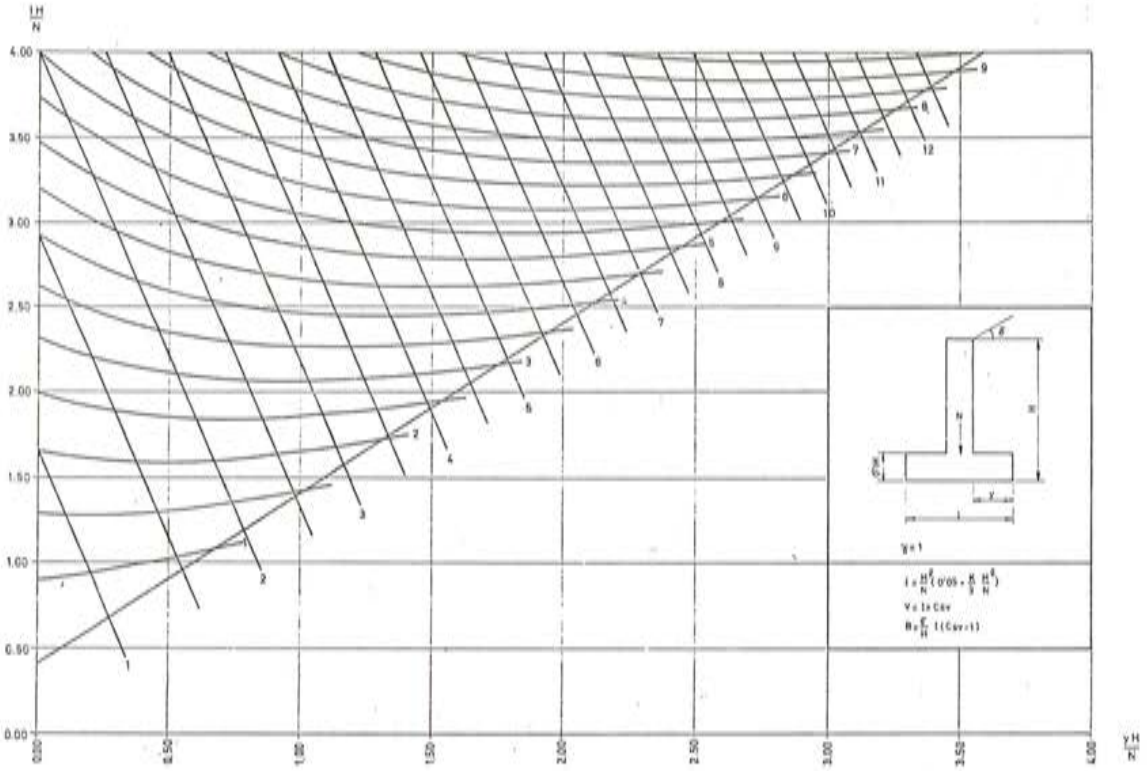


Abaco 1

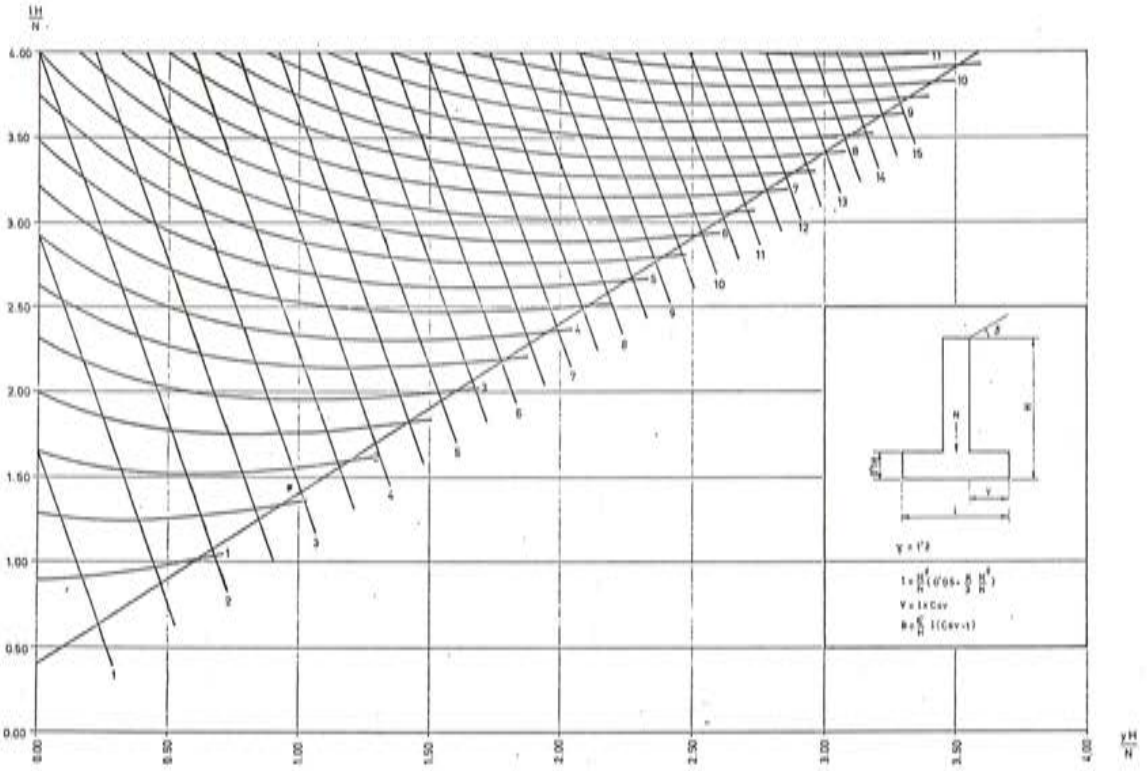


Abaco 2

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

