

**hormigón**

**y ACERO**

**nº152**

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO.

COSTILLARES (CHAMARTIN). MADRID-33.

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).—Pº de la Habana, 14. Madrid-16.
- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMEN".— Velázquez, 23. Madrid-1.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).—Orense, 10. Madrid-20.
- AZMA, S.A.—Pº de la Habana, 16. Madrid-16.
- CAMARA, S.A.—Avda. de Santander, s/n. Valladolid.
- CAMINOS, EDIFICIOS Y OBRAS, S.A.—J. Lázaro Galdiano, 4. Madrid-16.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.—Grialba, 9. Madrid-6.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.—C.N. 340, Km. 329,300. San Vicenç dels Horts (Barcelona).
- CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A.—Aribau, 185. Barcelona-21.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.—Miguel Angel, 16. Madrid-10.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.—Santa Eugenia, 19. Gerona. \*
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.— Plaça Nova, 5. Barcelona-2.
- CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.—Federico Salmón, 13. Madrid-16.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Ayala, 42. Madrid-1.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.—Avda. de América, 24. Madrid-2.
- ELABORADOS METALICOS, S.A.—Apartado 553. La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento Obras Especiales.—José Ortega y Gasset, 40. Madrid-6.
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.—Biblioteca.—Juan de Mena, 8. Madrid-14.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Ciudad Universitaria. Madrid-3.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).—Arapiles, 14. Madrid-15.
- FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).—Avda. General Perón, 36. Madrid-20.
- FORJADOS DOMO.—Hermosilla, 64. Madrid-1.
- FREYSSINET, S.A.—General Perón, 24. Madrid-20.
- HEREDIA Y MORENO, S.A.—Princesa, 3. Madrid-8.
- IBERDUERO, S.A. Centro de Documentación (8501).— Gardoqui, 8. Bilbao-8.
- HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.—Archs, 10. Barcelona-2.
- HISPANO-ALEMANA DE CONSTRUCCIONES, S.A.— Capitán Haya, 51. Madrid-20.
- HORMIGONES GERONA, S.A.—Lorenzana, 45. Gerona.
- HUARTE Y CIA., S.A. Departamento Técnico.—Profesor Waksman, 14. Madrid-16.

(Continúa en el int. de contraportada)

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

**IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).**—Príncipe de Vergara, 43. Madrid-1.

**IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.** Plaza Gala Placidia, 5-7. Barcelona-6.

**INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**—Portal de Gamarra, 46. Vitoria.

**INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).**—Pérez Cepeda, 5 y 7. La Coruña.

**INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.**—Buenos Aires, 19-21. Barcelona-29.

**INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.**—Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. Pº de la Castellana, 67. Madrid-3.

**INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).**—Monte Esquinza, 30. Madrid-4.

**INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA).** Biblioteca.—Orense, 70. Madrid-20.

**JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.**—Príncipe de Vergara, 103. Madrid-6.

**LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**—Alfonso XII, 3. Madrid-7.

**NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**—Fábrica de Forjas de Buelna. Los Corrales de Buelna (Santander).

**PACADAR, S.A.**—Hermosilla, 57. Madrid-1.

**PRELOAD SISTEMAS, S.A.**—Pº de la Castellana, 140. Madrid-16.

**PRENSOLAND, S.A.**—Calle Industria, s/n. San Martín de Centellas (Barcelona).

**PRETENSADOS DEL LOURO, S.L.**—Polígono Industrial Atios. Porriño (Pontevedra).

**PROMONAL, S.L.**—Poeta Artola, 12. Valencia-21.

**SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.**—Avda. del Triunfo, 56. Las Arenas (Vizcaya).

**SIKA, S.A.**—Carretera Madrid-Irún, km. 14,500. Polígono Industrial. Alcobendas (Madrid).

**SOCIEDAD ANONIMA ECHEVARRIA.**—Apartado 46. Bilbao-8.

**SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA BBR (S.A.E. BBR).**—Polígono Industrial Barcelonés. Carrero Blanco, s/n. Abrera (Barcelona).

**TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**—Velázquez, 105. Madrid-6.

**TRANSFORMADOS METALICOS DEL MEDITERRANEO, S.A.**—Carretera Valencia-Barcelona, km. 64, 1. Castellón de la Plana.

**TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).**—Monturiol, 5. Santa María de Barberá (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente, su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO  
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO

*hormigón  
y acero*

nº 152

3.er trimestre, 1984

CUOTAS ANUALES

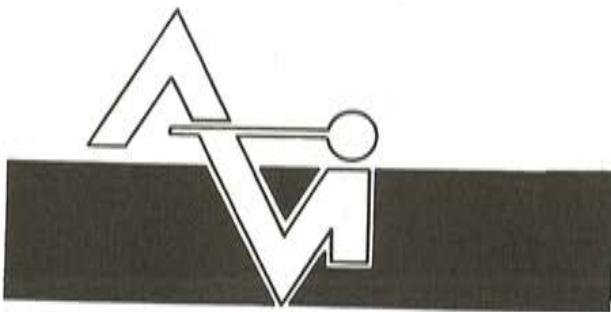
CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales) .....	2.000,— ptas.	40,— dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) .....	5.000,— ptas.	100,— dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) .....	10.000,— ptas.	200,— dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - MADRID - 33

Depósito Legal: M-853-1958  
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID  
ISSN: 0439-5689



PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**  
PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



#### HUESCA:

Oficina Comercial y Fábrica: P.<sup>o</sup> Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA

Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON

Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

#### MADRID

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.<sup>o</sup> - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10

Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4-8 -

TORREJON DE ARDOZ

Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

#### ZARAGOZA

Oficina Comercial: P.<sup>o</sup> de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
BARREDO, Carlos  
CUVILLO, Ramón del  
CHUECA, Rafael  
ELICES, Manuel  
FERNANDEZ DE VILLALTA, Manuel  
FISAC, Miguel  
GONZALEZ VALLE, Enrique  
JODAR, Juan  
JULIA, Manuel  
LLOMBART, José Antonio  
MANTEROLA, Javier  
MARIA TOME, Javier  
MURCIA, Juan  
PIÑEIRO, Rafael  
POZO VINDEL, Florencio J. del  
ROMERO, Rafael  
SANCHEZ CASTRO, Carlos  
SANCHEZ GALVEZ, Vicente  
SIEGRIST, Carlos

# **hormigón y acero**

## **N. 152**

### **índice**

Pág.

457-0-90	<b>Resultados de la investigación relativa a la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el comportamiento de las pilas esbeltas en ménsula . . . . .</b>	9
	Résultats d'une recherche relative à l'influence des différents paramètres intervenant dans le comportement des piles élancées en console.	
	Research conclusions about the influence of varying parameters on the behaviour of slender overhanging piers.	
	<i>J.J. Arenas y L. Villegas.</i>	
591-1-40	<b>Comportamiento de las estructuras de hormigón en edificación durante el proceso constructivo . . . . .</b>	25
	Comportement des structures en béton dans le bâtiment au cours du processus constructif,	
	Concrete structures behaviour for building during constructive process.	
	<i>R.A. García Lubén.</i>	
591-6-10	<b>Cinemática de láminas . . . . .</b>	39
	La cinématique des coques.	
	Shell kinematics.	
	<i>S. Monleón, F.J. Moya y P. Fúster.</i>	

591-6-11	<b>Cálculo elastoplástico de láminas plegadas no prismáticas de sección arbitraria.</b>	77
	Calcul elasto-plastique des coques pliées non prismatiques avec section arbitraire.	
	Elastic-plastic design of nonprismatic folded plates with arbitrary section.	
	<i>J.R. González de Cangas, V. Arroyo y A. Samartín.</i>	
591-9-40	<b>Las armaduras en los pilotes . . . . .</b>	123
	Les armatures pour des pieux,	
	Reinforcement for piles.	
	<i>J. Soler Nadal y F. Soler Liceras.</i>	
685-0-14	<b>Ingeniería y práctica de los hormigones reforzados con fibras de acero . . . . .</b>	129
	Génie et pratique des bétons avec renforcement des fibres en acier.	
	Steel fibre reinforced concrete, engineering and practice.	
	<i>I. Lucea.</i>	

#### AVISO IMPORTANTE

#### **DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"**

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, Madrid-33, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

**RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS"**

**ESPAÑA**

AGROMAN, EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.— Madrid.  
ALBISA, S.A.— Algeciras (Cádiz).  
AMMON-RA.— Madrid.  
ARIDOS LIGEROS, S.A.— Madrid.  
AUTOPISTAS, CONCESSIONARIA ESPAÑOLA, S.A.— Barcelona.  
BIGUETES, S.L.— Elche (Alicante).  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.— Barcelona.  
CASTRO HERMANOS, S.L.— Mislata (Valencia).  
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A. PROCEDIMIENTOS RODIO.— Madrid.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Madrid.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.— Málaga.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.— La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. Biblioteca.— Zaragoza.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. Departamento de Laboratorios.— Santa Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.— Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRA.— Bilbao.  
COLOCACIONES TECNICAS, S.A.(COTESA).— Barcelona.  
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR.— Biblioteca.— Sevilla.  
CONTROLEX.— Alicante.  
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.— Barcelona.  
DITECO, S.L.— Valencia.  
ELABORADOS DE HORMIGON, S.A. Villalbilla (Burgos).  
ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS, S.A.(EEPSA).— Manresa (Barcelona).  
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento de Construcción.— Madrid.  
ENAGA, S.A.— Pozuelo de Alarcón (Madrid).  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Sevilla.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Cátedra de Construcción II.— Córdoba.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.— Zaragoza.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.— Córdoba.  
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.— Zumárraga (Guipúzcoa).

EUROESTUDIOS, S.A.— Madrid.  
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.— Madrid.  
FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).  
GIJON E HIJOS, S.A.— Motril (Granada).  
HORMIGONES GERONA, S.A.— Gerona.  
IBERDUERO, S.A. Centro de Documentación (3001).— Bilbao.  
IBERTECNICA, S.A.— Madrid.  
INBADELCA, S.A.— Baracaldo (Vizcaya).  
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.— Tarrasa (Barcelona).  
INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPSA). Biblioteca.— Madrid.  
INSTITUT CARTOGRAFIC DE CATALUNYA.— Barcelona.  
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.— Barcelona.  
INSTITUTO NACIONAL DE EMPLEO. Sección Asuntos Generales.— Madrid.  
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).— Madrid.  
J. CASTRO MATELO, S.A.— Sigueiro (La Coruña).  
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.— Santa Cruz de Tenerife.  
LABORATORIO DE CARRETERAS Y GEOTECNIA JOSE LUIS ESCARIO.— Madrid.  
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.— Coslada (Madrid).  
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.— Madrid.  
LAING IBERICA, S.A.— Madrid.  
LIBRERIA RUBIÑOS.— Madrid.  
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).— Castellón de la Plana.  
MAHEMA, S.A.— Granollers (Barcelona).  
MECANOGUMBA, S.A.— Mollet del Vallés (Barcelona).  
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.— Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION. Sección de Normativa.— Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.— Madrid.  
NEX TEN, S.A.— Vitoria.  
POSTENSA, S.A.— Bilbao.  
PREBETONG CANARIAS, S.A.— Santa Cruz de Tenerife.  
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).— Barcelona.  
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).— Zaragoza.  
PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).— Vitoria.  
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).— León.  
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).— Valladolid.  
PREFABRICADOS POUSA, S.A.— Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
PREFLEX. COMPAÑIA LABORAL, S.A.— Gijón (Asturias).  
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).— Valladolid.  
REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A. (REISA).— Pinto (Madrid).  
RED NACIONAL DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES (RENFE). División de Documentación.— Madrid.  
SAINCE.— Madrid.  
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.— Barcelona.  
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.— Gerona.  
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.— Madrid.  
SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.— Madrid.  
SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.— Zamora.  
SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS (SAMO).— Valencia.

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.— Barcelona.

Iona.

SPANDECK CATALANA, S.A.— Barcelona.

TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).— Tarrasa (Barcelona).

TEJERIAS "LA COVADONGA".— Muriedas de Camargo (Santander).

TOSAM, S.L.— Segovia.

TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPESA).— Madrid.

UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.— Valencia.

VALLEHERMOSO, S.A.— Madrid.

VIAS Y OBRAS PROVINCIALES.— San Sebastián.

VIGAS REMARRO.— Motril (Granada).

VIGUETAS MUBEMI.— Torrente (Valencia).

## EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.— Montevideo (Uruguay).

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.— Sao Paulo (Brasil).

CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.— Buenos Aires (Argentina).

CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.— Buenos Aires (Argentina).

FACULTAD DE INGENIERIA. Universidad Nacional de Rosario.— Rosario (Argentina)

LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.— Luanda (República Popular de Angola).

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.— Santiago de Chile (Chile).

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.— Lima (Perú).

SARET P.P.B. Cadre Technique.— Le Pontet (France)

SCIENCE REFERENCE LIBRARY.— Londres (Inglaterra).

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería.— Mérida (Venezuela).

UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.— Quito (Ecuador).

UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.— Valparaíso (Chile).

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.— Mayagüez (Puerto Rico).

## MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).— La Paz (Bolivia).

## **Comentarios y discusión de los artículos originales publicados en la Revista "Hormigón y Acero"**

**Comentarios que sugiere el artículo sobre  
"Análisis de la viga simple sobre lecho elástico a partir del método  
de los elementos de contorno". (Hormigón y Acero. N° 150. Pág. 31) de M. Martínez Lafuente**

**Por E. ALARCON  
Cátedra de Estructuras. E.T.S.I.I. U.P.M.**

La idea presentada por el autor es ampliamente conocida y ha sido utilizada repetidamente con fines didácticos. Como tal ha sido publicada, por lo menos, en los siguientes lugares:

1. R. Butterfield 1977: "Basic Boundary Element Theory" en 'Numerical Methods in Geotechnical Engineering'. Computational Mechanics. Marzo. (Notas del curso desarrollado en Marzo de 1977).
2. R. Butterfield 1979: "New concepts illustrated by old problems". Capítulo 1 de "Developments in Boundary Element Methods—1". Editado por P.K. Banerjee y R. Butterfield. Applied Science. Pub. LTD.
3. P.K. Banerjee &: R. Butterfield: "Boundary element Methods in Engineering Science". Cap. 11. Ed. Mc Graw-Hill.

En la referencia 3 se amplía al caso de placa sobre apoyo elástico y en la 2 se introduce además la posibilidad de viga no homogénea, amén de distinguir claramente entre método directo e indirecto.

Sobre la posible utilidad del método en estos casos monodimensionales son expresivas las siguientes palabras de Butterfield, escritas —hace siete años— en la referencia 1 precisada y posteriormente en la referencia 3.

"... We would emphasize that we are not in any way recommending BEM as a preferred way of solving such elementary problems. Indeed for one dimensional systems, generally BEM are not efficient problem solving tools at all...",

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.— Barcelona.  
SPANDECK CATALANA, S.A.— Barcelona.  
TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).— Tarrasa (Barcelona).  
TEJERIAS "LA COVADONGA".— Muriedas de Camargo (Santander).  
TOSAM, S.L.— Segovia.  
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).— Madrid.  
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.— Valencia.  
VALLEHERMOSO, S.A.— Madrid.  
VIAS Y OBRAS PROVINCIALES.— San Sebastián.  
VIGAS REMARRO.— Motril (Granada).  
VIGUETAS MUBEMI.— Torrente (Valencia).

#### EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.— Montevideo (Uruguay).  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.— Sao Paulo (Brasil).  
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.— Buenos Aires (Argentina).  
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.— Buenos Aires (Argentina).  
FACULTAD DE INGENIERIA. Universidad Nacional de Rosario.— Rosario (Argentina).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.— Luanda (República Popular de Angola).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.— Santiago de Chile (Chile).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.— Lima (Perú).  
SARET P.P.B. Cadre Technique.— Le Pontet (France)  
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.— Londres (Inglaterra).  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería.— Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.— Quito (Ecuador).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.— Valparaíso (Chile).  
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.— Mayagüez (Puerto Rico).

#### MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).— La Paz (Bolivia).

## **Comentarios y discusión de los artículos originales publicados en la Revista "Hormigón y Acero"**

**Comentarios que sugiere el artículo sobre  
"Análisis de la viga simple sobre lecho elástico a partir del método  
de los elementos de contorno". (Hormigón y Acero, N° 150. Pág. 31) de M. Martínez Lafuente**

**Por E. ALARCON  
Cátedra de Estructuras. E.T.S.I.I. U.P.M.**

La idea presentada por el autor es ampliamente conocida y ha sido utilizada repetidamente con fines didácticos. Como tal ha sido publicada, por lo menos, en los siguientes lugares:

1. R. Butterfield 1977: "Basic Boundary Element Theory" en 'Numerical Methods in Geotechnical Engineering'. Computational Mechanics. Marzo. (Notas del curso desarrollado en Marzo de 1977).
2. R. Butterfield 1979: "New concepts illustrated by old problems", Capítulo 1 de "Developments in Boundary Element Methods-1". Editado por P.K. Banerjee y R. Butterfield, Applied Science, Pub. LTD.
3. P.K. Banerjee & R. Butterfield: "Boundary element Methods in Engineering Science". Cap. 11. Ed. Mc Graw-Hill.

En la referencia 3 se amplía al caso de placa sobre apoyo elástico y en la 2 se introduce además la posibilidad de viga no homogénea, amén de distinguir claramente entre método directo e indirecto.

Sobre la posible utilidad del método en estos casos monodimensionales son expresivas las siguientes palabras de Butterfield, escritas —hace siete años— en la referencia 1 precitada y posteriormente en la referencia 3.

"... We would emphasize that we are not in any way recommending BEM as a preferred way of solving such elementary problems. Indeed for one dimensional systems, generally BEM are not efficient problem solving tools at all...".

## IN MEMORIAM

A punto de cumplir los 82 años, ha muerto Ricardo Barredo de Valenzuela, y ha muerto "con las botas puestas" como no podía ser menos en un hombre de su temple.

Ricardo Barredo, el hombre fuerte, el hombre animoso, el hombre indestructible, el hombre simpático y, sobre todo, el hombre amigo de sus amigos.

A lo largo de su vida pasó por momentos duros, por momentos alegres, por momentos tristes, por momentos de triunfo y por momentos de derrota; pero si hubiese que condensar en una sola frase una definición de Ricardo Barredo, habría que decir: "Ha sido un hombre que ha vivido plenamente".



Su amor a la vida y a los suyos (y, como "suyos" cabía casi toda la humanidad) le ha dado fuerzas, incluso a lo largo de su penosa enfermedad, para seguir viviendo hasta el final.

Por donde pasaba dejaba su impronta, dejaba su huella. Las reuniones de familia (ocho hijos, treinta nietos, innumerables hermanos, primos y sobrinos) parecían otra cosa si no las presidía él; las reuniones de amigos resultaban flojas y quedas cuando él faltaba; y, hasta en conferencias, reuniones técnicas, Asambleas y Congresos, se notaba su falta si él no asistía.

El hueco que deja vacío será muy difícil de llenar.

Constructor, inventor, poeta y, sobre todo, hombre de carácter y hombre de ingenio.

Relacionado desde muy joven con D. Eduardo Torroja, intervino con él en la construcción del Acueducto de Tempul (1925) y de los cajones de cimentación del puente de Sancti Petri, en la Bahía de Cádiz (1926), entre otras obras. Construyó el Mercado de Algeciras (1936) y el arco central del viaducto del Esla (1941), ambos records mundiales.

En los años de las postguerra construyó numerosos puentes en toda España, solucionando innumerables problemas que las circunstancias planteaban, llegando a ser llamado “el mago de los puentes”.

Estrechamente ligado desde su fundación al antiguo “Instituto de la Construcción y Edificación”, hoy “Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento”, intervino activamente con su apoyo en innumerables ocasiones, cuando estimaba que su ayuda podía servir de algo; pues siempre se sintió formando parte del alma de esta Institución a la que consideraba como algo que, en parte, también era suyo.

En 1952 creó la primera patente española de un sistema de pretensado, el “Sistema Barredo” conocido hoy mundialmente y empleado en numerosas obras de todo tipo. Puentes como los de Almarail, Loriguilla, Valdecañas, Eduardo Torroja en Corella, Santiago en Zaragoza; cubiertas como las del Mercado de Ruzafa, Universidad Laboral de Tarragona, la cobertura de la calle Aragón en Barcelona; depósitos como los de Fedala, Somosaguas, los de la estación depuradora de Las Palmas; y obras varias como el refuerzo del aeropuerto de Barajas, el edificio para el reactor nuclear experimental en la Moncloa, la Iglesia del Grao de Gandía, las jácenas de apoyo de las cubiertas de los talleres de laminación de Ensidesa en Avilés, la terraza volada en el chalet Barredo de San Fernando, Madrid, son una muestra de ello.

Decía que el pretensado le proporcionaba unas manos muy fuertes con las que apretar las obras; y lo empleó, en muchas ocasiones, para reforzar estructuras dañadas.

Apoyó con todo su empeño la creación y desarrollo de la A.T.E.P., de cuya Junta de Gobierno formó parte, espiritualmente, siempre, y de manera formal, desde enero del 67 a diciembre de 1975, pasando a ser Miembro de Honor de la misma. Recibió una de las primeras Medallas que concedió esta Asociación en reconocimiento de lo que había supuesto su impulso para el desarrollo del pretensado en España.

Con un total de 35 patentes en España y diversos países, y obras construidas en tres Continentes, ha participado activamente en Asambleas Nacionales y Congresos Internacionales en los que su personalidad ha dejado imborrable recuerdo.

Fue galardonado en numerosas Ferias y Exposiciones nacionales y extranjeras y, recientemente, le había sido concedida la Medalla al Mérito en el Trabajo.

Por donde pasaba pregonaba siempre su condición de “español” pues, según su propia definición era

“Pastor, extremeño, español y algo bruto”  
aparte de constructor e inventor.

Estamos de luto.  
Descanse en paz.  
Así sea.



# Resultados de la investigación relativa a la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el comportamiento de las pilas esbeltas en ménsula\*

Juan J. Arenas de Pablo y Luis Villegas Cabredo  
Dres. Ingenieros de Caminos  
Dpto. Tecnología de las Estructuras  
E.T.S.I.C.C.P. Universidad de Santander

## 1. INTRODUCCION

En este artículo se aplicarán de forma sistemática los "programas de ordenador DPIR y DPES para el estudio de pilas esbeltas en ménsula de hormigón armado, con sección simétrica variable y armado también variable a lo largo de su altura y solicitadas por acciones concéntricas en uno o en sus dos planos principales", puestos a punto en (1) y descritos en el número 149 de esta Revista.

Se analiza aquí la influencia que, en el comportamiento de distintas pilas con sección celular, tienen los diferentes parámetros que intervienen en su resistencia y deformabilidad.

El objetivo de fondo de este artículo es "tomar el pulso" al elemento estructural pila esbelta, observando la variación de su respuesta resistente en función de los diversos parámetros geométricos y mecánicos que intervienen en su diseño.

El esquema de carga que se contempla es el de una pila solicitada en cabeza por una fuerza vertical biexcéntrica, el cual responde a la situación real que atraviesan las pilas de los viaductos construidos por avance en voladizo durante la fase constructiva del tablero, siendo, por tanto, de total aplicación a las mismas los resultados que se obtienen.

## 2. COMPORTAMIENTO TEORICO DE PILAS ESBELTAS EN MENSULA SOLICITADAS POR CARGAS CONTENIDAS EN UNO DE SUS PLANOS PRINCIPALES

### 2.1. Influencia de la distribución de las armaduras a lo largo de la altura de la pila

En la figura 1 se representan las cinco distribuciones de la armadura a lo largo de la altura de la pila que se han considerado, teniendo todas ellas en cimentación la misma sección de acero, y habiendo tomado para este estudio el valor correspondiente a una cuantía mecánica igual a 0,51 en la sección de base inferior.

(\*) Este Artículo es continuación de los dos aparecidos en los números 148 y 149 de nuestra Revista y firmado por los mismos Autores.

Hemos contemplado dos distribuciones con variación lineal creciente hacia la base, "1" y "2", dos distribuciones parabólicas, "3" y "4", y una distribución de armadura constante a lo largo de la altura, "5". El volumen de acero dispuesto en cada pila es proporcional al área encerrada por las líneas que delimitan la distribución de la armadura. Así, la "2" contiene un 30 por 100 más de acero que la "1" y la "5" un 100 por 100 más que la "1".

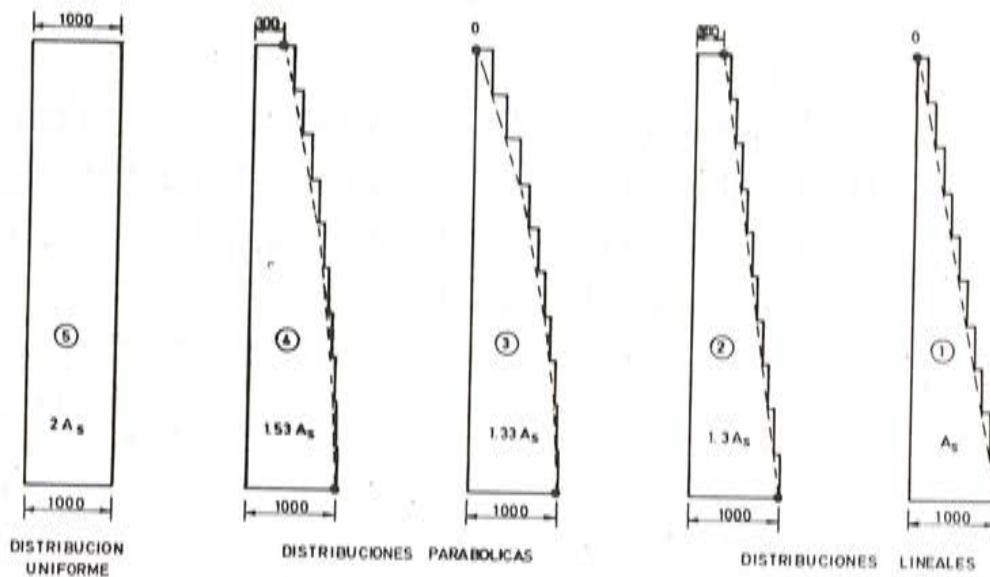


FIG. 1

Fig. 1. Influencia de la distribución de la armadura a lo largo de la pila, a igualdad de área de acero en la sección de la base.

En este caso, y en el resto de las pilas estudiadas en este apartado 2, sólo se ha considerado el efecto de la armadura principal de cada sección, compuesta por dos capas de barras corrugadas colocadas a 5 cm de ambas caras exteriores que limitan el canto de la pila. Los números que aparecen en los esquemas de armado de las figuras 1 y 4 expresan los centímetros cuadrados de acero dispuestos en cada capa. Por ejemplo, en el esquema 2 de la figura 1, la sección de empotramiento tiene  $1.000 \text{ cm}^2$  de acero en cada cara exterior, decreciendo este área linealmente a medida que nos alejamos de aquélla.

La sección de cabeza tiene un armado similar al de la sección base más próxima a ella, como muestra la línea quebrada de las figuras 1 y 4 que ajusta la distribución teórica. En los esquemas "1" y "3", en que el límite superior de aquélla es nulo, la armadura dispuesta en estas dos últimas secciones cumple con las limitaciones de armado mínimo que proporciona la Instrucción EH.

La geometría de la pila se mantiene constante a lo largo de su altura, habiéndose adoptado la sección celular que se muestra en las figuras 2 y 3, de dimensiones externas  $8,00 \times 5,00 \text{ m}^2$  con espesor de paredes de 30 cm.

Para la esbeltez,  $\lambda = 2 L/h$ , se han tomado tres valores (20, 30 y 40) y para cada uno de éstos cuatro posibles excentricidades de actuación de la carga vertical ( $h/20$ ,  $h/5$ ,  $h/2$  y  $h$ ), resultando, pues, 12 casos diferentes por cada distribución de armadura considerada.

Se han procesado con el programa DPIR (descrito en el nº 149 de esta Revista) los 60 casos estudiados en total, resumiéndose en las tablas 1 los valores de las cargas verticales máximas resistidas en cada uno de ellos, y el tipo de estado límite último que agotó a la pila.

Los valores de cargas que agotan a las pilas (bien por inestabilidad, bien por rotura de la sección más solicitada) a que nos referiremos en este trabajo son en realidad cargas últimas

de cálculo,  $P_u$ . Para ello, hemos trabajado en todos los casos, con las siguientes resistencias de cálculo de los materiales constituyentes:

$$f_{cd} = 200 \text{ k}_p/\text{cm}^2 \quad (f_{ck} = 200 \times 1,5 \times 1,1 = 330 \text{ k}_p/\text{cm}^2)$$

$$f_{yd} = 3.820 \text{ k}_p/\text{cm}^2 \quad (f_{yk} = 3.820 \times 1,1 = 4.200 \text{ k}_p/\text{cm}^2)$$

habiéndose considerado que el acero es de dureza natural.

		$\lambda = 2L/h = 20$				
		1 ( $A_s$ ) LINEAL 0-1000	2 (1,3 $A_s$ ) LINEAL 300-1000	3 (1,33 $A_s$ ) PARABOLICO 0-1000	4(1,53 $A_s$ ) PARABOLICO 300-1000	5 (2 $A_s$ ) UNIFORME 1000-1000
ALTURA DE PILA = 50 m.						
EXC (m)						
h/20=0,25		12000t (R)	13800t (R)	12600t (R)	14200t (R)	16200t (R)
h/5 = 1		9200t (R)	10600t (R)	9600t (R)	10500t (R)	12000t (I)
h/2 = 2,5		5200t (R)	7000t (R)	6000t (R)	7200t (R)	8000t (I)
h = 5		800t (R)	2600t (R)	1400t (R)	3000t (R)	5200t (R)
		$\lambda = 2 L/h = 30$				
		1 ( $A_s$ ) LINEAL 0-1000	2 (1,3 $A_s$ ) LINEAL 300-1000	3(1,33 $A_s$ ) PARABOLICO 0-1000	4(1,53 $A_s$ ) PARABOLICO 300-1000	5 (2 $A_s$ ) UNIFORME 1000-1000
ALTURA DE PILA = 75 m.						
EXC (m)						
h/20=0,25		11400t (I)	12400t (I)	12200t (R)	13200t (I)	13600t (I)
h/5 = 1		8600t (R)	9200t (I)	9200t (R)	9800t (I)	10000t (I)
h/2 = 2,5		4600t (R)	5800t (I)	5600t (R)	6200t (I)	6600t (I)
h = 5		800t (R)	2600t (R)	1400t (R)	3000t (R)	4200t (I)
		$\lambda = 2L/h = 40$				
		1 ( $A_s$ ) LINEAL 0-1000	2(1,3 $A_s$ ) LINEAL 300-1000	3(1,33 $A_s$ ) PARABOLICO 0-1000	4(1,53 $A_s$ ) PARABOLICO 300-1000	5 (2 $A_s$ ) UNIFORME 1000-1000
ALTURA DE PILA = 100 m.						
EXC (m)						
h/20=0,25		9000t (I)	9400t (I)	9800t (I)	10000t (I)	10400t (I)
h/5 = 1		6600t (I)	7000t (I)	7200t (I)	7400t (I)	7600t (I)
h/2 = 2,5		3600t (I)	4400t (I)	4600t (I)	4800t (I)	5000t (I)
h = 5		800 t (R)	2400t (R)	1400t (R)	2800t (R)	3400t (I)

TABLA I

Influencia de la distribución de la armadura a lo largo de la pila, a igual área de acero en la sección de empotramiento. Carga resistida por la pila (R = rotura; I = inestabilidad)

En las figuras 2 y 3 se detallan los resultados de dicho análisis para 10 de los casos estudiados, mostrando en cada una de ellas el comportamiento de los cinco tipos de pila, a través de la evolución de la flecha en la sección de cabeza a medida que se incrementa el valor de la carga vertical. Los gráficos correspondientes a los otros 50 casos estudiados pueden consultarse en (1).

En estas figuras, y en el resto de las que aparecen en el Artículo, cuando el estado límite se alcanza por rotura de una sección se señala en los dibujos con (x) y cuando es por inestabilidad de la pila con (•).

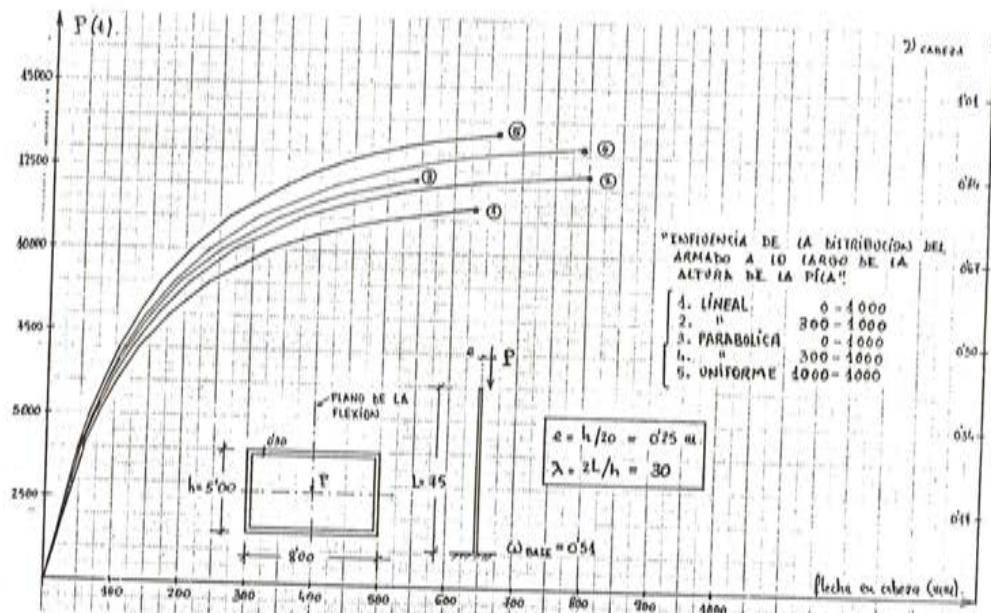


Fig. 2.

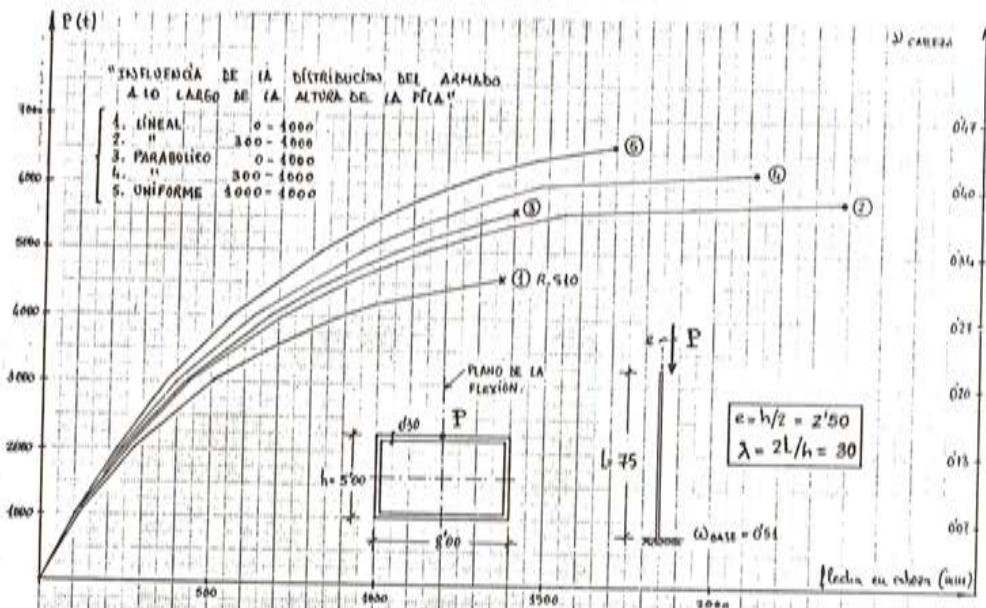


Fig. 3.

De la observación de las Tablas 1 podemos destacar los siguientes aspectos:

1) En las pilas más esbeltas,  $\lambda = 40$ , el estado límite último que se tiene en casi todos los casos es de inestabilidad.

En las pilas menos esbeltas,  $\lambda = 20$ , el estado límite último que se alcanza en la mayoría de los casos es por agotamiento resistente de una sección.

El caso  $\lambda = 30$  es intermedio entre los dos anteriores.

- 2) Para el tipo de cargas que se contemplan en este apartado, la distribución uniforme de armadura a lo largo de la pila no es interesante. En efecto, se observa en las tablas el pequeño incremento de carga vertical que puede resistirse con esta distribución en relación a otras notablemente más económicas en volumen de acero consumido.
- 3) Para las esbelteces  $\lambda = 20$  y  $\lambda = 30$ , se observa cómo el armado "2" admite mayores valores de la carga vertical  $P$  que el "3", aun teniendo esta solución un mayor volumen total de acero que la otra.

En todos estos casos, el estado límite último de la pila "3" se produce por agotamiento resistente de la sección 10, próxima a coronación, lo cual nos está indicando que esta pila adolece de falta de armadura en su zona superior. Y, así, se observa que la pila "2", que dispone de más armadura en cabeza que la "3", aun con menos volumen de acero que ésta, ofrece mejores resultados y es, por tanto, claramente preferible como esquema de distribución de armaduras.

Puesto que los esquemas de armado indicados en la figura conducen a diferentes volúmenes de acero consumido, hemos juzgado interesante repetir el estudio con diagramas de distribución de armadura análogos a aquéllos, pero modificando la sección de acero del empotramiento de la pila, de tal modo que todos ellos incluyan idéntico volumen de armadura (ver figura 4). De este modo, la carga crítica que agota a la pila con cada esquema de distribución será un índice directo de la eficiencia resistente de cada uno de ellos.

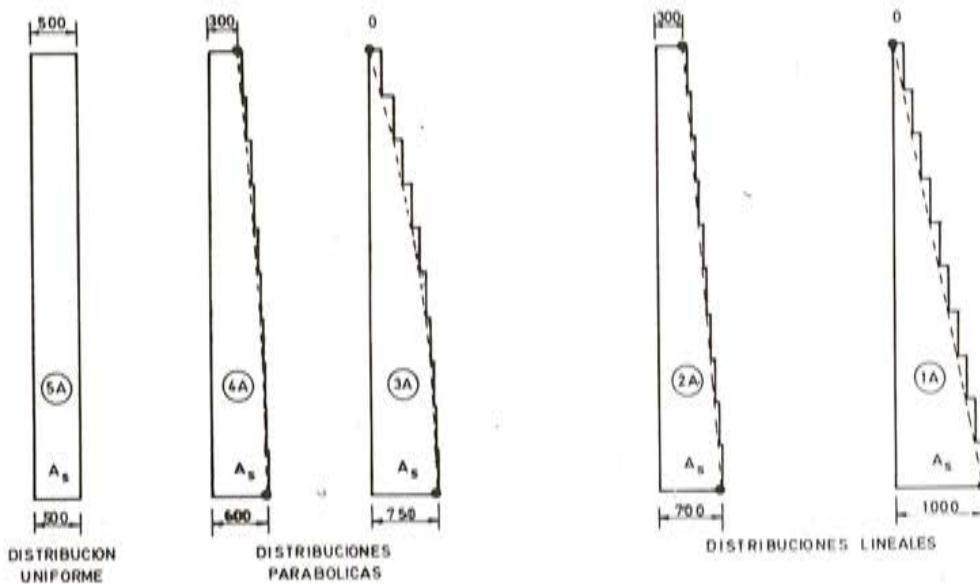


Fig. 4. Influencia de la distribución de la armadura a lo largo de la pila, a igualdad de volumen de acero utilizado.

Procesando con el programa DPIR estas pilas para los mismos casos de carga y alturas que la vez anterior se tienen los resultados que aparecen reflejados en las tablas 2.

En ellas se observa cómo, a igualdad de volumen de acero utilizado:

- 1) No existe un esquema único de máxima eficiencia resistente. La distribución de armadura óptima depende de la altura de pila y de la excentricidad de la carga en su coronación.

ALTURA DE PILA = 50 m.		$\lambda = 2 \text{ L/h} = 20$			
ARMADO EXC (m)	1A ( $A_s$ ) LINEAL 0-1000	2A ( $A_s$ ) LINEAL 300-700	3A ( $A_s$ ) PARABOLICO 0-750	4A ( $A_s$ ) PARABOLICO 300-600	5A ( $A_s$ ) UNIFORME 500-500
$h/20=0,25$	12000t (R)	13400t (I)	12200t (R)	13400t (R)	12800t (I)
$h/5 = 1$	9200t (R)	10000t (I)	9400t (R)	9800t (I)	9400t (I)
$h/2 = 2,5$	5200t (R)	6400t (I)	5600t (R)	6400t (I)	6000t (I)
$h = 5$	800t (R)	2400t (R)	1200t (R)	2600t (R)	3000t (I)
ALTURA PILA = 75 m		$\lambda = 30$			
ARMADO EXC (m)	1A ( $A_s$ ) LINEAL 0-1000	2A ( $A_s$ ) LINEAL 300-700	3A ( $A_s$ ) PARABOLICO 0-750	4A ( $A_s$ ) PARABOLICO 300-600	5A ( $A_s$ ) UNIFORME 500-500
$h/20=0,25$	11400t (I)	11200t (I)	11600t (I)	11000t (I)	10600t (I)
$h/5 = 1$	8600t (R)	8400t (I)	8600t (I)	8200t (I)	7800t (I)
$h/2 = 2,5$	4600t (R)	5000t (I)	5000t (R)	5000t (I)	4600t (I)
$h = 5$	800t (R)	2400t (R)	1200t (R)	2400t (R)	2600t (R)
ALTURA PILA = 100 m		$\lambda = 40$			
ARMADO EXC (m)	1A ( $A_s$ ) LINEAL 0-1000	2A ( $A_s$ ) LINEAL 300-700	3A ( $A_s$ ) PARABOLICO 0-750	4A ( $A_s$ ) PARABOLICO 300-600	5A ( $A_s$ ) UNIFORME 500-500
$h/20=0,25$	9000t (I)	8600t (I)	8800t (I)	8400t (I)	8000t (I)
$h/5 = 1$	6600t (I)	6200t (I)	6400t (I)	6200t (I)	5800t (I)
$h/2 = 2,5$	3600t (I)	3600t (I)	3800t (I)	3600t (I)	3400t (I)
$h = 5$	800t (R)	2200t (R)	1200t (R)	2200t (R)	2000t (I)

TABLA 2

Influencia de la distribución de la armadura a lo largo de la pila, a igual volumen de acero utilizado.  
 Carga resistida por la pila (R = rotura; I = inestabilidad)

- 2) Las diferencias, para unos determinados valores de la altura y excentricidad de carga, entre las cargas críticas que corresponden a los esquemas de máxima y mínima eficiencia no son excesivas. Salvo los casos de excentricidad relativa ( $e/h = 1$ ), tales diferencias alcanzan un 23 por 100 en un sólo caso, y no son superiores al 14 por 100 en los demás.
- 3) De las distribuciones estudiadas en la figura 4, y para los 12 diferentes casos de carga de las tablas 2, la distribución trapecial "2A" y la parabólica "4A" son las que dan globalmente mejores resultados.
- 4) Las distribuciones uniforme "5A" y lineal "1A" son las que en conjunto ofrecen peores resultados.

Sin embargo, la solución "5A" aparece como la más adecuada para los casos en que la carga actúa con máxima excentricidad  $h$ , lo que se explica bien por las fuertes flexiones de primer orden que en este caso aparecen desde la misma coronación de pila.

En cambio, cuando las excentricidades en cabeza son pequeñas (y, con ellas, las flexiones de primer orden en la zona), las distribuciones "1A" y "3A" son las que ofrecen mejores resultados.

La tabla 3 que se incluye a continuación suministra información directa y resumida de los esquemas de distribución de armadura que, a igualdad de volumen de acero, conducen a los valores de carga crítica máxima y mínima. Esta tabla puede tener valor orientativo para el diseño óptimo de pilas esbeltas de puente de geometría constante. Además de la altura de pila, el proyectista habrá de determinar, previamente, cuáles son las excentricidades relativas de las acciones que solicitan a la pila en su coronación, encontrando a renglón seguido en la tabla la distribución de armadura que resulta más eficiente.

