hormigón y ACERO

nº 148

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO.

COSTILLARES (CHAMARTIN). MADRID-33.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de **"Miembro Protector"**, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de **"Miembros Protectores"** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético.

AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA.— Velázquez, 23. Madrid-1.
ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).— Orense, 10. Madrid-20.
CAMARA, S.A.— Av. de Santander, s/n. Valladolid.
CAMINOS, EDIFICIOS y OBRAS, S.A.— J. Lázaro Galdiano, 4. Madrid-16.
CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.— Grijalba, 9. Madrid-6.
CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE O.P. CENTRO BIBLIOGRAFICO.— Alfonso XII, 3. Madrid-7.
CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A.— Aribau, 185. Barcelona-21.
COMEBA, S.L.— Apartado 408. Castellón de la Plana.
DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Avda. de América, 24. Madrid-2.
ELABORADOS METALICOS, S.A.— Apartado 553, La Coruña.
ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.— Biblioteca. Juan de Mena, 8, Madrid-14.
FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Balmes, 36. Barcelona-7.
FORJADOS DOMO.— Hermosilla, 64. Madrid-1.
FREYSSINET, S.A.— General Perón, 24. Madrid-20.
HEREDIA Y MORENO, S.A.— Princesa, 3. Madrid-3.
HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.— Archs, 10. Barcelona-2.
HORMIGONES GERONA, S.A.— Lorenzana, 45. Gerona.
IBERINSA.— Príncipe de Vergara, 43. Madrid-1.
INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.— Portal de Gamarra, 46. Vitoria.
INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.— Ministerio de O.P. y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. Madrid-3.
INTECSA.— Orense, 70. Madrid-20.
INTEMAC.— Monte Esquinza, 30. Madrid-4.
JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA.— Príncipe de Vergara, 103. Madrid-6.
LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.— Alfonso XII, 3. Madrid-7.
NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.— Fábrica de Forjas de Buelna. LOS CORRALES DE BUELNA (Santander).
PACADAR, S.A.— Hermosilla, 57. Madrid-1.
PRELOAD SISTEMAS, S.A.— Paseo de la Castellana, 140. Madrid-16
PRENSOLAND, S.A.— Calle Industria, s/n. SAN MARTIN DE CENTELLAS (Barcelona).
PRETENSADOS DEL LOURO, S.L.— Atios. PORRIÑO (Pontevedra).
PROCEDIMIENTOS BARREDO.— Av. de América, 40. Madrid-2.
PROMONAL.— Poeta Artola, 12. Valencia-21.
S.A.E. BBR.— Polígono Industrial Barcelonés. Calle Carrero Blanco, s/n. ABRERA (Barcelona).
S.A. ECHEVARRIA.— Apartado 46. Bilbao-8.
TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).— Velázquez, 105. Madrid-6.
TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A.— Monturiol, 5. SANTA MARIA DE BARBARA (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las empresas citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO.—LA PAZ (Bolivia)

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

JORNADAS sobre TECNICAS DEL HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO EN CENTRALES NUCLEARES

EDITADO POR:

asociación técnica española del pretensado

Precio del ejemplar: 3.000 ptas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO

hormigón y acero

nº. 148

3er trimestre, 1983

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales)	2.000,– ptas.	40,– dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas)	5.000,– ptas.	100,– dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	10.000,– ptas.	200,– dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - MADRID - 33

Depósito Legal: M-853-1958
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID
ISSN: 0439-5689

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

ALVISA

PREFABRICADOS ALBAJAR

PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE

HUESCA:

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA
Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON
Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

MADRID

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10
Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4- 8 - TORREJON DE ARDOZ
Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

ZARAGOZA

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Comité de Redacción
de la Revista
Hormigón y Acero

ARENAS, Juan José
AROCA, Ricardo
BARREDO, Carlos
CUVILLO, Ramón del
CHUECA, Rafael
ELICES, Manuel
FERNANDEZ TROYANO, Leonardo
FERNANDEZ VILLALTA, Manuel
FISAC, Miguel
JODAR, Juan
JULIA, Manuel
LLOMBART, José Antonio
MANTEROLA, Francisco Javier
MONEO, Mariano
MORENO TORRES, Juan
PIÑEIRO, Rafael
ROMERO, Rafael
SANCHEZ CASTRO, Carlos
SANCHEZ GALVEZ, Vicente

hormigón y acero

n. 148

índice

Pág.

457-0-82 **Dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado. 2ª Parte. Abacos de dimensionamiento** 9
Dimensionnement des supports élancés en béton armé. 2ème Partie. Abaques de dimensionnement.
Design of slender supports of reinforced concrete. Part 2. Design charts.
Hugo Corres y Francisco Morán.

457-0-84 **Estados de cargas de máxima exigencia en secciones de hormigón armado solicitadas a flexión compuesta por acciones aleatorias múltiples** 23
Combinaison plus défavorable des charges soumises à flexion composée au moyen des actions aléatoires.
Unfavourable load combination in reinforced concrete sections under compound bending due to chance events.
Clemente Vilas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Pág.

457-0-85 **Análisis gráfico de la carga crítica de soportes complejos con distintas condiciones de apoyo** 43
Analyse graphique de la charge critique pour des colonnes composées avec différentes conditions d'appui.
Graphic analysis of the critical load for complex bearings and varying types of support.
Félix Escrig.

457-2-22 **Diagramas axil-momento-curvaturas ($N - M_x - M_y - C_x - C_y$) de una sección de hormigón armado solicitada por una flexo-compresión plana o biaxial** 61
Les diagrammes axial-moments-coubures ($N - M_x - M_y - C_x - C_y$) d'une section en béton armé soumise à une flexo-compression plaine ou biaxiale.
Axial moment curvature diagrams ($N - M_x - M_y - C_x - C_y$) for a reinforced concrete section under plain or biaxial bending and compression.
Luis M. Villegas y J.J. Arenas.

457-2-23 **Tratamiento en nivel 2 de seguridad del cálculo de secciones de hormigón armado** 87
Traitement en niveau 2 de sécurité pour le calcul des sections en béton armé.
Design of reinforced concrete sections at safety level 2.
Pedro Miguel Sosa.

591-2-175 **Puentes de hormigón pretensado construidos en Bolivia** 105
Ponts en béton précontraint, construits en Bolivia.
Prestressed concrete bridges made in Bolivia.
Alfonso Subieta O.

591-9-38 **La demolición de los halles centrales de Reims. Una propuesta alternativa de salvación y recuperación** 119
La démolition des halles centrales de Reims. Une proposition alternative pour leur préservation et récupération.
Demolition of the Reims halles. An alternative proposal for their preservation and recuperation.
J.A. Fernández Ordóñez y
A. González Serrano.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

RELACION DE EMPRESAS QUE EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO, FIGURAN INSCRITAS EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS"

ESPAÑA

ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION (ATECSA).– Madrid.
AGROMAN, S.A.– Madrid.
ALBISA, S.A.– Algeciras (Cádiz).
ARIDOS LIGEROS, S.A.– Madrid.
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.– Barcelona.
AUXINI, S.A.– Madrid.
AZMA, S.A.– Madrid.
BIGUETES, S.L.– Elche (Alicante).
BUTSEMS, S.A.– Madrid.
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.– Barcelona.
CASTRO HERMANOS, S.L.– Mislata (Valencia).
CASTRO MATELO, V., S.A.– Sigueiro (La Coruña).
CATEDRA DE CONSTRUCCION II DE LA ESCUELA TECNICA DE INGENIEROS AGRONOMOS.– Córdoba.
CEMENTOS MOLINS, S.A.– Sant Vicenc dels Horts (Barcelona).
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.– Madrid.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS.– Madrid.
COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.– Madrid.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES.– La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.– Gerona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. SECCION BIBLIOTECA.– Zaragoza.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. DEPARTAMENTO LABORATORIOS. Sta. Cruz de Tenerife.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CATALUÑA.– Barcelona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. BIBLIOTECA.– Madrid.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.– Bilbao.
COLEGIO OFICIAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.– Málaga.
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR. BIBLIOTECA.– Sevilla.
CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.– Madrid.
CONTROLEX.– Alicante.
COTESA, COLOCACIONES TECNICAS, S.A.– Barcelona.
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.– Barcelona.
CUBIERTAS M.Z.O.V., S.A.– Madrid.
CUMBRE MODULAR, S.A.– Barcelona.
DEPARTAMENTO DE TEORIA DE ESTRUCTURAS. ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES. UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA.– Zaragoza.
DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO. MINISTERIO DEL EJERCITO.– Madrid.
DITECO, S.L.– Valencia.
DIVISION DE PLANTEAMIENTO Y PROYECTOS. CENTRO DE ESTUDIO Y APOYO TECNICO.– Valladolid.
ELABORADOS DE HORMIGON, S.A.– Burgos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS (EEPSA).– Manresa (Barcelona).
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA (AUXINI).– Madrid.
ENAGA, S.A.– Pozuelo de Alarcón (Madrid).
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.– Córdoba.
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.– Zumárraga (Guipúzcoa).
ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A.– Madrid.
E.T.S. DE ARQUITECTURA.– Barcelona;
E.T.S. DE ARQUITECTURA.– Sevilla.
EUROESTUDIOS, S.A.– Madrid.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.– Madrid.
FORJADOS DOL.– Esquivias (Toledo).
FORJAS Y ALAMBRES DEL CADAGUA.– Erandio (Bilbao).
GIJON E HIJOS, S.A.– Motril (Granada).
GOMHERSA.– Talavera de la Reina (Toledo).
HIDAQUE, S.A.– Granada.
HISPANO FRANCESA DE VEHICULOS INDUSTRIALES, S.A. BIBLIOTECA.– Madrid.
HORMIGONES GERONA, S.A.– Gerona.
HORMYCER, S.L.– Madrid.
HUARTE Y CIA, S.A.– Madrid.
IBERDUERO, S.A.– Bilbao.
IBERDUERO, S.A. (CENTRO DE DOCUMENTACION).– Bilbao.
IBERTECNICA, S.A.– Madrid.
IDASA, INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A.– La Coruña.
INBADELCA, S.A.– Baracaldo (Vizcaya).
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.– Tarrasa (Barcelona).
INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYSA).– Madrid.
INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.– Barcelona.
INSTITUT CARTOGRAFIC DE CATALUNYA.– Barcelona.
INSTITUTO NACIONAL DE EMPLEO Y PROMOCION SOCIAL. SECCION ASUNTOS GENERALES (SEAF-PPO).– Madrid.
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO.– Madrid.
JULIAN ARUMI, S.L.– Vich (Barcelona).
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.– Sta. Cruz de Tenerife.
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.– Madrid.
LABORATORIO GEOCISA. BIBLIOTECA.– Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE CARRETERAS Y GEOTECNIA JOSE LUIS ESCARIO.– Madrid.
LAING IBERICA, S.A.– Madrid.
LIBRERIA RUBIÑOS.– Madrid.
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).– Castellón de la Plana.
MAHEMA, S.A.– Granollers (Barcelona).
MATERIALES Y TUBOS BONNA, S.A.– Madrid.
MECANOGUMBA, S.A.– Mollet del Vallés (Barcelona).
NUEVA CERAMICA CAMPO.– Lendo-Laracha (La Coruña).
OTEP INTERNACIONAL, S.A.– Madrid.
POSTELECTRICA, S.A.– Palencia.
POSTENSA, S.A.– Bilbao.
PRAINSA – Barcelona.
PRAINSA – Zaragoza.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

PREBETONG CANARIA, S.A.– Sta. Cruz de Tenerife.
PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).– Vitoria.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).– León.
PREFABRICADOS DEL HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).– Valladolid.
PREFABRICADOS NAVARROS, S.A.– Olazagutia (Navarra).
PREFABRICADOS POUSA, S.A.– Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PREFLEX. COMPAÑIA LABORAL, S.A. Gijón (Oviedo).
PRETENSADOS AEDIUM, S.L.– Mutilva Baja (Navarra).
PREYPRESA.– Aranda de Duero (Burgos).
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. HORTE.– Valladolid.
PROTEC, S.L.– Lugones (Oviedo).
REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A.– Pinto (Madrid).
RENFE (Madrid).
SAINCE.– Madrid.
S.E.A.T. (BIBLIOTECA).– Barcelona.
SENER, S.A.– Las Arenas (Vizcaya).
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.– Barcelona.
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.– Gerona.
SIKA, S.A.– Madrid.
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.– Madrid.
SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.– Madrid.
SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS.– Valencia.
SPANDECK CATALANA, S.A.– Barcelona.
SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION. SECCION DE NORMATIVA (MOPU).– Madrid.
SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA (MOPU).- Madrid.
TEJERIAS "LA COVADONGA".– Muriedas de Camargo (Santander).
TEPSA.– Tarrasa (Barcelona).
TOSAM, S.L.– Segovia.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).– Madrid.
UNIVERSIDAD POLITECNICA. HEMEROTECA.– Valencia.
VALLEHERMOSO, S.A.– Madrid.
VIAS Y OBRAS PROVINCIALES.– San Sebastián.
VIGAS REMARRO.– Motril (Granada).

EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.– Montevideo (Uruguay).
ASSOCIAÇAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.– Sao Paulo (Brasil).
BIBLIOTECA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA. UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES Buenos Aires (Argentina).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

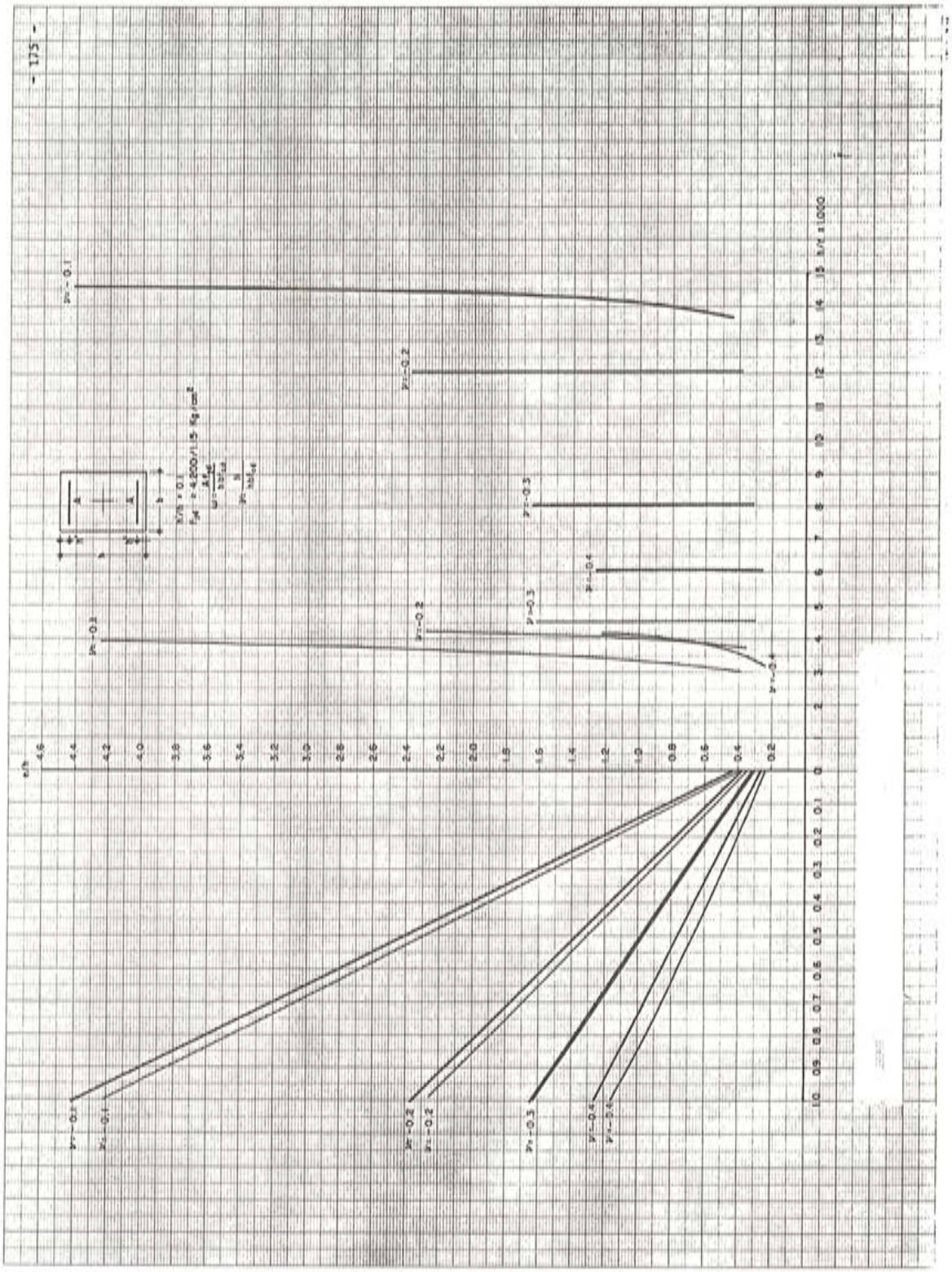


Fig. 1. Abaco de Dimensionamiento $\nu \geqslant -.4$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

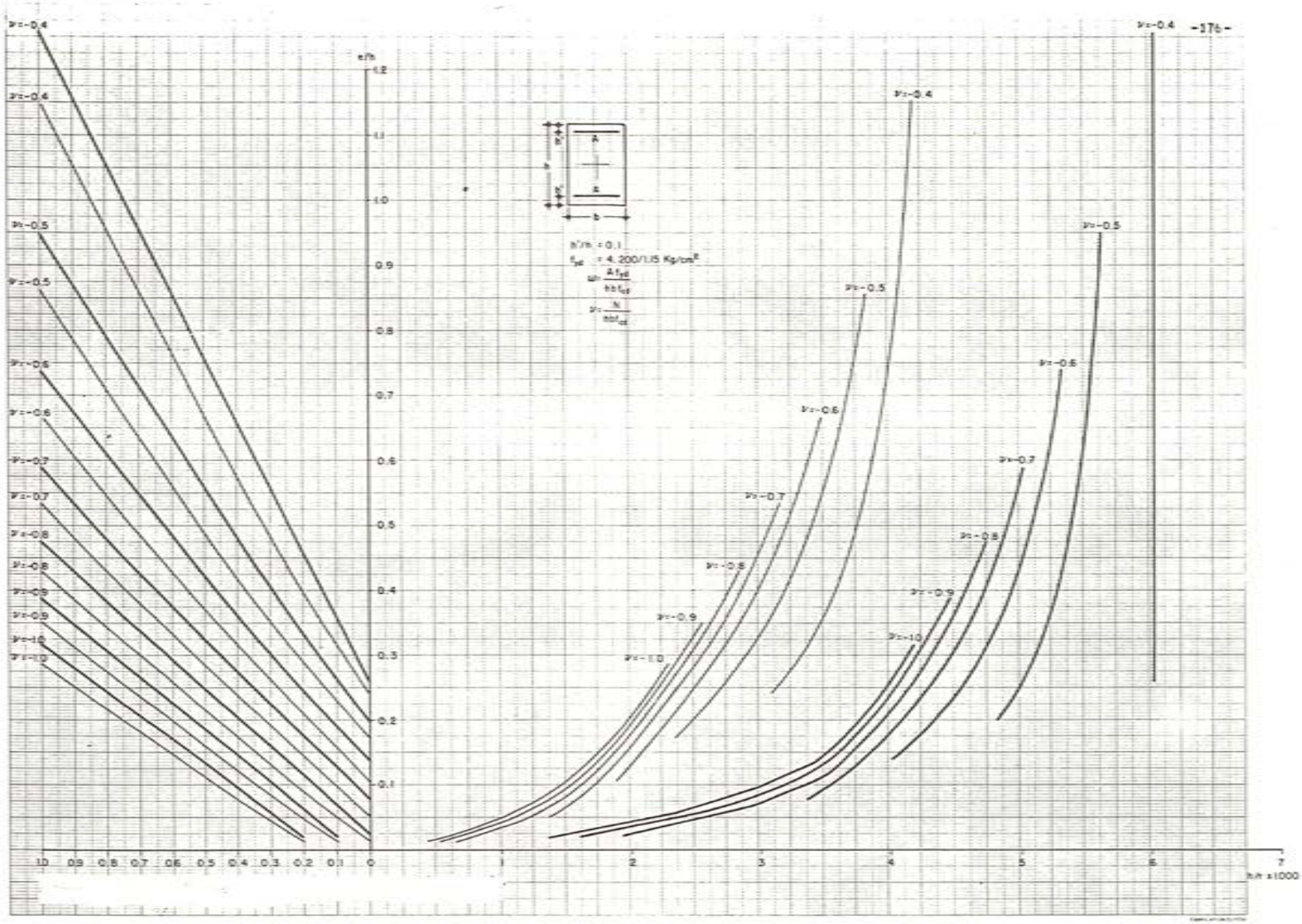


Fig. 2. Abaco de Dimensionamiento $\nu \leqslant -.4$

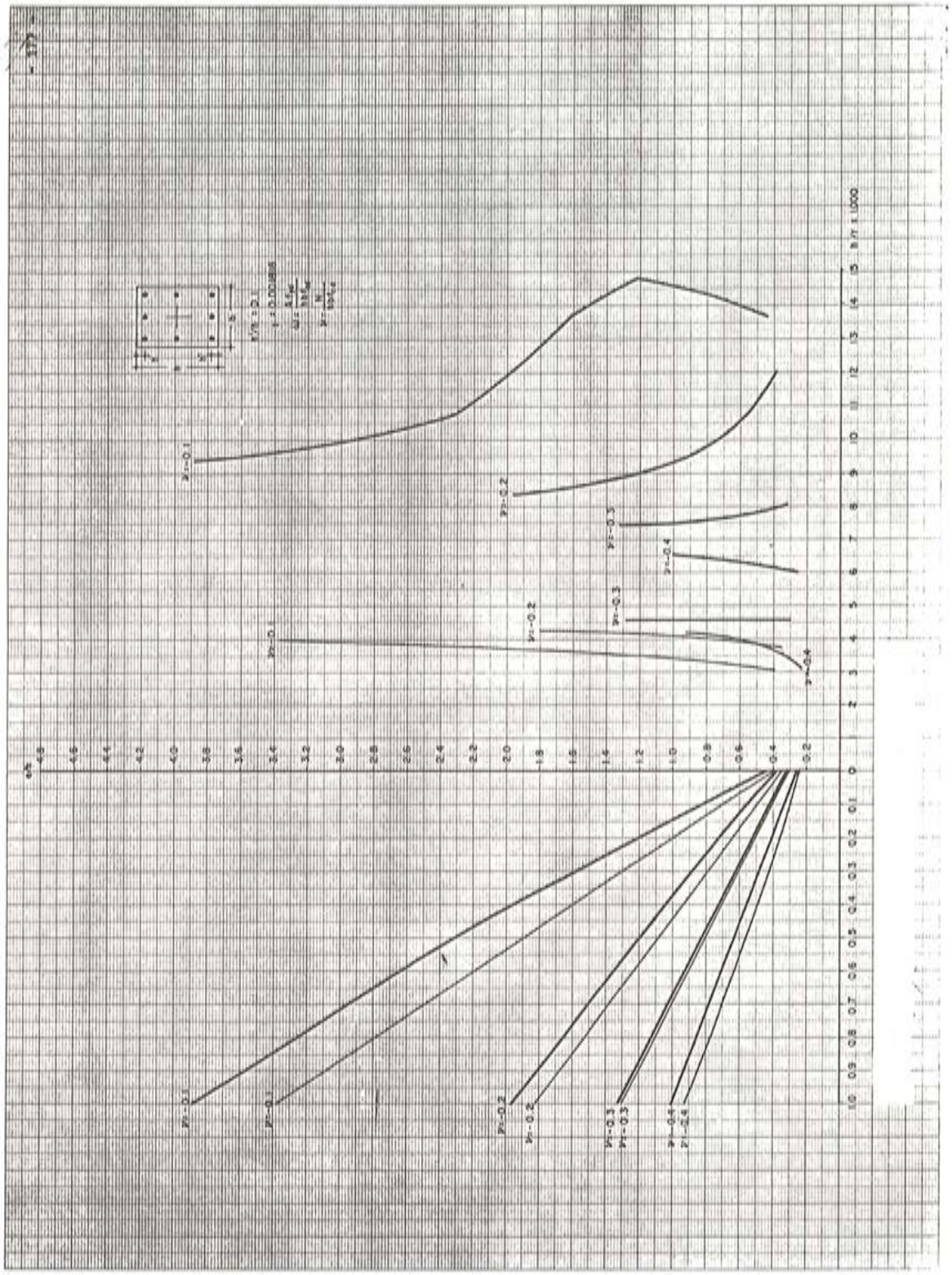


Fig. 3. Abaco de Dimensionamiento $\nu \geqslant -.4$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

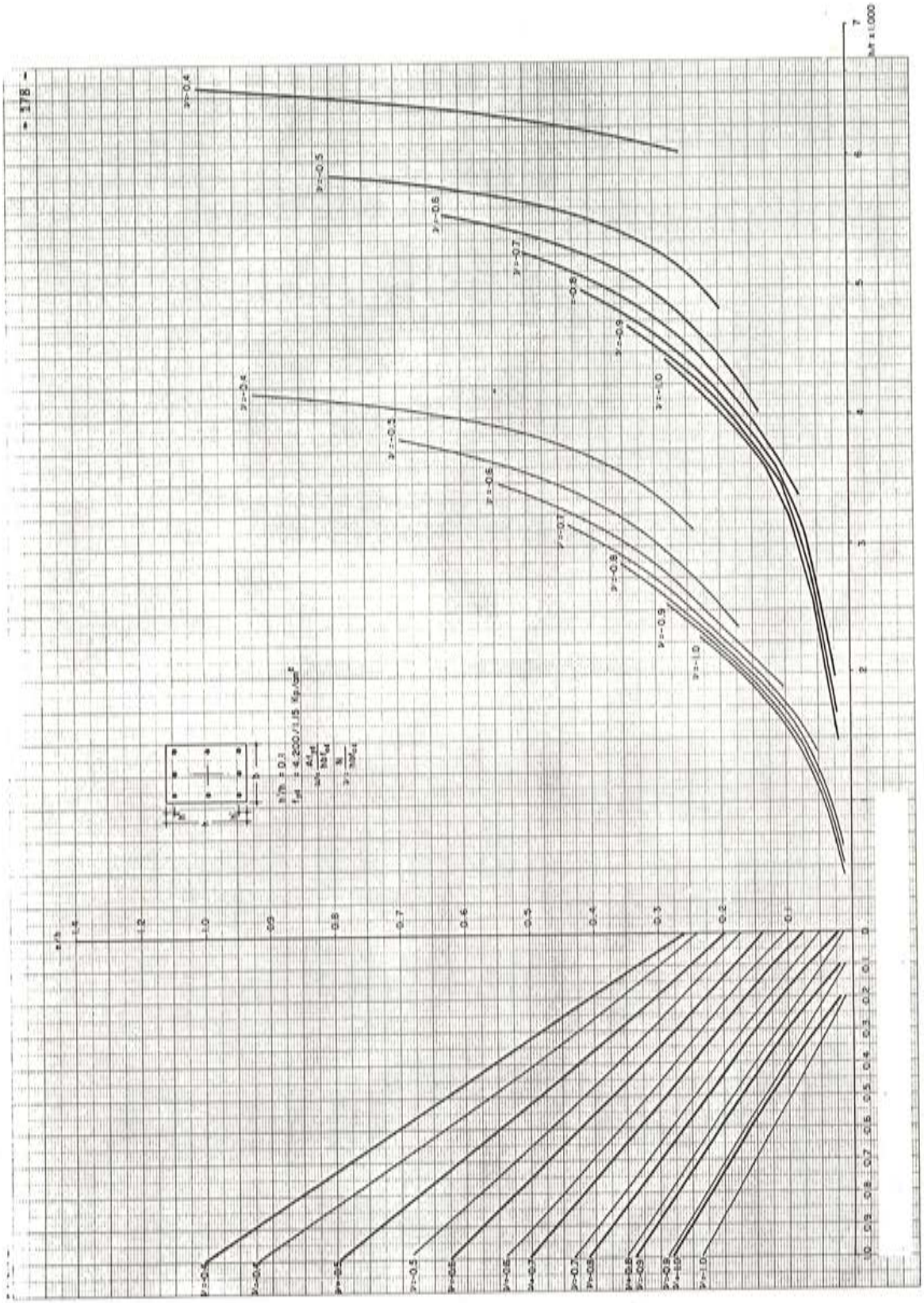


Fig. 4. Abaco de Dimensionamiento $\nu \leqslant -.4$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

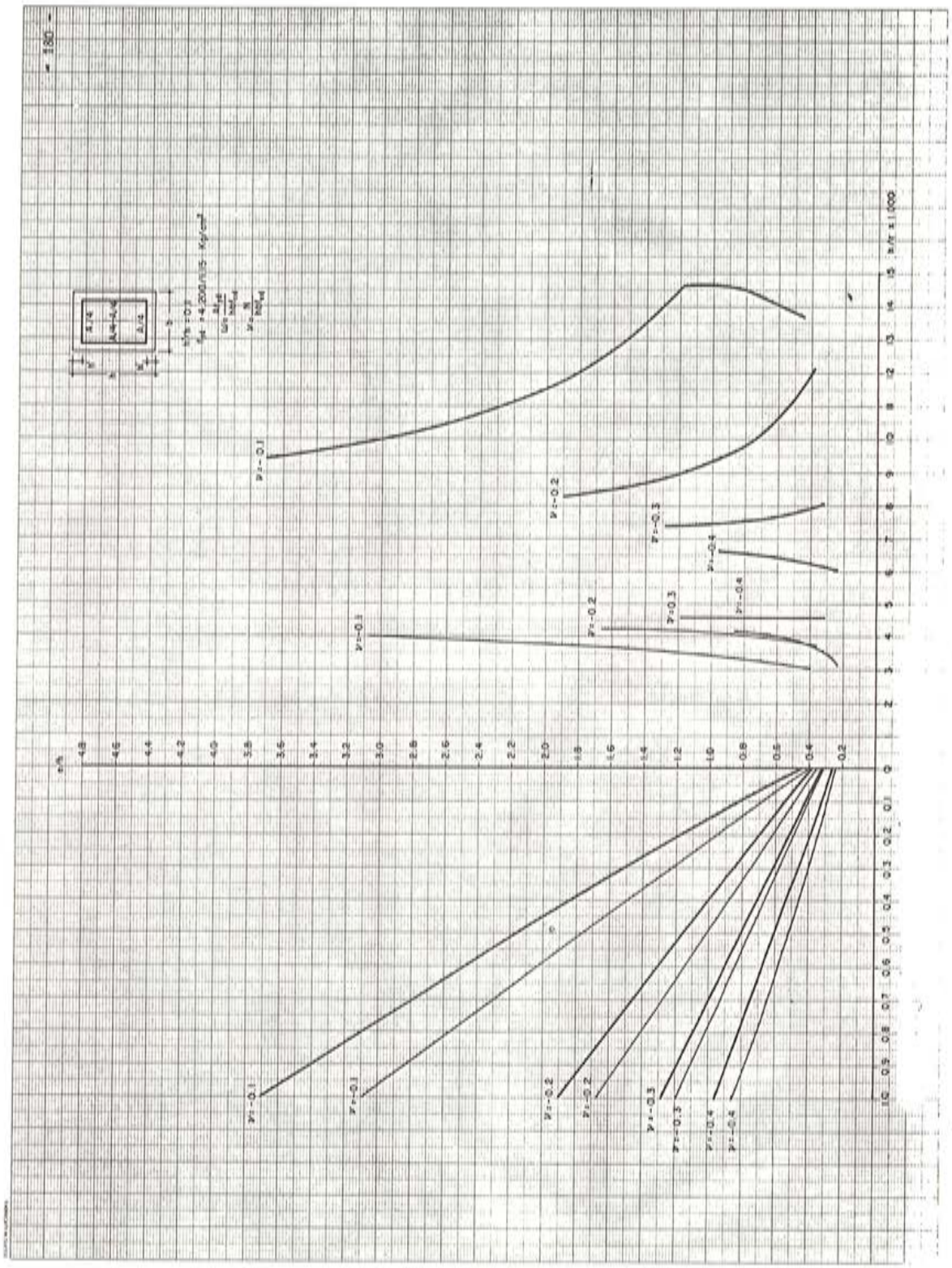


Fig. 5. Abaco de Dimensionamiento $\nu \geqslant -.4$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

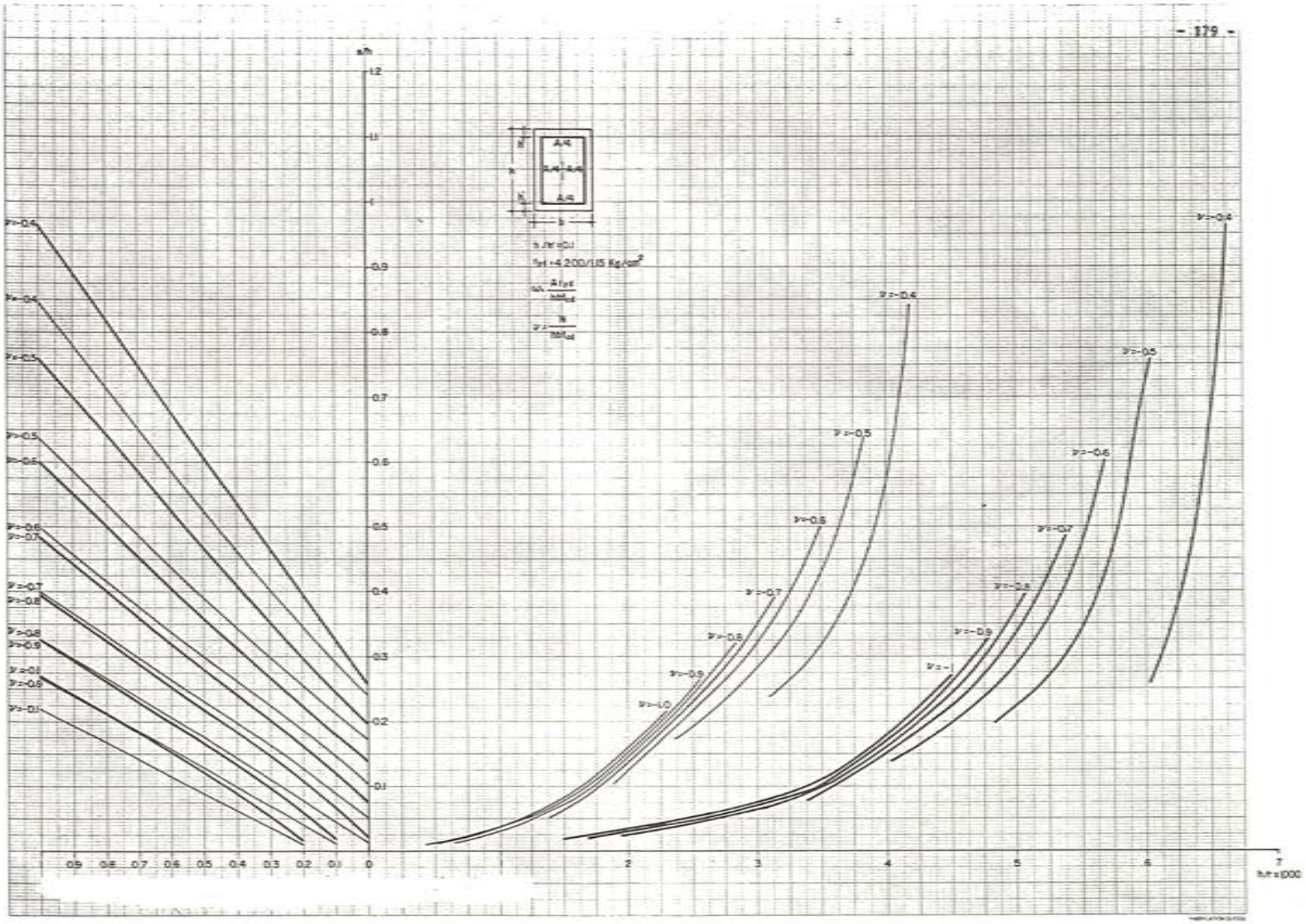


Fig. 6 Abaco de Dimensionamiento $\nu \leqslant -.4$

2. FORMA DE UTILIZACION

El procedimiento a seguir para la utilización de los ábacos de dimensionamiento puede describirse como sigue:

I - El proyectista debe calcular los parámetros adimensionales siguientes:

$\nu = N_d/bhf_{cd}$ axil reducido;

e_1/h excentricidad relativa máxima;

e_2/h excentricidad relativa máxima;

$\lambda = \ell/h$ esbeltez geométrica.

II - De acuerdo con el tipo de sección transversal elegido y el valor del axil ν, debe elegirse el ábaco adecuado.

III - En este ábaco se debe dibujar la directriz geométrica en el sistema coordenado h/r – – e/h de la parte derecha del ábaco.

Se recuerda que los ábacos permiten la utilización de cualquier directriz geométrica, por ejemplo, las propuestas por el MCM o MDS.

La directriz geométrica dibujada cortará a la curva de curvaturas de referencia de inestabilidad y agotamiento correspondiente al axil del soporte, en dos puntos.

IV - Luego, deben trazarse dos rectas horizontales desde los dos puntos de intersección anteriores hasta cortar a las curvas ω – e/h correspondientes al axil del soporte, de la parte izquierda de los ábacos, en dos nuevos puntos.

V - Las cuantías de inestabilidad y agotamiento resultan las correspondientes a las abscisas de estos últimos puntos, que pueden ser fácilmente leídas sobre el eje de abscisas ω.

VI - El menor de los dos valores de ω obtenidos, será la cuantía estricta de dimensionamiento e indicará el tipo de estado límite último (inestabilidad o agotamiento) correspondiente al soporte dimensionado.

Tal como se ha explicado en el apartado 2.5 de la primera parte, el efecto de las cargas permanentes puede ser considerado en los Abacos de Dimensionamiento propuestos, utilizando el procedimiento lineal descrito, es decir introduciendo una excentricidad debida a fluencia (e_c) como parte de la excentricidad de primer orden.

A continuación se describe el proceso de dimensionamiento para un soporte equivalente con excentricidades iguales en las articulaciones. Siguiendo el esquema del problema de dimensionamiento presentado en la primera parte, el proyectista conoce los siguientes datos:

$$\ell = 7{,}35 \text{ m}$$

$$e_1, e_2 = 12 \text{ cm.}$$

$$N = -6.750 \text{ Kp}$$

El proyectista debe elegir tipo, dimensiones, distribución de armaduras y características de los materiales de la sección transversal. Para este ejemplo se adopta como sección transversal una rectangular con armadura simétrica en caras opuestas y las siguientes características:

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

$b = 30$ cm

$h = 30$ cm

$h' = 3$ cm

$f_{ck} = 300$ Kp/cm²

$f_{yk} = 4.200$ Kp/cm²

$\gamma_c = 1,5$

$\gamma_s = 1,15$

$\gamma_f = 1,6$

Utilizando los datos anteriores se deben calcular los siguientes parámetros adimensionales:

$\nu = -0,6$

$\lambda = 24,5$

$e^1/h = 0,4$

En la figura 7 se muestra el ábaco correspondiente a la sección transversal elegida y el axil del soporte a dimensionar.

Como puede verse, en ella se ha dibujado la directriz geométrica del soporte, utilizando la hipótesis de distribución senoidal de curvaturas (MCM).

Siguiendo la construcción explicada se obtiene:

$\omega_{agotamiento} = 0,96$

$\omega_{inestabilidad} = 0,89$

La cuantía estricta de dimensionamiento resulta:

$\omega_{inestabilidad} = 0,89$

3. PRECISION Y COMPARACION CON OTROS ABACOS Y TABLAS DE DIMENSIONAMIENTO

Con objeto de estudiar la precisión de los Abacos de Dimensionamiento propuestos se ha realizado un extenso chequeo, con ayuda de ordenador, cuyos resultados se resumen en la Tabla I.

Para cada tipo de sección, se ha procedido a la comprobación de los resultados obtenidos con los Abacos de Dimensionamiento respecto de los dados por el MCM y el MDS respectivamente.

En cada comparación se han considerado 150 diagramas de interacción, correspondientes a los siguientes parámetros:

$\lambda = 0; 10; 15; 20; 25$

$e_1/e_2 = 1; 0; -1$

$\omega = .1; .2; .3; .4; .5; .6; .7; .8; .9; 1.0$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Para cada diagrama de interacción se han chequeado de 9 a 19 puntos, correspondientes a los valores de $\nu = 0; -.1; -.2; -...$, según el valor de la cuantía.

Para cada punto chequeado, el error correspondiente a los Abacos de Dimensionamiento se ha computado como:

$$e\ \% = \frac{\nu_{AD} - \nu_{M\ Base}}{\nu_{M\ Base}} \cdot 100$$

siendo:

ν_{AD} = Axil obtenido según Abaco de Dimensionamiento propuesto.

$\nu_{M\ Base}$ = Axil obtenido según Método de Base utilizado (MCM y MDS, respectivamente)

Ya que los axiles de compresión se han considerado negativos, los errores negativos corresponden a resultados del lado de la seguridad y los errores positivos corresponden a resultados del lado de la inseguridad siempre respecto a los resultados obtenidos mediante el uso del Método de Base utilizado.

El análisis de la tabla I permite obtener las siguientes conclusiones:

I - No existen errores positivos, es decir, los Abacos de Dimensionamiento siempre dan resultados del lado de la seguridad.

II - Los errores medios y desviaciones típicas siempre son pequeños. Los valores mayores encontrados son 1.1 y 2,9 por 100 respectivamente. De esta forma se puede aceptar la Curva de Curvaturas de Referencia de inestabilidad como válida, ya que ésta constituye la única fuente de posibles diferencias entre el MCR y los Métodos de Base utilizados.

III - Los errores máximos negativos son puntuales, ya que tanto la media como la desviación son siempre valores muy pequeños y se producen sólo para cuantías pequeñas.

Finalmente, en la tabla II se muestra un cuadro comparativo de los distintos ábacos y tablas de dimensionamiento existentes y los ábacos propuestos.

En el cuadro pueden distinguirse tres grupos de parámetros: en primer lugar parámetros relativos a la sección transversal, luego parámetros relativos al soporte, tenidos en cuenta, y finalmente el número de ábacos y tablas correspondientes a cada propuesta.

Respecto al primer grupo, se observan pocas diferencias. En todos los casos se ha intentado abarcar los casos más frecuentes que se presentan en la práctica.

Respecto al segundo grupo de parámetros, relativos al soporte, pueden observarse significativas diferencias entre los Abacos de Dimensionamiento propuestos y los ábacos y tablas existentes:

I - En primer lugar, utilizando los ábacos propuestos, pueden tenerse en cuenta todos los parámetros relativos al soporte de forma contínua. Con los ábacos y tablas existentes es necesario interpolar entre distintos diagramas, lo que resulta sin duda incómodo y aún peligroso.

Las interpolaciones resultan válidas sólo cuando se dispone de colecciones que presentan ábacos con variaciones pequeñas de los distintos parámetros.

II - Sólo los ábacos propuestos permiten el análisis de los soportes cortos y esbeltos. En todos los demás casos, sólo se permite el dimensionamiento de soportes esbeltos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

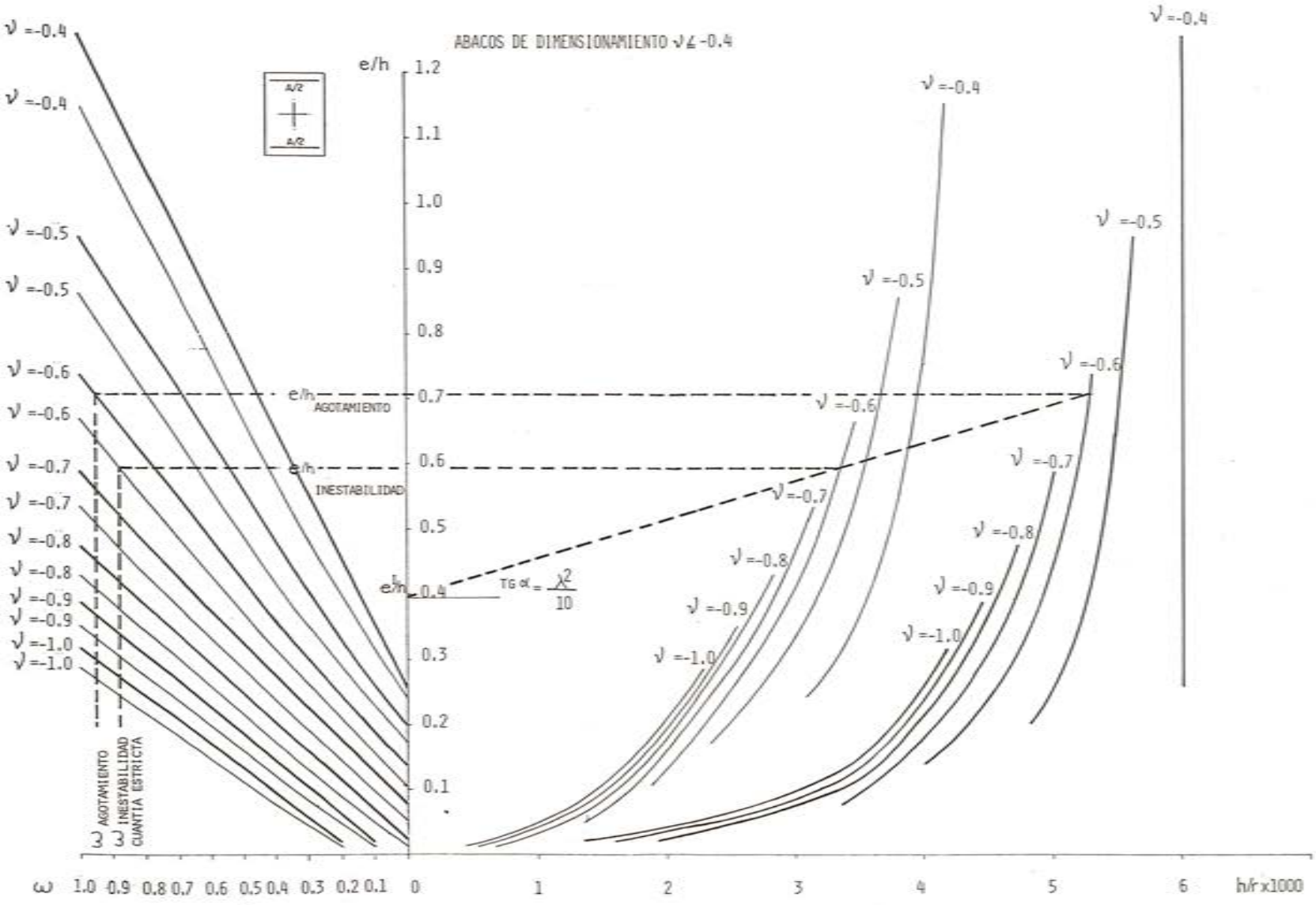
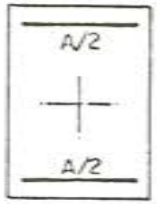
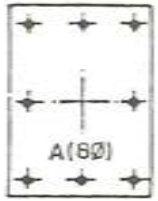
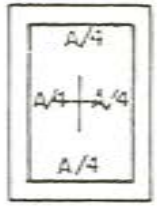


Fig. 7. Ejemplo de utilización Abacos de Dimensionamiento

TABLA I

Estudio y precisión Abacos de Dimensionamiento

e_1/e_2	1				0				-1				
SECCION TRANSVERSAL	ERROR MAXIMO POSITIVO %	ERROR MAXIMO NEGATIVO %	ERROR MEDIO %	DESVIACION STANDARD	ERROR MAXIMO POSITIVO %	ERROR MAXIMO NEGATIVO %	ERROR MEDIO %	DESVIACION STANDARD	ERROR MAXIMO POSITIVO %	ERROR MAXIMO NEGATIVO %	ERROR MEDIO %	DESVIACION STANDARD	METODO BASE
	0.0	-12	-0.2	0.8	0.0	-13	-0.5	1.5	0.0	-12	-0.5	1.5	METODO C M
	0.0	- 9	-0.3	0.7	0.0	-13	-0.5	1.5	0.0	-12	-0.5	1.5	METODO D S
	0.0	-20	-0.5	1.5	0.0	-22	-0.7	2.4	0.0	-22	-0.7	2.2	METODO C M
	0.0	-16	-0.5	1.5	0.0	-22	-0.7	2.3	0.0	-22	-0.6	2.1	METODO D S
	0.0	-24	-0.8	1.9	0.0	-24	-0.8	2.7	0.0	-22	-0.8	2.6	METODO C M
	0.0	-20	-0.8	1.8	0.0	-23	-0.8	2.6	0.0	-22	-0.8	2.5	METODO D S

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

TABLA II

Comparación entre distintos Abacos y Tablas de Dimensionamiento y los Abacos de Dimensionamiento propuestos

PARAMETROS	ABACOS O TABLAS DE DIMENSIONAMIENTO				
	CEB - FIP MANUAL OF BUCKLING	CAPRA DAVIDOVICH	BETON KALENDER 1976	ARENAS	CORRES
SECCION TRASVERSAL	RECTANG. CIRCULAR DIAGONAL	RECTANG. CIRCULAR	RECTANG. CIRCULAR	RECTANG.	RECTANG.
DISTRIBUCION ARMADURA	ANGULOS UNIFORME	ANGULOS	ANGULOS UNIFORME	ANGULOS	ANGULOS & REDONDOS UNIFORME
RECUBRIMIENTO RELATIVO	0.10 0.15	0.125	0.05 0.10 0.15	0.10	0.05 0.10 0.15
DIAGRAMA ACERO	BILINEAL	BILINEAL	BILINEAL	BILINEAL	BILINEAL
f_{yk}	420 500	400	420 220	420	420
COEFICIENTE FLUENCIA Φ	0	0 2	0	0 1 2	TODOS
ESBELTEZ $\lambda = l/d$	0-10-20 30-40	14-16-18-20 22-24-26-28 30-32-34-36 38-40-42-44	TODAS ENTRE 0-50	10-15-20 25-30-35 40-45-50	TODAS
RELACION EXCENTRICIDADES	1	1	1	1 0 -1	TODAS
NUMERO DE ABACOS	100 TABLAS	64	12	81	18
METODO	COLUMNA MODELO	COLUMNA MODELO	WINDELS KORDINA QUAST NOMOGRAMAS	DEFORMADA SENOIDAL	CURVATURAS REFERENCIA
NORMA	MC-78	BAEL-80	DIN 1045-72	EH-80	EH-80

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

III Respecto al número de ábacos o tablas que presenta cada sistema puede apreciarse una enorme diferencia respecto a los 6 ábacos propuestos. Es necesario tener en cuenta, además, que aún así en todos los demás casos es necesario interpolar con los inconvenientes comentados.

BIBLIOGRAFIA

1. Corres H. DIMENSIONAMIENTO DE SOPORTES ESBELTOS DE SECCION CONSTANTE DE HORMIGON ARMADO EN ESTADO LIMITE TULTIMO DE AGOTAMIENTO O INESTABILIDAD. METODO DE LAS CURVATURAS DE REFERENCIA. Tesis doctoral. Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid 1980.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

TABLA II

Comparación entre distintos Abacos y Tablas de Dimensionamiento y los Abacos de Dimensionamiento propuestos

PARAMETROS	ABACOS O TABLAS DE DIMENSIONAMIENTO				
	CEB - FIP MANUAL OF BUCKLING	CAPRA DAVIDOVICH	BETON KALENDER 1976	ARENAS	CORRES
SECCION TRASVERSAL	RECTANG. CIRCULAR DIAGONAL	RECTANG. CIRCULAR	RECTANG. CIRCULAR	RECTANG.	RECTANG.
DISTRIBUCION ARMADURA	ANGULOS UNIFORME	ANGULOS	ANGULOS UNIFORME	ANGULOS	ANGULOS & REDONDOS UNIFORME
RECUBRIMIENTO RELATIVO	0.10 0.15	0.125	0.05 0.10 0.15	0.10	0.05 0.10 0.15
DIAGRAMA ACERO	BILINEAL	BILINEAL	BILINEAL	BILINEAL	BILINEAL
f_{yk}	420 500	400	420 220	420	420
COEFICIENTE FLUENCIA Φ	0	0 2	0	0 1 2	TODOS
ESBELTEZ $\lambda = l/d$	0-10-20 30-40	14-16-18-20 22-24-26-28 30-32-34-36 38-40-42-44	TODAS ENTRE 0-50	10-15-20 25-30-35 40-45-50	TODAS
RELACION EXCENTRICIDADES	1	1	1	1 0 -1	TODAS
NUMERO DE ABACOS	100 TABLAS	64	12	81	18
METODO	COLUMNA MODELO	COLUMNA MODELO	WINDELS KORDINA QUAST NOMOGRAMAS	DEFORMADA SENOIDAL	CURVATURAS REFERENCIA
NORMA	MC-78	BAEL-80	DIN 1045-72	EH-80	EH-80

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

III Respecto al número de ábacos o tablas que presenta cada sistema puede apreciarse una enorme diferencia respecto a los 6 ábacos propuestos. Es necesario tener en cuenta, además, que aún así en todos los demás casos es necesario interpolar con los inconvenientes comentados.

BIBLIOGRAFIA

1. Corres H. DIMENSIONAMIENTO DE SOPORTES ESBELTOS DE SECCION CONSTANTE DE HORMIGON ARMADO EN ESTADO LIMITE TULTIMO DE AGOTAMIENTO O INESTABILIDAD. METODO DE LAS CURVATURAS DE REFERENCIA. Tesis doctoral. Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid 1980.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Estados de cargas de máxima exigencia en secciones de hormigón armado solicitadas a flexión compuesta por acciones aleatorias múltiples*

Ing. CLEMENTE VILAS

RESUMEN

Para piezas de hormigón armado solicitadas a compresión compuesta, se estudia el problema de la determinación de la máxima armadura exigida, para un conjunto de cargas de simultaneidad y valores aleatorios.

1. GENERALIDADES

Salvo casos muy particulares, como las solicitaciones típicas de la pieza llamada "ménsula corta", las de punzonamiento y otras similares, en las piezas de hormigón armado con predominio de una de las dimensiones suele ser determinante la solicitación de flexión compuesta. No escapan a esta caracterización las piezas con notorio predominio de esfuerzo axil, puesto que este estado, especialmente con la concepción unificada del método de dimensionamiento al agotamiento, no es más que un caso particular y extremo del estado general de flexión compuesta. Como es sabido, este método engloba en un tratamiento general los estados de flexión simple, flexotracción, flexocompresión y tracción y compresión puras.

Por otra parte, en la mayoría de los casos reales las acciones sobre las estructuras tienen el carácter de aleatorias, es decir, que la multiplicidad de las que tengan posibilidad de actuar sobre una estructura particular se combinarán de hecho en conjuntos de cualquier cantidad de cargas, con valores individuales cualesquiera, dentro de las intensidades máximas especificadas. Se justifica, pues, como de importancia práctica la cuestión enunciada en el título.

(*)Es preciso hacer constar que este trabajo ha sido publicado en la Revista de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas e Ingeniería de la Universidad Católica Argentina, N° 3, septiembre 1980. Agradecemos, tanto al autor como a la mencionada Universidad las facilidades que nos han dado para su publicación.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Para una carga única la sección de hormigón armado solicitada a flexión compuesta tiene una solución unívoca, como se manifiesta con evidencia en los gráficos de interacción. Si los estados de carga son varios recíprocamente excluyentes, basta, para el correcto dimensionamiento, la adopción, tanto para el borde traccionado como para el comprimido, de la máxima sección de armadura que resulte exigida en dichos estados.

En cambio, si —como se da prácticamente el caso en la mayoría de las estructuras— los varios estados de carga son de concurrencia aleatoria, la elección de la combinación de cargas de máxima exigencia no es de evidencia directa.

Definimos por estado de cargas de máxima exigencia el de la solicitación producida por la combinación de cargas factibles en las condiciones de compatibilidad recíproca impuestas, y operantes en valores tales que la armadura resistente exigida sea mayor, tanto en el borde comprimido como en el traccionado, que la similar correspondiente a cualquier otra de todas las combinaciones análogas.

A los efectos de esclarecer el problema se comienza por poner de manifiesto la siguiente particularidad de la representación de cargas en el diagrama de interacción.

Según la hipótesis habitual de correspondencia lineal entre acciones y solicitaciones, para cualquier carga concentrada actuante en un lugar determinado de una estructura, los dos esfuerzos dominantes para el dimensionamiento —momento flexor y esfuerzo axil— en cualquier lugar de dicha estructura —incluso en el mismo de acción de la carga— son proporcionales a la intensidad de ésta. Lo cual equivale a decir que la excentricidad del esfuerzo normal producido es constante o, de otra manera, que la representación de la solicitación en el diagrama de interacción está dado por un segmento rectilíneo orientado, es decir un vector, cuya pendiente es función lineal de la excentricidad y cuyo módulo es proporcional a la intensidad de la carga.