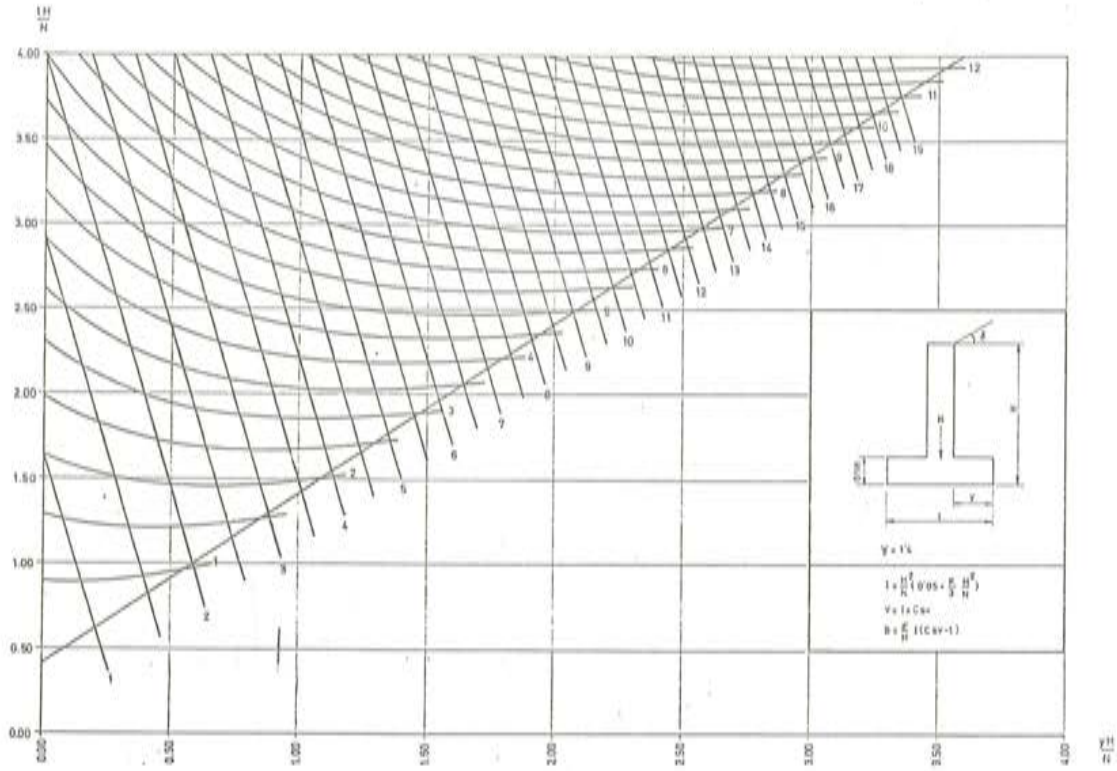


Abaco 3

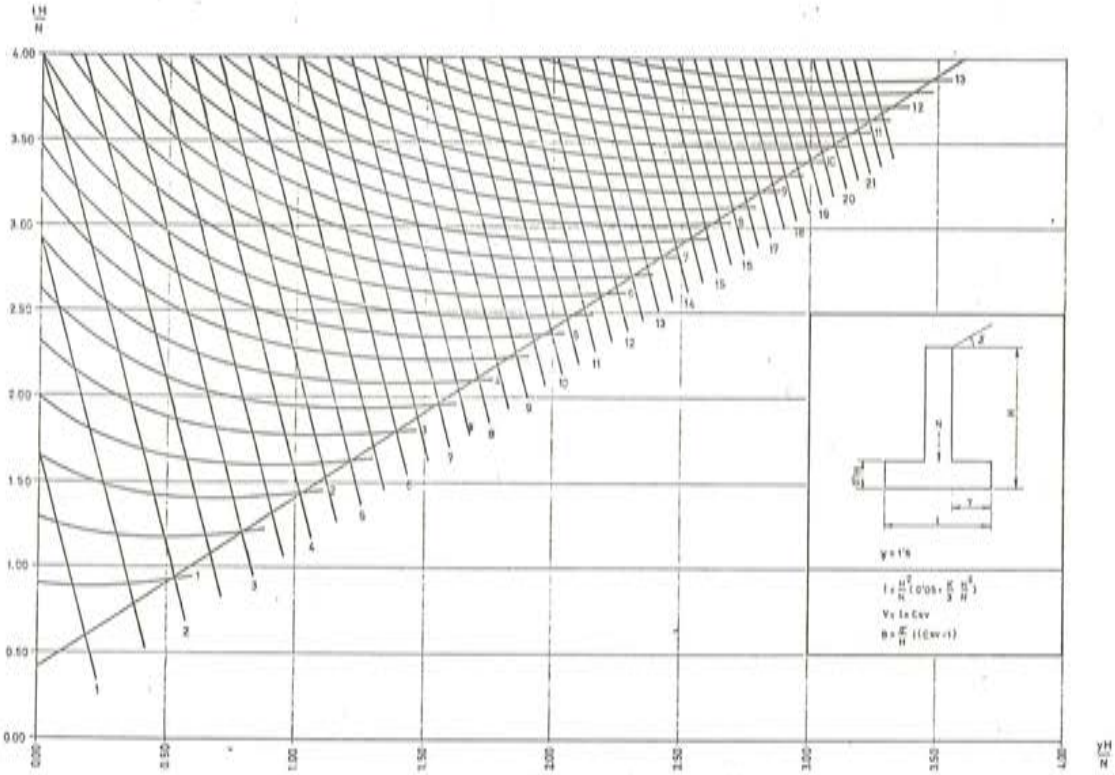


Abaco 4

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

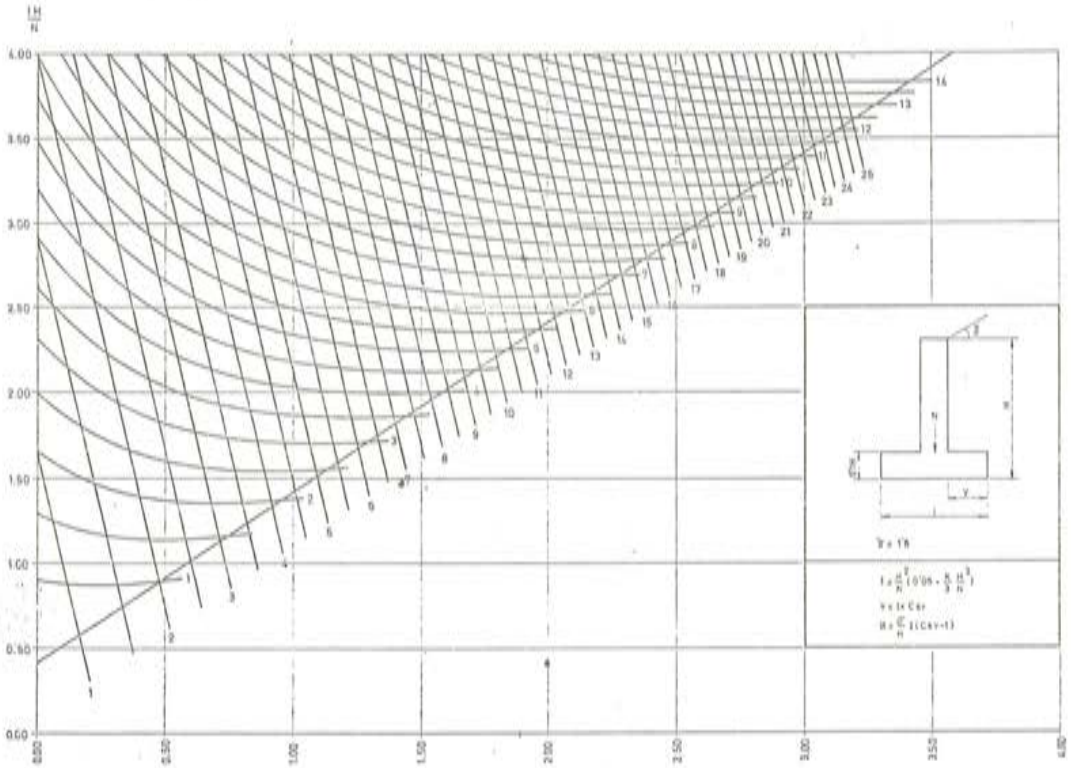