ALTURA DE PILA (m)	EXCENTRICIDAD RELATIVA e/h	ESQUEMA DE ARMADO MÁS EFICIENTE		ESQUEMA DE ARMADO MENOS EFICIENTE		$\frac{P_{\text{crit}}^{\text{máx}}}{P_{\text{crit}}^{\text{mín}}}$
		Nº	$P_{\text{crit}}^{\text{máx}}(t)$	Nº	$P_{\text{crit}}^{\text{mín}}(t)$	
50	1/20	2A	15400	1A	12000	1,12
	1/5	2A	10000	1A	9200	1,09
	1/2	2A	6400	1A	5200	1,23
	1	5A	3000	1A	800	3,75
75	1/20	5A	11600	5A	10600	1,09
	1/5	1A	8600	5A	7800	1,10
	1/2	2A	5000	5A	4600	1,09
	1	5A	2600	1A	800	3,25
100	1/20	1A	9000	5A	8000	1,13
	1/5	1A	6600	5A	5800	1,14
	1/2	3A	3800	5A	3400	1,12
	1	2A	2200	1A	800	2,75

TABLA 3

Esquemas de distribución de armadura que, a igualdad de volumen de acero, conducen a los valores de carga crítica máxima y mínima

## 2.2. Influencia del incremento del espesor de las paredes de la sección o de la armadura de la misma

En la pila contemplada en el punto anterior, y adoptando en ella una distribución trapezoidal de la armadura según el esquema "2" de la figura 1, se estudia ahora la influencia que tiene en su comportamiento el aumentar el espesor de pared en toda su altura o el área de las armaduras en cada sección.

Los resultados obtenidos están representados en las dos tablas 4, apareciendo comparadas en cada una de ellas 5 diferentes pilas.

La pila considerada como base de referencia es la del esquema 2 de la figura 1, con un espesor de pared de 0,30 m y el armado allí definido.

Las otras cuatro pilas restantes resultan de: mantener la misma armadura y aumentar el espesor de pared a 0,40 ó 0,50 m, o mantener constante el volumen de hormigón de la pila y

aumentar el de acero hasta 1,5 ó 2 veces el dispuesto en la pila de referencia, conservando el esquema de distribución de la armadura.

Se han considerado dos valores para la esbeltez ( $\lambda = 2 L/h$ ) de la pila: 30 y 40; y tres valores para la excentricidad con que actúa la carga vertical: ( $h/20$ ,  $h/5$  y  $h/2$ ).

En total, se han analizado 10 pilas distintas, con, cada una de ellas, 3 excentricidades de carga diferentes. Las respuestas en los 30 casos que resultan quedan resumidas en las tablas 4.

ALTURA DE PILA = 75 m.						$\lambda = 2 , L/h = 30$
ESPESOR DE TABIQUE m. ACERO	0,30	0,30	0,30	0,40	0,50	
EXC (m)	Vs	1,50 Vs	2,00 Vs	Vs	Vs	
$h/20 = 0,25$	12400t (I)	14400t (I)	15800t (R)	14600t (I)	16800t (I)	
$h/5 = 1,00$	9200t (I)	10800t (I)	12000t (I)	11000t (I)	12400t (I)	
$h/2 = 2,50$	5800t (I)	7000t (I)	8000t (I)	6600t (I)	7200t (I)	
ALTURA DE PILA = 100 m.						$\lambda = 2 L/h = 40$
ESPESOR DE TABIQUE m. ACERO	0,30	0,30	0,30	0,40	0,50	
EXC (m)	Vs	1,50 Vs	2,00 Vs	Vs	Vs	
$h/20 = 0,25$	9400t (I)	11200t (I)	13000t (I)	11200t (I)	12600t (I)	
$h/5 = 1,00$	7000t (I)	8400t (I)	9800t (I)	8000t (I)	9000t (I)	
$h/2 = 2,50$	4400t (I)	5600t (I)	6600t (I)	4800t (I)	5000t (I)	

TABLA 4

Influencia del incremento del espesor de las paredes de la sección o de la armadura de la misma.  
Carga resistida por la pila (R = rotura; I = inestabilidad)

En las figuras 5 y 6 se representan gráficamente los resultados obtenidos en 10 de los casos estudiados. En concreto: las 5 pilas de 75 m de altura para una carga vertical creciente que actúa con excentricidad  $e = h/5$  (Fig. 5). Y las 5 pilas de 100 m para carga vertical creciente con excentricidad  $e = h/2$  (Fig. 6).

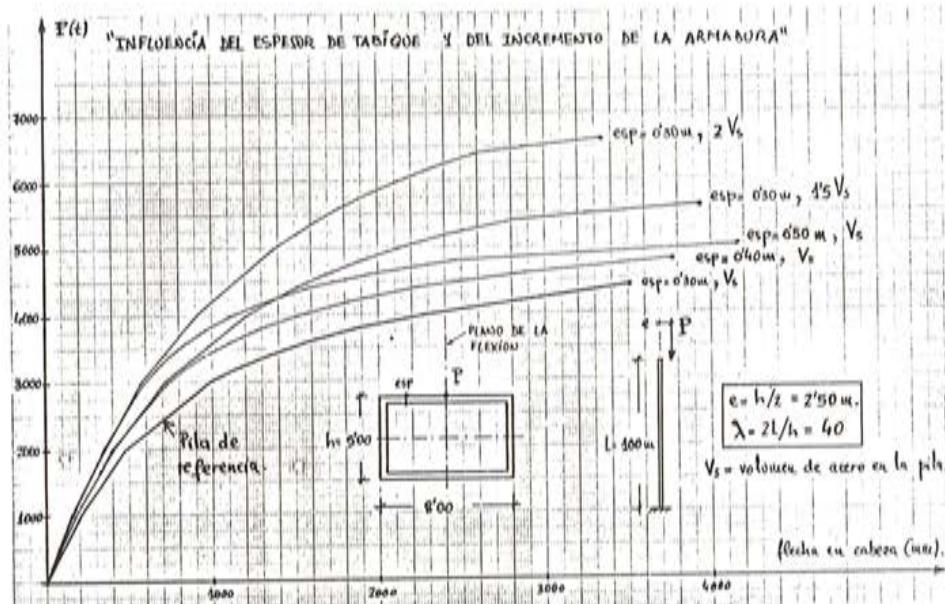
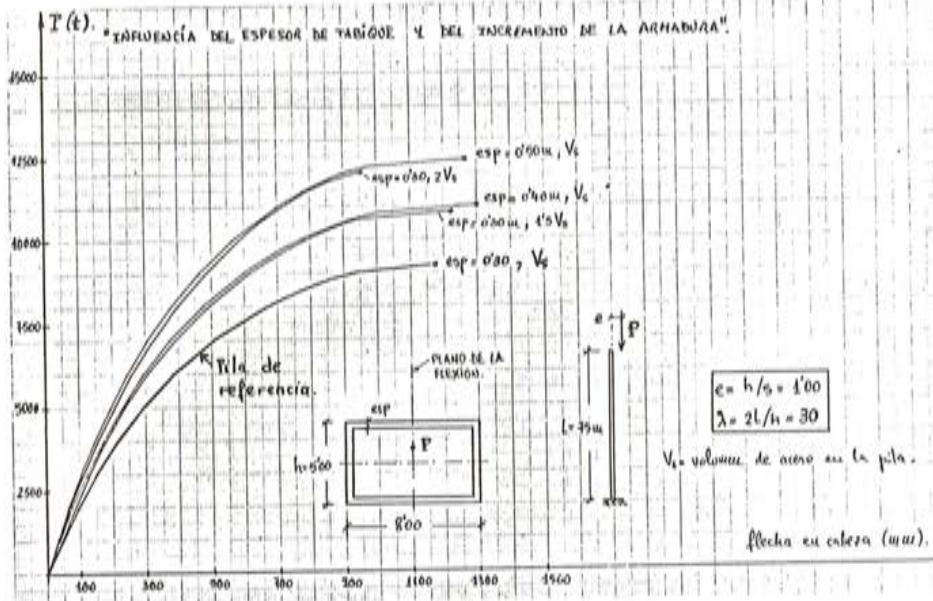
Los gráficos correspondientes a los otros 20 casos analizados pueden consultarse en (1).

La observación de las tablas 4 pone de manifiesto:

- 1) Para los dos menores valores de la excentricidad,  $h/20$  y  $h/5$ , tenemos que el incremento de carga vertical, respecto al valor máximo admitido por la pila de referencia, a que conducen las soluciones en que se aumenta el hormigón de la pila viene a coincidir con el que proporcionan las soluciones en que se incrementa la armadura.

Se observa cómo la respuesta de pilas con paredes de 40 cm coincide prácticamente con la de pilas de 30 cm de pared y 1,5 veces el volumen de acero de aquéllas. Y también, cómo el fenómeno se repite entre las pilas con 50 cm de espesor de pared y las de 30 cm y volumen de armadura doble.

Tal incremento de carga vertical resistida supone un sobrecoste respecto a la pila de referencia, que está dado por el incremento de coste de los materiales.



Admitiendo que el precio de una tonelada de acero de armar es del orden de 10 veces el de un metro cúbico de hormigón, tenemos que el coste del incremento de acero que supone pasar de un volumen  $V_s$  a  $1,5 V_s$  viene a ser del orden del doble de lo que cuesta aumentar el espesor de tabique de 0,30 a 0,40 m. Proporción que se mantiene con las soluciones de doble volumen de acero o espesores de tabique igual a 0,50 m.

Llegamos así a la conclusión de que, en estos casos de actuación de cargas verticales con pequeñas excentricidades, es decir, de compresiones compuestas, y admitiendo

que las dimensiones básicas ( $b \times h$ ) de la sección estén prefijadas por otros condicionamientos, resulta más rentable económicamente incrementar el espesor de tabique de las piezas que el volumen de armadura de las mismas.

- 2) Para la excentricidad  $h/2$ , máximo valor considerado, se observa cómo las soluciones en que se incrementa el espesor de tabique son menos interesantes que en el caso anterior.

Para la pila de altura menor dan resultados similares, tanto en cuanto a la carga vertical máxima resistida como en cuanto a la deformabilidad de la pieza, las soluciones en que se incrementa el espesor de la pared a 0,50 m o el volumen de acero a 1,5  $V_s$ , resultando similar el coste de ambas.

En la pila de mayor esbeltez,  $L = 100$  m (Fig. 6), puede verse cómo, al comparar la solución de pared igual a 50 cm con la de pared de 30, con 1,5 veces el volumen de armadura de aquélla, presenta esta última mejor respuesta resistente (con mayor carga crítica de inestabilidad), siendo su coste similar.

- 3) Podemos resumir las conclusiones de este apartado diciendo que en aquellas pilas en que predomine la flexión sobre la compresión (flexión compuesta), resultará interesante para una geometría externa dada, aumentar la sección de acero antes que el espesor de las paredes de hormigón. Esta afirmación es tanto más cierta cuanto mayor es la altura de pila, ya que las flexiones de segundo orden crecen muy deprisa con la esbeltez, y elevar el espesor de las paredes supone incrementar fuertemente el peso propio que, en la pila deformada, contribuye en medida importante a dichas flexiones.

Por el contrario, en las pilas sometidas principalmente a compresión compuesta (pilas sometidas a cargas en cabeza actuantes con pequeña excentricidad relativa), resulta más ventajoso aumentar espesor de pared que el volumen de armadura. Todo ello, lógicamente, en el supuesto de que se disponga de buena cimentación, cuyo coste no se vea sensiblemente alterado por el aumento de peso propio de la pila.

### 2.3. Influencia de la variabilidad de la sección de hormigón

Presentaremos en lo que sigue los últimos resultados de este apartado en que se está analizando el comportamiento de pilas esbeltas frente a cargas contenidas en un plano principal.

Se trata de poner de manifiesto la influencia que en el mencionado comportamiento tienen las dimensiones básicas de la sección, canto y ancho, viendo los resultados que proporcionan cuatro tipos de pilas que, a igualdad de los demás parámetros, se diferencian por la forma en que varían dichas dimensiones a lo largo de su altura.

En la figura 7 se presentan las cuatro pilas estudiadas, ordenadas según el volumen de hormigón que contiene cada una de ellas.

Para cada pila se dibuja, en primer lugar, su alzado longitudinal, que muestra el canto con que hace frente a la carga vertical excéntrica actuante en dicho plano, y a la derecha su alzado transversal que muestra la variabilidad del ancho de la sección a lo largo de la pieza.

El volumen de acero dispuesto en todas estas pilas es el mismo, siendo su distribución parabólica, según el esquema "4" de la figura 1. El espesor de tabique en todas ellas es de 0,30 metros, siendo también constante el canto que tienen en la sección de empotramiento.

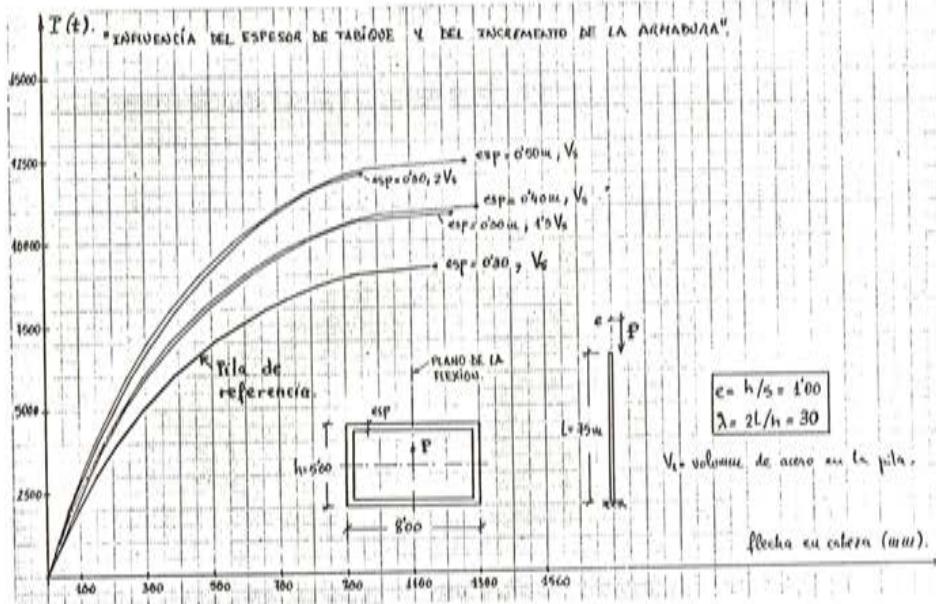


Fig. 5.

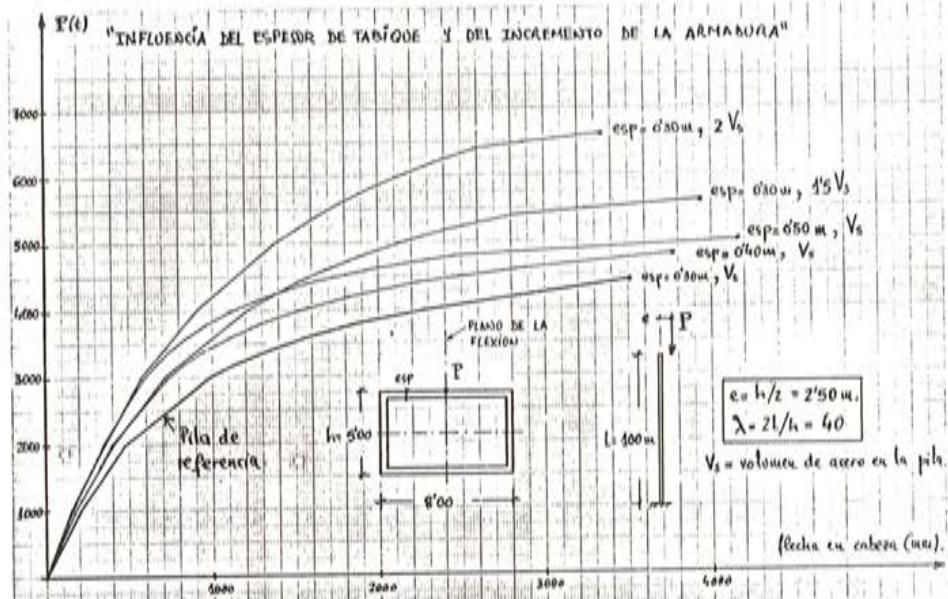


Fig. 6.

Admitiendo que el precio de una tonelada de acero de armar es del orden de 10 veces el de un metro cúbico de hormigón, tenemos que el coste del incremento de acero que supone pasar de un volumen  $V_s$  a  $1,5 V_s$  viene a ser del orden del doble de lo que cuesta aumentar el espesor de tabique de 0,30 a 0,40 m. Proporción que se mantiene con las soluciones de doble volumen de acero o espesores de tabique igual a 0,50 m.

Llegamos así a la conclusión de que, en estos casos de actuación de cargas verticales con pequeñas excentricidades, es decir, de compresiones compuestas, y admitiendo

que las dimensiones básicas ( $b \times h$ ) de la sección estén prefijadas por otros condicionamientos, resulta más rentable económicamente incrementar el espesor de tabique de las piezas que el volumen de armadura de las mismas.

- 2) Para la excentricidad  $h/2$ , máximo valor considerado, se observa cómo las soluciones en que se incrementa el espesor de tabique son menos interesantes que en el caso anterior.

Para la pila de altura menor dan resultados similares, tanto en cuanto a la carga vertical máxima resistida como en cuanto a la deformabilidad de la pieza, las soluciones en que se incrementa el espesor de la pared a 0,50 m o el volumen de acero a 1,5  $V_s$ , resultando similar el coste de ambas.

En la pila de mayor esbeltez,  $L = 100$  m (Fig. 6), puede verse cómo, al comparar la solución de pared igual a 50 cm con la de pared de 30, con 1,5 veces el volumen de armadura de aquélla, presenta esta última mejor respuesta resistente (con mayor carga crítica de inestabilidad), siendo su coste similar.

- 3) Podemos resumir las conclusiones de este apartado diciendo que en aquellas pilas en que predomine la flexión sobre la compresión (flexión compuesta), resultará interesante para una geometría externa dada, aumentar la sección de acero antes que el espesor de las paredes de hormigón. Esta afirmación es tanto más cierta cuanto mayor es la altura de pila, ya que las flexiones de segundo orden crecen muy deprisa con la esbeltez, y elevar el espesor de las paredes supone incrementar fuertemente el peso propio que, en la pila deformada, contribuye en medida importante a dichas flexiones.

Por el contrario, en las pilas sometidas principalmente a compresión compuesta (pilas sometidas a cargas en cabeza actuantes con pequeña excentricidad relativa), resulta más ventajoso aumentar espesor de pared que el volumen de armadura. Todo ello, lógicamente, en el supuesto de que se disponga de buena cimentación, cuyo coste no se vea sensiblemente alterado por el aumento de peso propio de la pila.

### 2.3. Influencia de la variabilidad de la sección de hormigón

Presentaremos en lo que sigue los últimos resultados de este apartado en que se está analizando el comportamiento de pilas esbeltas frente a cargas contenidas en un plano principal.

Se trata de poner de manifiesto la influencia que en el mencionado comportamiento tienen las dimensiones básicas de la sección, canto y ancho, viendo los resultados que proporcionan cuatro tipos de pilas que, a igualdad de los demás parámetros, se diferencian por la forma en que varían dichas dimensiones a lo largo de su altura.

En la figura 7 se presentan las cuatro pilas estudiadas, ordenadas según el volumen de hormigón que contiene cada una de ellas.

Para cada pila se dibuja, en primer lugar, su alzado longitudinal, que muestra el canto con que hace frente a la carga vertical excéntrica actuante en dicho plano, y a la derecha su alzado transversal que muestra la variabilidad del ancho de la sección a lo largo de la pieza.

El volumen de acero dispuesto en todas estas pilas es el mismo, siendo su distribución parabólica, según el esquema "4" de la figura 1. El espesor de tabique en todas ellas es de 0,30 metros, siendo también constante el canto que tienen en la sección de empotramiento.

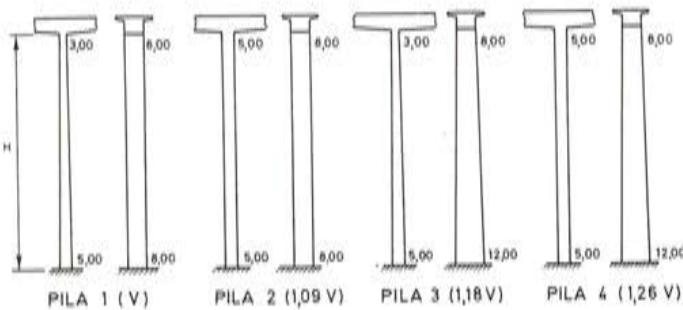


Fig. 7. Influencia de la variabilidad de la sección de hormigón. Alzados longitudinal y transversal de diferentes pilas.

Al igual que en el punto anterior, se han considerado dos alturas de pila, 75 y 100 metros, y tres valores de la excentricidad (0,25, 1 y 2,50 metros), resultando de ello un total de seis casos diferentes para cada tipo de pila.

Hay que hacer notar que los diseños de pila de canto variable tienen en coronación un canto ( $h = 3,00$  m) elegido para que tales secciones dispongan de capacidad resistente cierta frente a los momentos de primer orden que las va a solicitar. De modo que las diferencias resistentes entre unos y otros diseños están regidas por el comportamiento global de la pila (efectos de segundo orden) y por la resistencia de secciones intermedias o de base de la misma.

En las tablas 5 se resumen los resultados obtenidos con el programa DPIR al analizar los 24 casos estudiados.

ALTURA DE PILA = 75 m		$\lambda = 2 \text{ L/h} = 30$			
PILA	EXC(m)	1	2	3	4
0,25	10800t (I)	13200t (I)	11400t (I)	14200t (R)	
1,00	7400t (I)	9800t (I)	7800t (R)	10800t (R)	
2,50	3800t (R)	6200t (I)	4000t (R)	7000t (R)	
ALTURA DE PILA = 100 m.		$\lambda = 2 \text{ L/h} = 40$			
PILA	EXC(m)	1	2	3	4
0,25	8000t (I)	10000t (I)	9000t (I)	11600t (I)	
1,00	5200t (I)	7400t (I)	6000t (I)	8600t (I)	
2,50	3200t (I)	4800t (I)	3400t (R)	5400t (I)	

Tabla 5. Influencia de la variabilidad de la sección de hormigón. Carga resistida por la pila (R = rotura; I = inestabilidad).

En las figuras 8 y 9 se representan gráficamente los resultados obtenidos en 8 de los casos estudiados. Los dibujos correspondientes a los 16 restantes casos pueden consultarse en (1).

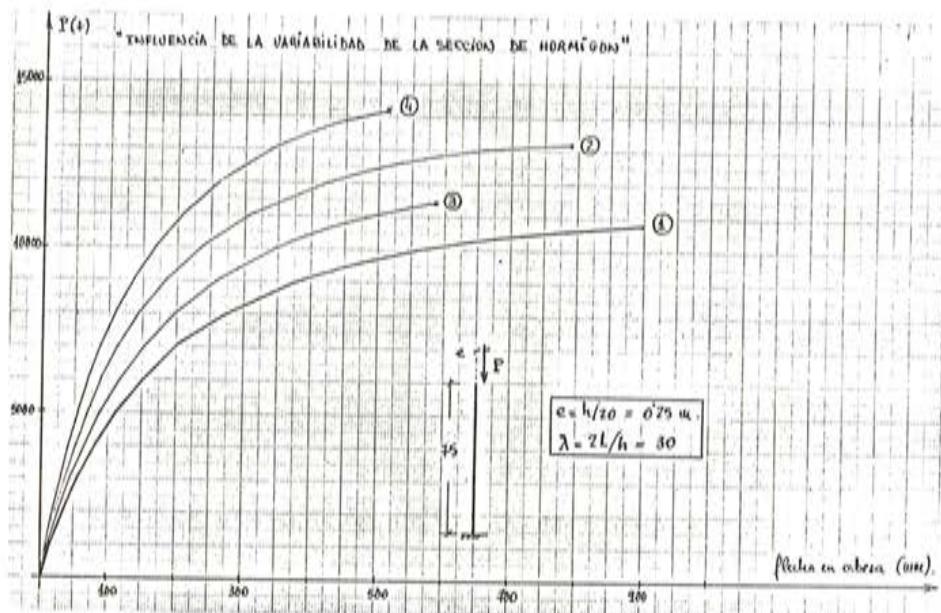


Fig. 8.

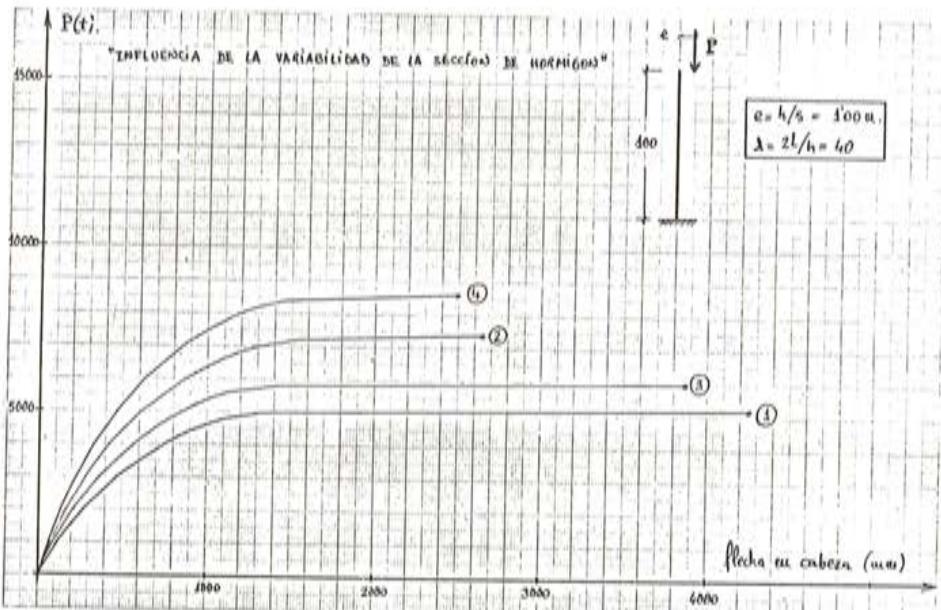


Fig. 9.

De los resultados de las tablas 5 puede destacarse:

- 1) Los máximos valores de la carga vertical resistida se tienen para las pilas 2 y 4, que presentan un canto constante a lo largo de su altura.

La pila 2 que tiene menor volumen de hormigón que la 3, da mejores resultados que ésta.

Estos valores resaltan la influencia que en la reducción de la capacidad de carga de la pila tiene un diseño taluzado en el plano longitudinal. La disminución lineal del canto desde su base supone disponer de secciones más débiles y, por tanto, más incurvables, que producen mayores efectos de segundo orden, conduciendo a cargas críticas menores. La comparación, en todos los casos, entre las curvas respuestas, de las pilas 1 y 3 por un lado y, de las 2 y 4 por otro, demuestra indirectamente la economía del canto constante (relación de cargas críticas comparada con relación de volúmenes de hormigón; la armadura es siempre la misma). A favor del canto variable está, sin duda, la estética de la obra y el hecho de que canto variable significa mayor canto en la base a igualdad de canto medio, con lo que las condiciones de la comparación anterior se ven modificadas.

- 2) A igualdad de alzado longitudinal, pilas 1 y 3, y pilas 2 y 4, el aumento del ancho de la pieza a medida que nos aproximamos a la cimentación mejora, como es lógico, el comportamiento longitudinal de la pila, además de las ventajas que esto suponga frente a un viento transversal a la misma.

### 3. COMPORTAMIENTO TEORICO DE PILAS ESBELTAS EN MENSULA, SOLICITADAS POR FLEXO-COMPRESION BIAXIAL Y CARGAS CONTENIDAS EN SUS DOS PLANOS PRINCIPALES

#### 3.1. Efecto de un viento transversal a una pila esbelta durante la construcción de un dintel por avance en voladizo a partir de aquélla

El estudio de las pilas altas de viaductos construidos por avance en voladizo se aborda en el próximo artículo y, como se verá en el mismo, ellas pasan por su fase más crítica durante la construcción del dintel, situación en la que funcionan como grandes ménsulas.

A lo largo de la construcción del tablero, la pila se ve solicitada por cargas verticales excéntricas contenidas en el plano longitudinal del viaducto. Un viento transversal al mismo convierte el problema resistente de la pila en una flexo-compresión biaxial, en que se deben tener presentes los efectos espaciales de segundo orden, habida cuenta de la esbeltez de la misma.

En este apartado se estudia el efecto que origina el viento transversal en cuatro diseños diferentes de pila de un posible viaducto construido por avance en voladizo.

Los diseños se muestran en la figura 10. Hemos jugado con:

- Canto en sentido transversal: Constante (pilas "C") o variable (pilas "V").
- Espesor de pared de pila: Las pilas "1" tienen 30 cm, y las pilas "2", 40 cm.
- Sección total de acero, uniformemente distribuida en todo el perímetro externo de la sección: Las pilas "1" disponen de  $2.080 \text{ cm}^2$ , mientras las "2" cuentan con el doble ( $4.160 \text{ cm}^2$ ). Esta armadura se mantiene constante en toda la altura de la pila.
- En todos los casos, el canto longitudinal es constante, y buscando acentuar efectos de esbeltez, se ha tomado igual a  $L/20$ , o sea,  $h_L = 100/20 = 5 \text{ m}$ .

Se tienen así cuatro pilas distintas que representan casos bastante extremos en cuanto a rigidez transversal y robustez de sección de hormigón y acero. La C1 es la pila más débil y la V2 resulta la más robusta.

Los volúmenes de hormigón incluídos en cada diseño son, en función del volumen de la pila C1, los siguientes:

$$\text{Vol (V2)} = 1,53 \cdot \text{Vol (C1)}$$

$$\text{Vol (C2)} = 1,31 \cdot \text{Vol (C1)}$$

$$\text{Vol (V1)} = 1,16 \cdot \text{Vol (C1)}$$

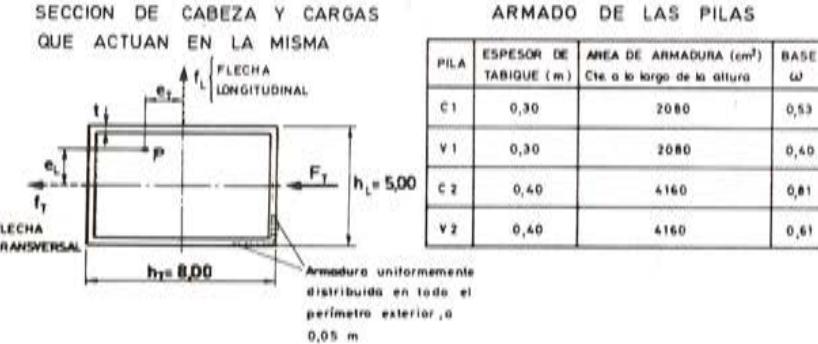
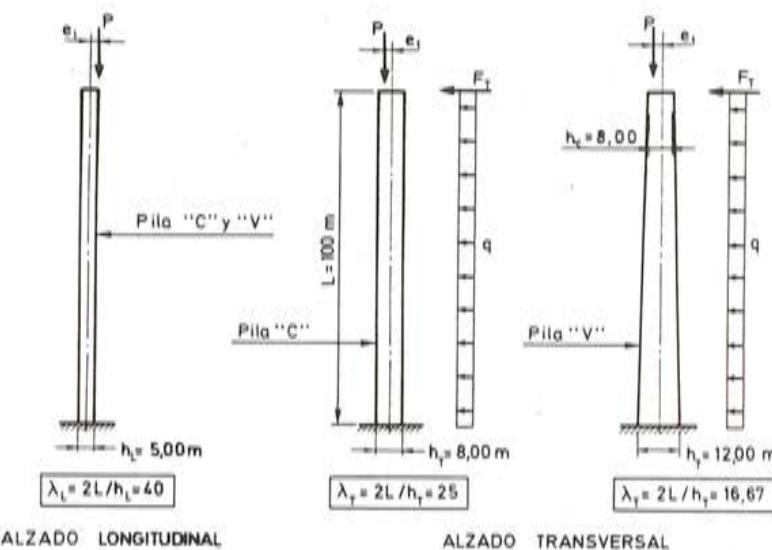


Fig. 10. Efecto de un viento transversal a una pila esbelta. Características de las pilas analizadas.

Nuestro objetivo es observar el comportamiento de estos cuatro diseños frente a la acción combinada de carga vertical y viento.

En la figura 11 se expone la respuesta de la pila C2 (canto transversal constante y 40 cm de espesor de pared) sometida a una carga vertical de 4.000 t en su cabeza que actúa con dos diferentes excentricidades longitudinales (hipótesis A:  $e_L = 0,333 h_L = 1,67$  m. Hipótesis B:  $e_L = 0,56 h_L = 2,80$  m), más un viento que produce empuje unitario q. La fuerza  $F_t$  es la acción de viento transmitida por el dintel, siendo  $e_T$  la excentricidad de P engendrada por el par transversal del mismo origen. El gráfico incluido suministra, para cada intensidad de viento (q), los valores de las flechas en cabeza en ambos planos longitudinal y transversal.

Puede observarse el ya comentado efecto del "ablandamiento" (ver Hormigón y Acero nº 148) que la acción concomitante del viento transversal provoca en la respuesta de la pila

en el plano longitudinal. Así, una intensidad:  $q = 150 \text{ kp/m}^2$  supone un aumento del 16 por 100 en la flecha longitudinal debida a la sola acción de  $P = 4.000 \text{ ton}$  con  $e_L = h_L/3$ .

En dicho gráfico se observa bien la no linealidad de la respuesta, indicándose con (x) los puntos de agotamiento resistente de la pila que, como puede verse, corresponden a intensidades de viento irreales. Lógicamente, a la hipótesis B (máxima  $e_L$ ) corresponde un menor valor de presión de viento crítica.

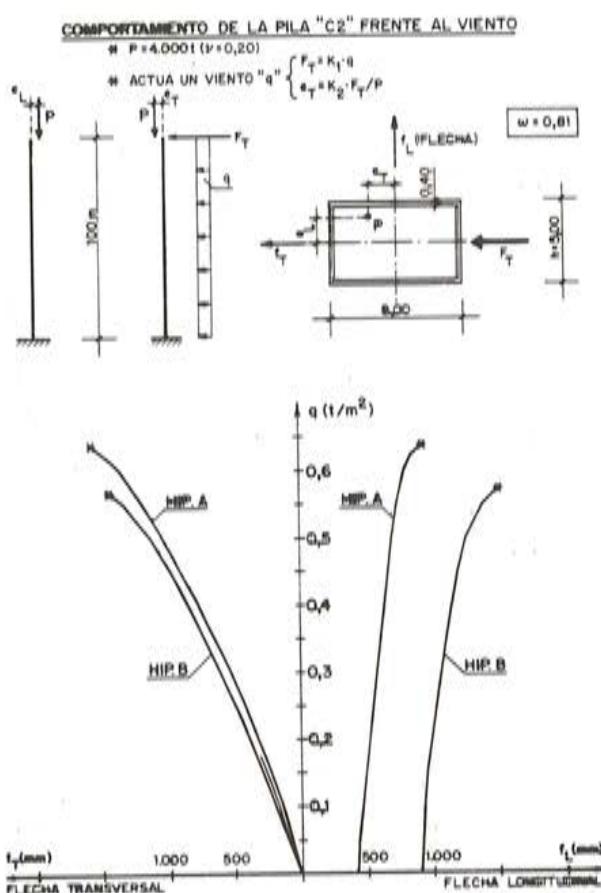


Fig. 11. Comportamiento de una pila esbelta frente al viento.

Hipótesis A:  $e_1 = 0,333, h_1 = 1,67 \text{ m}$ .

Hipótesis B:  $e_1 = 0,560, h_1 = 2,80 \text{ m}$ .

Para mejor entender el fenómeno tensional anterior, hemos representado en la figura 12 los planos de deformación existentes en seis secciones base de la pila para  $q = 100 \text{ kp/m}^2$ . Se observa una inclinación progresiva de la fibra neutra desde coronación hasta empotramiento al incrementarse el flector transversal.

La figura 13 incluye las respuestas de los cuatro diseños de pila frente a las hipótesis AV (o sea, fuerza  $P = 4.000 \text{ ton}$ , con  $e_L = h/3$ , más acción de viento,  $q$ , creciente). Fijándonos en las flechas en el plano longitudinal, apreciamos el fuerte incremento resistente de V1 respecto a C1. O sea, el crecimiento de canto transversal (de 8 a 12 m) redundó en un aumento superior al 100 por 100 de la carga crítica de viento, con sólo un 16 por 100 de incremento de hormigón, resultado, por lo demás, totalmente esperable.

Pero más contundente es la comparación de las curvas V1 y V2. En efecto, la última pila, con un 13 por 100 más de hormigón y doble peso de acero que la primera, sólo supera su viento crítico en un 16 por 100.

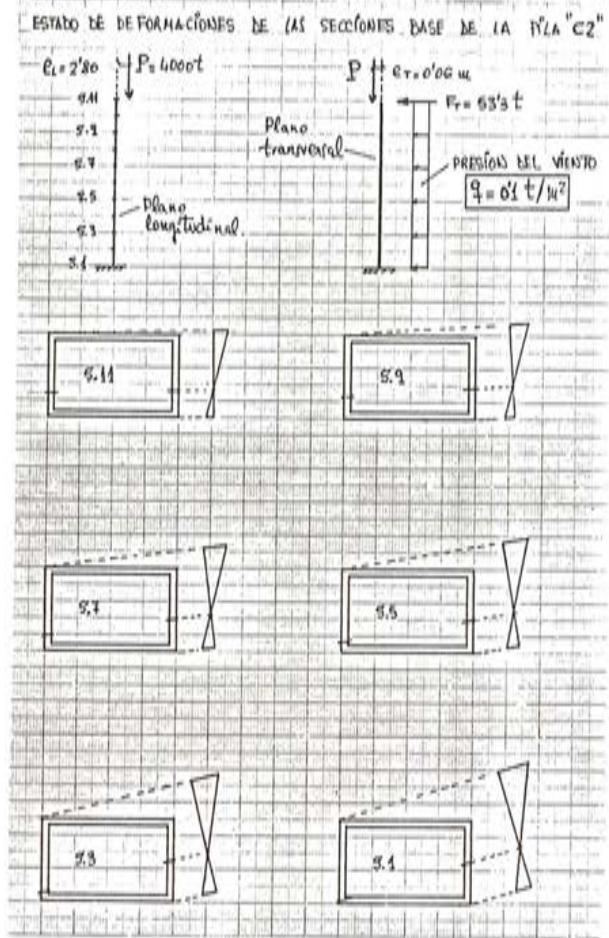


Fig. 12.

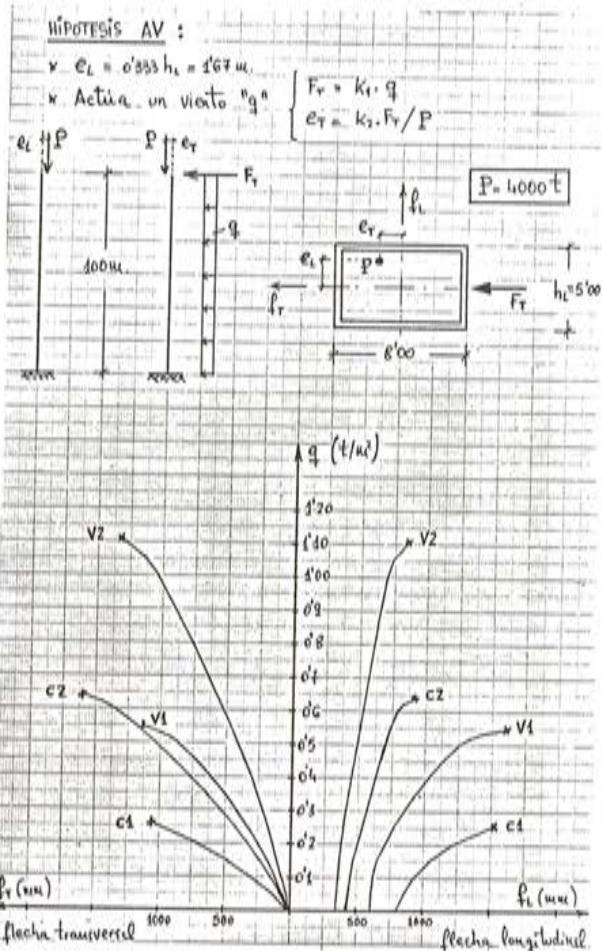


Fig. 13.

Finalmente, la comparación entre V2 y C2 deja sentenciada la conveniencia de no escamtar canto transversal (acudiendo, lógicamente, a un diseño de ancho variable) en las pilas altas de viaductos.

En (1) pueden consultarse otros gráficos paralelos a los aquí recogidos.

#### 4. REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

- (1) VILLEGRAS L. "Análisis en teoría de segundo orden de pilas altas de viaductos. Aplicación al proyecto de pilas de puentes construidos por avance en voladizo". Tesis Doctoral. Universidad de Santander. ETS de Ingenieros de Caminos, Noviembre 1981.

# **Comportamiento de las estructuras de hormigón en edificación durante el proceso constructivo**

**Por Ricardo Alvarez García Lubén**  
Ingeniero de Caminos

## **INTRODUCCION**

Durante la construcción de la estructura de un edificio existe un proceso determinante, tanto en la fase de proyecto, para efectuar el cálculo correcto de solicitudes que va a tener la estructura, como en fase de construcción ya que se ha de realizar la obra en condiciones óptimas de seguridad y de rendimiento. Este proceso, común a todas las obras de edificación, recibe el nombre de "desapuntalamiento".

La construcción de la estructura, se realiza mediante el apuntalamiento del encofrado correspondiente a cada forjado. Al considerar el factor económico, que determina la rentabilidad o nó del proceso, y cuya optimización se alcanza si la construcción se realiza en el mínimo tiempo posible, los tiempos de ejecución de los correspondientes forjados se reducen creando un ritmo de ejecución, acorde con las necesidades de realización de la obra. Como consecuencia, al minimizar el tiempo de ejecución, el hormigón, durante este período, no es capaz de desarrollar la resistencia necesaria para soportar, el sólo, todas las cargas, precisando del apuntalamiento durante un tiempo adicional al de ejecución, por lo cual, el apuntalamiento se va superponiendo de unos pisos a otros.

Al intervenir, a su vez, la rentabilidad del encofrado, siendo su cantidad limitada para cada obra, hemos de trasladar los puntales desde el piso más bajo, que esté apuntalado al más alto que se desee construir. Para la realización de este proceso, se tienen que desapuntalar los niveles más bajos a medida, que va avanzando la obra, ocasionando, mediante este desapuntalamiento, una redistribución de todas las cargas que en ese momento existen en la estructura y que la propia estructura reparte en función de la rigidez a flexión de sus elementos.

El diferente número de plantas apuntaladas, ocasiona que la redistribución de las cargas que se realiza entre todos los forjados apuntalados, varie y puede llegar a ser condicionante en su elección, aunque en la mayoría de los casos no llegue a ser determinante, como lo son, entre otros, el ritmo de ejecución de la obra, la capacidad de realización de los tajos o la viabilidad de la rotación del propio encofrado.

Durante el proceso de construcción, se presentan momentos críticos que pueden afectar a la seguridad de la estructura, ya sea porque los puntales puedan estar infradimensionados para las cargas que han de soportar, pudiendo así producirse su pandeo y originando que la estructura resulte, en el mejor de los casos, gravemente dañada, o bien porque la estructura propiamente dicha, no sea capaz de aguantar las cargas a las que se ve sometida durante el proceso constructivo, pudiéndose producir defectos importantes que pueden llegar a ocasionar el colapso de la obra.

## ANTECEDENTES

Para homogeneizar criterios, definiremos como "ratio de carga" el coeficiente que expresa la relación entre la carga que soporta durante la construcción el elemento considerado, ya sea forjado o puntal, y la carga que le supone el peso propio del forjado junto con su correspondiente encofrado. En adelante, se considerarán todos los forjados de iguales características, para poder hacer referencia a un "ratio de carga" homogéneo, no obstante, las teorías que se exponen pueden aplicarse a distintos tipos de forjados de un mismo edificio.

Nielsen (2) en 1952, desarrolla un método de análisis para determinar durante el proceso constructivo, la carga máxima que soportan los forjados y los puntales, debida a la interacción que existe entre ellos, teniendo en cuenta sus respectivas deformaciones. En la tabla nº 1, se indican los ratios máximos de carga que obtuvo para diferentes tipos de puntales y número de plantas apuntaladas.

TABLA 1

Ratios de carga máxima según Nielsen.

Puntales (sin apoyar en el suelo)		Forjados*	
	m = 2	m = 3	m = 2
K = 0,3	1,34	1,80	2,28
K = 0,8	—	1,71	2,53
K = 0,8		K = 0,8	
—		—	
—		2,56	

\* Estos ratios son los alcanzados en la 2<sup>a</sup> planta.

Puntales (apoyando en el suelo)		
	m = 2	m = 3
K = 0,3	1,96	2,76
K = 0,8	—	2,42

### Simbología:

- m: Es el número de plantas apuntaladas.
- K: Es el coeficiente de rigidez del encofrado.
- $\delta$ : Es la deformación vertical del encofrado para una carga de 1 Kg/cm<sup>2</sup>. Siendo K = 1/ $\delta$ .