La imposibilidad de la determinación intuitiva directa de la combinación de máxima exigencia —salvo casos particulares de especial simplicidad— radica en las siguientes particularidades del problema, que se manifiestan muy claramente en el diagrama de interacción (fig. 1).

1) En una multiplicidad de estados de solicitación no simultáneos, tales como los representados por los puntos A, B y C, no es necesariamente la dupla constituída por el máximo momento flexor y su simultáneo esfuerzo axil (B) ni tampoco la de máximo esfuerzo axil y su simultáneo momento flexor (A) las determinantes del dimensionamiento, sino otro estado, tal como el representado por C, que, de existir, sea intermediario entre los otros, es decir con ambos esfuerzos menores que los máximos.
2) La acción adicional de una carga sobre un estado de solicitación (tal como el representado por D) producido por otras cargas produce efectos contradictorios, incrementando (como para V_1) o reduciendo (como para V_2) la exigencia de armadura. Esta variación de efecto es, como se ve en este ejemplo, función de la pendiente, en la representación gráfica, del vector correspondiente a la carga, es decir de la excentricidad de la solicitación respuesta a la acción de la carga. Nótese, además, que esta

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

ambivalencia de efectos se produce aún con signos iguales en ambas componentes de la dupla solicitante, como es el caso para las cargas representadas por dichos vectores V_1 (que exige un incremento de cuantía) y V_2 (que exige reducción). Si se designa como "homólogas" a estas cargas que en un mismo lugar de la estructura producen efectos de signos concordantes, se podrá decir que aún cargas homólogas pueden producir efectos contradictorios.

3) La acción adicional de una misma carga sobre combinaciones distintas de otras cargas produce también efectos contradictorios y dependientes del estado de solicitaciones producido por cada combinación. Por ejemplo: la misma carga, representada por B'B = CC' exige, operando adicionalmente sobre la combinación representada por B', una reducción de cuantía, mientras que, si la combinación básica es la representada por C, exige un incremento.

4) No existe, en general, correspondencia lineal entre la intensidad de una carga concentrada y la contribución de armadura adicional que exige. Más aún: la función armadura-intensidad de carga ni siquiera es monótona, como puede advertirse en la figura para una carga tal como la que estaría representada por BC que, creciendo desde cero, exige inicialmente reducción de cuantía, y con valores cercanos a los máximos, incremento de la misma. Esta particularidad es consecuencia de las anteriormente comentadas.

5) Consecuencia similar es el efecto eventualmente contradictorio entre la acción parcial y la total de una carga uniforme o no uniforme distribuída sobre un segmento determinado de una pieza.

El conocido método de las líneas de influencia es insuficiente por sí mismo para resolver el problema planteado, ya que sólo puede proveer, para cada estado aislado de cargas o para varios de ellos considerados simultáneamente, las dos duplas de máxima solicitación antes mencionadas. Ya quedó comentado que ninguna de éstas es, en general, de máxima exigencia ni siquiera para la carga o cargas particulares que represente. Y, naturalmente, no se obtiene por esta vía ninguna información acerca de cómo combinar en cuanto a intensidad individual ni simultaneidad de acción la totalidad de los estados posibles de cargas combinadas.

Más aún: debe notarse la posibilidad, a primera vista sorprendente, de que el uso de la dupla $M_{máx}$, $N_{máx}$, –en general irreal– puede conducir a un dimensionamiento con defecto de seguridad si se da una situación como la ejemplificada con los puntos B y B' en la fig. 1, donde el estado B, que representaría esta dupla, exige menor cuantía que el estado B', que podría representar a la dupla $M_{máx}$ con su N concomitante.

En los casos en los que el uso de la dupla $M_{máx}$, $N_{máx}$ no la disminuyera se incurriría en un arbitrario exceso de seguridad, con la consiguiente pérdida económica. Esta pérdida podría llegar a alcanzar, en circunstancias desfavorables, gran significación –del orden del 40 por 100–, como puede comprobarse fácilmente evaluando en un gráfico de interacción las diferencias de cuantías que resultarían para una sección sometida sólo a dos estados de solicitación como los representados con puntos tales como B' y E en la fig. 1.

Queda así evidenciado que es necesario establecer un procedimiento que permita estudiar el estado aquí definido como de máxima exigencia mediante la determinación previa: a) de cuáles cargas constituyen esta combinación; b) de los valores de cada una de estas cargas si, como se da predominantemente en la práctica, ellas pueden operar entre un cierto valor –generalmente nulo– y otro máximo, que suele ser el nominal reglamentario.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

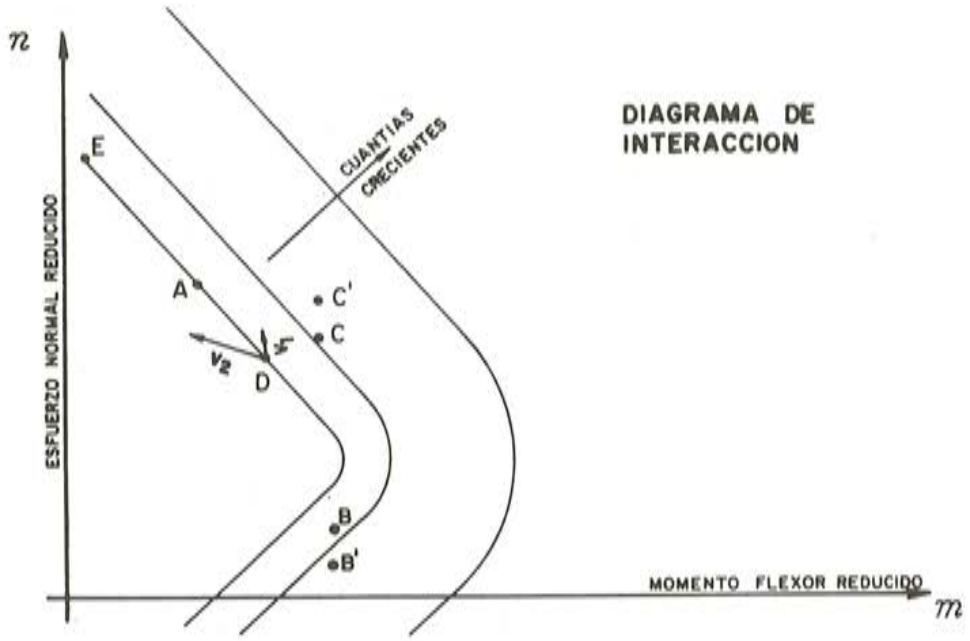


Fig. 1.

Es obvio que esta enunciación sintética de las incógnitas a determinar implica también: a) para las cargas distribuidas: sus campos o zonas de acción (que pueden no coincidir con los campos máximos de posibilidad de acción, por ejemplo el largo total de una pieza); b) para las cargas concentradas móviles: las posiciones que contribuyan a la combinación de máxima exigencia.

2. ELEMENTOS DE LA SOLUCION

Constituye la base de las soluciones que se sugieren la propiedad de las cargas concentradas, anteriormente comentada, de representar sus efectos por vectores en el diagrama de interacción. Así resulta evidente que el estado de solicitación y la consecuente armadura exigida producido por una multiplicidad de cargas concentradas en acción plena y simultánea resultará de la suma vectorial en dicho diagrama de los vectores representativos de esas cargas.

Si se tiene en cuenta el carácter aleatorio que se ha definido para las cargas, es decir, la posibilidad de que accionen en combinaciones de una o más a la vez y además la variabilidad, también aleatoria, en la intensidad de cada una (que en estas consideraciones se supone no condiciona recíprocamente) se advierte que el polígono vectorial de una combinación toma forma y magnitud cambiante con ésta y que la cantidad posible de estas combinaciones es, en general, infinita. Considerando que el número de cargas es finito y que el valor máximo de cada una también lo es, parece evidente que el conjunto de los infinitos polígonos vectoriales representativos en el diagrama de interacción de todas las combinaciones posibles de cargas se extiende por un dominio del plano con cierta extensión finita, es decir con fronteras finitas.

El estado de máxima exigencia será, pues, el determinado por el lugar de este dominio que alcance el más elevado valor de cuantía en el campo de isocuantas en que se extiende. Se postula que este lugar se encuentra en la periferia de este dominio (1).

(1) Esta postulación debe demostrarse.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

El objetivo principal de este trabajo es el de establecer procedimientos para determinar este dominio. En lo que sigue se sugiere un procedimiento designado "constructivo" (en el sentido matemático) y otro más simple, denominado "sintético".

3. SOLUCION CONSTRUCTIVA

Si, como es el caso habitual, sobre la estructura obran cargas permanentes, el estado de solicitación originado por su acción exclusiva quedará representado por un punto tal como A (fig. 2, I).

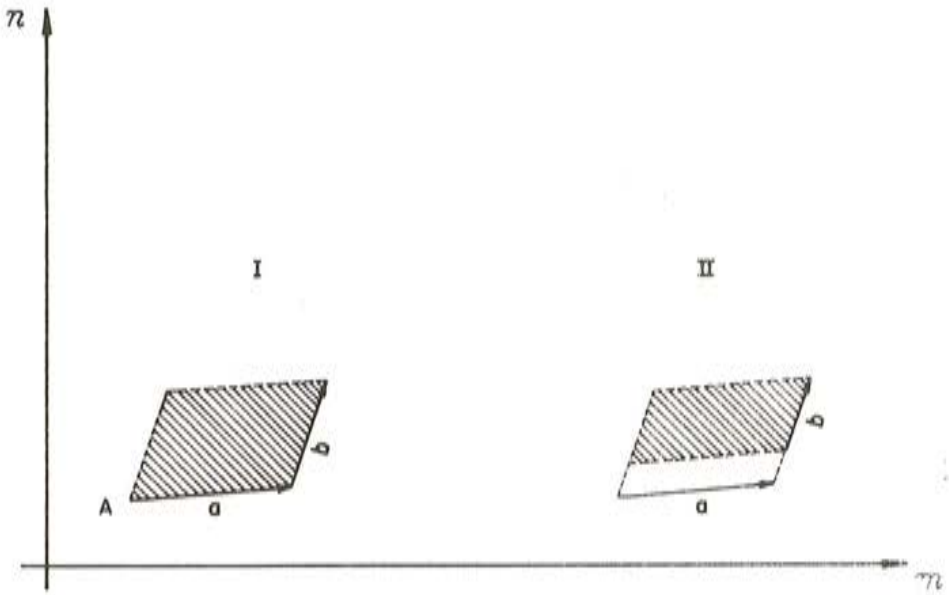


Fig. 2

Una cualquiera de las cargas de acción aleatoria se representará por un vector tal como **a**. Se supone que esta carga puede tomar todos los valores entre el nulo y el máximo, que es el representado en la figura. Si esta carga fuera única, el dominio completo de las solicitaciones sería el mismo vector **a**.

Si existe la posibilidad de acción simultánea de otra carga, tal como la representada por **b**, siendo ésta, como la anteriormente considerada, susceptible de tomar cualquier valor entre el nulo y el máximo, es evidente que el dominio completo de las solicitaciones sería el paralelogramo sombreado.

Así sucesivamente para otras cargas, si las hubiere, se obtendría el dominio completo de las solicitaciones, considerando las cargas aleatorias una a una y ampliando sucesivamente los contornos anteriormente obtenidos mediante deslizamiento del vector representativo de la carga en consideración sobre el contorno anteriormente resultante. Dado el carácter conmutativo de la suma vectorial, el dominio completo que resulte para la totalidad de las cargas será el mismo cualquiera que sea el orden en que se consideren sucesivamente. Parece evidente, asimismo, que el contorno envolvente que se obtenga en cualquier caso será siempre convexo en todo su largo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Puede aparecer la particularidad representada en la fig. 2, II. Consiste en la posibilidad de que una de las cargas, tal como la representada por **b**, tenga una cota inferior de intensidad no nula. En este caso el dominio resultante consta de dos subdominios: uno, el lineal representado por **a** y otro el bidimensional representado por la zona sombreada. Un comentario algo más general sobre la determinación de subdominios puede encontrarse en el apartado 7.

4. CARGAS CONCENTRADAS MOVILES

Una carga de intensidad y dirección fijas pero de posición móvil sobre una pieza de una estructura producirá solicitaciones (momento flexor y esfuerzo axil) que varían, en general, según leyes distintas. Por consiguiente, tanto la excentricidad como la intensidad de la solicitación, serán variables con el corrimiento, y el lugar geométrico representativo de esta variabilidad será un segmento curvilíneo tal como δ (fig. 3, I).

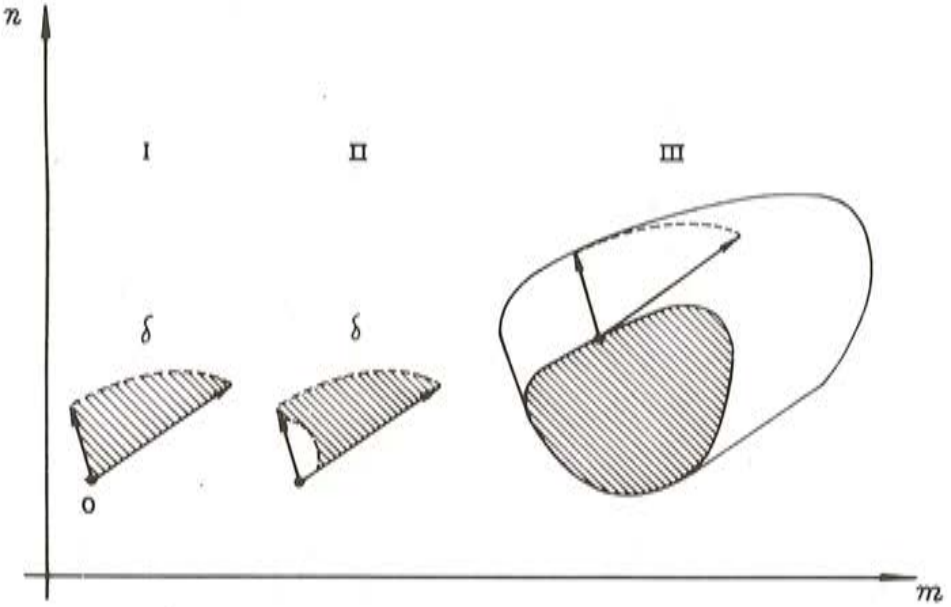


Fig. 3

Si se considera que la carga puede, además, tomar valores variables entre el nulo y otro máximo, el dominio de solicitaciones correspondiente a la carga toma la forma de la zona sombreada I, y si este campo de variabilidad tiene un tope inferior no nulo resultará un dominio tal como II.

La contribución adicional que la acción de una carga móvil agrega a un dominio base definido por otras cargas se obtiene en este procedimiento constructivo por traslación paralela del triángulo curvilíneo, con apoyo en el vértice O, sobre el contorno del dominio base (fig. 3, III). La ampliación de dominio que así resulte puede no ser la de una simple traslación paralela de contorno, como en el caso de la carga adicional de posición fija y valor variable.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

5. COEFICIENTES DE MAYORACION VARIABLES SEGUN EL TIPO DE COMBINACION DE CARGAS

Tanto el American Concrete Institute como la instrucción española consideran distintas combinaciones de cargas, caracterizando a cada una de aquellas por la que consideran predominante. Así resulta que, en distintas combinaciones una misma carga es afectada por coeficientes de mayoración distintos. La tendencia más reciente del Comité Europeo del Hormigón parece similar.

Según el método aquí propuesto los vectores representativos de las cargas resultan así de distinta magnitud según el tipo de combinación. Por lo tanto, para cada uno de estos tipos resultarán construcciones poligonales distintas. En la determinación del dominio de las solicitaciones no parece posible evitar la ejecución de estas múltiples construcciones poligonales. El dominio definitivo de las solicitaciones será el que resulte como envolvente de los parciales así hallados.

6. CONDICIONAMIENTO RECIPROCO EN LA CONCURRENCIA DE CARGAS

Las condiciones según las cuales las cargas concurren o se excluyen recíprocamente se tendrán en cuenta en esta metodología considerando en la formación de los polígonos vectoriales la correspondiente concurrencia o exclusión de los vectores representativos. Resultarán así, como para la variante comentada en el apartado anterior, múltiples construcciones poligonales cuya envolvente será necesario obtener para definir el dominio completo de las solicitaciones.

Es obvio que estas condiciones no son más que casos extremos en el enfoque probabilístico comentado en el apartado anterior, en cuyos casos la probabilidad de concurrencia se hace, o bien nula, para la exclusión absoluta de concurrencia, o bien igual a la unidad, para la concurrencia exigida.

7. SOLUCION SINTETICA

El procedimiento, relativamente laborioso, de la solución constructiva, puede simplificarse de tal manera que no sea necesario pasar por las etapas de ampliación progresiva de dominio que resultan de la consideración sucesiva con efectos acumulativos de todas las cargas actuantes. En lo que sigue se indica como proceder prácticamente para aplicar esta solución.

Se parte de la representación a partir de un mismo punto A y en ejes paralelos a m y n (fig. 4, I), de todos los vectores 1, ... , 8 representativos de los efectos de las cargas en la sección estudiada.

En el diagrama de interacción (fig. 4, II) se determinan las cuatro posiciones de abscisas y ordenadas extremas (I + II), (II + III), (III + IV) y (IV + I). La primera de estas posiciones se obtiene como extremo de la suma vectorial de todos los vectores de los cuadrantes I y II llevada a partir del punto O, representativo de las cargas permanentes. Análogamente se procede en los otros casos.

A continuación se determinan las cuatro ramas del polígono de frontera del dominio que se busca. La rama desde (III + IV) hasta (I + IV), con ubicación relativa con relación a O como el cuarto cuadrante con respecto a A, se define con los vectores no pertenecientes a dicho cuadrante ni a su simétrico II, es decir con los ubicados en los cuadrantes I y III. Estos

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

vectores 1, 2, −5, −6 se llevan acumulativamente desde el origen de rama (III + IV), ya sea con su signo (los del cuadrante I) o con signos contrarios (los del cuadrante III), como correspondería interpretando algebraicamente la designación (III + IV) de dicho origen y la designación (I + IV) del extremo de rama. En símbolos:

$$\text{Extremo} - \text{Origen} = (\text{I} + \text{IV}) - (\text{III} + \text{IV}) = (\text{I} - \text{III})$$

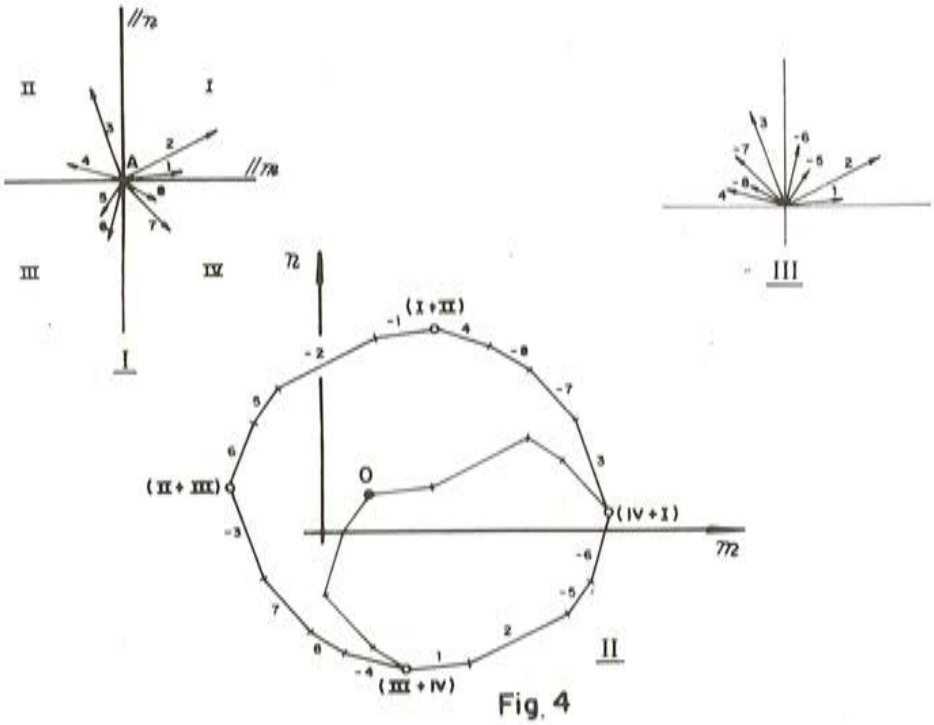


Fig. 4

Esta última ecuación simbólica expresa que para pasar de origen a extremo de rama se debe considerar, como se hizo, los vectores del cuadrante I con su signo y los del cuadrante III con signos contrarios. Es importante notar que el orden en que todos estos vectores deben ser considerados es el de argumentos crecientes. Las restantes ramas se han determinado con procedimientos similares.

El método puede expresarse en forma más reducida así:

1° Determinar el punto de mínima ordenada (III + IV) como extremo del polígono de los vectores de los cuadrantes inferiores.

2° A partir de dicho punto trazar la rama derecha (III + IV), (IV + I), (I + II) considerando, en la sucesión de argumentos crecientes, todos los vectores tal cual están representados en la fig. 4, III, es decir, los pertenecientes a los cuadrantes superiores con su signo y los restantes con signos cambiados.

3° Trazar la rama izquierda (I + II), (II + III), (III + IV) análogamente, pero con vectores de signos inversos a los considerados para la derecha, cerrándose así el polígono.

La frontera del dominio que así se obtiene es siempre convexa en toda su extensión.

Puede plantearse la cuestión (fig. 5), ya comentada en la exposición sobre el procedimiento constructivo, de que algunas de las cargas tengan una cota inferior de intensidad no nula. En esta figura, los vectores a, b, c dibujados aparte, tienen un trazo de mayor grosor

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

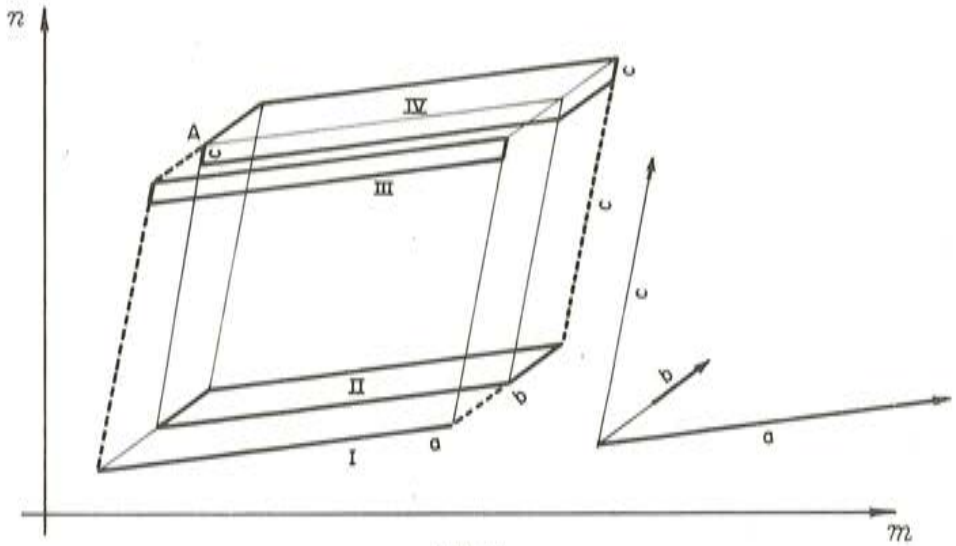


Fig. 5

que corresponde al intervalo en que puede variar la intensidad de la carga. El vector a representa una carga de intensidad mínima nula, por lo que está dibujado totalmente con trazo grueso.

En casos como éste, el dominio completo, que correspondería para cargas con intensidad mínima nula, de contorno completado con trazos punteados, pierde ciertas zonas y se crean así subdominios.

En este ejemplo, el subdominio I es unidimensional y los subdominios II, III y IV son bidimensionales. Debido a su simplicidad, la determinación de subdominios en este caso es sencilla, razonando para determinarlos como se comentó en el proceso constructivo. Debería determinarse un procedimiento de validez general, para este método sintético, mediante el cual establecer las zonas lacunares en el dominio total.

Cabe agregar que este procedimiento pone de manifiesto que, si bien el agregado de la posibilidad de acción de una carga a una combinación de otras amplía siempre el dominio primitivo, no por ello ocurrirá necesariamente que resulte incrementada la exigencia de armadura. Ello sólo tendrá lugar cuando la ampliación se efectúe involucrando isocuantas de mayor valor.

8. SOLUCION SINTETICA: SU JUSTIFICACION

Sin pretender el carácter de demostración matemática, se justificará intuitivamente, con inspiración en el principio de inducción completa, el procedimiento sintético.

Para ello se muestra:

1° Que, si el procedimiento es correcto para una poligonal de n lados, también lo es para otra de n + 1 lados;

2° Que el procedimiento es correcto para n = 1. La fig. 6 muestra el dominio de los n vectores a_1, a_2 .... a_n para el que se admite que el procedimiento es correcto.

El agregado en la poligonal vectorial de un nuevo vector a_k con la condición de incrementar en algunas zonas el área del dominio sin disminuir esta área en ninguna otra zona no podría ejecutarse en una posición tal como a'_k anterior a la de un vector (tal como a_2) de pendiente menor (con referencia al eje coordenado horizontal) porque reduce el dominio (al menos en la zona inmediatamente siguiente a a_k).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

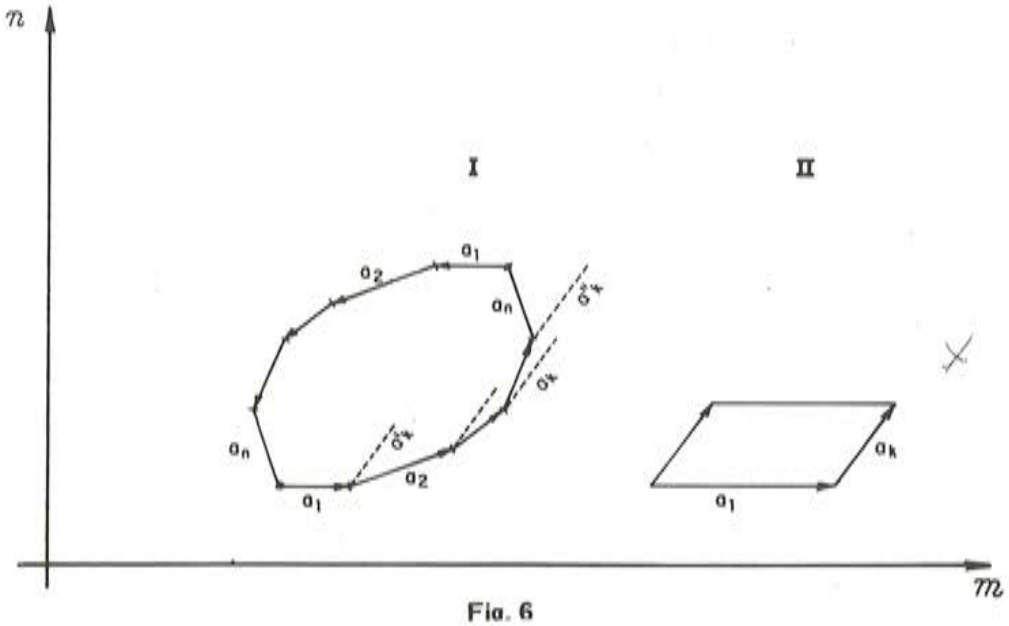


Fig. 6

En cambio, el agregado en una posición tal como a''_k, posterior a la de un vector de mayor pendiente, incrementaría el dominio en lo que depende de todos los vectores que siguieran al agregado sin reducir este dominio en ninguna zona. El efecto es similar cualquiera que sea la posición de intercalación, pero la zona implicada es tanto mayor cuanto más retrógada sea esta posición.

La posición óptima de intercalación es, pues, tal como a_k en la figura, una antepuesta a los vectores de mayor pendiente y pospuesta a los de menor pendiente. Es decir que la ordenación por pendientes de todos los vectores, incluso el agregado a_k, produce el dominio de área máxima. Estos razonamientos para la rama inferior limítrofe del dominio pueden extenderse análogamente para la otra.

Es evidente, por la simplicidad del caso, la corrección del procedimiento para una extensión del dominio de $n = 1$ a $n = 2$, como se muestra en la fig. 6, II, con lo que se cumple también el segundo paso de la justificación.

Lo expuesto presupone un contorno poligonal. Si fuera curvilíneo o mixto (como puede resultar, según se comentó, debido a la influencia de las cargas distribuídas y/o de las concentradas móviles) la justificación puede darse por extendida concibiendo las fronteras curvilíneas como límites de poligonales con lados de longitudes tendentes a cero.

En una demostración rigurosa debería considerarse, asimismo, el caso en que la carga de acción eventual supuesta agregada a una combinación de otras fuera distribuida o concentrada móvil, las cuales, en vez de estar representadas por un vector, tendrían representación genéricamente poligonal con lados rectos o curvos.

9. ACCION PARCIALIZADA DE LAS CARGAS DISTRIBUIDAS

Como se dijo, las cargas distribuíídas pueden actuar segmentariamente, es decir sólo sobre algunas zonas de su campo total, combinando esta posibilidad con la de tomar valores cualesquiera entre los mínimos (nulos o no) y los máximos para cada segmento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Se justifica la consideración de estas posibilidades –que implican una carga total sobre una pieza menor que la máxima–, teniendo en cuenta las particularidades del diagrama de interacción comentadas en el apartado 1, según las cuales algunos estados parciales de cargas pueden dar solicitaciones más exigentes que las producidas por acciones mayores.

Este caso es conceptualmente reducible al de cargas concentradas si suponemos el campo total de acción a (fig. 7) de la carga distribuida subdividiendo en segmentos iguales a_1, a_2, ... a_n, y cada uno de éstos suficientemente pequeño como para poder suponer su carga, sin error significativo, de magnitud $F = q\ a/n$ como concentrada en su centro.

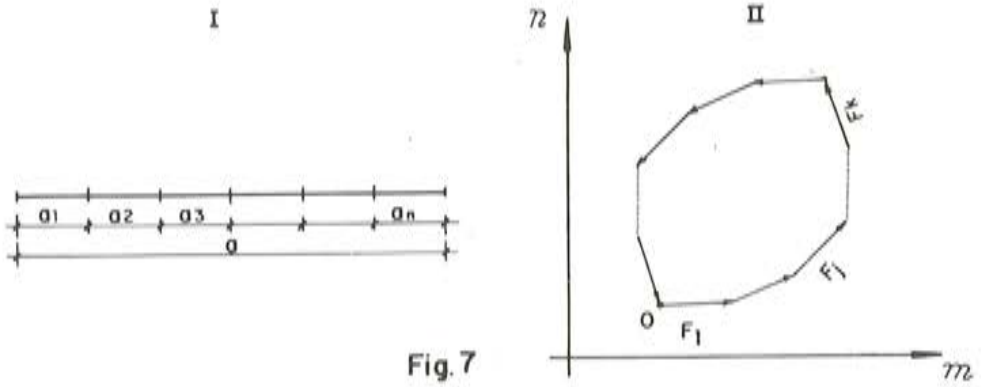


Fig. 7

Así resultará que la carga F_1 del primer segmento a_1 origina un vector de ampliación de dominio tal como F_1 en la figura. Otro tanto ocurrirá con las otras cargas F_2, ..., con la particularidad de que, en general no coincidirán, para los respectivos vectores representativos, ni las magnitudes ni las pendientes (las magnitudes no coincidirán por ser distinta la influencia para el lugar de la estructura donde se estudia el efecto de la carga distribuída; las pendientes tampoco, debido a que también las excentricidades resultan cambiantes). La aplicación a este problema parcial de ampliación de dominio del procedimiento sintético originará una figura trapezoidal como la representada en la fig. 7, II. Y los efectos globales de ampliación de dominio consecuencia de la posible acción parcializada de la carga distribuida en todo el largo a de la pieza quedarán representados por dicha figura trapezoidal, la que, por deslizamiento perimetral sobre la figura similar imputable a otras cargas, proporcionará estos efectos. En rigor, la consideración de este problema en términos infinitesimales daría una figura de contornos curvilíneos en lugar de poligonales.

Estas consideraciones llevan a postular la siguiente propiedad: considerando una combinación de cargas básica y otra adicional, cada una caracterizada por su dominio, el dominio conjunto correspondiente a la totalidad de las cargas puede obtenerse por deslizamiento, con apoyo en su punto base (tal como O en la fig. 7), del dominio agregado sobre el contorno de frontera del dominio básico. De ser cierta esta postulación debería verificarse el carácter conmutativo en las calificaciones de "básico" y "adicional" para los dos sistemas de cargas.

10. LA PILA DE PUENTE QUE APEA TRAMOS ISOSTATICOS

A pesar de las limitaciones sobre la validez de esta metodología que han quedado expuestas, se ensaya en lo que sigue la aplicación de la misma al caso, muy frecuente, del título, buscando que una aplicación concreta pueda facilitar, para quienes tengan interés en el problema, un análisis más profundo de las cuestiones involucradas en este trabajo.

No se aplican los criterios, comentados en el apartado 5, que toman distintos coeficientes de mayoración según el tipo de acción predominante.

El lugar estudiado es el pie de la pila.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

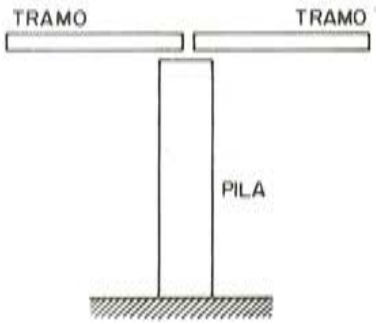


Fig.8

10.1. Las particularidades de construcción o montaje de la estructura

En fases de construcción esta estructura, como cualquier otra, puede tener una configuración distinta de la definitiva. Por ejemplo, cuando se encuentra montado un solo tramo o cuando, para este estado, se procede al lanzamiento del otro tramo. Es obvio que cada una de estas configuraciones debe ser estudiada separadamente y que no existe, salvo casos muy particulares, una metodología general que pueda resolver la cuestión en forma unificada. Se trata, simplemente de estructuras distintas, aunque tengan algo en común.

Queda definido, pues, que se estudia aquí la pila con ambos tramos montados y estando el puente en servicio. El lugar estudiado es el pie de la pila.

10.2. Las modalidades de concurrencia de cargas

El conjunto de cargas que actúa sobre una estructura importante es por lo general muy numeroso. Además estas cargas suelen no ser completamente independientes en su posibilidad de concurrir simultáneamente sobre la estructura. Es por ello necesario tratar de caracterizar nítidamente estas posibilidades. Las mismas pueden clasificarse de este modo:

- Concurrencia: es la característica de una carga de coincidir simultáneamente con otra en su acción sobre la estructura.
- Dependencia: es la característica similar cuando entre ambas cargas concurrentes existe prevalencia de una, de acción dominante o promotora, sobre la otra, que viene a resultar promovida o provocada por la presencia de la primera.

  No debe interpretarse esta dependencia como necesariamente causal, sino basta que se dé en la realidad o por las hipótesis de trabajo para que según la metodología que aquí se propone, deba considerarse efectiva. Por ejemplo: en la lista de cargas del apartado siguiente, la acción de frenado de vehículo sí es necesariamente dependiente de la presencia sobre la estructura de la carga del mismo vehículo, en tanto que la carga (11), que implica una reducción de valor de la acción básica del viento sobre la estructura cuando sobre la misma actúa una sobrecarga, es puramente convencional.
- Exclusión: cuando la acción simultánea de cargas se considera imposible.

Según estas definiciones, la concurrencia es una característica de las cargas que se manifiesta con reciprocidad entre ellas mientras que la dependencia establece una diferenciación que, causal o convencional, es considerada en esta metodología como jerárquica en el sentido de que la carga de mayor jerarquía se considera como operante con independencia de la subordinada, lo que no se cumple recíprocamente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Debe interpretarse que distintas condiciones de concurrencia no producen efectos acumulativos. Por ejemplo: las cargas (8) (9) y (11) quedan ligadas en subconjunto por una condición de concurrencia y otro tanto ocurre con el subconjunto (8), (10) y (11). Pero no todas ellas deben concurrir conjuntamente.

Con relación a la condición general de dependencia, deben distinguirse dos posibilidades:

- Dependencia indiferente: cuando una carga depende en su acción de la acción simultánea de alguna de otras cargas;
- Dependencia concurrente: cuando la carga subordinada verifica esta dependencia con relación a la totalidad de las cargas subordinantes.

Todas estas definiciones pueden parecer inicialmente artificiosas pero es indudable que, del conjunto total de cargas posible de obrar sobre la estructura es necesario extractar con metodología rigurosa los subconjuntos –llamados en este trabajo "combinaciones"– definidos por la posibilidad de acción simultánea de sus integrantes. En el cálculo personal estos conceptos pueden quizá ser manejados correctamente por vía intuitiva, pero en el cálculo automático la metodología debe expresarse en organigramas absolutamente complejos y correctos.

Puede también arguírse en favor de una mayor exigencia de rigor que la habitualmente aplicada en estos análisis, que las condiciones reglamentarias y de la realidad física llevan a planteos necesariamente completos. En una primer y elemental consideración de una estructura tan simple como la que aquí es utilizada como ejemplo puede resultar sorprendente que dichas exigencias lleven a un conjunto tan numeroso de cargas, condicionadas a su vez, recíprocamente, con multiplicidad de relaciones.

Caben, asimismo, las aclaraciones que siguen.

1° La forma en que se han expresado las condiciones de concurrencia de cargas no es la única posible. Así por ejemplo, el hecho de que, según las disposiciones reglamentarias, la acción del viento sobre las estructuras exclusivamente se valore en 250 kg/m² mientras que cuando las mismas soporten sobrecarga esta acción se reduzca a 150 kg/m², se ha resuelto considerando la sobrecarga (11) como una acción más aunque de efectos descargantes. Es decir que, respecto de las cargas (8), (9), (10), (11) se pueden dar las siguientes combinaciones:

(8)
(8)+(9)+(11)
(8)+(10)+(11)
(8)+(9)+(10)+(11)

Si, en cambio, la carga (11) hubiera sido definida como aditiva (por el complemento de 150 a 250 kg/m²), resultarían las siguientes combinaciones:

(8)+(11)
(8)+(9)
(8)+(10)
(8)+(9)+(10)

Y para ambas posibilidades las condiciones de concurrencia que deben establecerse son diferentes. Pero, cualquiera que sea la modalidad seguida, el cuadro de cargas debe contener la información necesaria para que resulten correctamente las condiciones de cargas que se puedan formar siguiendo automáticamente las condiciones establecidas de concurrencia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Resulta obvio, por otra parte, que estas condiciones de concurrencia no hacen más que expresar las excepciones al estado de completa aleatoriedad en la simultaneidad de cargas (en este estado las cargas de acción aleatoria ((2) y siguientes) concurrirían en cualquier cantidad y formado todas las combinaciones posibles).

2° Convencionalmente se considera el efecto descargante de la carga (11) como obrante sobre ambos tramos aunque la sobrecarga pese sobre uno solo de ellos.

3° También por convención, y a fin de simplificar el análisis, no se considerará el efecto total de la carga (9) como dependiente de la superficie expuesta de la sobrecarga, como, en rigor tendría que hacerse, sino con posibilidad aleatoria de actuar con valores entre el nulo y el máximo nominal, con la única condición de dar nominalmente como obrante una de las dos sobrecargas (2) ó (3). Con criterio similar se procede respecto de la carga (10).

La expresión de todas estas condiciones de concurrencia resultaría unificada pero menos sintética volcando el cuadro entero de cargas en forma de diagrama de flujo como los que se usan en computación.

Para todas las cargas aleatorias (la totalidad menos la (1)) se supondrá que su rango de variación es el total desde el valor nulo hasta el máximo nominal.

10.3 CARGAS

(1) Peso propio total (del pilar y transmitido por la superestructura).

(2) Sobrecarga de multitud en el tramo izquierdo.

(3) Sobrecarga de vehículo en el tramo izquierdo.

(4) Efecto complementario de (2) cuando se considere su acción simultánea con (3).

(Su valor es negativo y corresponde a la carga inexistente de multitud en la superficie ocupada por el vehículo).

(5) Sobrecarga de multitud en el tramo derecho.

(6) Sobrecarga de vehículo en el tramo derecho.

(7) Efecto complementario de (5) cuando se considere su acción simultánea con (6).

(Vale la misma observación que para (4)).

(8) Componente longitudinal de la acción básica del viento sobre la pila y los tramos.

(Se considera componente longitudinal la de la traza de la obra. Sólo tiene valor significativo en puentes desviados).

(Es acción básica la prescrita reglamentariamente (250 kg/m²) sobre la estructura cuando no incide sobre ella la sobrecarga).

(9) Componente longitudinal de la acción del viento sobre la sobrecarga en el tramo izquierdo.

(Valorada en 150 kg/m² según el reglamento).

(10) Idem, para el tramo derecho.

(11) Componente longitudinal complementaria de (8) cuando la sobrecarga actúa sobre uno o ambos tramos.

(Su valor es negativo, se evalúa en 100 kg/m² actuando sobre la superficie expuesta de ambos tramos y corresponde a la diferencia prescrita reglamentariamente que rebaja de 250 a 150 kg/m² la acción básica).

(12) Frenado de vehículo en cualquiera de los dos tramos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

(13) Efecto sísmico sobre la totalidad de las cargas permanentes.
(14) Efecto de la contracción de fragüe.
(Estimado como un valor único para la acción conjunta proveniente de ambos tramos).
(15) Efecto similar para la fluencia lenta.
(16) Efecto similar para las acciones térmicas.
(17) Componente normal a la pila del efecto de choque de vehículo o embarcación.

En este cuadro valen los siguientes símbolos:

SIMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLOS
	Dependencia concurrente	(4) depende conjuntamente de (2) y (3).
	Dependencia indiferente	(9) depende de (2) o de (3).
	Concurrencia	(9), (10) y (11) sólo concurren conjuntamente.
	Exclusión	(3) y (6) no concurren.

10.4. Determinación del estado de máxima exigencia

Aún repitiendo conceptos anteriormente expresados, conviene recordar que el problema planteado consiste en determinar en el diagrama de interacción el estado múltiple de cargas que exija la máxima armadura en la sección. Este estado quedará determinado por el punto del dominio de los estados de solicitación que alcance un máximo valor de cuantía en dicho diagrama. Este dominio, a su vez, es el resultante del cumplimiento de las condiciones básicas siguientes:

1° La carga permanente (1) se considerará siempre obrante.

2° Las restantes cargas, todas consideradas de acción aleatoria, deben suponerse concurriendo en cualquier cantidad.

3° Esta concurrencia es aleatoria y no interdependiente, salvo las que se han llamado "condiciones de concurrencia".

4° Para cualquier estado de cargas que así pueda considerarse obrando sobre la estructura, las cargas intervinientes combinarán sus valores en todas las infinitas formas que resulten de considerar para cada una un valor cualquiera dentro de su rango posible, sin dependencia entre este valor y cualquiera de todos los otros. Ya se comentó en el apartado anterior que esta independencia es, para algunos casos, convencional y no corresponde rigurosamente a la realidad.

Según el procedimiento expuesto en el apartado 7, el dominio que se busca tendrá su contorno determinado por el conjunto de vectores que, en el diagrama de interacción, representen las cargas (para mejor decir: todas las combinaciones de cargas que resulten de la aplicación de las condiciones de concurrencia).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Si las condiciones de concurrencia no incluyeran ninguna condición de exclusión, el conjunto de vectores determinante del dominio que se busca determinar sería el de todas las cargas. Existiendo, en cambio, algunas condiciones de exclusión, no resultará un solo polígono vectorial de cargas sino tantos como surjan de la aplicación de estas condiciones y en cada uno de éstos resultarán excluídas algunas de las cargas.

En este ejemplo la aplicación de las condiciones de concurrencia produce sólo las siguientes dos combinaciones de cargas:

Cargas	Combinac.		Cargas	Combinac.	
1	x	x	10	x	x
2	x	x	11	x	x
3		x	12	x	x
4		x	13	x	x
5	x	x	14	x	x
6	x		15	x	x
7	x		16	x	x
8	x	x	17	x	x
9	x	x			

En general, las distintas combinaciones que así resulten producirán polígonos vectoriales, es decir dominios, distintos, aunque con zonas comunes. El estado de máxima exigencia será el que resulte para el dominio de periferia envolvente, como lo ilustra la fig. 9 para el caso de dos combinaciones.

De estas consideraciones se deduce que, en la práctica las condiciones que se han llamado de dependencia concurrente, de dependencia indiferente y de concurrencia no juegan por sí mismas ningún papel en la determinación del dominio de las solicitaciones, ya que este se determina con todas las cargas que no resulten afectadas por alguna condición de exclusión. Sin embargo, pueden influir por vía derivada si algunas condiciones de exclusión producen "por arrastre" la eliminación de cargas subordinadas.

Tal es el caso siguiente (que no tiene relación con el ejemplo general que se sigue), en el que la condición de exclusión recíproca de las cargas (2) y (4) provoca también, si la carga (4) es excluída, la exclusión "por arrastre" de la carga (6) (en la combinación I).

Cargas	Combinaciones	
	I	II
1	x	x
2	x	
3	x	x
4		x
5	x	x
6		x

La consideración de las condiciones de exclusión no sería necesaria en un diseño no estricto, porque, prescindiendo de éstas, si las hay, es decir trabajando con todas las cargas, se obtendrá un dominio que contendrá totalmente al dominio estricto. Pero, razones de economía aconsejarán determinar este último.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

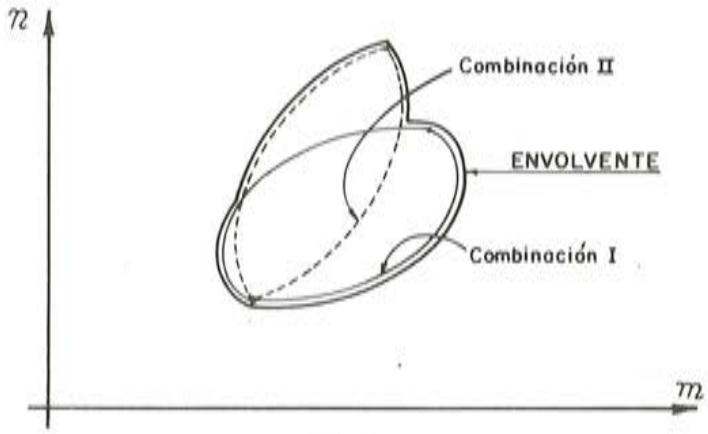


Fig. 9

Pasando ahora concretamente al cálculo numérico del ejemplo, los cuadros siguientes muestran los detalles respectivos.

Las cargas son las definidas en el apartado 10. 3. En el cuadro están consideradas ordenadamente en el sentido levógiro + m + n. La columna extrema derecha tiene por objeto facilitar esta ordenación.

Se han efectuado agrupamientos de cargas (tal como (9)+(10)+(11)). Al respecto debe aclararse:

1° En principio, y según el criterio de que cargas menores pueden originar mayores exigencias, no deben agruparse las cargas:

2° Constituye excepción el caso, como en este ejemplo, en el que las cargas tengan representación por vectores de dirección y sentido coincidentes en el diagrama de interacción.

3° La validez de esta excepción se limita por la condición de que las cargas tengan valor mínimo nulo puesto que, como se dijo, falta aún determinar, en el procedimiento sintético que se sigue, como tratar la posibilidad contraria.

4° La simplificación que en este ejemplo permite agrupar cargas es consecuencia de la isostaticidad de la estructura considerada, según la cual muchas de las cargas se transmiten a la pila a través del apoyo del tramo, es decir, obrando con igual excentricidad con relación al pie del pilar.

Se han efectuado los cálculos correspondientes a las dos combinaciones que resultan según las condiciones de exclusión.

Los dos dominios correspondientes a ambas combinaciones han sido representados en el diagrama. Se advierte que ambos tienen zonas comunes y otras que no lo son y que, en definitiva, resulta determinante para el dimensionamiento la combinación II, por alcanzar mayores exigencias de cuantía.

Puede advertirse asimismo que, en esta combinación de máxima exigencia, la carga (5), que agrega solicitación normal a la sección estudiada tiene efectos reductores en el dimensionamiento de armadura lo que, naturalmente, es consecuencia de las particularidades del caso.

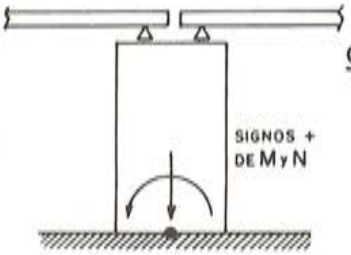
Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

SIMBOLOS

Ac : SECCION

fcd : TENSION DE TRABAJO DEL HORMIGON

h : ALTURA BRUTA DE LA SECCION



CONSTANTES

$Ac = 100\,cm. \times 80\,cm. = 8000\,cm^2.$

$f_{cd} = \frac{300\,Kg/cm^2}{1,5} \times 0,9 = 180\,Kg./cm^2.$

$Ac \cdot f_{cd} = 8000\,cm^2. \times 180\,Kg/cm^2. = 1440\,t.$

$h \cdot Ac \cdot f_{cd} = 0,8\,m. \times 1440\,t = 1152\,tm.$

COMBINACION	CARGA		M (tm)	N (t)	$m = \frac{M}{h \cdot Ac \cdot f_{cd}}$	$n = \frac{N}{Ac \cdot f_{cd}}$	ORIENTACION DEL VECTOR EN EL DIAGRAMA DE INTERACCION
I y II	1	PERMANENTE	0	194,0	0	0,135	
I	8	ALEATORIA	53,5	0	0,046	0	→
	9+10+11	"	11,8	0	0,010	0	→
	12	"	25,3	0	0,022	0	→
	13	"	102,2	0	0,089	0	→
	14+15+16	"	44,5	0	0,039	0	→
	17	"	134,3	0	0,117	0	→
	2	"	13,0	30,9	0,011	0,021	↗
	5+6+7	"	-24,9	59,4	-0,022	0,041	↖

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

COMBINACION	CARGA		M (tm)	N (t)	$m = \frac{M}{h \cdot Ac \cdot fcd}$	$n = \frac{N}{Ac \cdot fcd}$	ORIENTACION DEL VECTOR EN EL DIAGRAMA DE INTERACCION
II	⑧	"	53,5	0	0,046	0	→
	⑨+⑩+⑪	"	11,8	0	0,010	0	→
	⑫	ALEATORIA	25,3	0	0,022	0	→
	⑬	"	102,2	0	0,089	0	→
	⑭ ⑮ ⑯	"	44,5	0	0,039	0	→
II	⑰	"	143,3	0	0,117	0	→
	② ③ ④	"	24,9	59,4	0,022	0,041	↗
	⑤	"	-13,0	30,9	-0,011	0,021	↖

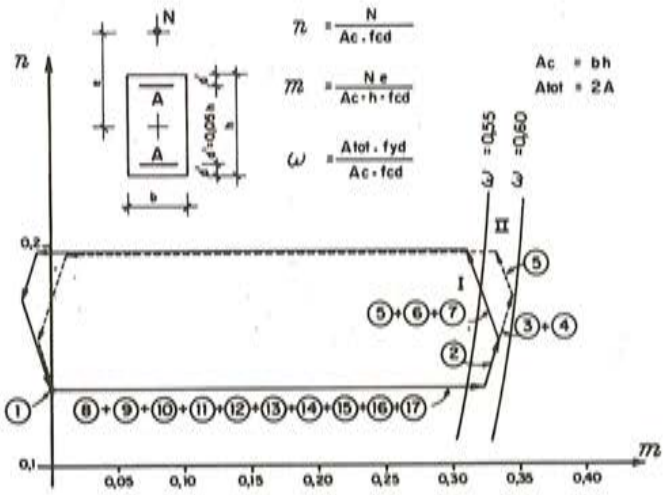


Fig.10

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

11. RESUMEN

En la flexión compuesta en piezas de hormigón armado, el carácter aleatorio y múltiple de las acciones, conjugado con las exigencias típicas de dimensionamiento de estas piezas que son puestas de manifiesto por el diagrama de interacción, llevan a la conclusión de que la determinación de los estados de cargas simultáneas de máxima exigencia de armadura no puede resolverse ni por consideraciones sencillas de intuición directa ni por la conocida teoría de las líneas de influencia.

La habitual hipótesis de linealidad entre acciones y efectos en estructuras puede conducir a errores en el dimensionamiento de secciones sometidas a flexión compuesta, si, dejando de considerar detenidamente la naturaleza del problema, se aplica también en este caso.

La función armadura-carga no es lineal y ni siquiera es monótona. Y se da el caso, aparentemente insólito, de que el incremento de armadura exigido por una carga puede ser muy distinto y aún convertirse en reducción según el grupo de otras cargas coaccionantes para el cual aquélla sea aditiva.

En el presente trabajo se comienza por caracterizar el problema y se sugieren, para el caso básico en que las acciones sean cargas concentradas, dos procedimientos: uno, que es llamado "constructivo" porque se inspira en la definición misma del problema planteado y que puede resultar engorroso si las acciones son muchas y ofrecen particularidades cambiantes, y otro, que se designa como "sintético" porque resume en un procedimiento relativamente sencillo los resultados de un análisis teórico.

Con este enfoque básico, han surgido en el análisis del problema general, algunos aspectos que deben estudiarse particularmente: el de la movilidad de cargas concentradas y su recíproco para las cargas distribuidas: el de su posible acción parcializada, tanto en intensidad como en zonas de aplicación. Ambos aspectos son analizados y se sugieren soluciones para los mismos.

Otras cuestiones de interés surgen también en este estudio: a) la posibilidad de que la intensidad mínima de las cargas concentradas o no, no sea nula; b) las particularidades de condicionamiento recíproco de simultaneidad al actuar las cargas sobre la estructura. Respecto del primero de estos problemas, se efectúan algunos comentarios que permitirían encarar casos sencillos pero no se sugiere ninguna solución general. Respecto del segundo, se intenta caracterizar diversos tipos de condicionamientos.

Este estudio no tiene otro alcance que el de un enfoque preliminar porque la mayoría de los conceptos presentados no son objeto de una exposición suficientemente rigurosa. El autor agradecerá los comentarios críticos que se formulen al respecto.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Análisis gráfico de la carga crítica de soportes complejos con distintas condiciones de apoyo

Por Félix Escrig. Dr. Arquitecto
ETSA de Sevilla. 1982

Aunque los conceptos básicos que nos dan la metodología a seguir en el cálculo de cargas críticas de piezas rectas son muy sencillos, su aplicación práctica suele ser engorrosa y únicamente encontramos solución a los casos concretos que por su mayor utilización o por disponer de estudios particulares están tabulados. Los métodos generales (formación de la matriz de rigidez del conjunto y ver para qué valores de las cargas ésta se anula) son una entelequia que no está bien sistematizada y de aplicación únicamente a costa de gran desarrollo numérico y tiempo de ordenador.

Nuestro objetivo en este trabajo es establecer un método simple y que no precise de instrumentación o bibliografía especial para determinar la carga, o cargas críticas de piezas rectas con diversas condiciones de sustentación e inercias variables. Reducir un proceso matemático laborioso a otro simple como el que vamos a proponer sólo se concibe a costa de algún sacrificio. Sacrificaremos el rigor matemático y la precisión, lo cual no será en cálculo práctico de estructuras ninguna novedad si conseguimos acotarlo dentro de unos márgenes admisibles.

Y la simplificación analítica que vamos a introducir será tanto más útil si conseguimos demostrar su sentido físico e incluso, como es nuestra ambición, operar con métodos geométricos que nos visualicen la estructura, su comportamiento y qué significan los resultados que obtenemos.

Para introducir el método empezaremos por una visión convencional del proceso de obtención de las cargas críticas de pandeo en el caso de los soportes más sencillos.

Vamos a considerar el caso de cierta generalidad de un soporte recto, inercia y módulo de Elasticidad constantes y unas condiciones de borde que admitan cualquier grado de empotramiento y la existencia de axiles y cortantes con lo cual podremos reproducir cualquier tipo de apoyo. (Fig. 1a).