Abaco 5

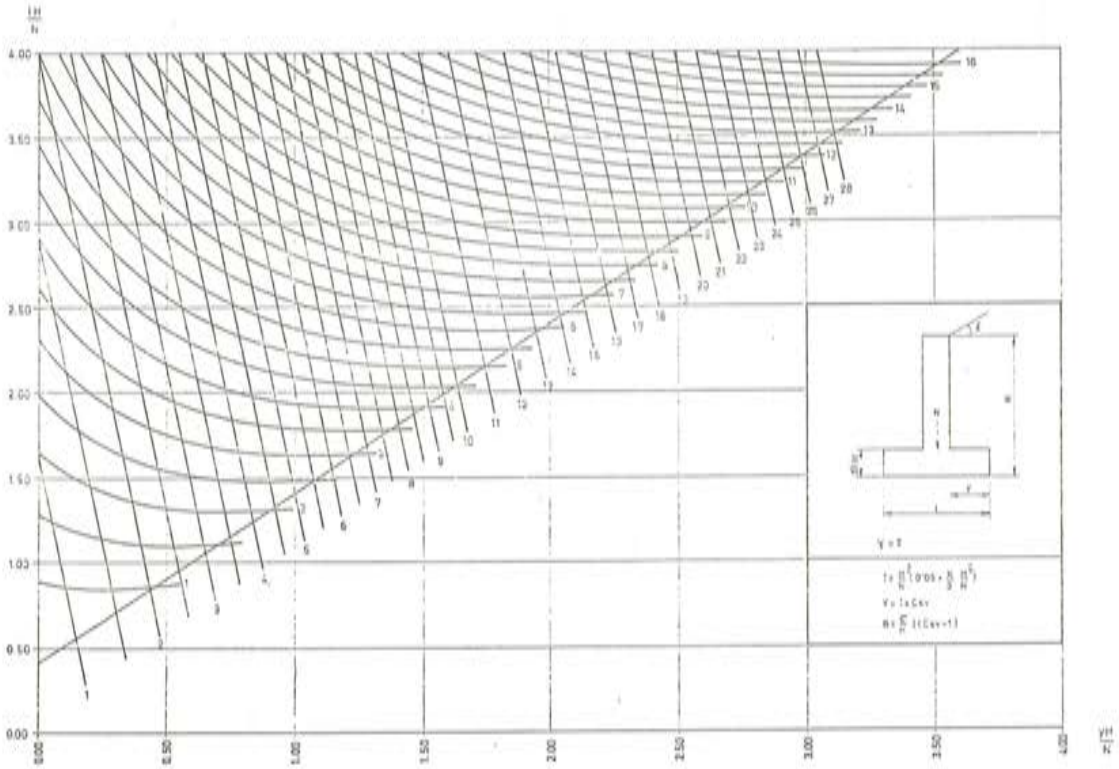


Abaco 6

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



Abaco 7



Abaco 8

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La constante evolución técnica que experimenta la maquinaria de obras públicas y construcción, precisa de un adecuado escaparate donde mostrar las últimas innovaciones.