La complejidad matemática que supone la utilización del método de Nielsen, es soslayada por Grundy y Kabaila (3) en 1963, al considerar que los puntales son infinitamente rígidos en comparación con las flechas de los forjados y que las cargas se reparten en función de la rigidez a flexión de los forjados apuntalados. Este método puede considerarse adecuado en régimen elástico, y las experiencias realizadas por Agarwal y Gardner (9), obteniendo desviaciones entre el 5 por 100 y el 10 por 100 así lo confirman. Las diferencias que se observan en los ratios de carga son debidas, principalmente, a que Nielsen considera un módulo de elasticidad en el hormigón bajo y además, existen pequeñas diferencias en los tiempos del ciclo de desapuntalamiento, ocasionando que el ratio de carga máximo de Nielsen sea algo superior que el de Grundy y Kabaila.

Posteriormente se desarrollan métodos de construcción que aportan pequeñas mejoras, al alcanzar el ratio de carga máximo en forjados con más edad y que, consecuentemente, tienen más desarrollada su capacidad resistente, como indica Blakey y Beresford (5), consiguiendo mejorar las condiciones resistentes de los forjados más jóvenes al alargar el ciclo de construcción.

Para disminuir el ratio de carga máximo que soportan los forjados, surge la técnica del "reapuntalamiento". Esta técnica, en sus diferentes versiones, tiene sus mejores defensores en Taylor (6), Marosszeky (7) y Wheen (8, 13) entre otros, permitiendo reducir ostensiblemente el ratio máximo de carga que se produce mediante un apuntalamiento normal, a costa de redistribuir la carga a los forjados más jóvenes.

Tanto las experiencias realizadas por Agarwal y Gardner (9) en los edificios de Alta Vista Drive en Ottawa y Place du Portage, Hull en Quebec, como las realizadas por Lasisi y Ng (11) en el Government of Canada Building N°5 en Ottawa, nos confirman que la técnica del reapuntalamiento es muy difícil de controlar, ya que aunque se realice con equipos sofisticados, como los utilizados en estos casos, llegan a alcanzarse dispersiones, en los ratios de carga de las plantas en que se realiza el reapuntalamiento, muy altos y que se cifran entre el 22 por 100 y el 46 por 100, dependiendo del número de niveles de apuntalamiento que se tenga y del propio nivel en el que se realiza el reapuntalamiento, lo cual complica aún más una predicción simple y fiable de los ratios de carga para poderlo aplicar con suficiente seguridad a las obras.

No obstante, dada la utilización de esta técnica en otros países, ya que no existe información sobre experiencias que se hayan realizado en España, se cree conveniente comentar que si se realiza el reapuntalamiento en las plantas recién hormigonadas, condicionándolas únicamente y exclusivamente a que sean capaces de soportar su propio peso, como indica Marcosszeky (7), estamos sometiendo a hormigones muy jóvenes a unos esfuerzos que se traducirán en deformaciones permanentes muy grandes, al tener un módulo de deformación longitudinal excesivamente alto, al ser  $\sigma_c > 0,5 f_j$  y aunque se reduzca el ratio máximo de carga a 1,33 para tres niveles de apuntalamiento, el método parece totalmente improcedente.

En cuanto al método de Taylor (6) de "slackening and tightening", se ha de indicar, que los propios precursores del reapuntalamiento lo critican al precisar de una estricta supervisión inusual en las obras. El ratio máximo de carga, que se obtiene mediante este método, es de 1,44 para tres niveles de apuntalamiento, pero se consigue aflojando todos los husillos de los puntales de una determinada planta simultáneamente, hecho que complica el método y lo hace inoperante.

Parece más razonable, aunque no por ello se deje de desaconsejar, utilizar la técnica del reapuntalamiento en las plantas más bajas, ya que los forjados con más vida tienen, consecuentemente, una capacidad mayor para resistir los esfuerzos a los que se verán sometidos.

La técnica del reapuntalamiento es viable desde el punto de vista de la investigación y en algún caso muy específico, en el que se precise esta técnica y esté avalado todo el proceso

por un estudio previo y un control intenso en su realización. El intento de Wheen (8, 13), de promocionar su puntal "elasto-plástico", con una rigidez variable, no parece viable dado el grado de desarrollo que actualmente presenta la construcción.

En resumen, la técnica del reapuntalamiento consiste en un desapuntalamiento con un posterior apuntalamiento, de ahí su nombre, que tiende a igualar los ratios de carga de los forjados, durante la construcción, a base de descargar los forjados más cargados a costa de los que soportan menos carga, con aumento de las flechas que se producen en los forjados que no se ven sometidos a este proceso.

Por último, hay que señalar que es una técnica inusual en nuestro país; es muy cara por precisar mucha mano de obra; prácticamente incontrolable en la obra; va en contra de todas las normativas vigentes en cuanto al aumento de las flechas que se producen en los forjados; y desprecia la capacidad que poseen las estructuras ductiles de redistribuir los esfuerzos, reduciendo por si mismas los ratios de carga elásticos, cuando la estructura no puede soportarlos.

## CALCULO DE LOS RATIOS DE CARGA EN FUNCION DE LA CAPACIDAD DE READAPTACION DE LA ESTRUCTURA

### Comportamiento a flexión

Cuando en cada una de las secciones críticas, el momento mayorado que se produce durante el proceso constructivo es inferior al momento de agotamiento deducido con los coeficientes de seguridad de los estados límites últimos (p. ej.:  $\gamma_s = 1,15$  y  $\gamma_c = 1,5$ ). Es decir:

$$\gamma_f \cdot M_{pp} \cdot \alpha_f \leq M_u (\gamma_s, \gamma_c) \quad (I)$$

Siendo:

$M_{pp}$  : momento debido al peso propio del forjado más el peso del encofrado.

$\alpha_f$  : ratio de carga del forjado.

$M_u$  : momento de agotamiento

la distribución de los ratios de carga es totalmente elástica, y las tensiones que se originan en el hormigón son inferiores a  $0,5 f_j$  ( $1/\gamma_f \cdot 1/\gamma_c < 0,5 f_j$ ) teniendo, por lo tanto, durante el proceso constructivo, flechas que no son elevadas al no producirse una fuerte disminución del valor del módulo de deformación longitudinal del hormigón. Las deducciones de los ratios de carga realizadas por Grundy y Kabaila son válidas en este caso.

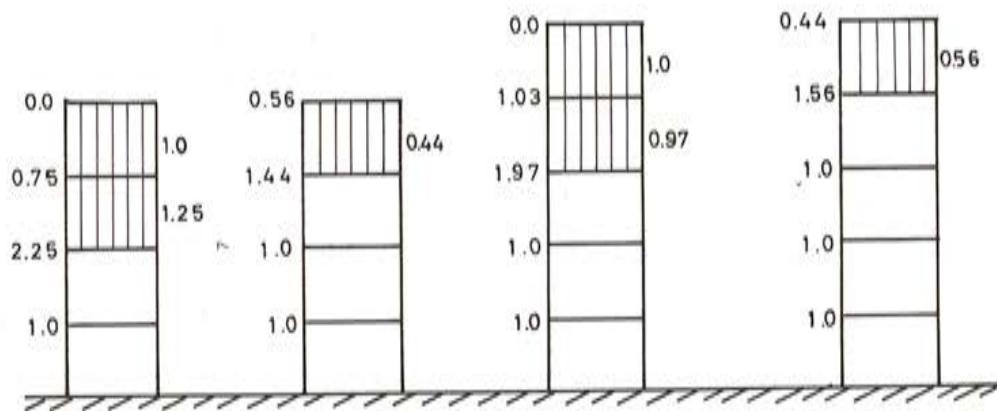
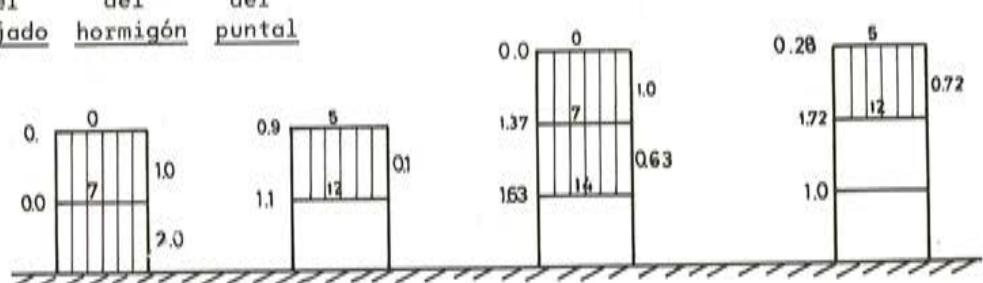
A título de ejemplo del método de redistribución de las cargas en función de la rigidez a flexión de los elementos de la estructura (forjados o vigas), se han elaborado los procesos de construcción, que están representados en las Figs. 1 y 2 respectivamente. Ciñéndose al caso de tener tres plantas apuntaladas, el esquema del ciclo constructivo se representa en la tabla 2 y corresponde al caso en el que se hormigona una planta por semana y cuyos ratios de carga son los expuestos en la Fig. 2.

Como aclaración, y basándonos en la curva de endurecimiento del hormigón que nos proporciona la EH-82 en el cuadro 10.4.b se va a indicar como se realiza la redistribución de los ratios de carga.

Una vez apuntaladas las tres primeras plantas, se desapuntala el nivel más bajo. En el momento de desapuntalar, los forjados tienen 5, 12 y 19 días de edad, y se ha de repartir el ratio de carga de los puntales que se quitan, es decir  $\alpha_p = 3$ , entre las rigideces a flexión que

RATIOS DE CARGA PARA DOS PLANTAS APUNTALADAS

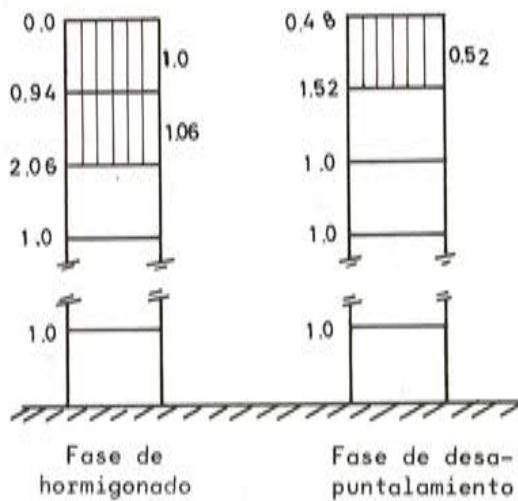
Ratio del forjado	Edad del hormigón	Ratio del puntal
-------------------------	-------------------------	------------------------



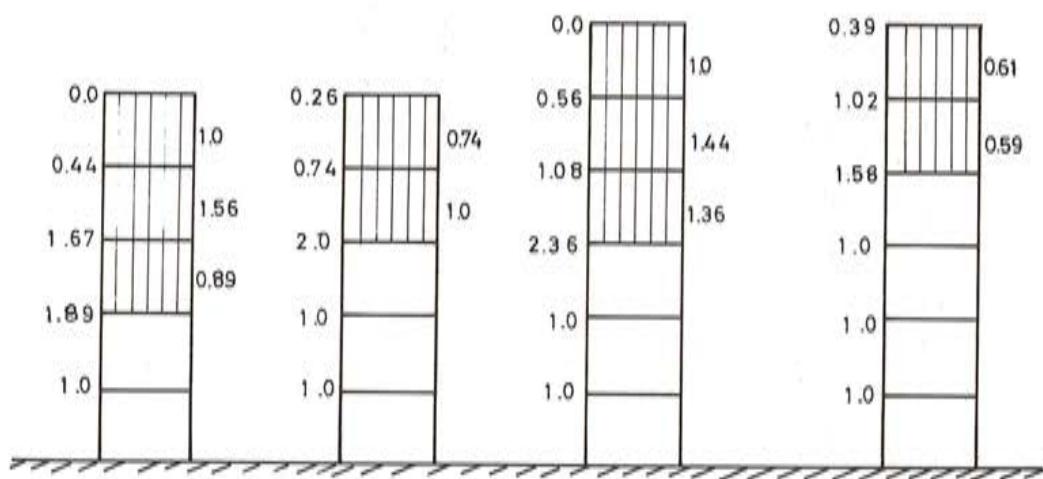
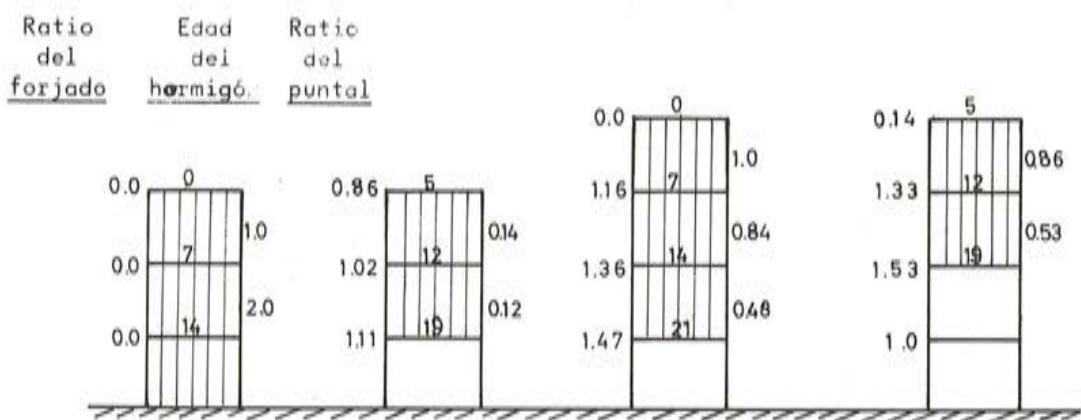
Los ratios de carga  
convergen a:

\* SE REALIZA EL HORMIGO  
NADO DE UNA PLANTA --  
POR SEMANA

Fig. 1.



## RATIOS DE CARGA PARA TRES PLANTAS APUNTALADAS



Los ratios de carga  
convergen a:

\* SE REALIZA EL HORMIGÓN  
NADO DE UNA PLANTA POR  
SEMANA.

Fig. 2.

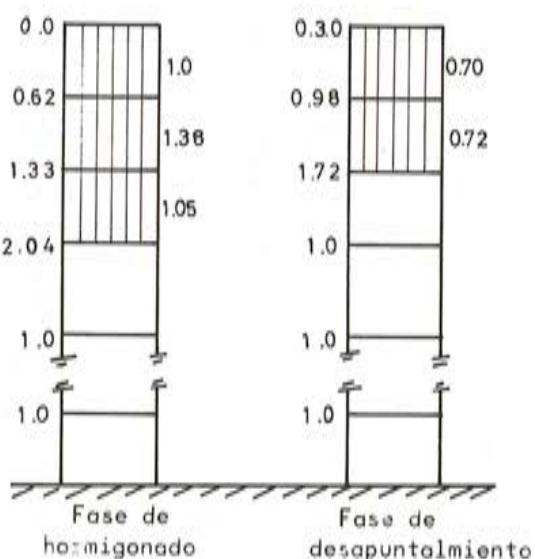


TABLA 2  
ESQUEMA DEL CICLO DE CONSTRUCCIÓN DE UNA ESTRUCTURA CON TRES PLANTAS APUNTALADAS  
Y REFORZANDO EL HORMIGONADO DE UNA PLANTA POR SEMANA

SÍMBOLOGIA:

E: Situación en la obra de todo el encofrado, incluido cimbra y puentes

E.: Colocación de la ferralla en obra

H. H. H. Ho et al.

卷之三

poseen estos forjados. Al ser la rigidez a flexión proporcional al módulo de deformación longitudinal y considerar todos los forjados de iguales características, el reparto es proporcional también al módulo de deformación longitudinal de los hormigones de los forjados.

Forjado	Edad del hormigón	% E	Coeficiente de reparto
1	19 días	0,96	0,373
2	12 días	0,88	0,342
3	5 días	0,73	0,285
$\Sigma : 2,57$			1,00

Forjado	Ratios de carga $\alpha_f$
1	$3 \times 0,373 = 1,11$
2	$3 \times 0,342 = 1,02$
3	$3 \times 0,285 = 0,86$

Los ratios de carga de los puntales se obtienen restando de la carga total que soportan la carga que absorben los forjados. En el caso analizado será:

Puntales	Ratio de carga $\alpha_p$
Del forjado 2 al 3	$1 - 0,86 = 0,14$
Del forjado 1 al 2	$2 - (0,86 + 1,02) = 0,12$

La fase siguiente será el hormigonado de la 4<sup>a</sup> planta, y se realizará cuando los forjados tengan 7, 14 y 21 días. El ratio de carga a repartir en esta fase será  $\alpha_f = 1$ , correspondiente al peso propio del forjado que se va a construir junto con el encofrado correspondiente.

Forjado	Edad del hormigón	% E	Coeficiente de reparto
1	21 días	0,97	0,36
2	14 días	0,91	0,34
3	7 días	0,80	0,30
$\Sigma : 2,68$			1,00

Forjado	Ratios de carga $\alpha_f$
1	$1,11 + 0,36 = 1,47$
2	$1,02 + 0,34 = 1,36$
3	$0,86 + 0,30 = 1,16$

Puntales	Ratios de carga $\alpha_p$
Del forjado 3 al 4	1,0
Del forjado 2 al 3	$2 - 1,16 = 0,84$
Del forjado 1 al 2	$3 - (1,16 + 1,36) = 0,48$

El resto del proceso se completa al repetir alternativamente las operaciones de desapuntalamiento y de hormigonado anteriormente indicadas.

Se ha de señalar, que los ratios de carga obtenidos al variar la resistencia de un hormigón de endurecimiento normal a otro de endurecimiento rápido, siguiendo el cuadro 10.4.b de la EH-82, son similares y presentan variaciones del 3 por 100. Asimismo, el proceso constructivo de hormigonar una planta cada dos semanas, en vez de tardar una semana por planta, representa muy poca variación en los ratios de carga, cifrándose en una disminución del 1 por 100.

Ratios de carga máximos en los forjados $\alpha_{f\max}$		
	$m = 2$	$m = 3$
1 semana/planta	2,09	2,36
2 semanas/planta	2,08	2,34

Si se verifica:

$$\gamma_f M_{p,p} \alpha_f > M_u (\gamma_s, \gamma_c) \quad (II)$$

Puede ocurrir, que el momento que se produce durante el proceso constructivo con coeficiente  $\gamma_f = 1$ , sea inferior al momento de agotamiento deducido con coeficientes  $\gamma_s = \gamma_c = 1$ .

$$M_{p,p} \cdot \alpha_f < M_u (\gamma_s = \gamma_c = 1) \quad (III)$$

En este caso, la distribución de los ratios de carga sigue siendo elástica, aunque al sobrepasar las tensiones del hormigón el valor  $0,5 f_j$  se producirán fuertes deformaciones, como ocurre en las estructuras pretensadas cuando se aplica en exceso el esfuerzo de pretensado. Las altas deformaciones, son debidas a una disminución del módulo de elasticidad del hormigón, o lo que es igual, a unas deformaciones por fluencia muy altas que modifican la distribución totalmente elástica de los ratios de carga. La fluencia tiende a uniformar los ratios de carga apartándolos de la distribución elástica inicial.

Por el contrario, si se verifica:

$$M_{p,p} \cdot \alpha_f \geq M_u (\gamma_s = \gamma_c = 1) \quad (IV)$$

La estructura puede tener comportamientos distintos, ya que rompe si es frágil o plástifica redistribuyendo los esfuerzos si se cumplen las condiciones de ductilidad necesarias.

Una estructura es ductil, cuando la profundidad de la fibra neutra de deformaciones es inferior a un determinado valor que varía según las normas (CP-110, MODEL-CODE, EH-82), o bien, cuando la cuantía geométrica de la armadura de tracción es inferior a un cierto valor tal y como indica la norma ACI 318-77. (Art. 8.4).

Si llamamos cuantía geométrica crítica aquella con la que se alcanza el agotamiento simultáneo del acero y del hormigón (balanced strain condition ACI 318-77 Art. 10.3.2), la cuantía geométrica en una sección ductil será siempre una cuantía infracrítica, de tal forma que se pueda plastificar el acero al alcanzarse la deformación por agotamiento a compresión

del hormigón. Solamente las estructuras con ductilidad suficiente serán capaces de plastificar, proporcionando así el giro anelástico necesario para que todas las secciones críticas de una pieza alcancen simultáneamente su momento de agotamiento con la actuación de la carga mayorada o de diseño.

En el caso de que la estructura sea dúctil y se verifiquen (II) y (IV), si el momento de plastificación es "K" veces el momento de peso propio, al alcanzarse este valor la estructura redistribuirá el exceso de carga entre los forjados restantes, redistribuyéndose los valores de los ratios elásticos a otros valores anelásticos más uniformes.

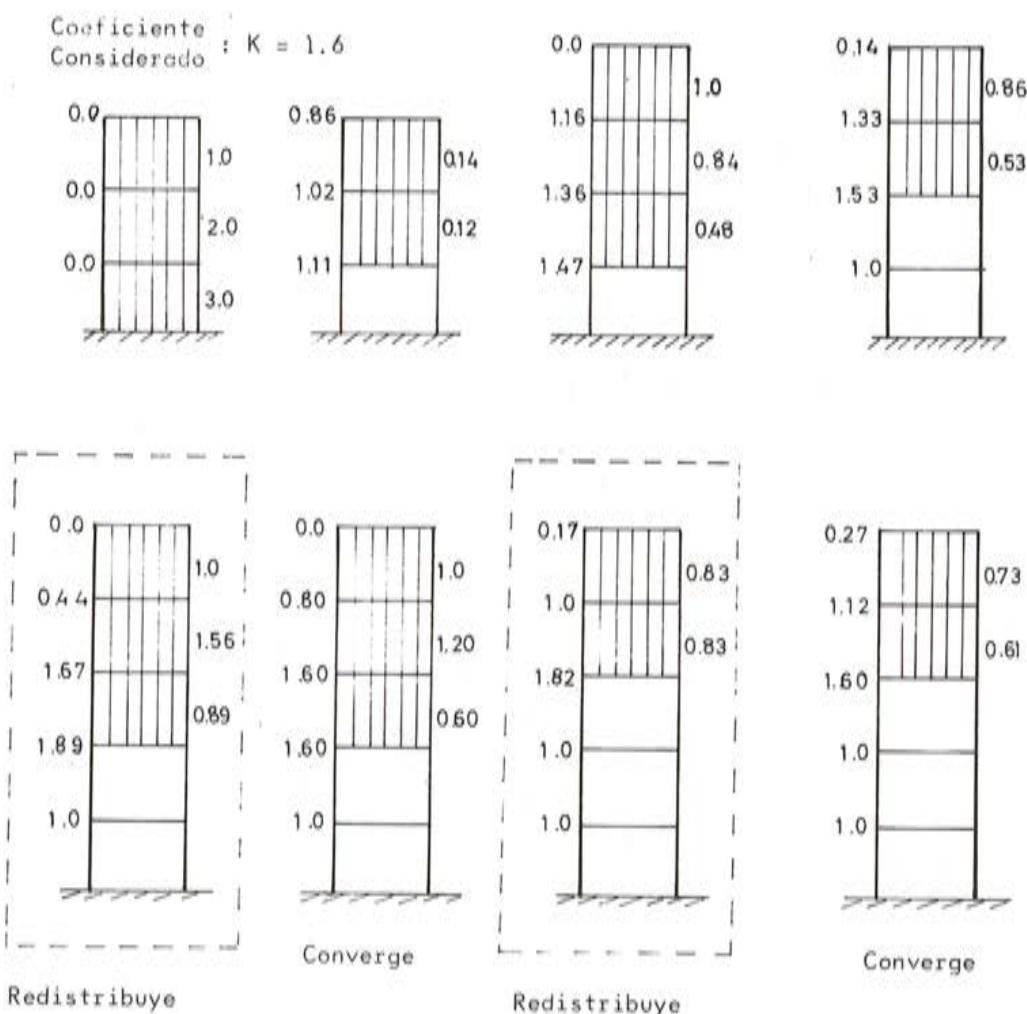


Fig. 3. Comportamiento de la estructura si se verifican las condiciones de ductilidad.

En la Figura 3 se ha desarrollado un caso de comportamiento dúctil para un valor de  $K = 1,6$  que se ha elegido caprichosamente entre los diferentes valores que pueden tomarse.

Si la estructura es frágil no cabe ninguna redistribución posible sobreviniendo el fallo cuando en una única sección crítica se alcanza el momento de agotamiento de la misma. Sin embargo hay que reseñar que la mayoría de los forjados son dúctiles y de ahí que se alcancen grandes deformaciones cuando la estructura redistribuye el exceso del ratio de carga para el que no fué calculada.

### Comportamiento a cortante y punzonamiento

Las deformaciones de la estructura por esfuerzos tangentes se pueden considerar despreciables frente a las deformaciones estudiadas por tensiones normales. En la estructura por lo tanto no son de temer deformaciones importantes por esta causa y tan sólo habrá que estudiar si puede sobrevenir el fallo si se verifica en algún punto:

$$Q_{pp} \alpha_f > V_{uj}$$

Siendo:

$Q_{pp}$  el cortante (o el punzonamiento) debido al peso propio del forjado más el encapado de una planta.

$\alpha_f$  el ratio de carga del forjado en cuestión.

$V_{uj}$  el cortante (o el punzonamiento) de agotamiento para la sección crítica considerada a la edad de  $j$  días.

No se pueden dar reglas generales sobre el comportamiento de la estructura frente a estas solicitudes ya que depende de numerosas variables como: tamaño de los pilares, tipo de estructura (forjado plano o forjado unidireccional, etc.), relación canto/luz, ancho de los nervios del forjado, cuantía de la armadura transversal, etc. Incluso el comportamiento de un mismo forjado puede variar dentro de un mismo edificio puesto que los pilares de las últimas plantas son de menor dimensión que los de las plantas inferiores y el peligro de punzonamiento aumenta con la altura. Todo esto pone de manifiesto la complejidad del problema que se habrá de estudiar en cada caso concreto sin que se puedan dar reglas de carácter general aunque no se debe de olvidar este punto como lo recuerdan Long (10) y Webster (12) que han hecho un estudio probabilístico del tema citando casos en los que el esfuerzo cortante y el punzonamiento produjeron el colapso de la estructura.

### Referencias al proceso de desapuntalamiento existentes en las Normativas más importantes

A continuación se comenta el diferente tratamiento que recibe el proceso de desapuntalamiento en las diferentes normativas. En general, se encuentra una reglamentación poco concreta en el tema que nos ocupa a excepción de la normativa del "American Concrete Institute", que plantea los problemas que pueden ocasionar las cargas que se producen en la fase de construcción de la estructura.

Las Reglas B.A.E.L. 80, tanto en el artículo A. 3.1.32. que trata de las cargas en el proceso de ejecución, como en el artículo B. 3.1. de evaluación de acciones, hace referencia, únicamente, a que los cálculos en fase de ejecución deben de hacerse con detalle y se ha de precisar en qué situaciones han sido evaluados.

El Código Modelo C.E.B.-F.I.P. en su capítulo 6, Art. 6.3.2. referente a las acciones variables que deben considerarse, indica que los responsables de la ejecución deben realizar un control para que no se sobrepasen los valores nominales de las cargas.

La normativa del American Concrete Institute ACI 318-77 en su artículo 6.2 únicamente hace mención a la seguridad y durabilidad de la estructura que ha de quedar garantizada en el proceso de apuntalamiento. Sin embargo, no hace mención específica al tema, siendo éste tratado en los Comentarios de dicha norma fijando unas condiciones muy generales y, en definitiva, dejando al ingeniero proyectista la responsabilidad de planear a su criterio todo el proceso constructivo. No obstante, hace referencia al Comité 347 que ha elaborado la Norma 347-68 y a la publicación de Hurd como bibliografía especializada.

Con referencia a las acciones producidas durante la ejecución, la normativa española EH-82 en su artículo 23.2, únicamente hace mención a la posible necesidad de determinar

las solicitudes que se producen en las distintas fases de puesta en carga. Basándonos en la normativa del "American Concrete Institute" ACI 347-68, y concretamente en su artículo 2.8.2, se podía ampliar el comentario al articulado:

"Cuando todas las plantas apuntaladas comiencen desde el suelo, los puntales se han de dimensionar para que sean capaces de transmitir todo el peso propio de las plantas situadas por encima de su nivel más el peso del encofrado que soportan junto con la carga de construcción que tiene la última planta.

En el caso de que el apuntalamiento del primer forjado haya sido suprimido; si el número de plantas apuntaladas es de dos, se dimensionarán los puntales para una carga de 1,30 veces el peso propio de los forjados, junto con el peso del encofrado más la sobrecarga de construcción. En el caso de que el número de plantas apuntaladas sea de tres, el coeficiente anteriormente indicado será de 1,60.

Si el número de plantas fuese distinto, requerirá un estudio concreto en cada caso".

Este mismo artículo de la EH-82, remite al artículo 28.5, referente a los valores característicos de las acciones debidas al proceso constructivo, no concretando el valor mínimo que se ha de adoptar. En este punto, la normativa ACI 347-68 en su artículo 1.2.1, referente a las cargas de diseño, establece un mínimo de  $245 \text{ kg/m}^2$ , incluyendo los valores de impacto. Las experiencias de Lasisi y Ng (11) indican que, para el cálculo del encofrado, el valor indicado por la norma ACI puede considerarse apropiado.

En cuanto al coeficiente de seguridad que se ha de adoptar durante el proceso de construcción, la normativa EH-82 en su artículo 32 deja al criterio del proyectista la valoración de dicho coeficiente recomendando no bajar de  $\gamma_f = 1,25$ , sin embargo, el artículo 21 recomienda que la seguridad de la obra en ningún momento sea inferior a la de servicio.

Se juzga que es el artículo 21 el que se ha de aplicar en este caso, ya que siendo un proceso que se desarrolla con hormigones muy jóvenes con un módulo de elasticidad bajo, se pueden producir roturas y, si existe ductilidad suficiente, deformaciones anelásticas importantes que se mantienen permanentemente durante toda la vida de la estructura. Estas deformaciones se traducen en flechas o abombamientos en el centro de los vanos, lo que exige hormigón de regulación o de relleno a veces en cantidades importantes, traduciéndose en una disminución de la sobrecarga real de la estructura. Existen experiencias en losas macizas, con abacos, de 11 metros de luz cuyo canto en el centro del vano era de 28 cms., y que durante el proceso constructivo llegaron a tener una deformación total de 12 cms. de flecha por término medio lo que indica la gravedad e importancia del tema.

## BIBLIOGRAFIA

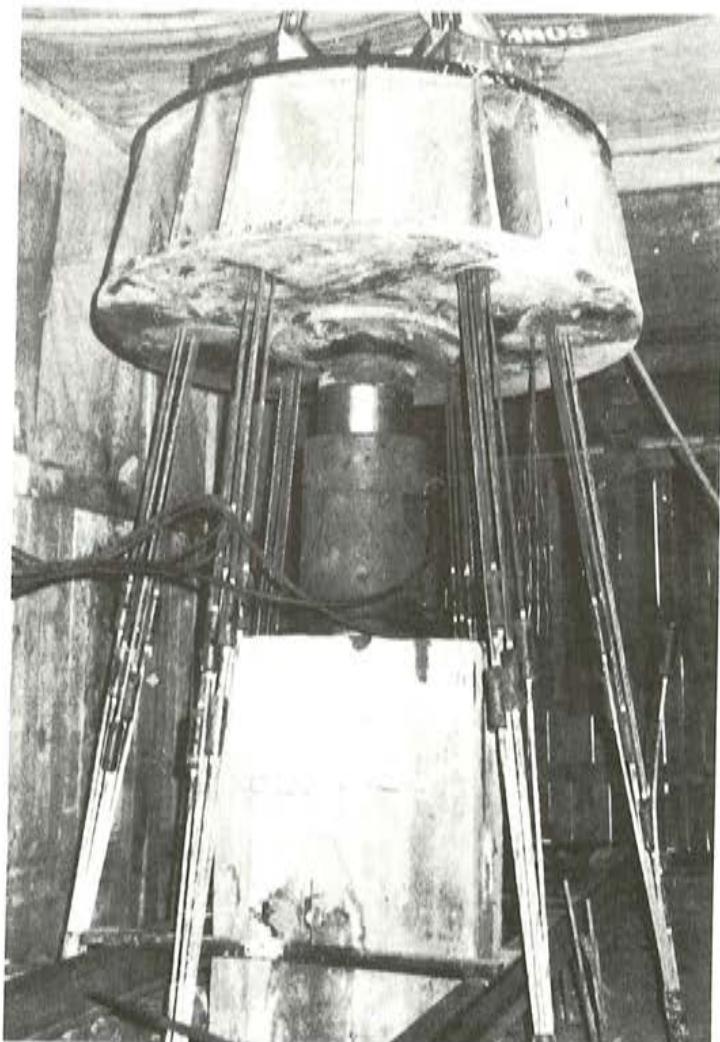
1. Nielsen, Knud E. C., "Investigation of Load Distribution between Reinforced Concrete Floor Slabs and Their Formwork Preliminary Report". Bulletins N:R 19, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm, 1949.
2. Nielsen, Knud E.C., "Loads on Reinforced Concrete Floor Slabs and Their Deformations during Construction". Proceedings N:R 15, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm, 1952.
3. Grundy, Paul and Kabaila, A., "Construction Loads on Slabs with Shored Formwork in Multistory Buildings". ACI Journal, December, 1963.
4. Beresford, F. D., "An Analytical Examination of Propped Floors in Multistory Flat Plate Construction". Constructional Review, Nov., 1964.
5. Blakey, F.A. and Beresford, F. D., "Stripping of Formwork for Concrete in Buildings in Relation to Structural Design". Civil Engineering Transactions, Oct. 1965.

6. Taylor, P.J., "Effects of Formwork Stripping Time on Deflections of Flat Slabs and Plates". Australian Civil Engineering and Construction, Feb. 1967.
7. Marosszky, M. "Construction Loads in Multistory Structures". Civil Engineering Transactions, Apr. 1972.
8. Wheen, Robert J. "Positive Control of Construction Floor Loads in Multistorey Concrete Buildings". Regional Conference on Tall Buildings, Madrid Sep. 1973.
9. Agarwal, R.K. and Gardner, Noel J. "Form and Shore Requirements for Multistory Flat Slab Type Buildings". ACI Journal, Nov. 1974.
10. Long, Adrian E. "A two Phase Approach to the Prediction of the Punching Strength of Slabs". ACI Journal, Feb. 1975.
11. Lasisi, Mohammed Y. and Ng, Simon F., "Construction Loads Imposed on Hig-Rise Floor Slabs". Concrete International, Feb. 1979.
12. Webster, Frederick A. "Reliability of Multistory Slab Structures Against Progressive Collapse During Construction". ACI Journal, Nov-Dec. 1980.
13. Wheen, Robert J. "An Invention to Control Construction Floor Loads in Tall Concrete Buildings". Concrete International, May, 1982.
14. Calavera, J. "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación". Intemac. Feb. 1981.
15. Instrucciones EH-82 y EP-82. "Para el Proyecto y la Ejecución de obras de hormigón en masa, armado y pretensado".
16. Règles BAEL-80. "Règles Techniques de Conception et de Calcul des Ouvrages et construction en Béton Armé suivant la méthode des états-limites".
17. Norma ACI 318-77. "Building Code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary".
18. Norma CP-110. "The Structural Use of Concrete B.S.I.".
19. Código Modelo CEB-FIP.
20. Norma ACI 347-68. "Recommended Practice for Concrete Formwork".
21. McGregor, J.G. "Ductility of Structural Elements". Handbook of Concrete Engineering. Mark Fintel.
22. González Serrano, Antonio. "Redistribución de Esfuerzos y Ductilidad de Secciones". Iberinsa, 1983.

# INTEMAC



## INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Prueba de carga  
de un pilote.

### MADRID

Oficinas:  
Monte Esquinza, 30 · 4º D  
MADRID-4  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:  
Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. (91) 675 31 00/04/08

### BARCELONA

Pasaje Busquets, 37  
CORNELLA DE LLOBREGAT  
Tels. (93) 377 43 58/62

## Cinemática de láminas

Por: Salvador Monleón Cremades\*  
Juan F. Moya Soriano\*\*  
Pedro Fuster García\*\*\*

### SINOPSIS

Las ecuaciones generales que rigen la deformación de las estructuras laminares,

- (1) ecuaciones cinemáticas,
- (2) ecuaciones del movimiento,
- (3) ecuaciones constitutivas, y
- (4) condiciones de contorno

suelen tradicionalmente reducirse a sistemas definidos sobre un dominio bidimensional, denominado superficie de referencia de la lámina (usualmente su superficie media), y a posteriori sufren una serie de simplificaciones adicionales en función del tipo de problema que se pretenda estudiar: cálculo de esfuerzos en régimen lineal, estabilidad, comportamiento no-lineal...

En el presente trabajo presentamos el primero de estos sistemas, definiendo en consecuencia las componentes del tensor de deformación de la lámina en función del campo de desplazamientos, para cualquier geometría. Mostraremos cómo obtener las ecuaciones cinemáticas en función de parámetros exclusivamente definidos sobre su superficie de referencia con total generalidad, y posteriormente se aplicarán a la construcción de teorías cinemáticas más simplificadas y aptas en cada caso a un determinado tipo de lámina o de problema a resolver sobre la misma.

(\*) Dr. Ingeniero de caminos, profesor encargado de la cátedra de Puentes de la ETSICCPV.

(\*\*) Ingeniero de caminos, profesor ayudante de Puentes en la ETSICCPV.

(\*\*\*) Dr. Ingeniero de caminos, catedrático de Cálculo de Estructuras de la ETSICCPV.

## 1. INTRODUCCION

Para la derivación de unas ecuaciones cinemáticas adecuadas al estudio de láminas delgadas pueden seguirse dos vías claramente diferenciadas.

- (1) Dadas sus características de cuerpo tridimensional, la deformación de estas estructuras puede estudiarse a partir de las ecuaciones generales de los medios continuos. Dentro de estas ecuaciones presentaremos la correspondiente definición Lagrangiana de la deformación del medio.
- (2) Aprovechando el carácter degenerado de la geometría de una lámina, puede reducirse el estudio de la deformación de ésta al de la deformación de su superficie de referencia (usualmente ésta será su superficie media). Para ello es necesario obtener dos conjuntos de ecuaciones: las relativas a la deformación de la superficie de referencia y las correspondientes a la extensión de este sistema a toda la lámina.

El primero de estos dos sistemas se reduce, en su formulación Lagrangiana, a la definición de los tensores métrico y de curvatura de la superficie de referencia cuando ésta adopta una configuración  $\Sigma$  en función de sus valores en la configuración inicial  $S$  (que supondremos libre de deformación) al imponer un campo de desplazamientos  $d$  definido en cada punto de  $S$ .

Para la extensión de estas ecuaciones a todo el espacio laminar se deberá formular una determinada hipótesis de variación de su tensor métrico en una dirección exterior a la superficie de referencia, usualmente la dirección normal a ésta. Así definiremos el segundo conjunto de ecuaciones.

En las siguientes secciones se presentan las ecuaciones generales de ambos puntos de vista, tridimensional y bidimensional, suponiendo referidos los puntos del medio a un sistema curvilíneo  $\theta^i$ . En el segundo enfoque su derivación sigue el orden expuesto en líneas anteriores: deformación de la superficie de referencia y a continuación deformación de la lámina en términos de los cambios de métrica y de curvatura de  $S$ .

Este otro tipo de formulación de la deformación de la lámina exige implícitamente la reducción de los infinitos grados de libertad de los puntos del cuerpo no situados sobre la superficie de referencia a un número finito de parámetros definidos sobre esta región bidimensional. En consecuencia siempre existirá una pérdida de información intrínseca a cualquier tratamiento bidimensional de la cinemática de una lámina; por ejemplo la tradicional hipótesis de Love-Kirchhoff conduce, como es sabido, a un modelo de lámina sin deformación transversal y no será adecuada esta modelización para el estudio de láminas moderadamente gruesas o constituidas por un material con gran deformabilidad transversal (este es el caso de las láminas-sandwich). A cambio de ello toda la deformación del cuerpo quedará exclusivamente en función de los cambios de métrica y de curvatura de  $S$ , no siendo necesario definir grados de libertad suplementarios sobre la superficie de referencia en la hipótesis de Love-Kirchhoff.

Los capítulos 2 a 4 presentan sucesivamente la derivación sistemática del tensor de deformación de la lámina para una discretización transversal general (ecuaciones 3.25) y posteriormente condensada a un único grado de libertad: el cambio de normal, descrito por la ecuación 3.28 y que conduce a una nueva definición del tensor de deformación de la lámina (ecuaciones 3.32) sobre la cual pueden fácilmente deducirse teorías cinemáticas derivadas, entre las cuales la de Love-Kirchhoff, según se expone en la sección 3.4.3.

Además en el anexo A se han incluido unos elementos de geometría diferencial de superficies donde quedan definidos todos los sistemas característicos de la geometría de la superficie de referencia utilizados en las siguientes secciones.

Para la exposición de los cálculos se ha optado por la notación tensorial, realizando en alguna ocasión la particularización de las expresiones deducidas a notación convencional de Love.

## 2. FORMULACION TRIDIMENSIONAL DE LA DEFORMACION DE UNA LAMINA

Dado el sistema curvilíneo  $\theta^i$  del espacio tridimensional Euclídeo y siendo  $\mathbf{p}$  el vector posición de un punto del cuerpo correspondiente a una configuración cualquiera del mismo, los vectores naturales del sistema coordenado serán

$$\mathbf{g}_i^* = \mathbf{p}_{,i} \quad (2.1)$$

Análogamente en la configuración inicial, descrita por el vector  $\mathbf{P}$ , tendremos

$$\mathbf{G}_r^* = \mathbf{P}_{,r} \quad (2.2)$$

En ambas ecuaciones la derivación parcial se ha anotado mediante coma:  $\frac{\partial}{\partial \theta^i} = ( )_{,i}$ .

Los dos sistemas anteriores pueden a su vez relacionarse a través de  $\mathbf{d}^*$ , campo de desplazamientos característico del cambio de configuración:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{d}^*(\theta^i), \quad (2.3)$$

resultando

$$\mathbf{g}_i^* = z_i^{*r} \mathbf{G}_r^* \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} z_i^{*r} = \delta_i^r + e_i^{*r} \\ e_i^{*r} = d_{,r}^* \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

El sistema  $z_i^{*r}$  se denomina *gradiente del movimiento*, y se calcula a partir de las ecuaciones (2.5). Depende exclusivamente de las derivadas covariantes de las componentes contravariantes del campo de desplazamientos de los puntos de la lámina,  $\mathbf{d}^*$ . Las ecuaciones (2.1) a (2.5) permiten definir directamente el tensor de deformación de Lagrange del continuo laminar, para ello basta evaluar la variación del cuadrado de la longitud del arco al imponer al medio unos desplazamientos  $\mathbf{d}^*$ . Tendremos pues

$$ds^2 - ds^2 = dp \cdot dp - dP \cdot dP = d\theta^i [z_i^{*r} G_{rs}^* z_j^{*s} - G_{ij}^*] d\theta^j, \quad (2.6)$$

siendo  $G_{ij}^*$  el tensor métrico del sistema curvilíneo  $\theta^i$ .

El tensor de deformación de Lagrange se define sobre la semi-variación del cuadrado de las longitudes elementales de arco como sigue:

$$\frac{1}{2} (ds^2 - ds^2) = d\theta^i \epsilon_{ij}^* d\theta^j, \quad (2.7)$$

resultando el sistema  $e_{ij}^*$  (tensor de deformación) igual a la semi-variación del tensor métrico,

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} [z_i^{*r} G_{rs}^* z_j^{*s} - G_{ij}^*] \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) define completamente la deformación de la lámina. Junto con las ecuaciones del movimiento de Cauchy y la ley de comportamiento del material constitutivo del medio nos permitirá llegar a una formulación en desplazamientos del problema (estático o dinámico) planteado.

Sin embargo no se ha hecho restricción alguna sobre el tipo de sistema de referencia a definir, salvo las habituales condiciones de regularidad, y por lo tanto cabe plantearse si la descripción de la deformación de una lámina puede tomar una forma más adaptada a las peculiaridades geométricas de estas estructuras, predominantemente superficiales. Este otro punto de vista constituye la base del capítulo siguiente.

### 3. FORMULACION BIDIMENSIONAL DE LA DEFORMACION DE UNA LAMINA

#### 3.1. Cambio de métrica

Sea ahora  $r$  el vector posición de un punto de la superficie de referencia de la lámina,  $R$  corresponderá al vector posición asociado al mismo punto material de la superficie en su configuración inicial  $S$ . Supondremos que la superficie de referencia está parametrizada en  $\theta^\alpha$ , en lo sucesivo sus coordenadas de superficie.