Estableciendo el equilibrio de una porción de esta pieza, en el momento de pandeo (b), se obtendrá (c).

$$EIy'' + Py = -Qx + M_A \qquad (1)$$

Diferenciando dos veces, respecto a x, se obtiene:

$$EIy^{IV} + Py^{II} = 0 \qquad (2)$$

Introduciendo la notación $K^2 = \frac{P}{EI}$ la ecuación se transforma en:

$$y^{IV} + K^2 y^{II} = 0 \qquad (3)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

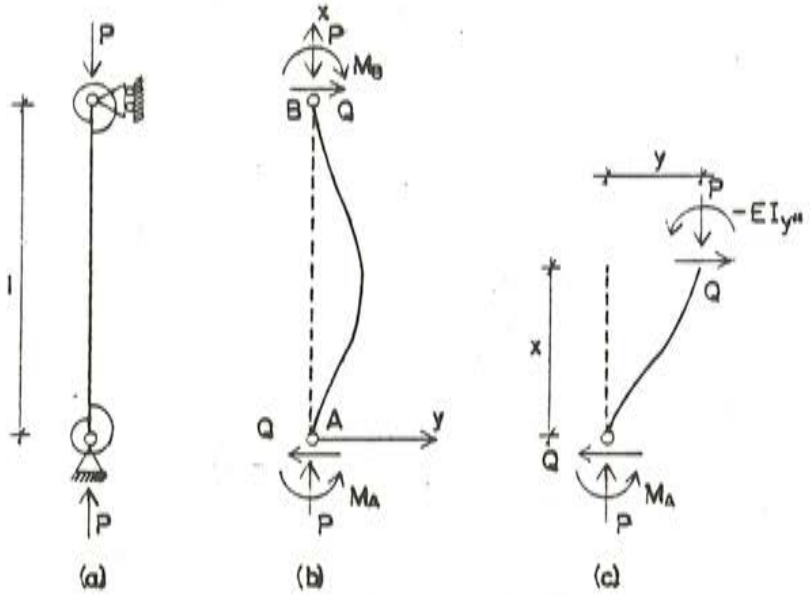


Fig. 1.

La solución general de este tipo de ecuación es:

$$y = C_1 \text{ sen } Kx + C_2 \cos Kx + C_3\, x + C_4 \qquad (4)$$

en donde, las cuatro constantes de integración podrán obtenerse de las condiciones de contorno.

Veamos algunos casos particulares.

EXTREMOS ARTICULADOS

En este caso:

$$y = y'' = 0 \qquad \text{para } x = 0$$
$$y = y'' = 0 \qquad \text{para } x = l$$

Sustituyendo estas cuatro condiciones en la ecuación (2.4)

$$\begin{aligned} &C_2 + C_4 = 0 \\ &C_2 \qquad\quad = 0 \\ &C_1 \text{ sen } Kl + C_3 l = 0 \\ &-C_1\, K^2 \text{ sen } Kl = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

De aquí deducimos $C_2 = C_4 = 0$ y si K^2 no es nulo, $C_1 = C_3 = 0$ ó sen $Kl = C_3 = 0$.

La primera, es la solución trivial. De la segunda, obtenemos:

$$Kl = n\,\pi \qquad \text{para } n = 1, 2, 3...$$

Sustituyendo K por su valor:

$$P_{cr} = \frac{n^2\,\pi^2\,EI}{l^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3...$$

La carga crítica será la que haga menor el segundo miembro, es decir $n = 1$.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2\,EI}{l^2} \qquad (6)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La ecuación de la deformada en el momento crítico, será:

$$y = C_1 \text{ sen } (\pi/l)\, x \tag{7}$$

donde C_1 es un factor de indeterminación que admite cualquier valor.

EXTREMOS EMPOTRADOS

En este caso:

$$\begin{array}{lll} y = 0 & y' = 0 & \text{para } x = 0 \\ y = 0 & y' = 0 & \text{para } x = 1 \end{array}$$

Introduciendo estas condiciones en la ecuación (2.4):

$$\begin{aligned} & C_2 + C_4 = 0 \\ & KC_1 + C_3 = 0 \\ & C_1 \text{ sen } Kl + C_2 \cos Kl + C_3 l + C_4 = 0 \\ & KC_1 \cos Kl - K C_2 \text{ sen } Kl + C_3 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial, basta igualar a 0 el determinante y ver para qué valores se satisface. Llegamos al resultado:

$$\text{sen } \frac{Kl}{2} = 0 \text{ ó tg } \frac{Kl}{2} = \frac{Kl}{2}$$

El menor de los valores no nulos de $\frac{Kl}{2}$ que hace sen $\frac{Kl}{2} = 0$ es π mientras que el menor que hace tg $\frac{Kl}{2} = \frac{Kl}{2}$ es 4.49. Por tanto, para la carga crítica seleccionamos el primero $\frac{Kl}{2} = \pi$ y sustituyendo K por su valor:

$$P_{cr} = \frac{4\,\pi^2\,EI}{l^2} \tag{9}$$

La ecuación de la deformada para la carga crítica, será teniendo en cuenta,

$$C_1 = C_3 = 0;\; C_4 = -C_2$$

$$y = C_4 \left(1 - \cos \frac{2\,\pi\,x}{l}\right) \tag{10}$$

donde C_4 es un factor de indeterminación.

UN EXTREMO APOYADO Y OTRO EMPOTRADO

Las condiciones de contorno serán:

$$\begin{array}{lll} y = y' = 0 & & \text{para } x = 0 \\ y = y'' = 0 & & \text{para } x = 1 \end{array}$$

Planteando el sistema de ecuaciones y operando como en el caso anterior, llegaremos a la condición:

$$\text{tg } Kl = Kl$$

El menor valor Kl que la satisface es 4.49 y por tanto:

$$P_{cr} = 2.04\,\frac{\pi^2\,EI}{l^2} \tag{11}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La ecuación de la deformada, será:

$$w = C_1 \; [\text{sen } Kx - Kl \cos Kx + K\,(l - x)] \tag{12}$$

UN EXTREMO EMPOTRADO Y OTRO LIBRE

En este caso:

$$y = y' = 0 \quad \text{para } x = 0$$
$$y'' = 0; \; y''' + K^2 \, y' = 0 \text{ para } x = l$$

Las ecuaciones son ahora:

$$\begin{aligned} &C_2 + C_4 = 0 \\ &KC_1 + C_3 = 0 \\ &C_1 \text{ sen } Kl + C_2 \cos Kl = 0 \\ &C_3 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Y la solución no trivial es la mínima que cumpla $\cos Kl = 0$, lo que nos lleva a:

$$Kl = \frac{(2n-1)\,\pi}{2} \text{ para } n = 1, 2, 3...$$

y la carga crítica para $n = 1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \, EI}{4l^2} \tag{14}$$

La deformada para la carga crítica tendrá la expresión:

$$w = C_4 \; (1 - \cos \frac{\pi \, x}{2l}) \tag{15}$$

Si ahora analizamos con detalle las deformadas, de la expresión general (4) podemos deducir que las curvas que obtenemos serán combinaciones senoidales de período constante y proporcional a K.

Los coeficientes C_1, C_2 nos modificarán la amplitud de las ondas, C_3 la inclinación o giro respecto a los ejes coordenados y C_4 el desplazamiento a lo largo del eje de ordenadas del origen de la curva.

$$y = C_1 \text{ sen } (\pi/l) \, x \tag{16}$$

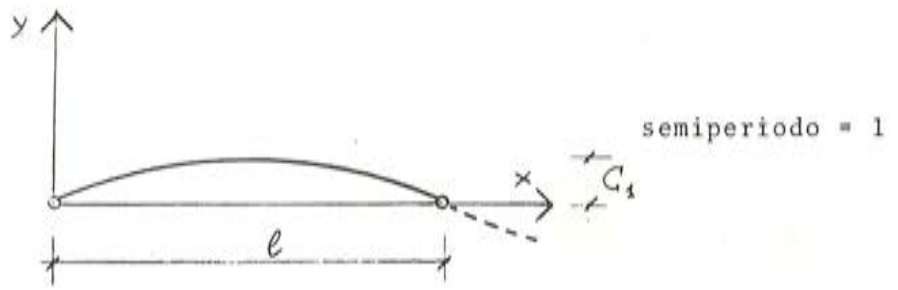


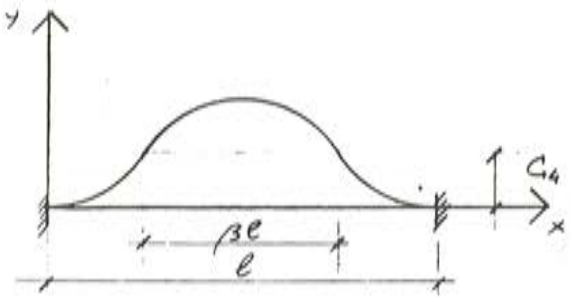
Fig. 2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Como habíamos visto, $\beta = 1$, y esto significa que para cualquier valor C_1 la deformada entre las dos articulaciones será una semionda completa de una función senoidal.

En el caso de ambos extremos empotrados

$$y = C_4\ (1 - \cos 2\,\pi\, x/l) \tag{17}$$



semiperiodo= 1/2

Fig. 3.

Como habíamos visto, $\beta = 0{,}5$, y esto significa que para cualquier valor C_4 la deformada entre los dos empotramientos será una onda completa de una función senoidal (con un mínimo en el origen de ordenadas).

En el caso de un extremo apoyado y otro empotrado

$$y = C_1\ [\text{sen}\ \pi\, x/0{,}7\, l - (\pi/0{,}7) \cos \pi\, x/0{,}7\, l + \pi/0{,}7\, l\, (l - x) \tag{18}$$

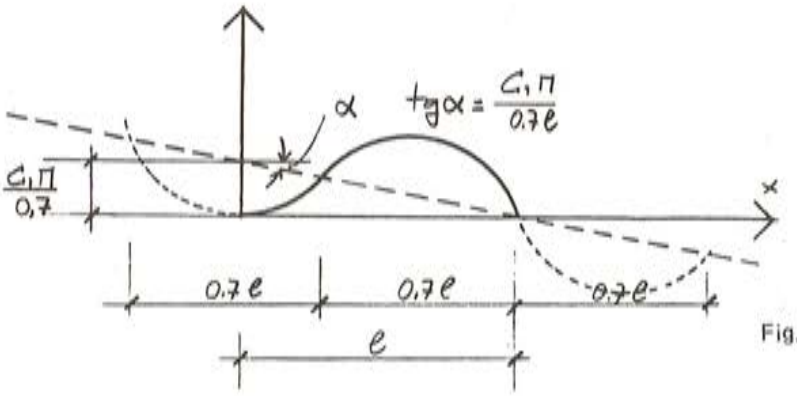


Fig. 4.

Aunque este caso es más complejo el gráfico ilustra suficientemente las relaciones entre los distintos parámetros que intervienen y como lo que obtenemos es una curva senoidal girada y desplazada con respecto a los ejes coordenados.

La proyección sobre los ejes coordenados de la semionda es 0,7 l y de aquí que $\beta = 0{,}7$.

Puesto que K es proporcional a Pcr la carga crítica se habrá alcanzado en todos los casos para el valor

$$Pcr/EI = (2\,\pi/\text{long. onda})^2 = (\pi/\beta l)^2 \tag{19}$$

que es el razonamiento recíproco al que hemos utilizado anteriormente.

En el caso de un extremo empotrado y otro libre

$$y = C_4\ (1 - \cos \pi\, x/2l) \tag{20}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

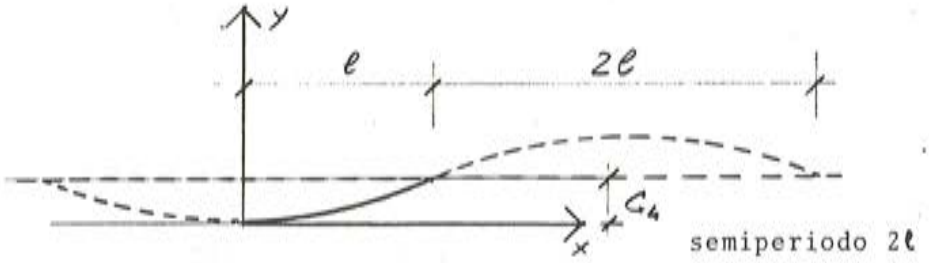


Fig. 5.

Al igual que en los anteriores la fig. 5 expresa claramente el significado de la deformada.

Visto lo anterior, de la expresión general

$$y = C_1 \text{ sen } Kx + C_2 \cos Kx + C_3 \, x + C_4$$

obtendremos la representación gráfica

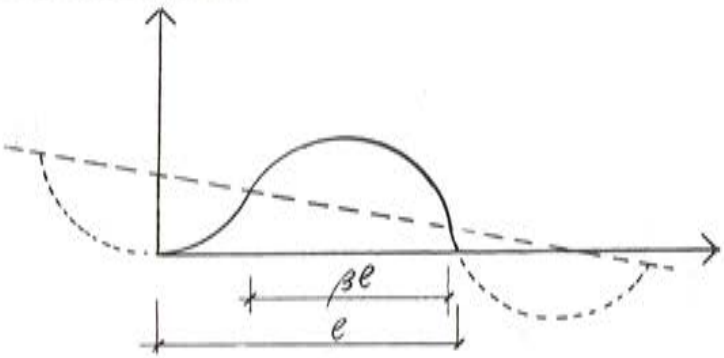


Fig. 6.

Si ahora dibujamos una curva senoidal de período proporcional a K, $T = 2\,\pi/\beta K$ y tomamos T arbitrario puesto que nos basta con la proporción entre parámetros.

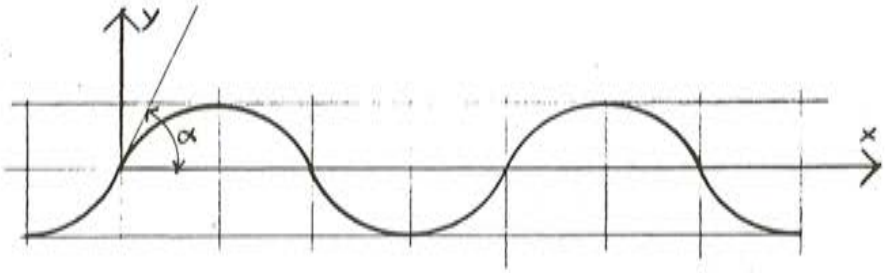


Fig. 7.

Sabemos que un fragmento de esta curva será la deformada de cualquier tramo recto sea cual fuere la condición de sustentación. Lo que tiene sentido físico como sigue:

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

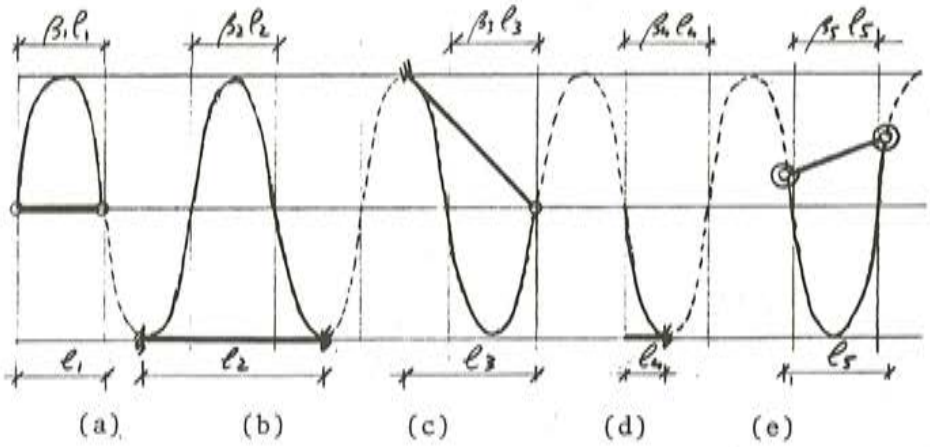


Fig. 8.

Los casos (a), (b), (c) y (d) corresponden con los particulares estudiados y el (e) con la expresión general en que los extremos tienen grados intermedios de empotramiento completo. Puesto que éste generaliza todos los anteriores vamos a tratarlo con más amplitud.

En el caso de deformada senoidal, como el que nos concierne, cuando los dos extremos están simplemente apoyados, aquélla formará un ángulo α con la directriz inicial igual en los dos apoyos (Fig. 7 y 9 (a)).

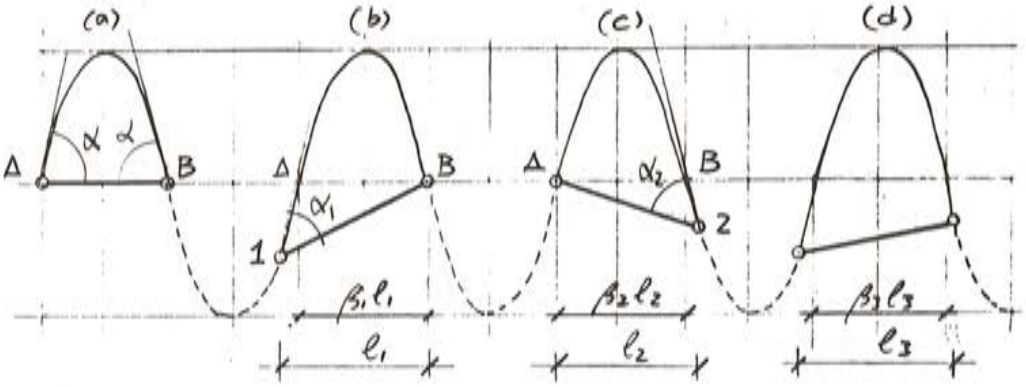


Fig. 9.

Si uno de los apoyos tiene un grado intermedio de empotramiento (Fig. 9 (b)), se puede definir por medio de la rigidez "r" al giro, en donde:

$$\alpha = (1 + r_1)\,\alpha_1 \qquad \begin{array}{ll} r_1 = 0 & \text{articulación} \\ r_1 = \infty & \text{empotramiento} \end{array}$$

La deformada será tal que forme un ángulo α_1 en el apoyo 1.

El ángulo en el apoyo B aumentará por compatibilidad geométrica sin alterar la forma de la elástica.

El mismo razonamiento puede utilizarse con rigidez a rotación en el apoyo B (Fig. 9(c)) y por composición de los dos casos (b) y (c) obtendremos el (d) mediante el que se puede deducir la longitud efectiva βl de cualquier tramo recto con condiciones arbitrarias de apoyo, en los extremos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Fig. 10.

La fig. 10 ilustra un ejemplo que responde a la casuística estudiada.

El razonamiento anterior abarca el caso de ménsulas en que el empotramiento no es perfecto o el caso de la Fig. 11.

Fig. 11.

En éste la justificación gráfica sería como se expone en la Fig. 12.

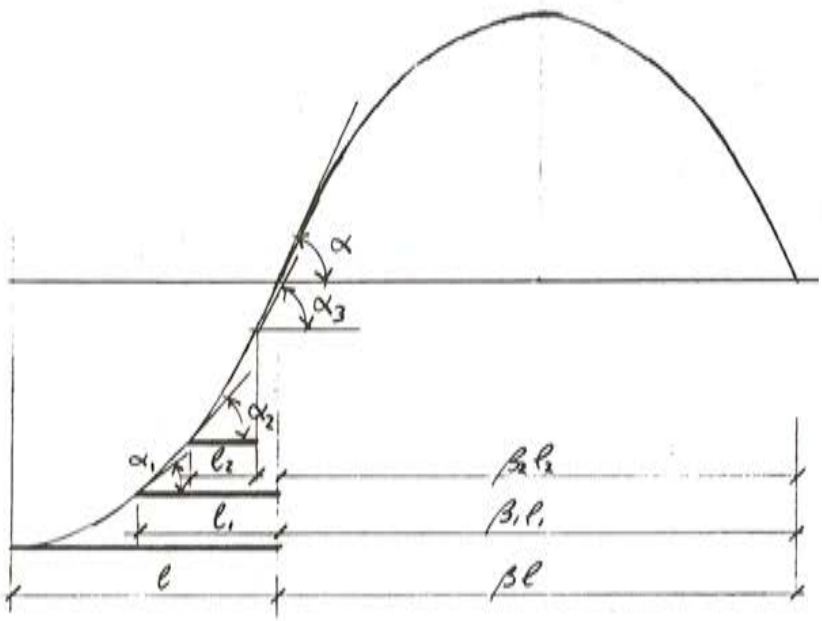


Fig. 12.

El caso de la Fig. 8 (d) es el representado en la Fig. 12 con la longitud l. Si el empotramiento de esta ménsula no es de rigidez infinita, ésta sufrirá un giro en este punto proporcional a la rigidez.

$$\alpha_1 = \alpha/1 + r_1 \tag{21}$$

Y en el otro extremo deberá mantenerse el ángulo. Si en este último también existe rigidez a la rotación como en la Fig. 11 estaremos en el caso l_2 en que

$$\alpha_2 = \alpha/1 + r_2 \quad \alpha_3 = \alpha/1 + r_3 \tag{22}$$

La Fig. 13 ejemplifica un caso como éste.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

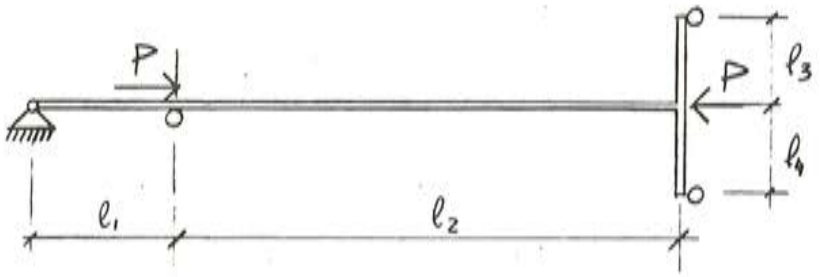


Fig. 13.

Todo el razonamiento geométrico permite obtener "exactamente" las longitudes efectivas de la pieza sin necesidad de complementos analíticos. El único error que podemos deslizar es el inherente a los métodos gráficos, más cuanto que necesitamos cuidadosas mediciones de ángulos en una curva compleja como es la senoidal.

En resumen los pasos a seguir en la determinación gráfica de la carga crítica de soportes apoyados en los extremos con rigidez a la rotación r_1 y r_2 son (Fig. 14).

1) Dibujo de una onda senoidal de amplitud y períodos arbitrarios.

2) Localización de un punto 1 tal que 1-B forme con la tangente a la curva en ese punto un ángulo $\alpha_1 = \alpha/(1 + r_2)$.

3) Localización de un punto 2 tal que 2-A forme con la tangente a la curva en este punto un ángulo $\alpha_2 = \alpha/(1 + r_2)$.

4) Proyectamos 1 y 2 perpendicularmente sobre el eje de abcisas en los puntos 1' 2'.

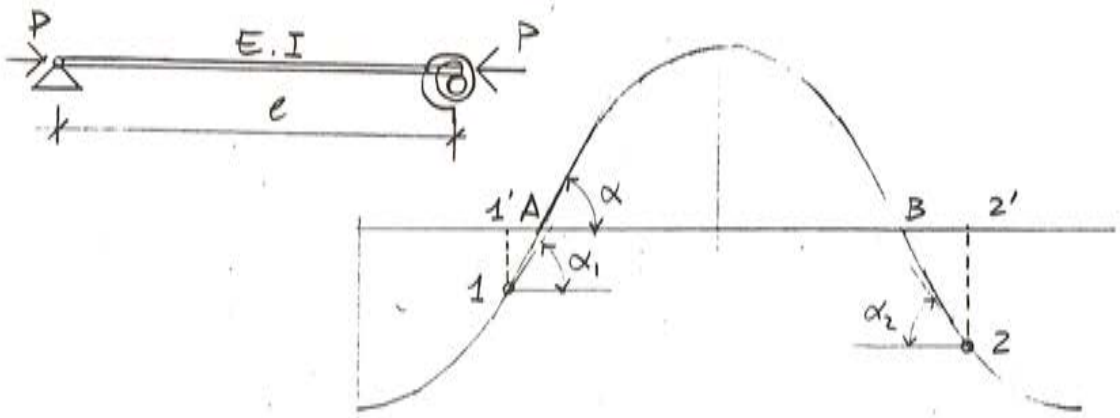


Fig. 14.

5) Hallamos $\beta = \overline{AB}/\overline{1'2'}$

6) Calculamos la carga crítica

$$Pcr = \pi^2 \; EI/(\beta l)^2$$

Para un soporte con un solo apoyo y rigidez a la rotación en los dos extremos r_1 y r_2 los pasos son similares.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

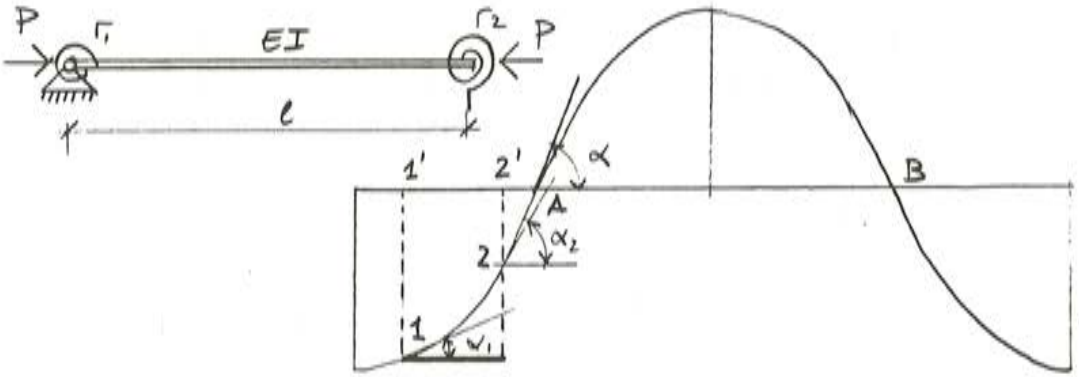


Fig. 15.

1) Dibujo de una onda senoidal de amplitud y período arbitrarios.

2) Localización de un punto 1 tal que su tangente forme con la horizontal un ángulo $\alpha_1 = \alpha/(1 + r_1)$.

3) Localización de un punto 2 tal que su tangente forme con la horizontal un ángulo $\alpha_2 = \alpha\,(1 + r_2)$ medido en el mismo sentido que el anterior.

Los siguientes pasos son idénticos al caso anterior.

* * *

La utilización de funciones senoidales es, analíticamente, muy ventajosa porque son de fácil operación, simples de integrar o derivar y fáciles de ajustar a períodos determinados. Pero gráficamente no es así de sencillo y entonces la operación geométrica puede resultar más engorrosa que el procedimiento matemático.

Para obviar esto vamos a proponer una simplificación cuya aproximación podemos comprobar que en todos los casos es aceptable.

En lugar de considerar curvas senoidales vamos a utilizar arcos de circunferencia (Fig. 16).

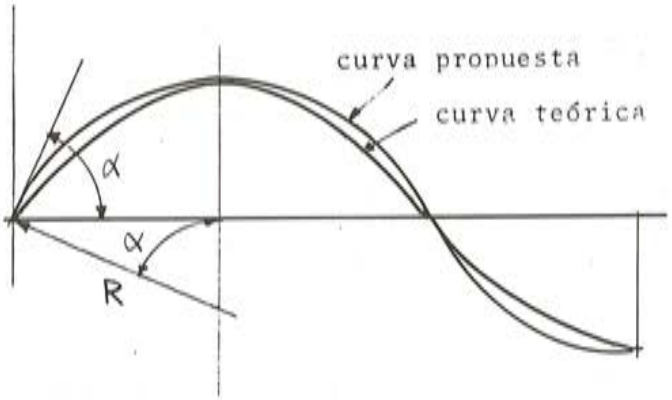


Fig. 16.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

En la Fig. 9 vimos la importancia que tenían las pendientes en el cálculo de las longitudes efectivas. Por tanto, uno de los errores que introducimos es la diferencia de las derivadas primeras. La deducción matemática de todos y cada uno de los errores que introducimos es extensa y sujetas a muchos estudios particulares por lo que vamos a prescindir por el momento de ella y nos limitamos a describir la mecánica de aplicación y a comparar los resultados con otros conocidos y exactos en los casos en que esto sea posible.

En nuestro método utilizaremos semicircunferencias, de tal modo que $\alpha = 90^{o}$(Fig.17).

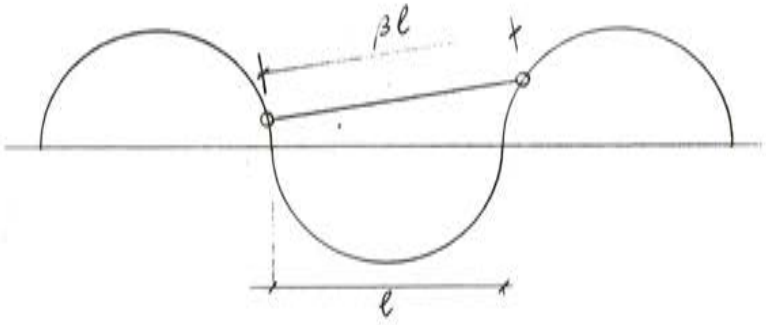


Fig. 17.

El diámetro de esta circunferencia nos dará la relación β con la longitud real de la pieza.

Pasamos a la sistematización de casos particulares.

SOPORTES DE UN SOLO TRAMO Y RELACION P/EI CONSTANTE

a) Apoyos con rigidez a la rotación r_1 y r_2.

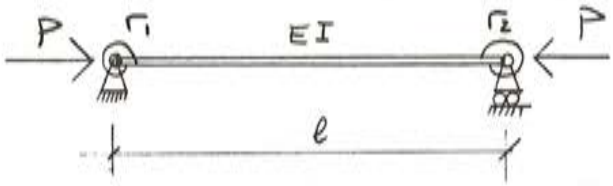


Fig. 18.a.

Todas las soluciones posibles estarán comprendidas entre las rectas 1-2 y $\overline{AB}$, tal como la $\overline{MN}$, es decir comprendida entre 0,5 y 1 (Fig. 18).

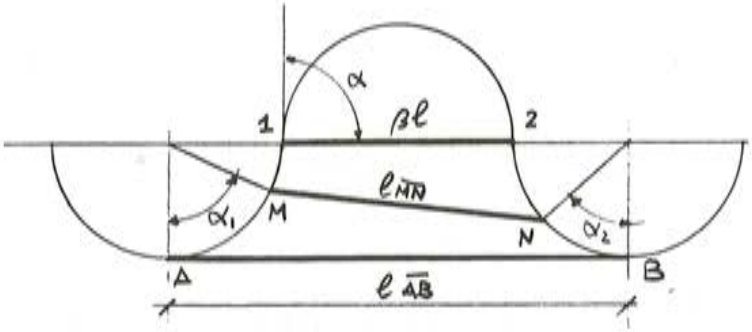


Fig. 18.b.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Consideramos el caso de la Fig. 19.

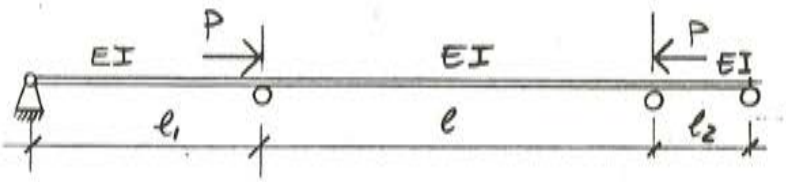


Fig. 19.

$$r_1 = I/l_1,\ r_2 = I/l_2,\ \alpha_1 = \alpha/(1 + r_1),\ \alpha_2 = \alpha/(1 + r_2)$$

Situaremos los ángulos α_1 y α_2 tal como indica la Fig. 18 y obtendremos $\beta = \overline{1,2}/\overline{MN}$.

Si el extremo 1 está empotrado y el 2 articulado (Fig. 20) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90$ y $\beta = 0{,}63$ que comparado con el valor exacto $\beta = 0{,}699$ nos da un error del 10% que es el máximo que cometemos por este procedimiento en todas las posibles condiciones de contorno.

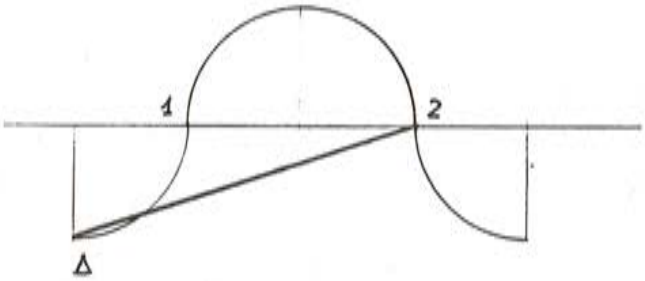


Fig. 20.

Cualquier otro caso $\overline{MN}$ (Fig. 18) se resuelve con errores menores.

Un procedimiento más exacto hubiera consistido en situar ángulos α_1 y α_2 como en la Fig. 21 y actuar de igual modo.

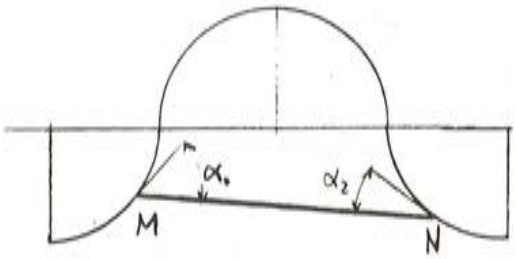


Fig. 21.

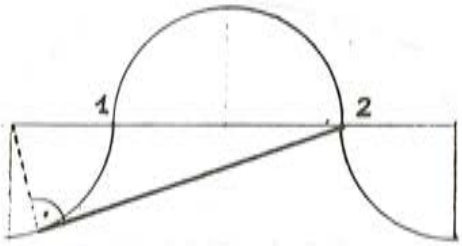


Fig. 22.

En este caso si el extremo 1 está empotrado y el 2 articulado (Fig. 22), $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90^o$ y $\beta = 0{,}707$ que comparado con la solución exacta $= 0{,}699$ nos da un error de 1,1% del lado de la seguridad y éste es el máximo posible dentro de los casos que estamos estudiando.

Como vemos este segundo procedimiento es de una gran precisión y el único inconveniente es la dificultad de encontrar la posición exacta de la MN que forme los ángulos precisos con las tangentes a las circunferencias en sus puntos de contacto. El primer procedimiento es mucho más grosero pero elemental en su construcción.

b) Extremos con rigidez a la rotación r_1 y r_2 y sólo un apoyo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Consideramos el caso de la Fig. 19.

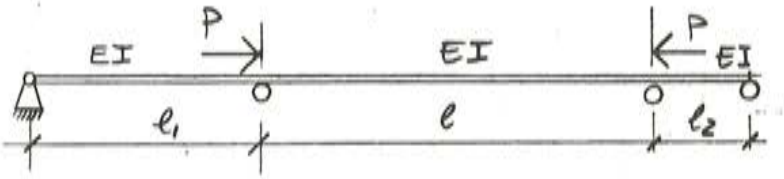


Fig. 19.

$$r_1 = I/l_1,\ r_2 = I/l_2,\ \alpha_1 = \alpha/(1 + r_1),\ \alpha_2 = \alpha/(1 + r_2)$$

Situaremos los ángulos α_1 y α_2 tal como indica la Fig. 18 y obtendremos $\beta = \overline{1,2}/\overline{MN}$.

Si el extremo 1 está empotrado y el 2 articulado (Fig. 20) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90$ y $\beta = 0{,}63$ que comparado con el valor exacto $\beta = 0{,}699$ nos da un error del 10% que es el máximo que cometemos por este procedimiento en todas las posibles condiciones de contorno.

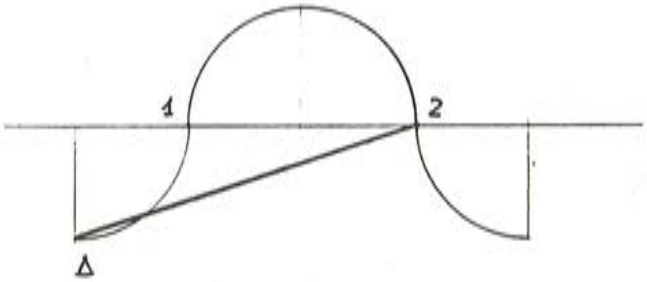


Fig. 20.

Cualquier otro caso $\overline{MN}$ (Fig. 18) se resuelve con errores menores.

Un procedimiento más exacto hubiera consistido en situar ángulos α_1 y α_2 como en la Fig. 21 y actuar de igual modo.

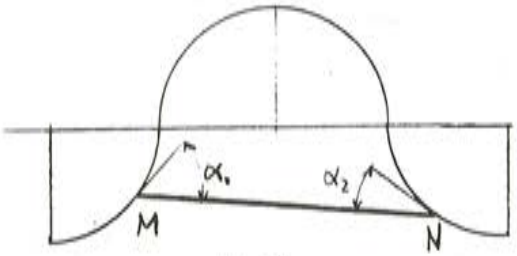


Fig. 21.

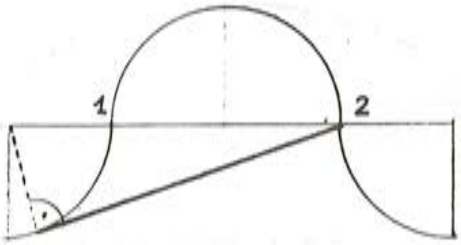


Fig. 22.

En este caso si el extremo 1 está empotrado y el 2 articulado (Fig. 22), $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90^o$ y $\beta = 0{,}707$ que comparado con la solución exacta $= 0{,}699$ nos da un error de 1,1% del lado de la seguridad y éste es el máximo posible dentro de los casos que estamos estudiando.

Como vemos este segundo procedimiento es de una gran precisión y el único inconveniente es la dificultad de encontrar la posición exacta de la MN que forme los ángulos precisos con las tangentes a las circunferencias en sus puntos de contacto. El primer procedimiento es mucho más grosero pero elemental en su construcción.

b) Extremos con rigidez a la rotación r_1 y r_2 y sólo un apoyo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

En la Fig. 9 vimos la importancia que tenían las pendientes en el cálculo de las longitudes efectivas. Por tanto, uno de los errores que introducimos es la diferencia de las derivadas primeras. La deducción matemática de todos y cada uno de los errores que introducimos es extensa y sujetas a muchos estudios particulares por lo que vamos a prescindir por el momento de ella y nos limitamos a describir la mecánica de aplicación y a comparar los resultados con otros conocidos y exactos en los casos en que esto sea posible.

En nuestro método utilizaremos semicircunferencias, de tal modo que $\alpha = 90^{o}$(Fig.17).

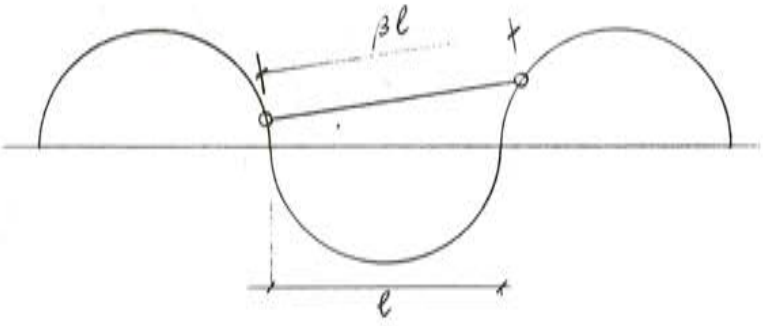


Fig. 17.

El diámetro de esta circunferencia nos dará la relación β con la longitud real de la pieza.

Pasamos a la sistematización de casos particulares.

SOPORTES DE UN SOLO TRAMO Y RELACION P/EI CONSTANTE

a) Apoyos con rigidez a la rotación r_1 y r_2.

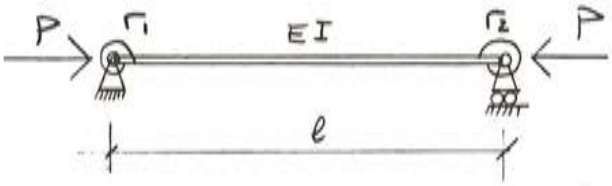


Fig. 18.a.

Todas las soluciones posibles estarán comprendidas entre las rectas 1-2 y $\overline{AB}$, tal como la $\overline{MN}$, es decir comprendida entre 0,5 y 1 (Fig. 18).

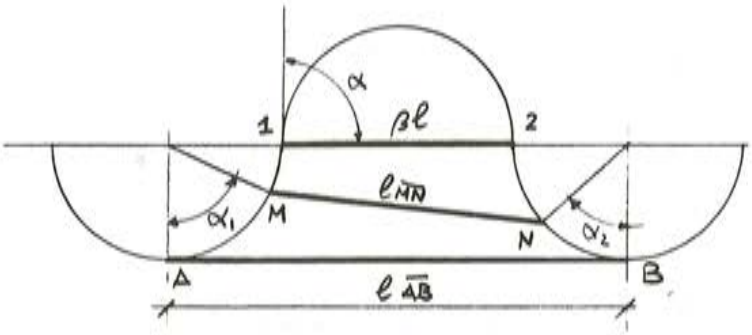


Fig. 18.b.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

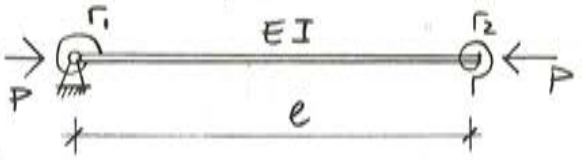


Fig. 23.

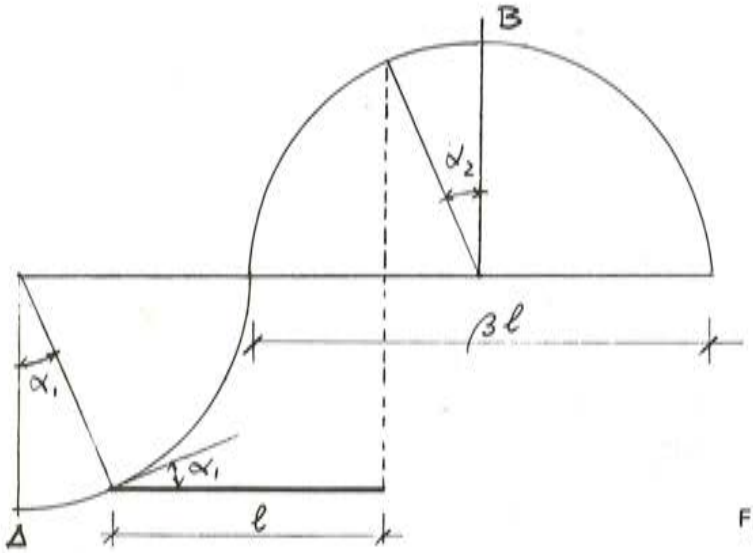


Fig. 24.

En este caso todas las posibles soluciones oscilarán entre

$$\begin{array}{lcl} r_1 = r_2 = \infty & & r_1 = r_2 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 & \text{y} & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \\ \beta = 1 & & \beta = \infty \end{array}$$

En esta ocasión los dos procedimientos vistos en el apartado a) coinciden y podemos trabajar con gran precisión.

SOPORTES DE UN SOLO TRAMO Y RELACION P/EI VARIABLE

En este grupo se recogen todas las piezas comprimidas con inercias variables, secciones mixtas o cargas aplicadas a lo largo de la directriz.

a) Cambios bruscos en la relación P/EI.

De la expresión general de la deformada en el momento de pandeo

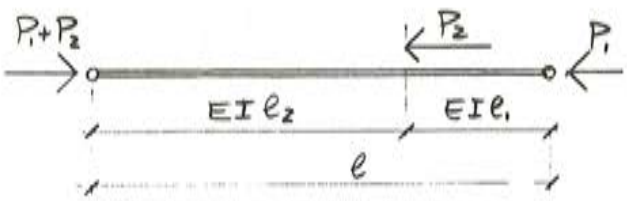
$$y = A_1 \text{ sen } Kx + A_2 \cos Kx + A_3 x + A_4$$

$$\text{con } K = \sqrt{P/EI}$$

se deduce que en el punto en que varíe la relación P/EI también lo hará el período de la onda y esto nós servirá de criterio para nuestro cálculo gráfico.

Así para el caso de la Fig. 26.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025



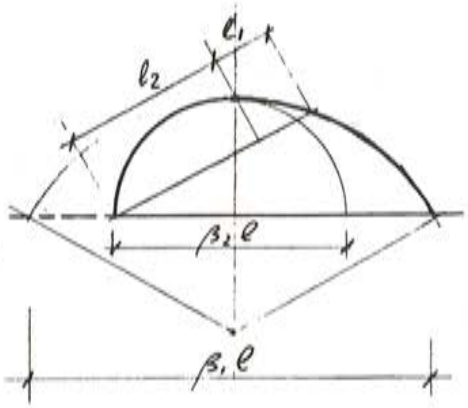
$$K_1 = \sqrt{P/EI},$$

$$K_2 = \sqrt{P_1 + P_2/EI}$$

$$\text{Si } K_2 > K_1 \rightarrow T_2 < T_1$$

Fig. 26.

El período de las ondas es inversamente proporcional a $\sqrt{P/EI}$

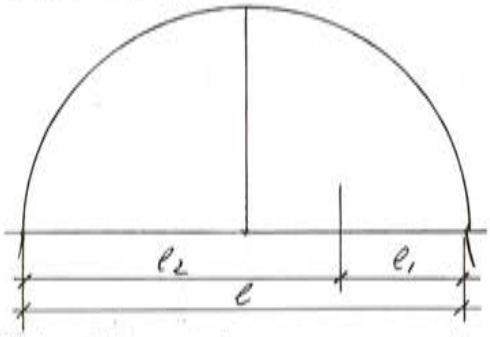


$$(P_1)_{cr} = \pi^2 \; EI/(\beta_1, l)^2$$

$$(P_1 + P_2)\,cr = \pi^2 \; EI/(\beta_2 l)^2$$

Fig. 27.

Basándonos en esto proponemos un procedimiento más sencillo y con más posibilidades de explotación (Fig. 28).



$$l' = l_2 + (K_1/K_2)\, l_1$$

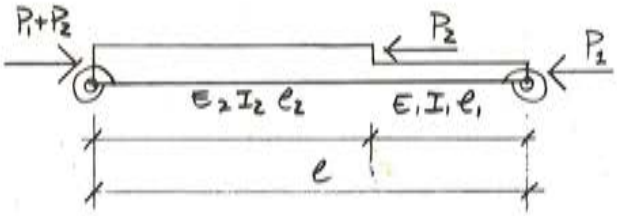
$$\beta_2 = l'/l$$

$$(P_1 + P_2)\,cr = \pi^2 \; EI/(\beta_2 l)^2$$

Fig. 28.

La ventaja de utilizar esta forma es que permite estudiar otras condiciones de apoyo como hicimos en el apartado anterior.

EJEMPLO 1:



$$K_1 = \sqrt{P_1/E_1\, I_1}$$

$$K_2 = \sqrt{(P_1 + P_2)/E_2\, I_2}$$

$$\alpha_1 = \alpha/1 + r_1$$

$$\alpha_2 = \alpha/1 + r_2$$

Fig. 29.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Con el criterio anterior

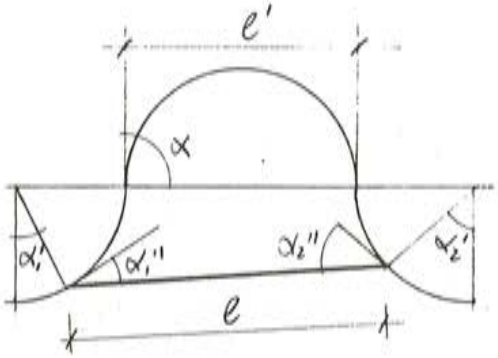


Fig. 30.

$$l' = l_2 + (K_1/K_2)\, l,$$

$$(P_1 + P_2)\, cr = \pi^2\, E_2\, I_2/(\beta_2\, l)^2$$

O bien:

$$l' = (K_2/K_1)\, l_2 + l_1$$

$$\beta_1 = l'/l$$

$$(P_1)\, cr = \pi^2\, E_1\, I_1/(\beta_1 l)^2$$

El situar los ángulos α_1 y α_2 en α_1', α_2' ó α_1'', α_2'' depende de la precisión que busquemos y sobre esto ya hicimos un comentario en el apartado anterior.

EJEMPLO 2:

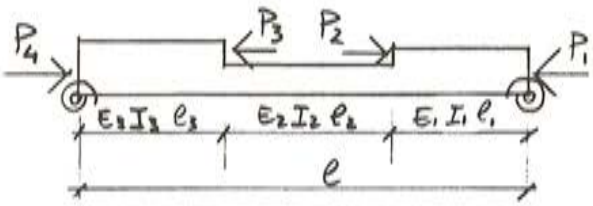


Fig. 31.

$$K_1 = \sqrt{P_1/E_1\, I_1}$$

$$K_2 = \sqrt{P_1 + P_2/E_2\, I_2}$$

$$K_3 = \sqrt{P_1 + P_2 + P_3/E_3\, I_3}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_4$$

$$\alpha_1 = \alpha/1 + r_1 \qquad \alpha_2 = \alpha/1 + r_2$$

Igual que hemos hecho antes, la relación l_1, l_2, l_3 tiene que ser proporcional a la de la pieza real

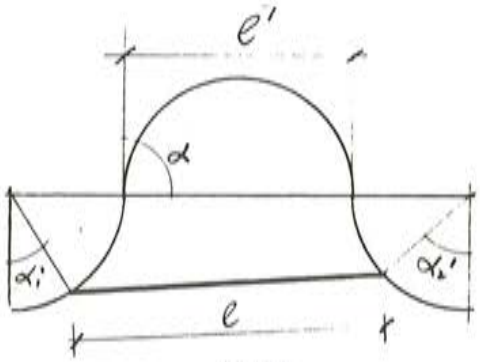


Fig. 32.

$$l'_3 = l_3 + K_2\, l_2/K_3 + K_1\, l_1/K_3$$

$$\beta_3 = l'_3/l$$

$$(P_1 + P_2 + P_3)\, cr = (P_4)\, cr = \pi^2\, E_3\, I_3/(\beta_3 l)^2$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Igualmente habríamos podido determinar

$$l'_2 = K_3\, l_3/K_2 + l_2 + K_1\, l_1/K_2 \rightarrow \beta_2 = l'_2/l$$

$$(P_1 + P_2)\, cr = \pi^2\, E_2\, I_2/(\beta_2 l)^2$$

ó

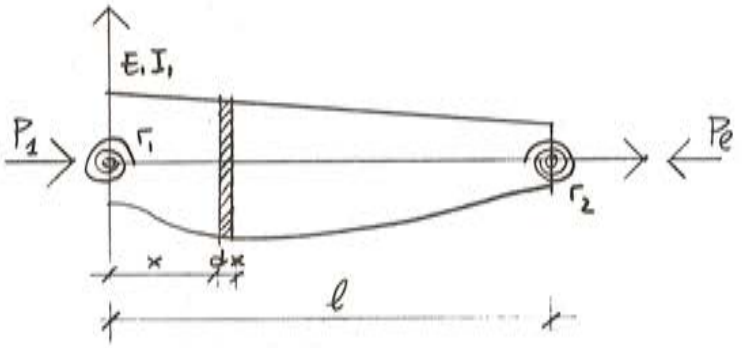
$$l'_3 = K_3\, l_3/K_1 + K_2\, l_2/K_1 + l_1 \rightarrow \beta_3 = l'_3/l$$

$$(P_1)\, cr = \pi^2\, E_1\, I_{1/(\beta_1 l)^2}$$

Puede comprobarse muy fácilmente que son ciertas estas relaciones.

b) P/EI variable de una forma general.

Del ejemplo anterior podemos extrapolar hasta el punto en que definimos



$$l' = \int_0^l (K_x/K_1)\, dx$$

siendo $K_1 = \sqrt{P_1/E_1\, I_1}$

$$K_x = \sqrt{P_x/E_x\, I_x}$$

Fig. 33.

De la Fig. 30 ó 32

$$\beta = l'/l \qquad \text{con } l' \text{ definido antes}$$

$$(P_1)\, cr = \pi^2\, E_1\, I_1/(\beta_1 l)^2$$

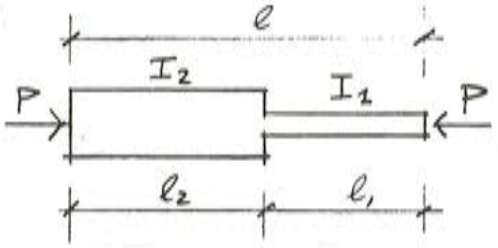
Si en vez de esta forma quisiéramos expresarlo en función de la tensión crítica

$$(\sigma_1)\, cr = \pi^2\, E_1/\lambda_1^2 \quad \text{siendo } \lambda_1 = \beta_1 l)i_1$$

Siendo i_1 el radio de giro de la sección 1 correspondiente a la inercia I_1. Recordemos que esta es la forma más útil en cáiculo de estructuras metálicas.

La precisión de este procedimiento se comprueba que en general es buena y los máximos errores se producen para las piezas con un solo cambio brusco de sección y valores K_1 y K_2 muy distintos. Aún así quedan siempre inferiores al 10% .

Así, por ejemplo:



$$K_1 = \sqrt{P/EI_1}$$

$$K_2 = \sqrt{P/EI_2}$$

$$l' = l_2 + K_1\, l_1/K_2 \rightarrow \beta = l'/l$$

Fig. 34.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

l_1/l	$\beta_{PFLUGER}$	$\beta_{aprox.}$	*Error*
0,2	1,10	0,8 + 2 . 0,2 = 1,2	9%
0,3	1,28	0,7 + 2 . 0,3 = 1,3	1%
0,4	1,47	0,6 + 2 . 0,4 = 1,4	5%
0,5	1,67	0,5 + 2 . 0,5 = 1,5	10%
0,6	1,75	0,4 + 2 . 0,6 = 1,6	9%
0,7	1,85	0,3 + 2 . 0,7 = 1,7	8%
0,8	1,95	0,2 + 2 . 0,8 = 1,8	8%

En el caso de sección variable de una forma continua los errores son mucho más pequeños. Así por ejemplo:

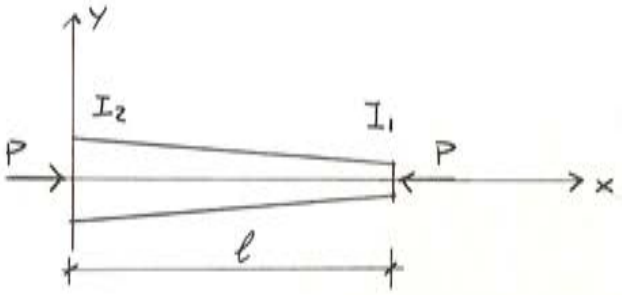


Fig. 35.

$$I_1 = I_2\ [3 - 2x/l]$$

$$l' = \int_0^l (K_x/K_1)\, dx = \int_0^l [3 - 2x/l]\, dx = 2\, l$$

$$\beta = l'/l = 2$$

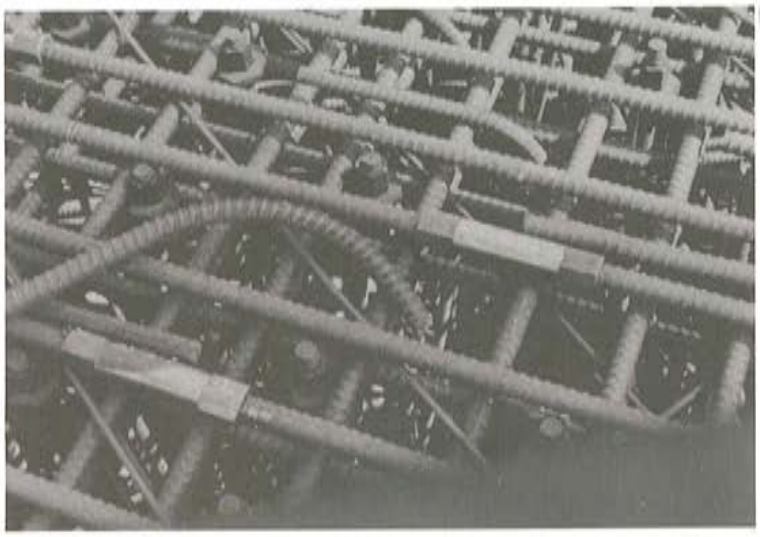
El valor exacto según Pfluger es 1,96.

El error es en este caso de 2% .

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

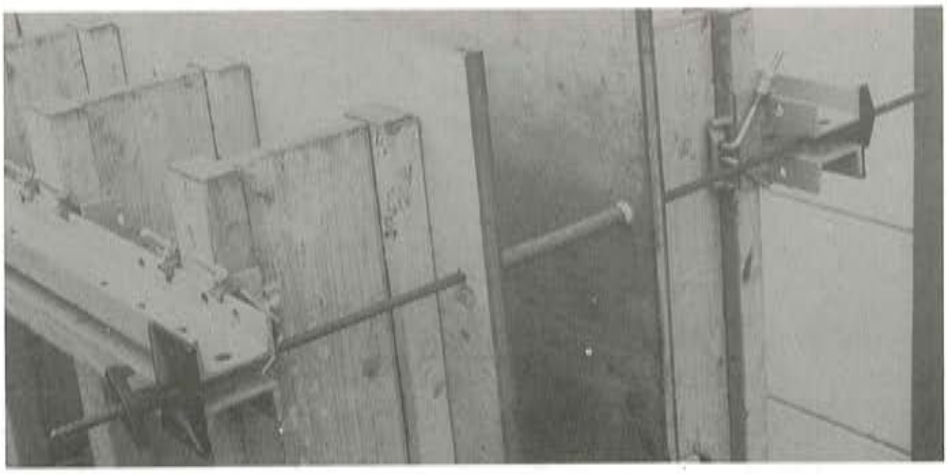
ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A.