SMOPYC/84 es el centro de interés de fabricantes, compradores, técnicos y profesionales, donde la oferta y la demanda alcanzan máximas cotas. Así se viene constatando desde la primera edición del Salón en 1980.

Grupos de compradores de numerosos paises, Misiones comerciales extranjeras, Concurso de Diseño Industrial, Conferencias Técnicas, etc., son programados durante los cinco días de SMOPYC/84.

La experiencia de la Institución Ferial de Zaragoza, en la organización de Certámenes monográficos de elevada profesionalidad, contribuye, junto con la favorable acogida y colaboración de las firmas expositoras, a que SMOPYC sea un auténtico éxito con repercusión internacional.

CADA DOS AÑOS, en SMOPYC-Zaragoza: PUNTO DE ENCUENTRO del sector de la Maquinaria para Obras Públicas y Construcción durante los días 24 al 28 de febrero de 1984.

CICLO DE CONFERENCIAS TECNICAS

24 y 25 de febrero de 1984

Temas:

FABRICACION Y PUESTA EN OBRA DE MEZCLAS ASFALTICAS.

RECICLADO DE PAVIMENTOS ASFALTICOS.

FIRMES DE HORMIGON.

Conferencia Magistral:

LAS OBRAS PUBLICAS Y SU INFLUENCIA EN LA GENERACION DE EMPLEO.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

INTEMAC

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES

Ensayo de pilares a compresión centrada

MADRID

Oficinas:
Monte Esquinza, 30 - 4.º D
MADRID-4
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:
Carretera de Loeches, 7
TORREJON DE ARDOZ
Tels. (91) 675 31 00/04/08

BARCELONA

Pasaje Busquets, 37
CORNELLA DE LLOBREGAT
Tels. (93) 377 43 58/62

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

PUBLICACION ESPECIAL
DE LA
A. T. E. P.

Manual H.P. 5–79 "Recomendaciones para la disposición y colocación de Armaduras"

Como continuación de la serie de Manuales que, desde hace años, viene editando la Asociación Técnica Española del Pretensado, y en los que se recogen las recomendaciones relativas a las diferentes etapas del proceso general de ejecución de las construcciones pretensadas, se publica ahora el Manual H.P. 5–79 en el que, bajo el título "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras", se han recopilado todas aquellas normas que la práctica ha demostrado deben tenerse en cuenta para obtener una adecuada disposición de las armaduras en los elementos pretensados, tanto si se trata de armaduras pretesas como postesas, incluyéndose así mismo las armaduras pasivas que suelen acompañar a las activas.

Por la íntima relación existente entre tales armaduras y otra serie de dispositivos y piezas tales como los anclajes, empalmes, vainas, separadores, etc., se recogen también en este Manual las recomendaciones correspondientes a su colocación.

En todos los casos, se tratan por separado las fases de proyecto, ejecución y control.

El interés del tema elegido resulta evidente si se tiene en cuenta que el estado tensional creado por las armaduras activas en todo elemento pretensado, debe ser tal que permita a éste cumplir, con las necesarias garantías de seguridad y durabilidad, la función a que va destinado. Y como dicho estado tensional depende, no sólo de la magnitud sino también del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de pretensado introducidas, se comprende que la disposición de las armaduras en este tipo de piezas adquiere una importancia primordial; por lo que su colocación debe ser cuidadosamente realizada en obra.

A la consecución de este objetivo se estima que habrán de contribuir, de modo importante, las recomendaciones del Manual que ahora se ofrece y que se espera tendrá la misma favorable acogida que los anteriores de la serie, no sólo entre los Miembros de nuestra Asociación, sino también entre cuantos profesionales desarrollan sus actividades en el campo de la técnica del pretensado.

Este Manual H.P. 5–79, con 87 páginas y varias figuras, se ha puesto a la venta al precio de 300,– ptas. el ejemplar (6,– dólares USA para el extranjero). Para los Miembros de la A.T.E.P. se ha establecido el precio especial de 200,– pesetas (4,– dólares USA para el extranjero).

Los interesados en su adquisición deberán dirigir sus pedidos a la Secretaría de la Asociación Técnica Española del Pretensado, Apartado 19.002, Madrid–33, Tfno: 202 04 40.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

asociación técnica
española del pretensado

hormigón y acero n.º 147

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025