Podremos definir, de forma análoga a lo realizado en la ecuación (2.4), unas relaciones entre los vectores naturales de  $S$  y  $\Sigma$ , configuración deformada de la superficie media. Para ello es conveniente recordar las fórmulas de Gauss y Weingarten:

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda a_\lambda + b_{\alpha\beta} a_3 \\ a_{3,\alpha} &= -b_{\alpha}^\lambda a_\lambda \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son válidas para cualquier configuración de la superficie de referencia, y en particular la inicial (escribiéndose entonces con mayúsculas).  $b_{\alpha\beta}$  define la segunda forma cuadrática fundamental de  $\Sigma$ , lo denominaremos tensor de curvatura.  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  son los símbolos de Christoffel de segunda especie de  $\Sigma$  y  $a_3$  su vector unitario normal, quedando así completado el triángulo natural en cada punto de la superficie de referencia:  $\{a_\alpha, a_3\}$ . De forma análoga a la ecuación (2.3) tendremos ahora

$$r = R + d(\theta^\alpha), \quad (3.1)$$

y derivando parcialmente

$$a_\alpha = A_\alpha + d_{,\alpha},$$

pero el campo de desplazamientos de  $S$  puede definirse por sus componentes contravariantes en el triángulo natural de la configuración inicial, esto es

$$d = d^\lambda A_\lambda + d^3 A_3 \quad (3.2)$$

Aplicando directamente las fórmulas de Gauss-Weingarten se obtiene

$$d_{,\alpha} = e_{\alpha}^{\lambda} A_{\lambda} - \varphi_{\alpha} A_3 \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha}^{\lambda} &= d^{\lambda}_{,\alpha} - d^3 B_{\alpha}^{\lambda} \\ \varphi_{\alpha} &= -(d^3_{,\alpha} + d^{\lambda} B_{\lambda\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

En consecuencia podremos definir una relación entre vectores naturales iniciales y en la configuración deformada similarmente a lo establecido en la versión tridimensional,

$$a_{\alpha} = z_{\alpha}^{\lambda} A_{\lambda} - \varphi_{\alpha} A_3 \quad (3.5)$$

$$z_{\alpha}^{\lambda} = \delta_{\alpha}^{\lambda} + e_{\alpha}^{\lambda}$$

El tensor de deformación de  $S$  se presentará nuevamente como la semi-variaciόn del tensor métrico, pero ahora en el dominio bidimensional definido por la superficie media de la lámina, esto es

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}), \quad (3.6)$$

operando a partir de (3.5) se deduce fácilmente su expresión en función del gradiente de la superficie de referencia:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ [z_{\alpha}^{\lambda} A_{\lambda\mu} z_{\beta}^{\mu} - A_{\alpha\beta}] + \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} \} \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) proporciona la descripción *interna* del cambio de configuración de  $S$ ; la descripción completa de esta deformación debe complementarse con la variación del tensor de curvatura. Ello se aborda a continuación.

### 3.2. Cambio de curvatura

El tensor de curvatura correspondiente a una configuración cualquiera de la superficie de referencia se define mediante la ecuación

$$b_{\alpha\beta} = a_3 \cdot a_{\alpha\beta}.$$

La expresión del vector  $a_{\alpha\beta}$  en el triángulo  $A_i$  se obtiene derivando en (3.5) y aplicando nuevamente las fórmulas de Gauss-Weingarten, esto conduce a

$$a_{\alpha\beta} = (z_{\alpha}^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} + z_{\alpha,\beta}^{\lambda} + \varphi_{\alpha} B_{\beta}^{\lambda}) A_{\lambda} + (z_{\alpha}^{\lambda} B_{\lambda\beta} - \varphi_{\alpha\beta}) A_3 \quad (3.8)$$

La definición del vector  $a_3$ , normal unitaria a  $\Sigma$ , es algo más laboriosa. Partiremos para ello de su definición

$$a_3 = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|}$$

Particularizando (3.5) para  $\alpha = 1,2$  y efectuando el producto vectorial se obtiene directamente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 &= (z_1^\lambda A_\lambda - \varphi_1 A_3) \times (z_2^\mu A_\mu - \varphi_2 A_3) \\ &= -(\varphi_1 z_2^\mu \epsilon_{\lambda 3 \mu} + \varphi_2 z_1^\mu \epsilon_{\lambda \mu 3}) A^\lambda + z_1^\lambda z_2^\mu \epsilon_{3 \lambda \mu} A^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Utilizando ahora las propiedades del sistema  $\epsilon_{\alpha \beta \gamma}$  esta última ecuación puede sustituirse por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = [\varphi_\lambda (z_\sigma^\sigma) - \varphi_\sigma z_\lambda^\sigma] A^\lambda + z A^3 \quad (3.10)$$

$z$  es el determinante del sistema  $z_\mu^\lambda$ ,  $A$  el correspondiente al tensor métrico  $A_{\lambda \mu}$ .

Alcanzado este punto de la exposición conviene reescribir las ecuaciones (3.8) y (3.10) en forma más compacta. Para ello definiremos cuatro nuevos sistemas auxiliares tal y como se indica a continuación:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}_{\alpha \beta}^\lambda = z_\alpha^\mu \Gamma_\mu^\lambda \beta + z_{\alpha, \beta}^\lambda + \varphi_\alpha B_\beta^\lambda \\ \tilde{B}_{\alpha \beta} = z_\alpha^\mu B_\mu \beta - \varphi_{\alpha, \beta} \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi_\lambda = \varphi_\lambda (z_\sigma^\sigma) - \varphi_\sigma z_\lambda^\sigma \\ z = |z_\mu^\lambda| \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

por lo que (3.8) y (3.10) pueden reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\alpha, \beta} &= \tilde{\Gamma}_{\alpha \beta}^\lambda A_\lambda + \tilde{B}_{\alpha \beta} A_3 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 &= \sqrt{A} (\xi_\lambda A^\lambda + z A^3) \end{aligned}$$

Las ecuaciones permiten llegar a una expresión concisa del tensor de curvatura asociado a una configuración cualquiera  $\Sigma$  de la superficie de referencia de lámina. Su cambio de curvatura se obtiene por simple diferencia de este sistema asociado a las configuraciones  $S$  y  $\Sigma$  respectivamente:

$$K_{\alpha \beta} = B_{\alpha \beta} - b_{\alpha \beta} \quad (3.13)$$

$$b_{\alpha \beta} = \frac{\xi_\lambda \tilde{\Gamma}_{\alpha \beta}^\lambda + z \tilde{B}_{\alpha \beta}}{[\xi^\lambda \xi_\lambda + z^2]^{1/2}} \quad (3.14)$$

El conjunto de ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.7) definen completamente deformaciones internas de  $S$ . Así mismo las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13), (3.14) describen los cambios de curvatura de la superficie media, y por lo tanto su deformación externa. Ambos grupos configuran las ecuaciones cinemáticas de  $S$  con toda generalidad.

Estas ecuaciones dependen exclusivamente de la geometría inicial de  $S$  y del campo de desplazamientos impuestos, pero así como los sistemas  $e_\mu^\lambda$ ,  $\varphi_\mu$  dependen linealmente de las componentes de  $d$  (luego también será el caso de  $z_\mu^\lambda$ ,  $a_{\alpha, \beta}$ ) no sucederá lo mismo con los tensores de deformación y de cambio de curvatura, resultando una cinemática no lineal para el medio en cuestión.

### 3.3. Extensión a todo el espacio laminar

La ecuación (2.8) proporciona la expresión completa del tensor de deformación de la lámina, expresado en un sistema curvilineo espacial  $\theta^i$ . En la presente sección nos proponemos reducir la definición de este tensor de deformación al conocimiento de los sistemas que caracterizan la deformación de  $S$ :  $\epsilon_{\alpha\beta}$  y  $K_{\alpha\beta}$ , en lo sucesivo denominados *deformaciones generalizadas* de la superficie de referencia. Con ello quedaría establecida una formulación bidimensional de la deformación de un medio laminar, y como paso previo deberemos construir un sistema de referencia espacial del mismo basado en el sistema  $A_i$  característico de la configuración inicial de  $S$ .

Entenderemos por *espacio laminar* el volumen ocupado por el cuerpo material constitutivo de la lámina. Definidas unas coordenadas de superficie  $\theta^\alpha$ , las líneas  $\theta^3$  se tomarán ortogonales a  $S$  y las denominaremos en lo sucesivo

$$\eta \equiv \theta^3 \quad (3.15)$$

A partir de esta ecuación, para cualquier punto  $P$  del espacio laminar puede definirse un punto  $R \in S$  tal que

$$P = R + N^*, \quad (3.16)$$

$$N^* = \eta A_3$$

Las dos expresiones anteriores proporcionan una construcción adecuada del espacio laminar, basada en el dominio bidimensional definido por la superficie de referencia de la lámina. Derivando parcialmente (3.16) obtendremos

$$\left. \begin{array}{l} G_\alpha^* = A_\alpha + \eta A_{3,\alpha} \\ G_3^* = A_3 \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

y aplicando la fórmula de Weingarten resulta

$$\left. \begin{array}{l} G_\alpha^* = \mu_\alpha^\lambda A_\lambda \\ \mu_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\lambda - \eta B_\alpha^\lambda \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

El tensor mixto  $\mu_\alpha^\lambda$  transforma el vector natural  $A_\lambda$  tangente a  $S$  en el vector natural  $G_\alpha^*$  tangente a la superficie  $\eta = C^{ste}$ . El sistema inverso  $\bar{\mu}_\alpha^\lambda$  se denominan tensor laminar. A partir de (3.18) puede evaluarse el tensor métrico de la lámina en su configuración inicial:

$$G_{\alpha\beta}^* = A_{\alpha\beta} - 2\eta B_{\alpha\beta} + \eta^2 C_{\alpha\beta} \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} G_{\gamma 3}^* = 0 \\ G_{33}^* = 1 \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Generando un sistema curvilineo con las características deseadas podemos expresar la ecuación (3.16) asociada a una configuración  $\Sigma$  de la superficie de referencia:

$$p = r + n^*(\theta^\alpha, \eta), \quad (3.21)$$

donde los vectores  $p$  y  $r$  serán los homólogos de  $P$  y  $R$ , por lo tanto el vector  $n^*$  resultará igual a

$$n^* = N^* + (d^* - d)$$

en virtud de (2.3). Esta relación queda gráficamente en la figura 3.1.

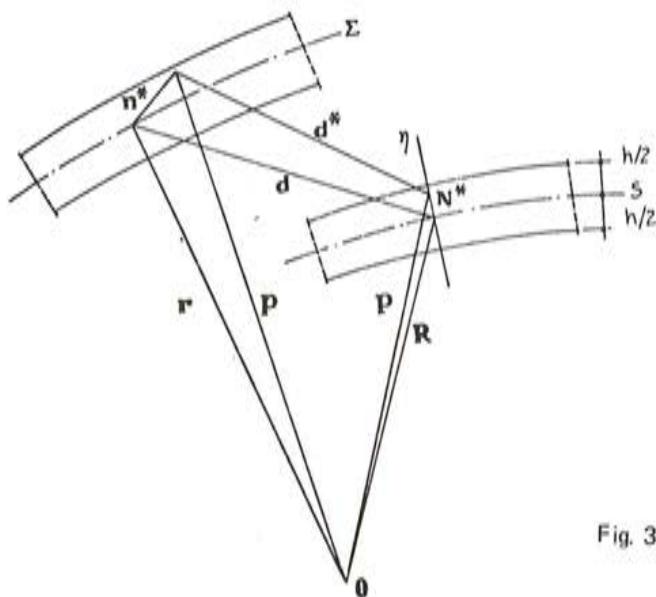


Fig. 3.1. Cinemática de S.

El vector  $n^*$  puede desarrollarse a su vez en serie de potencias de  $\eta$ , resultando el siguiente cuadro de isomorfismos

<i>Configuración inicial</i>	<i>Configuración deformada</i>
$R(\theta^\alpha)$	$r(\theta^\alpha)$
$P(\theta^\alpha, \eta)$	$p(\theta^\alpha, \eta)$
$P = R + N^*$	$p = r + n^*$
$N^* = \eta A_3$	$n^* = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\eta^N}{N} [n^i(\theta^\alpha) a_i]$

La serie

$$n^* = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\eta^N}{N} (n^i a_i) \quad (3.22)$$

será convergente en el espacio laminar con tal de que se cumpla

$$\left. \begin{array}{l} |\eta| / \min \{R_\alpha\} \ll 1 \\ \text{ABS}(B_\beta^N) \leq 1 / \min \{R_\alpha\} \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

$R_\alpha$  son los radios de curvatura de S. Para estudiar la deformación de la lámina necesitaremos evaluar las derivadas parciales del vector  $n^*$ , estas serán

$$\begin{aligned}
 n_{,\alpha}^* &= \left( \sum_{N=1}^{\infty} \eta^N \frac{\lambda_{\alpha}^N}{N} \right) a_{\gamma} + \left( \sum_{N=1}^{\infty} \eta^N \frac{\lambda_{\alpha}^3}{N} \right) a_3 \\
 n_{,3}^* &= \left( \sum_{N=1}^{\infty} N \eta^{N-1} \frac{n^1}{N} \right) a_1 \\
 \left. \begin{array}{l} \lambda_{\alpha}^{\gamma} = n_{,\alpha}^{\gamma} - \frac{n^3}{N} b_{\alpha}^{\gamma} \\ \lambda_{\alpha}^3 = n_{,\alpha}^3 + \frac{n^{\lambda}}{N} b_{\alpha\lambda} \end{array} \right\} & \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto en tensor métrico del espacio laminar podrá definirse en función de estas series de potencias de  $\eta$ . Basta recordar (2.1) para escribir

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha\beta}^* &= (a_{\alpha} + n_{,\alpha}^*) \cdot (a_{\beta} + n_{,\beta}^*) \\
 &= a_{\alpha\beta} + \sum_{N=1}^{\infty} \eta^N (\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha}) + \sum_{P=2}^{\infty} \eta^P \sum_{M=1}^{P-1} (\lambda_{P-M}^{\gamma} \lambda_M^{\gamma\beta} + \lambda_{P-M}^3 \lambda_M^3 \lambda_M^{\beta}) \\
 g_{\gamma,3}^* &= (a_{\gamma} + n_{,\gamma}^*) \cdot n_{,3}^* \\
 &= \sum_{N=1}^{\infty} N \eta^{N-1} \frac{n_{,\gamma}^*}{N} + \sum_{P=2}^{\infty} \eta^{P-1} \sum_{M=1}^{P-1} M (\lambda_{P-M}^{\gamma} \lambda_M^{\nu} n_{,\nu}^* + \lambda_{P-M}^3 \lambda_M^3 n_3) \\
 g_{33}^* &= n_{,3}^* \cdot n_{,3}^* \\
 &= \sum_{P=2}^{\infty} \eta^{P-2} \sum_{M=1}^{P-1} (P-M) M (\lambda_{P-M}^{\nu} \lambda_M^{\nu} n_{,\nu}^* + \lambda_{P-M}^3 \lambda_M^3 n_3)
 \end{aligned}$$

Sobre estas expresiones pueden ya definirse los elementos del tensor de deformación de Lagrange siendo su *métrica de referencia* la definida en (3.19) y (3.20).

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta}^* &= e_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left\{ \eta (\lambda_1^{\alpha\beta} + \lambda_1^{\beta\alpha} + 2B_{\alpha\beta}) + \eta^2 (\lambda_2^{\alpha\beta} + \lambda_2^{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta} + \lambda_1^{\nu} \lambda_1^{\beta} + \lambda_1^3 \lambda_1^3) + \sum_{N=3}^{\infty} \eta^N (\lambda_N^{\alpha\beta} + \lambda_N^{\beta\alpha}) + \sum_{P=3}^{\infty} \eta^P \sum_{M=1}^{P-1} (\lambda_{P-M}^{\nu} \lambda_M^{\nu\beta} + \lambda_{P-M}^3 \lambda_M^3 \lambda_M^{\beta}) \right\} \quad (3.25.1)
 \end{aligned}$$

$$e_{\gamma,3}^* = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^{\infty} N \eta^{N-1} \frac{n_{,\gamma}^*}{N} + \frac{1}{2} \sum_{P=2}^{\infty} \eta^{P-1} \sum_{M=1}^{P-1} M (\lambda_{P-M}^{\gamma} \lambda_M^{\nu} n_{,\nu}^* + \lambda_{P-M}^3 \lambda_M^3 n_3) \quad (3.25.2)$$

$$e_{33}^* = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{P=2}^{\infty} \eta^{P-2} \sum_{M=1}^{P-1} (P-M) M (\lambda_{P-M}^{\nu} \lambda_M^{\nu} n_{,\nu}^* + \lambda_{P-M}^3 \lambda_M^3 n_3) - 1 \right\} \quad (3.25.3)$$

Estas últimas ecuaciones no son todavía las deseadas puesto que en su estructura interna dependen tanto de los tensores métrico y de curvatura correspondientes a la configuración  $\Sigma$  como de los elementos  $n_{,\nu}^*$  que definen el desarrollo en serie de  $n^*$  (ecuaciones 3.22 y 3.24).

Para definir el tensor de deformación del espacio laminar  $e_{ij}^*$  básicamente en función de  $e_{\alpha\beta}$  y  $K_{\alpha\beta}$  deberá pues formularse alguna hipótesis cinemática adicional, y ello implicará un cierto nivel de aproximación frente al planteamiento tridimensional formal. El éxito de la *modelización bidimensional* del medio laminar estará consecuentemente ligado al tipo de simplificación cinemática que se adopte.

Volviendo a la ecuación (3.22) el razonamiento anterior será equivalente a tomar un número finito de términos en el desarrollo de  $n^*$  en serie de potencias de  $\eta$ . Por ejemplo la tradicional hipótesis de Love-Kirchhoff, que pertenece al tipo de hipótesis simplificativas mencionado en el párrafo anterior, se traducirá en

luego

$$\left. \begin{array}{l} n^* = \eta a_3, \\ n^{\alpha} = 0, \quad n^3 = 1 \\ n^i = 0 \quad \forall N \geq 2 \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

Esta hipótesis exige, como es sabido, que la lámina no se deforme transversalmente. Ello puede comprobarse llevando (3.26) a (3.24) y (3.25), obteniendo  $\epsilon_{\gamma 3}^* = \epsilon_{33}^* = 0$ . Geométricamente corresponde a suponer que las normales a  $S$  se mantienen normales a  $\Sigma$  e inextensibles en cualquier configuración de la lámina.

La teoría cinemática presentada en las siguientes páginas está basada en el supuesto que a continuación se expresa:

- (1) se admite que las normales  $N^*$  a  $S$  se mantienen rectas durante todo el proceso de deformación de la lámina, en consecuencia

$$n^* = \eta v(\theta^\alpha) \quad (3.27)$$

Nótese que el campo de validez de cualquier simplificación cinemática puede determinarse por comparación de los resultados del análisis con la solución correspondiente a un tratamiento tridimensional: para una geometría dada del problema, es decir para una relación  $|\eta| / \min \{R_\alpha\}$  concreta, puede cuantificarse el error inducido, e inversamente adoptada una cota de error se definirá precisamente el intervalo geométrico de aplicabilidad de la modelización adoptada.

Volviendo a la ecuación (3.27), el vector  $v$  siempre admitirá una descomposición en la forma

$$v = a_3 + w(\theta^\alpha) \quad (3.28)$$

Con esta descomposición la modelización de Love-Kirchhoff correspondería a  $w = 0$ . Llevando a (3.22) se obtienen los correspondientes valores de los coeficientes  $n^i_N(\theta^\alpha)$  de la serie

$$\left. \begin{array}{l} n^i = 0 \quad \forall N \geq 2 \\ n^{\alpha} = w^\alpha, \quad n^3 = 1 + w^3 \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

y por (3.24) el sistema auxiliar  $\lambda_\alpha^i$  valdrá

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_\alpha^i = 0 \quad \forall N \geq 2 \\ \lambda_\alpha^\gamma = w^\gamma_{|\alpha} - (1 + w^3) b_\alpha^\gamma, \quad \lambda_\alpha^3 = w^3_{,\alpha} + w^\gamma b_{\gamma\alpha} \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

sean  $\hat{x}_\alpha^\gamma$  y  $\hat{\psi}_\alpha$  los siguientes tensores, definidos sobre el sistema anterior

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x}_\alpha^\gamma = w^\gamma_{,\alpha} - w^3 b_\alpha^\gamma = \lambda_\alpha^\gamma + b_\alpha^\gamma \\ \hat{\psi}_\alpha = -(w_{,\alpha}^3 + w^\gamma b_{\gamma\alpha}) = -\lambda_\alpha^3 \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

Volviendo a (3.25), los distintos elementos del tensor de deformación de la lámina correspondiente a nuestra modelización bidimensional resumida en la ecuación (3.27) podrán expresarse en función de estos nuevos tensores, resultando

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}^* &= \epsilon_{\alpha\beta} + \eta [K_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\hat{x}_{\alpha\beta} + \hat{x}_{\beta\alpha})] + \frac{\eta^2}{2} [\hat{\psi}_\alpha \hat{\psi}_\beta + (b_\alpha^\gamma - \hat{x}_\alpha^\gamma)(b_{\gamma\beta} - \hat{x}_{\gamma\beta}) - C_{\alpha\beta}] \\ \epsilon_{\gamma 3}^* &= \frac{1}{2} [w_\gamma + \eta (w^\nu \hat{x}_{\nu\gamma} + w^3_{,\gamma} - w^3 \hat{\psi}_\gamma)] \\ \epsilon_{33}^* &= w_3 + \frac{1}{2} w^i w_i \end{aligned} \quad (3.32)$$

Las ecuaciones (3.32) constituyen la expresión deseada del tensor de deformación de la lámina: proporcionan una descripción bidimensional de su cinemática en función de los cambios de métrica y de curvatura de  $S$  y de las componentes del campo  $w(\theta^\alpha)$  característico del cambio de normal dentro de la teoría desarrollada en la presente sección. Pueden fácilmente reducirse al modelo clásico de Love-Kirchhoff, basta para ello hacer  $w^i = 0$  (luego  $\hat{x}_{\lambda\mu} = \hat{\psi}_\lambda = 0$ ) en todas ellas, comprobándose directamente la no-deformabilidad transversal de la lámina. En la siguiente sección presentamos otras teorías de deformación derivadas de la desarrollada y fundamentalmente basadas en linealizaciones sucesivas de la cinemática de  $S$ ; en cada caso se indican las condiciones de aplicación e hipótesis asociadas.

### 3.4. Teorías derivadas

#### 3.4.1. Linealización del tensor de deformación de $S$

Partiendo de la ecuación (3.7) y aplicando las definiciones (3.4) se obtiene

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (\varphi_\alpha \varphi_\beta + \epsilon_\alpha^\gamma \epsilon_{\gamma\beta}) \quad (3.33)$$

El primer paréntesis del segundo miembro de esta ecuación contiene precisamente la fracción lineal del tensor de deformación de  $S$ , para demostrarlo realizamos el siguiente cambio de variable

$$d = \epsilon \bar{d}, \quad (3.34)$$

todos los sumandos afectados del factor  $\epsilon^m$  se agruparán en el término  $v(\epsilon^m)$  según la notación de Bachmann-Landau. Bajo estas condiciones de ecuación (3.33) puede reescribirse como sigue

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \bar{\epsilon}_{\beta\alpha}) + v(\epsilon^2),$$

quedando demostrado que los sumandos de orden uno coinciden con la fracción lineal de  $\epsilon_{\alpha\beta}$ .

### 3.4.2. Linealización del tensor de cambio de curvatura de $S$

Aplicemos ahora el cambio (3.34) a la ecuación (3.8) definitoria del vector  $a_{\alpha,\beta}$ , con la notación anterior obtendremos

$$\left. \begin{aligned} a_{\alpha,\beta} &= \{ \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + e [\bar{e}_\alpha^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda + \bar{e}_\alpha^\lambda B_{\mu\beta}^\lambda] \} A_\lambda + \\ &\quad + \{ B_{\alpha\beta} + e [\bar{e}_\alpha^\mu B_{\mu\beta} - \bar{\varphi}_{\alpha,\beta}] \} A_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

y para (3.10)

$$a_1 \times a_2 = \sqrt{A} \{ e \bar{\varphi}_\lambda A^\lambda + [1 + 2e(\bar{e}_\sigma^\sigma)] A_3 + v(e^2) \}, \quad (3.36)$$

para esta última relación hemos empleado la forma explícita del determinante  $z$  del gradiante del movimiento de  $S$  ( $z = |z_\mu^\lambda| = 1 + (e_\sigma^\sigma) + |\bar{e}_\mu^\lambda|$ ), y partiendo de ella puede evaluarse  $|a_1 \times a_2|$ , resultando

$$|a_1 \times a_2| = \sqrt{A} \{ 1 + 4e(\bar{e}_\sigma^\sigma) + v(e^m) \}^{1/2}, \quad m \geq 2$$

El vector normal unitario a la configuración  $\Sigma$  será pues

$$a_3 = \frac{1}{[1 + 4e(\bar{e}_\sigma^\sigma) + v(e^m)]^{1/2}} \{ e \bar{\varphi}_\lambda A^\lambda + [1 + 2e(\bar{e}_\sigma^\sigma)] A^3 + v(e^2) \}$$

desarrollemos en serie de potencias de  $(\bar{e}_\sigma^\sigma)$  el primer factor del segundo miembro de esta igualdad,

$$[1 + 4e(\bar{e}_\sigma^\sigma) + v(e^m)]^{-1/2} = 1 - 2e(\bar{e}_\sigma^\sigma) + v(e^m);$$

el vector normal unitario podrá escribirse consecuentemente en la forma

$$a_3 = e \bar{\varphi}_\lambda A^\lambda + A^3 + v(e^m) \quad (3.37)$$

Efectuando finalmente el producto escalar de las expresiones (3.35) y (3.37) se obtiene

$$b_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + e [\bar{\varphi}_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + \bar{e}_\alpha^\lambda B_{\lambda\beta} - \bar{\varphi}_{\alpha,\beta}] + v(e^m) \quad (3.38)$$

La estructura del tensor de curvatura de la superficie  $\Sigma$ , según queda descrita en esta última ecuación, no refleja su simetría intrínseca. Para probarla será suficiente demostrar la simetría del vector  $a_{\alpha,\beta}$  respecto de los índices  $\alpha$  y  $\beta$  en función de las componentes del campo de desplazamientos; particularizando (3.35) para  $e = 1$  tendremos

$$a_{\alpha,\beta} = \{ \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + [e_\alpha^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda + e_{\alpha,\beta}^\lambda + \varphi_\alpha B_{\beta}^\lambda] \} A_\lambda + \{ B_{\alpha\beta} + [e_\alpha^\mu B_{\mu\beta} - \varphi_{\alpha,\beta}] \} A_3 \quad (3.39)$$

Permutando índices y restando las dos ecuaciones así generadas obtendremos, ya en función de las componentes de  $d(\theta^\alpha)$  (para ello basta recordar las ecuaciones 3.4):

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\beta} - a_{\beta,\alpha} &= \{ d^\nu [\Gamma_{\alpha\nu}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda + \Gamma_{\alpha\nu,\beta}^\lambda - B_\beta^\lambda B_{\alpha\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\beta\nu,\alpha}^\lambda + B_\alpha^\lambda B_{\beta\nu}] - \\ &\quad - d^3 [\Gamma_{\mu\beta}^\lambda B_\alpha^\mu + B_{\alpha,\beta}^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda B_\beta^\mu - B_{\beta,\alpha}^\lambda] \} A_\lambda + \\ &\quad + \{ d^\nu [\Gamma_{\alpha\nu}^\mu B_{\mu\beta} + B_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^\mu B_{\mu\alpha} - B_{\beta\nu,\alpha}] \} A_3 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Recordando la definición de los componentes del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel en la configuración inicial así como la expresión de la derivada covariante del tensor de curvatura de  $S$ ,

$$\begin{aligned} R_{\nu\beta\alpha}^{\lambda} &= \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\beta,\alpha}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} \\ B_{\alpha|\beta}^{\lambda} &= B_{\alpha,\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} B_{\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B_{\mu}^{\lambda} \\ B_{\nu\alpha|\beta} &= B_{\nu\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} B_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} B_{\alpha\mu}, \end{aligned}$$

la ecuación (3.40) puede reescribirse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\beta} - a_{\beta,\alpha} &= \{d^{\nu} [R_{\nu\beta\alpha}^{\lambda} - B_{\beta}^{\lambda} B_{\alpha\nu} + B_{\alpha}^{\lambda} B_{\beta\nu}] - d^3 [B_{\alpha|\beta}^{\lambda} - B_{\beta|\alpha}^{\lambda}] \} A_{\lambda} + \\ &\quad + \{d^{\nu} [B_{\nu\alpha|\beta} - B_{\nu\beta|\alpha}] \} A_3 \end{aligned}$$

o bien, en componentes covariantes:

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\beta} - a_{\beta,\alpha} &= \{d^{\nu} [R_{\lambda\nu\beta\alpha} - B_{\lambda\beta} B_{\nu\alpha} + B_{\lambda\alpha} B_{\nu\beta}] - d^3 [B_{\lambda\alpha|\beta} - B_{\lambda\beta|\alpha}] \} A_{\lambda} + \\ &\quad + \{d^{\nu} [B_{\nu\alpha|\beta} - B_{\nu\beta|\alpha}] \} A_3, \end{aligned} \quad (3.41)$$

y invocando las ecuaciones de Codazzi-Gauss, particularizadas a la configuración inicial de la superficie de referencia, se establece directamente la igualdad  $a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}$  en toda configuración  $\Sigma$  generada sobre  $S$  a partir de la ecuación (3.1).

Sea ahora  $\chi_{\alpha\beta}$  la forma linealizada del tensor de cambio de curvatura de la superficie de referencia, basta para obtener su expresión desarrollada eliminar  $v(e^m)$  en (3.38) y hacer  $e = 1$ . Como este nuevo tensor, por lo demostrado en las últimas líneas, también ha de ser simétrico lo definiremos en lo sucesivo mediante la ecuación simetrizada

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) - [\varphi_{\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} + \frac{1}{2} (e_{\alpha}^{\lambda} B_{\lambda\beta} + e_{\beta}^{\lambda} B_{\lambda\alpha})] \quad (3.42)$$

### 3.4.3. Generación de las teorías derivadas

#### 3.4.3.1. Teoría con cambios de curvatura linealizados

Esta teoría se basaría en las ecuaciones cinemáticas (3.32) tomando como deformaciones de  $S$  las definidas en (3.33) y como cambios de curvatura de la superficie de referencia los obtenidos en (3.42), es decir

(a) Tensor de deformación de  $S$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + e_{\lambda\alpha} e_{\beta}^{\lambda})$$

(b) Tensor de cambios de curvatura de  $S$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \chi_{\alpha\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) - [\varphi_{\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} + \frac{1}{2} (e_{\alpha}^{\lambda} B_{\lambda\beta} + e_{\beta}^{\lambda} B_{\lambda\alpha})] \end{aligned}$$

Los sistemas lineales  $e_\mu^\lambda$ ,  $\varphi_\mu$ ,  $\hat{x}_\mu^\lambda$  y  $\hat{\psi}_\mu$  quedan definidos en (3.4) y (3.31). En consecuencia esta teoría sería una *teoría no-lineal de láminas con inclusión de deformación por cortante*, basada en dos únicas simplificaciones:

- (1) las normales se mantienen rectas durante todo el proceso de deformación, y
- (2) se linealizan los cambios de curvatura de la superficie de referencia.

### 3.4.3.2. Teoría de Sanders

Deriva directamente de la anterior, imponiendo una hipótesis adicional relativa a la fracción lineal del tensor de deformación de  $S$  y sus cambios de curvatura:

- (3) se desprecian los términos de segundo orden en  $e_\mu^\lambda$  dentro de la deformación y los términos en  $e_\mu^\lambda B_{\lambda\nu}$  dentro de los cambios de curvatura de la superficie de referencia, resultando

#### (a) Tensor de deformación de $S$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta$$

#### (b) Tensor de cambio de curvatura de $S$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \chi_{\alpha\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) - \varphi_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \end{aligned}$$

esta teoría corresponde también a una teoría no-lineal con inclusión de deformación por cortante bajo la restricción suplementaria (3).

### 3.4.3.3. Teoría lineal

Su generación resulta inmediata, obteniendo ahora una *teoría lineal de láminas con inclusión de deformación por cortante* dentro de la hipótesis (1), al introducir las siguientes definiciones de los tensores de deformación y cambio de curvatura de  $S$  en las ecuaciones (3.32):

#### (a) Tensor de deformación de $S$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha})$$

#### (b) Tensor de cambios de curvatura de $S$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \chi_{\alpha\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) - [\varphi_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + \frac{1}{2} (e_{\lambda\alpha} B_\beta^\lambda + e_{\lambda\beta} B_\alpha^\lambda)] \end{aligned}$$

Finalmente, sería inmediato derivar ecuaciones cinemáticas sin inclusión de deformación por cortante dentro de las tres teorías descritas en las líneas anteriores. La hipótesis de Love-Kirchhoff exige, según se vió en la sección 3.3,  $\hat{x}_\mu^\lambda = \hat{\psi}_\mu = 0$ , e imponiendo esta

condición en (3.32) se obtendrían los sistemas  $\epsilon_{ij}^*$  (en realidad sólo  $\epsilon_{\alpha\beta}^*$  resulta no-nulo) deseados.

En el anexo B se ha incluido la obtención de los términos de segundo orden en la expresión de los cambios de curvatura de S; la implementación de estas ecuaciones en las teorías anteriores permitiría ampliar la hipótesis (2) formulada en 3.4.3.1 hasta *cambios de curvatura con inclusión de efectos de segundo orden*. Sin embargo, debe cuestionarse su empleo siempre que esté asociado a un comportamiento transversal simplificado de la lámina como el expresado en la hipótesis (1).

Una anotación suplementaria, y de considerable importancia, deriva igualmente de esta simplificación. Al *linealizar el comportamiento transversal* de la lámina, puesto que en la serie (3.22) hemos retenido únicamente los términos de orden  $\eta$ , las componentes del vector  $w$  (asociado al cambio de normal) formalmente definidas en el triángulo  $a_i$  corresponderán a la fracción lineal de sus componentes en el triángulo inicial  $A_i$ . Esta propiedad se demuestra fácilmente a partir de las ecuaciones (3.5) y (3.37) interpretadas en función del cambio de variable (3.34):

$$\begin{cases} a_\alpha = A_\alpha + \epsilon (\bar{e}_\alpha^\lambda A_\lambda - \bar{\varphi}_\alpha A_3) \\ a_3 = A_3 + \epsilon (\bar{\varphi}^\lambda A_\lambda) + v (\epsilon^m) \end{cases}$$

luego

$$w = w^\alpha a_\alpha + w^3 a_3$$

$$w = w^\alpha A_\alpha + w^3 A_3 + \epsilon [(w^\alpha \bar{e}_\alpha^\lambda + w^3 \bar{\varphi}^\lambda) A_\lambda - (w^\alpha \bar{\varphi}_\alpha) A_3] + v (\epsilon^m) \quad (3.43)$$

Realizando con  $w$  un cambio similar a (3.34) tendremos:

$$w = \epsilon [\bar{w}^\alpha A_\alpha + \bar{w}^3 A_3] + v (\epsilon^m), \quad m \geq 2 \quad (3.44)$$

La ecuación (3.44) demuestra que, en efecto, las componentes  $w^i$  coinciden con las componentes de  $w$  linealizadas, y referidas al triángulo  $A_i$ . Ahora bien,

– si las deformaciones transversales se han supuesto infinitesimales (esta hipótesis está implícita en la linealización de  $n^*$ ) será lícito admitir que el vector  $w$  es también de orden  $\epsilon$ , y en lo sucesivo lo definiremos como  $w = w^i A_i$ . (3.45)

## 4. COMPONENTES FÍSICAS E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

### 4.1. Componentes físicas de la deformación de una lámina

En la presente sección supondremos la superficie de referencia inicialmente referida a sus líneas de curvatura. Bajo esta condición las coordenadas de superficie  $\theta^\alpha$  serán principales en su configuración de referencia, y podrán entonces definirse unas componentes físicas de cualquier sistema definido sobre el espacio bidimensional S como sigue

$$T_{(\alpha \dots \beta \gamma \dots \delta)} = \left( \frac{A_{\alpha\alpha} \dots A_{\beta\beta}}{A_{\gamma\gamma} \dots A_{\delta\delta}} \right)^{1/2} T^{\alpha \dots \beta}_{\gamma \dots \delta} \quad (4.1)$$

Estas componentes físicas pueden interpretarse como las correspondientes a un sistema vectorial ortogonal unitario definido en cada punto de la superficie de referencia, en consecuencia se obtendrán en sus correspondientes unidades dimensionales, de ahí su utilidad.

Además adoptaremos, para describir todos los sistemas característicos de la geometría y cinemática de la lámina, la denominada *notación convencional* de Love. En esta notación las coordenadas curvilíneas  $\theta^i$ , ahora ortogonales, vendrán representadas por

$$\begin{Bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

y el tensor métrico será ahora

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde  $A$  y  $B$  son los módulos de los vectores naturales  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$ . Se les denomina usualmente parámetros de Lamé de la superficie. Los símbolos de Christoffel del sistema curvilineo adoptado se calcularán a partir de su definición general,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} A^{\lambda\sigma} [A_{\sigma\mu,\nu} + A_{\sigma\nu,\mu} - A_{\mu\nu,\sigma}]$$

El resultado se recoge en la siguiente tabla, en función de los parámetros de Lamé.

TABLA 1  
Símbolos de Christoffel de S, coordenadas principales

$\Gamma_{11}^1$	$\Gamma_{12}^1$	$\Gamma_{22}^1$	$\Gamma_{11}^2$	$\Gamma_{12}^2$	$\Gamma_{22}^2$
$\frac{1}{A} A_{,\alpha}$	$\frac{1}{A} A_{,\beta}$	$-\frac{B}{A^2} B_{,\alpha}$	$-\frac{A}{B^2} A_{,\beta}$	$\frac{1}{B} B_{,\alpha}$	$\frac{1}{B} B_{,\beta}$

El siguiente paso en orden a detallar las ecuaciones cinemáticas de la lámina consiste en expresar los sistemas lineales  $e_\mu^\lambda$ ,  $\varphi_\mu$  y  $\hat{x}_\mu^\lambda$ ,  $\hat{\psi}_\mu$  en función de las componentes físicas del campo de desplazamientos  $\mathbf{d}(\theta^\alpha)$  y del cambio de normal  $\mathbf{w}(\theta^\alpha)$ :

$$\begin{Bmatrix} d_{(1)} \\ d_{(2)} \\ d_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} w_{(1)} \\ w_{(2)} \\ w_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_\alpha \\ \omega_\beta \\ \omega_\eta \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

relacionadas con sus componentes contravariantes por (4.1) y (4.3). Emplearemos las ecuaciones (3.4) y (3.31) con tal intención, resultando la siguiente tabla resumen (recuérdese 3.45).

TABLA 2

índice covariante i	1	2
$e_i^1$	$\frac{u_{,\alpha}}{A} + \frac{A_{,\beta}}{AB} v + \frac{w}{R_\alpha}$	$\frac{u_{,\beta}}{A} - \frac{B_{,\alpha}}{A^2} v$
$e_i^2$	$\frac{v_{,\alpha}}{B} - \frac{A_{,\beta}}{B^2} u$	$\frac{v_{,\beta}}{B} + \frac{B_{,\alpha}}{AB} u + \frac{w}{R_\beta}$
$\varphi_i$	$A \left( \frac{u}{R_\alpha} - \frac{w_{,\alpha}}{A} \right)$	$B \left( \frac{v}{R_\beta} - \frac{w_{,\beta}}{B} \right)$
$\hat{x}_i^1$	$\frac{\omega_{\alpha,\alpha}}{A} + \frac{A_{,\beta}}{AB} \omega_\beta + \frac{\omega_\eta}{R_\alpha}$	$\frac{\omega_{\alpha,\beta}}{A} - \frac{B_{,\alpha}}{A^2} \omega_\beta$
$\hat{x}_i^2$	$\frac{\omega_{\beta,\alpha}}{B} - \frac{A_{,\beta}}{B^2} \omega_\alpha$	$\frac{\omega_{\beta,\beta}}{B} + \frac{B_{,\alpha}}{AB} \omega_\alpha + \frac{\omega_\eta}{R_\beta}$
$\hat{\psi}_i$	$A \left( \frac{\omega_\alpha}{R_\alpha} - \frac{\omega_{\eta,\alpha}}{A} \right)$	$B \left( \frac{\omega_\beta}{R_\beta} - \frac{\omega_{\eta,\beta}}{B} \right)$

En estas expresiones  $R_\alpha$ ,  $R_\beta$  son los radios de curvatura de la superficie de referencia en su configuración inicial según las direcciones principales  $\alpha, \beta$  (líneas de curvatura de S).

Recordemos que el radio de curvatura R de una superficie  $\Sigma$  según una dirección  $\lambda$  es

$$\frac{1}{R} = - \frac{\lambda^\alpha b_{\alpha\beta} \lambda^\beta}{\lambda^\alpha a_{\alpha\beta} \lambda^\beta}$$

Definiremos ahora, de forma análoga a lo realizado para las componentes físicas de los campos d y w, las componentes físicas del tensor de deformación de la lámina:

$$\begin{bmatrix} e_{(11)}^* & e_{(12)}^* & e_{(13)}^* \\ e_{(21)}^* & e_{(22)}^* & e_{(23)}^* \\ e_{(31)}^* & e_{(32)}^* & e_{(33)}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\alpha\alpha}^* & \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}^* & \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\eta}^* \\ \frac{1}{2} \gamma_{\beta\alpha}^* & e_{\beta\beta}^* & \frac{1}{2} \gamma_{\beta\eta}^* \\ \frac{1}{2} \gamma_{\eta\alpha}^* & \frac{1}{2} \gamma_{\eta\beta}^* & e_{\eta\eta}^* \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Este tensor, simétrico por definición, tendrá por forma explícita la expuesta en la ecuación (3.32) adecuadamente traducida a componentes físicas a partir de (4.1); el resultado es el siguiente

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}^* = & e_{\alpha\alpha} + \eta [K_{\alpha\alpha} + \hat{x}_{\alpha\alpha}] + \\ & + \eta^2 \left\{ \frac{K_{\alpha\alpha} + \hat{x}_{\alpha\alpha}}{R_\alpha} + \frac{1}{2} [(K_{\alpha\alpha} + \hat{x}_{\alpha\alpha})^2 + (K_{\beta\alpha} + \hat{x}_{\beta\alpha})^2 + \hat{\psi}_\alpha^2] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{\beta\beta}^* &= e_{\beta\beta} + \eta [K_{\beta\beta} + \hat{x}_{\beta\beta}] + \\
&+ \eta^2 \left\{ \frac{K_{\beta\beta} + \hat{x}_{\beta\beta}}{R_\beta} + \frac{1}{2} [(K_{\alpha\beta} + \hat{x}_{\alpha\beta})^2 + (K_{\beta\beta} + \hat{x}_{\beta\beta})^2 + \hat{\psi}_\beta^2] \right\} \\
e_{\eta\eta}^* &= \omega_\eta + \frac{1}{2} [\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + \omega_\eta^2] \\
\gamma_{\alpha\beta}^* &= \gamma_{\alpha\beta} + \eta [2 K_{\alpha\beta} + \hat{x}_{\alpha\beta} + \hat{x}_{\beta\alpha}] + \eta^2 \left\{ \frac{K_{\alpha\beta} + \hat{x}_{\alpha\beta}}{R_\alpha} + \frac{K_{\beta\alpha} + \hat{x}_{\beta\alpha}}{R_\beta} + \right. \\
&\left. + (K_{\alpha\alpha} + \hat{x}_{\alpha\alpha})(K_{\alpha\beta} + \hat{x}_{\alpha\beta}) + (K_{\beta\alpha} + \hat{x}_{\beta\alpha})(K_{\beta\beta} + \hat{x}_{\beta\beta}) + \hat{\psi}_\alpha \hat{\psi}_\beta \right\} \\
\gamma_{\alpha\eta}^* &= \omega_\alpha + \eta [\omega_{\eta,\alpha} + \omega_\alpha \hat{x}_{\alpha\alpha} + \omega_\beta \hat{x}_{\beta\alpha} - \omega_\eta \hat{\psi}_\alpha] \\
\gamma_{\beta\eta}^* &= \omega_\beta + \eta [\omega_{\eta,\beta} + \omega_\alpha \hat{x}_{\alpha\beta} + \omega_\beta \hat{x}_{\beta\beta} - \omega_\eta \hat{\psi}_\beta]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En estas seis ecuaciones aparecen las componentes físicas del tensor de deformación de la superficie de referencia y las del tensor de cambio de curvatura así como las de los sistemas  $\hat{x}_\mu^\lambda$  y  $\hat{\psi}_\mu$ , características de la deformación transversal de la lámina. Todos ellos pueden reducirse a componentes físicas del campo  $d$  y del cambio de normal  $w$ . Basta para ello emplear la Tabla 2 apoyada en las ecuaciones (3.33) y (3.42), si se adopta una teoría con cambios de curvatura linealizados. El resultado sería el siguiente,

(1) *Tensor de deformación de S*

$$\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha} &= e_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} [e_{\alpha\alpha}^2 + e_{\beta\alpha}^2 + \varphi_\alpha^2] \\
e_{\beta\beta} &= e_{\beta\beta} + \frac{1}{2} [e_{\alpha\beta}^2 + e_{\beta\beta}^2 + \varphi_\beta^2] \\
\gamma_{\alpha\beta} &= e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} + [e_{\alpha\alpha} e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} e_{\beta\beta} + \varphi_\alpha \varphi_\beta]
\end{aligned} \tag{4.7.1}$$

(2) *Tensor de cambios de curvatura de s*

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\alpha} &= x_{\alpha\alpha} \\
K_{\alpha\beta} &= x_{\alpha\beta} \\
K_{\beta\beta} &= x_{\beta\beta}
\end{aligned} \tag{4.7.2}$$

Los sistemas lineales que aparecen tanto en las ecuaciones de la lámina (4.6) como en las de la superficie de referencia (4.7), expresados en componentes físicas, se explicitan en función de las componentes de  $d$  y  $w$  en la siguiente tabla.