Paseo de la Habana, 14, Madrid-16.
Teléfono 261 29 85 – Telex: 23533.



Barras roscadas sistema GEWI para armaduras, fabricadas por AZMA, S.A. Accesorios para uniones y anclajes.

Sistemas DYWIDAG con aceros de alto límite elástico. Barra ϕ 15 mm. Calidad 90/110, fabricada por AZMA, S.A., para sujeción de encofrados.



Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Diagramas axil-momento-curvaturas ($N-M_x-M_y-C_x-C_y$) de una sección de hormigón armado solicitada por una flexo-composición plana o biaxial

Luis M. Villegas Cabredo y Juan J. Arenas de Pablo
Departamento de Tecnología de las Estructuras
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Santander

1. INTRODUCCION

El proyecto de pilas altas de hormigón armado plantea de modo inevitable el problema de los esfuerzos de segundo orden, o sea, los debidos a la propia deformación del elemento, lo que es habitual en todo elemento esbelto comprimido. En las piezas de hormigón armado la complejidad del problema aumenta: En efecto, a la no linealidad geométrica (esfuerzos internos no proporcionales a las cargas exteriores, a causa de las deformaciones que influyen en aquéllos) se añade la no linealidad mecánica del material hormigón armado, que presenta el fenómeno de la fisuración y los diagramas (σ-ϵ) no lineales en el hormigón ni en el acero.

En las estructuras corrientes (por ej., entramados de edificación) el proyectista dispone de medios para obviar el problema: soportes de sección constante en hormigón y armaduras pueden ser calculados contando con una excentricidad adicional o momento complementario suministrado por algunas normas, entre ellas la nuestra, y pueden también, de un modo más científico, ser dimensionadas mediante ábacos o tablas basados en hipótesis plausibles como la de la deformada senoidal.

Pero las pilas altas de viaductos (al igual que las chimeneas o las torres de telecomunicación) presentan sistemáticamente geometría variable en el hormigón y cuantía de acero creciente hacia la base, saliéndose por completo fuera del campo de aplicación de los métodos sencillos. Observemos de entrada que, con independencia de la no linealidad mecánica del material, la sección variable excluye la aplicación de fórmulas simples, obligando bien a la integración de una ecuación diferencial en la que la inercia de la sección es variable, bien —lo más práctico— a un proceso iterativo hasta convergencia en el que la deformada adquirida por la pieza en la interación (i) sirve como base para determinar los esfuerzos totales de sus diversas secciones al iniciar la iteración (i + 1).

(*) Este artículo es el primero de una serie de cuatro que aparecerán sucesivamente en nuestra Revista y entre los cuales resumen la conferencia "Pilas altas de viaductos construidos por avance en voladizo" que, organizada por la A.T.E.P., fue pronunciada en el salón de actos del Instituto Eduardo Torroja por los Dres. Ingenieros de Caminos D. Juan J. Arenas de Pablo y D. Luis M. Villegas Cabredo el día 11 de Mayo de 1982, y que constituye parte del contenido de la tesis doctoral del segundo de ellos (17).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Pero, en secciones de hormigón armado, hablar de módulo elástico, E, y de inercia I, sólo tiene sentido para secciones en estado I, o sea íntegras. En cuanto aparece la fisuración y, sobre todo, en niveles avanzados de carga, con el punto representativo de las fibras más comprimidas de hormigón moviéndose por la zona descaradamente curva del diagrama $(\sigma\text{-}\epsilon)_c$, y con las barras de acero total o parcialmente plastificadas, hablar de E e I carece de sentido físico. Respecto al primero, obsérvese que tanto el módulo secante como el tangente correspondientes a las diversas fibras de una sección flexocomprimida son variables a lo largo de su canto. En cuanto a la inercia, mal puede definirse una propiedad mecánica basada, además de en la hipótesis de Navier-Bernouilli, en la linealidad del diagrama $(\sigma\text{-}\epsilon)$ del material.

En tal situación, la única magnitud que posee sentido físico es la curvatura de la pieza, 1/r, ya que su valor caracteriza el ángulo girado "conjuntamente" por todas las fibras de la sección en la unidad de longitud de la misma.

En piezas elásticas y lineales se cumple:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

o bien:

$$EI = \frac{M}{(1/r)} = \frac{M}{C}$$

Sobre esta base, cabría una definición, no del módulo E ni del momento de inercia I de las secciones de hormigón armado, pero sí del producto EI de las mismas, como cociente entre el momento flector aplicado y la curvatura resultante. Por este camino nos vemos conducidos a la utilización de los diagramas momento-curvatura de una sección dada como vía de aproximación al comportamiento de ese material. Sobre esta base está desarrollado el trabajo de la ref. (5), en la que se expone con detalle el concepto de "superficie mecánica" de una sección de H.A., así como el proceso conceptual y numérico para su obtención.

Nos limitaremos a recordar aquí que el diagrama momento-curvatura de una sección dada es variable según sea el axil de compresión que la solicite. Y en el caso de pilas altas de puente cuyo trabajo primario consiste en transmitir al terreno de cimentación cargas que varían a lo largo del tiempo y que, a causa del peso propio de la pila, producen axiles bastante variables entre unas y otras secciones de la misma, resulta obvio que el instrumento básico necesario para llevar a cabo su análisis es el programa de ordenador que permite, dados el axil y el momento que solicitan una sección, determinar el plano de deformaciones de la misma, plano cuya pendiente nos da directamente la curvatura de la sección.

El trabajo que en cuatro artículos sucesivos se va a presentar es un resumen de la tesis doctoral de Luis Villegas Cabredo, cuyo objeto consistió en la puesta a punto de un modelo matemático que simulara el comportamiento real de las pilas, moviéndose en el espacio (esto es, recibiendo fuerzas y sufriendo corrimientos en ambos planos: principal y transversal al puente), y en la aplicación del mismo a una concreta (pero muy extendida) tipología, como es la de puentes construídos por avance en voladizo.

Estas pilas pasan, en fase de fin de construcción del doble voladizo simétrico, por una etapa delicada en lo que a su estabilidad respecta: En efecto, reciben en punta toda la carga vertical del peso del tablero y de los equipos de avance y, al mismo tiempo, ofrecen la máxima superficie de actuación al viento transversal. Una vez realizada la unión de los sucesivos

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

voladizos, la situación de las pilas, sujetas por la rigidez a flexión del dintel en su plano transversal, resulta más descansada y segura.

En la figura 1 se representan los alzados, longitudinal y transversal, de las pilas principales del Puente Europa (Austria) cuya altura es de 146 ms. En ellas el canto crece en ambos planos desde coronación hasta la base con taludes de 1/40 (2,5 por 100 de pendiente), siendo la esbeltez geométrica, L/h_{base}, igual a 12,17 en el plano longitudinal y de 6,35 en el transversal.

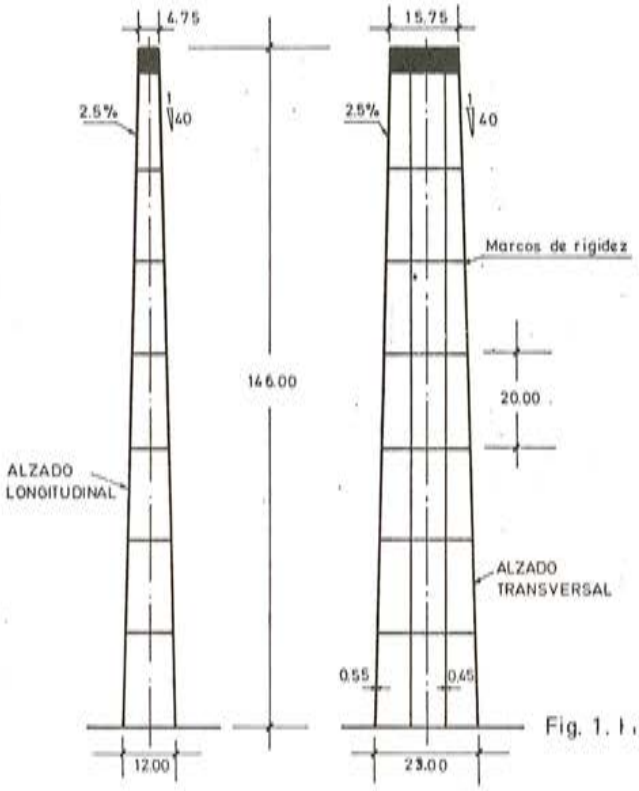


Fig. 1. Pilas principales del Puente Europa (Austria), 1963.

La figura 2 muestra el alzado y la planta del viaducto de Kocher, próximo a Stuttgart en la R.F. Alemana, terminado en 1979, cuyas pilas centrales alcanzan los 180 ms de altura. Sus dimensiones exteriores son de 5,00 x 8,60 m² en cabeza y de 9,50 x 15,00 m² en la base, lo que supone esbelteces, L/h_{base}, iguales a 19 y 12 en los planos principal y transversal respectivamente, estableciéndose un perfil parabólico de transición entre ambas (fig. 3a).

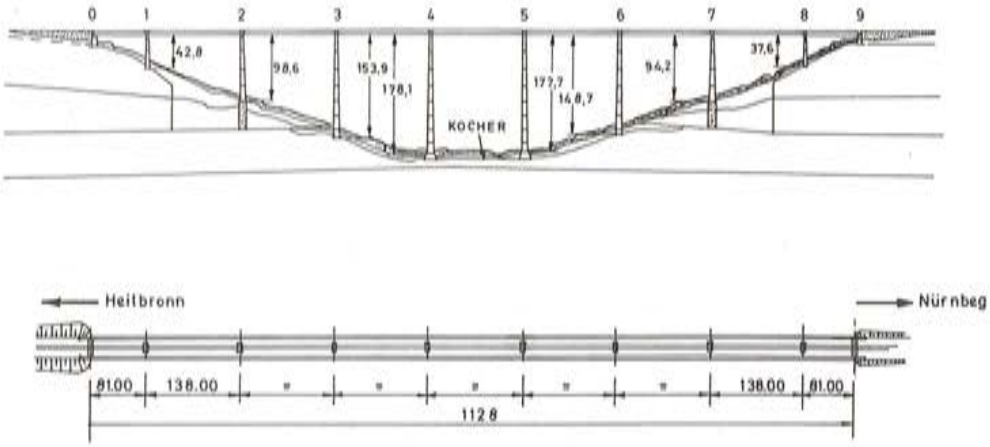


Fig. 2. Sección longitudinal y planta del viaducto de Kochertal. Esquema estructural.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

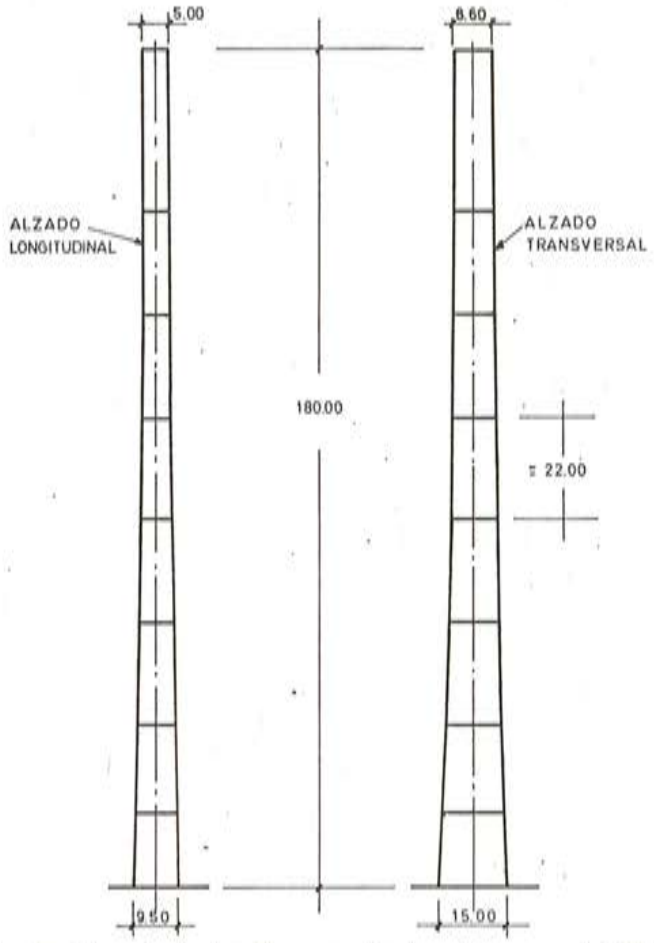


Fig. 3a. Pilas principales del puente Kochertal (Stuttgart). 1979.

No puede plantearse una comparación directa entre el perfil de las pilas del Puente Europa (1963) y el de las del Kochertal, ya que este último presenta organización de pórtico, con empotramiento elástico entre pilas centrales y dintel. Pero, con todo, la superposición de ambas siluetas (obsérvese en la figura 3b el perfil del puente del Kocher sobre la Catedral de Ulm, con su torre de 161 ms. de altura) es suficientemente expresiva de los progresos que en los últimos años se han llevado a cabo en el conocimiento del comportamiento del hormigón armado.

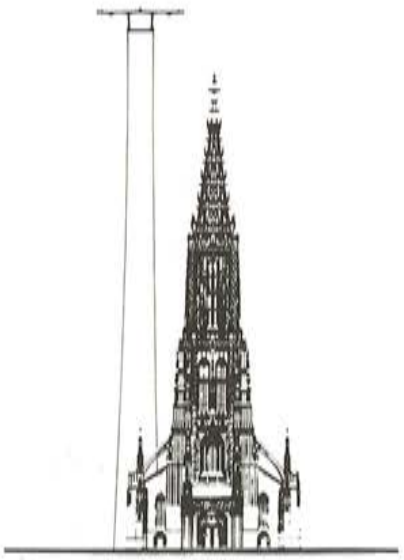


Fig. 3b.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Pero, antes de exponer el modelo desarrollado, convienen dos comentarios. El primero se refiere al diagrama (σ-ϵ) a utilizar para el hormigón bajo cargas de corta duración. El Código Modelo del CEB y la Instrucción EH-80 recogen un diagrama hiperbólico, como más representativo que el parabólico de la deformación del hormigón, y recomiendan su empleo a efectos del cálculo de deformaciones. Resulta claro que el diagrama parábola-rectángulo es adecuado para representar la respuesta tensional del hormigón en el estado límite último, pero no tanto para idealizar sus deformaciones en estados de equilibrio intermedios. Utilizar el diagrama hiperbólico no presenta apenas dificultad numérica. Pero hay que entender que, cada vez que se alcance un estado de equilibrio en la pila en estudio, hay que comprobar que ninguna de sus secciones está agotada y, para ello, hay que determinar el momento último, respuesta de las mismas, precisamente, con el diagrama $(\sigma\text{-}\epsilon)_c$ parabólico-rectangular.

Podemos decir que en esta tesis diversas secciones fueron estudiadas obteniendo sus diagramas M-C con ambos diagramas, encontrándose muy pequeñas diferencias entre uno y otro. Se procedió también al cálculo iterativo de piezas completas utilizando uno y otro diagrama a efecto de deformaciones, y las diferencias en cuanto a carga crítica, por encima unas veces y por debajo otras, no fueron significativas. Como el empleo de dos diagramas complicaba más el proceso del ordenador, optamos por no utilizar más que el parábola-rectángulo.

El segundo comentario previo se refiere a la influencia rigidizadora del hormigón traccionado entre fisuras adyacentes, que en la literatura internacional recibe el nombre de "tension-stiffening": El hormigón existente en la zona de tracción entre dos fisuras consecutivas trabaja a tracción y disminuye la tensión de la armadura, con lo que la deformación media de ésta, ϵ_{sm}, resulta inferior a la que experimenta en la sección fisurada, ϵ_{so}. La consecuencia es un aumento de la rigidez de la pieza (extendida o flectada) respecto a la que se deduce de un diagrama M-C calculado en sección fisurada. En el plano práctico contar con la rigidización del hormigón colaborante entre fisuras significa menores corrimientos en la pila, menores momentos de segundo orden y, por tanto, diseño más económico.

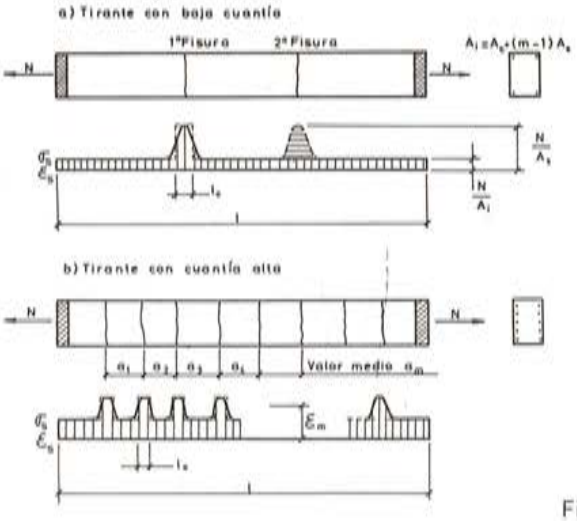


Fig. 4.

El parámetro fundamental que rige esta colaboración del hormigón en el alargamiento medio a tracción es la cuantía geométrica de armadura. En la figura 4 tomada de (13) puede verse el distinto desarrollo de fisuras que se produce en un tirante con baja cuantía (grietas muy separadas) y en otro más armado (fisuras más próximas). Este último se comportará mejor en cuanto a protección del acero contra la corrosión (abertura de cada grieta, más pequeña) pero, en cambio, resultará menos rígido que el poco armado si referimos una y otra elongabilidad a la de sus respectivas secciones desnudas de acero. En el tirante más armado la menor distancia entre grietas conduce a una menor colaboración del hormigón y, en suma, a una deformación media del acero, ϵ_{sm}, más próxima a ϵ_{so} que en el otro.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La figura 5, tomada también de (13) resulta ilustrativa a estos efectos. Allí se representa la relación entre rigideces axiles K_Z^{II} (hormigón fisurado a tracción, con colaboración del hormigón entre grietas) y K_O^{II} (acero desnudo) en función de la cuantía geométrica ρ de la armadura y de la tensión σ_{so} de trabajo del acero ($\sigma_{so} = N/A_s$). Puede verse cómo para tensiones del orden de los 2.400 kp/cm², habitual en nuestras estructuras en las condiciones de servicio, el efecto rigidizador supone un 50 por 100 de incremento para cuantía del 1,5 por 100, un 21 por 100 con el 2 por 100, y se hace despreciable con el 5 por 100 de cuantía. También se observa claramente cómo el efecto rigidizador se desvanece rápidamente cuando la tensión en el acero supera ese valor.

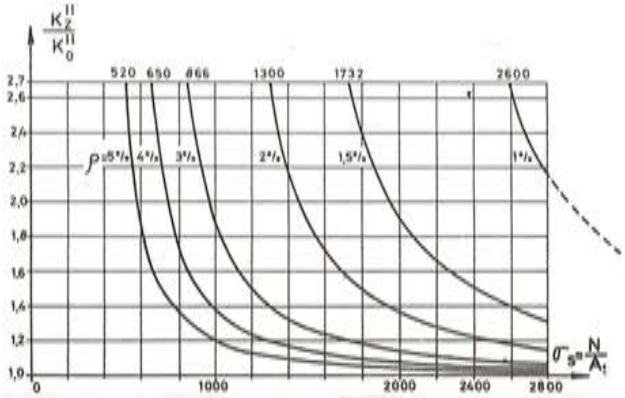


Fig. 5. Relación entre la rigidez K_Z^{II}, que incluye el efecto rigidizador del hormigón entre fisuras ("Tension - Stiffening"), y la rigidez axil del acero desnudo K_O^{II}, para diversas cuantías geométricas ρ, en función de la tensión σ_s en el acero desnudo, con hormigón H-250.

Las secciones de base de las pilas analizadas en este trabajo han dispuesto de secciones de acero que, en la cara exterior, llegaban en algún caso a barras ϕ 32 a 9 cms, siendo normal tener ϕ 32 a 20 cms. Contando con un recubrimiento práctico de 5 cms, esto supone un área cobaricéntrica, por barra, de 180 cm² en el primer caso y 400 cm² en el segundo, y unas cuantías geométricas respectivas de 4,4 por 100 y 2 por 100. La colaboración rigidizante del hormigón entre fisuras debe, así, ser muy baja. Es cierto que a medida que subimos procedemos a cortar barras, de modo que esas cuantías disminuirán y podrá contarse más con tal colaboración.

Sin embargo, hay que observar que las secciones cuyas curvaturas más influyen en el corrimiento transversal de la cabeza de la pila son las de la base. Optamos por ello por no incluir este efecto favorable en nuestro modelo. Pero debe quedar claro que, siempre que se tenga presente que tanto la permanencia de la tensión como la repetición de cargas lo reducen a 1/2 ó 1/3 de su valor inicial, se puede contar con ese factor rigidizador.

2. INDICE Y CONTENIDO DE LOS CUATRO ARTICULOS

I) Estudio de la sección de hormigón armado

De acuerdo con lo ya expuesto, el objetivo final de nuestro estudio es la verificación de una pila esbelta frente a los estados límites últimos de "inestabilidad" global del elemento estructural o de "rotura" de alguna de sus secciones, y todo ello teniendo presentes los efectos de 2º orden.

Como veremos más adelante, este efecto de 2º orden es importante, llegando a dar incrementos de momentos flectores que superan a veces el 50 por 100 del valor del momento de primer orden.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Ello exige una evaluación tan precisa como sea posible de las deformaciones del élemento pila. Para ello, habrá que obtener a nivel de sección la ligazón existente entre los esfuerzos normales que la solicitan con la deformación que en ella producen.

Puesto que los corrimientos normales a la directriz de una pieza son la doble integral de sus curvaturas, se concluye la necesidad de disponer de la ley que suministra aquélla en función de la solicitación externa de la sección. Y, puesto que el elemento pila de puente es claramente espacial, necesitaremos obtener las relaciones existentes a nivel de sección genérica entre el axil (N) y los flectores en planos principales (M_x, M_y) con las curvaturas en ambos planos (C_x, C_y). El proceso, conceptual y práctico, seguido para ello constituye la materia de este primer artículo.

En relación con los esfuerzos transversales, cortante y torsor, hay que señalar que tienen un carácter secundario frente a los importantes esfuerzos normales que actúan sobre la pila. Pensemos, por ejemplo, que el peso propio de uno de estos elementos puede fácilmente alcanzar las 3.000 ó 6.000 toneladas. Añadido ello a la fuerte rigidez torsional de las secciones cajón, resulta que las deformaciones originadas por los esfuerzos transversales, cortante y torsor, son muy pequeñas frente a las de flexión, y no se han tenido en cuenta en el análisis. Nosotros las hemos evaluado en una pila de 120 m de altura y, aún contando con los esfuerzos transversales de segundo orden, hemos podido comprobar que son realmente despreciables.

II) Estudio de la pila esbelta:

El análisis de las pilas altas de viaductos con inercia variable y peso propio importante, que puede ser del mismo orden e incluso mayor que las cargas que reciben del dintel, no puede abordarse con ninguno de los métodos simplificados que presentan las Normas actuales, los cuales están pensados para soportes de sección y armadura constante, como son en general los de estructuras de edificación.

El método de análisis puesto a punto, que puede calificarse de "exacto" según la actual Normativa, supera las dificultades que presenta el análisis, doblemente no lineal, de estructuras esbeltas de H.A., a saber:

–No linealidad geométrica, consistente en que las deformaciones del elemento influyen en los esfuerzos que solicitan a éste.

–No linealidad de respuesta del material, que se traduce en unas relaciones $M_x - M_y - C_x - C_y$ no lineales, dependientes del axil y del factor tiempo, a causa de la fluencia del hormigón.

En esencia, el método propuesto busca la estabilidad o inestabilidad de la deformada que adopta la pila en estudio ante un conjunto de cargas que la solicitan, a través de un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas, al mismo tiempo que verifica la situación de sus secciones frente al estado límite último de agotamiento resistente.

Los resultados del método se han contrastado con los de cuatro programas de investigación sobre inestabilidad de soportes esbeltos, habiéndose confrontado con un total de 39 resultados experimentales, 21 de los cuales corresponden a cargas de aplicación rápida y 18 a cargas de larga duración.

El resumen estadístico de la mencionada comparación ofrece, para la relación "resultado del ensayo/resultado del modelo", un valor medio de 1,053, siendo la desviación típica

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

del 11 por 100, valores ambos que indican una buena aproximación del modelo matemático y del programa del ordenador que lo desarrolla a la realidad del comportamiento físico de los soportes esbeltos.

Se comparan también los resultados del método propuesto con los que suministra el método de análisis basado en la teoría de la deformada senoidal (5), para el caso de soportes de sección y armadura constante, a los que es aplicable esa teoría, habiéndose obtenido una concordancia casi total.

Resultado importante de este trabajo es la confirmación numérica de la pérdida de rigidez que la pila experimenta en uno de sus planos principales, cuando es solicitada por fuerzas contenidas en el otro. Es, en concreto, la flexibilización que aparece en el plano longitudinal cuando la pila se ve sometida, simultáneamente, a un fuerte viento transversal.

III) Influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el comportamiento de pilas esbeltas en ménsula:

Se aplican de forma sistemática los programas de ordenador que desarrollan el proceso operativo del método propuesto a diferentes pilas, en las que varían su geometría o distribución de armaduras y las cargas aplicadas, analizando la influencia que en su comportamiento y carga última resistida tienen tales parámetros.

IV) Pilas altas de puentes construídos por avance en voladizo:

La técnica de construcción de tableros de puentes de hormigón pretensado por avance en voladizo comenzó a desarrollarse en Alemania en la década de los años cincuenta. Hoy en día, esta técnica se considera como la más adecuada y económica para los puentes con luces comprendidas entre unos 60 y 150 metros, habiéndose llegado con este método constructivo a salvar vanos superiores a los 200 metros, como en el puente de Hamana (Japón), construído en 1976 (240 m de luz) o el de la Isla de Koror (EE.UU.), posterior al anterior, que llega a 241 metros.

La construcción de estos importantes viaductos ha llevado consigo, en muchas ocasiones, la de pilas de gran altura (figura 3), pudiendo afirmarse que estas últimas estructuras están muy ligadas al procedimiento de construcción de tableros de puentes por avance en voladizo.

Es en este tipo de pilas, en las que a causa de los desequilibrios inducidos por el procedimiento constructivo aparece con toda su fuerza el problema resistente, donde nos plantearemos la problemática global de su proyecto, construcción y seguridad.

En el cuarto y último Artículo, se incluyen amplias consideraciones relativas a la seguridad del elemento en T, exento durante la construcción, y, sobre la base de la vigente Instrucción EH-80, se especifican las diversas hipótesis de cálculo que, en dicha fase, deben contemplarse en un puente de este tipo. La importancia de las solicitaciones derivadas de los esfuerzos desequilibrados que, según la Normativa actual, deben considerarse, nos conduce a recomendar una revisión de los coeficientes de seguridad γ_f, en estrecha relación con el nivel de control de precisión geométrica de la obra.

Con objeto de "barrer" adecuadamente el campo de luces óptimo del procedimiento constructivo de avance en voladizo, se han elegido tres tipos de dintel, con luces principales de 140, 100 y 70 metros, y, dentro de cada uno, tres pilas diferentes, de hasta 120 metros de altura, buscando cubrir en mayor o menor medida, los diferentes casos posibles.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Verificando sucesivos diseños de geometría y armaduras, se ha llegado a lo que consideramos soluciones óptimas que, dentro del buen estilo arquitectónico de los puentes actuales, minimizan el gasto de materiales.

Los resultados de este estudio se presentan en forma tabulada, intentando que puedan servir de guía y orientación a los proyectistas en el diseño de este tipo de pilas, y ofreciendo criterios de predimensionamiento que permitan un primer encaje de las mismas.

3. HIPOTESIS BASICAS ADOPTADAS PARA DEFINIR LOS DIAGRAMAS AXIL-MOMENTO-CURVATURA

Son las siguientes:

1ª Las secciones normales a la directriz del elemento estructural en estudio se mantienen planas y normales a la misma durante la deformación.

Esta hipótesis es particularmente válida en elementos esbeltos como los que se estudian, y una buena verificación experimental es la que aparece reflejada en la figura 6 obtenida de FOURE B. (11).

En ella se muestra la evolución de deformaciones a lo largo del tiempo de la sección central de un soporte de 4,50 metros de longitud, solicitado en sus extremos con dos cargas iguales de 28,5 toneladas, que actúan con la misma excentricidad.

En el momento t_o de la puesta en carga se comprobó la planeidad de secciones, como puede verse en la figura.

Por efecto de las deformaciones diferidas de fluencia del hormigón, las flechas de esta sección crecieron con el tiempo y, con ellas, los momentos flectores que la solicitaban. En consecuencia, la sección fue modificando la posición de su plano de deformaciones, buscando equilibrar los momentos crecientes. A los 196 días de su carga, la pieza llegó a la rotura. Los diferentes planos de deformación registrados en distintos momentos a lo largo de este ensayo, efectuado en el Centro de Ensayo de Estructuras de Saint-Rémy-les-Chevreuse (Francia) muestran la validez de la hipótesis de planeidad de las secciones deformadas, según hemos admitido en este estudio.

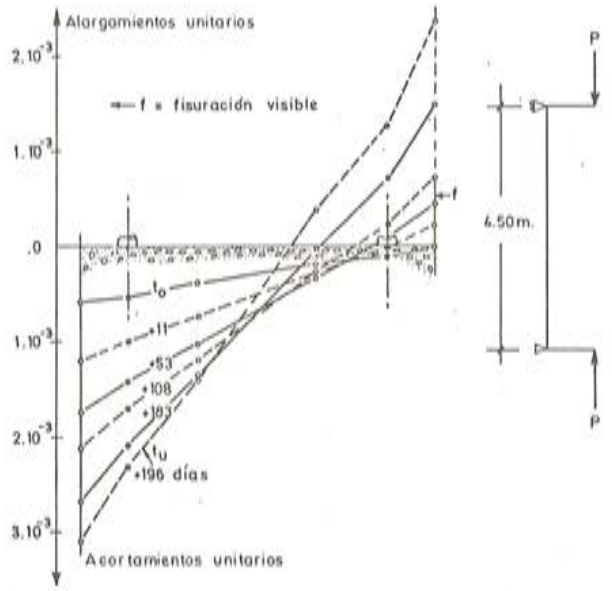


Fig. 6. Deformaciones de la sección media de un soporte en función de la duración de la carga. Se conserva a lo largo del ensayo la planeidad de la sección. FOURE, 1978, (11).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

2ª Existe perfecta adherencia entre el hormigón y el acero. Bajo la acción de las solicitaciones, las armaduras tienen la misma deformación que el hormigón que las envuelve.

3ª El diagrama tensión-deformación adoptado para el hormigón, bajo cargas de corta duración, es el parábola-rectángulo definido por la Instrucción EH-80 (10) en su artículo 26.6

Bajo cargas de larga duración admitiremos como diagrama $\sigma_c - \epsilon_c$ para el hormigón el que resulta de sustituir en el diagrama de corta duración los valores de ϵ por $\epsilon(1 + \varphi_t)$, siendo φ_t el coeficiente de fluencia en el instante en que estemos estudiando la sección (figura 7).

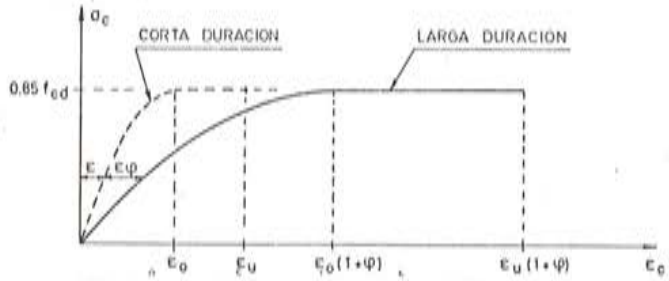


Fig. 7. Diagrama tensión-deformación del hormigón para cargas de corta y larga duración.

En el caso de que sobre el elemento estructural en estudio actúen cargas con carácter de permanencia y otras de tipo instantáneo, para evaluar el efecto de las deformaciones diferidas del hormigón, se admite la hipótesis del coeficiente de fluencia reducido, consistente en afectar al coeficiente φ_t comentado de dos factores reductores α y β, iguales respectivamente al cociente entre los esfuerzos axiles de larga duración y los totales, suma de los anteriores y de los de corta duración de aplicación, y al cociente de los momentos flectores producidos por las cargas que actúan con carácter de permanencia y los totales.

$$\alpha = N_{LD}/N_T \; ; \; \beta = M_{LD}/M_T \; ; \; \varphi^* = \alpha \, . \, \beta \, . \, \varphi$$

Se denomina a φ^*, factor que amplificará las deformaciones ϵ del diagrama $(\sigma\text{-}\epsilon)_c$ de corta duración, "coeficiente de fluencia reducido".

Esta forma simplificada de considerar los fenómenos de fluencia está recogida en el apartado 14.4.2 del Código Modelo CEB-FIP, 1977 (7). También aparece citada en el Boletín núm. 93, 1973, del CEB en su capítulo M-42-215 y en el Apéndice C1 del "Manuel de Calcul flambement-instabilité" del CEB, 1974, siendo comparada en este último con dos métodos de cálculo más laboriosos y precisos ("rate of creep method" y "strain hardening method") con resultados satisfactorios.

A. MORISSET, 1976 (15) y B. FOURE, 1978 (11), son autores que han recogido este método del coeficiente de fluencia reducido en sus trabajos.

En concreto, FOURE, en su excelente estudio "Pandeo de soportes teniendo en cuenta la fluencia del hormigón" (11), hace una investigación exhaustiva de dicha hipótesis, confrontando 314 casos estudiados de acuerdo con la misma y con un "método de referencia" (11) más potente y laborioso, que realiza el análisis del soporte en dos fases, de carga sostenida durante un cierto período de tiempo, seguido de una carga rápida que lleva la pieza a un estado límite último. Método que, a su vez, fue contrastado con 163 ensayos experimentales

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

de larga duración con resultados aceptables. Los resultados estadísticos de esta confrontación para la relación entre cargas últimas que proporciona el método de referencia y el del coeficiente de fluencia reducido arrojaron un valor medio de 1,01 y un coeficiente de variación de 0,03, siendo 0,95 el mínimo resultado obtenido y 1,14 el máximo, llegándose por tanto a la conclusión de que en los casos normales ambos métodos dan resultados análogos.

La hipótesis del coeficiente de fluencia reducido puede pues aceptarse, en orden a los buenos resultados que proporciona en comparación con los que dan los ensayos de inestabilidad de soportes solicitados por cargas de carácter permanente e incrementos de carga de corta duración de aplicación, y con los de otros métodos de cálculo más laboriosos, y en orden a la notable simplificación que introduce en el proceso de cálculo.

En la tesis doctoral de L. VILLEGAS (17), en que se comparan resultados de ensayos de inestabilidad con los obtenidos con el método de cálculo que se propone en la misma y en el cual se adopta la hipótesis del coeficiente de fluencia reducido para la verificación de pilas sometidas a cargas de larga duración e incrementos de carga instantánea, se analizan 8 soportes sometidos a este tipo de cargas, obteniéndose resultados satisfactorios.

4ª Se admiten dos tipos de diagramas tensión-deformación para los aceros, según que se trate de aceros de dureza natural o estirados en frío, de acuerdo con el Artículo 25 de la Instrucción EH-80.

5ª El estado límite último de rotura de la sección por solicitaciones normales, sin considerar los efectos de fluencia, queda definido por los dominios de deformación que preconiza la Instrucción EH-80 en su artículo 36, como expresión de los distintos estados de deformaciones de agotamiento, caracterizados por las deformaciones de la fibra de hormigón más comprimida y la fibra de armadura más traccionada, que corresponden a todas las solicitaciones normales capaces de agotar la sección, desde la tracción simple a la compresión simple, al ir variando la profundidad del eje neutro.

Los dominios de deformaciones últimos con efectos de fluencia, quedan definidos en la figura 8.

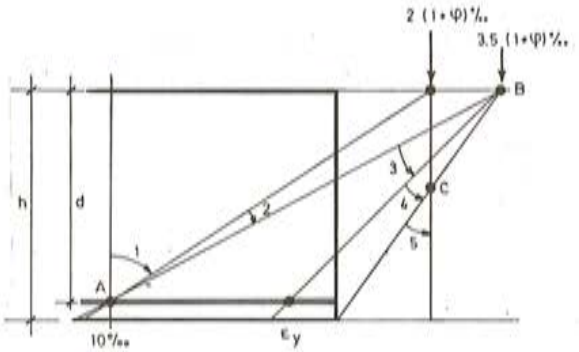


Fig. 8. Dominios de deformaciones últimas con efectos de fluencia.

6ª La deformación respuesta de una sección debida a la acción de unos esfuerzos normales N y M queda definida por la curvatura, tangente del ángulo α que forma el plano de deformaciones, y por la profundidad x del eje neutro o por la deformación ϵ_c de la fibra superior del hormigón.

La relación entre la solicitación y la deformación se obtiene de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, igualando la resultante de tensiones del hormigón y del acero, funciones de la deformación, con los esfuerzos aplicados.

De la figura 9, resulta:

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

$$N = N_c + \Sigma N_{si} \qquad (1)$$

$$M = N_c\,(h/2 - d_c) + \Sigma N_{si}\,(h/2 - d_{si}) \qquad (2)$$

siendo

$$N_c = \int_0^x b_{ci} \cdot \sigma_{ci}(\epsilon_{ci}) \cdot dx$$

$$N_{si} = A_{si} \cdot \sigma_{si}(\epsilon_{si})$$

donde las tensiones en el hormigón y en el acero son función de la deformación existente en la fibra correspondiente.

A causa de que ni la relación entre deformaciones y tensiones ni la ley de anchos de fibras y secciones de acero son continuas, las relaciones (1) y (2) que definen la superficie mecánica de la sección no conducen a una expresión analítica de la misma, siendo preciso recurrir a integración numérica para su definición. En lo que sigue se describe el procedimiento que se ha seguido en este estudio para obtenerla.

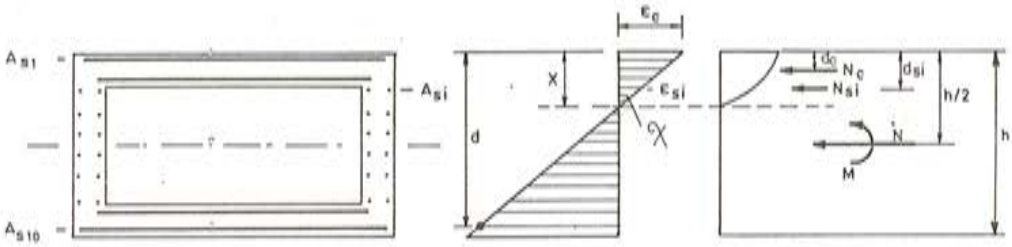


Fig. 9. Deformación respuesta de una sección ante una solicitación N y M.

4. OBTENCION DE LOS DIAGRAMAS AXIL-MOMENTO-CURVATURA. PROGRAMA MCPR

Partiendo de las hipótesis definidas en el apartado anterior, que están de acuerdo con las directrices generales que para el cálculo de secciones sometidas a solicitaciones normales figuran en el artículo 36 de la Instrucción EH-80 (10) y en el capítulo 10 del Código Modelo del C.E.B. (7), se describe a continuación un programa de cálculo electrónico que permite obtener las relaciones existentes entre el momento flector y la curvatura de una sección de hormigón armado, con geometría y armadura simétrica, para un esfuerzo axil prefijado.

La sección en estudio se discretizará en rectángulos elementales en la forma que indica la figura 10

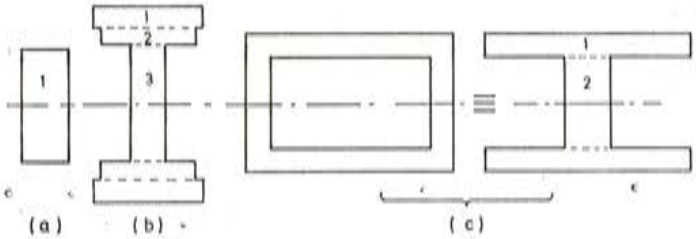


Fig. 10. Discretización de diversos tipos de secciones.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Los datos básicos para el programa son:

- Número de rectángulos y de capas de armaduras que hay en la mitad superior de la sección.
- Base y altura de cada rectángulo elemental.
- Area de cada capa de armaduras y distancia de ésta a la arista superior.
- Resistencias características del acero y hormigón.
- Tipo de acero utilizado, dureza natural o estirado en frío.
- Coeficientes de seguridad en los materiales.
- Coeficiente de cansancio para el hormigón.
- Coeficiente φ de fluencia.
- Valor del axil N_o para el que deseamos obtener el diagrama M-C (momento-curvatura).
- Error con que queremos aproximar el axil respuesta de la sección con el axil dato, expresando este error como una fracción del axil máximo que soporta la sección a compresión simple.

Con los datos anteriores el programa MCPR realiza las siguientes operaciones:

a) Obtención del estado límite último que tiene como axil respuesta el valor prefijado N_o

Se trata de encontrar, de entre las infinitas rectas de deformación que definen las posibles situaciones de rotura de la sección (fig. 8), aquélla que dé lugar a una distribución de tensiones que tenga como axil resultante N_o. Obtenida tal recta, el momento respuesta y la curvatura adoptada por el plano de deformaciones constituyen el punto final, situación de rotura, del diagrama que buscamos.

Dado un plano de deformación, la respuesta en esfuerzos, axil y flector, a que da lugar es inmediata. Sin embargo, el problema inverso consistente en obtener el plano de deformación correspondiente a unos determinados valores de axil y flector sólo admite solución iterativa, mediante aproximaciones sucesivas.

El proceso numérico para obtener la recta de deformación deseada, tiene su origen en el desarrollado por J.J.ARENAS para su estudio de soportes de hormigón armado en teoría de 2° orden (5), y en la descripción que de dicho proceso hace A.C. APARICIO en (3), capítulo 4°. Para poder plantear un proceso iterativo que sea convergente, hay que conocer la forma del diagrama que relaciona el axil con la curvatura en todos los estados de agotamiento de la sección (fig. 11). Al componerse éste de dos ramas, es preciso obtener los 3 puntos característicos siguientes:

Punto 1 (Agotamiento por compresión simple).

$$\text{Axil} = A_c \cdot \sigma_c + A_s \cdot \sigma_s$$

$$\text{Curvatura} = 0$$

Siendo σ_c y σ_s las tensiones del hormigón y del acero que corresponden a una deformación $\epsilon = 0{,}002\ (1 + \varphi)$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

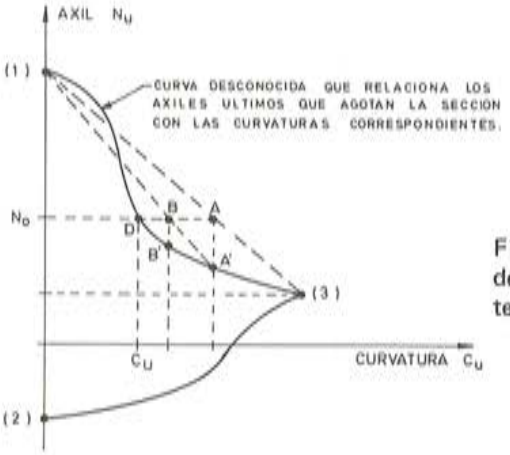


Fig. 11. Obtención del punto último, en rotura, del diagrama momento-curvatura correspondiente al axil prefijado N_o.

Punto 2 (Agotamiento por tracción simple)

$$\text{Axil} = A_s \cdot \sigma_s$$
$$\text{Curvatura} = 0$$

Siendo σ_s la tensión correspondiente a $\epsilon = 0{,}01$

Punto 3 (Agotamiento con curvatura máxima)

– Curvatura = $(0{,}0035\,(1 + \varphi) + 0{,}01) / d$

Siendo d el canto útil de la sección.

– Axil, el correspondiente a la curvatura definida y a una deformación $\epsilon_c = 0{,}0035\,(1 + \varphi)$ en la fibra más comprimida del hormigón.

Este valor se obtiene con una subrutina (RESHAR) que da la respuesta en axil y momento flector de una sección discretizada en la forma vista (fig. 10) frente a un plano de deformaciones definido por su curvatura χ y la deformación ϵ_c de la fibra superior, de acuerdo con la hipótesis 6ª indicada en el apartado 3 de este estudio y en la figura 9.

Obtenidos los tres puntos básicos, y en función del valor del axil prefijado N_o respecto al axil del Punto 3 elegiremos dos de ellos como puntos de partida del proceso iterativo que nos conducirá al plano respuesta deseado.

En la figura 11 se ha supuesto que el axil prefijado N_o es superior al axil correspondiente al Punto base (3). Se elegirán, pues, este punto y el (1) como puntos de partida.

Obtenida la curvatura que corresponde a la intersección de N_o con la recta 1-3, punto A, podemos conocer la deformación última ϵ_c que le corresponde. En este caso, con N_o superior a N_3, la recta de deformación última pertenece a uno de los dominios 3, 4 ó 5 de la figura 8 y, con la pendiente conocida, se obtiene ϵ_c. Con la curvatura y la deformación ϵ_c, la subrutina RESHAR nos proporciona el axil último, punto A' y el momento que corresponden a esa recta de deformación dada. Este axil obtenido distará en general de N_o en una cantidad superior al error prefijado. Tomando como nuevo punto de partida el recién calculado (punto A') de la curva $N_u - C_u$, repetiremos el proceso hasta acercarnos a la situación buscada (punto D), cuyo axil-respuesta difiere de N_o menos del error prefijado, y cuyo momento y curvatura habremos llegado a conocer.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

b) Obtención de los puntos interiores del diagrama momento-curvatura para axil N_o.

Estos puntos representan las diferentes posiciones posibles de equilibrio, en los cuales, para las rectas de deformación que les corresponden, la sección responde con el axil prefijado N_o y un momento flector variable.

Hemos obtenido, en (a), el punto final del diagrama M-C y sabemos que éste pasa por el origen, pues siempre hay una situación de compresión simple (momento y curvatura nulos) que equilibra el axil N_o. Para determinar los puntos interiores del diagrama, se ha dividido la curvatura última, ya conocida, en 49 partes, de modo que el diagrama M-C queda definido por 50 puntos.

Para cada valor de la curvatura χ_i ($C_i = \text{tg}\ X_i$) se debe encontrar el plano concreto, definido por ϵ_{ci}, que nos dé como respuesta el axil N_o. Para ello se utiliza un proceso iterativo similar al ya descrito (figura 12). Se parte de dos puntos base:

Punto 1

$$-\epsilon_c = 0 \quad \text{y curvatura} \quad \chi_i$$

–Axil que para el anterior plano de deformaciones nos proporciona la subrutina RESHAR.

Punto 2

– Curvatura χ_i y ϵ_c el correspondiente a un estado límite último, valor que depende de cómo sea χ_i respecto a la curvatura de la recta de deformación que pasa por los pivotes B y C de los "dominios de deformaciones últimas" (figura 8).

– Axil que corresponda a la anterior recta de deformaciones.

Hemos obtenido pues el diagrama momento-curvatura para el axil prefijado N_o.

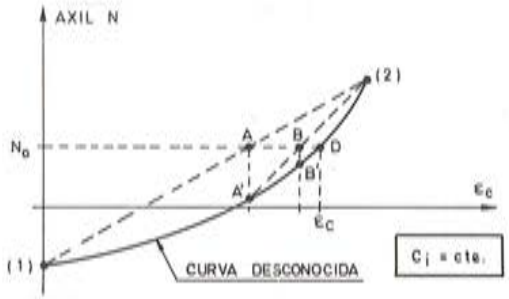


Fig. 12. Obtención de la deformación ϵ_c que, con la curvatura C_i, fijada, define un plano de equilibrio con axil respuesta N_o.

El programa MCPR permite también obtener el "diagrama de interacción" de la sección definida, lugar geométrico (N_u , M_u) de los puntos correspondientes a las rectas de deformación últimas expuestas en la figura 8, así como la "superficie mecánica" de la misma, definida por 20 curvas momento-curvatura para axiles fijos que varían desde N = 0 hasta el 95 por 100 del axil que agota la sección a compresión simple, creciendo en cada curva un 5 por 100 de este valor.

Recordemos, (5), que la "superficie mecánica" de una sección es el lugar geométrico N-M-C de todos los posibles estados de equilibrio y últimos que puede alcanzar aquélla. Su frontera es una curva alabeada, cuya proyección sobre el plano (Axil-Flector) es precisamente el diagrama de interacción (Nu, Mu) de la sección.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

5. RESULTADOS DE MCPR EN UNA SECCION EN CAJON

Como ejemplo de aplicación del programa descrito en el apartado anterior, se ha procesado con el mismo la sección representada en la figura 13. Se trata de un "cajón" de 2,40 m de canto y 8,00 m de anchura, con un espesor de pared de 0,30 m, perteneciente a una pila esbelta de puente.

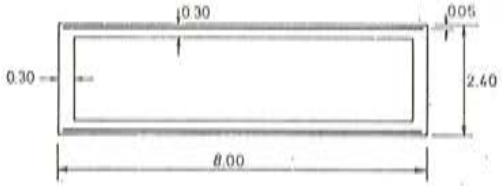


Fig. 13. Sección en cajón analizada.

Los materiales tienen unas resistencias de cálculo de 300 kp/cm² el hormigón y 4.200 kp/cm² el acero, siendo éste de dureza natural.

Como armadura principal se han dispuesto, junto a cada cara exterior, 40 barras ϕ 25, que dan una cuantía: $\omega = A_s \cdot f_{yd} / A_c \cdot f_{cd}$, igual a 0,094. Se ha considerado otra posibilidad de armado con 120 ϕ 32 en la anterior posición, los cuales conducen a una cuantía ω igual a 0,460.

En la figura 14 aparecen los diagramas momento-curvatura para cuatro valores fijados del axil. Estas curvas son la intersección de la superficie mecánica de la sección con planos N = constante, y a través de ellas se regulará la deformabilidad del elemento estructural pila que estudiaremos en el próximo artículo.

Se observa cómo, en función del axil y momento que soliciten cada sección, tendremos una mayor o menor curvatura que, doblemente integrada a lo largo de la pieza, se traducirá en mayores o menores deformaciones y, en consecuencia, en esfuerzos de segundo orden más o menos importantes.

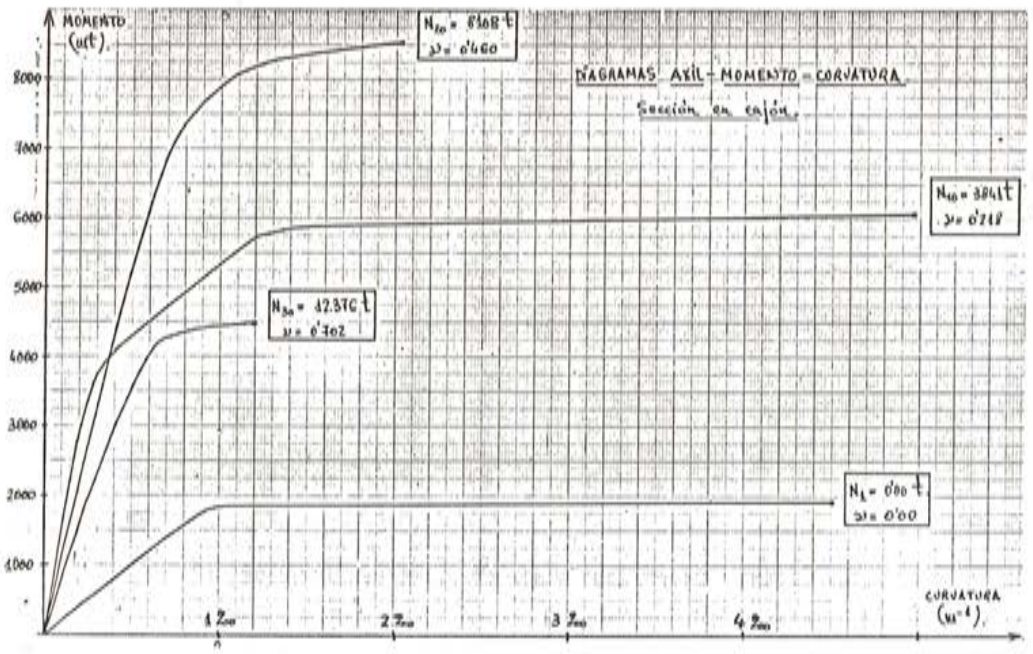


Fig. 14.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Es interesante resaltar que en el caso de la flexo-compresión plana la solución al problema básico que nos ha llevado a estudiar la sección, y que no es otro que el de obtener la curvatura respuesta a unos determinados esfuerzos actuantes en la misma, es inmediata a partir de la relación M-C correspondiente al axil actuante, por simple intersección de esta curva con la ordenada de valor M (fig. 14). Veremos, en el siguiente apartado, cómo esto no es tan directo en el caso de la flexo-compresión biaxial.

En la figura 15, fijado un valor del axil, se representan las dos curvas M-C que corresponden a la sección, según sea la cuantía de armaduras de la misma. Podemos ver cómo para ese axil y un valor del momento inferior al máximo que pueda resistir la sección menos armada, ésta es menos rígida que la que tiene cuantía mayor, en el sentido de presentar mayores curvaturas a igualdad de solicitación. Como era de esperar, un incremento de armaduras, además de ampliar el campo de esfuerzos últimos resistidos, hace más rígida a la sección.

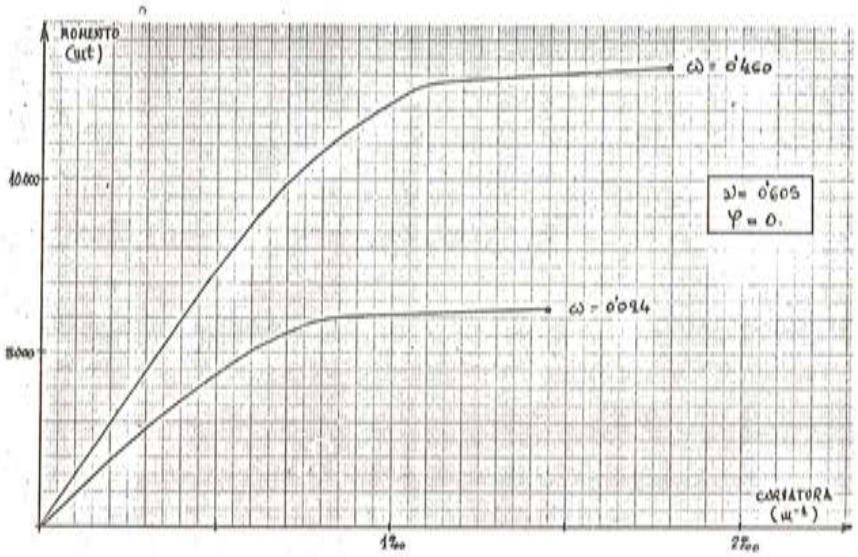


Fig. 15. Diagrama M-C para axil N = 10.665 t (ν = 0,605). Influencia de la cuantía ω de armaduras.

En la figura 16 queda reflejado el efecto desfavorable que supone el tiempo de permanencia con que una carga actúa sobre la sección.

Para un determinado axil y momento aplicados de forma permanente (hemos considerado un coeficiente de fluencia $\varphi = 2$), la curvatura que adopta la sección es bastante mayor, que la que presentaría bajo carga instantánea ($\varphi = 0$). Esto se traducirá en que la pieza bajo cargas permanentes tendrá mayores flechas y, en consecuencia, mayores momentos flectores de segundo orden, que los que aparecerían bajo cargas instantáneas.