Tabla 3

índice i (componentes físicas)	$\alpha$	$\beta$
$e_{\alpha i}$	$\frac{u_{,\alpha}}{A} + \frac{A_{,\beta}}{AB} v + \frac{w}{R_\alpha}$	$\frac{u_{,\beta}}{B} - \frac{B_{,\alpha}}{AB} v$
$e_{\beta i}$	$\frac{v_{,\alpha}}{A} - \frac{A_{,\beta}}{AB} u$	$\frac{v_{,\beta}}{B} + \frac{B_{,\alpha}}{AB} u + \frac{w}{R_\beta}$
$\varphi_i$	$\frac{u}{R_\alpha} - \frac{w_{,\alpha}}{A}$	$\frac{v}{R_\beta} - \frac{w_{,\beta}}{B}$
$x_{\alpha i}$	$\frac{\varphi_{\alpha,\alpha}}{A} + \frac{A_{,\beta}}{AB} \varphi_\beta + \frac{e_{\alpha\alpha}}{R_\alpha}$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi_{\alpha,\beta}}{B} + \frac{\varphi_{\beta,\alpha}}{A} - \frac{A_{,\beta} \varphi_\alpha + B_{,\alpha} \varphi_\beta}{AB} + \right.$ $\left. + \frac{e_{\alpha\beta}}{R_\alpha} + \frac{e_{\beta\alpha}}{R_\beta} \right\}$
$x_{\beta i}$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi_{\alpha,\beta}}{B} + \frac{\varphi_{\beta,\alpha}}{A} - \frac{A_{,\beta} \varphi_\alpha + B_{,\alpha} \varphi_\beta}{AB} + \right.$ $\left. + \frac{e_{\alpha\beta}}{R_\alpha} + \frac{e_{\beta\alpha}}{R_\beta} \right\}$	$\frac{\varphi_{\beta,\beta}}{B} + \frac{B_{,\alpha}}{AB} \varphi_\alpha + \frac{e_{\beta\beta}}{R_\beta}$
$\hat{x}_{\alpha i}$	$\frac{\omega_{\alpha,\alpha}}{A} + \frac{A_{,\beta}}{AB} \omega_\beta + \frac{\omega_\eta}{R_\alpha}$	$\frac{\omega_{\alpha,\beta}}{B} - \frac{B_{,\alpha}}{AB} \omega_\beta$
$\hat{x}_{\beta i}$	$\frac{\omega_{\beta,\alpha}}{A} - \frac{A_{,\beta}}{AB} \omega_\alpha$	$\frac{\omega_{\beta,\beta}}{B} + \frac{B_{,\alpha}}{AB} \omega_\alpha + \frac{\omega_\eta}{R_\beta}$
$\hat{\psi}_i$	$\frac{\omega_\alpha}{R_\alpha} - \frac{\omega_{\eta,\alpha}}{A}$	$\frac{\omega_\beta}{R_\beta} - \frac{\omega_{\eta,\beta}}{B}$

Conviene anotar la no-simetría de los sistemas  $e_{\lambda\mu}, \hat{x}_{\lambda\mu}$  cuando el sistema  $x_{\lambda\mu}$  (tensor de cambio de curvatura de S linealizado) sí la posee. Si además se recuerdan las ecuaciones (3.4) y (3.31) se deduce de ellas que los sistemas  $e_{\lambda\mu}, \varphi_\mu$  y  $\hat{x}_{\lambda\mu}, \hat{\psi}_\mu$  se generan a partir de un mismo operador diferencial aplicado alternativamente a los vectores desplazamiento  $d$  y cambio de normal  $w$ . Esta propiedad queda en evidencia en la tabla anterior.

#### 4.2. Interpretación geométrica

A lo largo de los cálculos anteriores han ido definiéndose unos sistemas tensoriales fundamentales para la descripción de la deformación generalizada de la superficie de referencia, y por el tipo de formulación adoptada estos tensores ( $e_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ ) han resultado básicos para la definición de la cinemática laminar, junto con unos sistemas auxiliares cuya finalidad era aportar mayor concisión a nuestros desarrollos (por ejemplo  $\hat{x}_\mu^\lambda, \hat{\psi}_\mu \dots$ ).

Sin embargo estas definiciones auxiliares también responden a determinadas propiedades de la cinemática del medio, y es objeto de esta sección el realizar su interpretación geométrica. Comenzaremos por estudiar los cambios inducidos por el campo de desplazamientos sobre la propia superficie de referencia y posteriormente nos interesaremos por el cambio de normal.

#### 4.2.1. Extensión de la superficie de referencia

Sea  $\Gamma$  una curva trazada sobre  $S$ , y  $\gamma \subset \Sigma$  su curva homóloga al imponer el campo de desplazamientos  $\mathbf{d}$  ( $\theta^\alpha$ ). Las longitudes de un segmento elemental de la curva en ambas configuraciones de la superficie de referencia serán respectivamente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\theta^\alpha A_{\alpha\beta} d\theta^\beta \\ d\sigma^2 &= d\theta^\alpha a_{\alpha\beta} d\theta^\beta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si  $\epsilon$  es un escalar que define la extensión, o alargamiento unitario, del segmento elemental de  $\Gamma$  tendremos directamente

$$d\sigma = (1 + \epsilon) ds \quad (4.9)$$

Utilizando las dos ecuaciones anteriores y recordando la definición (3.6) del tensor de deformación de  $S$  podremos expresar la extensión de  $\Gamma$ , de vector unitario tangente  $\Lambda$ , en función del sistema  $\epsilon_{\alpha\beta}$ :

$$\Lambda = \Lambda^\alpha A_\alpha, \quad \Lambda^\alpha = \frac{d\theta^\alpha}{ds} \quad (4.10)$$

$$\epsilon_\Lambda = [1 + 2 \Lambda^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \Lambda^\beta]^{-1/2} - 1 \quad (4.11)$$

Sea  $\phi$  la forma cuadrática  $\Lambda^\alpha \cdot \epsilon_{\alpha\beta} \Lambda^\beta$ , la extensión de  $S$  en la dirección  $\Lambda$  podrá escribirse como serie de potencias de  $\phi$ . Basta desarrollar, para ello, la expresión (4.11) en serie de Taylor, resultando

$$\epsilon_\Lambda = \phi - \sum_{N=2}^{\infty} (-\phi)^N a_N \quad (4.12.a)$$

$$a_N = \prod_{M=1}^{N-1} (2M-1)/N! \quad (4.12.b)$$

En consecuencia las extensiones de la superficie de referencia de la lámina en las direcciones coordenadas podrán escribirse directamente como serie de potencias de las componentes  $\epsilon_{\alpha\alpha}$  de su tensor de deformación:

$$\epsilon_{\Lambda\alpha} = \frac{\epsilon_{\alpha\alpha}}{A_{\alpha\alpha}} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon_{\alpha\alpha}}{A_{\alpha\alpha}} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon_{\alpha\alpha}}{A_{\alpha\alpha}} \right]^3 \dots \quad (4.13)$$

puesto que en las direcciones anteriores se cumple

$$\Lambda = \Lambda_\alpha / A_{\alpha\alpha}$$

La ecuación (4.13) es extensiva a todo el espacio laminar; si nos interesamos ahora por la fracción lineal de estas elongaciones deberemos recurrir a la ecuación (3.33),

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}) + v(\epsilon^2)$$

luego

$$\epsilon_{A\alpha} = \frac{\epsilon_{\alpha\alpha}}{A_{\alpha\alpha}} + v(\epsilon^m) , \quad m \geq 2 \quad (4.14)$$

por lo tanto las *elongaciones linealizadas* de S en las direcciones coordenadas valdrán  $\frac{\epsilon_{\alpha\alpha}}{A_{\alpha\alpha}}$ , quedando graficada esta propiedad a continuación.

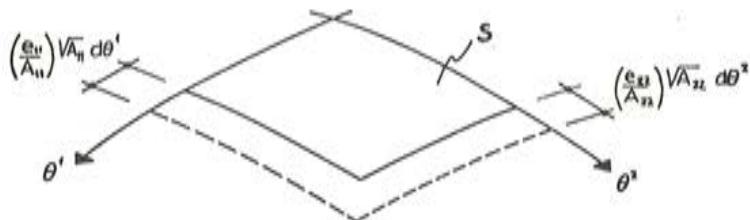


Fig. 4.1.

siendo  $\sqrt{A_{\alpha\alpha}} d\theta^\alpha$  el segmento elemental de línea coordenada  $\theta^\alpha$ .

#### 4.2.2. Distorsión angular de la superficie de referencia

Sean ahora  $\Lambda$ ,  $\Pi$  dos vectores unitarios tangentes a S en un punto R ( $\theta^\alpha$ ). El ángulo formado por ambos vectores en las configuraciones inicial y deformada podrá calcularse a partir de su producto escalar, obteniendo respectivamente

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \Lambda^\alpha A_{\alpha\beta} \Pi^\beta \\ \cos \omega &= \Lambda^\alpha a_{\alpha\beta} \Pi^\beta \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si ahora  $\Delta\Omega_{(\Lambda,\Pi)}$  representa la disminución angular sufrida por las direcciones  $\Lambda$ ,  $\Pi$ , trazadas sobre S, al imponer el campo de desplazamientos. Podremos, por diferencia entre las ecuaciones (4.15) y utilizando la fórmula de transformación de una resta de cosenos en producto de senos, escribir:

$$\sin \frac{1}{2} \Delta\Omega_{(\Lambda,\Pi)} \cdot \sin \left[ \Omega + \frac{1}{2} \Delta\Omega_{(\Lambda,\Pi)} \right] = \Lambda^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \Pi^\beta \quad (4.16)$$

ecuación que puede a su vez expresarse en forma de serie de potencias del argumento  $\frac{1}{2} \Delta\Omega_{(\Lambda,\Pi)}$  como sigue

$$\begin{aligned} \Lambda^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \Pi^\beta &= \frac{1}{2} \Delta\Omega_{(\Lambda,\Pi)} \cdot \sin \Omega + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \Delta\Omega_{(\Lambda,\Pi)} \right]^2 \cdot \cos \Omega - \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \Delta\Omega_{(\Lambda,\Pi)} \right]^3 \cdot \sin \Omega \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Particularizando nuevamente esta última ecuación a las direcciones coordenadas obtenemos la definición de la *disminución angular* registrada entre éstas, en función de la componente  $\epsilon_{12}$  del tensor de deformación de S:

$$2 \frac{e_{12}}{\sqrt{A_{11} A_{22}}} = \Delta\Omega_{(A_1, A_2)} \cdot \sqrt{\frac{A}{A_{11} A_{22}}} +$$

$$+ \frac{1}{2} [\Delta\Omega_{(A_1, A_2)}]^2 \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11} A_{22}}} - \frac{1}{12} [\Delta\Omega_{(A_1, A_2)}]^3 \sqrt{\frac{A}{A_{11} A_{22}}}$$

o bien, dividiendo por  $\sin \Omega = \sqrt{\frac{A}{A_{11} A_{22}}}$

$$2 \frac{e_{12}}{\sqrt{A}} = \Delta\Omega_{(A_1, A_2)} + \frac{A_{12}}{2\sqrt{A}} [\Delta\Omega_{(A_1, A_2)}]^2 - \frac{1}{12} [\Delta\Omega_{(A_1, A_2)}]^3 \dots \quad (4.18)$$

De esta última ecuación puede deducirse la fracción lineal de la disminución angular sufrida por las direcciones coordenadas. Para ello procederemos como anteriormente, apoyando nuestro cálculo en la ecuación (3.33):

$$\frac{1}{\sqrt{A}} (e_{12} + e_{21}) = \Delta\Omega_{(A_1, A_2)} + v(\epsilon^m) , \quad m \geq 2 \quad (4.19)$$

Nuevamente la *distorsión angular linealizada* de  $S$  referida a sus direcciones coordenadas será directamente  $\frac{1}{\sqrt{A}} (e_{12} + e_{21})$ , su representación gráfica se proporciona a continuación.

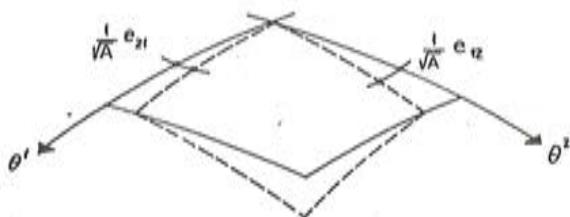


Fig. 4.2.

#### 4.2.3. Deflexiones de la superficie de referencia

En los dos apartados anteriores nos hemos interesado por la descripción de las variaciones geométricas de  $S$ , por ello tanto sus extensiones como su distorsión se han interpretado en función del tensor de deformación de la superficie de referencia. Sin embargo, esta descripción sólo es relativa a los cambios de geometría interna, prueba de ello es su relación directa con el cambio de métrica de  $S$ , y la deformación espacial de ésta debe estudiarse a partir de sus *deflexiones*, es decir las rotaciones registradas por sus líneas coordenadas dentro del plano normal a  $S$ . Para ello formaremos los siguientes productos vectoriales

$$\varphi_\alpha = A_\alpha \times \bar{a}_\alpha , \quad (4.20)$$

siendo  $\bar{a}_\alpha$  la componente de  $a_\alpha$  contenida dentro del plano normal a  $S$  definido por los vectores  $A_\alpha$  y  $A_3$ ; por (3.5) su expresión en el triángulo de referencia inicial será:

$$\bar{a}_\alpha = z_\alpha^\alpha A_\alpha - \varphi_\alpha A_3 , \quad (4.21)$$

luego los vectores  $\varphi_\alpha$  serán directamente

$$\varphi_\alpha = e_{\alpha\lambda_3} A^\lambda \varphi_\alpha \quad (4.22)$$

Sea  $\phi_\alpha$  la deflexión de la línea coordenada  $\theta^\alpha$ , es decir el giro de su vector tangente  $A_\alpha$  dentro del plano normal a S que la contiene. Utilizando directamente la definición (4.20) se puede escribir

$$|\varphi_\alpha| = |A_\alpha| \cdot |\bar{a}_\alpha| \cdot \sin \phi_\alpha$$

y recurriendo a su vez a (4.21)

$$|\varphi_\alpha| = A_{\alpha\alpha} \cdot \left[ 1 + 2 e_\alpha^\alpha + (e_\alpha^\alpha)^2 + \left( \frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}}} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \sin \phi_\alpha \quad (4.23)$$

Pero este módulo también puede evaluarse a partir de (4.22), y utilizando las propiedades del sistema  $e_{\alpha\beta_3}$  así como la definición de  $A^{\lambda\mu}$  expuestas en el anexo A, se llega fácilmente a:

$$|\varphi_\alpha| = |\varphi_\alpha| \cdot \sqrt{A_{\alpha\alpha}} \quad (4.24)$$

Comparando las ecuaciones (4.23) y (4.24) se obtiene una relación definitoria de la deflexión  $\phi_\alpha$ , esta es

$$\sin \phi_\alpha = \frac{|\varphi_\alpha|}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}}} [1 + 2 e_\alpha^\alpha + v(e^2)]^{-1/2}, \quad (4.25)$$

y las *deflexiones linealizadas* de las líneas coordenadas de S valdrán precisamente  $\frac{|\varphi_\alpha|}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}}}$ .

Su representación gráfica, apoyada en la ecuación vectorial (4.22) que nos permite orientar vectores  $\varphi_\alpha$ , se adjunta seguidamente.

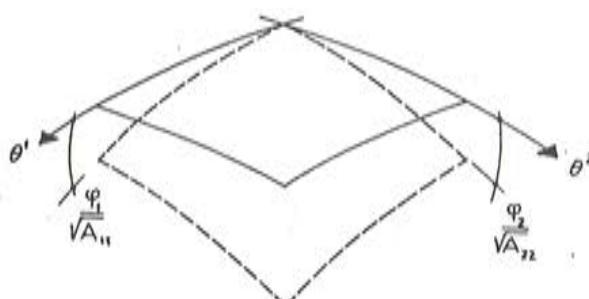


Fig. 4.3.

#### 4.2.4. Rotación de la normal a S

La hipótesis cinemática (1) formulada en la sección 3.3, relativa al tipo de deformación transversal de la lámina exige que los segmentos normales a S se mantengan rectilíneos en la configuración deformada, pero no coarta su giro respecto a la normal a  $\Sigma$ . Para evaluar esta rotación, directamente relacionada con los desplazamientos  $\gamma_{\alpha\eta}^*$  y  $\gamma_{\beta\eta}^*$  en ( $\eta = 0$ ), basta evaluar

$$\mathbf{a}_3 \cdot \bar{\mathbf{n}}_\alpha^* = \eta (1 + w_3) \quad (4.26)$$

donde  $\bar{n}_\alpha^*$  es la componente del vector  $n^*$  dentro del plano normal a  $\Sigma$  definido por los vectores  $a_3$  y  $a_\alpha$ . Por otra parte se cumplirá

$$a_3 \cdot \bar{n}_\alpha^* = |a_3| \cdot |\bar{n}_\alpha^*| \cos \Omega_\alpha \quad (4.27)$$

siendo  $\Omega_\alpha$  el ángulo formado por  $a_3$  y  $\bar{n}_\alpha^*$ , es decir la rotación de la normal a  $\Sigma$  dentro del plano de estudio (la normal a  $S$  ha girado, además, el correspondiente valor de la deflexión anteriormente obtenido). Desarrollando (4.27) e igualando el resultado a (4.26) obtendremos

$$\eta(1 + w_3) = \eta [w^\alpha w_\alpha + (1 + w_3)^2]^{1/2} \cos \Omega_\alpha ,$$

luego, elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad se llega a la siguiente ecuación de definición del ángulo buscado:

$$0 = w^\alpha w_\alpha - \sin^2 \Omega_\alpha [w^\alpha w_\alpha + (1 + w_3)^2] ,$$

luego

$$\sin \Omega_\alpha = \sqrt{\frac{w^\alpha w_\alpha}{w^\alpha w_\alpha + (1 + w_3)^2}} \quad (4.28)$$

Aplicando a esta última expresión el proceso de linealización empleado en los apartados anteriores se llega a la siguiente relación

$$\Omega_\alpha = \sqrt{w^\alpha w_\alpha} + v(\epsilon^m) , \quad m \geq 2 \quad (4.29)$$

La ecuación (4.28) describe exactamente la rotación  $\Omega_\alpha$  sufrida por la normal a  $\Sigma$ , y (4.29) proporciona su expresión linealizada cuya interpretación gráfica sería la recogida en la figura 4.4.

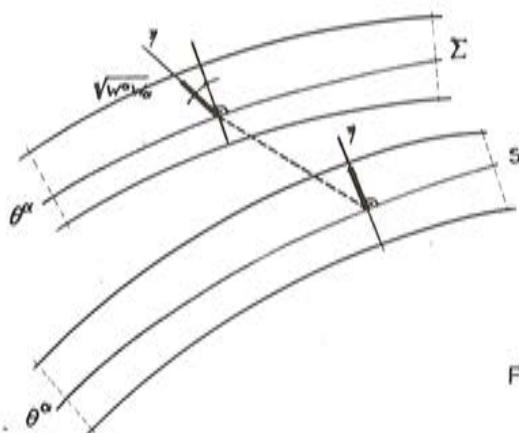


Fig. 4.4.

#### 4.2.5. Aplicación a componentes físicas

Las expresiones correspondientes a la utilización de la notación convencional en la interpretación geométrica de la cinemática de  $S$  se indican a continuación en forma de tabla. Debe recordarse que ahora las líneas coordenadas son direcciones principales de la superficie de referencia en su configuración inicial, quedando entonces ésta referida a sus líneas de curvatura.

Las relaciones existentes entre componentes físicas y tensoriales quedarían todas resumidas en (4.1).

Tabla 4

Dirección coordenada	$\alpha$	$\beta$
Extensiones linealizadas	$e_{\alpha\alpha}$	$e_{\beta\beta}$
Distorsión linealizada	$e_{\beta\alpha}$	$e_{\alpha\beta}$
Deflexiones linealizadas	$\varphi_\alpha$	$\varphi_\beta$
Rotación de la normal linealizada	$\omega_\alpha$	$\omega_\beta$

A la luz de las interpretaciones geométricas expuestas en la tabla 4 puede explicitarse cada uno de los elementos definitorios del tensor de deformación de la lámina, resumidos en las ecuaciones (4.6) y (4.7) en componentes físicas (análogas interpretaciones se aplicarían a su versión tensorial expuesta en el sistema 3.32).

Por ejemplo el elemento  $e_{\alpha\alpha}$  del tensor de deformación de la superficie de referencia podrá descomponerse en dos sumandos:

- (1) una fracción lineal, coincidente con la elongación linealizada de S en la dirección  $\alpha$  :  $e_{\alpha\alpha}$ , y
- (2) una fracción no-lineal igual a la semi-suma de los cuadrados de las elongaciones, distorsiones y deflexiones linealizadas de S según esta misma dirección:

$$\frac{1}{2} [e_{\alpha\alpha}^2 + e_{\beta\alpha}^2 + \varphi_\alpha^2]$$

Nótese que en la teoría de Sanders esta fracción no-lineal se reduciría a la mitad del cuadrado de la deflexión linealizada  $\varphi_\alpha$ .

## ANEXO A

### A.1. Geometría intrínseca de una superficie

Por lo expuesto en la introducción, resulta obvio que la superficie de referencia va a jugar un papel determinante en la descripción de la cinemática de la lámina. En esta sección se recogen los fundamentos de la geometría diferencial de una superficie, paso previo a un análisis cinemático de la deformación bidimensional de una lámina.

#### A.1.1. Vectores naturales

Consideremos una superficie  $\Sigma$ , perteneciente al espacio tridimensional Euclídeo, y representada por una ecuación paramétrica del tipo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^\alpha),$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición de los puntos de la superficie. Admitiremos en lo sucesivo que los índices griegos toman los valores 1 ó 2, mientras que los índices latinos pueden valer 1, 2 ó 3. Los vectores naturales de  $\Sigma$  se definen como

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} \quad (\text{A.1})$$

El vector  $a_1$  será tangente a la curva  $\theta^2 = \text{Cste}$ , y  $a_2$  será tangente a la curva  $\theta^1 = \text{Cste}$ . Se deduce que estarán en el plano tangente a la superficie  $\Sigma$  en el punto  $\{\theta^\alpha\}$  considerado. Siempre que se cumpla

$$a_1 \times a_2 \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

diremos que estamos en un punto ordinario. En caso contrario hablaremos de un punto singular.

#### A.1.2. Transformación de coordenadas sobre una superficie

Sean  $\bar{\theta}^\beta$  las nuevas coordenadas, se definirán a través de la ecuación

$$\theta^\alpha = \theta^\alpha(\bar{\theta}^\beta) \quad (\text{A.3})$$

Supondremos además que la transformación definida por (A.3) es regular, es decir

$$\left| \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^\beta} \right| \neq 0 \quad (\text{A.4})$$

de tal forma que exista, localmente, la transformación inversa

$$\bar{\theta}^\alpha = \bar{\theta}^\alpha(\theta^\beta) \quad (\text{A.5})$$

Los elementos diferenciales serán

$$d\theta^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^\beta} d\bar{\theta}^\beta, \quad d\bar{\theta}^\alpha = \frac{\partial \bar{\theta}^\alpha}{\partial \theta^\beta} d\theta^\beta \quad (\text{A.6})$$

Adoptaremos también el criterio de indicar todas las cantidades referidas al sistema de coordenadas  $\bar{\theta}^\alpha$  mediante una barra sobre el correspondiente símbolo, por ejemplo  $\bar{a}_\alpha$  para los vectores naturales.

#### A.1.3. Tensores de superficie

Las ecuaciones (A.6) rigen la transformación de elementos diferenciales sobre la superficie, y pueden sugerir la definición de tensores en un dominio bidimensional (como la superficie  $\Sigma$ ) mediante la transformación

$$\begin{aligned} T_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\gamma_1 \dots \gamma_s} &= \frac{\partial \bar{\theta}^{\beta_1}}{\partial \theta^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{\beta_r}}{\partial \theta^{\alpha_r}} \frac{\partial \theta^{\gamma_1}}{\partial \bar{\theta}^{\delta_1}} \dots \frac{\partial \theta^{\gamma_s}}{\partial \bar{\theta}^{\delta_s}} \bar{T}_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\delta_1 \dots \delta_s} \\ \bar{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\gamma_1 \dots \gamma_s} &= \frac{\partial \theta^{\beta_1}}{\partial \bar{\theta}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \theta^{\beta_r}}{\partial \bar{\theta}^{\alpha_r}} \frac{\partial \bar{\theta}^{\gamma_1}}{\partial \theta^{\delta_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{\gamma_s}}{\partial \theta^{\delta_s}} T_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\delta_1 \dots \delta_s} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

quedando implícita toda la terminología usual del análisis tensorial.

#### A.1.4. Curvas sobre una superficie

Una curva sobre una superficie (Fig. A.1) puede definirse, a través de su representación paramétrica, en la forma

$$\theta^\alpha = \theta^\alpha(t) \quad (\text{A.8})$$

La dirección tangente a esta curva viene definida por

$$\frac{dr}{dt} = r_{,\alpha} \frac{d\theta^\alpha}{dt} = \frac{d\theta^\alpha}{dt} a_\alpha \quad (\text{A.9})$$

La magnitud de esta derivada dependerá obviamente de la parametrización adoptada.

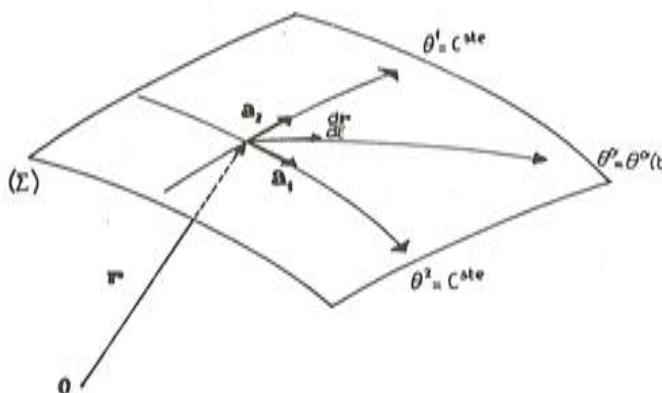


Fig. A.1.

Evidentemente, la tangente a la curva en el punto  $r$  (ordinario) está contenida en el plano tangente a  $\Sigma$  en  $r$ , definido por los vectores  $a_1$  y  $a_2$ . Podemos en consecuencia hablar de vectores tangentes a la superficie, o vectores de superficie. Cualquier vector  $v$  tangente a  $\Sigma$  podrá expresarse como combinación lineal de los vectores naturales  $a_\alpha$ , que son linealmente independientes en virtud de (A.2):

$$v = v^\alpha a_\alpha \quad (\text{A.10})$$

en esta ecuación  $v^\alpha$  serán las componentes contravariantes del vector  $v$ .

#### A.1.5. La primera forma fundamental

El elemento de arco de una curva trazada sobre la superficie  $\Sigma$  puede calcularse, en el espacio tridimensional Euclídeo, por

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dr \cdot dr = (d\theta^\alpha r_{,\alpha}) \cdot (r_{,\beta} d\theta^\beta) \\ &= d\theta^\alpha a_\alpha \cdot a_\beta d\theta^\beta \\ &= d\theta^\alpha a_{\alpha\beta} d\theta^\beta \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

con

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta \quad (\text{A.12})$$

La forma cuadrática  $d\theta^\alpha a_{\alpha\beta} d\theta^\beta$  se denomina *primera forma fundamental* de la superficie, los términos  $a_{\alpha\beta}$  son por definición las componentes covariantes del tensor métrico del dominio bidimensional  $\Sigma$ .

Por ser conmutativo el producto escalar de vectores, el tensor métrico resulta ser simétrico. Sea  $a$  el determinante de la matriz  $[a_{\alpha\beta}]$ ,

$$a = |a_{\alpha\beta}| \quad (\text{A.13})$$

las condiciones (A.2) impuestas en los puntos ordinarios implican

$$a \neq 0 \quad (\text{A.14})$$

luego la matriz  $[a_{\alpha\beta}]$  tendrá una inversa  $[a^{\alpha\beta}]$ , con

$$a^{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{A}^{\alpha\beta}}{a} \quad (\text{A.15})$$

donde  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}$  es el cofactor de  $a_{\alpha\beta}$  en el desarrollo del determinante (A.13). Definiremos los vectores naturales (contravariantes)  $a^\alpha$ , conjugados de los vectores naturales (covariantes)  $a^\beta$ , mediante

$$a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta \quad (\text{A.16})$$

De esta ecuación se deduce directamente

$$a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta \quad (\text{A.17})$$

$a^{\alpha\beta}$  será el tensor conjugado de  $a_{\alpha\beta}$ , también simétrico. Como puede comprobarse sobre las ecuaciones (A.12) y (A.17), tendremos

$$a^\alpha \cdot a_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{A.18.1})$$

$$a^{\alpha\lambda} a_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{A.18.2})$$

Donde  $\delta_\beta^\alpha$  es el tensor delta, de Kronecker. El tensor métrico puede en consecuencia servir para “subir o bajar” índices, y se utiliza para calcular la longitud (norma)  $|v|$  de cualquier vector  $v$  de la superficie:

$$v = v^\alpha a_\alpha = v_\alpha a^\alpha \quad (\text{A.19})$$

$$|v| = [(v^\alpha a_\alpha) \cdot (v^\beta a_\beta)]^{1/2} = (v^\alpha a_{\alpha\beta} v^\beta)^{1/2} = (v_\alpha a^{\alpha\beta} v_\beta)^{1/2}$$

El coseno del ángulo formado por dos vectores de la superficie  $u, v$  se obtiene a partir del producto escalar (en el espacio tridimensional Euclídeo)

$$\cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{u^\alpha a_{\alpha\beta} v^\beta}{|u| \cdot |v|} \quad (\text{A.20})$$

El elemento diferencial de área sobre la superficie puede a su vez obtenerse del producto vectorial de vectores infinitesimales sobre  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ :

$$d\Sigma = |(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)| d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 \quad (\text{A.21})$$

La primera forma fundamental contiene información sobre la métrica interna de la superficie, pero no (en general) sobre la curvatura (luego la forma) de  $\Sigma$  en el espacio tridimensional en el que está contenida.

#### A.1.6. Derivación covariante. El tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

La existencia de un tensor métrico nos permite definir (en el dominio bidimensional) una diferenciación covariante:

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha|\gamma} &= T_{\alpha,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda T_\lambda \\ T_{\beta|\gamma}^\alpha &= T_{\beta,\gamma}^\alpha + \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha T_\lambda^\lambda \\ T_{\alpha\beta|\gamma}^\lambda &= T_{\alpha\beta,\gamma}^\lambda + \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha T_\beta^\lambda - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda T_\alpha^\alpha \\ T_{\alpha\beta|\gamma} &= T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda T_{\alpha\lambda} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda T_{\lambda\beta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.22})$$

con los símbolos de Christoffel de  $\Sigma$ :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= a_{\alpha,\beta} \cdot a^\gamma = -a_\alpha \cdot a_{\beta,\gamma} \\ \Gamma_{\alpha\beta\nu}^\gamma &= a_{\gamma,\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}(a_{\alpha\nu,\beta} + a_{\beta\nu,\alpha} - a_{\alpha\beta,\nu}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.23})$$

En (A.22) la diferenciación covariante se indica mediante una simple raya vertical (1); aplicando (A.22.4,5) a los tensores  $a^{\alpha\beta}$  y  $a_{\alpha\beta}$  se deduce inmediatamente

$$a^{\alpha\beta}_{|\gamma} = a_{\alpha\beta|\gamma} = 0 \quad (\text{A.24})$$

resultado conocido que nos indica que la derivada covariante del tensor métrico es nula (Teorema de Ricci). El cálculo de la derivada covariante de segundo orden conduce a

$$\begin{aligned} T_{\alpha|\beta\gamma} &= (T_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda T_\lambda)_{,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu (T_{\mu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\lambda T_\lambda) \\ &\quad - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu (T_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda T_\lambda) \end{aligned}$$

Permutando los índices  $\beta, \gamma$  y restando ambas expresiones se obtiene

$$T_{\alpha|\beta\gamma} - T_{\alpha|\gamma\beta} = (\Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda) T_\lambda = R_{\alpha\beta\gamma}^\lambda T_\lambda \quad (\text{A.25})$$

El sistema  $R_{\alpha\beta\gamma}^\lambda$  definido por la ecuación anterior se denomina tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, deduciéndose que un dominio bidimensional la derivación covariante resulta no ser commutativa. El tensor covariante de cuarto orden asociado al tensor de curvatura de Riemann-Christoffel se definirá de la forma siguiente

$$R_{\alpha\beta\gamma\nu} = a_{\alpha\lambda} R_{\beta\gamma\nu}^\lambda \quad (\text{A.26})$$

Se demuestra fácilmente a partir de (A.25) y (A.26) que las componentes de  $R_{\alpha\beta\gamma\nu}$  son bien nulas, bien expresables en términos de  $R_{1212}$  únicamente.

## A.2. Geometría externa de una superficie

### A.2.1. El sistema $\epsilon$ y la normal a la superficie

Definiremos en este apartado el sistema  $\epsilon$ , también conocido como *tensor de permutación*, a partir del producto vectorial

$$\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta = \epsilon_{3\alpha\beta} \mathbf{a}^3 , \quad (\text{A.27})$$

siendo  $\mathbf{a}^3 \equiv \mathbf{a}_3$  el vector *unitario normal* a  $\Sigma$ , definido por

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\sqrt{a}} \quad (\text{A.28})$$

puesto que, según se vió en (A.21) el módulo de  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  coincide con la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico. De este modo ha quedado ampliado el sistema  $\mathbf{a}_\alpha$  de tal forma que la terna de vectores  $\mathbf{a}_i$  forme en cada punto de  $\Sigma$  un triángulo, o base local. Por la definición del vector normal dada en (A.28) tendremos

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \quad (\text{A.29})$$

Derivando parcialmente respecto de  $\theta^\alpha$  se obtiene

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = 0 \quad (\text{A.30})$$

lo que demuestra que el vector  $\mathbf{a}_{3,\alpha}$  es ortogonal a la dirección normal a la superficie, luego paralelo a su plano tangente. Por otra parte, y utilizando la definición de  $\mathbf{a}_3$ , también se cumplirá

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0 \quad (\text{A.31})$$

Volviendo a las propiedades del sistema  $\epsilon$ , tendremos las siguientes relaciones directamente basadas en (A.27):

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \epsilon_{312} \mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 = \epsilon_{213} \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \epsilon_{123} \mathbf{a}^1 \end{array} \right\}$$

y en virtud de (A.28) y de las conocidas propiedades del producto vectorial resultan las siguientes definiciones características del tensor de permutación:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{123} = \sqrt{a} = -\epsilon_{213} \dots \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0 = \epsilon_{\alpha\gamma\beta} \dots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (\text{A.32})$$

### A.2.2. La segunda forma fundamental

Para estudiar la curvatura de una superficie es conveniente formar el producto escalar  $-dr \cdot da_3$  anotando que ambos vectores diferenciales están contenidos en el plano tangente a  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} -dr \cdot da_3 &= -(\mathbf{a}_\alpha d\theta^\alpha) \cdot (\mathbf{a}_{3,\beta} d\theta^\beta) \\ &= -d\theta^\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} d\theta^\beta \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Derivando parcialmente (A.31) respecto de  $\theta^\beta$  tendremos

$$\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = 0 \quad (\text{A.34})$$

luego (A.33) podrá reescribirse como sigue:

$$-dr \cdot da_3 = d\theta^\alpha \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} d\theta^\beta = d\theta^\alpha b_{\alpha\beta} d\theta^\beta \quad (\text{A.35})$$

La forma cuadrática  $d\theta^\alpha b_{\alpha\beta} d\theta^\beta$  se define como la segunda forma fundamental de la superficie. El sistema  $b_{\alpha\beta}$  se comportará como los tensores de superficie en el espacio tangente a  $\Sigma$ .

Sea  $b_\beta^\alpha$  el tensor mixto definido sobre el sistema anterior, se cumplirá

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta}$$

Se define como *curvatura media* de  $\Sigma$  a la mitad del primer invariante de este sistema:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^2 b_\sigma^\sigma, \quad (\text{A.36})$$

y como curvatura *total*, o *curvatura de Gauss*, a su determinante

$$K = |b_\beta^\alpha| = \frac{|b_{\alpha\beta}|}{a} \quad (\text{A.37})$$

$H$  y  $K$  son invariantes de  $\Sigma$ ; a través de (A.26) y (A.37) quedan definidos en función de los elementos característicos de la segunda forma fundamental.

### A.2.3. La fórmula de Gauss-Weingarten

Hemos construido en cada punto ordinario de la superficie una terna de vectores base,  $a_i$ . Vamos a definir ahora las derivadas parciales de estos vectores respecto de la coordenada de superficie  $\theta^\alpha$  como combinación lineal de los propios vectores base. Por (A.30) sabemos que los vectores  $a_{3,\alpha}$  están contenidos en el plano tangente a  $\Sigma$ , luego existirán unos coeficientes  $k_\alpha^\lambda$  tales que

$$a_{3,\alpha} = k_\alpha^\lambda a_\lambda \quad (\text{A.38})$$

Para determinar estos coeficientes multiplicaremos ambos miembros de esta ecuación por  $a_\beta$ , y aplicaremos seguidamente (A.34). El resultado es el siguiente:

$$a_\beta \cdot a_{3,\alpha} = -a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} = k_\alpha^\lambda a_\lambda \beta$$

luego

$$-b_{\alpha\beta} = k_{\alpha}^{\lambda} a_{\lambda\beta}$$

Llevando a (A.38) se obtiene la conocida *fórmula de Weingarten*:

$$a_{3,\alpha} = -b_{\alpha}^{\lambda} a_{\lambda} \quad (\text{A.39})$$

En cuanto a las derivadas de los vectores naturales de  $\Sigma$ , podemos escribir

$$a_{\alpha,\beta} = s_{\alpha\beta}^{\gamma} a_{\gamma} + s_{\alpha\beta} a_3 \quad (\text{A.30})$$

Multiplicando ambos miembros de (A.40) por  $a_{\lambda}$  y  $a_3$  separadamente y utilizando los resultados expuestos en (A.23) y (A.35) se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= s_{\alpha\beta}^{\gamma} \\ b_{\alpha\beta} &= s_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

La fórmula de Gauss se expresa a continuación como

$$a_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} a_{\gamma} + b_{\alpha\beta} a_3 \quad (\text{A.41})$$

#### A.2.4. Las ecuaciones de Codazzi-Gauss

La ecuación (A.41) explicita la simetría del sistema  $a_{\alpha\beta}$ , o  $b_{\alpha\beta}$ , según se deseé. Esta propiedad se hereda directamente de la definición de los vectores naturales de  $\Sigma$  si se admite que el vector posición cumple el teorema de Schwartz. Imponiendo esta condición al sistema  $a_{\lambda}$ , lo cual sería equivalente a exigir que  $r$  fuera derivable hasta el tercer orden con continuidad en todas estas derivadas, tendremos

$$a_{\lambda,\alpha\beta} - a_{\lambda,\beta\alpha} = 0 \quad (\text{A.42})$$

Partiendo de (A.41) tendremos, tras aplicar las fórmulas de Gauss y Weingarten sucesivamente,

$$a_{\lambda,\alpha\beta} = \{\Gamma_{\lambda\alpha,\beta}^{\nu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^{\nu} - b_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\nu}\} a_{\nu} + \{\Gamma_{\lambda\alpha}^{\gamma} b_{\gamma\beta} + b_{\lambda\alpha,\beta}\} a_3 \quad (\text{A.43})$$

y llevando a (A.42) resulta

$$\begin{aligned}a_{\lambda,\alpha\beta} - a_{\lambda,\beta\alpha} &= \{R_{\lambda\beta\alpha}^{\nu} - (b_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\nu} - b_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\nu})\} a_{\nu} \\ &\quad + (b_{\lambda\alpha|\beta} - b_{\lambda\beta|\alpha}) a_3 = 0\end{aligned}$$

En consecuencia en cada punto ordinario de  $\Sigma$  deberán anularse las tres componentes de esta ecuación separadamente. Ello proporciona las ecuaciones de Codazzi-Gauss de la superficie:

$$\left. \begin{aligned}b_{\lambda\alpha|\beta} - b_{\lambda\beta|\alpha} &= 0 \\ R_{\alpha\beta\gamma\nu} &= b_{\alpha\gamma} b_{\beta\nu} - b_{\alpha\nu} b_{\beta\gamma}\end{aligned} \right\} \quad (\text{A.44})$$

Tan solo dos ecuaciones de Codazzi y una de Gauss son independientes, éstas son

$$\left. \begin{array}{l} b_{11}|_2 - b_{12}|_1 = 0 \\ b_{22}|_1 - b_{12}|_2 = 0 \\ R_{12|2} = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 \end{array} \right\} \quad (\text{A.45})$$

Además, la ecuación de Gauss nos permite definir el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel en función de la curvatura total de  $\Sigma$ . En efecto, recordando (A.37) tendremos directamente

$$R_{12|2} = K a \quad (\text{A.46})$$

Las ecuaciones de Codazzi-Gauss constituyen condiciones necesarias y suficientes para que, dado un conjunto de funciones  $b_{\alpha\beta}$ , exista una superficie cuya segunda forma fundamental sea precisamente la definida por este sistema.

#### A.2.5. La tercera forma fundamental

En algunas ocasiones puede ser útil recurrir a una tercera forma fundamental de  $\Sigma$ , definida ésta por

$$da_3 \cdot da_3 = (b_\alpha^\lambda a_\lambda d\theta^\alpha) \cdot (b_\beta^\mu a_\mu d\theta^\beta) \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} &= d\theta^\alpha b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} d\theta^\beta \\ &= d\theta^\alpha c_{\alpha\beta} d\theta^\beta \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

La ecuación (A.48) define completamente la tercera forma fundamental de la superficie. Sus coeficientes se calculan a partir del sistema  $b_\mu^\lambda$ ; puede expresarse como sigue

$$c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} = 2H b_{\alpha\beta} - Ka_{\alpha\beta} \quad (\text{A.49})$$

#### A.3. Curvas sobre una superficie

Sea  $\gamma$  una curva trazada sobre una superficie  $\Sigma$ , y parametrizada en  $\sigma$  (longitud de arco). El vector unitario tangente a esta curva es, según (A.9)

$$\lambda = \frac{dr}{d\sigma} = \lambda^\alpha a_\alpha \quad (\text{A.50})$$

con

$$\lambda^\alpha = \frac{d\theta^\alpha}{d\sigma} \quad (\text{A.51})$$

La curva  $\gamma$  tendrá una curvatura  $\chi(\sigma)$  definida por la ecuación de Frénét

$$\chi \mu = \frac{d\lambda}{d\sigma} = K \quad (\text{A.52})$$

siendo  $\mu$  el vector unitario conocido como normal principal de la curva, y  $K$  el vector de curvatura de  $\gamma$ . Utilizando (A.50) y la fórmula de Gauss, este último puede expresarse en el triángulo local como sigue

$$K = \frac{d\lambda^\alpha}{d\sigma} a_\alpha + \lambda^\alpha a_{\alpha,\beta} \frac{d\theta^\beta}{d\sigma} = \left( \frac{d\lambda^\gamma}{d\sigma} + \lambda^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \lambda^\beta \right) a_\gamma + \lambda^\alpha b_{\alpha\beta} \lambda^\beta a_3 \quad (\text{A.53})$$

La curvatura normal de la superficie, en el punto  $r$  por el cual pasa la curva  $\gamma$ , se define por

$$\chi_{(n)} = K \cdot a_3 = \lambda^\alpha b_{\alpha\beta} \lambda^\beta \quad (\text{A.54})$$

Esta curvatura depende, obviamente, de la dirección de la tangente a la curva  $\gamma$  en  $r$ , pero permanece invariante para todas las curvas que tienen la misma tangente en el punto considerado. (Teorema de Meusnier).