6. SECCION SIMETRICA DE HORMIGON ARMADO SOLICITADA POR UNA FLEXO-COMPRESION BIAXIAL

6.1. Solicitación respuesta de una sección frente a un plano de deformaciones (χ, ϵ_c) con orientación α prefijada

Frente a una orientación genérica α del plano de deformaciones, y para una posición arbitraria de éste (definida por su curvatura χ y la deformación ϵ_c de la fibra más comprimi-

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

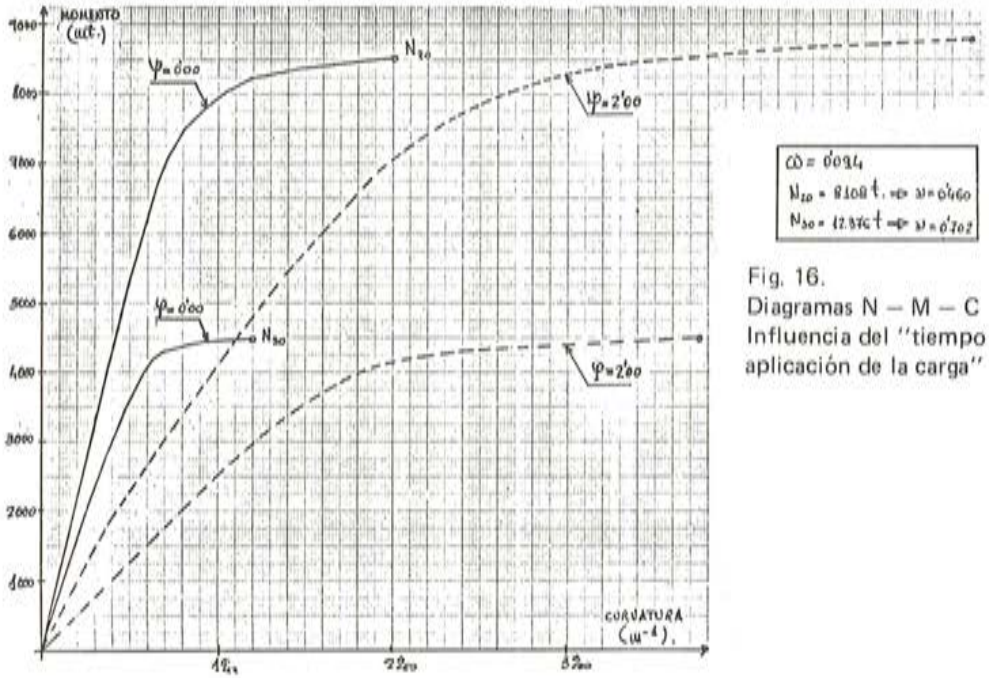


Fig. 16.
Diagramas N – M – C
Influencia del "tiempo de aplicación de la carga"

da del hormigón), la sección responderá con unas tensiones cuya resultante referida a dos ejes principales vendrá dada por un esfuerzo axil N y dos momentos flectores, M_x y M_y , (figura 17):

Se verifica (figuras 17 y 18):

$$C_x = C \cdot \cos\alpha$$

$$C_y = C \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Siendo $C = \operatorname{tg}\chi$ la curvatura total de la sección.

C_x y C_y son las curvaturas asociadas a los momentos flectores M_x y M_y cuya resultante M es un vector cuya orientación no coincidirá en general con la del plano de deformaciones .

Las diferentes posiciones posibles del plano de deformaciones, con orientación α, definen situaciones en que la sección se encuentra en un estado de equilibrio o de rotura.

En concreto, cuando las rectas de deformación pivotan alrededor de los tres puntos base de los dominios últimos de deformación, definidos en la figura 8, obtenemos como solicitación respuesta un conjunto de esfuerzos N, M_x, M_y que pertenecen a una curva alabeada, lugar geométrico de puntos en situación de rotura, para la orientación α. Para las orientaciones 0 y 90 grados del plano de deformaciones, este lugar geométrico es una curva plana: los conocidos diagramas de interacción en flexión plana de la sección.

El conjunto de todas las situaciones de rotura posibles de la sección, para las diferentes posiciones α del plano de deformaciones, constituye una superficie denominada "superficie de interacción de la sección" (ref. 3).

Todos los diagramas que aparecen en lo que sigue de este apartado se han obtenido mediante la aplicación del programa MCES, que se comentará a continuación, a la sección en cajón definida en la figura 19.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

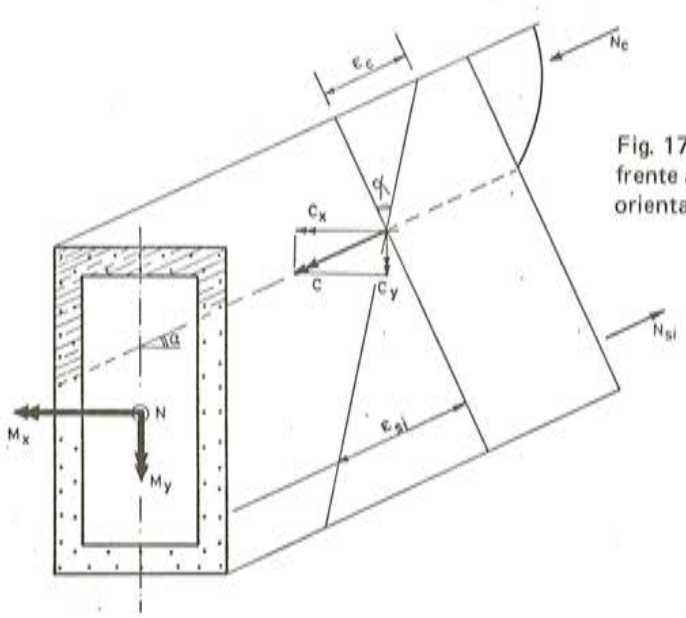


Fig. 17. Respuesta $N - M_x - M_y$ de una sección frente a un plano de deformaciones (χ ε_c) con orientación α.

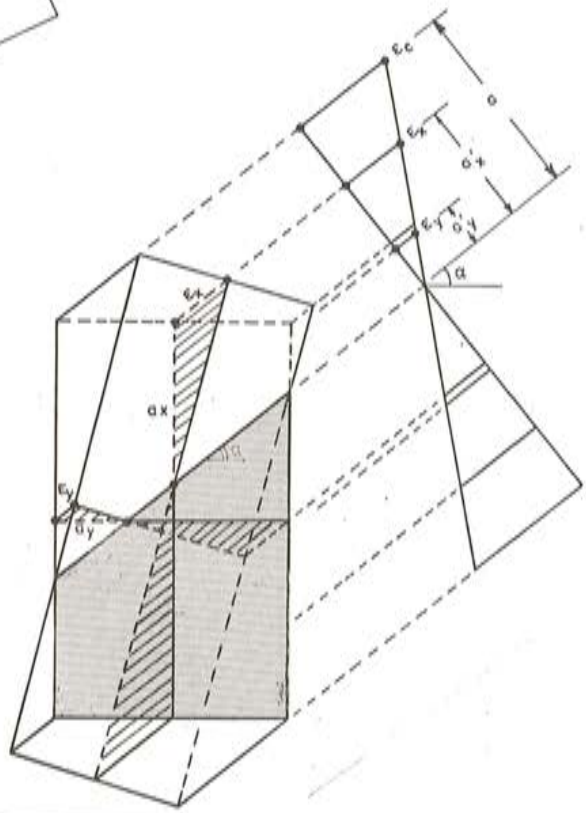


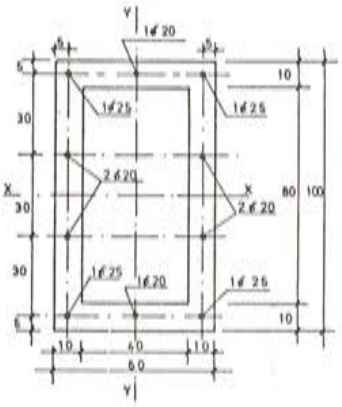
Fig. 18. Relación entre las curvaturas respecto de los ejes principales, C_x y C_y, con la curvatura total C y la orientación α del plano de deformaciones.

$$C = \frac{\varepsilon_c}{a} \qquad C_x = \frac{\varepsilon_x}{a_x} \qquad C_y = \frac{\varepsilon_y}{a_y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_c}{a}\, a'_x = \frac{\varepsilon_c}{a} \cdot a_x \cdot \cos\alpha$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_c}{a}\, a'_y = \frac{\varepsilon_c}{a} \cdot a_y \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\boxed{C_x = C \cdot \cos\alpha} \qquad \boxed{C_y = C \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$



f_{cd} = 2000 ton/m²
ε_{cu} = -0.0035
F_{yd} = 3620 Kg/cm²
ACERO ϕ ESTIRADO EN FRIO

Fig. 19. Sección en cajón que se analizará con el programa MCES de este estudio.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

6.2 Relaciones $N - M_x - M_y - C - \alpha$. Programa MCES

Vamos a generalizar lo expuesto para el caso de actuación de un esfuerzo normal excéntrico en un plano principal de una sección simétrica de hormigón armado, al caso de que la fuerza actúe con excentricidades respecto a los dos planos principales.

El conjunto de planos de deformación de la figura 17, que para la orientación α prefijada responden con un axil N = constante, da lugar a unas relaciones entre los momentos flectores $M_x - M_y$ y la curvatura C. Si mantenemos el valor del axil y variamos la orientación α del plano de deformaciones, para cada α tendremos unas relaciones $M_x - M_y - C$ diferentes.

El conjunto de valores $M_x - M_y - C$ para todas las posibles orientaciones α del plano de deformaciones, y con valor axil N = constante, constituyen en la flexo-compresión biaxial el equivalente de la relación momento-curvatura, M – C, para axil fijo, de la flexo-compresión plana.

En la figura 20 se representan las mencionadas relaciones $(M_x - C)$ y $(M_y - C)$, correspondientes a la sección cajón definida en la figura 19, para diez valores del ángulo α y un axil N igual a 300 toneladas.

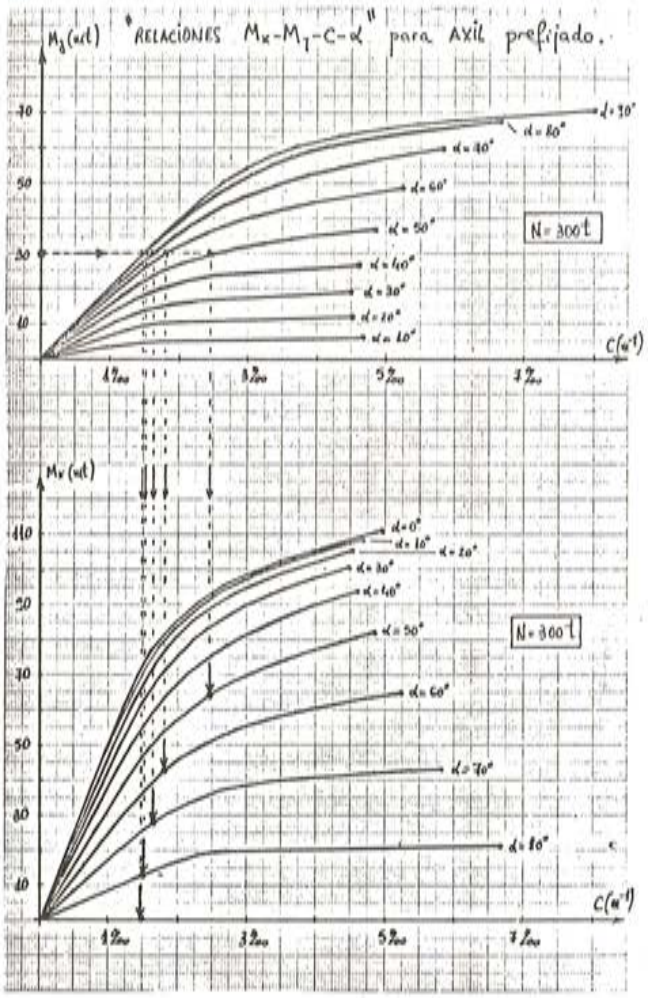


Fig. 20. Diagramas $(M_y - C)$ y $(M_x - C)$ para axil prefijado N = 300 t y diferentes orientaciones α del plano de deformaciones. Sección en cajón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Estas relaciones, que nos permitirán ligar los esfuerzos actuantes en una sección con la deformación de la misma, están obtenidas con el programa de cálculo electrónico MCES, cuyas principales características son:

- Las hipótesis adoptadas son las mismas que definimos en 3.
- El programa está preparado para analizar secciones rectangulares y en cajón.
- Los datos referentes a materiales son similares a los vistos en MCPR.
- La geometría de la sección de hormigón se define por la base y canto del rectángulo exterior, e interior, cuando sea sección en cajón.
- En cada grupo de armaduras se definen su área y sus coordenadas X e Y respecto a los ejes principales de la sección.
- Una vez fijada la orientación α del plano de deformaciones y el valor del axil para el que deseamos conocer la relación ($M_x - M_y - C$), los procesos de búsqueda del estado límite último que tiene como axil respuesta el valor prefijado N y de obtención de los puntos interiores de los diagramas ($M_x - C$) y ($M_y - C$) siguen las líneas marcadas en 4.

Las subrutinas que dan la respuesta $N - M_x - M_y$ de la sección de hormigón frente a un plano genérico de deformaciones permiten obtener aquélla de modo exacto, al ir sumando la respuesta de los diferentes trapecios en que queda dividida la sección por rectas paralelas al eje neutro, sometidos a una ley variable de tensiones.

En la figura 21 se esquematiza lo comentado, siendo en este caso la respuesta total suma de la que proporcionan cuatro figuras elementales y obteniéndose la de cada trapecio por integración analítica del modo que indica la figura 22.

Esta forma de actuar, frente a la usual de integración numérica, en que se divide el área solicitada en un número finito y suficientemente grande de rectángulos elementales, a los que se asocia la tensión media de cada trozo actuando uniformemente, presenta, además de la exactitud, la ventaja de una mayor rapidez de cálculo.

En el caso de una sección en cajón, la respuesta se obtiene por diferencia entre la del rectángulo exterior y la del interior.

La respuesta del acero, referida a los ejes principales, es inmediata a partir del área y coordenadas de cada grupo de armaduras, y de la tensión asociada a la deformación correspondiente del mismo.

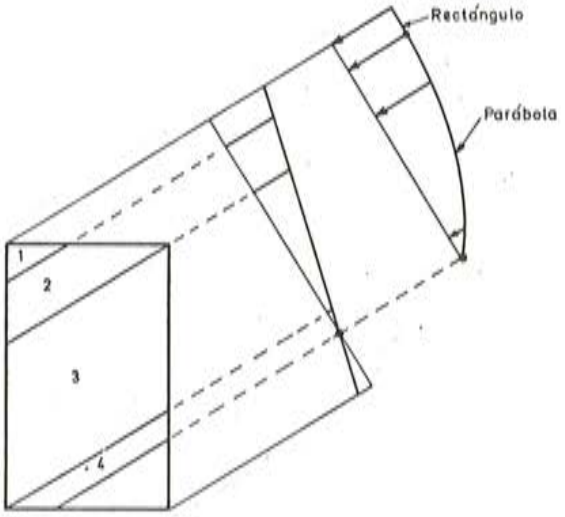


Fig. 21. Obtención de la respuesta de la sección de hormigón.

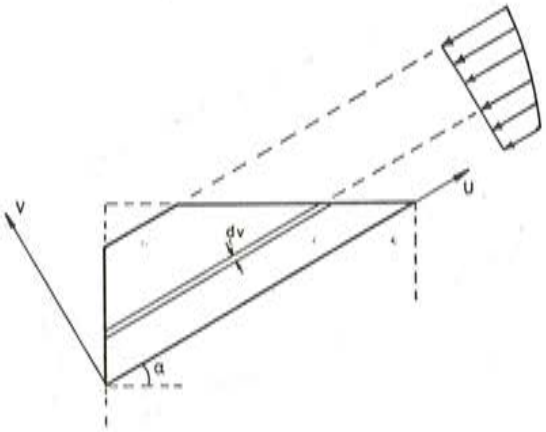


Fig. 22. Respuesta exacta de un trapecio.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

6.3 Deformación respuesta $C_x - C_y$ de una sección, frente a unos esfuerzos $N - M_x - M_y$.

Al analizar la sección sometida a una flexo-compresión contenida en un plano principal de la misma, hemos visto cómo la obtención de la curvatura que adopta la sección frente a unos esfuerzos N y M que la solicitan es inmediata a partir de la relación momento-curvatura correspondiente al axil actuante.

En el caso de la flexo-compresión biaxial, la obtención de la curvatura total C y del ángulo α de orientación del plano de deformaciones que adopta la sección frente a unos esfuerzos $N - M_x - M_y$ que la solicitan, no es inmediata como en el caso anterior.

En efecto, obtenidas las relaciones $(M_x - C - \alpha)$ y $(M_y - C - \alpha)$ para el axil actuante en la sección (figura 20), que como ya se comentó son el equivalente a la única curva $M - C$ de la flexo-compresión plana, observamos que los valores de C y α correspondientes a los pares $M_x - M_y$ no están definidos.

Ante este problema, parece que deberíamos proceder por tanteos de C y α hasta conseguir unos valores concretos ante los cuales la sección respondiera con los pares M_x y M_y y el axil N prefijados.

Se describe a continuación un método de actuación que resuelve el anterior problema de forma rápida, y que es apropiado para ser utilizado en un proceso de cálculo electrónico.

Tenemos unos esfuerzos (N_o, M_{xo}, M_{yo}) actuando sobre una sección y queremos conocer las curvaturas (C_x, C_y) que adopta la misma, o lo que es lo mismo, la curvatura total C y el ángulo α de orientación del plano de deformaciones, habida cuenta de las relaciones que ligan estos cuatro valores (fig. 18).

Sea la sección de la figura 19 solicitada por un axil

$$N_o = 300 \text{ t. y unos pares } M_{xo} = 60 \text{ mt. y } M_{yo} = 30 \text{ mt.}$$

El primer paso a dar es el de la obtención de las familias de curvas $(M_x - C - \alpha)$ y $(M_y - C - \alpha)$ para el axil actuante:

$$N_o = 300 \text{ t.}$$

Para definir adecuadamente estas relaciones, consideraremos una variación del ángulo α desde 0° a 90° con incrementos de 2° (figura 20, en que, por claridad, sólo se han representado las curvas para valores de α múltiplos de 10°).

Partiendo de estas curvas, el siguiente paso consiste en obtener la relación $(M_x - C - \alpha)$ para el valor de M_{yo} fijado.

En la figura 20 se ve cómo la intersección de la recta $M_{yo} = 30$ mt con las diferentes curvas $(M_y - C)$ para α variable definen unos valores de las curvaturas que, a su vez, permiten obtener los valores de M_x asociados a ellos y al α correspondiente. Tenemos, pues, una serie de puntos $(M_x - C - \alpha)$ en los cuales N y M_y son constantes e iguales a los esfuerzos actuantes.

Nos queda por obtener con precisión el punto final de estas curvas $(M_x - C)$ y $(\alpha - C)$ (fig 23), debiendo actuar para ello con las relaciones entre valores últimos de $(M_y - M_x)$, $(M_y - C)$ y $(M_y - \alpha)$ para el axil N = 300 t, que se han deducido de las relaciones básicas $(M_x - C - \alpha)$ y $(M_y - C - \alpha)$ que definimos previamente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

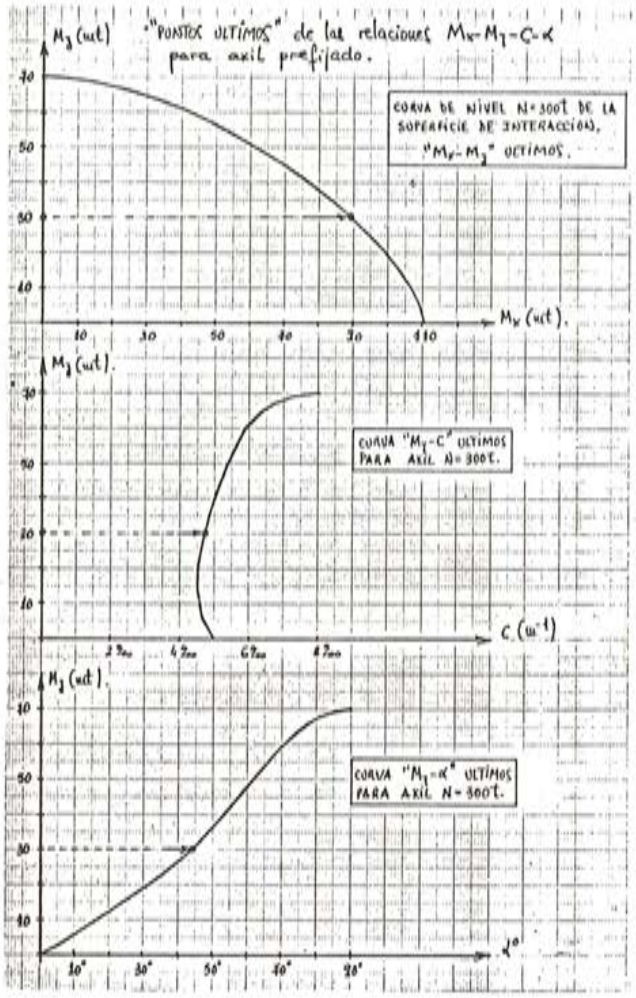


Fig. 23.

Conocidas así las relaciones (M_x – C) y (α – C) para el axil N_o y momento M_{yo} fijados (figura 24), la curvatura C buscada queda inmediatamente definida por intersección de la recta M_{xo} = 60 mt. con la primera de las curvas para, con tal valor de la curvatura, obtener en la segunda el valor α de orientación del plano de deformaciones.

Con las relaciones (M_x – C – α) de la figura 24, quedan por tanto, definidas las curvaturas buscadas C_x y C_y, respecto a los planos principales, dada la relación que las liga con C y α (figura 18).

El proceso, reflejado gráficamente en las figuras 20, 23 y 24, es el que llevaremos a cabo en cada sección de una pila solicitada por cargas contenidas en sus dos planos principales, cuando estudiemos su deformabilidad en el espacio.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

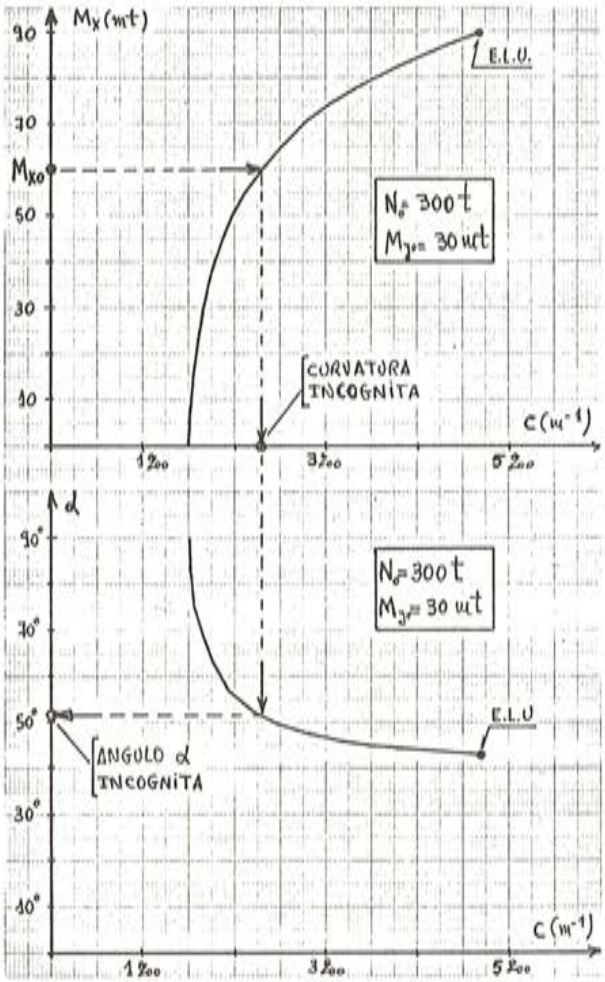


Fig. 24. Relaciones $M_x - C - \alpha$ para axil N_o y momento M_{yo} prefijados, que permiten obtener la curvatura C y el ángulo α de orientación del plano de deformaciones correspondientes a los esfuerzos N_o, M_{xo}, M_{yo}.

En resumen, el proceso consiste en:

- Obtención de las relaciones ($M_x - M_y - C - \alpha$) (figura 20) para el axil que actúa en la sección.
- Deducir de ellas la relación $M_x - C - \alpha$ para el momento M_y actuante, figura 24.
- Obtener de estas últimas, y para el flector M_x concreto, la curvatura total C y el ángulo α, y deducir de estos valores, los de C_x y C_y.

De la figura 24 sale inmediatamente la curva que liga el momento flector M_x con la curvatura correspondiente C_x, para esfuerzo axil N y momento M_y prefijado.

En la figura 25 se representan las relaciones ($M_x - C_x$) para un axil N prefijado y diferentes valores del momento M_y. En ella se observa que:

- Para $M_y = 0$, tenemos la conocida relación entre el momento y la curvatura en el otro plano principal, para esfuerzo axil prefijado.
- La existencia de un momento M_y no nulo hace que la sección alcance un estado límite último para un valor menor del otro momento principal M_x. Véase cómo para M_y crecientes, la ordenada final de cada curva correspondiente, que representa la situación de estado límite último, es cada vez más pequeña. Conclusión, por otro lado, bien conocida y puesta de manifiesto en los diagramas ($M_{xu} - M_{yu}$),

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

curvas de nivel (N = cte) de la superficie de interacción de la sección, representados en la figura 23 (zona superior).

- La existencia de M_y, además de originar una deformación C_y en su plano principal correspondiente, "ablanda" la sección en el otro plano principal, en el sentido de aumentar las curvaturas en el mismo, respecto al caso en que no existiera dicho par M_y.

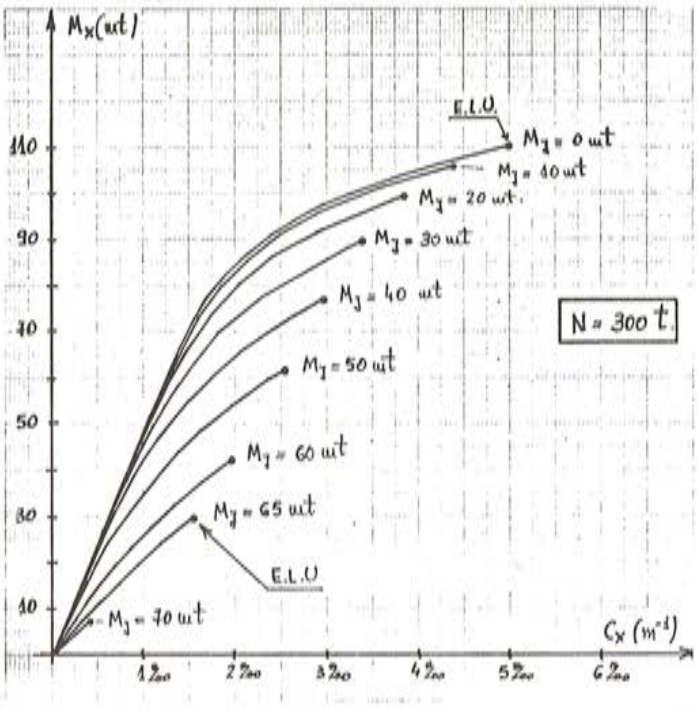


Fig. 25. Relaciones entre el momento y la curvatura del plano principal X, $M_x - C_x$, para axil N y momento M_y prefijados.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

La bibliografía que se expone a continuación es la que se ha consultado para el estudio que abarcan los 4 artículos mencionados en la Introducción a éste que nos ocupa. En consecuencia las citas que se hagan en los artículos restantes se referirán aquí.

(1) AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. "Building code requirements for reinforced concrete". ACI 318-77. Detroit U.S.A. 1977.

(2) APARICIO A.C. "Estudio de la evolución hasta la rotura por solicitaciones normales de tableros contínuos de puente de hormigón armado o pretensado". Tesis doctoral. Universidad de Santander. E.T.S. de Ingenieros de Caminos. Abril 1980.

(3) ARENAS J.J. "Análisis de la capacidad resistente de secciones de hormigón armado-pretensado por medio de superficies de interacción" Revista Hormigón y Acero núm. 114. Primer trimestre 1975.

(4) ARENAS J.J. "Puentes construídos por voladizos sucesivos" Revista Hormigón y Acero núm. 123. Segundo Trimestre 1977.

(5) ARENAS J.J. "Cálculo de soportes de hormigón armado en teoría de segundo orden. Abacos de dimensionamiento directo". Editores Técnicos Asociados, S.A. 1980.

(6) BREEN-FERGUSON "Long cantilever columns subject to lateral forces". ACI Journal. Noviembre 1969.

(7) CEB-FIP "Model code for concrete structures". Bulletin d' information núm. 117. Diciembre 1976.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

(8) CEB-FIP "Manual of buckling and instability" Bulletin d' information núm. 123. Diciembre 1977.

(9) CHANG-FERGUSON. "Long hinged reinforced concrete colums". Journal of the American Concrete Institute. Enero 1963.

(10) COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado". EH - 80. Servicio de Publicaciones del M.O.P.U. 1980.

(11) FOURE B. "Le flambement des poteaux compte tenu du fluage du béton". Annales de l'ITBTP. Marzo 1978.

(12) GREEN R.- BREEN J. "Eccentrically loaded concrete columns under sustained load". ACI Journal. Noviembre 1969.

(13) LEONHARDT F. "Vorlessungen über Massivbau", Tomo 4°, Springer, 1977.

(14) MATHIVAT J. "Construcción de puentes de hormigón pretensado por voladizos sucesivos". Editores técnicos asociados, S.A. 1980.

(15) MORISSET A. "Stabilité des piles et des pylones". Annales de l' ITBTP. Enero 1976.

(16) ROBINSON-FOURE-BOURGHLI. "Le flambement des poteaux en béton armé chargés avec des excentricités différentes à leurs extremités". Annales de l' I.T.B.T.P. Noviembre 1975.

(17) VILLEGAS L.M. "Análisis en teoría de segundo orden de pilas altas de viaductos. Aplicación al proyecto de pilas de puentes construidos por avance en voladizo". Tesis Doctoral. Universidad de Santander. ETS de Ingenieros de Caminos. Noviembre 1981.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Tratamiento en nivel 2 de seguridad del cálculo de secciones de hormigón armado

Por:
Pedro Miguel Sosa
Dr. Ingeniero de Caminos
Profesor Agregado de Hormigón de la
E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Valencia

1. INTRODUCCION

En los últimos sesenta años, el avance de la tecnología y de los métodos de análisis de las estructuras han llevado a una preocupación acerca de la introducción de los conceptos sobre seguridad en los cálculos de las estructuras. El método clásico basado en las tensiones admisibles encontraba serios inconvenientes.

La introducción de la seguridad en los cálculos de estructuras en general es un aspecto tan importante como puede ser el propio método de cálculo. Por ello, en los últimos tiempos, se ha despertado un gran interés en el establecimiento de conceptos que sirviesen de base común a los diferentes tratamientos de la seguridad y a las posibles formulaciones para la aplicación práctica.

El primer concepto que ha necesitado ser clarificado es el de la propia seguridad. Actualmente se está de acuerdo en definirlo por el grado de certeza de que la estructura no alcanzará alguno de un conjunto de estados no deseables que pueden acontecer durante la vida de la obra.

Pero para introducir en los cálculos este grado de certeza es necesario valorarla, por lo que se hace necesaria una medida de la seguridad. Esta medida debe ser objetiva y válida para cualquier caso, pero desgraciadamente, tal medida no existe, según lo expresa el "Manual de Seguridad de las Estructuras" (1).

Fundamentalmente tres son los motivos por los que no existe una medida objetiva y válida con suficiente generalidad:

I) Los accidentes que no guardan relación con los cálculos efectuados, tales como las erosiones, por ejemplo.

II) El margen de seguridad medido por alguna magnitud física sólo resulta útil para problemas concretos, y por tanto, no existe una magnitud física adecuada para obtener un margen de seguridad aplicable a todos los problemas, por ejemplo, la tensión no es una magnitud física adecuada para el estudio del equilibrio estático de una estructura.

III) La probabilidad tampoco puede considerarse como medida invariante y universal de la seguridad porque sólo tiene sentido definir probabilidades sobre un conjunto coherente de acontecimientos, y estos resultan algunas veces difíciles de definir. Por otra parte, hay incertidumbres que no se pueden probabilizar objetivamente, con lo que no se pueden definir probabilidades mas que en un marco concreto, y la probabilidad obtenida no será mas que un dato convencional.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Sin embargo, ya desde un principio, se pensó que la introducción de los métodos estadísticos y del cálculo de probabilidades al análisis estructural iba a dar resultados realmente sorprendentes, por lo que hubo gran profusión de investigaciones en este sentido. El primer intento que se conoce es debido a Max Meyer en 1926 (2) y desde esta fecha hasta la actualidad numerosos autores se han dedicado al desarrollo del probabilismo y a la formulación práctica de las conclusiones con él obtenidas. En las referencias (3) a (12) pueden encontrarse trabajos realmente interesantes en esta línea.

Ya en las últimas décadas, sobre todo a partir de la publicación de las Recomendaciones Internacionales CEB/FIP en 1970 (13), se empezaron a realizar numerosos progresos e investigaciones que era necesario armonizar. Para ello, en 1971 se creó una Comisión Mixta Inter-Asociaciones sobre la Seguridad de las Estructuras (Joint Comitee on Structural Safety, J.C.S.S.) por iniciativa del Comité Euro-Internacional del Hormigón (CEB) y junto con otras cinco Asociaciones:

- Convención Europea de la Construcción Metálica (C.E.C.M.).
- Consejo Internacional de la Edificación (C.I.B.).
- Federación Internacional del Pretensado (F.I.P.).
- Asociación Internacional de Puentes y Estructuras (I.A.B.S.E.), y
- Reunión Internacional de Laboratorios de Ensayo de Materiales (R.I.L.E.M.).

En 1974 se acordó que las Recomendaciones CEB/FIP deberían insertarse en un contexto más amplio que abarcara a la Reglamentación Técnica de la Ingeniería Civil mediante un Sistema Unificado Internacional. El primer volumen de este grupo de reglamentos lo constituye las "Reglas Unificadas Comunes a los diferentes tipos de Obras y Materiales", y el segundo al "Código Modelo CEB/FIP para las estructuras de hormigón" (14).

La publicación de estos dos volúmenes ha clarificado en gran medida el tratamiento de la seguridad. Principalmente el primer volumen, "Reglas Unificadas Comunes", establece los principios generales sobre seguridad y diseño estructural, y define los posibles tratamientos de la seguridad, clasificándolos en tres niveles:

Nivel 3: Método basado en la teoría de cálculo de probabilidades en toda su magnitud, sin restricciones en la representación de las incertidumbres.

Nivel 2: Método en el que las acciones, resistencias de materiales y secciones son representadas por unas distribuciones conocidas o supuestas (definidas por el tipo, media y desviación típica) y en el que se acepta un cierto nivel de fiabilidad expresado normalmente por un índice de seguridad designado por β.

Nivel 1: Método según el cual los niveles apropiados de fiabilidad se obtienen por aplicación de unos coeficientes parciales de seguridad a los valores característicos de las variables de base.

Los métodos de nivel 2 y 3 utilizan probabilidades cuyos valores están condicionados a las hipótesis apriorísticas que atribuyen a las distribuciones de los datos.

El método de nivel 1, también llamado método semiprobabilista, tiene en cuenta solamente ciertos elementos probabilizables y cubre las otras incertidumbres por medio de factores empíricos a los que se les atribuye un cierto significado. Este método es el más simple y el mejor conocido actualmente. Al desarrollo de este método ha contribuido eficazmente el C.E.B. dando origen al "Manual de Seguridad de las Estructuras", ya en su segunda edición aparecida en 1980 (1) que corrige, revisa y amplía la primera edición de 1975 (15).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Sin embargo, el tratamiento en nivel 1 de la seguridad lleva en algunos casos, como más adelante se verá, a simplificaciones cuya validez y grado de aproximación deben ser contrastadas con métodos de nivel 2 ó 3. En este sentido, este trabajo estudia las simplificaciones que, en nivel 1, se introducen al problema de las solicitaciones vectoriales, mediante un tratamiento de nivel 2 y en el caso de verificación del estado límite de agotamiento por solicitaciones normales.

2. EL PROBLEMA DE LAS SOLICITACIONES VECTORIALES

En el método semiprobabilista (nivel 1), la ecuación de base para la verificación de un estado límite se plantea de forma general como

$$\gamma_{F3}\, S\,(\gamma_{F1i}\, \gamma_{F2i}\, F_{ki}) \leqslant R\,(f_{kj}/\gamma_{mj})$$

expresión conocida cuyo primer miembro representa la solicitación actuante de cálculo y el segundo miembro la solicitación resistente correspondiente al estado límite analizado. Estas solicitaciones pueden ser de tipo escalar o por el contrario pueden tener carácter vectorial, como es el caso del estado límite de agotamiento por solicitaciones normales en el que la solicitación tiene dos componentes, un esfuerzo axil y un momento flector.

Cuando la solicitación es vectorial, la ecuación de base para la verificación del estado límite correspondiente no se formula en forma escalar, sino que debe expresar que la solicitación actuante de cálculo tiene que quedar en el interior de un dominio de resistencia cuyo límite está definido por la solicitación resistente. Cuando el estado límite es el de agotamiento por solicitaciones normales, la solicitación resistente última está definida por el diagrama de interacción (fig. 1) y la ecuación de base para la verificación del estado límite debe expresarse por:

$$\overline{S}\,(N_d, M_d) \subseteq \overline{R}\,(N_u, M_u)$$

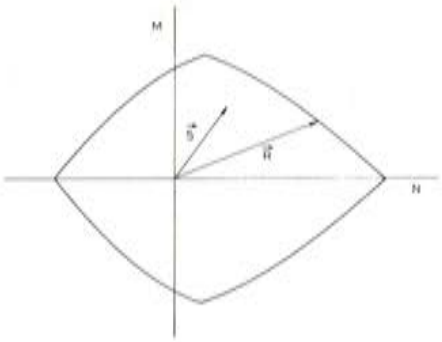


Fig. 1. Solicitación actuante y solicitación resistente sobre el plano N, M.

Sin embargo, en nivel 1, es necesario hacer degenerar el problema vectorial a escalar, lo que supone tener que realizar una serie de simplificaciones, cuya validez o grado de aproximación va a ser contrastada por tratamiento de nivel 2 en este trabajo.

En el apartado 3 se exponen las simplificaciones que afectan a la solicitación resistente y en el apartado 4 las simplificaciones admitidas en la solicitación actuante. Posteriormente, y después del planteamiento teórico del tratamiento de nivel 2 adoptado en este trabajo y que se expone en el apartado 5, se contrastan los resultados tanto a nivel de solicitación resistente, apartado 6, como a nivel de solicitación actuante, apartado 7.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

3. SOLICITACION RESISTENTE: Simplificaciones del nivel 1

La solicitación resistente es una función vectorial aleatoria, de manera que cada pareja de valores (M, N) tiene una cierta probabilidad asociada de que con su acontecimiento se produzca agotamiento. Esta probabilidad es la función de distribución F_R (M, N).

El diagrama de interacción puede definirse, pues, como el lugar geométrico de los puntos del plano N, M de idéntica probabilidad F_R (M, N)

$$F_R\ (M, N) = cte$$

En el tratamiento de nivel 1, el diagrama de interacción utilizado está asociado a una probabilidad de 0,005,

$$F_R\ (M, N) = 0{,}005$$

Según el cálculo de probabilidades, el diagrama de interacción asociado al fractil 0,005 debe obtenerse por la integral siguiente

$$F_R\ (M, N) = 0{,}005 = \int_G \varphi_S(f_y) \cdot \varphi_c(f_c)\, df_y \cdot df_c \qquad \text{(I)}$$

si se consideran únicamente las resistencias del acero, f_y, y hormigón, f_c, como variables de base aleatorias e independientes entre sí, donde $\varphi_s(f_y)$ y $\varphi_c(f_c)$ son las funciones de densidad de distribución de f_y y f_c, y G es el dominio de agotamiento delimitado, en el plano $f_y - f_c$, por la curva que define la ecuación de estado límite

$$h\ (f_y, f_c, N, M) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Para cada solicitación (N, M) se obtiene una curva diferente del plano $f_y - f_c$, definida por (II), y por consiguiente un dominio de agotamiento G distinto (fig. 2). Así el valor de la integral (I) será una función de la solicitación N, M.

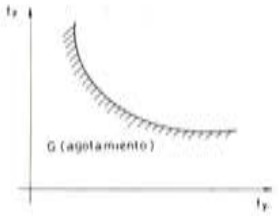


Fig. 2. Dominio de agotamiento sobre el plano $f_y - f_c$.

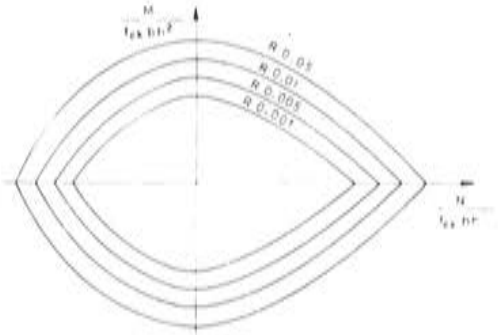


Fig. 3. Diagramas de interacción asociados a fractiles diferentes.

Solamente hay un conjunto de puntos del plano (N, M), para los que la integral (I) da un valor de 0,005, que constituyen el diagrama de interacción asociado a este fractil.

De esta forma pueden obtenerse los diagramas de interacción asociados a cualquier fractil (fig. 3) sin más que cambiar el valor de 0,005 por el fractil deseado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La simplificación del tratamiento en nivel 1 consiste en suponer que la solicitación resistente (Nu, Mu) es exclusivamente función de la resistencia del acero o del hormigón de manera que para la integración de (I) se sustituye la curva, $h(f_y, f_c) = 0$, por dos rectas, $f_y = f_{cd}$, y $f_c = f_{cd}$, (fig. 4).

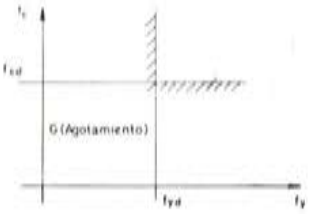


Fig. 4. Dominio de agotamiento simplificado para nivel 1 en el plano $f_y - f_c$.

Si la solicitación resistente no depende más que de f_y es decir, es independiente de f_c, la condición que impone la ecuación (I) es

$$F_R\ (M, N) = 0{,}005 = \int_0^{f_y} \varphi_s(f_y) \cdot df_y = F_s(f_{yd})$$

lo que indica que el valor de cálculo de f_{yd} debe ser el correspondiente al fractil 0,005. En la hipótesis de independencia de la solicitación resistente con f_c el diagrama de interacción asociado al fractil 0,005 es, por tanto

$$h\ (M, N, f_{yd}) = 0$$

Análogo razonamiento puede hacerse si la solicitación resistente solo depende de f_c, es decir, es independente de f_y, llegando en este caso a que el diagrama de interacción asociado al fractil 0,005 es

$$h\ (M, N, f_{cd}) = 0$$

Si en el primer caso, poco importa el valor de f_c y en el segundo lo mismo ocurre con f_y, el diagrama de interacción en nivel 1 puede expresarse por

$$h\ (M, N, f_{yd}, f_{cd}) = 0$$

tal y como se emplea normalmente.

4. SOLICITACION ACTUANTE: Simplificaciones del nivel 1

La solicitación actuante $\overline{S}$ (N, M) también es una función aleatoria, de manera que cada par de valores N, M tiene una cierta probabilidad de ocurrencia definida por la función de densidad f_s (M, N).

En el establecimiento de esta función habrá que tener en cuenta:

- la situación para la que se verifica el estado límite (servicio, construcción, etc.) y, en consecuencia, la duración de referencia,
- el caso de carga o distribución espacial de las acciones, y
- la combinación de acciones, es decir, el hecho de que la probabilidad de que dos acciones variables se presenten simultáneamente con un cierto valor es inferior a la de una de ellas actuando aisladamente con el mismo valor.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Mediante la definición de los valores característicos de las acciones y la aplicación de los coeficientes de seguridad γ_{F1}, γ_{F2} y γ_{F3}, el método semiprobabilista más afinado obtiene un valor extremo de la solicitación actuante N_d, M_d en cada situación, para cada caso de carga, y para cada combinación de acciones más desfavorables.

Pero, para cada situación, caso de carga y combinación de acciones, tanto el esfuerzo axil como el momento flector son funciones aleatorias. Por consiguiente, en la evaluación de la probabilidad de agotamiento P_f debe estudiarse si estas funciones tienen alguna dependencia determinista o aleatoria.

Si ambas funciones son totalmente independientes (coeficiente de correlación nulo, $\rho_{MN} = 0$), la función de densidad conjunta viene dada por el producto de las funciones de densidad de cada variable por separado

$$f_s(M, N) = f_M(M) \cdot f_N(N)$$

Si entre ambas funciones existe una ligadura determinista (coeficiente de correlación unidad, $\rho_{MN} = 1$), el problema vectorial se reduce a un problema escalar, pues las componentes N y M de la solicitación actuante se pueden expresar en función de un solo escalar aleatorio.

Si entre ambas funciones existe una dependencia estadística (coeficiente de correlación entre cero y la unidad, $0 < \rho_{MN} < 1$), esta no puede ser tenida en cuenta, desde un punto de vista teórico, mediante coeficientes parciales. Sin embargo, en nivel 2 es posible introducir el coeficiente de correlación para la determinación de la probabilidad de agotamiento, como se verá en el apartado siguiente.

5. PROBABILIDAD DE AGOTAMIENTO P_f. TRATAMIENTO EN NIVEL 2

La obtención de la probabilidad de agotamiento, con un planteamiento teórico en el que son conocidas las funciones $f_s(M, N)$ y $F_R(M, N)$, es

$$P_f = \int_\Omega f_s(M, N) \cdot F_R(M, N)\, dM \cdot dN \qquad \text{(III)}$$

integral extendida a todo el plano M, N donde están definidas las funciones f_s y F_R.

Para el planteamiento en nivel 2 es preferible formular la integral (III) directamente en función de las variables de base. Si se eligen como tales, M, N, f_y y f_c y se considera que f_y y f_c son independientes entre sí y a su vez independientes de la solicitación actuante M, N, la integral (III) se expresa por:

$$P_f = \int_G f_s(M, N) \cdot \varphi_s(f_y) \cdot \varphi_c(f_c) \cdot dM \cdot dN \cdot d_{fy} \cdot df_c \qquad \text{(IV)}$$

integral extendida al dominio de agotamiento definido por la ecuación de estado límite (II) que representa una hipersuperficie en el espacio definido por M, N, f_y y f_c.

Para su resolución se efectúan una serie de simplificaciones que llevan a determinar una cota superior de la integral (IV). El proceso seguido es el siguiente:

Si las variables de base N y M no son independientes, se escogen otras variables X_N y X_M, que lo sean, para lo cual habrá que hacer un cambio de variables mediante una transformación ortogonal que diagonalice la matriz de varianzas y covarianzas

$$\begin{bmatrix} \sigma_N^2 & \sigma_{MN} \\ \sigma_{NM} & \sigma_M^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(V)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

El cambio de variable será, entonces, de la forma:

$$X_N = a_1 N + a_2 M$$
$$X_M = b_1 N + b_2 M \qquad \text{(VI)}$$

que corresponde a un giro de ángulo α, de los ejes en el plano N, M (fig. 5).

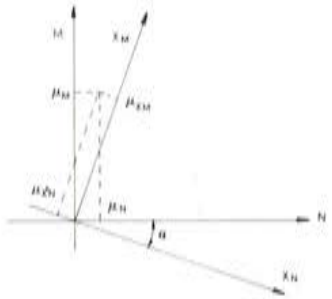


Fig. 5. Expresión gráfica del cambio de variable sobre el plano N, M.

El valor del ángulo α está dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{MN}}{\sigma^2 x_N - \sigma_M^2} = \frac{\sigma_{MN}}{\sigma_N^2 - \sigma^2 x_M}$$

donde $\sigma^2 x_N$ y $\sigma^2 x_M$ son los autovalores de la matriz de varianzas (V), es decir, las varianzas de las nuevas variables X_N y X_M, cuyas expresiones en función de las varianzas de N y M y del coeficiente de correlación son:

$$\sigma^2 x_N = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_N^2 + \sigma_M^2 + \sqrt{(\sigma_N^2 - \sigma_M^2)^2 + 4\, \rho_{MN}^2\, \sigma_N^2\, \sigma_M^2})$$

$$\sigma^2 x_M = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_N^2 + \sigma_M^2 - \sqrt{(\sigma_N^2 - \sigma_M^2)^2 + 4\, \rho_{MN}^2\, \sigma_N^2\, \sigma_M^2})$$

de forma que los coeficientes a_1, a_2, b_1 y b_2 que determinan el cambio de variable serán:

$$a_1 = b_2 = \cos \alpha = \frac{\sigma^2 x_N - \sigma_M^2}{\sqrt{(\sigma^2 x_N - \sigma_M^2)^2 + (\sigma_{MN})^2}}$$

$$-a_2 = b_1 = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sigma_{MN}}{\sqrt{(\sigma^2 x_N - \sigma_M^2)^2 + (\sigma_{MN})^2}}$$

Las nuevas variables x_N, x_M, f_y, f_c son independientes entre sí, pero pueden tener cualquier tipo de distribución de probabilidad. Interesa, para las simplificaciones posteriores manejar variables cuya distribución sea la normal tipificada. Esto se puede conseguir mediante nuevos cambios de variable del tipo.

$$u_i = \Phi^{-1}\, [F(x_i)] \qquad \text{(VII)}$$

donde $F(x_i)$ es la función de distribución de la variable de base x_i (x_N, x_M, f_y ó f_c) y Φ es la función de distribución de la variable normal tipificada.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Todos los cambios de variable afectan también a la ecuación de estado límite (II) transformándose para quedar en función de las nuevas variables u_N, u_M, u_y, u_c, y definiendo así la delimitación del dominio de agotamiento en el nuevo espacio normalizado

$$h\,(N, M, f_y, f_c) = 0 \quad \textit{cambio de variable VI y VII}$$

$$\rightarrow g\,(u_N, u_M, u_y, u_c) = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

El espacio normalizado tiene la propiedad de que todos los puntos equidistantes del origen tienen una misma probabilidad de ocurrencia. La distribución de la norma, que representa a tales puntos,

$$Z^2 = u_N^2 + u_M^2 + u_y^2 + u_c^2$$

es del tipo X^2 de 4 grados de libertad.

El dominio de agotamiento definido por (VIII) es de forma compleja y no permite el cálculo de la probabilidad de agotamiento directamente, sin embargo, resulta fácil obtener una cota de dicha probabilidad, P_f, si se toma como límite del dominio de agotamiento a la hipersuperficie esférica centrada y tangente a la hipersuperficie que define en este espacio la ecuación de estado límite (VIII).

Según Hasofer y Lind (16) la cota de la probabilidad de agotamiento viene dada por la función X^2 de $4 - 1 = 3$ grados de libertad particularizada para la norma β^2 del punto de tangencia de ambas hipersuperficies citadas (fig. 6).

$$P_f = 1 - F_{X_3^2}(\beta)^2$$

donde

$$\beta^2 = \overline{r}_0 \cdot \overline{r}_0 = u_{No}^2 + u_{Mo}^2 + u_{co}^2 + v_{yo}^2 \qquad \text{(IX)}$$

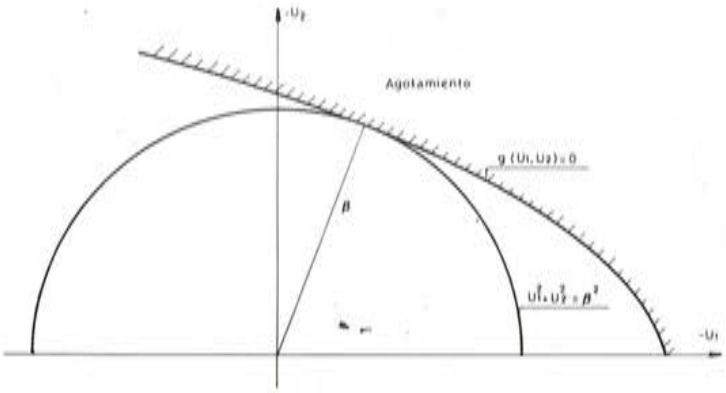


Fig. 6. Expresión simbólica bidimensional de la tangencia entre la hipersuperficie esférica centrada y la hipersuperficie correspondiente al estado límite.

y según las "Reglas Unificadas Comunes" (14), dicha cota puede tomarse de

$$P_f = 1 - \Phi\,(\beta)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

El cambio de variable será, entonces, de la forma:

$$X_N = a_1 N + a_2 M$$
$$X_M = b_1 N + b_2 M \qquad \text{(VI)}$$

que corresponde a un giro de ángulo α, de los ejes en el plano N, M (fig. 5).

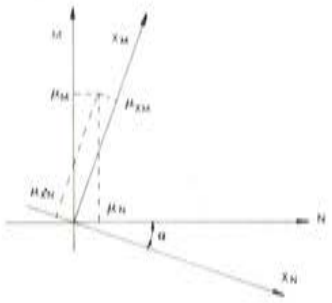


Fig. 5. Expresión gráfica del cambio de variable sobre el plano N, M.

El valor del ángulo α está dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{MN}}{\sigma^2 x_N - \sigma_M^2} = \frac{\sigma_{MN}}{\sigma_N^2 - \sigma^2 x_M}$$

donde $\sigma^2 x_N$ y $\sigma^2 x_M$ son los autovalores de la matriz de varianzas (V), es decir, las varianzas de las nuevas variables X_N y X_M, cuyas expresiones en función de las varianzas de N y M y del coeficiente de correlación son:

$$\sigma^2 x_N = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_N^2 + \sigma_M^2 + \sqrt{(\sigma_N^2 - \sigma_M^2)^2 + 4\, \rho_{MN}^2\, \sigma_N^2\, \sigma_M^2})$$

$$\sigma^2 x_M = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_N^2 + \sigma_M^2 - \sqrt{(\sigma_N^2 - \sigma_M^2)^2 + 4\, \rho_{MN}^2\, \sigma_N^2\, \sigma_M^2})$$

de forma que los coeficientes a_1, a_2, b_1 y b_2 que determinan el cambio de variable serán:

$$a_1 = b_2 = \cos \alpha = \frac{\sigma^2 x_N - \sigma_M^2}{\sqrt{(\sigma^2 x_N - \sigma_M^2)^2 + (\sigma_{MN})^2}}$$

$$-a_2 = b_1 = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sigma_{MN}}{\sqrt{(\sigma^2 x_N - \sigma_M^2)^2 + (\sigma_{MN})^2}}$$

Las nuevas variables x_N, x_M, f_y, f_c son independientes entre sí, pero pueden tener cualquier tipo de distribución de probabilidad. Interesa, para las simplificaciones posteriores manejar variables cuya distribución sea la normal tipificada. Esto se puede conseguir mediante nuevos cambios de variable del tipo.

$$u_i = \Phi^{-1}\, [F(x_i)] \qquad \text{(VII)}$$

donde $F(x_i)$ es la función de distribución de la variable de base x_i (x_N, x_M, f_y ó f_c) y Φ es la función de distribución de la variable normal tipificada.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Todos los cambios de variable afectan también a la ecuación de estado límite (II) transformándose para quedar en función de las nuevas variables u_N, u_M, u_y, u_c, y definiendo así la delimitación del dominio de agotamiento en el nuevo espacio normalizado

$$h\,(N, M, f_y, f_c) = 0 \quad \textit{cambio de variable VI y VII}$$

$$\rightarrow g\,(u_N, u_M, u_y, u_c) = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

El espacio normalizado tiene la propiedad de que todos los puntos equidistantes del origen tienen una misma probabilidad de ocurrencia. La distribución de la norma, que representa a tales puntos,

$$Z^2 = u_N^2 + u_M^2 + u_y^2 + u_c^2$$

es del tipo X^2 de 4 grados de libertad.

El dominio de agotamiento definido por (VIII) es de forma compleja y no permite el cálculo de la probabilidad de agotamiento directamente, sin embargo, resulta fácil obtener una cota de dicha probabilidad, P_f, si se toma como límite del dominio de agotamiento a la hipersuperficie esférica centrada y tangente a la hipersuperficie que define en este espacio la ecuación de estado límite (VIII).

Según Hasofer y Lind (16) la cota de la probabilidad de agotamiento viene dada por la función X^2 de $4 - 1 = 3$ grados de libertad particularizada para la norma β^2 del punto de tangencia de ambas hipersuperficies citadas (fig. 6).

$$P_f = 1 - F_{X_3^2}(\beta)^2$$

donde

$$\beta^2 = \overline{r}_0 \cdot \overline{r}_0 = u_{No}^2 + u_{Mo}^2 + u_{co}^2 + v_{yo}^2 \qquad \text{(IX)}$$

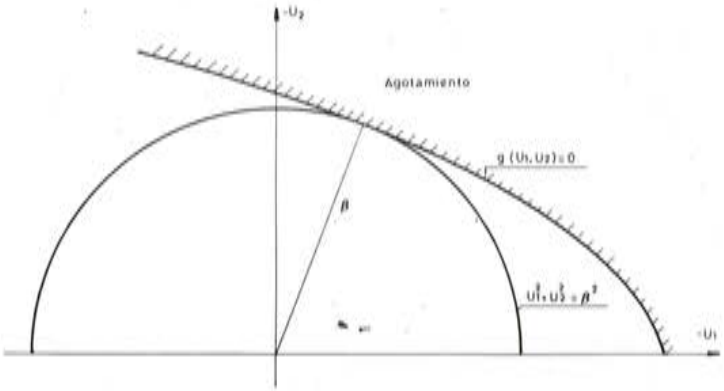


Fig. 6. Expresión simbólica bidimensional de la tangencia entre la hipersuperficie esférica centrada y la hipersuperficie correspondiente al estado límite.

y según las "Reglas Unificadas Comunes" (14), dicha cota puede tomarse de

$$P_f = 1 - \Phi\,(\beta)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

donde Φ expresa la integral normal usual.

De esta forma, la sola obtención de la norma β^2 del punto de tangencia entre la hipersuperficie correspondiente al estado límite y la hipersuperficie esférica centrada proporciona directamente la cota de probabilidad de agotamiento P_f y viceversa, si se requiere cierta probabilidad de agotamiento P_f puede imponerse que la norma β^2 del punto más "cercano" de la hipersuperficie límite del dominio de agotamiento sea:

– Según Hasofer y Lind $\beta^2 = F^{-1}_{\chi^2_3}(1 - P_f)$

– Según las Reglas Unificadas Comunes $\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f)$ (X)

Para hallar la norma del punto de tangencia (fig. 6) según (IX) hay que hallar previamente sus coordenadas. Hasofer y Lind (16) y Parkinson (17) proponen el método del gradiente para su obtención, cuya formulación puede expresarse mediante la fórmula iterativa,

$$\overline{r}_{on} = \frac{\overline{r}_{on-1} \cdot \overline{\text{grad}}\, g(\overline{r}_{on-1}) - g(\overline{r}_{on-1})}{(\overline{\text{grad}}\, g(\overline{r}_{on-1}))^2} \cdot \overline{\text{grad}}\, g(\overline{r}_{n-1})$$

donde se ha denominado

$\overline{r}_{on}$: vector $\overline{r}_o$ en la n-ésima iteración

$\overline{r}_{on-1}$: vector $\overline{r}_o$ en la n – 1 ésima iteración

$g(\overline{r}_{on-1})$: valor de la función g particularizada para las coordenadas del vector $\overline{r}_{on-1}$

$\overline{\text{grad}}\, g(\overline{r}_{on-1})$: vector gradiente de la función g (u_N, u_M, u_y, u_c) particularizado para las coordenadas del vector $\overline{r}_{on-1}$. Las componentes del vector gradiente son:

$$(\partial g/\partial u_N, \partial g/\partial u_M, \partial g/\partial u_y, \partial g/\partial u_c)$$

La convergencia del proceso por este método iterativo es excelente, por lo que se ha tomado sin modificaciones para este trabajo.

6. DIAGRAMAS DE INTERACCION ASOCIADOS AL FRACTIL 0,005 EN NIVEL 2. Planteamiento

Por el método de nivel 2 descrito en el apartado anterior puede abordarse el problema de la obtención del diagrama de interacción axil-momento asociado al fractil 0,005 considerando en el proceso exclusivamente las variables aleatorias f_y y f_c.

La obtención del fractil 0,005 equivale entonces a la obtención del factor $\beta = 2{,}57$, si se utiliza como cota de probabilidad la dada por las Reglas Unificadas Comunes.

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - 0{,}005) = \Phi^{-1}(0{,}995) = 2{,}57$$

Admitiendo que las distribuciones de las variables f_y y f_c son de tipo normal, los cambios de variable necesarios son:

$$u_y = (f_y - \mu_y)/\sigma_y \qquad u_c = (f_c - \mu_c)/\sigma_c$$

donde u_y y u_c son las nuevas variables normales tipificadas, μ_y, μ_c son las medias de f_y y f_c y σ_y, σ_c sus desviaciones típicas respectivas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Con estos cambios de variable la ecuación de estado límite quedará:

$$h\,(f_y\,,\,f_c\,,\,M,\,N)=0 \;\rightarrow\; h^*\,(u_y\,,\,u_c\,,\,M,\,N)=0$$

expresando para cada punto del plano N, M una curva en el espacio normalizado.

Solamente a los puntos que pertenezcan al diagrama de interacción asociado al fractil 0,005 les corresponderán, en el espacio normalizado, unas curvas que serán tangentes en algún punto a la circunferencia cuyo radio es $\beta = 2{,}57$ (fig. 7a y 7b).

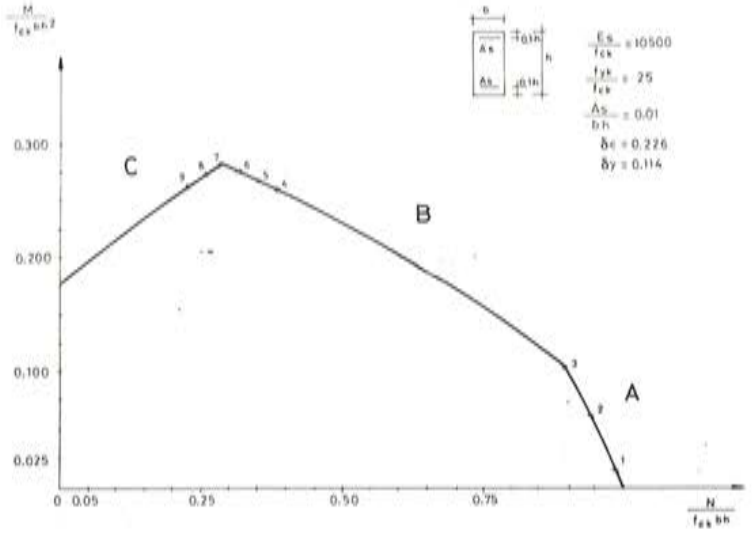


Fig. 7 a. Diagramas de interacción asociado al fractil 0,005 obtenido en el nivel 2 de seguridad.

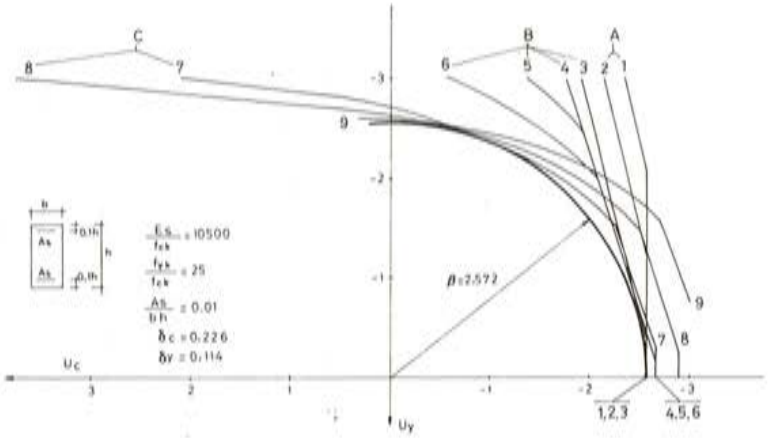


Fig. 7 b. Curvas de estado límite en el espacio normalizado correspondientes a puntos del diagrama de interacción de la figura 7 a.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La posición del punto de tangencia P (u_{yo}, u_{co}) de la curva $h^*(u_y, u_c) = 0$ con la circunferencia centrada (fig. 7b) da idea de la importancia de cada variable aleatoria de base en la probabilidad buscada, ya que cada componente del vector posición del punto P es proporcional a cada componente del vector gradiente de la función $h^*(u_y, u_c)$.

$$u_{yo} = k \left[\frac{\partial h^*}{\partial u_y}\right]_0$$
$$u_{co} = k \left[\frac{\partial h^*}{\partial u_c}\right]_0 \qquad \text{(XI)}$$

donde k es el factor de proporcionalidad cuya determinación se realiza al cumplirse que

$$u_{yo}^2 + u_{co}^2 = \beta^2 \qquad \text{(XII)}$$

sustituyendo (XI) en (XII) se obtiene

$$k^2 \cdot [\overline{\text{grad}}\ h^*]_0^2 = \beta^2$$

o bien

$$k^2 = \frac{\beta^2}{[\overline{\text{grad}}\ h^*]_0^2}$$

y sustituyendo de nuevo este resultado en (XI) se llega al valor final de u_{yo} y u_{co}

$$u_{yo} = \frac{\beta}{|\overline{\text{grad}}\ h^*|} \left[\frac{\partial h^*}{\partial u_y}\right]_0$$

$$u_{co} = \frac{\beta}{|\overline{\text{grad}}\ h^*|} \left[\frac{\partial h^*}{\partial u_c}\right]_0$$

Por consiguiente, si la función h^* sólo dependiera de u_y, $\frac{\partial h^*}{\partial u_c} = 0$, llevaría a que $u_{co} = 0$ y $u_{yo} = \beta$; o al revés, si la función h^* sólo dependiera de u_c, $\frac{\partial h^*}{\partial u_y} = 0$, llevaría a que $u_{yo} = 0$ y $u_{co} = \beta$.

Estos casos extremos son los que se utilizan en nivel 1 para la obtención del diagrama de interacción asociado al fractil 0,005.

Interpretación de los resultados

De los resultados obtenidos en la figura 7b se deduce que las curvas $h^*(u_y, u_c) = 0$, que corresponden a diferentes puntos del diagrama de interacción de la figura 7a, presentan formas tales que los puntos de los puntos de tangencia con la circunferencia de radio β son próximos a los puntos de corte de ésta con los ejes $(\beta, 0)$ y $(0, \beta)$, lo que conduce a pensar que puede ser válida la aproximación realizada en nivel 1.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

El problema, sin embargo, requiere un análisis más detallado para conocer el grado de aproximación obtenido en nivel 1, y los parámetros de que depende. Este análisis se trata detenidamente para una sección rectangular en una publicación del autor (18).

Se distinguen tres zonas sobre el diagrama de interacción de la figura 7a y, por consiguiente, tres tipos de curvas en la figura 7b.

Zona A. (Curvas 1 y 2): Zona en que la deformación de ninguna de las armaduras, superior e inferior llegan al límite elástico (fig. 8a).

Habiendo considerado al módulo de elasticidad del acero E_s como dato determinista, y la relación tensión-deformación como bilineal (fig. 9), la función h no depende de la resistencia del acero y, por tanto, la función h^* tampoco depende de u_y,

$$\frac{\partial h^*}{\partial u_y} = 0 \qquad u_c = 2{,}57$$

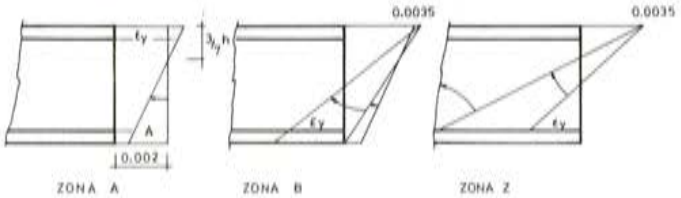


Fig. 8. Dominios de deformación de cada zona.

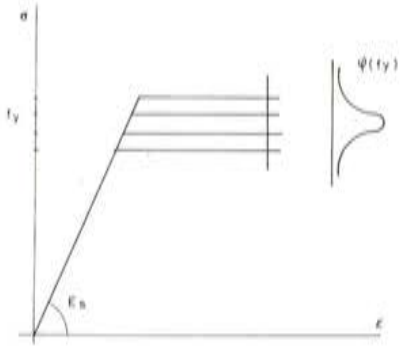


Fig. 9. Leyes tensión-deformación del acero para diferentes fractiles.

Zona B. (Curvas 3, 4, 5 y 6): Zona en que la deformación de la armadura superior llega al límite elástico, pero no la inferior (fig. 8b).

La importancia de la variable resistencia del acero f_y en la función h es menor que la del hormigón f_c, ya que la profundidad de la fibra neutra es grande. Lo mismo ocurre en la función h^* donde la importancia de u_y es menor que la de u_c.

Zona C. (Curvas 7, 8 y 9): Zona en que la deformación de la armadura inferior es igual o mayor al límite elástico (fig. 8c).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La importancia de la resistencia del acero en la función h se hace mayor que la del hormigón, acentuándose conforme asciende la fibra neutra. En situaciones de tracción simple o compuesta la influencia de la resistencia del hormigón en h es nula.

Análogamente a los casos anteriores, estos razonamientos pueden trasladarse a la función h^* y las variables u_y y u_c. En tracción simple o compuesta debe cumplirse

$$\frac{\partial h^*}{\partial u_c} = 0 \qquad u_y = 2{,}57$$

Conclusiones

En las figuras (10), (11) y (12) se representan los diagramas de interacción asociadas al fractil 0,005 obtenidos por tratamiento en nivel 2 y nivel 1 para relaciones de armadura superior a inferior (A_s'/A_s) de 1, 0,5 y 0 respectivamente.

Sobre ellas se aprecia que la diferencia entre ambos diagramas es mayor en las zonas A y B cuanto mayor es la cuantía de armadura superior. La diferencia es nula cuando no existe armadura superior, pues en este caso, en las zonas A y B no hay acero con deformaciones superiores al límite elástico.

En la zona C el diagrama de interacción obtenido por tratamiento en nivel 2 se sitúa por encima del obtenido por tratamiento en nivel 1, aunque esta diferencia se reduce considerablemente en cuanto asciende la fibra neutra.

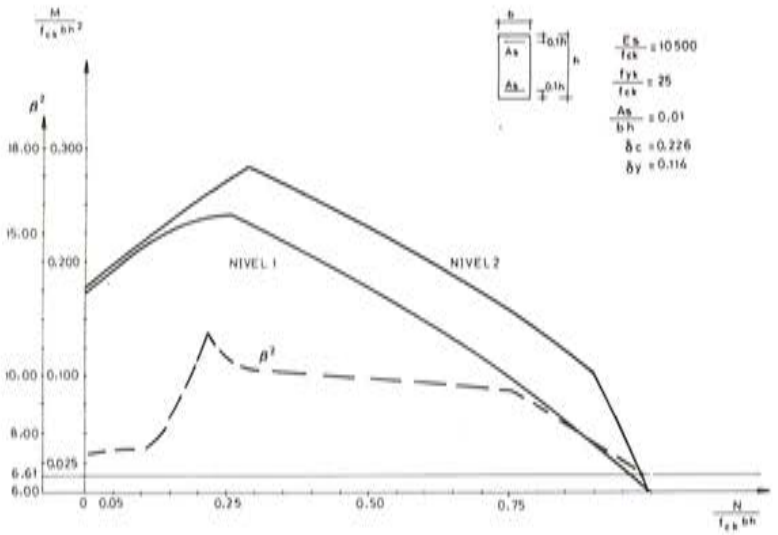


Fig. 10. Comparación de los diagramas de interacción en nivel 1 y nivel 2.

En cualquier caso los diagramas de interacción obtenidos en nivel 1 quedan del lado de la seguridad respecto de los obtenidos por tratamiento en nivel 2.

Para una mejor visualización de la comparación entre los diagramas de interacción de los dos niveles estudiados, se han obtenido los factores β^2 correspondientes a los puntos del

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

diagrama de interacción en nivel 1 (figs. 10, 11 y 12). Como era de suponer este factor no resulta constante, por lo que el diagrama de interacción en nivel 1 no corresponde al de fractil 0,005 de los obtenidos en nivel 2. Esto indica que no existe uniformidad en la probabilidad de agotamiento para cualquier punto del diagrama de interacción obtenido por tratamiento en nivel 1.

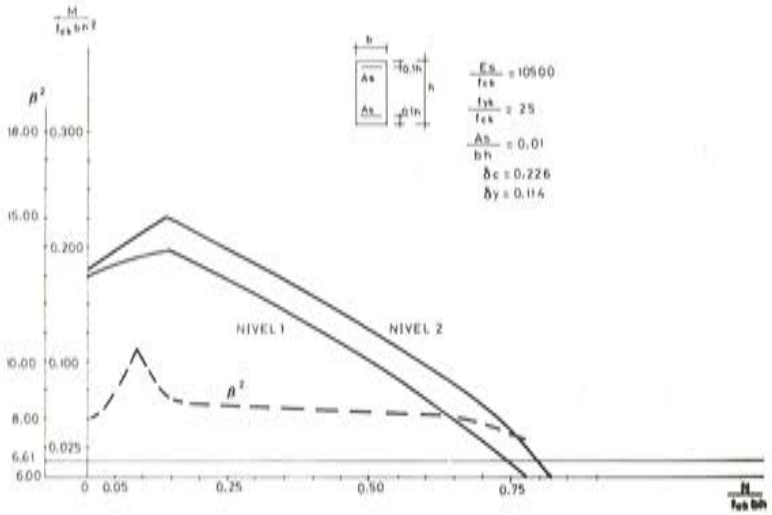


Fig. 11. Comparación de los diagramas de interacción en nivel 1 y nivel 2.

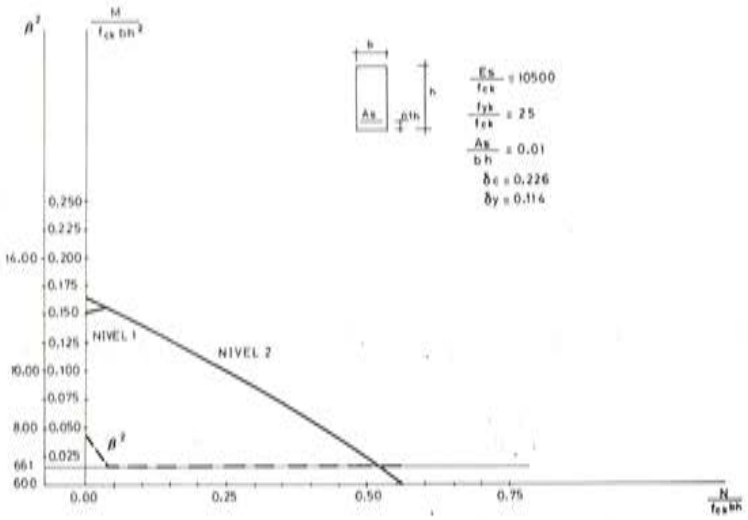


Fig. 12. Comparación de los diagramas de interacción en nivel 1 y nivel 2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

7. DEPENDENCIA ESTADISTICA ENTRE AXIL Y FLECTOR

Planteamiento

El tratamiento en nivel 2 permite, como se ha visto en el apartado 3, el estudio de la posible correlación entre las componentes axil y flector de la solicitación actuante, considerando como variables de base N, M, f_y y f_c.

Si después del cambio de variables que desliga a éstas, se les asigna distribuciones de tipo normal (otro tipo de distribución puede ser adoptado sin ninguna dificultad) y se fija el índice de seguridad β requerido, función de la cota p_f deseada, puede obtenerse, análogamente al caso de dos variables, unos diagramas de interacción axil-momento, expresados estos por los valores medios o característicos de las variables, según se desee.

Interpretación de los resultados

En la figura 13 se han representado tres diagramas de interacción expresados en función de los valores medios de las variables de base para coeficientes de correlación 0, 0,5, y 1 a igualdad de los demás parámetros y obtenidos según el tratamiento de nivel 2 descrito en el apartado 3. Estos diagramas fueron obtenidos por el autor en su tesis doctoral (19).

Los diagramas de interacción de la figura 13 coinciden en los puntos de corte con los ejes de axil medio nulo o momento medio nulo. Esto debe ser así, pues para axil medio nulo y coeficiente de variación determinado la desviación típica es nula, lo que corresponde a un axil determinista, y por tanto, el valor del momento flector medio es independiente del coeficiente de correlación. Análogamente sucede para momento flector medio nulo. Estos casos corresponden a situaciones de flexión simple o compresión simple, en los que no cabe hablar de correlación axil-flector.

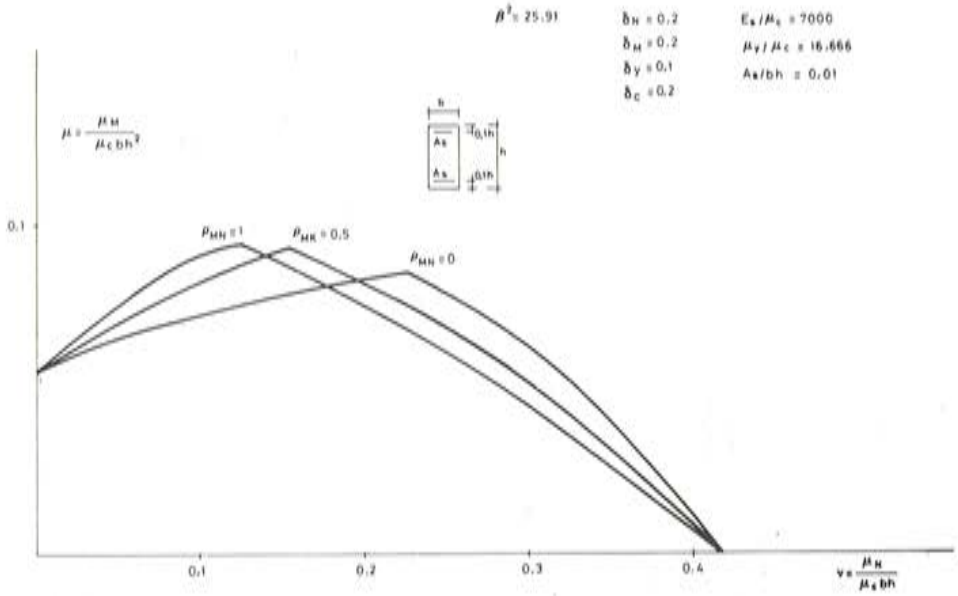


Fig. 13. Influencia del coeficiente de correlación entre esfuerzo axil y momento flector.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Representando sobre los diagramas de interacción de la figura 13 el correspondiente al fractil 0,005 de la solicitación resistente ($R_{0,005}$) (fig. 14), puede observarse que:

- Si existe una ligadura determinista entre axil y momento flector actuantes ($\rho_{MN} = 1$), el coeficiente que hay que aplicar al esfuerzo axil medio es el mismo que el que se debe aplicar al momento flector medio para obtener un punto del diagrama de interacción $R_{0,005}$).
- Si existe una independencia total entre esfuerzo axil y momento flector ($\rho_{MN} = 0$), la importancia de cada esfuerzo en la ecuación de estado límite es diferente según el valor medio de estos, pudiendo llegar a ser uno favorable y otro desfavorable (rama ascendente del diagrama N-M).
- Si existe una dependencia estadística entre esfuerzo axil y momento flector ($0 < \rho_{MN} < 1$) la situación es intermedia a los dos casos anteriores. Sin embargo, del lado de la seguridad, puede reducirse este caso al estudio de los casos anteriores extremos: dependencia determinista o independencia total. Para ello basta con escoger la situación más desfavorable representada en la figura 14 por trazo más grueso.

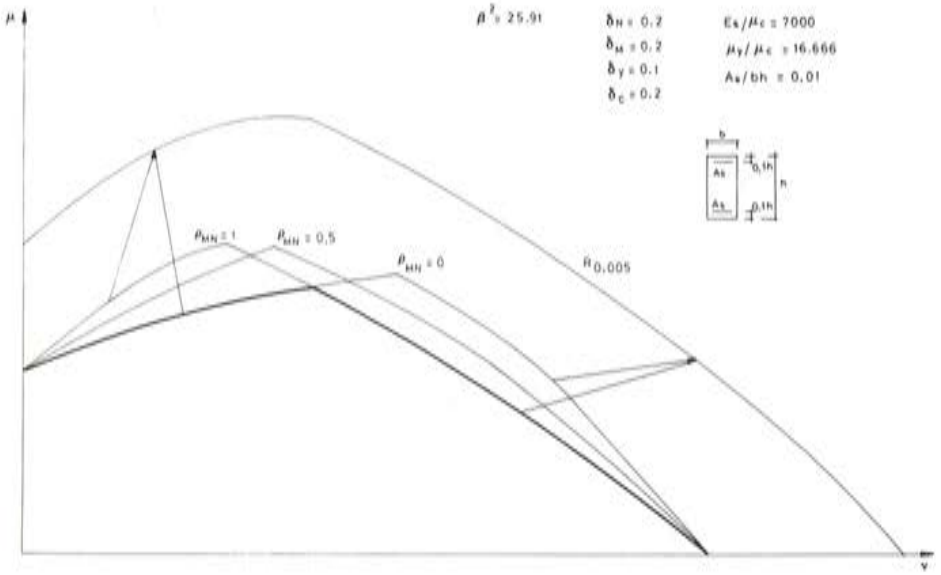


Fig. 14. Comparación del diagrama $R_{0,005}$ con los obtenidos en la figura 13.

Conclusiones

Este tratamiento de tipo funcional en nivel 2 permite, al haber escogido como variables aleatorias de base a las funciones aleatorias axil y momento, estudiar la correlación entre ambos esfuerzos y apreciar cómo, según la situación de la sección en el estado límite, uno puede llegar a ser favorable y el otro desfavorable. Este resultado es totalmente trasladable, en nivel 1, al estudio de las incertidumbres que afectan a las componentes de la solicitación directamente, como son: la diferencia entre el esquema de cálculo y distribución real de las solicitaciones, las aproximaciones en los cálculos, las impresiones de ejecución que afectan a las solicitaciones y los fenómenos parásitos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

En teoría estas incertidumbres que afectan tanto al esfuerzo axil como al momento flector producen una correlación entre ambos esfuerzos. Sin embargo, esta correlación es débil y en la práctica puede tomarse como nula. Por este motivo el "Manual de Seguridad" considera un valor diferente del coeficiente γ_{F3} para las componentes de la solicitación que sean favorables del de las desfavorables. Para la verificación de estados límites últimos, el "Manual de Seguridad" recomienda un valor de $\gamma_{F3} = 0{,}95$ para las componentes favorables y de $\gamma_{F3} = 1{,}125$ para las desfavorables. Hay que recordar que estos valores no son independientes del valor adoptado para γ_{F1}, por lo que el Código Modelo especifica en el apartado 6.4.2.2.1, que, en el caso de solicitaciones vectoriales, cuando la componente es favorable debe reducirse el coeficiente global γ_F en un 20%, lo que está de acuerdo con los valores dados por el Manual de Seguridad, pues $\frac{1{,}125}{0{,}95} \simeq 1{,}2$.

8. RESUMEN DE CONCLUSIONES

Mediante un tratamiento de nivel 2 pueden obtenerse los diagramas de interacción axil-momento para el cálculo de secciones en estado límite de agotamiento por solicitaciones normales, equivalentes a los obtenidos por un tratamiento de nivel 1, correspondientes a un fractil de la solicitación resistente de 0,005.

De la comparación de los diagramas de interacción obtenidos por ambos niveles se deduce que la aproximación efectuada en nivel 1, de considerar la solicitación resistente dependiente exclusivamente de la resistencia del acero o del hormigón, no conduce a un fractil uniforme de la solicitación resistente.

En las diferencias entre los diagramas de interacción obtenidos por ambos niveles juega un papel importante la armadura de compresión. A mayor cuantía de armadura de compresión mayor diferencia existe entre ambos diagramas. Esta diferencia es más considerable en la zona del diagrama en la que la influencia de la resistencia del hormigón en la seguridad es mayor que la del acero, siendo pequeña, por tanto en flexión simple.

El manejo directo de diagramas de interacción obtenidos en nivel 2 para el dimensionamiento de secciones podría suponer un ahorro de cuantía de armadura considerable aunque variable según la solicitación actuante y la proporción entre armadura superior e inferior. Sin embargo, la sencillez y la generosidad con que se aplica el método semiprobabilista lo hacen todavía insustituible para la utilización práctica, quedando relegado el tratamiento en nivel 2 a un nivel teórico para la comprobación de hipótesis y aproximaciones o ajustes de coeficientes utilizados en el nivel 1.

También por el tratamiento de nivel 2 ha podido estudiarse en este trabajo la influencia de la dependencia estadística entre las componentes, axil y momento, de la solicitación actuante.

Ambas componentes no actúan siempre en el mismo sentido hacia el agotamiento, como ha podido comprobarse en el apartado 7, y debe, por tanto, ser estudiada una combinación de éstas en el cálculo de secciones.

En nivel 1, al ser tratadas las incertidumbres que afectan a cada acción por separado (coeficientes γ_{F1}), el estudio de su efecto desfavorable o favorable debe hacerse referido a la contribución de la acción en llevar o no a la sección hacia situaciones de agotamiento, y no referido a las componentes de la solicitación. Sin embargo, no ocurre lo mismo para las incertidumbres que afectan directamente a las componentes de la solicitación actuante (coeficiente γ_{F3}).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Para estas últimas, el estudio en nivel 2 realizado, considerando el axil y el momento como variables aleatorias, permite considerar el efecto de la correlación entre ellas manteniendo una cota de probabilidad de agotamiento. El resultado se ha expresado en forma de diagramas de interacción. Sobre ellos queda bien expresado, cómo, del lado de la seguridad, es posible la utilización de los dos casos extremos (ligadura determinista o independencia total) para resolver cualquier problema de cálculo de secciones.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. C.E.B.: "Manuel Sécurité des Structures". (2ª edición). Boletín de Información núms. 127 y 128. Diciembre 1979/Enero 1980.
2. FERRY BORGES, J. y CASTANHETA, M.; "Structural Safety". Laboratorio Nacional de Engenharia Civil. Lisboa. 1971.
3. PAEZ, A. y TORROJA, E.: "La determinación del coeficiente de seguridad en las distintas obras". I.T.C.C. Madrid 1951.
4. FREUDENTHAL, A.M.: "Safety and Probability of Structural Failure". Journal (of the Structural Division). A.S.C.E. Agosto 1954.
5. ANG A, H.S. y AMIN, M.: "Safety factors and Probability on Structural Design". Journal of the Structural Division. A.S.C.E. ST7. Julio 1969.
6. ANG A, H.S. y CORNELL, C.A.: "Reliability Bases of Structural Safety and Decision". Journal of the Structural Division. A.S.C.E. ST9. Septiembre 1974.
7. BENJAMIN, J.R. y SHAH, H.C.: "A probabilistic Description of Structural Response". A.C.I. Special Publication SP31-5. "Probabilistic Design of Buildings". 1973.
8. FERRY BORGES, J. y CASTANHETA, M.: "Problème de base de la Sécurité des structures". Cahiers du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment. N° 112. Septiembre 1970.
9. MOSES, F.: "Reliability of Structural Systems". Journal of the Structural Division. A.S.C.E. ST9. Septiembre 1974.
10. TICHY, M. y VORLICER, M.: "Statistical Theory of Concrete Structures". Irish University Press. Shanon Academia Praga 1972.
11. GRATESAT, G.: "Introduction aux principes de la Sécurité". Séminaire tenu a Saint-Remy-Les-Chevreuse (France). Noviembre 1974. Colección Uti-Cisco. "La sécurité des constructions".
12. FRANGOPOL, D.: "Modèles d'analyse de la sécurité et de l'optimisation des structures dans un contexte probabiliste. Raport n° 49 Service de Mécanique des Matériaux et de Statique des Constructions. Université de Liège. Junio 1974.
13. C.E.B.: "Recommandations Internationalles CEB/FIP pour le calcul et l'exécution des ouvrages en betón. Principes et Recommandations". Boletín de Información número 109. Junio 1970.
14. C.E.B.: Boletín de Información CEB n° 124/125 F. Abril 1978.
    Volumen 1: "Régles Unifiées Communes aux différents types d'ouvrages et des matériaux".
    Volumen 2: "Code Modèle CEB/FIP pour les structures en béton".
15. C.E.B.: "Manuel Sécurité des structures" (1ª edición). Boletín de Información CEB, núm. 106-107. Enero-Febrero 1975.
16. LIND, N.C. y HASOFER, A.M.: "Exact and Invariant Second Moment Code Format". Journal of the Engineering Mechanics Divison. A.S.C.E. EM1. Feb. 1974.
17. PARKINSON, D.B. "Solution for Second Moment Reliability Index". Journal of the Engineering Mechanics Division. A.S.C.E. EM5. Octubre 1978.
18. MIGUEL SOSA, P.: "Análisis comparativo de los diagrama de interacción axil-momento en nivel 1 y nivel 2 de seguridad para una sección rectangular de hormigón armado". Boletín de Estructuras n° 3 de la E.T.S.I. C.C.P. de Valencia. Mayo 1981.
19. MIGUEL SOSA, P.: "Análisis semiprobabilístico de los criterios de combinación de esfuerzos para el dimensionamiento de una columna sometida a pandeo". Tesis doctoral E.T.S. de Ingenieros de Caminos. Universidad de Valencia. Mayo 1980.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

591-2-175

Puentes de hormigón pretensado construidos en Bolivia

Ing. Alfonso Subieta O.
Catedrático de la Universidad Boliviana
Ex-Jefe del Departamento de Puentes y Estructuras del Servicio Nacional de Caminos de Bolivia

1. ANTECEDENTES

Hasta el año 1940 aproximadamente, la construcción de Puentes en Bolivia se limitó a obras de mampostería de piedra y puentes de madera de poca luz. Sobre los ríos caudalosos se montaron estructuras metálicas con piso de madera proyectados para una vía de circulación y cargas de vehículos de 10 t aproximadamente.

El uso del hormigón armado, poco aplicado hasta entonces, se intensifica en los siguientes 25 años; particularmente, a partir del año 1950, la Dirección General de Vialidad y otras instituciones, como la Corporación Boliviana de Fomento y la Comisión Mixta Boliviana Argentina, construyeron varios puentes de Hormigón Armado, con luces de tramos de hasta 15 m, normalmente para dos vías y cargas de camiones de 15 toneladas (H15), o camiones de 15 toneladas, con acoplado de 12 t (HS 15) en ciertos casos, para cargas aún mayores.

El Servicio Cooperativo Boliviano-Americano de Caminos, que reemplazó a la Dirección General de Vialidad en principio y luego, definitivamente, con el actual Servicio Nacional de Caminos, construye una serie de Puentes de acero y adquiere, afortunadamente, equipo y material para Hormigón Pretensado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

2. PUENTES DE HORMIGON PRETENSADO

En el año 1965, por administración directa del Servicio Nacional de Caminos,se lleva a cabo la fabricación de varias vigas de 80 cm de altura y 10 m, de longitud para formar un tramo adicional a un puente metálico tipo Warren. Este tramo, constituye el paso inicial en Bolivia del Hormigón Pretensado; técnica que ha introducido en el mundo entero un desarrollo revolucionario en la construcción de puentes. Efectivamente, la técnica del pretensado al reducir en forma artificial y permanente, las tracciones producidas por las cargas y al hacer que el hormigón trabaje altamente comprimido, permite obtener elementos de gran rendimiento estático, ligeros y esbeltos, que permiten pasar los ríos con tramos de gran luz, disminuyendo los apoyos intermedios y el difícil trabajo de las cimentaciones. Por otra parte, facilita la prefabricación,tanto de elementos enteros como de segmentos o dovelas.

Por las ventajas mencionadas, los puentes de Hormigón Pretensado, son,en unos casos, más convenientes que los de Hormigón Armado y en otros,los únicos adecuados en Bolivia; las estructuras metálicas no son convenientes en la mayor parte de los casos, porque no sólo significan considerable fuga de divisas en costos de acero, transporte, montaje y mantenimiento sino también por la limitada utilización de materiales y mano de obra locales.

2.1. Puentes de tramos simples de hormigón pretensado

Simultáneamente con la construcción del tramo de 19 metros antes mencionado,se inició la construcción del puente sobre el río Yapacaní, de 700 m de longitud, formado por 18 tramos simples. Por otra parte,se construyen 48 estructuras (2.800 m), entre las que se destacan los puentes Chimoré y Chapare,con 296 y 312 m. de longitud,respectivamente.

Las estructuras mencionadas hasta este momento son tramos simples no mayores a 40 m, de sección transversal compuesta de vigas postesadas, prefabricadas, y losa de Hormigón Armado. Se realizó el pretensado con cables formados por 12 torones de 1/2" (12 T 1/2) y equipo Freyssinet, con excepción de gran parte de las vigas del Yapacaní, que fueron pretensadas por el sistema Stress – Steel. Excluyendo el tramo de 19 m, realización total del Servicio Nacional de Caminos, (SNC), todas las obras mencionadas fueron supervisadas por el SNC. El proyecto y la inspección estuvieron a cargo de la Empresa Consultora TAMS y la construcción fué realizada por la Empresa Constructora BARTOS & CIA.

Desde 1968 hasta la fecha, el Servicio Nacional de Caminos proyectó y construyó, por administración Directa en la mayor parte de los casos,y por Contrato en otros, aproximadamente 4.000 m de puentes de Hormigón Pretensado. Se destacan por el tipo de estructura, varios puentes contínuos de 3 tramos tipo Gerber, con tramo central de 45 m. El tramo suspendido,de 25 m.es la única parte pretensada.

Merecen especial comentario un grupo de obras construídas en voladizos sucesivos, algunas de la Autopista La Paz-El Alto y varios puentes contínuos por carga viva.

2.2. Puentes Pretensados en voladizos sucesivos

La construcción por voladizos sucesivos,es el adelanto más notable en la Ingeniería de Puentes de Hormigón Pretensado de gran luz; existen realizaciones con tramos desde 60 hasta 240 m.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Durante el mes de abril del año 1972, once Ingenieros Bolivianos, seis del Departamento de Puentes del Servicio Nacional de Caminos, entre los cuales se contaba el Ing. Subieta, asistieron al Seminario de Ingeniería de Puentes y visita a obras, respondiendo a una gentil invitación de la Dirección Nacional de Vialidad de la República Argentina. En particular las visitas a los lugares de construcción de los puentes Colón-Paysandú, Chaco-Corrientes y al puente en servicio sobre la Laguna Setubal, despertaron un gran interés por la construcción de puentes en voladizos sucesivos y estimularon a los Ingenieros de Puentes del Servicio Nacional de Caminos de Bolivia, de tal manera que al año siguiente se inició la construcción del Puente Ustarez, primera obra en voladizos sucesivos construída en Bolivia. Siguieron los puentes Lipari, Acero, un Viaducto en Llavini y el puente Alto Reni. De los principales se dará a continuación una breve información.

PUENTE CAPITAN USTAREZ

Sobre el río Pilcomayo en el camino Tarija-Villamontes, fué concluído el año 1974. Es un puente continuo (tipo cantilever), de 28-68-28 m, con un tramo central suspendido, de 25 m. La sección transversal es un cajón simple de altura variable (4,20/1,76 m). La superestructura fué construida por dovelas de 3 m hormigonadas en sitio a partir de las pilas que son monolíticas con el tablero del puente (véase Fig.1).

Si bien las buenas condiciones del subsuelo hubieran permitido proyectar un puente continuo que evitara la necesidad de contar con equipos adicionales para el tramo suspendido, se optó por una solución que permite mayores tolerancias en el control de las deformaciones. Por tratarse de la primera obra en su tipo, en Bolivia, se consideró prudente dicha solución.

Para el pretensado de las dovelas se usó el equipo Freyssinet para cable 12T 1/2" mientras que para las vigas prefabricadas del tramo suspendido el equipo para cables 12/7.

La fuerza de pretensado final de 2860 t por apoyo se aplico mediante 26 cables 12T 1/2". Cada viga del tramo suspendido tiene 6 cables 12/7.

El carro móvil para el hormigonado de las dovelas fué fabricado por la Empresa Constructora BARTOS.

PUENTE LIPARI (Fig. 2)

Sobre el río La Paz, en el camino La Paz-Valencia, concluído el año 1975: es un puente continuo, de 15,75-70-15,75 m, donde los tramos extremos, en sus partes finales, están contrapesados. La superestructura, cuya sección transversal es un cajón simple de altura

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

PUENTE-USTAREZ

CAMINO: TARIJA-VILLAMONTES

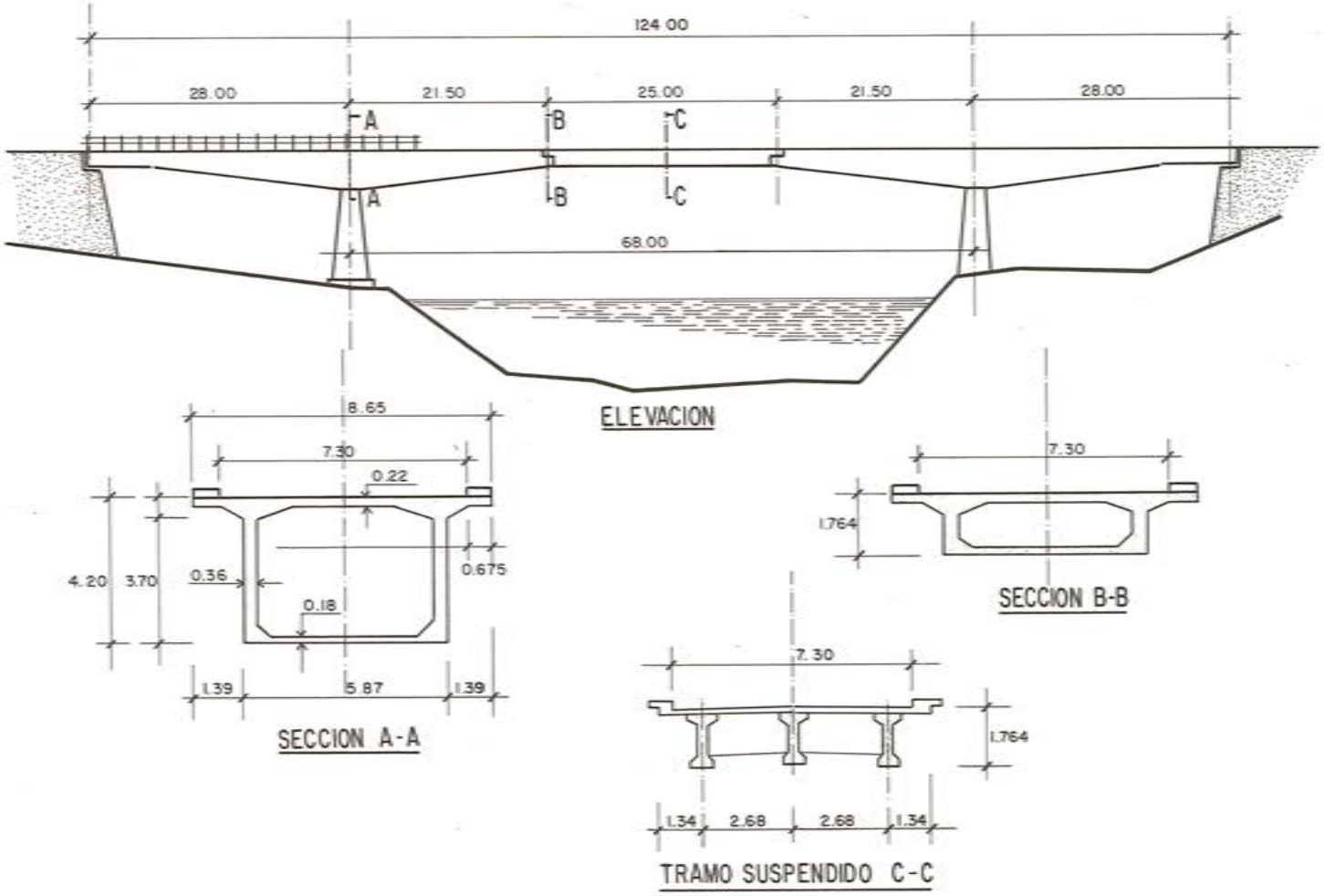
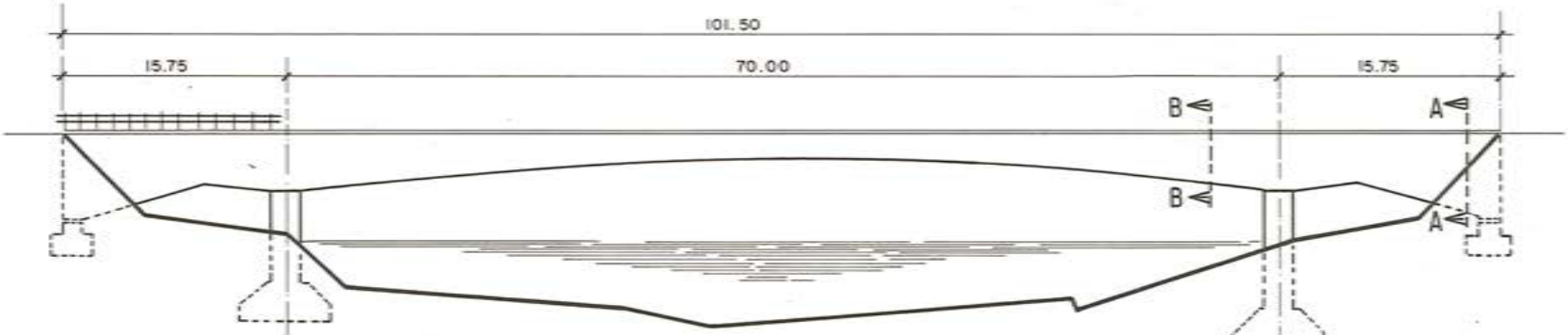


FIG. 1

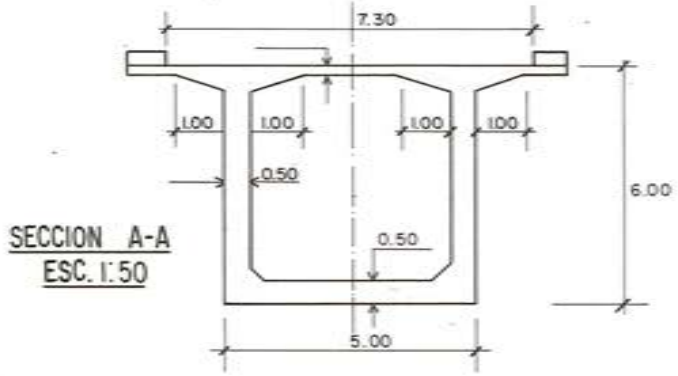
Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

PUENTE LIPARI

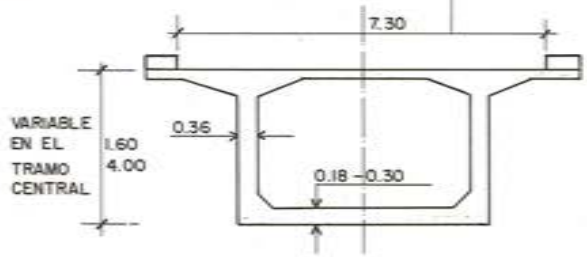
CAMINO LA PAZ - VALENCIA



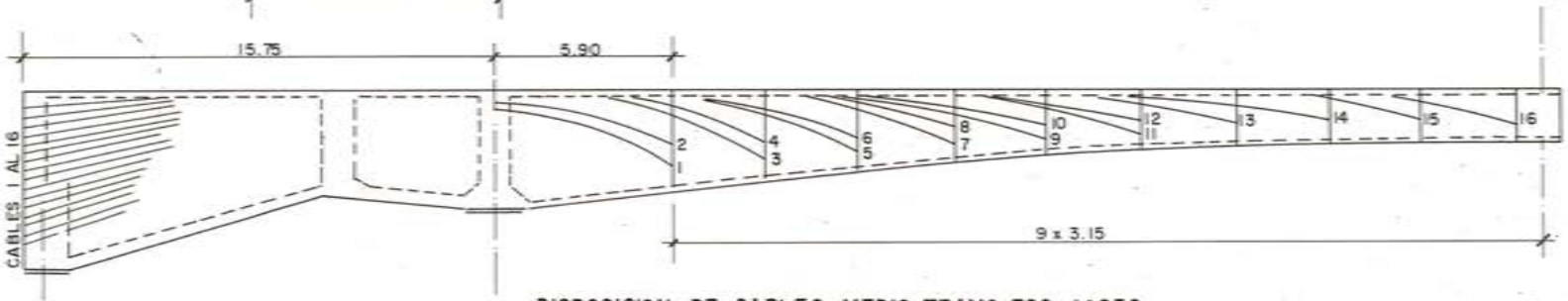
ELEVACION ESC. 1:500



SECCION A-A
ESC. 1:50



SECCION B-B ESC. 1:150



DISPOSICION DE CABLES MEDIO TRAMO ESC. 1:250

FIG. 2

variable (4,0/1,6) en el tramo central, y 6 m de altura máxima en los extremos, se apoya en planchas de Neopreno compuesto.

El pretensado de los voladizos sucesivos fué realizado mediante 32 cables 12T 1/2", ejerciendo una fuerza de pretensado final de 3.520 t por apoyo, y por 13 cables 12T 1/2" de continuidad, colocados en la parte central del puente, en correspondencia con la losa inferior.

El carro móvil usado fué el mismo que el del Puente Ustarez.

VIADUCTO "ALFONSO SUBIETA", EN LLAVINI (Fig. 3)

Está situado en el nuevo camino asfaltado que unirá las ciudades de Cochabamba y La Paz. Fué terminado en Diciembre de 1980. Ubicado sobre una quebrada de 80 m de altura, es una estructura continua de 20 - 86,10 - 28,90 m. Originalmente simétrico (20-80-20), se cambió durante la construcción de las cimentaciones de las pilas, al descubrir grietas en la roca pizarrosa. El Viaducto está en una zona de sismicidad 4,5 (E.R.) y evita que el camino pase por lugares de inminentes deslizamientos.

La sección transversal es un cajón simple, de altura variable en el tramo central (4,50/1,80), y de altura constante (4,50 m) en los tramos extremos. Los aparatos de apoyo, en pilas y estribos, son planchas de Neopreno compuesto.

El pretensado final, por apoyo calculado en 4180 t fué realizado por 40 cables 12T 1/2. Por otra parte 20 cables 12T. 1/2" de continuidad, colocados en la parte inferior central de la estructura, se tesaron y anclaron en los resaltos previstos de la losa inferior. El carro móvil metálico utilizado, fué adquirido de la Firma Bagant, de España.

PUENTE SOBRE EL RIO BENI

Está situado en el camino La Paz Puerto Salinas. Tiene 616 m de longitud, distribuida en tres partes. La primera, en el lado La Paz, es una estructura continua de 4 tramos (58-80-80-58,5 m); sigue una segunda parte igual a la anterior (58,5-80-80-58 m) y una parte curva en planta, en el lado Puerto Salinas formada por una estructura contínua de 2 tramos (30,5 - 30 m).

Las dos partes principales, de 553 m, fueron construidos por voladizos sucesivos hormigonados en sitio (Fig. 4).

El tablero está constituído por un cajón simple, de altura variable (4,5/1,8 m).

Construídas en sitio las dovelas de arranque sobre las pilas, apoyadas provisionalmente sobre bloques de hormigón, se realizó un pretensado vertical, para efectos de estabilidad, mediante 8 cables 12T 1/2". Los bloques de hormigón se retiraban después de efectuarse la continuidad, funcionando luego los aparatos de apoyo definitivos, tipo WABO FYPE, compuesto de acero, teflón y neopreno.

El pretensado de los voladizos sucesivos fué realizado con 40 cables 12T 1/2" por apoyo. La continuidad en los tramos intermedios de 80 m por 19 cables 12T 1/2" y 23 cables 12T 1/2" en los tramos extremos de 58 m. La fuerza de pretensado final en el apoyo de la parte curva fué calculada en 1335 t.

Para el hormigonado de las dovelas se utilizaron 4 carros de avance, del tipo anotado en el Viaducto Llavini.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

VIADUCTO LLAVINI

CARRETERA: COCHABAMBA - LA PAZ

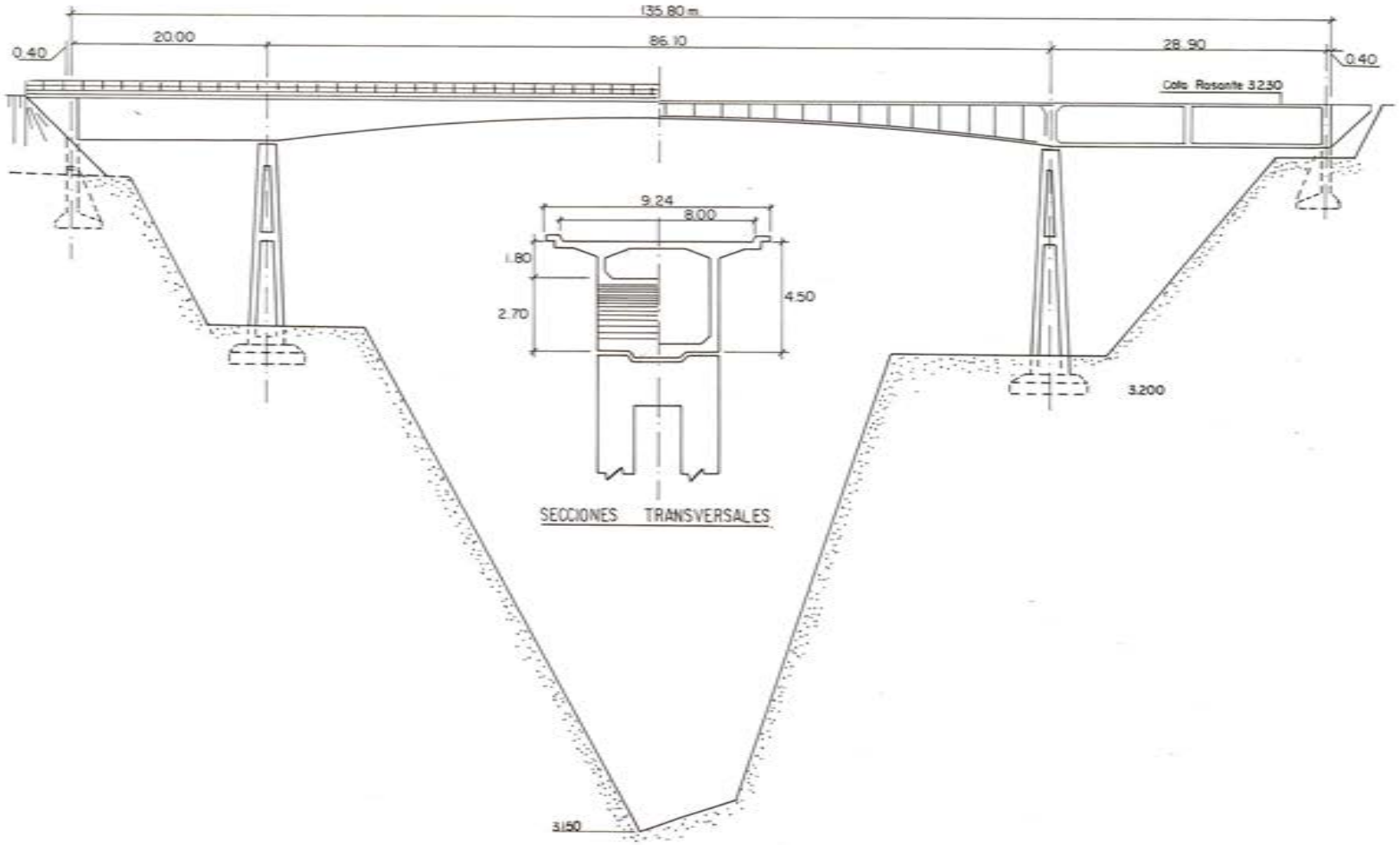
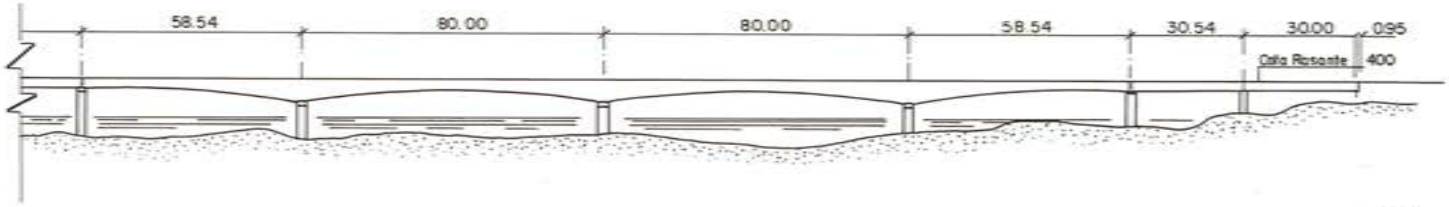
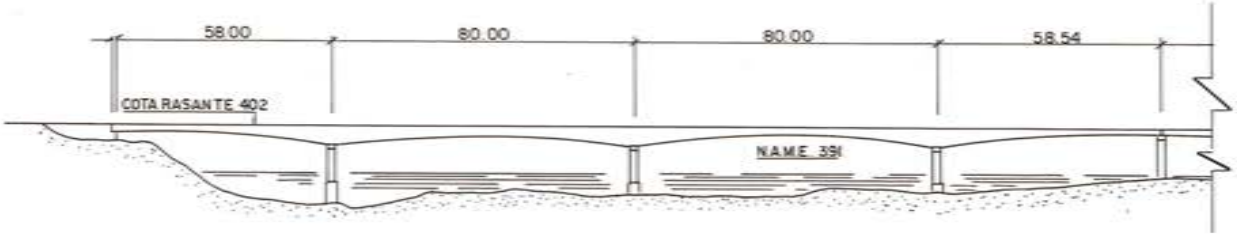


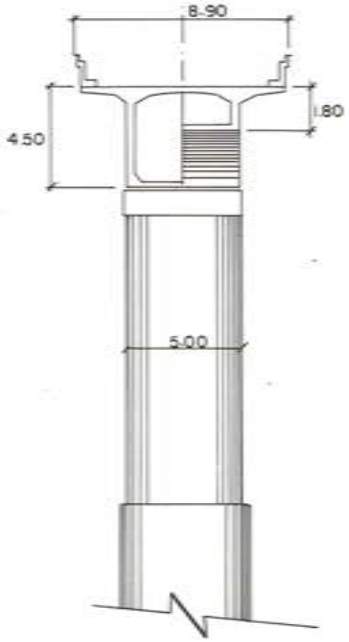
FIG. 3

PUENTE SOBRE EL RIO BENI

CAMINO LA PAZ-PUERTO SALINAS







SECCIONES TRANSVERSALES

FIG. 4

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

2.3. Algunos otros aspectos de las anteriores obras

Se anotan a continuación, los siguientes:

Los cálculos, la preparación de los planos de construcción, especificaciones y costos de los puentes Ustarez y Lipari y del Viaducto Llavini, estuvieron a cargo de los Ingenieros del Departamento de Puentes del Servicio Nacional de Caminos. La inspección de los dos primeros fué también labor del Servicio Nacional de Caminos, mientras que la inspección del Viaducto, así como de otros 6 puentes, estuvo a cargo de la Consultora HIDROSERVICE-IPA contratada para la inspección de todos los trabajos de construcción del camino asfaltado Cochabamba-Confital.