Como  $\lambda$  es un vector unitario tendremos

$$|\lambda|^2 = \lambda^\alpha a_{\alpha\beta} \lambda^\beta = 1 \quad (\text{A.55})$$

Multiplicando por  $\lambda^\alpha a_{\alpha\beta} \lambda^\beta$  (equivalente a la unidad) el primer miembro de (A.54) se obtiene, restando ambos miembros de la igualdad

$$\lambda^\alpha (b_{\alpha\beta} - \chi_{(n)} a_{\alpha\beta}) \lambda^\beta = 0 \quad (\text{A.56})$$

Esta ecuación en  $\lambda^\alpha$  suministra las direcciones según las cuales la curvatura normal tiene un valor determinado  $\chi_{(n)}$ . Por otro lado  $\chi_{(n)}$  varía continuamente en la dirección de la tangente, en general, y se plantea la cuestión de determinar los valores extremos adoptados en cada punto por la curvatura normal. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene la ecuación deseada:

$$(b_{\alpha\beta} - \phi a_{\alpha\beta}) \lambda^\beta = 0 \quad (\text{A.57})$$

Para que este sistema homogéneo, lineal en  $\lambda^\beta$  tenga soluciones no-triviales,  $\chi_{(n)}$  deberá ser solución de la ecuación

$$|b_{\alpha\beta} - \phi a_{\alpha\beta}| = 0 \quad (\text{A.58})$$

Desarrollando esta última expresión se obtiene

$$|a_{\alpha\beta}| \phi^2 - a^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} |a_{\alpha\beta}| \phi + |b_{\alpha\beta}| = 0 \quad (\text{A.59})$$

Utilizando ahora la definición de los invariantes  $K$  y  $H$  dada en las ecuaciones (A.36) y (A.37), esta ecuación se reduce a

$$\phi^2 - 2H\phi + K = 0 \quad (\text{A.60})$$

Las raíces de (A.60) deberán satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} \chi_{(1)} + \chi_{(2)} &= 2H \\ \chi_{(1)} \cdot \chi_{(2)} &= K \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

$\chi_{(1)}$  y  $\chi_{(2)}$  se denominan *curvaturas principales* de la superficie en el punto considerado, y las direcciones asociadas *direcciones principales*. Escribamos nuevamente la ecuación (A.57) para cada una de las dos direcciones principales,

$$\begin{aligned}(b_{\alpha\beta} - x_{(1)} a_{\alpha\beta}) \lambda_{(1)}^\beta &= 0 \\ (b_{\alpha\beta} - x_{(2)} a_{\alpha\beta}) \lambda_{(2)}^\beta &= 0\end{aligned}\tag{A.62}$$

Eliminando  $b_{\alpha\beta}$  entre ambas se deduce

$$[x_{(1)} - x_{(2)}] \lambda_{(1)}^\alpha a_{\alpha\beta} \lambda_{(2)}^\beta = 0\tag{A.63}$$

y si  $r$  no es un punto umbilical (en tal caso todas las direcciones son principales se tendrá  $x_{(1)} \neq x_{(2)}$ , luego

$$\lambda_{(1)}^\alpha a_{\alpha\beta} \lambda_{(2)}^\beta = 0\tag{A.64}$$

En otros términos, las direcciones principales son ortogonales. Definiremos a continuación los *radios principales de curvatura* como

$$R_1 \equiv -\frac{1}{x_{(1)}}\tag{A.65}$$

$$R_2 \equiv -\frac{1}{x_{(2)}}$$

El signo negativo se ha introducido para adecuar la definición de radio de curvatura al siguiente criterio de signos:

- los radios de curvatura se tomarán como positivos cuando el vector unitario normal se aleje del centro de curvatura. Las curvas tangentes en todo punto a las direcciones principales de la superficie se denominarán *líneas de curvatura*.

Si  $x_{(1)} \neq x_{(2)}$ , las líneas de curvatura se obtendrán de (A.57) sustituyendo  $\lambda^\beta$  por  $d\theta^\beta$  y eliminando  $x_{(n)}$  entre las dos ecuaciones del sistema

$$\begin{bmatrix} b_{1\beta} d\theta^\beta & a_{1\beta} d\theta^\beta \\ b_{2\beta} d\theta^\beta & a_{2\beta} d\theta^\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -x_{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{A.66}$$

Soluciones no triviales de esta ecuación matricial exigen que se anule su determinante. Si se desarrollan los cálculos correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned}(b_{11} a_{12} - b_{12} a_{11}) d\theta^1 d\theta^1 + (b_{12} a_{22} - b_{22} a_{12}) d\theta^2 d\theta^2 + \\ + (b_{11} a_{22} - b_{22} a_{11}) d\theta^1 d\theta^2 = 0\end{aligned}\tag{A.67}$$

Las líneas de curvatura, en virtud de (A.64), serán ortogonales, luego sobre ellas se cumplirá

$$a_{12} = 0\tag{A.68}$$

Llevando este resultado a (A.67) resulta

$$b_{12} (a_{22} d\theta^2 d\theta^2 - a_{11} d\theta^1 d\theta^1) + (b_{11} a_{22} - b_{22} a_{11}) d\theta^1 d\theta^2 = 0$$

Esta última ecuación diferencial deberá cumplirse indiferentemente sobre las líneas  $\theta^1 = C^{ste}$  y  $\theta^2 = C^{ste}$ , es decir para  $d\theta^1 = 0$  y  $d\theta^2 = 0$  por separado. Esta observación exige que sobre las líneas de curvatura se verifique también

$$b_{12} = 0 \quad (\text{A.69})$$

Las condiciones (A.68) y (A.69) son necesarias y suficientes para que un sistema curvilíneo sea de líneas de curvatura. Estas condiciones resultan satisfechas por todos los sistemas ortogonales que se tracen sobre el plano o la esfera.

## ANEXO B

### B.1. El tensor de curvatura de $\Sigma$

En el apartado 3.4.1 se anunció la ampliación del sistema  $x_{\alpha\beta}$  a términos no-lineales de segundo orden, con la intención de poder construir una teoría cinemática más completa que la basada en la linealización de los cambios de curvatura de  $S$ .

Para obtener las distintas fracciones no-lineales del sistema  $K_{\alpha\beta}$  procederemos de la siguiente forma: en primer lugar obtendremos una nueva expresión del tensor  $b_{\alpha\beta}$  sobre la que puedan identificarse cómodamente los sumandos de distinto orden que lo configuran (en la ecuación 3.13 este sistema se dió en forma compacta, quedando implícita su estructura no-lineal). En la sección siguiente se particularizará este resultado a  $m = 2$ , siendo  $m$  el orden máximo considerado dentro del desarrollo de  $b_{\alpha\beta}$  en serie de potencias de  $\epsilon$ , generado a partir del cambio

$$d = e \bar{d} \quad (3.34)$$

Partiremos pues de la ecuación de definición del tensor  $b_{\alpha\beta}$

$$b_{\alpha\beta} = a_3 \cdot a_{\alpha,\beta}$$

recordando (3.8) y (3.10) tendremos

$$a_{\alpha,\beta} = \{\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + [e_\alpha^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda + e_{\alpha,\beta}^\lambda + \varphi_\alpha B_\beta^\lambda]\} A_\lambda + \{B_{\alpha\beta} + [e_\alpha^\nu B_{\nu\beta} - \varphi_{\alpha,\beta}]\} A_3 \quad (\text{B.1})$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{A}{a}} \{\varphi_\lambda + [\varphi_\lambda e_\sigma^\sigma - \varphi_\sigma e_\lambda^\sigma]\} A^\lambda + z \sqrt{\frac{A}{a}} A^3 \quad (\text{B.2})$$

Estudiemos en primer lugar el factor  $\sqrt{\frac{A}{a}}$ . El determinante del tensor métrico en la configuración deformada  $\Sigma$  puede expresarse en función de  $A$  y de los sistemas  $\varphi_\sigma$ ,  $e_\sigma^\nu$ . Para ello basta partir de la ecuación

$$a_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + 2 \epsilon_{\alpha\beta} \quad (\text{B.3})$$

Desarrollando el determinante de la matriz  $[a_{\alpha\beta}]$  obtendremos:

$$a = |a_{\alpha\beta}| = A + 2 A \cdot A^{\sigma\nu} \epsilon_{\sigma\nu} + 4 |\epsilon_{\sigma\nu}|$$

por lo que

$$\sqrt{\frac{A}{a}} = \left[ 1 + 2 A^{\sigma\nu} \epsilon_{\sigma\nu} + 4 \frac{|\epsilon_{\sigma\nu}|}{A} \right]^{-1/2} \quad (\text{B.4.1})$$

Esta última expresión puede desarrollarse en serie de potencias de  $A^{\sigma\nu} \epsilon_{\sigma\nu} + 2 \frac{|\epsilon_{\sigma\nu}|}{A}$ , resultando:

$$\sqrt{\frac{A}{a}} = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \prod_{M=1}^N (2M-1) \right] \frac{(-1)^N}{N!} \left( A^{\sigma\nu} \epsilon_{\sigma\nu} + 2 \frac{|\epsilon_{\sigma\nu}|}{A} \right)^N \quad (\text{B.4.2})$$

conviene ahora agrupar, dentro de esta última expresión, los distintos sumandos de esta serie según su orden respectivo. Para ello comenzaremos por definir la estructura de los escalares  $A^{\sigma\nu} \epsilon_{\sigma\nu}$  y  $|\epsilon_{\sigma\nu}|$ . Recordando la ecuación (3.33) tendremos

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon}{2} (\bar{e}_{\alpha\beta} + \bar{e}_{\beta\alpha}) + \frac{\epsilon^2}{2} (\bar{\varphi}_\alpha \bar{\varphi}_\beta + \bar{e}_\alpha^\nu \bar{e}_\nu^\beta)$$

ecuación que puede reagruparse en la forma

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\epsilon L_{\alpha\beta} + \epsilon^2 N_{\alpha\beta}) \quad (B.5)$$

siendo respectivamente  $L_{\alpha\beta}$  y  $N_{\alpha\beta}$  las fracciones lineales y de segundo orden del tensor de deformación de la superficie de referencia. Nos interesaremos ahora por

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\epsilon A^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} + \epsilon^2 A^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon (A^{\alpha\beta} \bar{e}_{\beta\alpha} + A^{\beta\alpha} \bar{e}_{\alpha\beta}) + \epsilon^2 A^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}] \end{aligned}$$

aplicando las propiedades del tensor métrico a la fracción lineal de esta expresión y desarrollando la estructura de  $N_{\alpha\beta}$  se obtiene

$$A^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon (\bar{e}_\sigma^\sigma) + \frac{\epsilon^2}{2} (A^{\alpha\beta} \bar{\varphi}_\alpha \bar{\varphi}_\beta + A^{\alpha\beta} \bar{e}_\alpha^\nu \bar{e}_\nu^\beta)$$

donde  $\bar{e}_\sigma^\sigma$  es el primer invariante del tensor  $\bar{e}_\sigma^\nu$ . Si ahora se desarrolla explícitamente el último sumando en  $\epsilon^2$  y se realizan posteriormente las oportunas condensaciones y contracciones indiciales se puede volver a expresar en la forma siguiente

$$A^{\alpha\beta} \bar{e}_\alpha^\nu \bar{e}_\nu^\beta = \bar{e}_\sigma^\nu \bar{e}_\nu^\sigma + \frac{(\bar{e}_{21} - \bar{e}_{12})^2}{A}$$

por lo que

$$A^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon (\bar{e}_\sigma^\sigma) + \frac{\epsilon^2}{2} \bar{\varphi}_\sigma \bar{\varphi}^\sigma + \bar{e}_\sigma^\nu \bar{e}_\nu^\sigma + \frac{(\bar{e}_{21} - \bar{e}_{12})^2}{A} \quad (B.6)$$

El determinante del sistema  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , a partir de la expresión (B.5), será a su vez

$$|\epsilon_{\sigma\nu}| = \frac{1}{4} \{ \epsilon^2 |L_{\sigma\nu}| + \epsilon^3 |\bar{L}^{\nu\sigma} N_{\sigma\nu}| + \epsilon^4 |N_{\sigma\nu}| \} \quad (B.7.1)$$

$$\bar{L}^{\sigma\nu} = |L_{\sigma\nu}| \cdot L^{\sigma\nu}$$

donde el término de segundo orden resulta valer

$$\frac{1}{4} |L_{\sigma\nu}| = |\bar{e}_{\sigma\nu}| - \frac{1}{4} (\bar{e}_{21} - \bar{e}_{12})^2 \quad (B.7.2)$$

Las ecuaciones (B.4), (B.6) y (B.7) permiten evaluar completamente el factor  $\sqrt{\frac{A}{a}}$ , como serie de potencias de  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{A}{a}} &= 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \prod_{M=1}^N (2M-1) \right] \frac{(-1)^N}{N!} \{ \epsilon (\bar{e}_\sigma^\sigma) + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \left( \frac{1}{2} \bar{\varphi}_\sigma \bar{\varphi}^\sigma + \frac{1}{2} \bar{e}_\sigma^\nu \bar{e}_\nu^\sigma + 2 |\bar{e}_\sigma^\nu| \right) + \frac{\epsilon^3}{2} (\bar{L}^{\sigma\nu} N_{\sigma\nu}) + \frac{\epsilon^4}{2} |N_{\sigma\nu}| \}^N \end{aligned} \quad (B.8)$$

Volviendo a la ecuación (B.2) donde se definió el vector normal a la superficie  $\Sigma$ , el escalar  $z$  también puede definirse en función del primer invariante y del tercero (o determinante) del sistema  $\bar{e}_\nu^\sigma$ , resultando

$$z = 1 + \epsilon (\bar{e}_\sigma^\sigma) + \epsilon^2 |\bar{e}_\sigma^\nu| \quad (B.9)$$

Efectuando el producto escalar de (B.1) y (B.2) y utilizando la ecuación anterior podemos dar una nueva definición del sistema  $b_{\alpha\beta}$ , ésta es:

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} = & \sqrt{\frac{A}{a}} \{ B_{\alpha\beta} + \epsilon [B_{\alpha\beta} (\bar{e}_\sigma^\sigma) - \bar{x}_{\alpha\beta}] + \\ & + \epsilon^2 [B_{\alpha\beta} |\bar{e}_\sigma^\nu| - \bar{x}_{\alpha\beta} (\bar{e}_\sigma^\sigma) + \bar{\varphi}_\lambda (\bar{e}_\alpha^\lambda|_\beta + \bar{\varphi}_\alpha B_\beta^\lambda)] + \\ & + \epsilon^3 [(\bar{\varphi}_\lambda (\bar{e}_\sigma^\sigma) - \bar{\varphi}_\sigma \bar{e}_\lambda^\sigma) (\bar{e}_\alpha^\lambda|_\beta + \bar{\varphi}_\alpha B_\beta^\lambda) - \bar{x}_{\alpha\beta} |\bar{e}_\sigma^\nu|] \} \end{aligned} \quad (B.10)$$

Para llegar a esta expresión el cambio de curvatura linealizado, definido en (3.38) en su forma no simetrizada, se ha hecho aparecer voluntariamente y se han agrupado todos los términos en  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  resultando su suma nula. Sustituyendo ahora en (B.10)  $\sqrt{\frac{A}{a}}$  por su expresión (B.8) se llega a la forma deseada del tensor de curvatura de la superficie  $\Sigma$ , como serie de potencias de  $\epsilon$ , quedando entonces afectada la fracción de orden-m de este tensor por el factor  $\epsilon^m$ .

## B.2. Teoría de segundo orden

Si al efectuar el producto de la expresión (B.8) por el término correspondiente de (B.10) retenemos únicamente aquellos sumandos que vengan afectados por  $\epsilon^m$ ,  $m < 3$ , generaremos una expresión no-lineal del cambio de curvatura de  $S$  con inclusión de efectos de segundo orden. Esta será:

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} = & B_{\alpha\beta} - \epsilon \bar{x}_{\alpha\beta} + \epsilon^2 \{ \bar{\varphi}_\lambda (\bar{e}_\alpha^\lambda|_\beta + \bar{\varphi}_\alpha B_\beta^\lambda) + \\ & + B_{\alpha\beta} [\frac{1}{2} (\bar{e}_\sigma^\sigma)^2 - \frac{1}{2} (\bar{\varphi}_\sigma \bar{\varphi}^\sigma + \bar{e}_\sigma^\nu \bar{e}_\nu^\sigma + 2 |\bar{e}_\sigma^\nu|)] \} \end{aligned} \quad (B.11)$$

Desarrollando el corchete que viene multiplicado por  $B_{\alpha\beta}$ , haciendo  $\epsilon = 1$  y simetrizando el resultado se llega a la expresión prevista del cambio de curvatura. Esta es

$$K_{\alpha\beta} = x_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \{ \varphi_\lambda (e_\alpha^\lambda|_\beta + e_\beta^\lambda|_\alpha) + \varphi_\lambda (B_\beta^\lambda + \varphi_\beta B_\alpha^\lambda - B_{\alpha\beta} \varphi^\lambda) \} + v(\epsilon^m) \quad m \geq 3 \quad (B.12)$$

## BIBLIOGRAFIA

- Formes différentielles. H. Cartan. Hermann, éditeurs (1967).
- Applications of tensor analysis. A.J. Mc Conell. Dover publications (1957).
- Introduction to the mechanics of a continuous medium. L.E. Malvern. Prentice-Hall, Inc. (1969).
- The nonlinear field theories of mechanics. C. Truesdell & W. Noll. Springer Verlag (1965).
- Introduction to the theory of thin shells. H. Mühlemann. John Wiley & Sons (1981).
- Theory of shell structures. C.R. Calladine. Cambridge U. Press (1983).
- Theory of thin elastic shells. M. Dikmen. Pitman Books Ltd. (1982).
- Thin-shell structures. Y.C. Fung & E.E. Sechler (editors). Prentice-Hall, Inc. (1974).

# Cálculo elastoplástico de láminas plegadas no prismáticas de sección arbitraria

J. R. González de Cangas  
 V. Arroyo Fernández  
 A. Samartín Quiroga  
 Drs. Ingenieros de Caminos  
 Universidad de Santander

## RESUMEN

Se presenta una técnica de cálculo plástico incremental específica para el modelo estructural lámina plegada, cuya eficiencia se intenta cuantificar en comparación con otros procedimientos de cálculo plástico de estructuras.

El complejo problema tridimensional que aparece implícito en este tipo de estructuras se ha reducido a dos análisis monodimensionales más sencillos —longitudinal y transversal— a los que se han aplicado procedimientos típicos de cálculo plástico de estructuras de barras.

Se ha estudiado el modelo en una serie de ejemplos prácticos que han corroborado la validez del mismo, al tiempo que han mostrado las extraordinarias posibilidades de aplicación a situaciones reales de gran interés en la ingeniería.

## 1. INTRODUCCION

El modelo estructural lámina plegada ha sido utilizado en la ingeniería desde hace varias décadas, a partir del primer trabajo de Ehlers, publicado en el año 1930 (1). Desde entonces, y dependiendo de las simplificaciones introducidas en el modelo lámina plegada, han sido numerosos los procedimientos de análisis desarrollados, que han permitido elaborar técnicas orientadas tanto al cálculo manual como al computador. En cada una de ambas direcciones son dignos de mención, respectivamente, los trabajos de Yitzhaki (2) y Scordelis (3).

La trascendencia del modelo lámina plegada en la ingeniería estructural se debe a su gran versatilidad, al permitir simular el comportamiento de una gran variedad de construcciones reales: tableros de puentes, láminas cilíndricas, depósitos, silos, paneles, cubiertas, zonas de núcleos tubulares, etc. El amplio rango de aplicación del referido modelo queda reflejado en las numerosas publicaciones que existen sobre el tema, entre las que cabe destacar, por su carácter monográfico, las realizadas por la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (A.S.C.E.) (4) y por la Asociación Internacional de Estructuras Laminares y Espaciales (I.A.S.S.) (5).

En España ha existido una gran tradición constructiva y de desarrollo teórico de láminas plegadas, que tiene su origen en la figura de Eduardo Torroja, fundador y primer presidente de la I.A.S.S., el cual dio un gran impulso al estudio de las estructuras laminares y, particularmente, de las láminas plegadas. Posteriormente, merecen ser citados los trabajos de Del Pozo, Torroja y López Palanco (6), Granell (7) y Del Pozo y Samartín (8).

Hasta la fecha, la mayoría de los métodos de análisis de láminas plegadas se han basado en teorías elásticas y lineales, refiriéndose, fundamentalmente, a estructuras prismáticas. En el cálculo elástico de láminas no prismáticas cabe destacar el trabajo desarrollado por Johnson y Ti-ta Lee (9), cuya metodología ha sido ampliada recientemente por Samartín y González de Cangas (10), (11), (12) para el análisis de estructuras continuas con sección transversal y acciones totalmente arbitrarias.

Si bien la mayoría de los casos estudiados en la Ingeniería Civil pueden ser tratados dentro de un régimen lineal, particularmente si se considera la situación de servicio o de las tensiones admisibles, conviene, no obstante, destacar el hecho de que en la actualidad existe la práctica de comprobar las tensiones en la estructura en su fase de rotura, dimensionándola, por lo tanto, de acuerdo con este criterio.

Así pues, un cálculo más consecuente consistiría en un análisis de la misma "*ab initio*" en régimen no lineal. Esta filosofía ha sido aplicada en el caso simple de estructuras de barras y especialmente porticadas, en cuya dirección están los trabajos de Baker (13) y Neal (14). La extensión a estructuras bidimensionales, tales como placas, ha sido llevada a cabo por otros investigadores, entre los que se puede mencionar a Johansen (15), que introdujo la teoría de las líneas de rotura, y más actualmente Telemaco Van Langendonck (16).

Estos métodos suponen una situación plástica final de colapso (aparición de rótulas o líneas de rotura, según los casos), en la cual la estructura es un mecanismo y puede ser analizada de un modo simple mediante recursos elementales de la estática. Adolecen, sin embargo, de varios defectos importantes; por ejemplo: la dificultad de encontrar, entre todos los posibles, el mecanismo real de rotura; la complejidad de un tratamiento de la influencia del esfuerzo axil o del esfuerzo cortante en el valor del momento de rotura; la no consideración de requerimientos de ductilidad, etc.

Los defectos anteriores pueden ser paliados mediante la utilización de métodos alternativos, basados en técnicas incrementales, que han alcanzado un importante desarrollo tras la aparición del computador. Con ellos es posible simular la transición de una estructura inicialmente elástica a la situación plástica final, considerando todos los estados intermedios; asimismo permiten introducir otros efectos importantes, tales como los debidos al comportamiento constitutivo del material: endurecimiento de la deformación, fenómenos de carga y descarga, etc.

Dentro de estos métodos incrementales se destaca la contribución de Powell (17), orientada al cálculo de estructuras de barras, particularmente entramados planos.

Su extensión a otros tipos estructurales más complejos –placas, láminas, etc.– se ha llevado a cabo, de un modo general, mediante la utilización de técnicas numéricas no específicas (en especial, del método de los elementos finitos), a costa de las desventajas inherentes a dichas técnicas.

En este artículo se presenta un método de cálculo plástico incremental, específico para un determinado tipo de estructura: la lámina plegada.

Con el término "específico" se quiere indicar que se tienen en cuenta las características tipológicas de la estructura, lo que permite introducir en el análisis las hipótesis y simplificaciones pertinentes.

Dicha técnica supone una extensión natural del método de cálculo elástico de láminas plegadas no prismáticas mencionado en (11), considerando de forma explícita el comportamiento no lineal del material.

## 2. CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD. REQUISITOS NECESARIOS EN LA DEFINICION DE UN MODELO DE ANALISIS PLASTICO

Una de las características fundamentales de los materiales plásticos es la no existencia de una relación única entre tensiones y deformaciones. Por otra parte, una vez que cesan las fuerzas exteriores y las tensiones debidas a éstas han excedido de un valor crítico —tensión de fluencia—, aparecen deformaciones remanentes.

En el planteamiento y resolución de un problema plástico de Cálculo de Estructuras existen tres apartados fundamentales:

- Discretización estructural.
- Elección del modelo de comportamiento del material.
- Técnicas numéricas de resolución.

En lo referente al primer apartado, y salvo situaciones particulares de tipología estructural, dentro de las que se incluye el modelo de lámina plegada, es necesario recurrir en la mayoría de los casos a técnicas generales de cálculo de estructuras y en particular al método de los Elementos Finitos.

En la elección del modelo de comportamiento del material es necesario definir una serie de parámetros básicos, cuyo significado en los casos de elastoplasticidad plana y tridimensional se esboza a continuación.

### 2.1. Definición de la tensión de fluencia

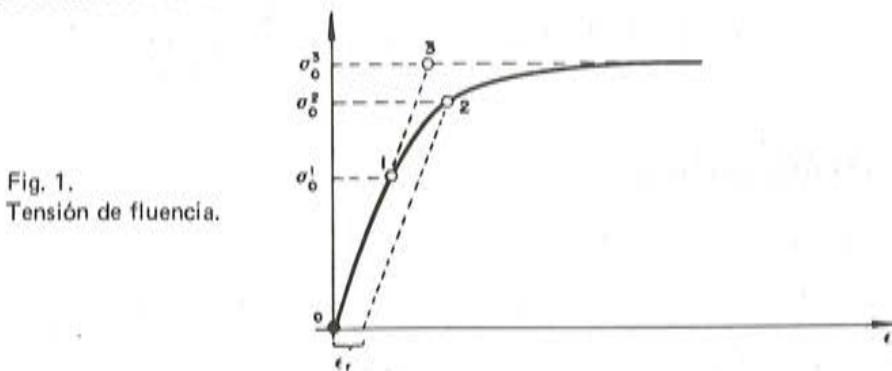


Fig. 1.  
Tensión de fluencia.

No existe un criterio único para la definición del valor de la tensión de fluencia; en la práctica se utilizan diferentes métodos, que conducen a resultados distintos, y entre los cuales, para el caso de tensión plana, se pueden citar los siguientes (figura 1):

- Método del límite de proporcionalidad: En la curva tensión-deformación del material, indica el verdadero punto de desviación de la elasticidad lineal —tensión  $\sigma_0^1$ —. En la práctica es de difícil determinación.
- Método “offset”: Se define la tensión de fluencia,  $\sigma_0^2$ , como aquélla que corresponde a una deformación remanente,  $\epsilon_r$ , previamente establecida. Es un método de fácil aplicación, si bien el valor obtenido carece de significado físico, dada la arbitrariedad en la elección de  $\epsilon_r$ .

- Método de extrapolación de Lode: La curva  $\sigma - e$  se sustituye por dos tramos lineales, quedando definida la tensión de fluencia,  $\sigma_0^3$ , por el punto de intersección de dichos tramos. Se comprende asimismo la carencia de significación física de este procedimiento.

## 2.2. Condición de fluencia

En la elasto-plasticidad tridimensional es necesario, asimismo, definir un criterio mediante el cual, conocido el estado tensional en un punto, pueda discernirse si su comportamiento corresponde al rango elástico o al rango plástico.

En general, el criterio viene definido por una superficie en el espacio  $(\underline{\sigma}, \theta)$ :

$$f(\underline{\sigma}, \theta, K) = 0 \quad (2.1)$$

donde  $\underline{\sigma}$  representa el tensor de tensiones en el punto;  $\theta$ , la temperatura y  $K$  la historia de carga en el rango plástico (figura 2).

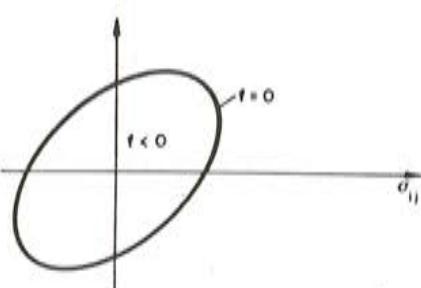


Fig. 2.  
Condición de fluencia.

Para puntos interiores al dominio definido por la citada superficie ( $f < 0$ ), el estado tensión-deformación es elástico (dominio elástico).

La condición de plastificación se alcanza para los puntos situados en la superficie referida ( $f = 0$ ); en esta situación se producen deformaciones remanentes (dominio plástico).

## 2.3. Ley de flujo plástico

Esta ley establece una relación entre la deformación y la tensión en la fase plástica.

En el caso general esta ley expresa que la deformación plástica es proporcional al gradiente de tensión de una función  $g(\underline{\sigma}, \theta, K)$ , denominada potencial plástico, con los significados para  $\underline{\sigma}$ ,  $\theta$  y  $K$  anteriormente expuestos:

$$d e_{ij}^p = d \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2)$$

en donde  $e_{ij}^p$  y  $\sigma_{ij}$  representan, respectivamente, los tensores de deformación plástica y de tensión, y  $d\lambda(\underline{\sigma}, \theta, K, d\underline{\sigma}, d\theta)$  es el factor de proporcionalidad.

En el caso particular de que el potencial plástico,  $g$ , coincide con la función de fluencia,  $f$ , la plasticidad se denomina asociada, y la ley de flujo plástico adquiere la forma:

$$d e_{ij}^p = d \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.3)$$

relación que se denomina ley de normalidad. Esta ley expresa el hecho de que el incremento de deformación plástica es normal a la superficie de fluencia (figura 3).

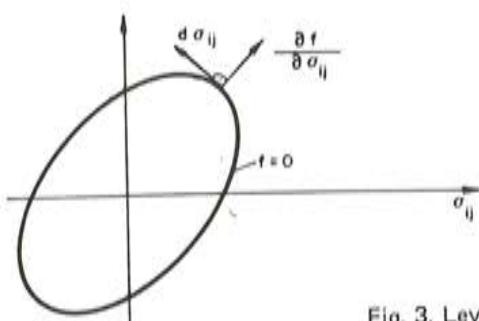


Fig. 3. Ley de normalidad.

#### 2.4. Regla de endurecimiento

Mediante esta regla se define la evolución de la superficie de fluencia ante posibles procesos de carga y descarga, o lo que es igual, se determina el cambio que se produce en la condición de fluencia.

Se entiende por endurecimiento el fenómeno por el cual, en el rango de tensiones que superan la de fluencia, un aumento en la deformación requiere un aumento en la tensión correspondiente.

Las reglas de endurecimiento más utilizadas en la práctica son las siguientes:

a) *Modelo plástico perfecto (figura 4.a).*

En este modelo al alcanzarse la tensión de fluencia se produce un aumento de la deformación a tensión constante (igual a la de fluencia).

Se trata de un modelo de gran aplicación práctica por su sencillez, que hace posible la introducción de importantes simplificaciones en el análisis.

b) *Endurecimiento isótropo (figura 4.b).*

En el caso general supone una expansión uniforme de la superficie de fluencia una vez alcanzada la condición de plastificación. En el caso particular de tensión plana ello se traduce en un diagrama  $\sigma - \epsilon$  bilineal, en el cual la pendiente del tramo plástico es mayor que cero. Por lo tanto, la tensión de fluencia depende de la deformación remanente en cada instante.

c) *Endurecimiento cinemático (figura 4.c).*

En este caso la superficie de fluencia experimenta una traslación en lugar de la expansión mencionada en el caso anterior, lo cual implica que no existe simetría respecto al origen en la condición de fluencia. En la situación particular de tensión plana, dicha traslación comporta que las tensiones de plastificación a tracción y compresión ya no son iguales.

De esta forma se pierde la isotropía del material, fenómeno que se conoce en la literatura con el nombre de efecto Bauschinger.

d) *Endurecimiento con distorsión (figura 4.d).*

En estos modelos se tiene en cuenta el hecho observado experimentalmente de que la superficie de fluencia, además de una traslación, experimenta una disminución en la dimensión correspondiente a la dirección de aplicación de la carga.

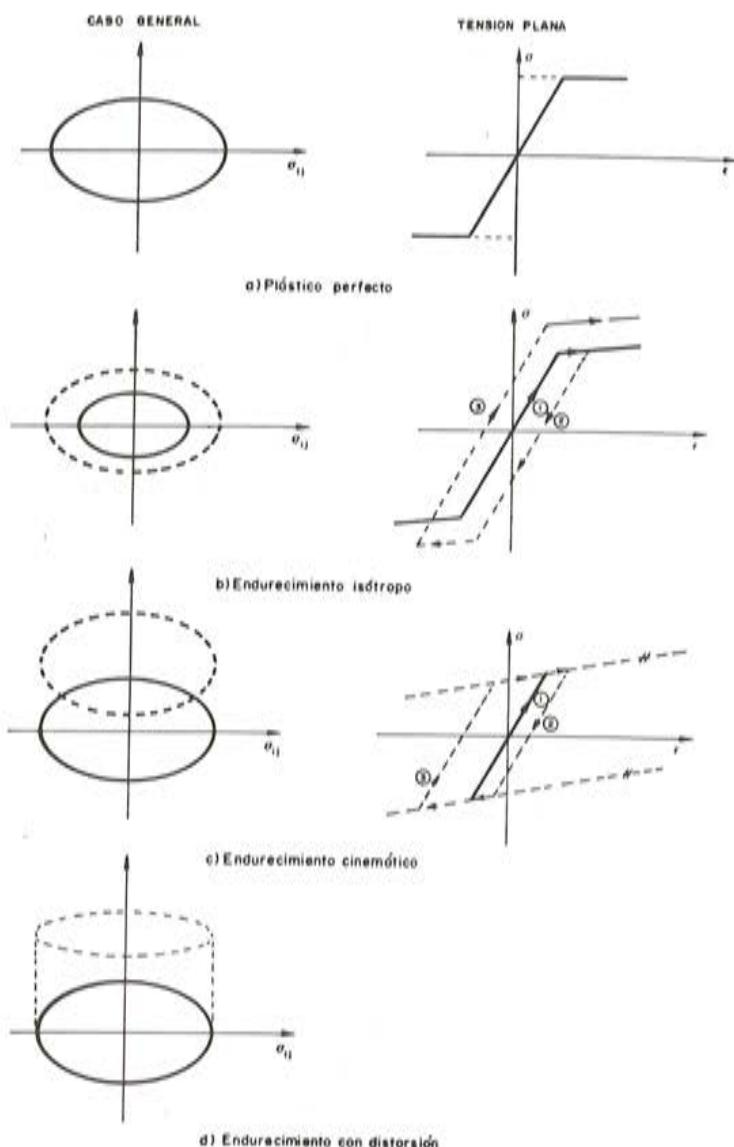


Fig. 4. Reglas de endurecimiento.

#### e) Modelos mixtos.

Son modelos que se obtienen al combinar adecuadamente algunos de los anteriormente mencionados.

### 2.5. Técnicas numéricicas de resolución

La aplicación práctica de los conceptos anteriores a un problema general discretizado mediante el método de los elementos finitos conduce, como es bien conocido, a un sistema de ecuaciones no lineales:

$$f_i(U_1, U_2, \dots, U_N) = P_i ; \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.4.a)$$

que puede ser expresado de un modo simplificado mediante una ecuación matricial del tipo:

$$\underline{K}_s(\underline{U}) \times \underline{U} = \underline{P} \quad (2.4.b)$$

en donde los vectores  $\underline{U}$  y  $\underline{P}$  representan, respectivamente, los movimientos en los grados de libertad considerados —incógnitas básicas del cálculo— y las cargas actuantes en dichos grados de libertad. Su dimensión es  $N \times 1$ , siendo  $N$  el número total de grados de libertad del problema.  $K_s(\underline{U})$  es una matriz cuadrada, denominada matriz secante, de dimensión  $N \times N$ , en general no simétrica. No tiene una expresión única y su definición es arbitraria.

Definido un estado de equilibrio del sistema (conocidos los  $U_i$  correspondientes a un estado de cargas  $P_i$ ), es posible analizar las variaciones originadas por un incremento diferencial de carga. Para ello, si se diferencia en la expresión (2.4.a), se tiene:

$$\frac{\partial f_i}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial f_i}{\partial U_2} dU_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial U_N} dU_N = dP_i \quad (2.5.a)$$

o bien, en forma matricial:

$$K_t(\underline{U}) \times d\underline{U} = d\underline{P} \quad (2.5.b)$$

en donde la matriz  $K_t$ , de dimensión  $N \times N$ , se denomina matriz tangente. Sus términos  $K_{tij} = \partial f_i / \partial U_j$  son funciones de punto, es decir, dependen del estado del sistema ( $U_i, P_i$ ). Por lo tanto, su definición es única. Además, si la formulación del problema está basada en principios energéticos, dicha matriz es simétrica.

La resolución del anterior problema no lineal (2.4.a) hace necesario recurrir a técnicas numéricas particulares que pueden clasificarse en tres grandes grupos:

- Métodos iterativos.
- Métodos incrementales.
- Métodos predictivo-correctivos.

A continuación se analiza sucintamente cada uno de dichos grupos de procedimientos numéricos. Con el fin de facilitar la comprensión de los mismos se hace referencia a un sistema con un único grado de libertad.

### 2.5.1. Métodos iterativos

Estos métodos resultan adecuados cuando se trata de determinar el estado de un sistema bajo un conjunto de cargas supuestamente inferiores a los límites.

#### a) Método de la rigidez inicial.

Se trata de determinar el estado del sistema (2.4.b) correspondiente a unas cargas conocidas  $P_D$  (punto C de la figura 5.a). Para ello se considera una  $K_0$  inicial (en general la correspondiente al problema lineal) que se mantiene constante a lo largo del siguiente proceso numérico:

$$K_0 \cdot U_0 = P_D \rightarrow \text{se obtiene } U_0$$

$$K_0 \cdot \Delta U_0 = P_D - K_s(U_0) \cdot U_0 \quad (\text{figura 5.a}) \rightarrow \text{Se calcula } \Delta U_0 \text{ y } U_1 = U_0 + \Delta U_0$$

.....

$$K_0 \cdot \Delta U_n = P_D - K_s(U_n) \cdot U_n \quad \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_n; U_{n+1} = U_n + \Delta U_n$$

El proceso finaliza cuando en un paso genérico se verifica  $|\Delta U_n| < \epsilon$ , siendo  $\epsilon$  una cota de error previamente fijada.

Nótese que  $K_s(U_n)$  debe calcularse en cada paso (en el caso general equivale al ensamblaje en cada paso de la matriz  $\underline{K}_s$ ).

b) *Método de aproximaciones sucesivas.*

Se parte, como en el caso anterior, de la resolución del problema lineal

$$K_0 \cdot U_0 = P_D$$

de donde se obtiene  $U_0$ .

A continuación, y tal como se observa en la figura 5.b, se plantea:

$$\begin{array}{l} K_s(U_0) \cdot U_1 = P_D \rightarrow \text{Se obtiene } U_1 \\ \dots \dots \dots \\ K_s(U_n) \cdot U_{n+1} = P_D \rightarrow \text{Se obtiene } U_{n+1} \end{array}$$

El proceso finaliza, similarmente a la situación anterior, cuando se verifica  $|U_{n+1} - U_n| < \epsilon$ .

Mediante este método la convergencia se alcanza más rápidamente, si bien a costa de un incremento en el número de operaciones a realizar. Asimismo,  $K_s$  debe ser calculada (o ensamblada en el caso general) en cada iteración.

c) *Método de la rigidez tangencial.*

El proceso numérico (figura 5.c) es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} K_0 \cdot U_0 = P_D & \rightarrow \text{Se obtiene } U_0 \\ K_t(U_0) \cdot \Delta U_0 = P_D - K_s(U_0) \cdot U_0 & \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_0 \text{ y } U_1 = U_0 + \Delta U_0 \\ K_t(U_n) \cdot \Delta U_n = P_D - K_s(U_n) \cdot U_n & \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_n \text{ y } U_{n+1} = U_n + \Delta U_n \end{array}$$

El proceso finaliza cuando  $|\Delta U_n| < \epsilon$ .

La convergencia en este método es aun más rápida que en los anteriores, aun cuando es necesario ensamblar en el caso general, en cada paso, no sólo  $K_s$  sino también  $K_t$ , lo cual incrementa notablemente el número de operaciones a realizar.

Conviene señalar que para determinado tipo de problemas estos tres métodos que se han descrito pueden no ser convergentes.

### 2.5.2. *Métodos incrementales*

Su utilización resulta adecuada en aquellos casos en los que, además del estado de equilibrio del sistema bajo un conjunto de cargas, se desea conocer la evolución de dicho sistema hasta que se alcanza el estado de equilibrio mencionado.

Como ejemplo de esta metodología se describe a continuación el método de Euler.

Se parte de una situación inicial conocida; en general, la situación de reposo ( $P = 0$ ,  $U_0 = 0$ ). La carga total,  $P_D$ , se aplica en  $N$  escalones iguales, es decir  $\Delta P = P_D/N$  en cada

escalón (figura 6). El proceso a seguir, adoptando como matriz inicial la  $K_0$  ya mencionada en los procedimientos anteriores, es el siguiente:

$$K_0 \cdot \Delta U_0 = \Delta P \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_0 \text{ y } U_1 = U_0 + \Delta U_0$$

$$K_t(U_1) \Delta U_1 = \Delta P \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_1 ; U_2 = U_1 + \Delta U_1$$

$$K_t(U_i) \Delta U_i = \Delta P \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_i ; U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$$

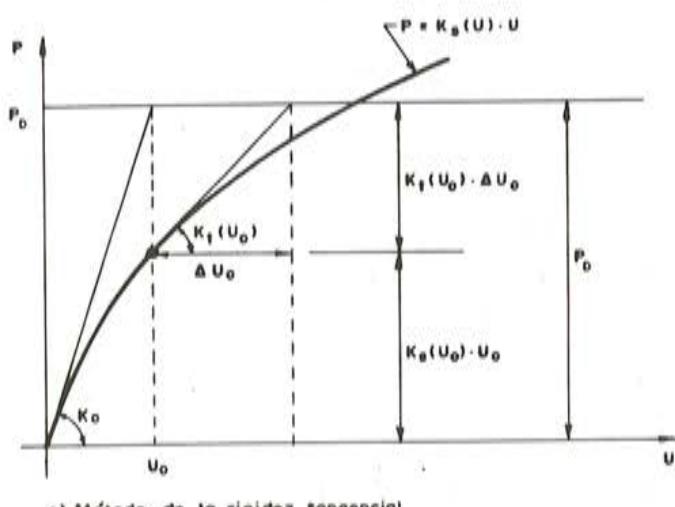
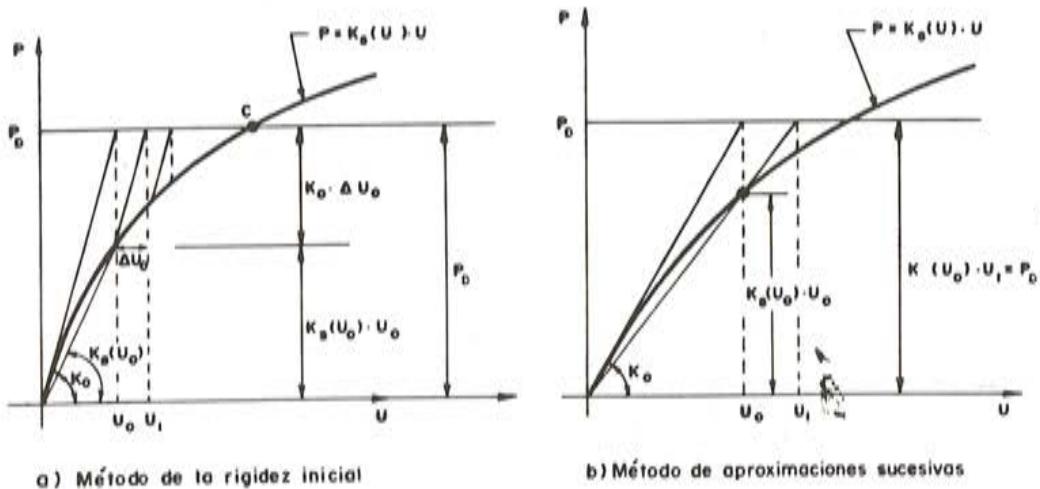


Fig. 5. Métodos iterativos.

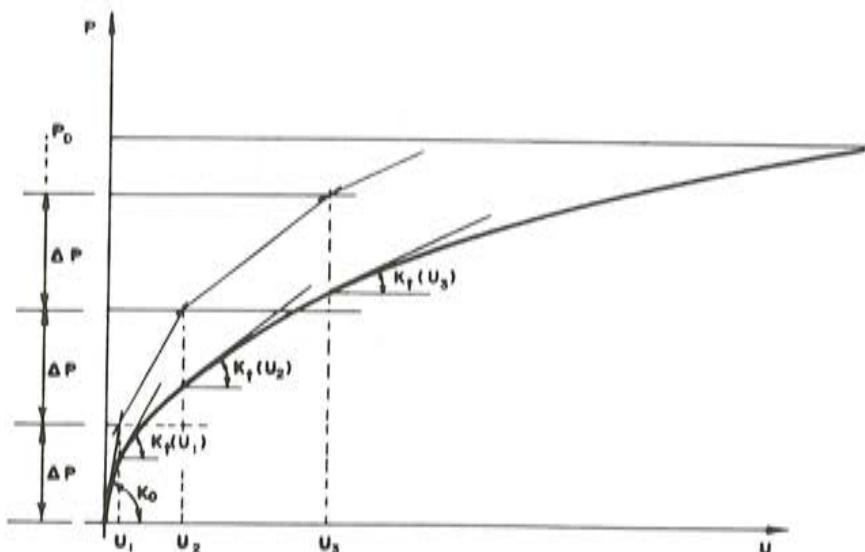


Fig. 6. Método incremental de Euler.