El puente sobre el río Beni, así como todas las obras de arte y el mismo camino La Paz-Puerto Salinas, fueron proyectadas por la Consultora Prudencio, Claros & Ass. de Bolivia y Leuw Cather del Canadá. La inspección del puente sobre el río Beni, así como de otros cuatro puentes, estuvieron a cargo de la misma firma.

Todos los puentes en voladizos sucesivos, así como los otros 10 puentes antes anotados fueron construídos por la Empresa Constructora Bartos & Cía.

En general, los puentes de Hormigón Pretensado mencionados en esta comunicación sirven a dos fajas de circulación y fueron calculados para camiones HS-20 de la Norma Americana AASHTO.

Las solicitaciones internas, para cargas muertas, vivas y pretensado, se determinaron en una calculadora IBM-1130, usando un programa general para estructuras aporticadas, preparado por el Departamento de Puentes del Servicio Nacional de Caminos, en el caso de los puentes Ustarez y Lipari. En Llavini y Alto Beni se utilizaron otros ordenadores y otros programas.

Las solicitaciones internas por efectos de temperatura, fluencia y retracción, así como la estimación de las deformaciones, se determinaron de acuerdo con los criterios establecidos en el libro de I. Guyón: "Construction en Béton Précontraint" – 2do. Tomo, en la publicación del P.C.I. denominada "Precast segmental box girder" y en el libro de Mattivat "Construction por encorbellement des ponts en béton précontraint".

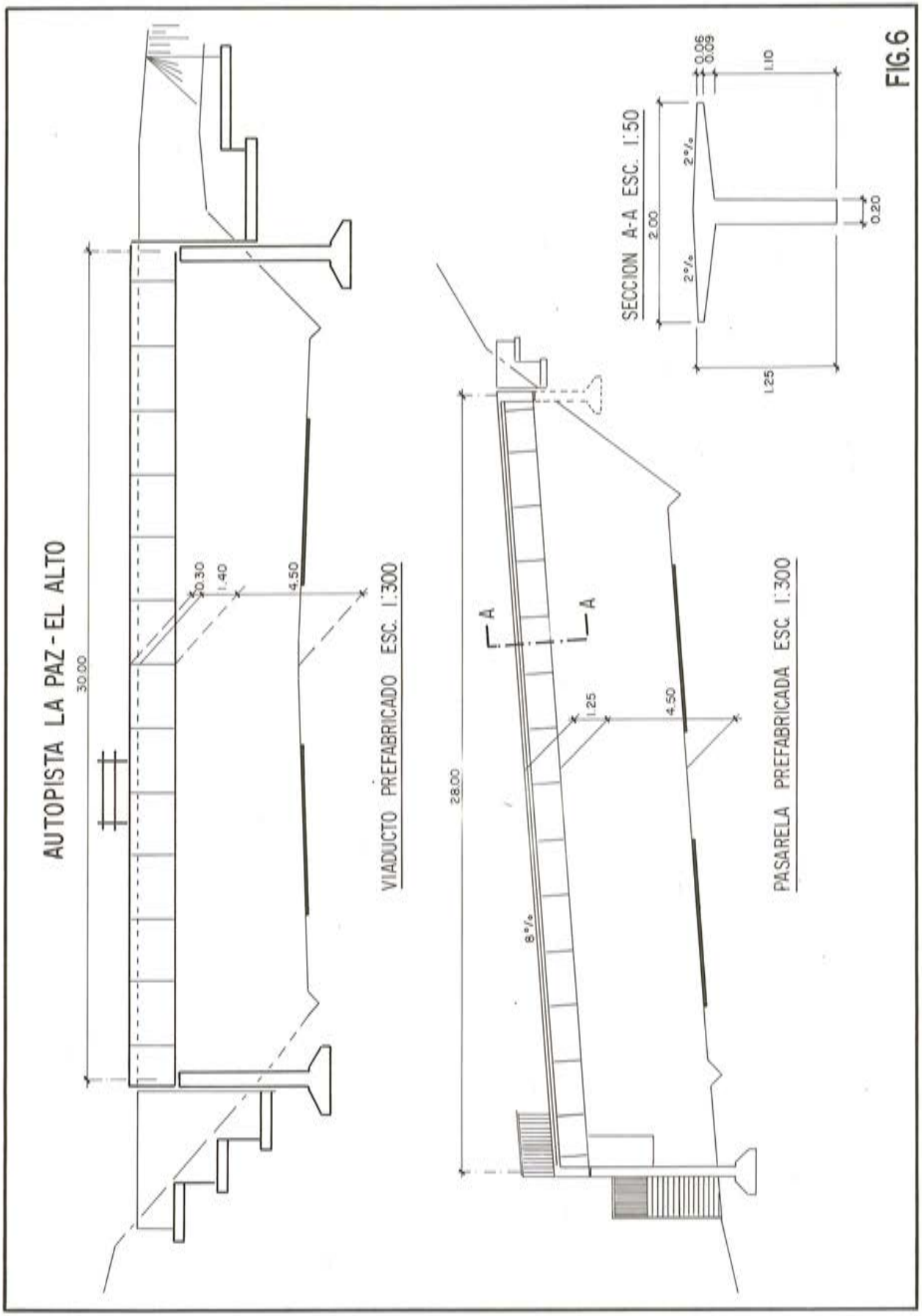
Por otra parte, en las 4 estructuras construidas en voladizos sucesivos, las tensiones de comprensión en el hormigón están alrededor de los 120 kg/cm^2, en la etapa de servicio. La resistencia cilíndrica, característica especificada a 28 días es, sin embargo de 350 kg/cm^2, en razón de que al tercer día es necesario una resistencia promedio mínima de 250 kg/cm^2, para transmitir la fuerza de pretensado y para que el período de reutilización del carro móvil sea de una semana.

Las tensiones del acero, junto a los anclajes activos, fueron del 75 por 100 de la resistencia nominal de rotura del acero grado 270.

Las deformaciones calculadas y observadas durante la construcción de los puentes Ustarez y Lipari, indican que las deformaciones por peso propio y pretensado, se compensan aproximadamente para tramos de hasta 70 m de luz.

Las contraflechas se dieron para las diferencias de deformaciones por peso propio y pretensado así como para el efecto de los equipos y para las deformaciones estimadas por fluencia y retracción.

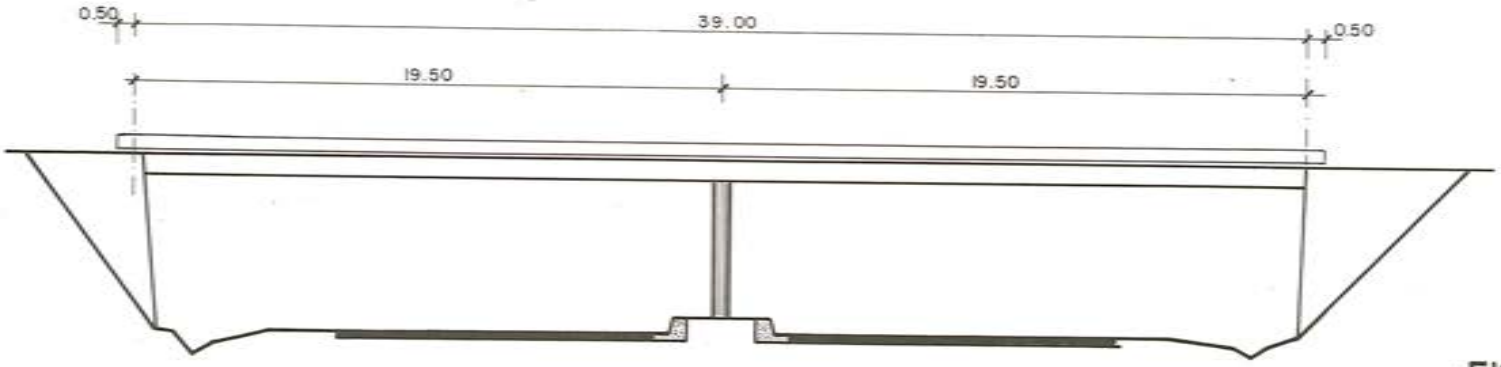
Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025



Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

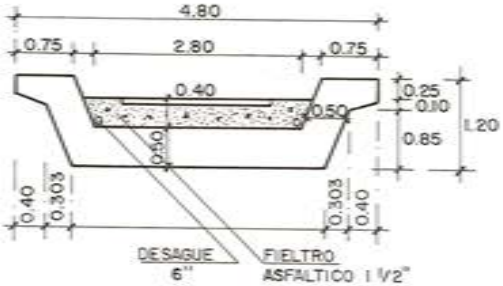
PASO SUPERIOR FERROVIARIO



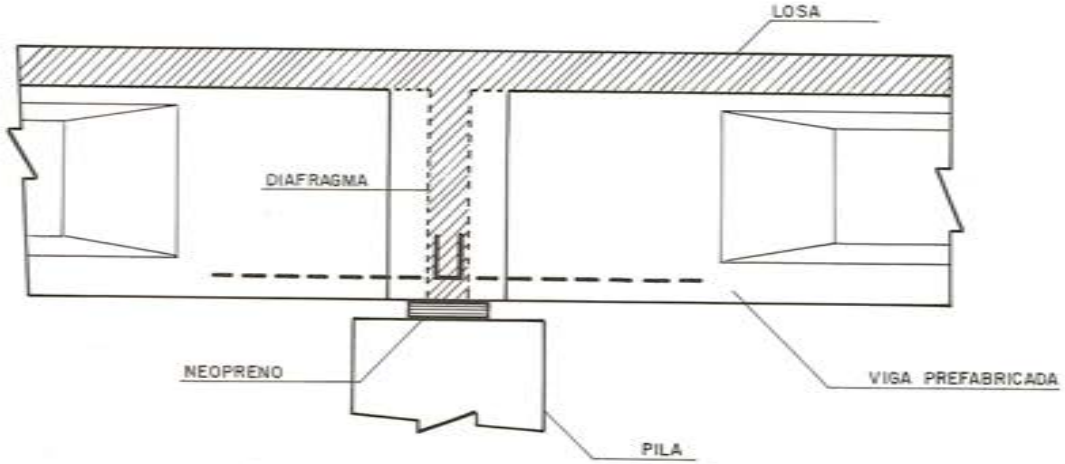
ELEVACION ESC. 1:250

FIG. 5

PUENTES CONTINUOS POR CARGA VIVA



SECCION TRANSVERSAL ESC. 1:100



DETALLE DE CONTINUIDAD

FIG. 7

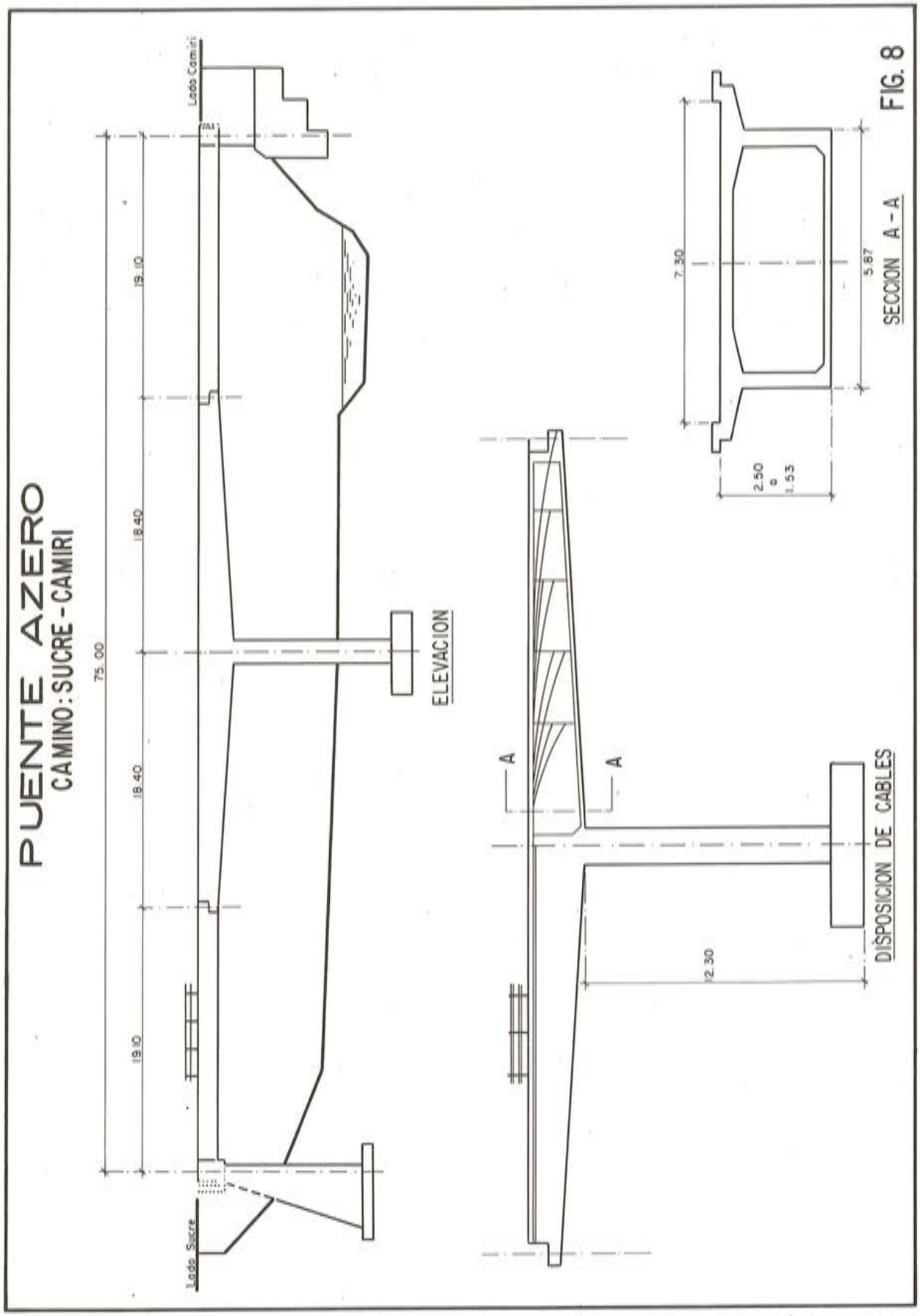


FIG. 8

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

2.4. Autopista La Paz-El Alto

En ella existen algunas nuevas estructuras en Bolivia, como los puentes simples y contínuos, de sección cajón, postesados y hormigonados en sitio, y el primer puente Ferroviario pretensado y continuo (Fig. 5). Por otra parte y dentro del campo de la construcción segmentada, el SNC construyó 6 pasarelas, con luces que varían entre 17,40 m y 28,4 m, y un viaducto de 30 m sobre la mencionada Autopista (Fig. 6).

2.5. Puentes contínuos, con vigas prefabricadas, de Hormigón Pretensado

Se introducen en Bolivia con la construcción del puente Sacramento en el camino Sucre-Cochabamba.

El puente Sacramento está formado por 6 tramos de 25 m; tiene una junta de dilatación central y 15 por 100 menos de pretensado con relación a los tramos simples. En efecto, en este tipo de puentes se aprovechan las ventajas de la prefabricación y de la continuidad. Por lo anterior, están en servicio varios puentes con tramos de 30 m y longitud de 120 m sin juntas intermedias y muchos proyectos han adoptado este tipo de puentes, con vigas prefabricadas cortas (Fig. 7), es decir luces menores de 30 m.

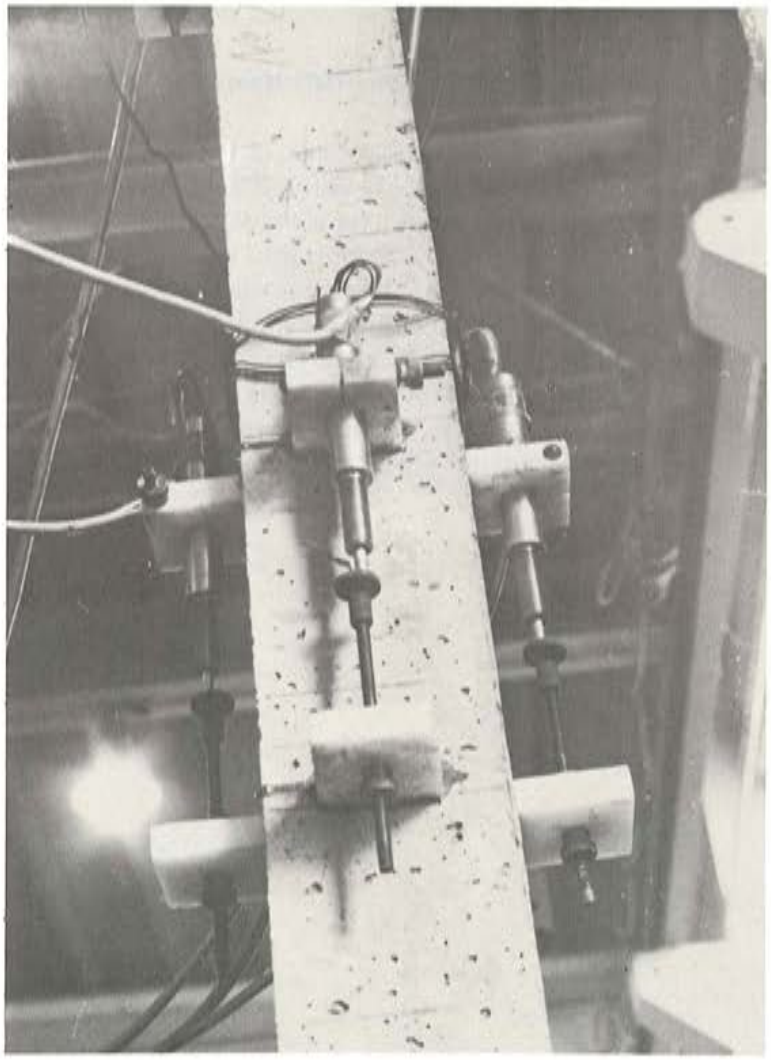
2.6. Construcción segmentada tramo por tramo

Son las realizaciones más recientes del SNC, siguiendo la tendencia actual. Un viaducto de 30 m de luz, sobre la Autopista La Paz-El Alto y varias pasarelas de 28 m de luz máxima fueron construídas. El viaducto, de sección cajón, se prefabricó en segmentos de 2 m de largo y 10 t de peso. Se transportaron en volquetes y se colocaron con grúa sobre una obra provisional formada por vigas metálicas. Seis tendones 12 T 1/2'' se enfilaron, tensaron e inyectaron posteriormente. El montaje del viaducto duró dos días, con mínima interrupción del tránsito en la Autopista. Otras ventajas obtenidas son: reducción del tiempo de construcción, menores costos con relación a las pasarelas de hormigón armado o acero, mínima cantidad de encofrados, cimbras reutilizables, altos rendimientos de mano de obra y productividad y control de calidad excelentes (Fig. 6).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

INTEMAC

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Detalle de montaje de captadores inductivos de desplazamientos para un ensayo a compresión de pilar de hormigón armado.

MADRID

Oficinas:
Monte Esquinza, 30 - 4.º D
MADRID-4
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:
Carretera de Loeches, 7
TORREJON DE ARDOZ
Tels. (91) 675 31 00/04/08

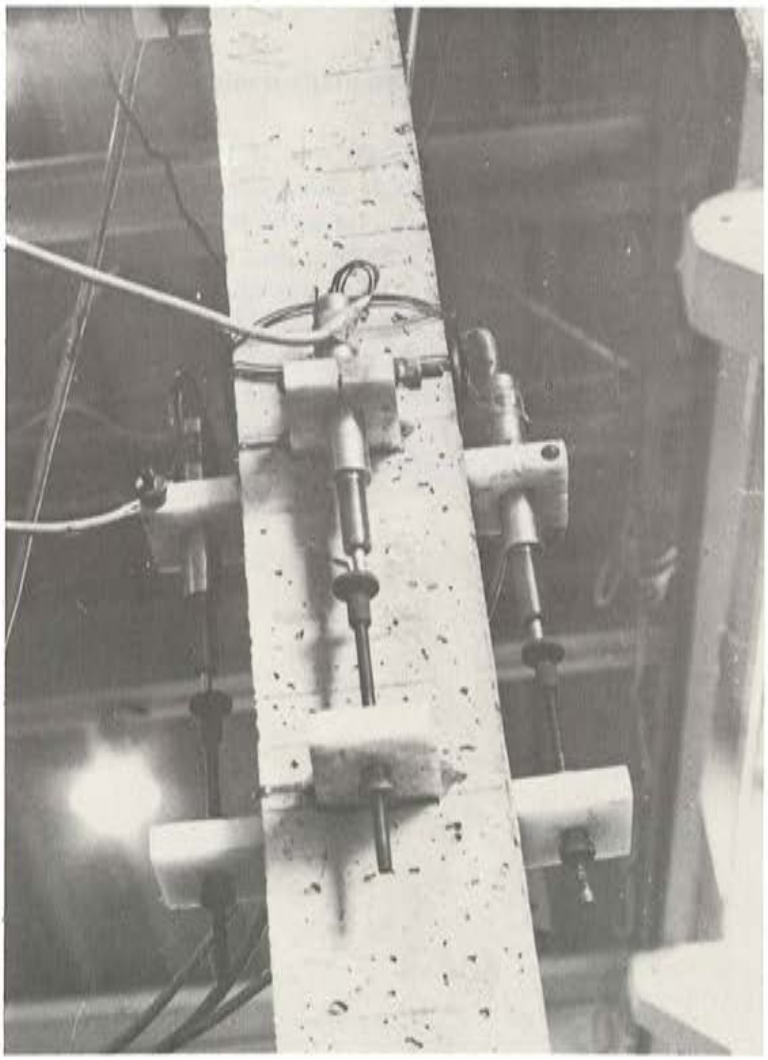
BARCELONA

Pasaje Busquets, 37
CORNELLA DE LLOBREGAT
Tels. (93) 377 43 58/62

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

INTEMAC

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Detalle de montaje de captadores inductivos de desplazamientos para un ensayo a compresión de pilar de hormigón armado.

MADRID

Oficinas:
Monte Esquinza, 30 - 4.º D
MADRID-4
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:
Carretera de Loeches, 7
TORREJON DE ARDOZ
Tels. (91) 675 31 00/04/08

BARCELONA

Pasaje Busquets, 37
CORNELLA DE LLOBREGAT
Tels. (93) 377 43 58/62

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

2.4. Autopista La Paz-El Alto

En ella existen algunas nuevas estructuras en Bolivia, como los puentes simples y contínuos, de sección cajón, postesados y hormigonados en sitio, y el primer puente Ferroviario pretensado y continuo (Fig. 5). Por otra parte y dentro del campo de la construcción segmentada, el SNC construyó 6 pasarelas, con luces que varían entre 17,40 m y 28,4 m, y un viaducto de 30 m sobre la mencionada Autopista (Fig. 6).

2.5. Puentes contínuos, con vigas prefabricadas, de Hormigón Pretensado

Se introducen en Bolivia con la construcción del puente Sacramento en el camino Sucre-Cochabamba.

El puente Sacramento está formado por 6 tramos de 25 m; tiene una junta de dilatación central y 15 por 100 menos de pretensado con relación a los tramos simples. En efecto, en este tipo de puentes se aprovechan las ventajas de la prefabricación y de la continuidad. Por lo anterior, están en servicio varios puentes con tramos de 30 m y longitud de 120 m sin juntas intermedias y muchos proyectos han adoptado este tipo de puentes, con vigas prefabricadas cortas (Fig. 7), es decir luces menores de 30 m.

2.6. Construcción segmentada tramo por tramo

Son las realizaciones más recientes del SNC, siguiendo la tendencia actual. Un viaducto de 30 m de luz, sobre la Autopista La Paz-El Alto y varias pasarelas de 28 m de luz máxima fueron construídas. El viaducto, de sección cajón, se prefabricó en segmentos de 2 m de largo y 10 t de peso. Se transportaron en volquetes y se colocaron con grúa sobre una obra provisional formada por vigas metálicas. Seis tendones 12 T 1/2'' se enfilaron, tensaron e inyectaron posteriormente. El montaje del viaducto duró dos días, con mínima interrupción del tránsito en la Autopista. Otras ventajas obtenidas son: reducción del tiempo de construcción, menores costos con relación a las pasarelas de hormigón armado o acero, mínima cantidad de encofrados, cimbras reutilizables, altos rendimientos de mano de obra y productividad y control de calidad excelentes (Fig. 6).

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

591-9-38

La demolición de los halles centrales de Reims. Una propuesta alternativa de salvación y recuperación

Por: José Antonio Fernández Ordóñez
y Antonio González Serrano
Ingenieros de Caminos

"La rígida separación entre el futuro y el pasado se viene abajo por sí misma; el futuro que todavía no ha llegado se hace visible en el pasado, y el pasado, vindicativo y heredado, transmitido y cumplido, se hace visible en el futuro".

Ernst Bloch

SINOPSIS:

En el presente artículo se describe la degradación química progresiva que está sufriendo la estructura abovedada de hormigón armado de los Halles Centrales de Reims, proyectada y construída por Eugene Freyssinet a finales de los años treinta, señalándose su importancia histórica y cultural, y la necesidad de su conservación, e indicándose la solución de reparación propuesta por los autores a los responsables políticos y técnicos del Ayuntamiento de Reims, para evitar su demolición o la ruina total a la que está destinada inexorablemente dicha estructura si se abandona a su suerte.

INDICE:

1.– Antecedentes.
2.– Breve descripción de la estructura.
3.– Importancia histórica, técnica y cultural.
4.– Estado de degradación de la estructura en Febrero de 1983.
5.– Informe fotográfico del estado de degradación del hormigón.
6.– Solución de reparación propuesta.
7.– Otras soluciones de reparación desechadas.
8.– Consideraciones finales.

Anejo n° 1.– Explicación química de la degradación del hormigón por carbonatación y de la corrosión de las armaduras.

Anejo n° 2.– El hormigón de baja retracción propuesto.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

1. ANTECEDENTES

El 20 de Agosto de 1982 los autores del presente artículo tuvimos conocimiento de las intenciones del Ayuntamiento de Reims de proceder a demoler de inmediato los Halles Centrales de la ciudad, a través de una carta dirigida por la Arquitecto Martine Liotard del Servicio Municipal de Urbanismo de Reims al Ingeniero de Caminos José A. Fernández Ordóñez, en su calidad de único biógrafo de Eugène Freyssinet (1).

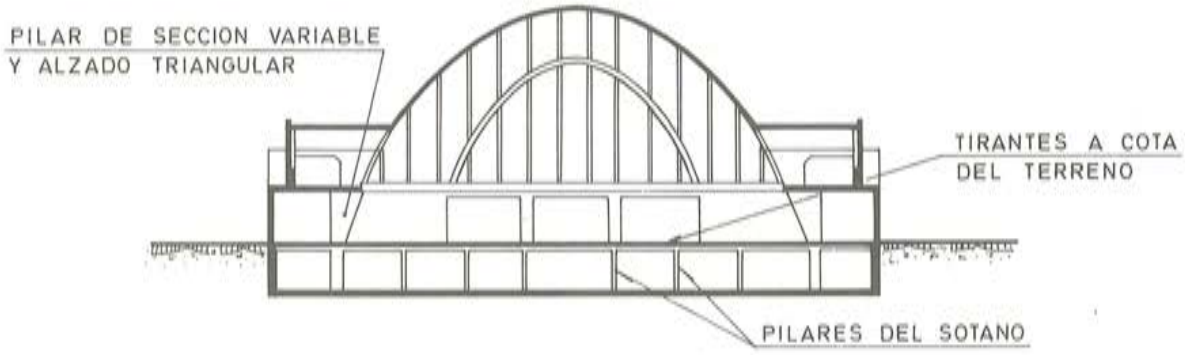
Con esta carta se nos adjuntaban: Un informe de la Sociedad Francesa Secotec de fecha 28 de Junio del 82 en el que se realiza un estudio técnico de la estructura considerando en un recálculo la parte de estructura no dañada; un nuevo informe de la misma Sociedad de fecha 31 de Julio de 1980 en el que se describen fundamentalmente los daños observados en la estructura; Un informe del "Centre Experimental de Recherches et d'études du Bâtiment et des Travaux Publics" C.E.B.T.P. con fecha 7 de Junio del 82 en el que se describen los daños que presenta la estructura y se analiza la resistencia de los hormigones mediante probetas testigo tomadas "in situ" y mediante auscultación dinámica y ultrasonica, estableciendo la correspondiente correlación con los resultados a compresión de las probetas testigo; y un nuevo informe de la misma Sociedad de fecha 30 de Junio de 1982 resumiendo el grado de deterioro en que se encuentra la estructura, adjuntándose además los análisis químicos efectuados con los fragmentos de hormigón obtenidos en los ensayos de compresión efectuados con las probetas testigo.

En todos estos informes se detalla con gran minuciosidad el grado de deterioro que presenta la estructura y su degradación acelerada en el tiempo pero, probablemente a causa de su deliberada ambigüedad a la hora de las conclusiones, no se deduce de los mismos, de una forma clara, la viabilidad de su reparación. Por esta causa los dirigentes políticos del Ayuntamiento de Reims, que por aquel entonces eran Socialistas, decidieron, a su pesar, demoler los Halles Centrales. Antes de proceder a ello, como última esperanza, solicitaron nuestra opinión técnica y cultural respecto a la posibilidad de conservación de los Halles.

Con fecha 7 de Septiembre de 1982 los autores de esta publicación enviaron al departamento técnico del Ayuntamiento de Reims un dictamen en el que se explicaban las causas de la degradación del hormigón y de las armaduras, ofreciéndose, al mismo tiempo, las bases de una reparación eficaz, y, al mismo tiempo, manifestando nuestro apoyo total a la conservación de la estructura por razones históricas, técnicas y culturales, y nuestro convencimiento de la posibilidad real de su reparación y conservación. Tras una serie de cartas entrecruzadas con los responsables del Ayuntamiento de Reims viajamos allí para juzgar "in situ" la situación de la estructura y para mantener una serie de reuniones con los representantes políticos y los técnicos del Ayuntamiento, junto con los técnicos de la Secotec y del C.E.B.T.P. que habían informado previamente. Estas largas y densas reuniones tuvieron lugar del 9 al 12 de Febrero de 1983 y en ellas tuvimos la ocasión de exponer las causas del deterioro de la estructura y la solución que juzgábamos más idónea para su reparación. No sólo se expuso técnicamente la solución de reparación sino que también se explicó la forma práctica de poderla llevar a cabo y se ofreció asimismo una valoración aproximada de su coste.

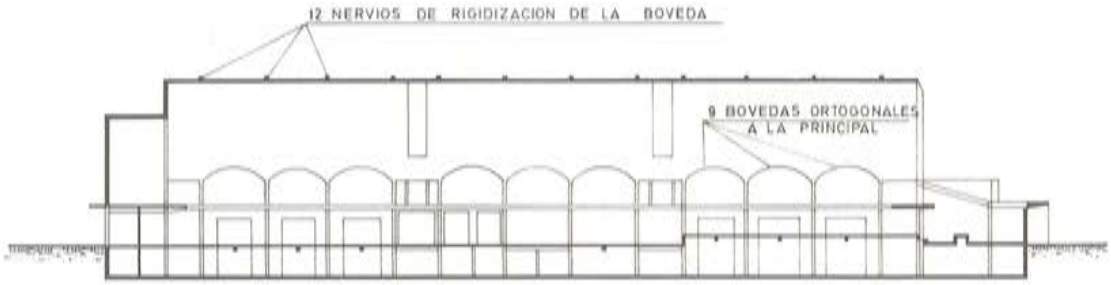
La postura general de los restantes técnicos franceses fué —salvo Martine Liotard— la de evasión cuando no era manifiestamente contraria a la posibilidad de restauración de la estructura. En cambio, los responsables políticos manifestaron siempre su deseo de conservar los Halles Centrales, y su apoyo a la única solución —la nuestra— que lo hacía posible.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025



SECCION TRANSVERSAL

Fig. 1



SECCION LONGITUDINAL

Fig. 2

2. BREVE DESCRIPCION DE LA ESTRUCTURA

La estructura, que se muestra exenta en una plaza central de Reims, puede apreciarse en las fotografías núms. 1 y 2 y en las figuras núms. 1 y 2 que representan sus secciones longitudinal y transversal. Básicamente dicha estructura está compuesta por una bóveda cilíndrica de hormigón armado de 38 m de luz y 19 m de flecha con sólo 8 cm de espesor. Esta bóveda tiene una longitud de 89 m, estando rigidizada por 12 nervios de sección rectangular de 31 cm de anchura que sobresalen 50 cms del extradós de la bóveda. De esta forma, el intradós de la bóveda no tiene resaltos, es decir, su superficie interna es continua. En la sección longitudinal indicada en la figura 2 se puede ver la distribución de estos nervios transversales. En el plano formado por cada nervio, la bóveda arranca de unos pilares de sección variable y cuyo alzado es triangular (figura n° 1 y fotografía n° 3), es decir, la bóveda se apoya en 24 pilares de sección variable enfrentados dos a dos, además de en los dos hastiales de cierre. En cada alzado lateral existen además nueve bóvedas más pequeñas, ortogonales a la gran bóveda principal, dispuestas entre cada dos pilares consecutivos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Fotografía 1. Perspectiva general de los Halles Centrales de Reims

Fotografía 2. Aspecto de uno de los hastiales de la gran nave central, con sus lucernarios realizados con numerosos y finos maineles de hormigón armado.

Fotografía 3. Pilar de sección variable y alzado triangular. Se puede apreciar la colocación de una red para impedir que los fragmentos del recubrimiento del hormigón que se desprenden puedan dañar a las personas que transitan por su interior.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Cada uno de los 12 pares de pilares de sección variable está sometido a una compresión inclinada que es tangente a la directriz de la bóveda en el encuentro con la cabeza del pilar. La componente vertical de dichas compresiones se transmite directamente al terreno a través de unos pilares inferiores ubicados en el sótano del edificio. Estos pilares sólo están solicitados a compresión ya que las componentes horizontales correspondientes a cada pareja de pilares enfrentados, se absorben mediante una viga-tirante dispuesta en el forjado de planta baja. Esta viga está aporticada con varios pilares en el sótano y sirve, además de como tirante, para soportar el forjado que constituye el suelo de planta baja.

Como fácilmente se comprende, la bóveda trabaja a peso propio a tensiones muy bajas, del orden de 2,5 kg/cm^2, como un auténtico antifunicular de cargas solicitado prácticamente a compresión, y los nervios de rigidización rectangulares fueron proyectados para absorber posibles solicitaciones disimétricas de viento o de nieve. Los esfuerzos que la estructura transmite al terreno de cimentación son exclusivamente verticales, ya que las componentes horizontales a la cota del terreno se anulan entre sí mediante los citados tirantes.

No fué posible encontrar ningún plano, cálculo o dato del proyecto original ni de la construcción, lo que hubiera facilitado enormemente los trabajos realizados.

3. IMPORTANCIA HISTORICA, TECNICA Y CULTURAL

Cuando en 1914 estalla la guerra en Europa, el hormigón –armado o sin armar– era todavía un material de construcción desconocido, de segunda fila, no sólo en aquellas obras de ingeniería que, como los grandes puentes, constituían la vanguardia del arte de construir, sino también –y quizás en mayor grado– en la edificación en general y especialmente en la de naves industriales, fábricas, depósitos, galpones y la de toda clase de espacios de uso público.

Muy pocos meses después el acero escaseaba como la paz. Debido a esta circunstancia, ajena a lo puramente técnico y constructivo, el hormigón armado iba a recibir un impulso definitivo con la rápida extensión y variedad de sus aplicaciones y un mayor respaldo a la confianza en su durabilidad, muy debil hasta entonces.

Dentro de aquel período de entreguerras, en que el hormigón adquiere poco a poco su primacía en la construcción frente a los demás materiales –una hegemonía que sólo será realmente definitiva tras la Segunda Guerra Mundial– Eugène Freyssinet tiene un papel de primerísimo rango, y quizá pueda afirmarse sin exageración que su aportación personal es la clave de este proceso de generalización del hormigón en todos los ámbitos constructivos. Y esto es así, no sólo por sus más conocidas y grandes creaciones, como puedan ser sus progresivos records mundiales de puentes y cubiertas a lo largo de estos años (Puente de Villeneuve sur lot (1914-1929); Hangares de Orly (1921-1923); y Puente de St. Pierre du Vauvray (1923-1925) que culminan en el gran puente de Plougastel (1924-1930) que puede considerarse obra cumbre del período por su prestigio técnico y su enorme repercusión en la opinión pública), o bien su genial invención del pretensado que –aunque alumbra definitivamente en estos años treinta– no tendría su fruto y su difusión mundial hasta después de la Guerra, sino por aquellas innumerables obras menos conocidas, pero de gran importancia histórica y técnica, tanto por la enorme cantidad y variedad de m^2 construídos para toda clase de funciones, como por su papel de continuo caldo de cultivo de las más ricas experiencias, mejoras e inventos que hicieron posible la consolidación e internacionalización del hormigón como material insustituible en el arte de construir de la segunda mitad del siglo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Los Halles Centrales de Reims pertenecen a esta última colección de obras de Freyssinet que, como la preciosa cubierta del Hall de viajeros de la estación de ferrocarril de la misma ciudad, fueron construídas a finales de la década de los veinte cuando ya Freyssinet abandonaba la Sociedad Constructora Limousin, después de 15 años de intenso trabajo conjunto, para dedicarse integramente a la génesis del pretensado.

En esta estructura reconocemos algunas de las características de su modo de construir con hormigón, como por ejemplo el descimbramiento de las bóvedas mediante la puesta en tensión de tirantes –deformandolos transversalmente–, y su utilización para compensar los efectos de retracción, permitir la utilización de aceros trabajando tensiones elevadas, y eliminar esfuerzos horizontales, garantizando el estricto trabajo a compresión del hormigón, evitando siempre las flexiones, lo que permitía obtener cuantías muy pequeñas de armadura. Por otro lado la utilización del sistema de cimbras deslizantes por traslación, desplazándolas paralelas a si mismas –ideada por Freyssinet en 1916– ripando una sola pieza, posibilitando un proceso rápido y económico de encofrado y desencofrado. Otra característica de gran importancia formal que aparece en esta estructura, es la utilización de arcos formeros en el extradós formando bóvedas con nervios exteriores con el intradós liso, invención suya que se remonta a 1913, lo que le permitía con suma facilidad su técnica de cimbras desplazables. Esta singular y personalísima apariencia de las innumerables bóvedas industriales de este tipo que durante los años de entreguerras construyó Freyssinet, nos trae a la memoria las preciosas fachadas de los altos almacenes abovedados del patio del Heb-Sed, con sus finos nervios adosados y sus cornisas cóncavas, levantados por el mítico Imhotep –padre de la ingeniería de la piedra como material de construcción– hace 48 siglos. También observamos aquí la reiterada utilización de espesores mínimos (entre 4 y 8 cm) por Freyssinet en estas bóvedas de hormigón para cubiertas con luces que en raras ocasiones bajan de los 35 m, y a veces alcanzan 86 m de luz como en los hangares de Orly.

Son muy pocas las muestras que quedan de la arquitectura industrial de esta época para que sigamos insensibles ante tantas demoliciones innecesarias. En primer lugar es necesario seguir luchando por el reconocimiento general por parte de la sociedad del carácter histórico-monumental de estas construcciones. La conservación del patrimonio arquitectónico y de las obras públicas debe sobrepasar su marco tradicional, el de los arqueólogos e historiadores del arte, que no alcanza mucho más allá de los monumentos singulares más prestigiosos, como las antiguas catedrales o palacios. Debemos ensanchar la noción de conservación monumental, la necesidad de protección de nuestro patrimonio histórico hasta abarcar aquellas obras públicas y estructuras de edificación que tengan un alto significado, no sólo arqueológico, sino también histórico, técnico, cultural, simbólico o estético.

La reparación y la rehabilitación para los mismos o nuevos usos es un buen medio para afrontar esta conservación y una práctica tan antigua como la expoliación y la destrucción de monumentos. Miguel Angel reconvirtió las Termes de Diocleciano en una hermosa iglesia adaptada a los nuevos usos del siglo XVI, mientras los papas del Renacimiento saqueaban las ruinas de la Antigüedad sin el menor pudor, utilizando los travertinos del Coliseo y del Capitolio para sus nuevas construcciones. Rafael se quejaba ante León X de los enormes volúmenes de cal que se fabricaban destruyendo las esculturas antiguas.

La elección entre la conservación o la obra de nueva construcción es, pues, una cuestión económica y política, pero también ética, y sobre todo, una cuestión de sensibilidad y talento. De ahí nuestro interés en contribuir al máximo para la conservación de los Halles Centrales de Reims, ejemplar característico de la arquitectura industrial de hormigón armado de entreguerras y de la maestría y originalidad constructivas de Eugène Freyssinet.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

4. ESTADO DE DEGRADACION DE LA ESTRUCTURA EN FEBRERO DE 1983

El hormigón de la estructura ha venido sufriendo una degradación por carbonatación, que está acompañada por una disminución del Ph del hormigón, hecho que produce una sensible alteración del efecto pasivante que el hormigón inicialmente le confiere a la armadura.

Al quedar destruído este efecto, la armadura se corroe formándose el óxido poroso de hierro en capas muy blandas y superpuestas que se conoce por "herrumbre". Este proceso va acompañado de un elevado incremento del volumen o expansión, lo que da lugar al desprendimiento del recubrimiento exterior del hormigón debido a las fuertes tensiones internas que se originan. De esta forma se favorece una progresiva degradación del hormigón, conjuntamente con la destrucción de la propia armadura, que es necesario detener, ya que en caso contrario el proceso descrito acabará ocasionando la destrucción total de la propia obra. Este efecto se explica detalladamente en el anejo n° 1.

También son importantes las condensaciones que se producen en el intradós de la bóveda, hecho que ha favorecido enormemente la degradación del binomio hormigón-armadura estudiado en el anejo n° 1. Cualquier solución de reparación que se efectue ha de venir acompañada con la colocación de extractores en varios agujeros en la clave de la bóveda, aprovechando, a ser posible, los lucernarios existentes entre los nervios de rigidización 4-5 y 8-9 (ver figura n° 2), a fin de eliminar dichas condensaciones que son a todas luces perniciosas para el proceso global de degradación.

5. INFORME FOTOGRAFICO DEL ESTADO DE DEGRADACION DEL HORMIGON

El estado de degradación de la estructura que hasta aqui se ha analizado puede verse de forma expresiva en las siguientes fotografías, que fueron tomadas in situ por nosotros o recogidas del informe del C.E.B.T.P. de fecha 7-6-82 antes mencionado.

En la fotografía n° 4, que corresponde a la cara inferior del forjado de planta baja, se aprecia la fuerte corrosión que presentan actualmente las armaduras, que en algunos puntos afecta prácticamente a toda la sección resistente de las barras. También se puede apreciar el desprendimiento del recubrimiento del hormigón motivado por la expansión que provoca la formación de la herrumbre.

La fotografía n° 5 es una perspectiva de la cara inferior del forjado de planta baja, en la que se ve la viga-tirante aporticada que, a la cota del terreno, además de soportar el forjado de la planta baja, resiste las componentes horizontales transmitidas por la superestructura. Los defectos que se aprecian en esta fotografía n° 5 son practicamente los mismos que se han descrito con la fotografía n° 4.

En las fotografías núms. 6 y 7 se pueden ver dos planos diferentes que muestran el aspecto general que presenta el intrados de la bóveda con las armaduras corroidas y sin el recubrimiento del hormigón ya desprendido.

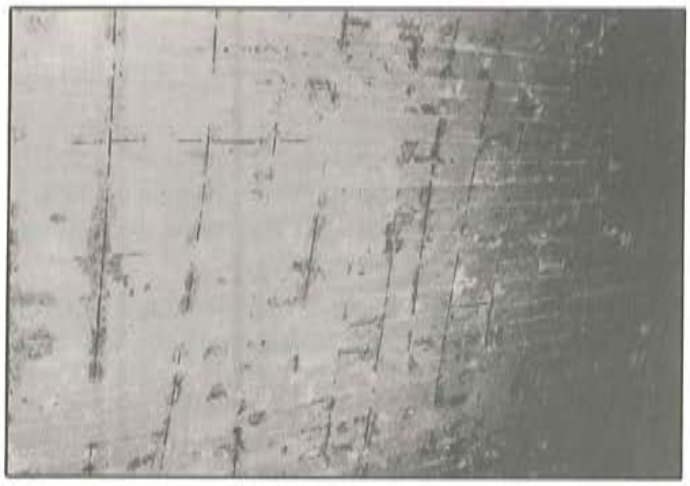
En la fotografía n° 8, que corresponde nuevamente a una zona del intradós de la boveda, se aprecia la corrosión general que presenta la armadura junto con la pérdida del recubrimiento del hormigón y además se observan unas eflorescencias en la superficie del hormigón que son debidas a la disolución y a la pérdida de la cal libre del hormigón.

En la fotografía n° 9 se pueden ver nuevamente las eflorescencias debidas a la pérdida de la cal libre del hormigón a través de las fisuras existentes a lo largo del arranque de un

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Fotografía 4

Fotografía 5



Fotografía 6

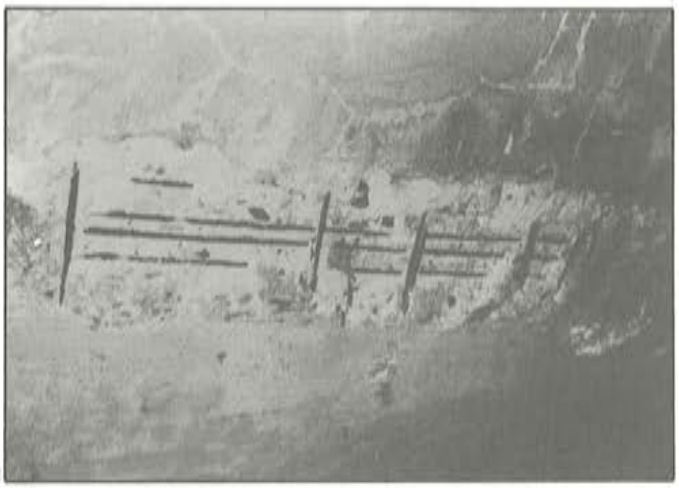
Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Fotografía 7

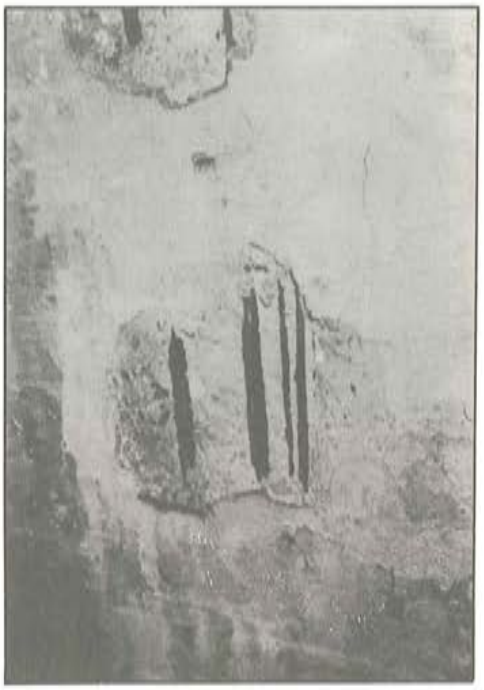
Fotografía 8

Fotografía 9

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

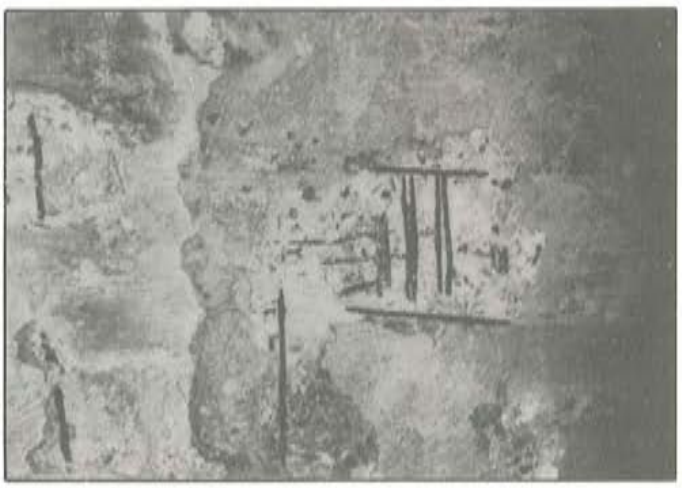


Fotografía 10



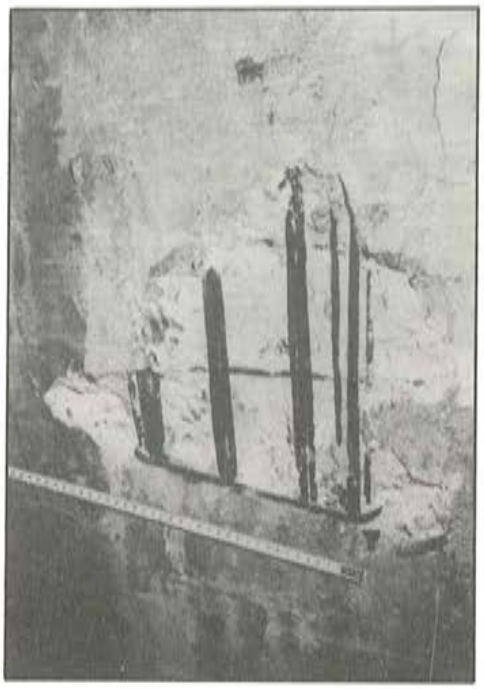
Fotografía 11

Fotografía 12



Fotografía 13

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025



Fotografía 14.

nervio de rigidización de la bóveda principal y de una fisura a 45° que se manifiesta en la intersección de dicho nervio con una de las bovedas ortogonales a la principal en voladizo. Estas fisuras, que presenta la estructura aisladamente en algunas zonas localizadas, son independientes del proceso de degradación al que nos venimos refiriendo y muy probablemente fueron debidas a asientos diferenciales localizados que se debieron producir con la puesta en servicio de la obra.

En la fotografía n° 10 se aprecia una fuerte corrosión de la armadura junto con una alteración importante del hormigón, a pesar de que la armadura presenta un elevado recubrimiento. Esta fotografía está tomada en el cruze de la boveda principal con una de las pequeñas bovedas ortogonales en voladizo.

En la fotografía n° 11 se puede observar el avanzado estado de corrosión que presentan las armaduras inferiores de uno de los nervios de rigidización de la bóveda principal.

En la fotografía n° 12 se puede ver el agujero de un testigo extraido, por personal técnico especializado del C.E.B.T.P., en una fisura a 45° y en una zona que presentaba una bolsa de arena arcillosa.

En la fotografía n° 13 se puede observar el estado general de degradación que presenta el intradós de la clave de uno de los nervios de rigidización de la bóveda principal.

Finalmente, en la fotografía n° 14 se ve el detalle de un paquete de armaduras de 6 mm de diámetro que se presenta fuertemente oxidado en el intrados y en riñones de un nervio de rigidización de la bóveda principal.

6. SOLUCION DE REPARACION PROPUESTA

Durante nuestra estancia en Francia nos declaramos contrarios a efectuar cualquier cálculo o recálculo de la estructura considerada como pieza elástica de hormigón armado, ya

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

que a nuestro juicio no puede admitirse que la estructura se comporte como tal. En primer lugar, nos parece arriesgado e ilusorio admitir que existe la adherencia necesaria entre el acero y el hormigón para que se cumpla la hipótesis de Navier o de permanencia de las secciones planas. Simultáneamente, la armadura residual, que resta por sufrir el ataque mencionado, es excesivamente frágil y no debe ser considerada como armadura resistente por el peligro inminente de rotura súbita o rotura frágil; rotura de la que tratan de huir todos los Reglamentos actuales de Hormigón Armado.

Sin embargo hemos de admitir, y el paso de más de 50 años transcurridos así lo ha constatado, que la estructura fue inicialmente diseñada de forma correcta. Por ello nuestra propuesta de reparación se basa únicamente en restituir la estructura dañada devolviéndole su forma de trabajo tal y como fue inicialmente concebida por Freyssinet, además de aislar, al mismo tiempo, toda la masa actual del hormigón de los agentes atmosféricos externos a fin de detener el ataque que venimos analizando.

En esencia, la solución de reparación propuesta consiste en desprender, tanto del extradós como del intradós de la bóveda, 1 ó 2 cms (aproximadamente) del hormigón que se encuentran actualmente degradados por carbonatación y reponer mediante hormigón proyectado "shotcreting" una capa armada de 1,5 a 2,5 cms de espesor en cada cara de la bóveda, cogiendo a modo de sandwich al hormigón de la bóveda aun no degradado.

Al mismo tiempo también habrá que desprender el recubrimiento superficial de las vigas que se encuentra actualmente carbonatado y embeber las vigas en otras de hormigón Prepakt, reponiendo en el recubrimiento de hormigón Prepakt una armadura que le proporcione al nervio de rigidización de la bóveda una capacidad mecánica que sea al menos equirresistente con la que inicialmente fue diseñado.

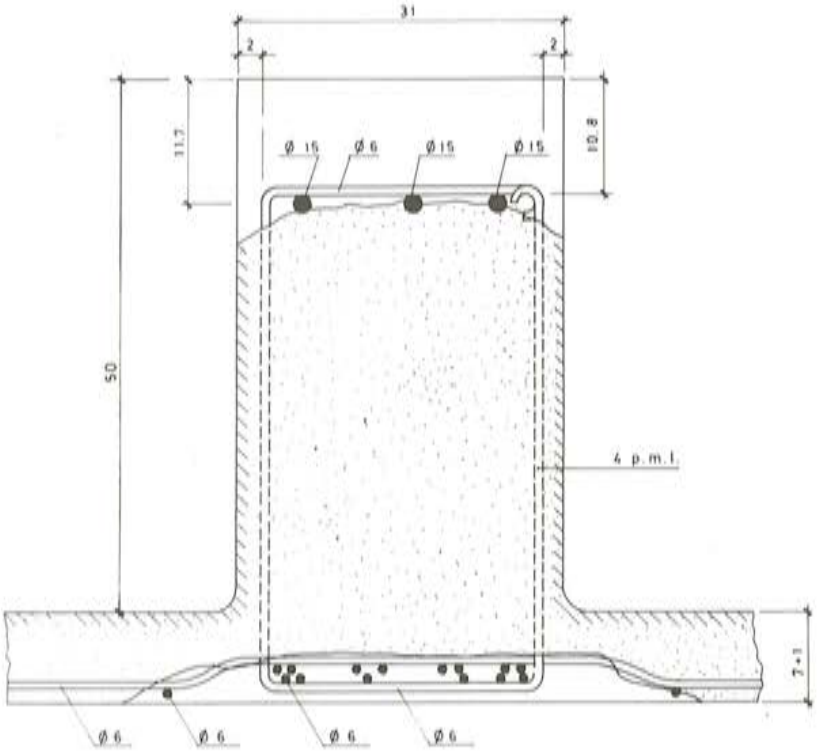


Fig. 3

SECCION DEL NERVIO DE RIGIDIZACION DE LA BOVEDA MOSTRANDO EL ESTADO MAS AVANZADO DE DEGRADACION QUE SE PRESENTA.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

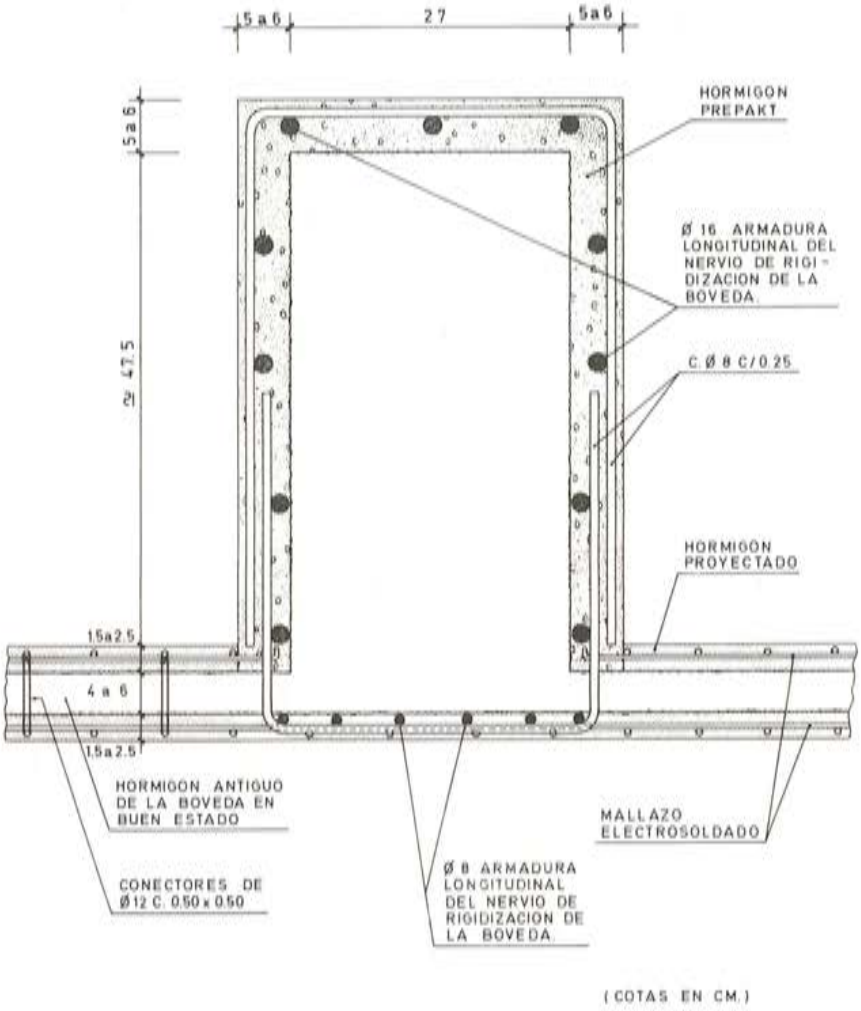


Fig. 4. Sección del nervio y de la bóveda, una vez reparados.

La sección de un nervio y de la bóveda tal y como se presenta actualmente y una vez reparados, se muestra en las figuras núms. 3 y 4.

Para desprender el hormigón degradado por carbonatación se debe emplear una martellina de abujardar de las que existen actualmente en el mercado accionadas por aire comprimido. Este dispositivo es ligero, siendo además de fácil manejo por personal no cualificado; su rendimiento es elevado, del orden de 2 m^2 por hora-hombre y por cm de espesor de abujardado. La profundidad a alcanzar con el abujardado para desprender la costra del hormigón carbonatado, aunque se puede detectar a simple vista, se comprobará fácilmente in situ mediante el viraje de la fenoftaleína, tal y como se indica en el anejo n° 1.

Para la realización de los taladros perforando todo el espesor de la bóveda en retícula de 0,50 x 0,50 m (ver figura n° 4), se pueden utilizar pistolas manuales ligeras, de las que existen infinidad de marcas en el mercado, que atraviesan los 8 cms del espesor de la bóveda en unos 12 segundos. En cada taladro se coloca un estribo de $\phi 12$ que cumpliría las funciones siguientes: Sirve de sujección en fase de montaje de los dos mallazos electrosoldados que se colocan a cada lado de la bóveda, también sirve como elemento de conexión entre ambas capas de hormigón proyectado a través de la bóveda, actuando también como armadura de

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

suspensión o de cuelgue del hormigón proyectado que queda en el intradós y finalmente actua como armadura de cosido para absorber los esfuerzos rasantes que se producen en el contacto entre el hormigón existente y el nuevo hormigón proyectado. Este esfuerzo rasante se absorbe con la armadura indicada, dejando además la superficie del hormigón viejo intencionadamente rugosa como indica el apartado 17.5 del ACI-CODE 318.77 u otra publicación técnica existente al respecto (2) y (3).

Previamente al recrecido de la bóveda con el hormigón proyectado, será preciso fijar los mallazos electrosoldados suficientemente próximos a la superficie de la bóveda; esta operación la venimos realizando con pleno éxito mediante alambre de atar la ferralla adherido con resina epoxi a la superficie del hormigón a revestir.

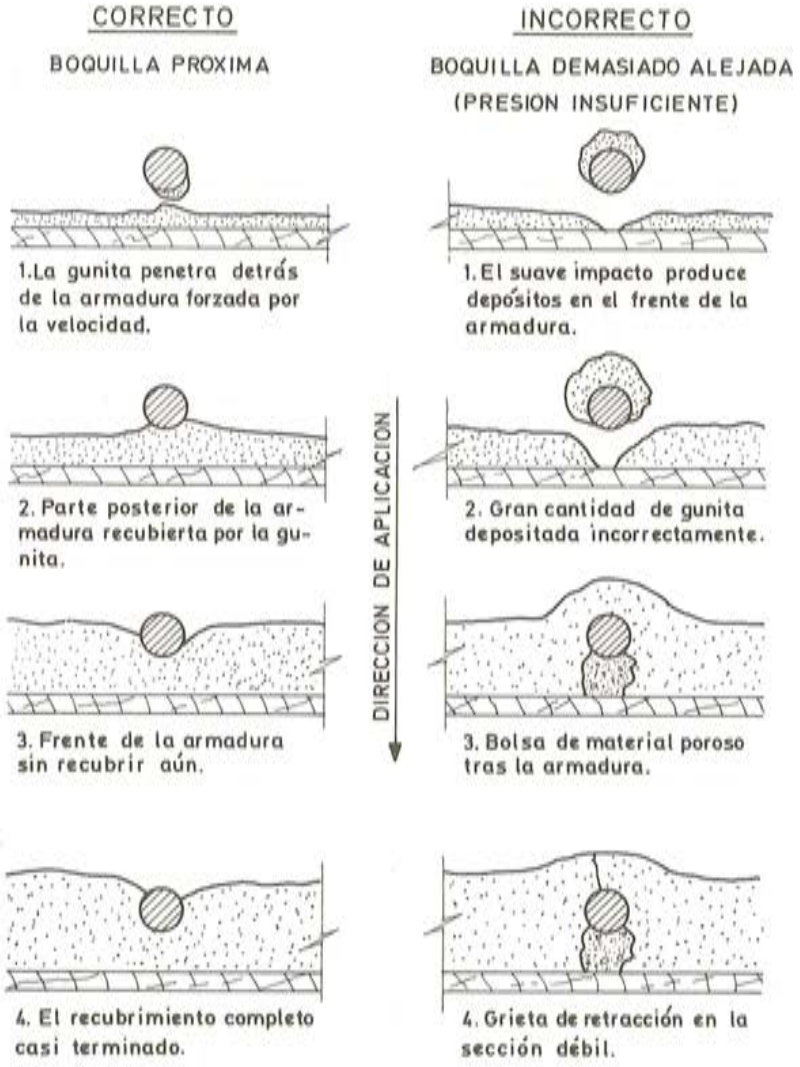


Fig. 5

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Para conseguir un buen hormigón proyectado, con una resistencia equivalente o superior a un hormigón convencional, se precisa conocer y elegir convenientemente las siguientes variables: Equipo de aplicación; aridos y su granulometría; dosificación y tipo de cemento; aditivos y puesta en obra. Los factores que quizá intervengan con más influencia en el proceso son la presión y el consumo de aire comprimido, que han de ser superiores a los que normalmente se vienen utilizando, con un criterio erroneo de economía, por algunas casas especializadas, y la especialización del personal que proyecta el mortero. J. Reading refiriéndose a este punto concreto cita un caso en el que, empleando el mismo equipo mecánico de puesta en obra e idéntica composición del material base, la resistencia bajó de 420 kg/cm² a 105 kg/cm² al sustituir el personal cualificado por otro mal adiestrado. Es decir, con los mismos elementos se puede lograr un hormigón proyectado excepcional o un mal enfoscado no incrustado, y por lo tanto con una mala adherencia con la superficie inicial a revestir.

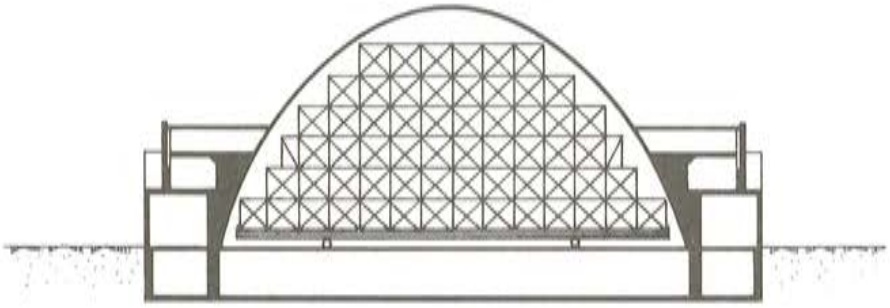


Fig. 6

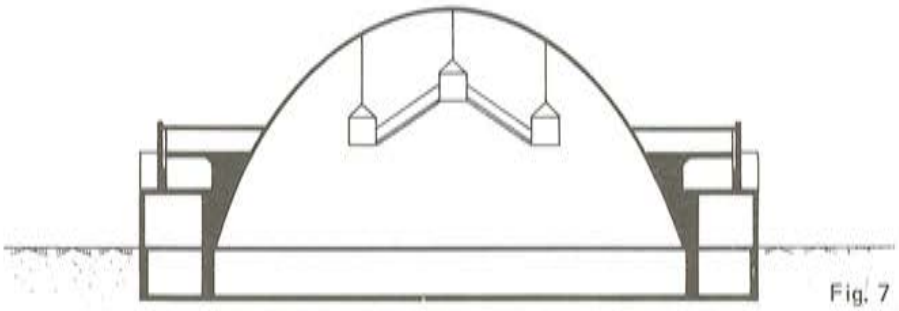


Fig. 7

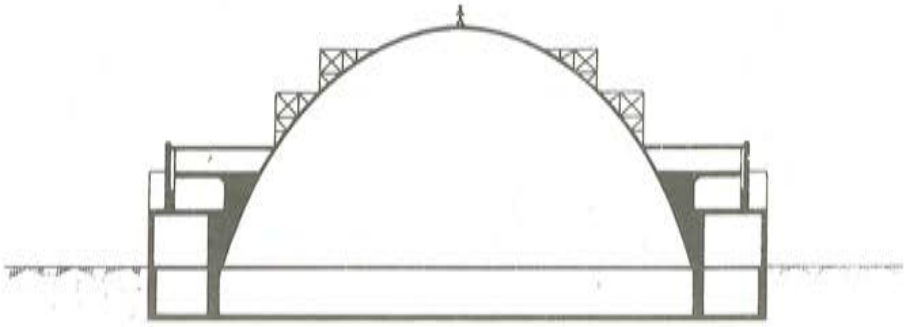


Fig. 8

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Es conveniente colocar un mallazo, bastando incluso una tela de gallinero (conocida técnicamente por enrejado de simple torsión 5116), para disminuir el rechazo. Cuando el hormigón proyectado va a ir armado con un mallazo, como en el caso descrito, el proceso de puesta en obra se hace todavía más difícil, al ser necesario que las armaduras queden perfectamente rodeadas por el hormigón proyectado sin dejar "zonas en sombra" poco compactas y con un contenido pobre en cemento. La figura n° 5 es muy aclaratoria a este respecto y procede de la norma Recommended Practice for Shotcreting (ACI 506-66) (4), (5), (6), (7), (8), (9) y (10).

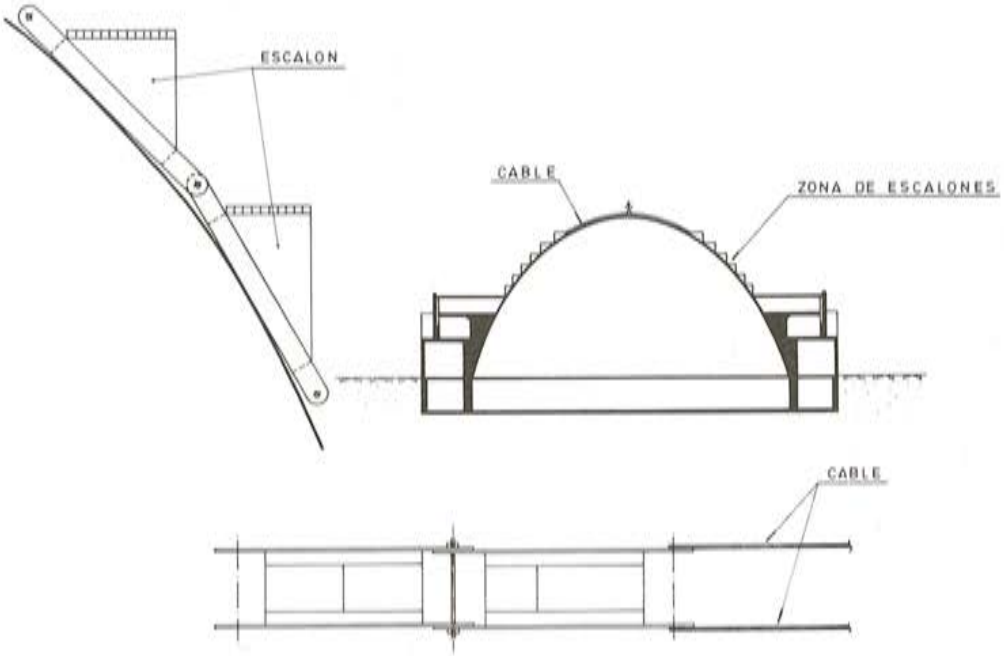


Fig. 9

Se propone efectuar el recrecido de los nervios de rigidización de la bóveda con hormigón Prepakt, porque este hormigón presenta una serie de ventajas importantes con respecto a un hormigón convencional que enumeramos en el anejo n° 2.

Para acceder al intradós de la bóveda y poder llevar a cabo el proceso de reparación descrito, propusimos utilizar una cimbra interior que se pudiera desplazar por traslación y que permitiera acceder a todo el perimetro del intrados de la bóveda (ver figura n° 6). También se propuso como alternativa emplear un cimbrado colgado con cables desde la propia bóveda que venimos empleando con enorme economía en la reparación de puentes(ver figura n° 7).

Para acceder igualmente al exterior de la bóveda propusimos utilizar un andamiaje de tubos en forma de gradas escalonado (ver figura n° 8) que permitiera llegar de esta forma a la zona de la bóveda cuya pendiente no permite el libre acceso. Como alternativa se propuso utilizar unas tablas articuladas con escalones en la zona de riñones de la bóveda ocupada por el andamiaje anterior, unidas entre sí mediante cables, tal y como se representa en la figura n° 9.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

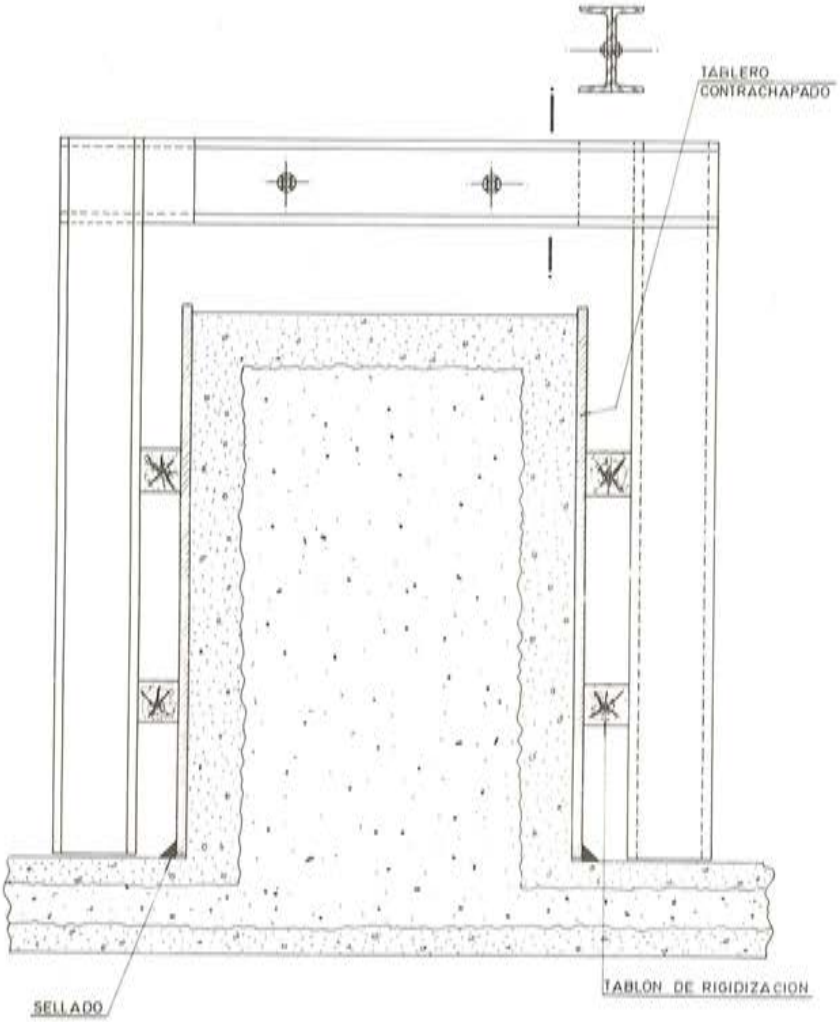


Fig. 10

Para encofrar las vigas se propuso el encofrado indicado en la figura n° 10 constituído por dos tableros contrachapados curvos, que se adaptan a la forma de la bóveda y que se sellan con mortero contra la misma previamente al hormigonado. Los tableros están rigidizados por dos tablones longitudinales que quedan finalmente sujetos en varios planos equidistante por dos piezas en forma de L (constituídas por UPN) que se unen formando una U invertida que es autoestable frente a la presión del mortero de inyección. Como alternativa se propuso el encofrado indicado en la figura n° 11 que está formado por dos tableros contrachapados curvos rigidizados por dos tablones longitudinales que en varios planos equidistantes se unen por un tirante en cabeza que impide su apertura y se fijan en la base a la bóveda mediante pernos tipo SPIT.

Finalmente presentamos un presupuesto de ejecución material, valorando detalladamente todos los conceptos que aquí se han descrito someramente, llegando a la conclusión que por unos 40 millones de pesetas se podría reparar toda la estructura a excepción de los forjados del techo del sótano que entendiamos era más fácil rehacer, reparando al mismo tiempo los tirantes horizontales y los pilares del sótano que los soportan.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

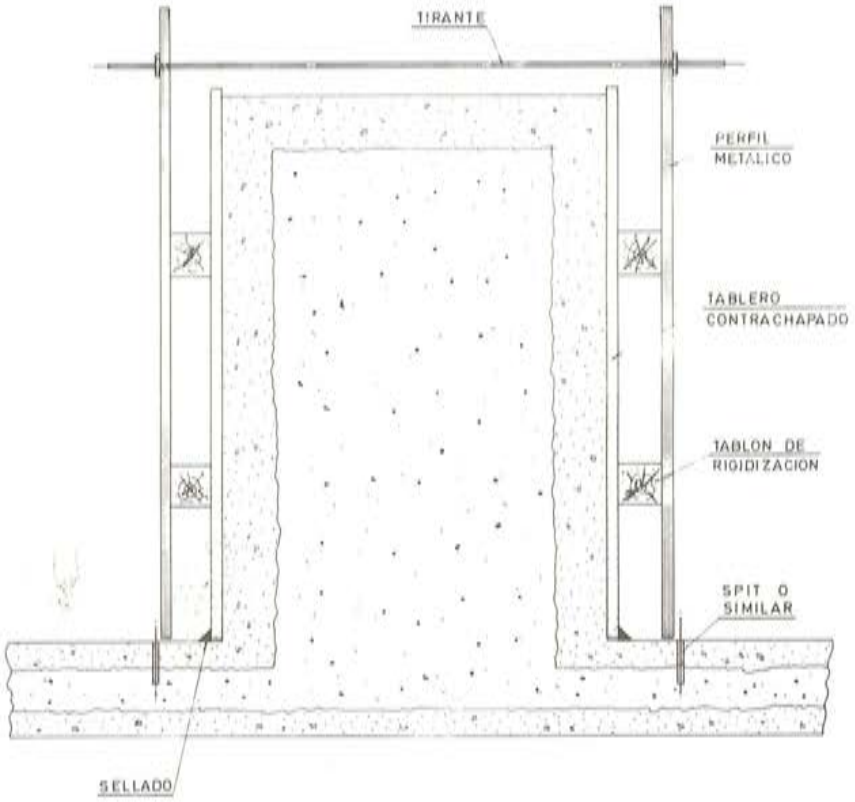


Fig. 11

7. OTRAS SOLUCIONES DE REPARACION DESECHADAS

Desechamos desde el principio, por razones de tipo técnico y económico, una reparación basada en el empleo de resinas epoxidicas, primera solución que suele plantearse en estos casos. En efecto, se podría pensar en realizar una reparación general protegiendo ambas caras de la bóveda con un mortero de tipo epoxi de unos 300 centipoises de viscosidad, conseguida a base de agregar como inertes arina de silice o cuarzo coloidal u otro producto. Además de esta reparación de tipo general de ambas caras de la bóveda, sería necesario rellenar los huecos o zonas en las que se produjo el desprendimiento del recubrimiento de la armadura y asimismo reparar las grietas existentes. Para rellenar los huecos producidos por el desprendimiento del recubrimiento, se podría utilizar una capa de imprimación de epoxi junto con un mortero de epoxi de relleno. Para sellar las grietas existentes, la técnica que usualmente se emplea consiste en recubrir superficialmente dichas grietas con una película rígida en la que se dejan varios puntos de inyección a distancias adecuadas a fin de inyectar a través de ellos una resina de baja viscosidad (del orden de 40 a 50 centipoises). Para reparar los nervios de rigidización se podría utilizar la técnica usual de pegar una o varias chapas delgadas al hormigón a reforzar para adaptarse a la curvatura superficial de la vigas, a fin de que el espesor de la interfase de la epoxi no supere los 2 ó 3 mm que se consideran críticos. Con espesores mayores de la interfase los fenómenos de fluencia ("Creep") adquieren gran importancia y este hecho hace que el coeficiente de seguridad del refuerzo disminuya alarmantemente al dejar de cumplirse la hipótesis de Navier o de permanencia de las secciones planas. Para conseguir que el espesor de la interfase no tenga valores elevados sería preciso pre-

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

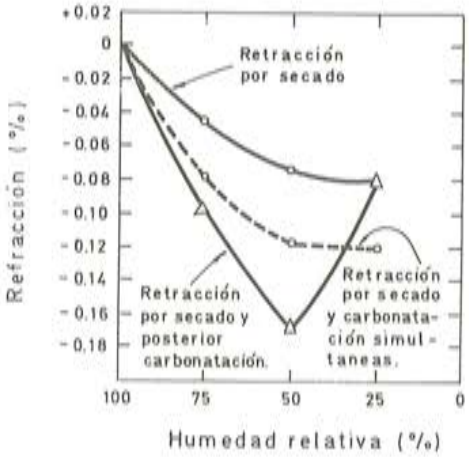


Fig. 12

viamente nivelar el hormigón de la viga en las zonas con fuertes irregularidades, mediante el empleo un mortero de epoxi de menor resistencia pero de mayor módulo de elasticidad.

Rechazamos la solución de reparación descrita por las siguientes razones:

a) Con la solución indicada se desprenden de ambas caras de la bóveda algunos centimetros del hormigón deteriorado y carbonatado que posteriormente se reponen con dos películas de époxi (una en cada cara) de menor espesor, dándo lugar de esta forma a una estructura menos rígida que la inicial.

b) La époxi del extrados de la bóveda, desde el punto de vista de la durabilidad, precisa de un mantenimiento periódico. Este mantenimiento se hace necesario porque los rayos ultravioleta del sol atacan a la resina époxi decolorándola de forma no uniforme y afeando así su aspecto estético. Para evitarlo sería necesario aplicar en el exterior una mano de un coopolimero vinilico o acrílico cada 6 u 8 años.

c) El mejor material que se debe emplear para reparar una estructura de hormigón para obtener un buen comportamiento termo-higrométrico es, sin duda alguna, el propio hormigón. En efecto, el mortero de époxi es un material diferente y con características bien diferentes a las del hormigón base. El coeficiente de dilatación térmica del mortero de époxi, que varia según la formulación empleada, es de dos a tres veces superior al del hormigón (o al del acero) (11). El módulo de elasticidad del mortero de époxi, que varía también con la formulación empleada y con la temperatura de aplicación, tiene valores bastante elevados a temperaturas bajas y decrece rápidamente para temperaturas superiores a una determinada temperatura crítica, tal y como se puede analizar en la publicación (11) de Fernández Cánovas. Todos estos factores exigen por una parte conseguir una resina epoxi con una formulación adecuada en función de la humedad y de la temperatura ambiente con que se va a aplicar. Por otra parte, cuando la temperatura ambiente varia, aumentando o disminuyendo con respecto a la temperatura de aplicación, se genera en el conjunto hormigón-époxi un plexo tensional. Cuando la temperatura aumenta con respecto a la temperatura de aplicación se producen compresiones en la epoxi y tracciones en el hormigón que son del mismo orden de las compresiones que se producen en la bóveda por el peso propio. Además se generan unos esfuerzos rasantes en el contacto epoxi-hormigón que dependen de las propiedades de ambos materiales y de los espesores de los mismos. Estas tensiones nada deseables, prácticamente desaparecen cuando el material del refuerzo coincide con el material base a reforzar.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

d) Si se reparasen los nervios de rigidización de la bóveda mediante chapas pegadas con resina epoxi después de desprender del mismo el hormigón deteriorado, la rigidez final del nervio, una vez reparado, sería inferior a la rigidez con que inicialmente se proyectó y notablemente inferior a la rigidez de la solución propuesta.

El costo de la reparación con resinas epoxi y morteros epoxidicos sería mayor que con la solución propuesta. A título meramente orientativo indicaremos que el consumo de resina epoxi en una capa de imprimación es aproximadamente de un kg por cada m^2, que cuesta del orden de las mil ptas. sin contar con la mano de obra, lo que representa un valor bastante elevado. Otro ejemplo que puede darse es el precio del metro cúbico del mortero epoxi de relleno que es unas 650.000 ptas. lo que se considera bastante elevado y que se dedujo suponiendo al mortero una densidad de $\rho = 2{,}1$ y un costo del orden de las 300 ptas. el kilo.

8. CONSIDERACIONES FINALES

No queremos terminar sin antes dejar constancia de la pasión con que, la Arquitecto municipal Martine Liotard y el entonces primer Teniente de Alcalde del Ayuntamiento de Reims, lucharon para evitar la demolición de una estructura tan hermosa y representativa de la arquitectura industrial de hormigón armado de entreguerras como es esta de los Halles Centrales, proyectada y construída por Eugene Freyssinet. Martine Liotard no dudó en pedir nuestro apoyo cultural y colaboración técnica, más allá de sus fronteras, con las complicaciones administrativas y técnicas que esto le suponía, pero logrando paralizar así, en principio, la demolición de sus queridos Halles con motivo de nuestra intervención.

En Reims expusimos con tenacidad nuestra solución de reparación, con cuantos detalles se nos solicitaron, a los representantes políticos y a los técnicos franceses de la Secotec y del C.E.B.T.P. que previamente habían informado sobre la estructura.

Tras nuestra amplia exposición se estableció un intenso debate-coloquio que duró 3 días y concluyó con la aprobación, por parte de todos, de la solución propuesta objeto de esta publicación. Quedó así detenida la demolición inminente de los Halles Centrales, procediendose de inmediato a la revocación del acuerdo de demolición y adopción de uno nuevo de conservación.

Las recientes elecciones municipales francesas de Marzo de 1983 han desplazado a los dirigentes socialistas del Ayuntamiento de Reims. Desgraciadamente, los nuevos representantes políticos –de tendencia política conservadora– paradójicamente han tomado la decisión de demoler definitivamente los Halles Centrales, dañando irreparablemente un gran patrimonio histórico monumental como el de Reims, donde se incluye sin duda alguna esta hermosa estructura abovedada de Eugène Freyssinet.

Anejo n° 1.– EXPLICACION QUIMICA DE LA DEGRADACION DEL HORMIGON POR CARBONATACION Y DE LA CORROSION DE LAS ARMADURAS

El proceso de degradación del hormigón por carbonatación, que suele presentarse acompañado por una disminución del Ph del hormigón y por una corrosión de las armaduras, es el que a continuación se describe:

La hidratación de los silicatos del cemento se produce de la siguiente forma:

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

– El silicato tricálcico

$$2(3CaO \,.\, SiO_2) + 6H_2O \rightarrow 3CaO \,.\, 2SiO_2 \,.\, 3H_2O + 3\,Ca(OH)_2$$

– El silicato bicálcico

$$2(2CaO \,.\, SiO_2) + 4H_2O \rightarrow 3CaO \,.\, 2SiO_2 \,.\, 3H_2O + Ca(OH)_2$$

Como se puede ver ambos silicatos dan lugar a la formación de bisilicato tricálcico hidratado que se conoce con el nombre de Tobermorita, ya que su composición es prácticamente la misma que la del mineral que lleva este nombre.

De estas reacciones también se deduce que el silicato tricálcico hidratado da lugar a que se forme hidróxido de cálcio en un 40 por 100 de su peso y el silicato bicálcico hidratado da lugar también a que se forme hidróxido de calcio en un 20 por 100 de su peso. Según esto, el hidróxido de calcio procedente de la hidrólisis del cemento, en un hormigón elaborado con cemento portland, puede alcanzar una cantidad de hasta el 25 por 100 del peso del cemento.

Este hidróxido de cálcio procedente de la hidratación del cemento reacciona con el anhídrido carbónico del aire en presencia de la humedad atmosférica o de otra fuente. Esta reacción realmente es un ataque ácido del hormigón que se produce según la ecuación:

$$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CO_3Ca + H_2O$$

Además del carbonato de cálcio se produce también sílice hidratada, óxido de hierro y alumina. Estos compuestos primarios no los contemplamos al no intervenir en el proceso de degradación que estamos estudiando.

El proceso de carbonatación así descrito se produce para concentraciones bajísimas del anhídrico carbónico en el aire, bastando el 0,03 por 100 en volumen que existe en las atmósferas rurales. Por supuesto esta concentración en las ciudades es mucho mayor del orden del 0,3 por 100 y en condiciones anormales llega a valer hasta el 1 por 100.

La carbonatación así descrita comienza en la superficie del hormigón que está en contacto con el aire y de acuerdo con el proceso explicado, todos los componentes del cemento acabarían por ser atacados por el anhídrido carbónico del aire. Sin embargo, en un hormigón normal este ataque queda reducido a un ataque superficial del mismo, que a su vez evita la progresión del fenómenos en profundidad. Esto es debido a la baja solubilidad del carbonato cálcico que es del orden del cienavo de la solubilidad del hidróxido de cálcio, lo que hace que se produzca un efecto pasivante por la película superficial formada.

No obstante, hay veces en las que la película superficial de hormigón carbonatado no puede proteger de este ataque al resto de la masa del hormigón y entonces el fenómeno progresa en profundidad pudiendo producirse la total degradación del hormigón si no se toman medidas para detener este ataque.

Entre las diversas causas que pueden favorecer esta carbonatación se pueden citar las siguientes:

– El aumento de la relación A/C es un fenómeno que favorece la carbonatación, ya que este factor aumenta la permeabilidad del hormigón que es una de las grandes vías que favorece el ataque. A título meramente indicativo se puede decir que la profundidad de carbonatación para una relación A/C de 0,6 es del orden del doble que para una relación A/C de 0,4; y una relación A/C de 0,8 produce una profundidad de carbonatación superior en un 50 por 100 a la correspondiente a una relación A/C de

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

0,6. Los valores de la profundidad de carbonatación para hormigones normales varían de 5 a 25 mm y un valor representativo de la profundidad de carbonatación para una relación A/C de 0,5 después de un período de 10 años con una exposición atmosférica normal puede variar de 6 a 12 mm.

- El aumento del contenido en cemento es un factor que disminuye la carbonatación, ya que esta variable aumenta la compacidad del hormigón. La profundidad de carbonatación para un hormigón con una dosificación de cemento de 180 kg/m^3 es del orden del doble de la que se produce en un hormigón con 300 kg/m^3 y del orden de cuatro veces de la que se produce en un hormigón con 500 kg/m^3.

- Las grietas y fisuras en el hormigón son factores que favorecen la carbonatación y las dimensiones peligrosas comienzan para aberturas de fisuras del orden de 0,3 mm.

  Cuando las grietas son apreciables (como se puede ver en las fotografías núms. 8 y 9) se produce a través de ellas la pérdida de la cal libre del hormigón disuelta en el agua de lluvia, que al ser químicamente muy pura presenta una elevada capacidad de disolución. Este hecho, que se manifiesta con unas eflorescencias típicas de color blanquecino en los paramentos del hormigón, acelera el proceso de degradación analizado como obviamente se comprende.

- La profundidad de la carbonatación se puede considerar que crece proporcionalmente con la raiz cuadrada del tiempo. Valores usuales de profundidades de carbonatación para hormigones normales de cemento portland en función del tiempo y de la dosificación de cemento se recogen en la tabla siguiente:

Dosificación de cemento en kg/m^3	PROFUNDIDAD DE CARBONATACION en mm.				
	5	10	15	20	
250	0,5	2	4	7	Tiempo en años
450	4	15	35	65	

- La humedad del hormigón y/o la humedad relativa del medio ambiente son factores que influyen en la carbonatación del hormigón tal y como se ha comprobado al estudiar el fenómeno. La carbonatación aumenta con la humedad relativa del medio ambiente hasta una humedad relativa del 50 por 100, ya que para este valor se produce un máximo de la carbonatación y para valores superiores la carbonatación disminuye. Como el agua es un factor que influye en el proceso de carbonatación del cemento es lógico que ésta aumente con la humedad relativa del medio ambiente. Sin embargo, cuando la humedad relativa del medio ambiente es superior al 50 por 100 los poros del hormigón comienzan a saturarse de agua y a medida que progresa esta saturación se dificulta la penetración del anhídrido carbónico del aire y por esta causa disminuye la carbonatación.

  También se ha dicho que la carbonatación es un ataque ácido del hormigón y que este ataque va acompañado de una disminución del Ph del hormigón. El pH de un hormigón normal recién colocado, tiene un valor próximo a 12,5 y a medida que avanza la carbonatación este valor baja, llegándose a alcanzar valores próximos a 8 y

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

en casos excepcionales hemos detectado valores próximos a 7. La medida del valor del Ph del hormigón a diferentes profundidades puede hacerse usando varios indicadores colorimétricos que detectan un intervalo del Ph que varía desde 4 a 9,8. Algunos indicadores y sus intervalos de viraje se relacionan en el cuadro siguiente a título meramente expositivo:

Indicador	*Indicador de viraje*
Verde de bromocresol	4,00 - 5,60
Azul de bromotimol	6,00 - 7,00
Rojo de fenol	6,80 - 8,40
Rojo de cresol	7,20 - 8,80
Azul de timol	8,00 - 9,60
Fenoftaleína	8,2 - 9,8

Se puede detectar rapidamente in situ por un procedimiento sencillo si un hormigón ha sufrido carbonatación a una determinada profundidad aplicando fenoftaleina a una superficie recién rota del hormigón y observando la coloración del mismo. Si el hormigón ha sufrido un proceso de carbonatación la superficie permanecerá incolora; si por el contrario, el hormigón no ha sufrido carbonatación el hidróxido de cálcio que esta libre hará que el indicador vire dando una coloración violeta rojiza.

En la figura n° 12 se puede ver de forma cualitativa la variación de la carbonatación en función de la humedad relativa del medio ambiente y el porcentaje de la retracción que experimenta el hormigón en función de esta misma variable. Es conocido, y en la figura n° 12 se puede observar que, además de la retracción plástica e hidráulica, en un hormigón se produce una retracción debida al proceso de carbonatación que puede, incluso a veces, producir fisuración en el hormigón, lo que a su vez aceleraría el propio proceso de la carbonatación.

- Otro factor que influye en el proceso de carbonatación descrito es el tipo de cemento utilizado, puesto que las cantidades de silicato bicálcico y silicato tricálcico, que son las que más están ligadas con el fenómeno, varían con el tipo de cemento. A título meramente orientativo se quiere indicar que en un cemento férrico, sulforresistente, con una cantidad de aluminato tricálcico inferior al 5 por 100, la profundidad de carbonatación es del orden de 1,5 veces mayor que la correspondiente a la de un cemento portland normal. La profundidad de carbonatación de un cemento siderúrgico es del orden de 2 veces de la correspondiente a un portland normal. La influencia de las adiciones es variable y es función del tipo de la adición. Cuando se emplean cenizas volantes, éstas pueden favorecer el proceso de carbonatación, aunque la magnitud de la misma es función de su composición química e influye de forma especial el tipo de ceniza ácida o básica.
- Un último factor que influye en el proceso de carbonatación que se está estudiando, es la naturaleza de los áridos. Si se emplean áridos procedentes de rocas blandas, friables, porosas o que contengan nódulos de yeso, por ejemplo, el hormigón resultante es permeable, hecho que favorece enormemente el proceso de carbonatación aludido. Un árido friable, por ejemplo, es el árido granítico con presencia de jabre, este árido además de ser ácido es un árido meteorizado en el que los feldespatos se caolinizaron dando lugar a un hormigón de baja resistencia y muy permeable, factores que aceleran el proceso que venimos estudiando. Otro aspecto que origina un hormigón muy permeable es el empleo de áridos con una granulometría inadecuada, hecho que también favorece la progresión del fenómeno.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

El proceso de carbonatación así descrito, cuando se dan una serie de condiciones favorables, no sólo puede originar una progresiva degradación del hormigón hasta producir la total destrucción del mismo, sino que además va acompañado de la corrosión de la propia armadura, ya que se produce una sensible alteración del efecto pasivante que inicialmente le confiere el hormigón. Es decir, en un hormigón normal, suficientemente compacto, de calidad aceptable y con un Ph que oscila entre 12 y 12,5, las armaduras no sufren ningún proceso de corrosión debido a que se forma una película de óxido de hierro sobre la superficie del acero, de forma muy análoga a la película pasivante de óxido de aluminio que protege a este metal frente a su corrosión en condiciones de exposición normales. Sin embargo, cuando el Ph del hormigón toma valores inferiores a 11, la capa pasivante de óxido de hierro antes mencionada queda destruida, corroyéndose la armadura y formándose el denominado óxido poroso de hierro en capas muy blandas que se conoce por "herrumbre".

El proceso de formación de la "herrumbre" en presencia del anhídrico carbónico del aire, tiene lugar según la reacción siguiente:

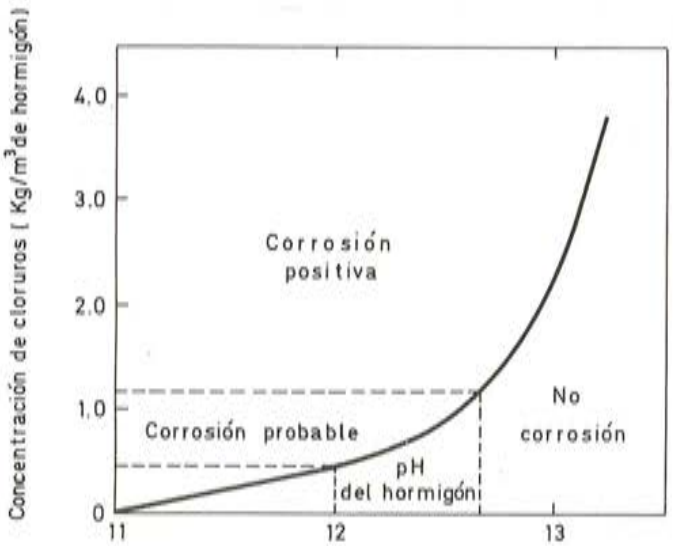
$$Fe + CO_2 + H_2O \rightarrow CO_3Fe + H_2$$

Cuando los iones hidrógeno liberados en la zona catódica no se transforman en moléculas de hidrógeno, sino que pasan del estado iónico al del agua, la reacción se acelera según la ecuación:

$$Fe + 2CO_2 + H_2O + O \rightarrow (CO_3H)_2\ Fe$$

que a su vez reacciona con el oxígeno ionizado oxidándose y dando lugar a óxido férrico, que es lo que se conoce por "herrumbre", de acuerdo con la ecuación:

$$2(CO_3H)_2\ Fe + O^{-2} \rightarrow Fe_2O_3 \cdot 2H_2O + 4CO_2$$



Efecto de los cloruros en la corrosión de las armaduras.

Fig. 13

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La formación de la "herrumbre" va acompañada de un elevado incremento de volumen o expansión, hecho que da lugar al desprendimiento del recubrimiento exterior del hormigón debido a las fuertes tensiones internas que se originan, lo que favorece la progresión del fenómeno que acaba por ocasionar la total destrucción de la armadura y la ruina de la propia obra.

Aunque se ha dicho que el efecto pasivamente de la película de óxido de hierro queda destruido cuando el Ph del hormigón toma valores inferiores a 11, sin embargo se puede producir esta destrucción incluso con Ph superiores a 11, es decir, en condiciones de elevada alcalinidad, si el hormigón contiene además cantidades sensibles de iones cloruro. Estos iones poseen la propiedad de acelerar la destrucción de la capa protectora de óxido de hierro y basta una pequeña concentración de cloruros para compensar la basicidad del hormigón tal y como se puede ver en la figura n° 13.

La presencia de cloruros en el hormigón es debida la mayor parte de las veces al empleo de áridos marinos y/o a la utilización de un agua inadecuada que contenga dicho producto.

El efecto activador de la corrosión química hasta ahora descrito por parte de los cloruros, se ve a veces potenciado por la corrosión electroquímica que se produce con la formación de pilas galvánicas de concentración, cuyo efecto se puede ver favorecido por la poca resistividad eléctrica del suelo de cimentación o por la del propio hormigón.

Anejo n° 2.– EL HORMIGON DE BAJA RETRACCION PROPUESTO

En el presente anejo se relacionan una serie de ventajas que presenta el hormigón Prepakt con respecto a un hormigón convencional:

El hormigón Prepakt se coloca en obra por inyección de un mortero sobre el árido que previamente ha rellenado el espacio a hormigonar.

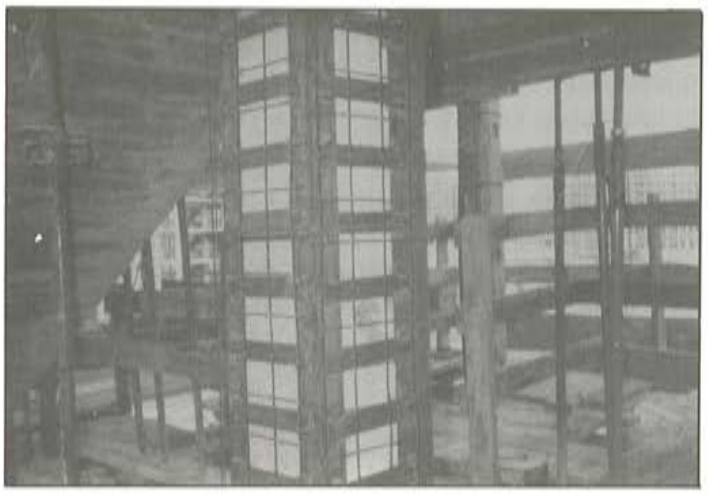
El árido ha de ser apto para elaborar hormigones, tendrá un tamaño uniforme comprendido entre 25 y 35 mm y su coeficiente de forma ha de ser superior a 0,20, es decir el árido ha de tender hacia la forma esférica. Este árido podra ser rodado o de machaqueo aunque con este último se alcanzan resistencias mucho más elevadas a igualdad de los restantes parámetros.

La arena que forma parte del mortero de inyección también habrá de ser apta para fabricar hormigones, su tamaño máximo será inferior a 2,5 mm y su módulo de finura estará comprendido entre 1,4 y 2,1. (El módulo de finura al que nos referimos viene definido por la suma de los % retenidos acumulados en los tamices Núms. 16, 30, 50.y 100 de la serie Americana). A medida que aumenta el módulo de finura mayor es el valor de la resistencia que se alcanza con el hormigón Prepakt resultante, viniendo limitado superiormente este valor a 2,1 por imposiciones del proceso de inyección.

El cemento a utilizar conviene que sea de endurecimiento lento. Se puede emplear cualquier cemento Francés equivalente a un Portland normal Español o a un buen cemento Puzolánico, no siendo convenientes los cementos siderúrgicos ni los cementos del tipo férrico, sulforresistentes, por las razones ya apuntadas.

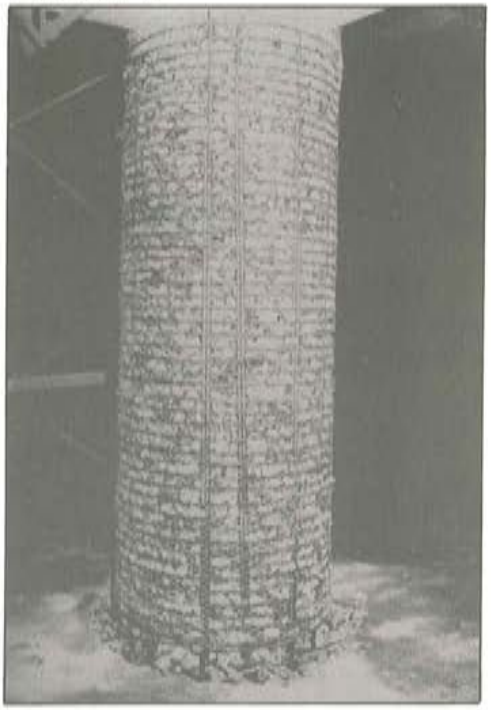
El mortero de la inyección debe tener una consistencia fluída, medida por el tiempo que tarda en vaciarse un determinado volumen del mismo, en un ensayo standard conocido por "ensayo del Flow-cone" (12). La consistencia fluída de este mortero permite una fácil

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

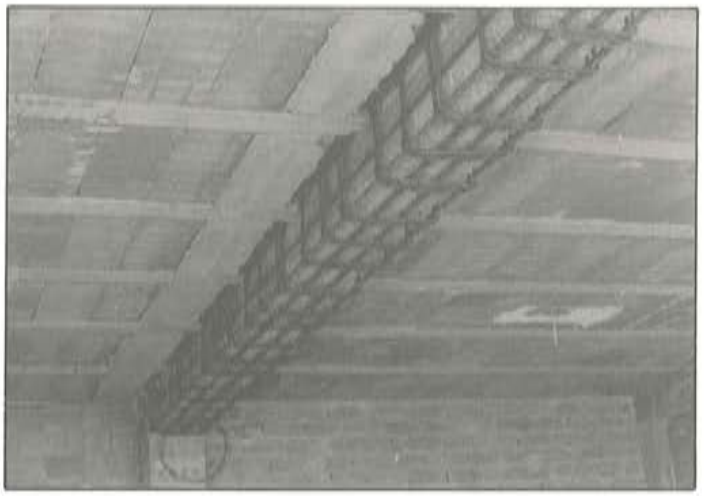


Fotografía 15

Fotografía 16



Fotografía 17



Fotografía 18

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

Fotografía 19

inyección por bombeo que se realiza siempre en contra de la gravedad, lo que permite una fácil colocación y puesta en obra. Al mismo tiempo con la técnica de inyección descrita se consigue un hormigón homogéneo, muy compacto y de alta resistencia, (equivalente a un H-400 Español).

El mortero lleva incorporado un aditivo conocido por "intrusion aid", que es objeto de patente, que modifica el fraguado, retrasando el principio y fin de fraguado; y prolongando, al mismo tiempo, la duración del mismo, con lo que, además de facilitar la colocación, se produce un incremento de temperatura en la masa que es inferior al que se produce en un hormigón convencional. Este hecho, tiene un efecto favorable en la retracción que se ve potenciado por una expansión que produce el aditivo en el mortero a edades tempranas, que se contrarresta totalmente con la retracción inicial.

En la bibliografía reseñada con (13), (14) y (15) se indican unas publicaciones de Prepakt referentes al fraguado y a la reducida retracción que experimenta este hormigón. Esta última característica es la que permite reforzar elementos dañados recubriéndolos con hormigón Prepakt, ya que si este último tuviera retracciones elevadas, al envolver a un núcleo prácticamente indeformable, se agrietaría y se resquebrajaría.

En la bibliografía reseñada con (16) se explica el refuerzo mediante recrecido que se empleó para reparar unos pilotes metálicos de un patalán en Yorktown. Básicamente la idea consistió en recrecer y proteger unos pilotes, que estaban muy oxidados, con una capa de mortero (conocido como micromigón Prepakt). El aspecto más interesante de este refuerzo, a nuestro juicio, consistió en el encofrado perdido que se utilizó a base de Fabriform.

También se indica en la bibliografía (17) un artículo publicado en el número 136 de la revista Hormigón y Acero que trata sobre el refuerzo de un forjado reticular mediante micromigón Prepakt, cuyo autor redacta también esta publicación.

Se adjuntan finalmente a título de ejemplo cinco fotografías referentes a diversas reparaciones realizadas mediante recrecido con micromigón Prepakt o con hormigón Prepakt que someramente se pasan a describir.

En la fotografía n° 15 se puede ver un pilar que se reforzó mediante un zunchado metálico a base de presillas que se une monoliticamente al pilar a reforzar, de forma íntima y continua, al quedar embebido en un recrecido de micromigón Prepakt tal y como se indica en la fotografía n° 16.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

En la fotografía n° 17 se presenta un pilar que se reforzó recreciendolo con hormigón Prepakt convencional. En esta fotografía se puede ver al pilar con la armadura de refuerzo y con la grava ya colocada, antes de proceder a encofrarlo para inyectarlo con el mortero.

En la fotografía n° 18 se puede ver una viga que se reforzó a flexión y a esfuerzo cortante recreciéndola con hormigón Prepakt. En la fotografía se aprecia la viga con la ferraya del refuerzo colocada, después de haberle dado un tratamiento con chorro de arena.

En la fotografía n° 19 se puede ver la parte superior de una viga de la misma estructura después de reforzada a esfuerzo cortante en uno de los extremos.

BIBLIOGRAFIA

(1) Eugène Freyssinet por J.A. Fernández Ordoñez.

(2) "Building Code Requirements for Reinforced Concrete". (ACI 318-77. Apartado 17.5 "Horizontal Shear Strength".

(3) Dardare J. "Estudio de los esfuerzos rasantes y el deslizamiento, en los elementos compuestos sometidos a flexión. Traducción de la Monografía núm. 1 publicada por el "Centre d'Etudes et des Recherches de l'Industrie du Béton Manufacture" de Francia. Traducción de R. Piñeiro-Hormigón y Acero. No. 121. pág. 23-82.

(4) Recommended Practice for Shotcreting (ACI 506-66).

(5) Tecnología de la Gunita. Por Luis Martínez Díaz Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

(6) Shotcreting S.P.–14 American Concrete Institute. Detroit 1966. 224 pp.

(7) Morán. T. Whitley. "The use of Gunite as a Structural Material. A Survey of Developments, 1930-1955". The structural Engineer (London) V. 34, n° 2, Feb. 1956, pp 37-55.

(8) Kulberg O.N., "Pneumatically Applied Mortar for Restoring Concrete Structures". ACI Journal Proceedings V 57 n° 2 Ago. 1960. pp 183-192.

(9) "Dry-mix Shotcrete Practice". Theodore R. Crom.

(10) "Zur Technologie des Spritzbetons". O. Drögsler.

(11) Estudio del comportamiento de los revestimientos epoxi a los cambios de temperatura. Cuaderno de investigación n° 28 del Instituto Eduardo Torroja. Por el Dr. Ing. Manuel Fernández Cánovas.

(12) CRD-C. 79-58. "Method of Test for Flow of Grout Mixtures (Flow-Cone Method)". Corps of Engineers U.S. Army "Investigation of the suitability of Prepakt Concrete for mass and reinforced concrete structures". Oct. 1951.

(13) Corps of Engineers U.S. Army. "Investigation of the suitability of Prepakt Concrete for mass and reinforced Concrete Structures". Tabla 13. Oct. 1951.

(14) "Temperature Rise in Block and Shrinkage in Large Block" Págs. 3 y siguientes. Corps of Engineers U.S. Army. "Investigation of the suitability of Prepakt Concrete for mass and reinforced Concrete Structures".

(15) "Temperature Rise of Grout". Págs. B 34 y siguientes. Corps of Engineers U.S. Army. "Investigation of the suitability of Prepakt Concrete for mass and reinforced Concrete Structures". Appendix A and Appendix B. Agosto 1964.

(16) Spotlight. Publication of Intrusión-Prepakt Inc. Clevelan. Ohio. Fall. 1982. British surrender at Yorktown errupts fabriform. Proyect.

(17) Patología: Reparación de un Forjado Reticular. Por A. González Serrano. Hormigón y Acero n° 136. 3er trimestre año 1980.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

La constante evolución técnica que experimenta la maquinaria de obras públicas y construcción, precisa de un adecuado escaparate donde mostrar las últimas innovaciones.

SMOPYC/84 es el centro de interés de fabricantes, compradores, técnicos y profesionales, donde la oferta y la demanda alcanzan máximas cotas. Así se viene constatando desde la primera edición del Salón en 1980.

Grupos de compradores de numerosos paises, Misiones comerciales extranjeras, Concurso de Diseño Industrial, Conferencias Técnicas, etc., son programados durante los cinco días de SMOPYC/84.

La experiencia de la Institución Ferial de Zaragoza, en la organización de Certámenes monográficos de elevada profesionalidad, contribuye, junto con la favorable acogida y colaboración de las firmas expositoras, a que SMOPYC sea un auténtico éxito con repercusión internacional.

CADA DOS AÑOS, en SMOPYC-Zaragoza: PUNTO DE ENCUENTRO del sector de la Maquinaria para Obras Públicas y Construcción durante los días 24 al 28 de febrero de 1984.

CICLO DE CONFERENCIAS TECNICAS
24 y 25 de febrero de 1984

Temas:

FABRICACION Y PUESTA EN OBRA DE MEZCLAS ASFALTICAS.

RECICLADO DE PAVIMENTOS ASFALTICOS.

FIRMES DE HORMIGON.

Conferencia Magistral:

LAS OBRAS PUBLICAS Y SU INFLUENCIA EN LA GENERACION DE EMPLEO.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

PUBLICACION ESPECIAL DE LA A. T. E. P.

Manual H.P. 5–79 "Recomendaciones para la disposición y colocación de Armaduras"

Como continuación de la serie de Manuales que, desde hace años, viene editando la Asociación Técnica Española del Pretensado, y en los que se recogen las recomendaciones relativas a las diferentes etapas del proceso general de ejecución de las construcciones pretensadas, se publica ahora el Manual H.P. 5–79 en el que, bajo el título "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras", se han recopilado todas aquellas normas que la práctica ha demostrado deben tenerse en cuenta para obtener una adecuada disposición de las armaduras en los elementos pretensados, tanto si se trata de armaduras pretesas como postesas, incluyéndose así mismo las armaduras pasivas que suelen acompañar a las activas.

Por la íntima relación existente entre tales armaduras y otra serie de dispositivos y piezas tales como los anclajes, empalmes, vainas, separadores, etc., se recogen también en este Manual las recomendaciones correspondientes a su colocación.

En todos los casos, se tratan por separado las fases de proyecto, ejecución y control.

El interés del tema elegido resulta evidente si se tiene en cuenta que el estado tensional creado por las armaduras activas en todo elemento pretensado, debe ser tal que permita a éste cumplir, con las necesarias garantías de seguridad y durabilidad, la función a que va destinado. Y como dicho estado tensional depende, no sólo de la magnitud sino también del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de pretensado introducidas, se comprende que la disposición de las armaduras en este tipo de piezas adquiere una importancia primordial; por lo que su colocación debe ser cuidadosamente realizada en obra.

A la consecución de este objetivo se estima que habrán de contribuir, de modo importante, las recomendaciones del Manual que ahora se ofrece y que se espera tendrá la misma favorable acogida que los anteriores de la serie, no sólo entre los Miembros de nuestra Asociación, sino también entre cuantos profesionales desarrollan sus actividades en el campo de la técnica del pretensado.

Este Manual H.P. 5–79, con 87 páginas y varias figuras, se ha puesto a la venta al precio de 300,– ptas. el ejemplar (6,– dólares USA para el extranjero). Para los Miembros de la A.T.E.P. se ha establecido el precio especial de 200,– pesetas (4,– dólares USA para el extranjero).

Los interesados en su adquisición deberán dirigir sus pedidos a la Secretaría de la Asociación Técnica Española del Pretensado, Apartado 19.002, Madrid–33, Tfno: 202 04 40.

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025

asociación técnica
española del pretensado

hormigón y acero n.º 148

Documento descargado de www.e-ache.com el 15/12/2025