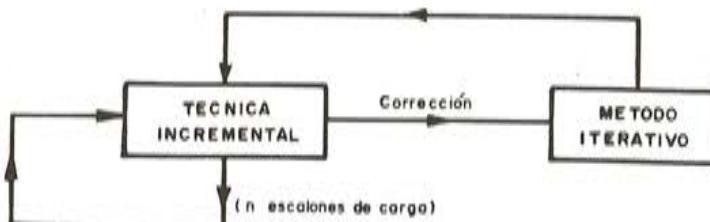


Fig. 7. Métodos predictivo-correctivos.

El cálculo finaliza al alcanzar el último escalón de carga.

El mayor inconveniente que presentan estos métodos radica en que, para determinadas situaciones, es necesario adoptar un valor pequeño para  $\Delta P$ , a fin de obtener una precisión mínima aceptable, lo cual, obviamente, comporta un mayor número de escalones de carga con la repercusión correspondiente en el tiempo de computador necesario.

#### 2.5.3. *Métodos predictivo-correctivos*

A fin de obviar los inconvenientes mencionados en los métodos anteriores, se puede utilizar una técnica incremental para predecir unos valores iniciales en los desplazamientos  $U$ , y cada vez que se ha aplicado un número determinado ( $n$ ) de escalones de carga, se corrige el resultado obtenido para dichos desplazamientos  $U$ , mediante la utilización de alguno de los procedimientos iterativos anteriormente expuestos (figura 7).

### **3. DESCRIPCION DEL MODELO ADOPTADO EN EL ANALISIS PLASTICO DE LAMINAS PLEGADAS NO PRISMATICAS DE SECCION ARBITRARIA**

#### **3.1. Introducción**

El modelo que se describe a continuación (18) es aplicable a láminas plegadas largas, y se supone que los movimientos y deformaciones producidos son lo suficientemente pequeños, de tal forma que permiten considerar lineales las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad (hipótesis de linealidad geométrica y cinemática). El comportamiento plástico del material se define más adelante.

Un planteamiento general del problema dentro de la teoría de la plasticidad requeriría un análisis tridimensional, lo cual exigiría la adopción de una superficie de fluencia, la definición de una ley de flujo plástico y una regla de endurecimiento, así como una técnica de discretización (por ejemplo, elementos finitos) que permitiesen el estudio de la estructura a nivel de fibra. Con ello se vería sensiblemente mermada la posibilidad de aprovechar las importantes simplificaciones que, desde un punto de vista computacional, permiten las hipótesis del modelo de lámina plegada utilizado. Las ventajas que dichas simplificaciones reportan han quedado patentes, para el caso elástico, en la publicación (11).

Por este motivo, y coherentemente con el mencionado modelo, se adopta una plasticidad monodimensional, a nivel de esfuerzos de viga, en ambas formas de trabajo de la estructura: extensión y flexión.

#### **3.2. Discretización del modelo y simplificaciones introducidas en el cálculo**

Se discretiza la lámina plegada, mediante secciones transversales, en un determinado número de segmentos o dovelas de igual longitud (figura 8.a).

El análisis estructural del conjunto se realiza mediante dos cálculos básicos:

- a) Un cálculo transversal para cada una de las dovelas procedentes de la discretización efectuada.
- b) El cálculo longitudinal de cada una de las losas que constituyen la lámina plegada.

En el cálculo transversal (efecto placa) la dovela se idealiza según un entramado plano cuyas características corresponden a su sección transversal central (figura 8.b). Dicha dovela se sustenta mediante un número determinado de coacciones ficticias, de forma tal que el entramado sea intraslacional. Las acciones a considerar son las que directamente gravitan sobre ella (figura 8.b).

En el cálculo longitudinal (efecto laja) se analiza cada losa como una viga cargada en su plano (figura 8.c). Las acciones correspondientes provienen de la descomposición de las reacciones en los apoyos ficticios introducidos, en fuerzas en el plano de cada losa (figura 8.d). Además, podrán actuar unos momentos en los extremos, si las condiciones de apoyo son diferentes de las de tipo diafragma.

Posteriormente, en ambos cálculos debe ser tenido en cuenta el monolitismo estructural, que modifica los resultados de los análisis anteriores en la forma que detalladamente se describe para el caso elástico en la publicación (11).

Coherentemente con la discretización anterior, el cálculo plástico de la lámina plegada se realiza considerando los dos modelos básicos referidos: entramado plano y viga. Con ello, el complejo problema tridimensional se reduce a dos casos de plasticidad monodimensional: cálculo plástico transversal y cálculo plástico longitudinal.

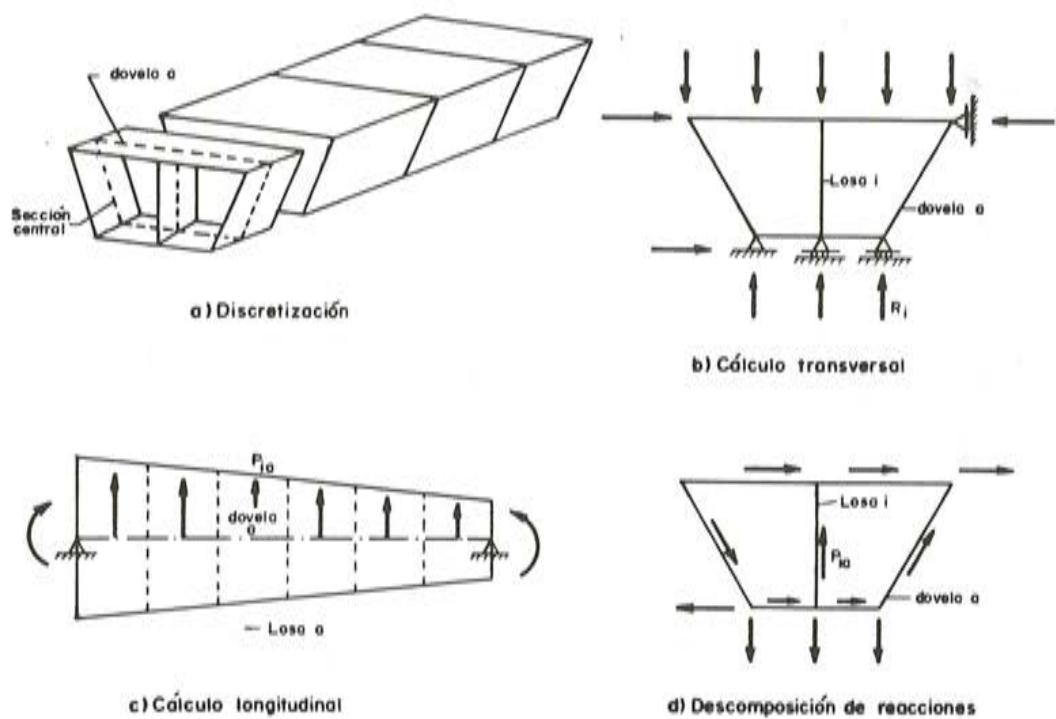


Fig. 8. Discretización del modelo estructural.

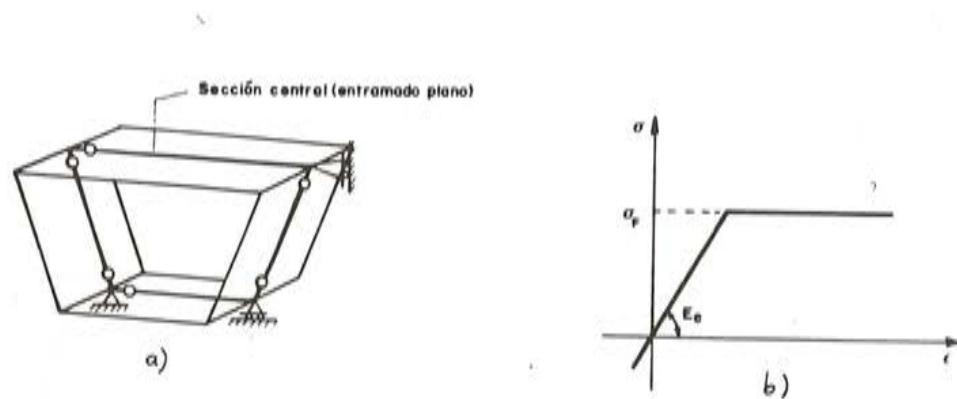


Fig. 9. Cálculo plástico transversal.

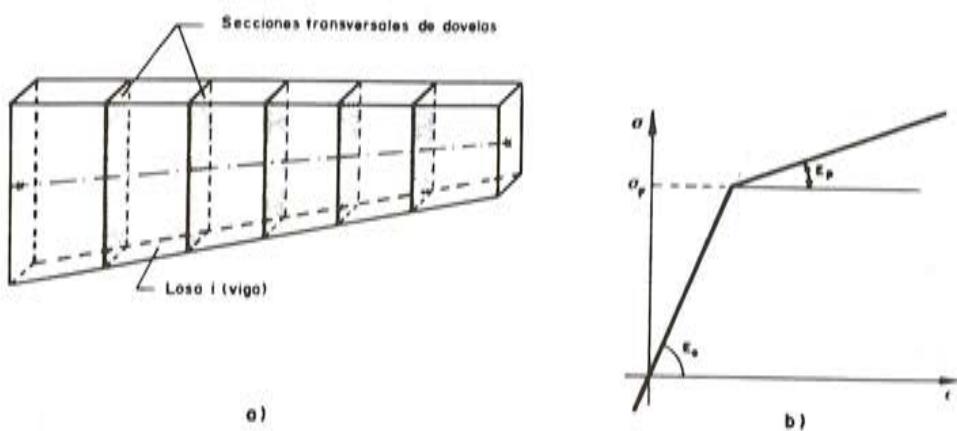


Fig. 10. Cálculo plástico longitudinal.

### a) Cálculo plástico transversal.

Este cálculo se lleva a cabo siguiendo la teoría elemental de la plasticidad aplicada a entramados planos (figura 9.a). Por simplicidad, y con fines meramente ilustrativos, se adopta como diagrama tensión-deformación el correspondiente a un material elastoplástico perfecto (figura 9.b).

El análisis se efectúa a nivel de sección y en los extremos de cada viga del entramado, siguiendo el criterio de plastificación que se describirá posteriormente. En determinados casos (existencia de cargas concentradas, acciones repartidas, etc.) es necesario considerar nudos adicionales intermedios que permitan tener en cuenta la aparición de rótulas en secciones distintas de las extremas.

### b) Cálculo plástico longitudinal.

El desarrollo del análisis es análogo al descrito en el apartado anterior, aplicándose en este caso a vigas, en lugar de entramados planos.

Dada la técnica de discretización utilizada, se asimila el comportamiento de cada dovela al de su sección central correspondiente. Consecuentemente, la posible aparición de rótulas plásticas se analiza únicamente en dichas secciones centrales (figura 10.a).

La ley  $\sigma-\epsilon$  anterior se modifica para este cálculo mediante la introducción de una regla de endurecimiento isótropo (figura 10.b). La razón de esta modificación radica en la propia técnica utilizada en el análisis, que al estar basada en métodos de flexibilidad, produciría fenómenos de inestabilidad numérica en el caso de adoptar una pendiente  $E_p = 0$ . No obstante, con el fin de simular de la forma más aproximada posible el comportamiento inicialmente supuesto (material elastoplástico perfecto), se elige un valor de  $E_p$  suficientemente pequeño (del orden de un 1 por 100 de  $E_e$ ).

En lo sucesivo, en los desarrollos teóricos, así como en los ejemplos analizados, se utilizan las leyes  $\sigma-\epsilon$  anteriormente descritas, únicamente por razones de índole computacional. Por lo tanto, esto no debe entenderse como una limitación intrínseca al modelo, ya que cualquier tipo de ley  $\sigma-\epsilon$  podría ser simulado mediante diferentes tramos rectos con pendientes  $E_i$  adecuadas (figura 11).

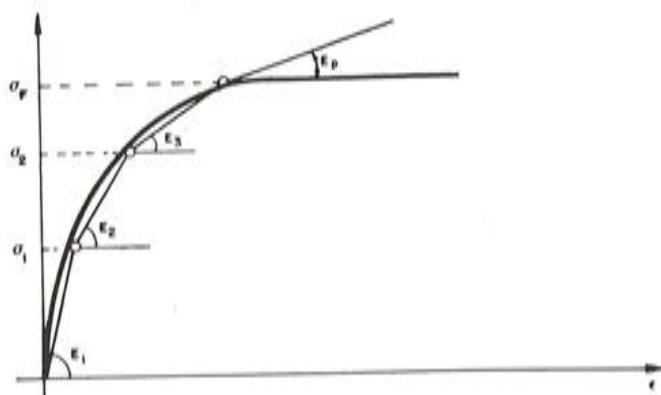


Fig. 11. Ley general tensión-deformación.

### 3.3. Criterio de plastificación. Formación y cierre de rótulas plásticas

#### a) Concepto de rótula plástica.

Según el valor que alcancen las tensiones en cada fibra de una sección, se distinguen

tres posibles estados de la misma, que para el caso de un material elastoplástico perfecto se representan en la figura 12, y en la 13 para el caso de un material con un endurecimiento isótropo a la deformación.

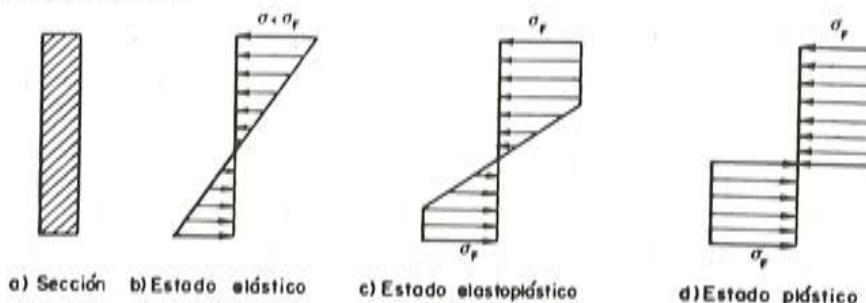


Fig. 12. Situaciones en una sección según su estado tensional (material elastoplástico perfecto).

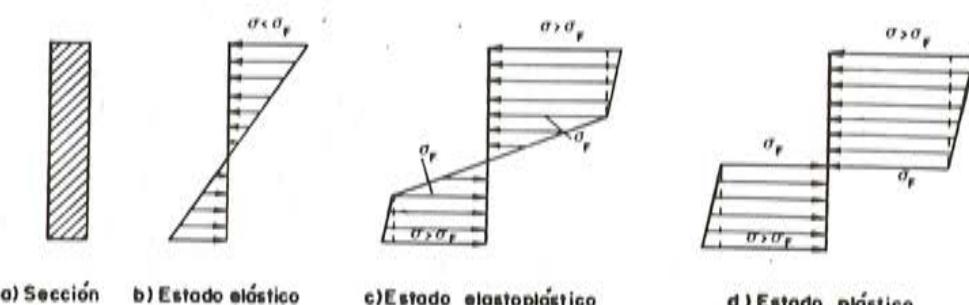


Fig. 13. Situaciones en una sección según su estado tensional (material con endurecimiento isótropo).

En el caso de material con endurecimiento isótropo, el hecho de que se alcancen tensiones superiores a la de la fluencia ( $\sigma > \sigma_F$ ) se debe simplemente al propio modelo  $\sigma - e$  considerado (figura 10.b).

En el contexto del modelo adoptado en esta publicación la definición de rótula plástica corresponde a la situación de una sección en estado plástico, según se ha considerado en las figuras 12 y 13 anteriores, situación a la que se llega en virtud del siguiente criterio de plastificación.

#### b) Criterio de plastificación o fluencia.

En los dos procesos de cálculo plástico monodimensional (transversal y longitudinal) a que se ha reducido el problema plástico general, se tiene en cuenta la acción conjunta del momento flector y esfuerzo axil. La actuación del esfuerzo cortante no ha sido considerada, a fin de simplificar el análisis.

Debido a la propia tipología estructural de la lámina plegada, el criterio de plastificación adoptado es el correspondiente a una sección rectangular (14), (19), siendo su expresión:

$$\frac{M}{M_p} + \left( \frac{N}{N_p} \right)^2 = 1 \quad (3.1)$$

en donde:

$M$  = Momento flector que actúa sobre la sección.

$N$  = Esfuerzo axil que actúa sobre la sección.

$M_p$  = Momento de plastificación de la sección por flexión pura.

$N_p$  = Axil de plastificación de la sección por tracción o compresión simples.

La representación gráfica del anterior criterio se muestra en la figura 14.

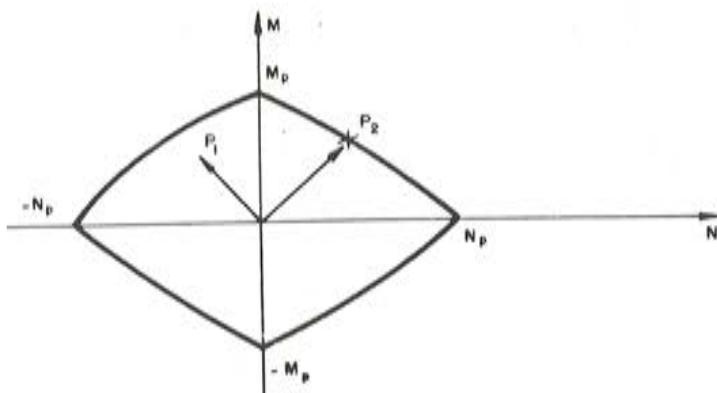


Fig. 14.  
Criterio de  
plastificación.

Todos los puntos situados en el interior del recinto ( $P_1$ ) corresponden a secciones en fase elástica o elastoplástica, y los que se encuentran en el contorno ( $P_2$ ), a secciones en estado plástico.

c) *Formación de rótulas.*

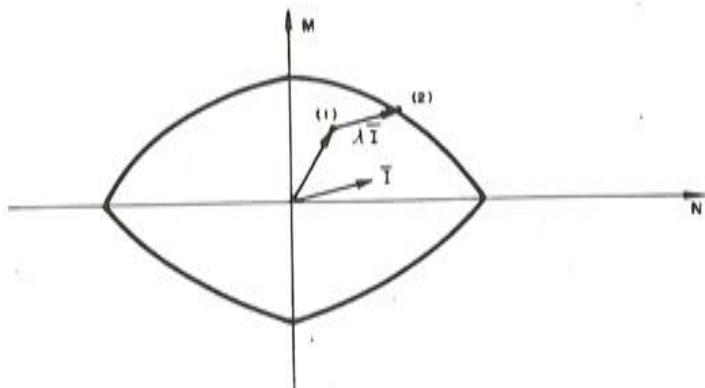


Fig. 15.  
Formación de  
rótulas plásticas.

Según se describe más adelante, el método numérico elegido en el modelo aquí considerado ha sido uno incremental modificado.

Supuesto que al iniciarse un determinado escalón de carga, i, los valores acumulados de los esfuerzos en una sección,  $M$  y  $N$ , corresponden a una situación elástica o elastoplástica (punto 1 de la figura 15) y en el cálculo lineal correspondiente a dicho escalón se obtienen unos valores  $M_i$  y  $N_i$ , tales que definen el vector  $I$ , se producirá una rótula plástica en esa sección, para un valor  $\lambda$  del incremento de carga, cuando al desplazar el punto (1) una cantidad  $\lambda I$  se alcance el límite del recinto en el punto (2) (figura 15). Conviene señalar que el valor de  $\lambda$  puede ser menor o mayor que la unidad.

Dado que el proceso anterior debe realizarse para todas las secciones y en ambos cálculos, longitudinal y transversal, el valor del incremento de carga correspondiente al escalón en cuestión viene definido por el menor de todos los  $\lambda$  obtenidos.

Analíticamente, lo anterior implica las siguientes operaciones:

a) *Plastificación longitudinal.*

- Se definen en cada placa y cada sección nodal las siguientes características estructurales:

Momentos de plastificación positivo ( $M_{p1}$ ) y negativo ( $M_{p2}$ ). Axil de plastificación:  $N_p$ .

- El análisis comienza a partir de un determinado nivel de carga, suficientemente pequeño para producir en la estructura resultados dentro del rango elástico y lineal. De

esta forma se obtienen, para cada sección nodal de cada placa, los esfuerzos  $M_0$  y  $N_0$  (momento flector y esfuerzo axil, respectivamente).

- Las cargas se incrementan proporcionalmente hasta que se produce la primera rótula plástica en una determinada sección (a) de una losa (j), es decir hasta que se verifica la condición:

$$\left[ \frac{\lambda_1 M_0}{M_p} \right] + \left[ \frac{\lambda_1 N_0}{N_p} \right]^2 = 1 \quad (3.2)$$

siendo  $\lambda_1$  el factor de escala del primer escalón de carga.

- En la losa y sección donde se produce la plastificación se modifica el módulo de deformación longitudinal, que cambia su valor de  $E_e$  a  $E_p$  (figura 10.b). En el resto de las secciones se mantiene el valor original  $E_e$ .
- Se procede a un nuevo cálculo elástico de la estructura, correspondiente a un nuevo escalón de carga, dentro del cual se alcanza la segunda plastificación en otra sección de la misma o diferente placa. Es decir:

$$\left[ \frac{\lambda_1 M_0 + \lambda_2 M'_0}{M_p} \right] + \left[ \frac{\lambda_1 N_0 + \lambda_2 N'_0}{N_p} \right]^2 = 1 \quad (3.3)$$

en donde  $\lambda_2$  es el nuevo factor de escala, correspondiente a este segundo escalón de carga, y  $M'_0$  y  $N'_0$  representan los esfuerzos del cálculo elástico en el mencionado segundo escalón. Nuevamente se modifica el módulo de deformación (de  $E_e$  a  $E_p$ ) en la segunda sección plastificada.

- El paso anterior se repite hasta que se verifique alguno de los criterios de fallo estructural que posteriormente se definen.

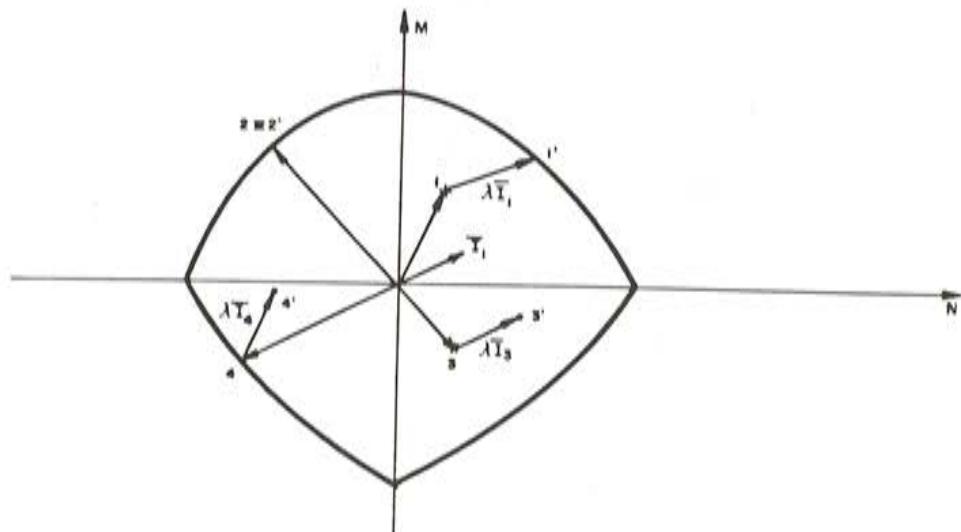


Fig. 16. Posibilidades de evolución del estado tensional de una sección en un escalón de carga arbitrario.

#### b) Plastificación transversal.

El procedimiento es, salvo ligeras modificaciones, similar al anterior. Estas diferencias se deben fundamentalmente al hecho de que en el análisis transversal cada dovela se calcula

como un entramado plano. Así, solamente pueden aparecer rótulas en los extremos de cada barra(\*). La aparición de una rótula exige, en este caso, las pertinentes modificaciones en los términos de la matriz de rigidez del entramado y esfuerzos de empotramiento rígido.

El resto del análisis sigue los pasos descritos en el cálculo longitudinal.

c) *Cierre de rótulas.*

Las posibilidades de evolución del estado tensional en una sección para un determinado escalón de carga se reducen a las cuatro que se representan en la figura 16. El punto 1 (que pasa a 1') corresponde a una sección en la que se forma una rótula, tal como se ha descrito en el apartado anterior. En el caso del punto 2, una sección que ya estaba plastificada permanece en la misma situación. El punto 3 corresponde a una sección en estado elástico o elastoplástico y que continúa en el mismo estado al finalizar el escalón de carga mencionado. Por último, el punto 4 representa una situación peculiar, para la cual una sección que estaba plastificada vuelve a adquirir sus propiedades elásticas debido a un cambio de signo en los esfuerzos a que se halla sometida. Esta situación se denomina "cierre de rótula" y corresponde al proceso inverso de la formación de rótulas ya mencionada.

d) *Cambios en la estructura debidos a la formación y cierre de rótulas.*

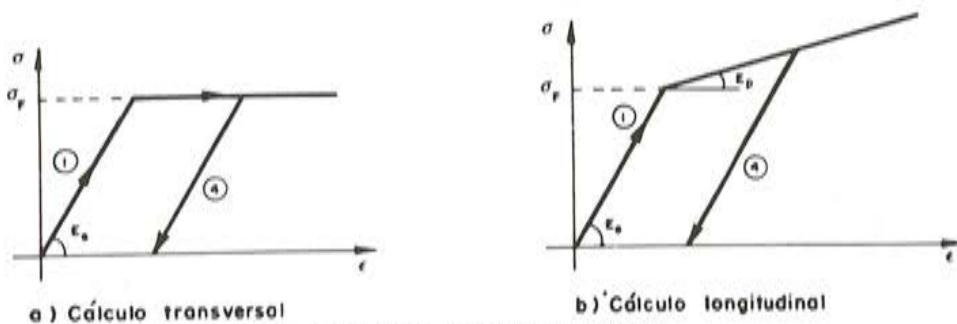


Fig. 17. Formación y cierre de rótulas.

Los cambios estructurales debidos a la formación o cierre de rótulas se refieren fundamentalmente a las leyes constitutivas. Esto supone la modificación del valor adoptado para el módulo de deformación longitudinal del material. Mientras que éste se halle dentro del rango elástico, el valor considerado es  $E_e$  (figura 17). Cuando en una sección se forma una rótula plástica, dicho módulo varía, adoptando en este caso el valor  $E_p$  (igual a cero en el cálculo transversal—figura 17.a). Al producirse un cierre de rótula, el proceso es inverso y el módulo pasa del valor  $E_p$  al  $E_e$  elástico inicial.

Este hecho repercute en el análisis de la forma siguiente:

Si se supone que el cierre de rótula tiene lugar durante el escalón de carga  $i$ , se deben realizar las modificaciones que se indican:

- Plastificación longitudinal. Los resultados obtenidos en el mencionado escalón no se tienen en cuenta. El módulo de deformación correspondiente a la sección donde ha tenido lugar el cierre se cambia, adoptándose el valor inicial  $E_e$ . Se repite nuevamente el cálculo para este escalón  $i$ , una vez realizada la modificación anterior, y los resultados que se determinen se suman a los obtenidos hasta el escalón  $i-1$ .
- Plastificación transversal. Las modificaciones a introducir en el análisis son similares a las mencionadas anteriormente. En este caso, la rótula donde tiene lugar el cierre

Nota (\*) Esta condición no supone restricción alguna al comportamiento estructural, ya que las plastificaciones en secciones intermedias pueden ser simuladas mediante la introducción de nudos adicionales.

se convierte en un nudo rígido, con las consiguientes modificaciones en los términos de la matriz de rigidez y esfuerzos de empotramiento rígido del entramado transversal correspondiente.

### 3.4. Justificación del método numérico adoptado

Como se ha mencionado en el apartado 2.5, al analizar las diferentes técnicas numéricas de análisis no lineal, los métodos iterativos sólo resultan adecuados cuando se trata de determinar el estado del sistema bajo un conjunto de cargas supuestamente inferiores a los límites, ya que, en caso contrario, el proceso podría no ser convergente.

Por ese motivo, la técnica aquí adoptada es una técnica incremental. Si además se tienen en cuenta las simplificaciones introducidas por el carácter bilineal de las leyes  $\sigma-e$ , el cálculo puede realizarse de forma lineal entre dos eventos consecutivos (se entiende por evento la formación o cierre de una rótula). Esto permite, a su vez, utilizar una técnica incremental tal que, en lugar de considerar incrementos fijos de carga, éstos vienen determinados de forma directa por la aparición de un evento (figura 18). La ventaja fundamental que presenta esta técnica frente a la de incrementos fijos de carga radica en el hecho de que las situaciones que sucesivamente se van obteniendo corresponden a verdaderos estados de equilibrio.

Sin embargo, tiene los inconvenientes de que, por una parte, la posible existencia de rótulas muy próximas entre sí —cuya relación  $\Delta\lambda/\Delta U$  sea muy pequeña (figura 18)— origina un aumento innecesario de iteraciones y, por otra, debido a los errores de redondeo caractérísticos de un cálculo por computador, no se mantienen las simetrías en la estructura.

Dichos inconvenientes pueden ser soslayados si se introduce el concepto de agrupación de rótulas (figura 18). En este caso el escalón de carga determinado según el proceso general se incrementa en una cantidad adicional, de tal modo que se considera simultánea la aparición de todas las rótulas que se formen dentro de dicho incremento. Ello supone una ligera desviación de la situación de verdadero equilibrio, pero siempre inferior a la que se obtendría mediante una técnica de incrementos fijos de carga (figura 18), con la ventaja adicional de aumentar notablemente la velocidad de convergencia.

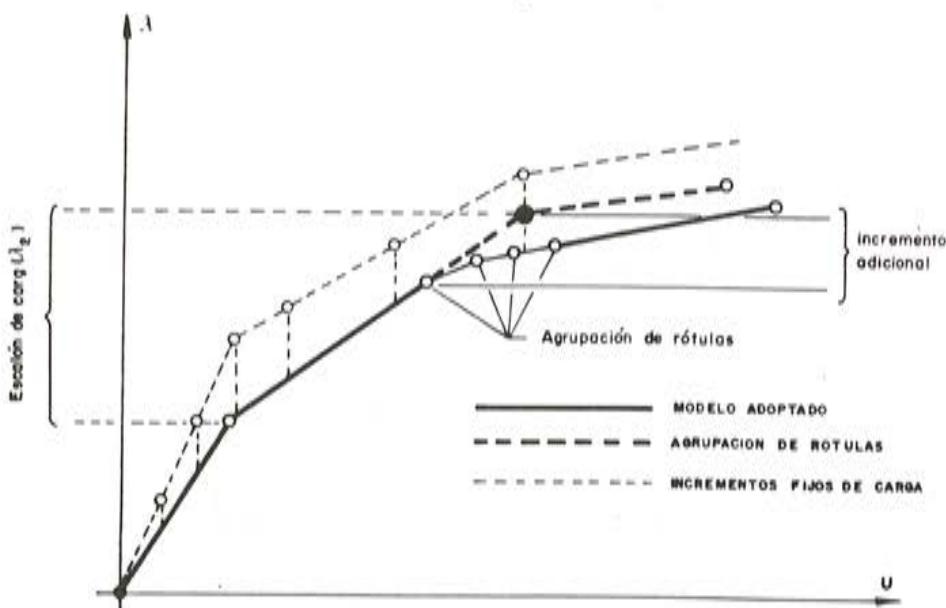


Fig. 18. Método numérico. Representación para un sistema con un grado de libertad.

### 3.5. Criterios que determinan la finalización del proceso de cálculo

El proceso de cálculo finaliza cuando en un ciclo se produce una de las siguientes situaciones:

- Fallo estructural.
- Se cumplen determinadas condiciones previamente establecidas.

#### 3.5.1. Fallo estructural

Se consideran como causas de fallo estructural las siguientes:

- Se alcanza el límite de ductilidad previamente fijado. Se entiende aquí por ductilidad el cociente entre la deformación total y la deformación límite elástica, es decir:

$$\text{Ductilidad} = \frac{k_e + \sum \Delta k_i}{k_e}$$

siendo  $k_e$  la curvatura límite elástica de la sección e  $\Delta k_i$  el incremento plástico de la curvatura debido al escalón de carga  $\Delta p_i$ .

- En el mencionado ciclo la relación entre el incremento de carga  $\lambda$  y la flecha máxima obtenida en el mismo es menor que un valor previamente definido.
- Se produce una matriz de rigidez singular en el cálculo transversal, como consecuencia de la formación de un mecanismo en el entramado correspondiente.
- Se produce una ruina parcial de la estructura por rotura de un voladizo.

#### 3.5.2. Condiciones previas

El cálculo mencionado debe finalizarse si se alcanza el valor total de la carga aplicada. A veces, en situaciones estructurales muy anormales, conviene evitar un tiempo excesivo de computación prescribiendo el número máximo de ciclos de carga permitidos.

## 4. PROGRAMA DE COMPUTADOR

Basado en el modelo anterior se ha realizado un programa de computador, en lenguaje FORTRAN, implementado en un ordenador HP3000, que permite el cálculo elastoplástico de láminas plegadas no prismáticas, largas, de sección transversal totalmente arbitraria y sometidas a la actuación de cualquier tipo de cargas. El diagrama de flujo correspondiente a tal programa se muestra en la figura 19.

## 5. EJEMPLO ILUSTRATIVO

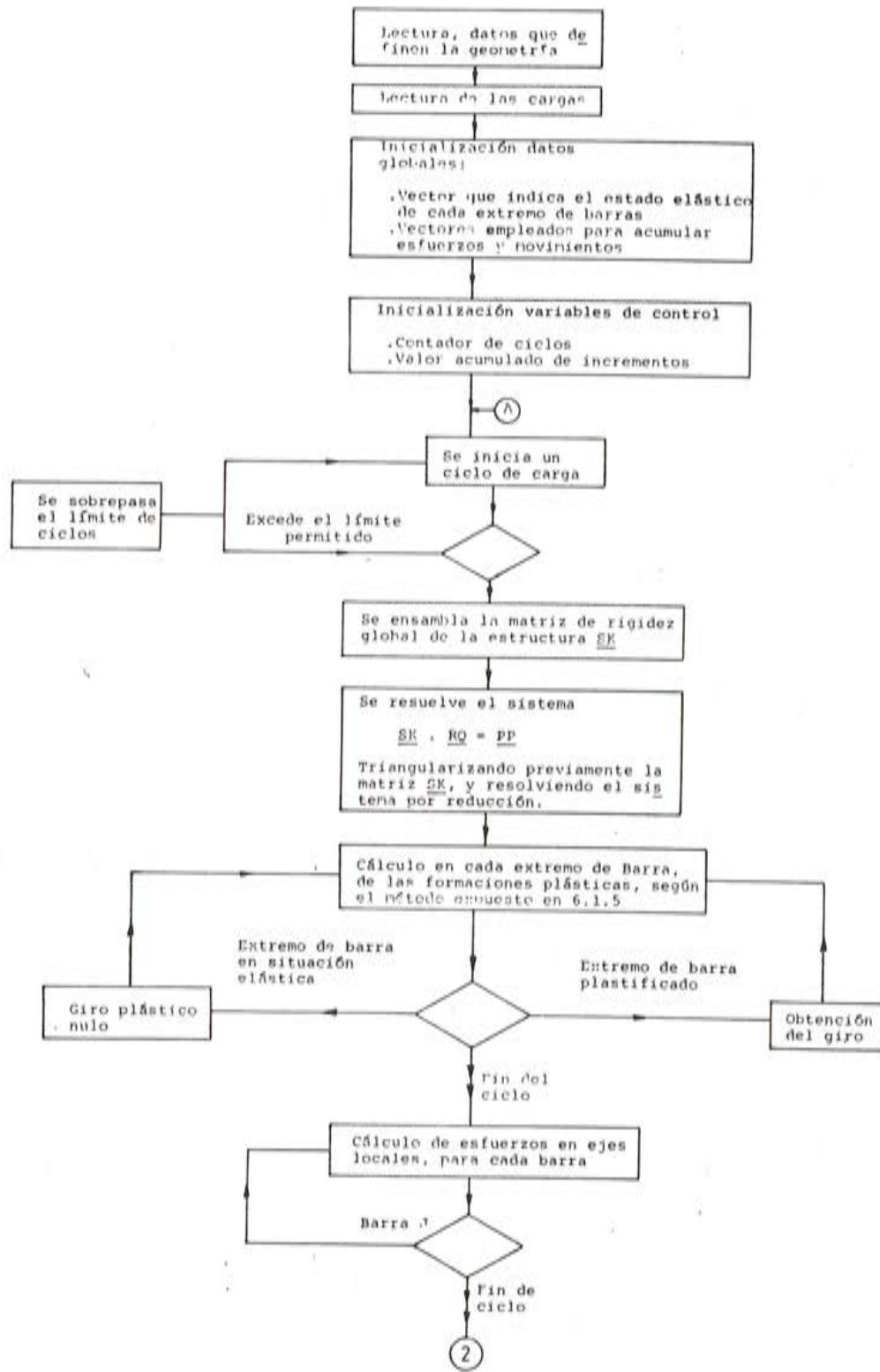
El ejemplo que se presenta en este apartado tiene por objeto el comprobar la validez del modelo de comportamiento elastoplástico anteriormente descrito, así como servir de guía para explicar el proceso general seguido en el mismo.

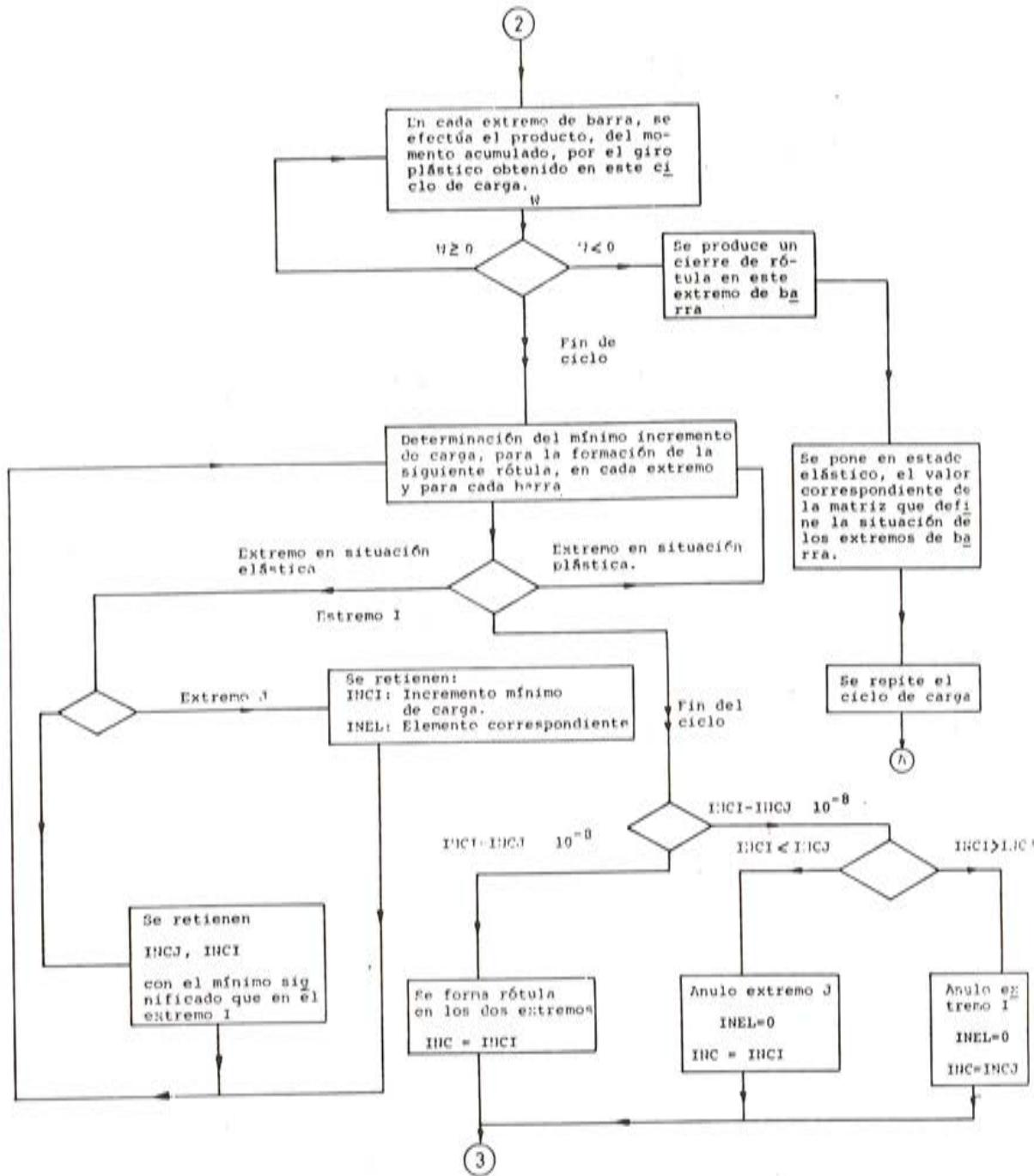
Con esa finalidad se ha elegido una lámina prismática de 30.00 m de luz, cuyas características geométricas se muestran en la figura 20.

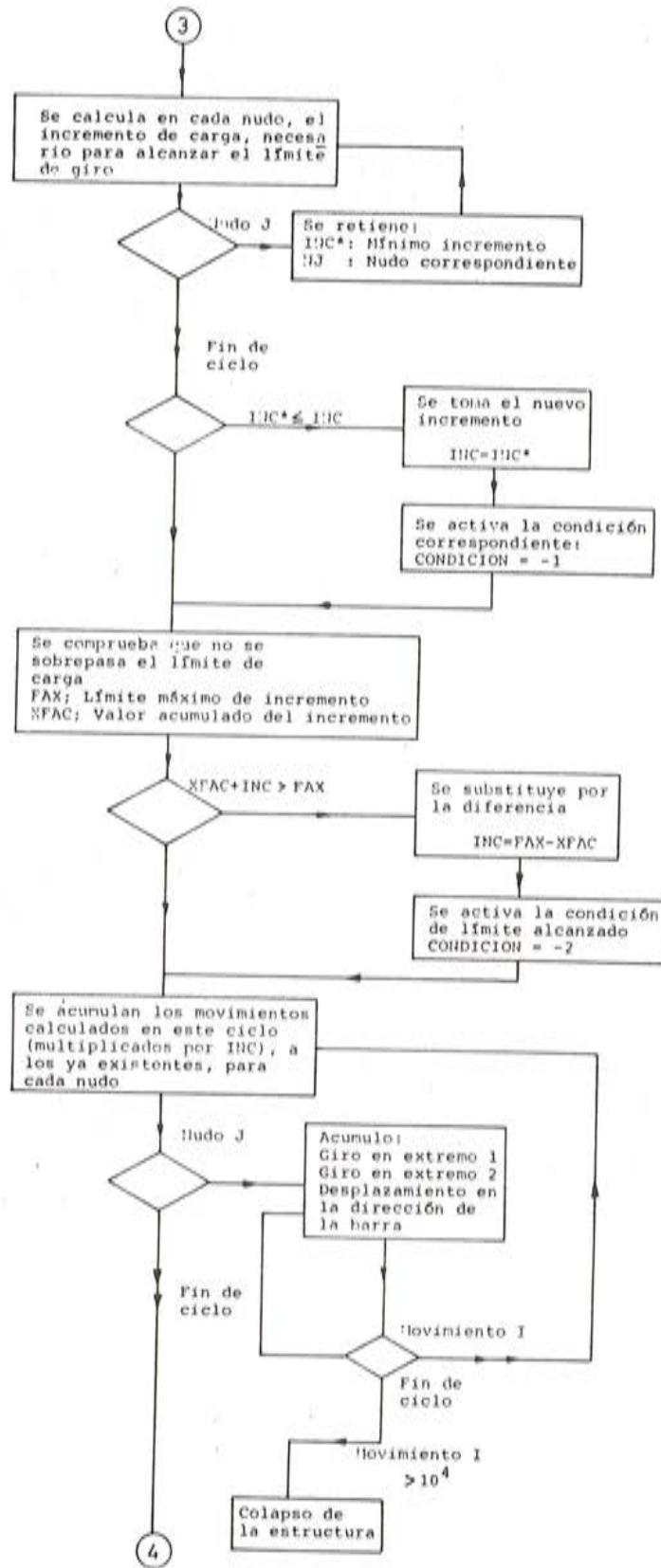
Como datos básicos del cálculo se han adoptado los siguientes:

-- Módulo de deformación longitudinal:  $E_e = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ .

- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0.20$ .
- Módulo plástico:  $E_p = 0.01 \times E_e = 2 \times 10^4 \text{ t/m}^2$ .
- Límite elástico:  $5000 \text{ t/m}^2$ .
- Coeficiente de forma: 1.5; correspondiente a una sección rectangular. Se supone idéntico para ambos momentos de plastificación: positivo y negativo.







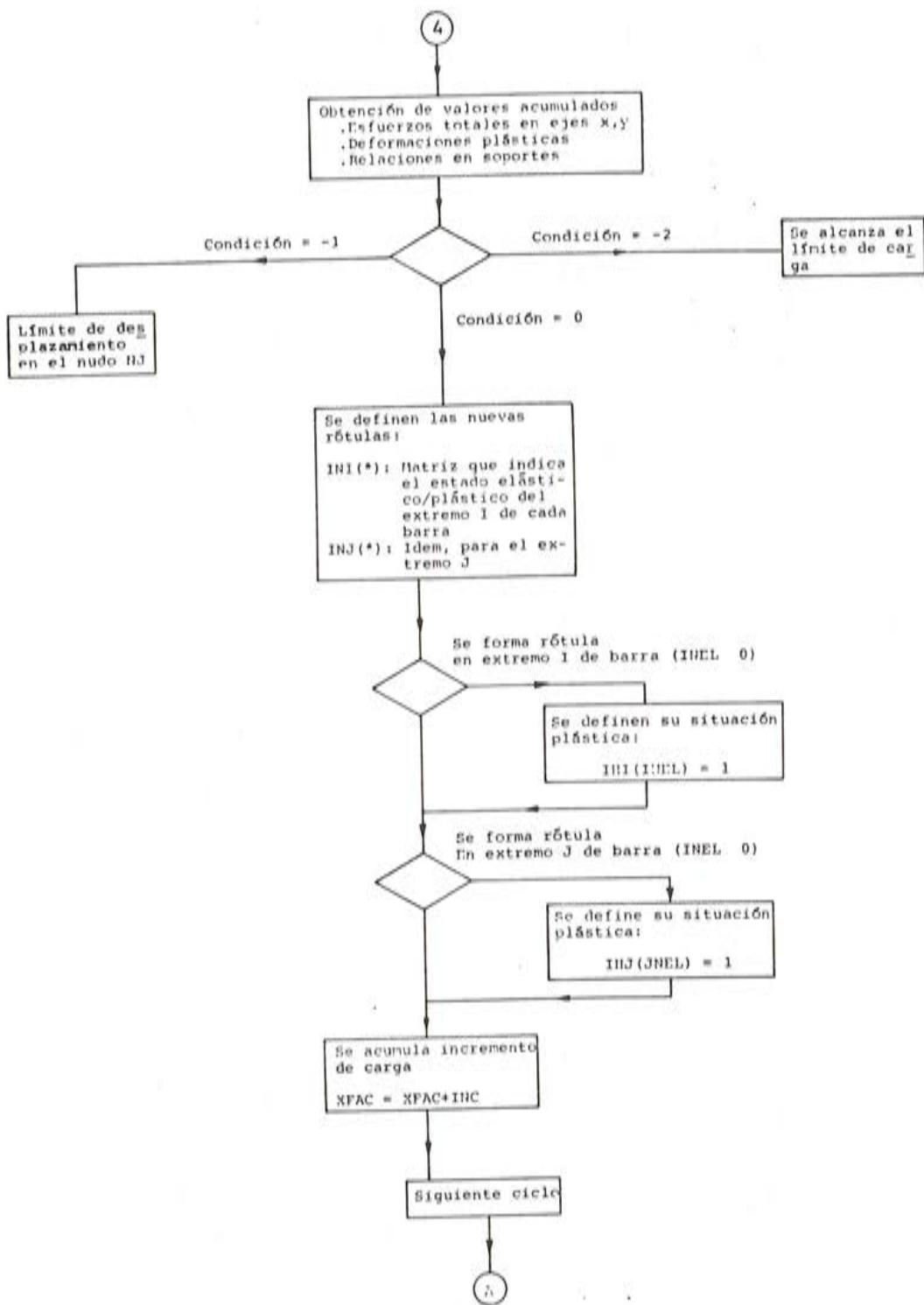


Fig. 19. Diagrama de flujo.

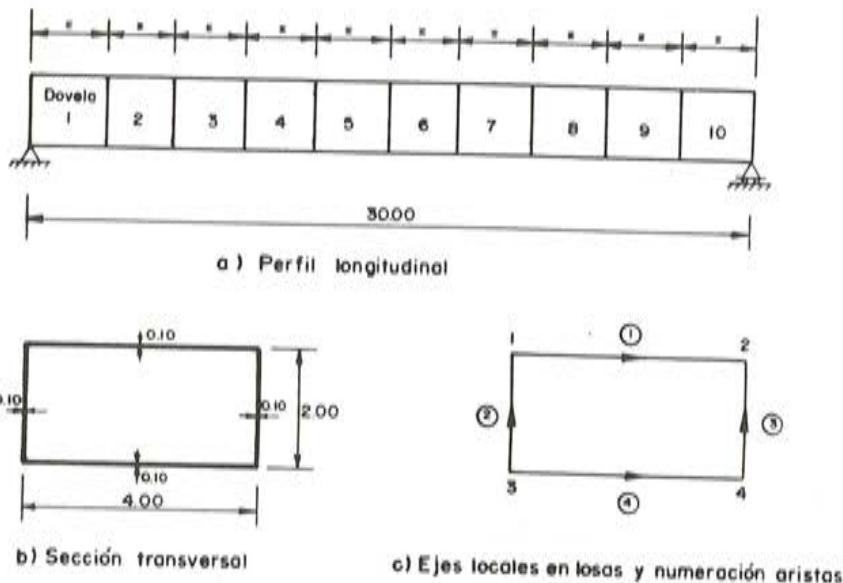


Fig. 20. Ejemplo ilustrativo. Geometría.

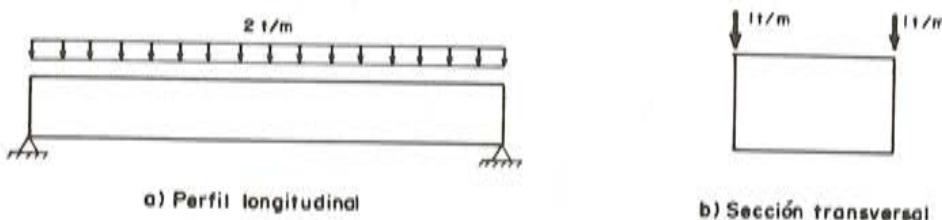


Fig. 21. Ejemplo ilustrativo. Acciones exteriores.

La estructura se discretiza en 10 dovelas, tal como queda reflejado en la figura 20.a.

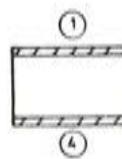
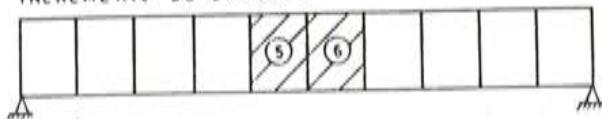
Se considera como acción exterior un cuchillo de carga de 1 t/m que actúa a todo lo largo de las aristas 1 y 2 (figura 21).

Durante el proceso de cálculo no se limita el número de ciclos ni el valor máximo de la carga externa. La única limitación impuesta corresponde a la ductilidad, para la cual se ha adoptado un valor suficientemente alto -15-, tanto en el cálculo longitudinal como en el transversal, a fin de poder comparar los resultados numéricos alcanzados con los deducidos a partir de un cálculo manual.

Se adopta para el "radio" que determina el intervalo de plastificación simultánea un valor de 0.2.

En la figura 22 se representa, de forma esquemática, la evolución histórica de la estructura para los sucesivos escalones de carga, a través de los cuales se aplica la carga total necesaria para provocar la supuesta ruina de la estructura cuando una rótula plástica alcance el límite de ductilidad.

INCREMENTO DE CARGA = 1



$$\Delta q_1 = 19,5$$

$$Q_1^T = 19,5$$

INCREMENTO DE CARGA = 2

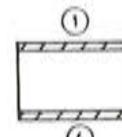
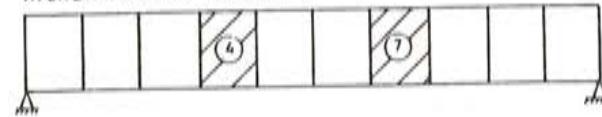


$$\Delta q_2 = 0,636$$

$$Q_2^T = 20,336$$

Sección nodal	5		6	
Losa	1	4	1	4
Duc. Long.	1,50	1,50	1,50	1,50

INCREMENTO DE CARGA = 3

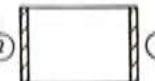
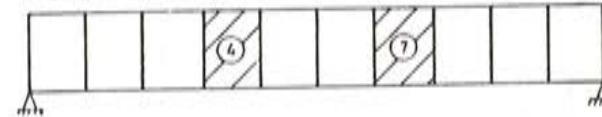


$$\Delta q_3 = 0,672$$

$$Q_3^T = 21,21$$

Sección nodal	5				6			
Losa	1	2	3	4	1	2	3	4
Duc. Long.	5,98	3,99	3,99	5,98	5,98	3,99	3,99	5,98

INCREMENTO DE CARGA = 4



$$\Delta q_4 = 0,912$$

$$Q_4^T = 22,112$$

Sección nodal	5				6				7			
Losa	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Duc. Long.	10,67	7,11	7,11	10,67	10,67	7,11	7,11	10,67	1,5	1,5	1,5	1,5

$$\Delta q_5 = 0,642$$

INCREMENTO DE CARGA = 5

$$Q_5^T = 22,964$$

Sección nodal	5				6				7			
Losa	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Duc. Long.	15	10	10	15	15	10	10	15	5,48	3,65	3,65	5,48

• Rótula transversal.

Sección nodal donde se produce la rótula plástica

Plastificación longitudinal.

Fig. 22. Ejemplo ilustrativo. Resultados.

En los esquemas que representan el estado de la estructura en cada ciclo, se añaden los valores de los resultados correspondientes a dicho escalón a los obtenidos en los ciclos anteriores. También se indica el valor acumulado de la ductilidad en cada una de las rótulas aparecidas hasta ese momento, diferenciándose, según la leyenda, las originadas en el cálculo transversal de las que provienen del longitudinal.

Los resultados obtenidos se pueden comparar con los provenientes de considerar la estructura como una viga de longitud  $L = 30.00$  m. En ese caso, el momento de plastificación,  $M_p^0$ , viene dado por (figura 23):

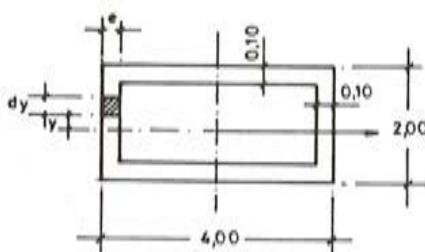


Fig. 23. Momento plástico de la sección.

$$M_p^0 = \int_0^1 (ey dy) \sigma_F = 4 \times 0,2205 \times 5000 = 4410 \text{ mt}$$

Si se integran las tensiones normales obtenidas en el cálculo plástico mediante computador para la sección nodal de la dovela 5, se obtiene un momento de valor:  $M_p^1 = 4840.5$  mt, que supone un exceso del 9.7 por 100 respecto al momento de plastificación teórico anterior. La aproximación alcanzada es bastante buena y el exceso que aparece admite una sencilla justificación, si se tiene en cuenta que el valor de  $M_p^0$  ha sido obtenido bajo la hipótesis de material elastoplástico perfecto, por lo que, una vez alcanzada la tensión de fluencia, ésta no es superada en ningún caso. Sin embargo, en el cálculo longitudinal como lámina plegada se adopta un modelo plástico con endurecimiento a la deformación, lo cual permite a la sección seguir aumentando sus tensiones aun cuando se haya alcanzado el mencionado límite de fluencia.

## 6. ANALISIS PARAMETRICO

### 6.1. Influencia del tipo de carga

Con objeto de obtener información acerca del proceso de redistribución de esfuerzos y tensiones que supone el cálculo plástico de una estructura, ha parecido adecuado estudiar un ejemplo sencillo. Para ello se ha considerado una viga de sección transversal cajón, cuyas dimensiones, así como la distribución transversal de la carga exterior actuante, se modifican. De esta forma, es posible analizar la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la respuesta plástica de la estructura y evaluar su importancia relativa.

Si bien el estudio se centra en un caso concreto y simple, con él se intenta ilustrar acerca de las ventajas que supone la aplicación juiciosa del procedimiento a otros tipos estructurales más complejos, para comprender su comportamiento último en rotura. Por otra parte, muchos de los resultados obtenidos en este ejemplo pueden ser extendidos directamente a otros tipos de estructuras.

A fin de estudiar la influencia de la geometría de la lámina plegada, así como del tipo de carga, en los resultados del análisis, se ha calculado la estructura cuyas características se muestran en la figura 24, para la cual se ha considerado una discretización en cinco dovelas.

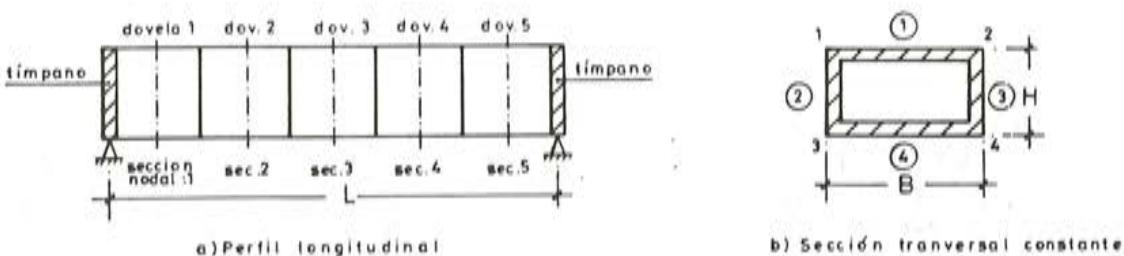


Fig. 24. Análisis paramétrico. Geometría.

Con objeto de comprobar el comportamiento de la estructura anterior ante diferentes situaciones de carga, se han adoptado inicialmente las siguientes dimensiones:

$$L = 30.00 \text{ m} ; B = 8.00 \text{ m} ; H = 2.00 \text{ m}.$$

Espesores (\*) de membrana ( $e_m$ ) y de placa ( $e_p$ ) de las losas 1 y 4: 0.225 m;  $e_m$  y  $e_p$  de las losas 2 y 3: 0.30 m. Por último,  $E_p = 0.01 E_e$ .

Se han analizado dos situaciones de carga de valor total igual en ambos casos (figura 25):

- Carga uniforme a todo ancho en la losa 1:  $p = 1 \text{ t/m}^2$ .
- Cuchillo de carga en la arista 1:  $q = 8 \text{ t/m}$ .

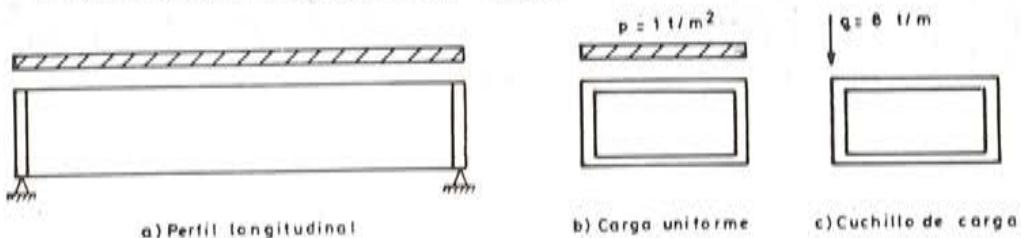


Fig. 25. Análisis paramétrico. Cargas.

Ambas cargas se han incrementado desde los valores iniciales anteriores hasta alcanzar el colapso de la estructura, habiendo considerado una ductilidad máxima de 15, tanto transversal como longitudinalmente, con objeto de analizar la evolución de la lámina ante sucesivas plastificaciones.

Nota (\*)  $e_m$  simula el espesor que transmite las tensiones axiles longitudinales. Por otra parte,  $e_p$  corresponde al canto con que la sección resiste a la flexión transversal. En el caso de una sección con "costillas" o nervios de refuerzo,  $e_m$  corresponde al espesor del área media y  $e_p$  al de una sección rectangular con inercia a flexión equivalente.

A continuación se especifican con cierto detalle los resultados deducidos para cada uno de los incrementos de carga.

— *Carga uniforme:*  $p = 1 \text{ t/m}^2$ .

TABLA 1

Escalón de carga	Incremento de carga	Carga total, $P^T$	Tipo de plastificación	Sección nodal de ocurrencia	Losa	Extremo	Ductilidad alcanzada
1	12,50 p	12,50 p	Transversal	1-2-3-4-5	1	1-2	—
2	2,97 p	15,47 p	Transversal	1-2-3-4-5	1	CL	8,2

Se llega a la rotura debido a la formación de un mecanismo transversal, para una carga total de valor  $15.47p$  y una ductilidad de 8.2. En la figura 26 se esquematizan los resultados obtenidos.

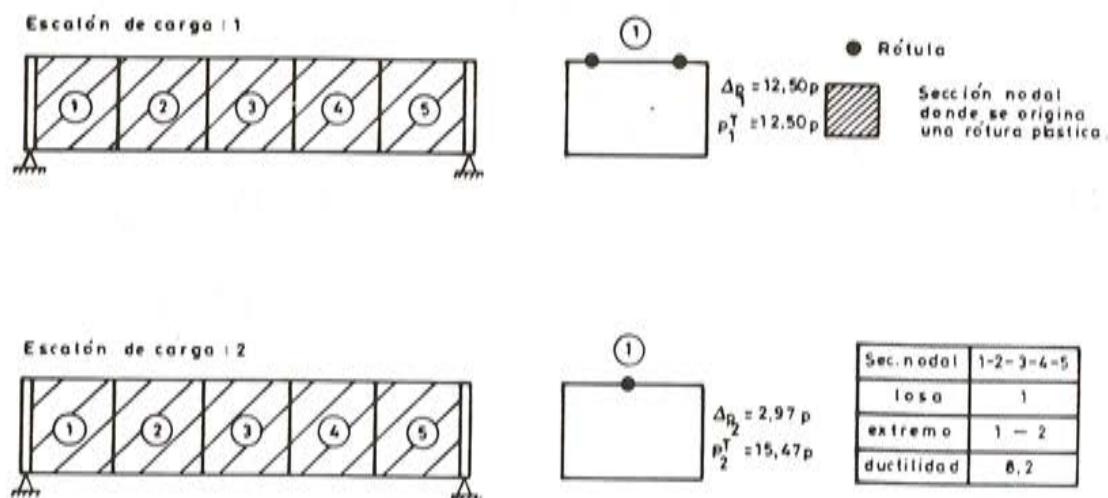


Fig. 26. Análisis paramétrico. Resultados (carga uniforme).

– Cuchillo de carga:  $q = 8 \text{ t/m}$ .

TABLA 2

Escalón de carga	Incremento de carga	Carga total, $Q^T$	Tipo de plastificación	Sección nodal de ocurrencia	Losa	Extremo	Ductilidad alcanzada
1	16,60 q	16,60 q	Transversal	3	1-4	1-2	—
2	1,89 q	18,49 q	Longitudinal	3	1-4	—	3,08
3	0,41 q	18,90 q	Longitudinal	3	2	—	3,40
			Transversal	2-4	1-4	1-2	3,40
4	0,60 q	19,50 q	—	—	—	—	15,00
4	0,99 q	19,89 q	Transversal	1-4	1-4	1-2	> 15,00

En la figura 27 se muestran, de forma esquemática los resultados obtenidos en los sucesivos escalones de carga. Se observa (figura 27.a) que, al seguir incrementando la carga desde  $Q^T = 18.89 \text{ q}$ , se alcanza la ductilidad máxima, con el mismo mecanismo de plastificación, al llegar al nivel  $Q^T = 19.50 \text{ q}$ . Si no existiese este límite de ductilidad, el mecanismo siguiente de plastificación sería el indicado en la figura 27.b. Los resultados de las ductilidades se muestran en la figura 27.c.

De los resultados obtenidos en este segundo caso de cuchillo de carga, se observa la aparición de dos tipos de plastificación –longitudinal y transversal–, para los sucesivos incrementos de dicho cuchillo.

Si se comparan ambos casos de carga, se comprueba que la situación primera (carga uniforme) resulta, para las mismas características geométricas y resistentes de la estructura, más desfavorable. El material no se aprovecha al máximo, debido a la formación de un mecanismo transversal de rotura que impide alcanzar la ductilidad límite impuesta.

Se ha procedido a una sencilla comprobación de los anteriores resultados, consistente en comparar el momento flector plástico global ( $M_{p}^0$ ) de la estructura considerada como una viga de luz L, obtenido en la hipótesis de material elastoplástico perfecto, con el momento  $M_p^1$  deducido en cada caso de la teoría de lámina plegada, mediante integración de las tensiones longitudinales en la sección central.

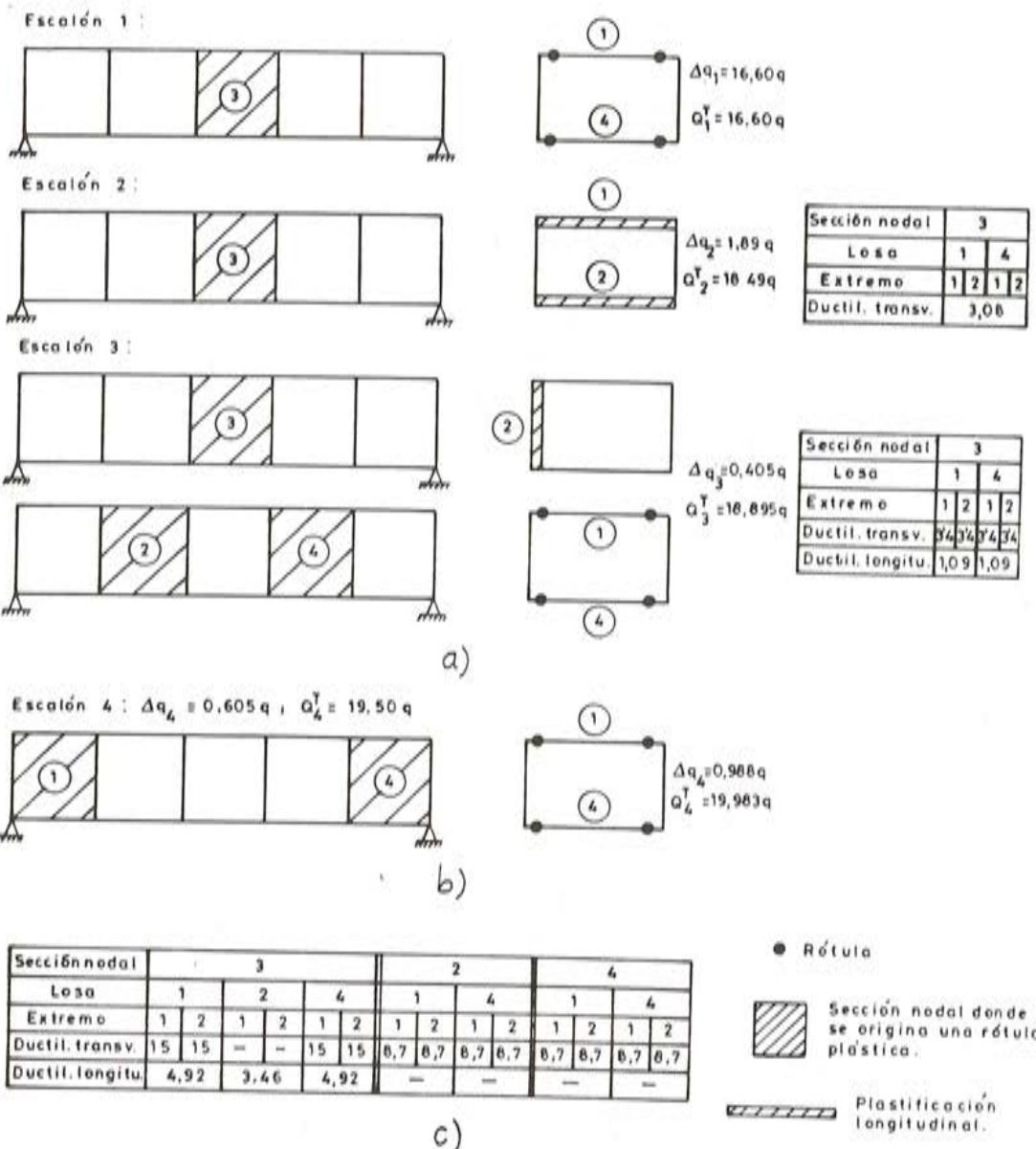


Fig. 27. Análisis paramétrico, Resultados (cuchillo de carga).

Se obtiene:

a) Viga:

$$M_p^0 = 2 \left( \int_0^{H/2} ey dy \right) \sigma_F = 2 \times 1,95 \times 5,000 = 1,95 \times 10^4 \text{ m}$$

b) Lámina plegada:

— Carga uniforme:  $M_p^1 = 1,5 \times 10^4 \text{ mt}$

— Cuchillo de carga:  $M_p^1 = 1,8 \times 10^4 \text{ mt}$

La aproximación entre los valores de  $M_p^1$  y  $M_p^0$  es relativamente buena para el caso de cuchillo de carga. La pequeña diferencia existente puede ser explicada por la aparición de un momento torsor y por las limitaciones impuestas al factor de ductilidad.

El menor valor de  $M_p^1$  para el caso de carga uniforme es razonable, ya que el tipo de colapso producido en la estructura viene determinado por la formación del mecanismo transversal de rotura, que no es captado en un análisis elemental como viga de la lámina plegada.

La evolución de las diferentes magnitudes de interés en el cálculo (esfuerzos de laja y placa, y movimientos), a medida que se producen las sucesivas plastificaciones, se representa en los gráficos siguientes. Estas magnitudes se definen en la figura 28, en donde se indican las secciones nodales en las que se han obtenido los distintos resultados.

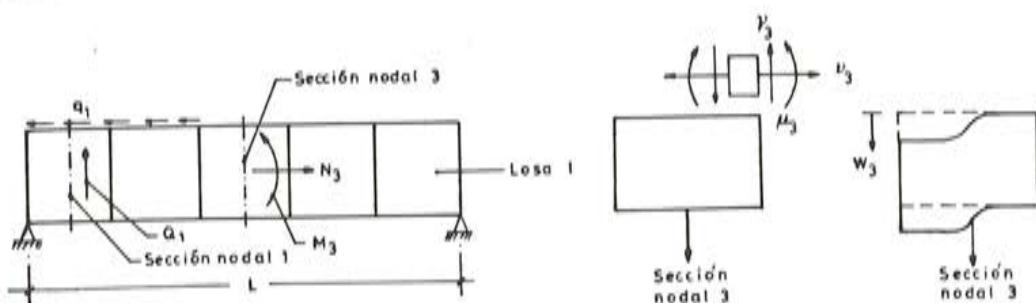


Fig. 28. Análisis paramétrico. Definición de los resultados.

En la figura 29 se muestran los esfuerzos longitudinales (membrana), para diferentes losas, en la sección nodal 3( $M_3, N_3$ ) y en la sección nodal 1( $Q_1$ ), para ambas situaciones de carga: uniforme y cuchillo. En abscisas se representan los valores adimensionales (fracciones de la carga total en cada escalón):

$$P_i = P_i^T/p; \quad Q_i = Q_i^T/q$$

Se han señalado con un círculo los puntos correspondientes a aquellos valores característicos para los que se produce una plastificación, ya sea longitudinal ya transversalmente. La interpretación de los gráficos se realiza de acuerdo con los valores definidos en las figuras 26 y 27.

En la figura 30 se han dibujado las gráficas correspondientes a los rasantes,  $q_1$  (sección nodal 1) y esfuerzos transversales,  $\mu_3, \gamma_3$  y  $v_3$  (sección nodal 3) y, finalmente, en la figura 31 se indican los valores de los movimientos verticales de las aristas,  $w_3$ , en la sección nodal 3.

Se comprueba de nuevo que la formación del mecanismo de rotura transversal, en el caso de acción uniforme, reduce sensiblemente el valor de la carga de agotamiento de la estructura.

La plastificación de una sección según el criterio de fluencia dado por la expresión:

$$\left[ \frac{M}{M_p} \right] + \left[ \frac{N}{N_p} \right]^2 = 1$$

queda claramente reflejada en las relaciones existentes entre los diagramas de momentos y de axiles (longitudinal y transversalmente). Asimismo, en el caso de plastificación longitudinal, la sección aún puede admitir incrementos en los valores de los esfuerzos, debido, como es natural, a la relación constitutiva considerada; en otros términos, debido al valor  $E_p = 0.01 E_e \neq 0$ . Sin embargo, para la plastificación transversal y dado que se ha tomado  $E_p = 0$ , una vez alcanzada ésta no son posibles nuevos incrementos, lo cual queda reflejado en los correspondientes tramos de la figura 30.

Por último, y en lo que se refiere a las flechas alcanzadas en rotura, se observa que, para situaciones muy cercanas a aquélla, los valores aproximados de 30 cm suponen un 1 por 100 de la luz de la viga, por lo que la hipótesis de linealidad geométrica podría considerarse todavía válida.

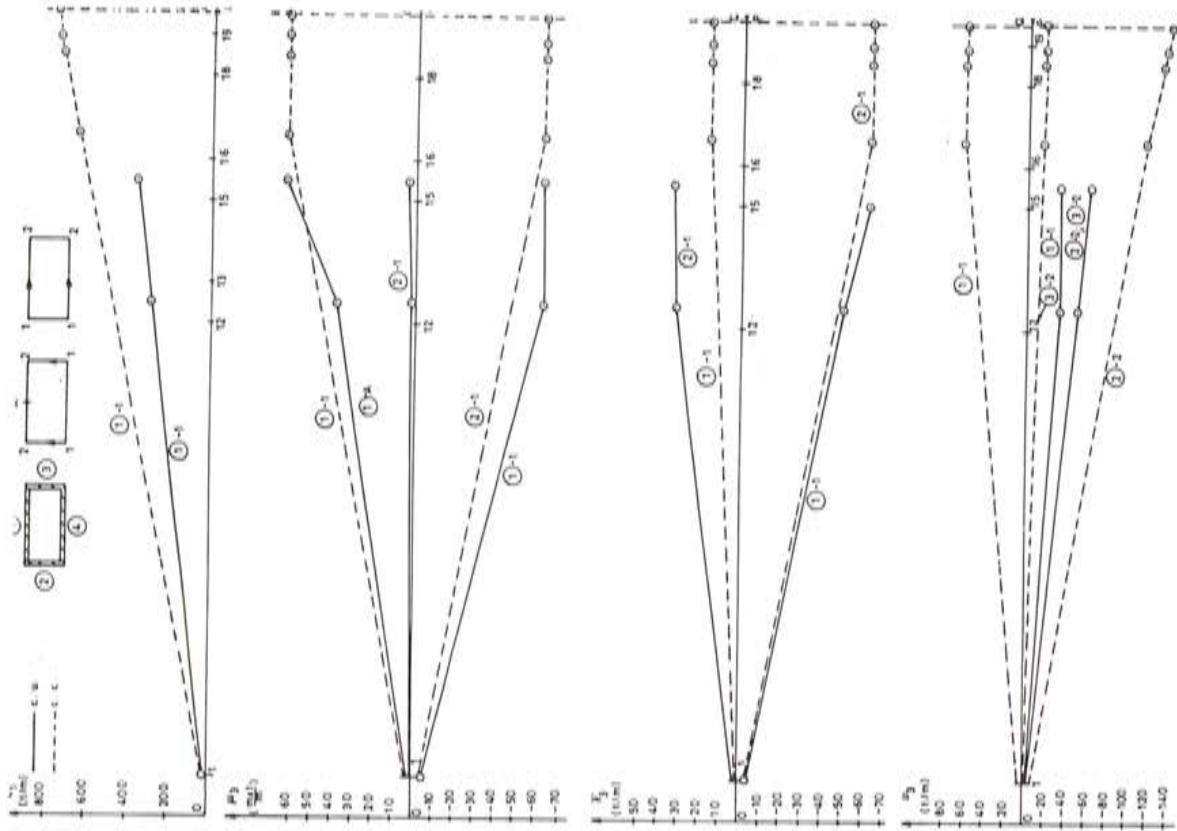


Fig. 30. Evolución de los rasantes longitudinales en la sección centro-luz y los (sección centro-luz) para diferentes soportes y apoyos, para diferentes losas.

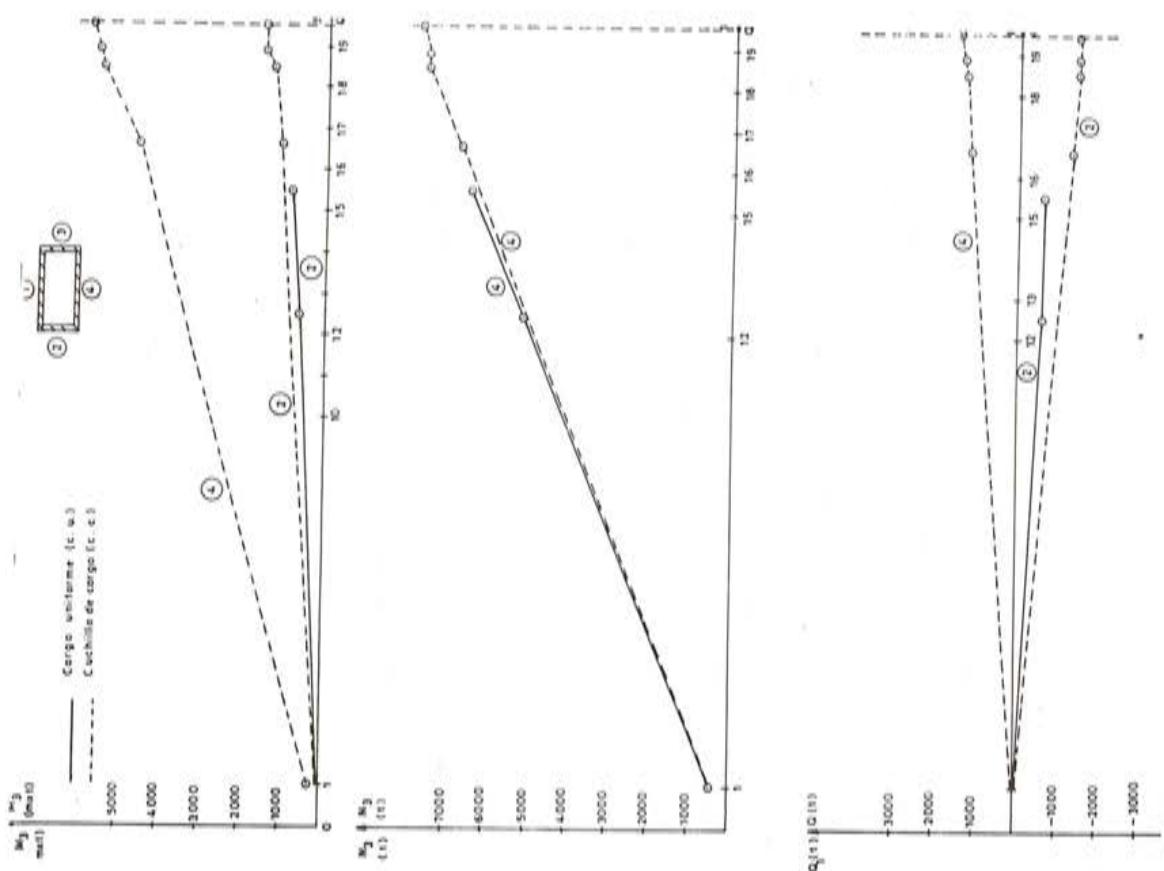


Fig. 29. Evolución de los esfuerzos longitudinales en la sección centro-luz y de apoyos, para diferentes losas.

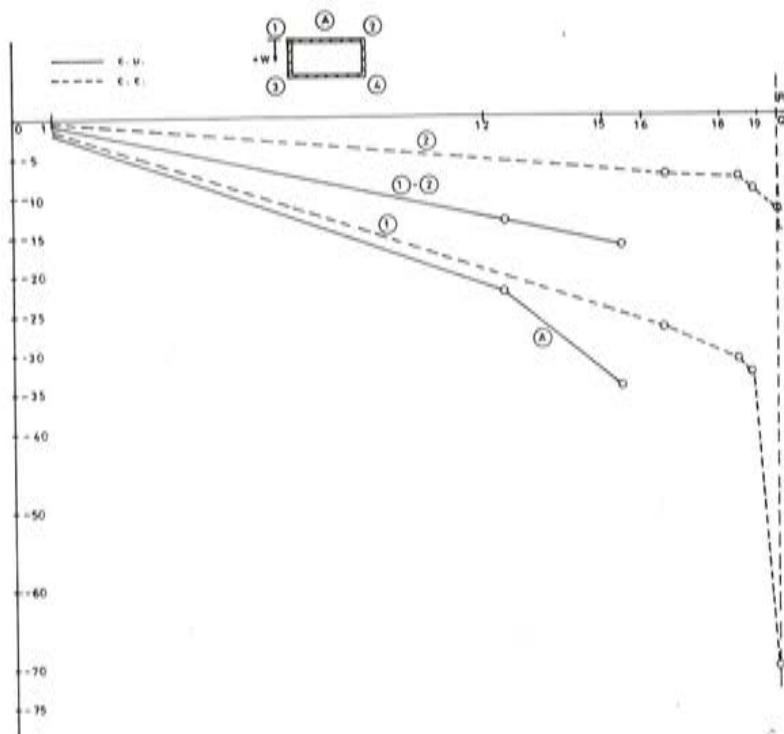


Fig. 31. Evolución de las flechas en diferentes puntos de la sección centro-luz.

## 6.2. Influencia de la geometría

Con objeto de alcanzar una mejor comprensión del mecanismo de redistribución de esfuerzos por la plastificación de las distintas secciones, se ha efectuado un análisis adicional; en dicho análisis la estructura considerada ha sido la representada en la figura 24, pero variando la dimensión  $B$ , habiéndose adoptado  $B=4.00, 6.00, 8.00, 10.00$  y  $12.00$  metros. Se han estudiado los dos tipos de carga ya mencionados: uniformemente repartida de valor  $p = 1 \text{ t/m}^2$  sobre la losa 1, y cuchillo de carga sobre la arista 1, de valor  $q = p \times B \text{ t/m}$ .

Con objeto de que los resultados alcanzados sean comparables, se ha mantenido la inercia a flexión de la sección total, lo cual se ha llevado a cabo conservando  $H = 2,00 \text{ m}$  y el espesor de las losas 2 y 3 igual a 30 cm. Por lo tanto, se ha aumentado o reducido el espesor de las losas 1 y 4, de acuerdo con el valor de  $B$ , a fin de que el área de  $1,80 \text{ m}^2$  de la sección transversal de dichas losas permanezca constante.

En la figura 32.a se ha representado la carga total de rotura en ambas situaciones: acción uniforme,  $P_f^T$ , y cuchillo de carga,  $Q_f^T$ , en función, en ambos casos, del ancho  $B$ . Se observa que el valor  $B = 6,50 \text{ m}$  corresponde a un punto crítico; para valores mayores de 6,50 m, la carga de colapso es superior bajo la actuación del cuchillo de carga, a pesar de la desnivelación de aristas que en dicho caso se produce. Ello es debido a la formación del mecanismo de rotura transversal que, para valores de  $B$  suficientemente grandes, y en el caso de acción repartida, es determinante en la resistencia última de la sección.

Por el contrario, para valores de  $B$  comprendidos entre 5,00 y 6,50 m, es el cuchillo de carga el que determina la carga de rotura.

Cuando  $B < 5,00$ , la deformabilidad de la sección influye poco en los resultados, dado que la estructura se aproxima cada vez más a una viga y ambas situaciones de carga conducen al mismo valor de la carga última.

Así pues, dos conclusiones se deducen de forma inmediata: Por una parte, existe un valor de  $B$  crítico ( $B = 6,50$  m, en este caso), para el cual la relación  $Q_f^T/P_f^T = 1$  (figura 32.b); es decir, la carga última es la misma, ya se trate de acción repartida, ya de un cuchillo de carga. Para valores de  $B$  superiores al crítico ( $B > 6,50$  m) se está infrautilizando el material en el trabajo de membrana de las diferentes losas, ya que el mecanismo de rotura por flexión transversal es el que determina la carga de colapso.

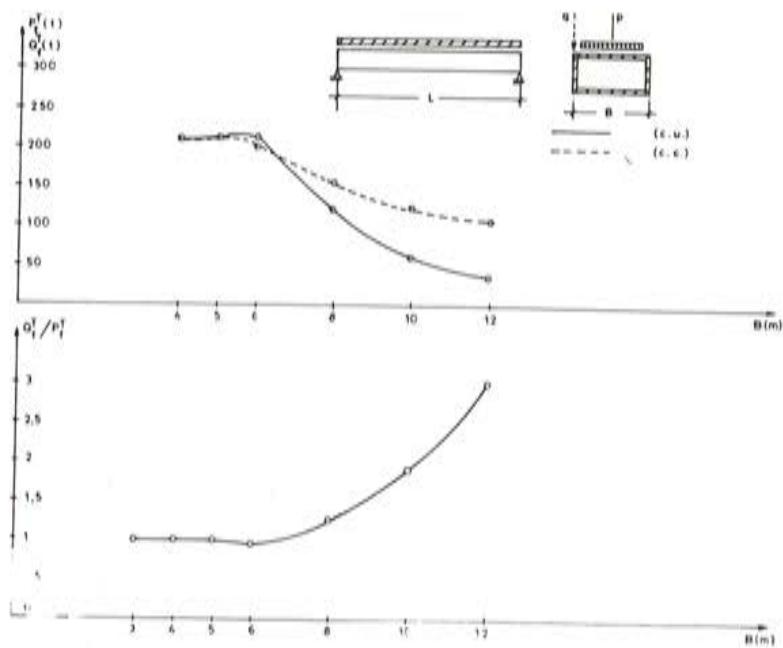


Fig. 32. Carga de colapso en función del ancho  $B$ .

### 6.3. Optimización estructural

Una forma usual de obviar la infrautilización de material señalada en el apartado anterior consiste en considerar diferentes espesores de membrana ( $e_m$ ) y de placa ( $e_p$ ), que se materializan en la práctica mediante la utilización de rigidizadores o costillas transversales, que mantienen la rigidez a flexión transversal dentro de los límites requeridos, sin afectar a las características resistentes longitudinales.

Un modo de optimizar la sección consiste en encontrar la relación de espesores  $e_m/e_p$  para la cual las roturas longitudinal y transversal se producen simultáneamente.

A fin de simplificar el costoso análisis que implica el objetivo anterior, se ha determinado aquí la relación  $e_m/e_p$  para la cual la primera plastificación longitudinal se verifica de modo simultáneo a la primera plastificación transversal. Ello resulta suficiente a efectos prácticos, pues se ha comprobado en la mayor parte de los casos analizados que, en la situación más desfavorable, el primer incremento de carga representa el 90 por 100 de la carga de rotura.

Así pues, y para ese primer incremento, la relación óptima  $e_m/e_p$  de plastificación simultánea puede determinarse siguiendo dos procedimientos: 1) Fijando  $e_p$  y variando  $e_m$ ,

lo que tiene mayor sentido para valores pequeños de  $B$  ( $5,00 < B < 6,50$ ), para los cuales la plastificación longitudinal es determinante, o bien, 2) fijando  $e_m$  y variando  $e_p$  —situación usual en la práctica—, que tiene sentido, en este caso particular, para  $B > 6,50$  m, cuando es dominante el mecanismo transversal.

Ejemplos ilustrativos de ambas posibilidades, para los diferentes valores de  $B$ , se muestran en las figuras 33 y siguientes, que serán comentadas seguidamente. Con objeto de que los resultados obtenidos puedan ser comparados adecuadamente, y tal como se ha explicado en el apartado anterior, se mantienen constantes el canto  $H = 2,00$  m y los espesores de las losas 2 y 3 (iguales a 30 cm), y se varía el espesor de las losas 1 y 4, de acuerdo con el valor de  $B$ , de forma tal que el área de dichas losas permanezca constante ( $1,80 \text{ m}^2$ , en este caso), o lo que es igual, que se mantenga constante la inercia a flexión de la sección total. En abscisas se toman los valores adimensionales  $P_i$  (acción uniforme) y  $Q_i$  (cuchillo), correspondientes a sucesivos incrementos de carga. En ordenadas, los valores de  $e_p$  (o  $e_m$ ), para un valor fijo de  $e_m$  (o  $e_p$ ) y de  $B$ . Con las letras T y L se hace referencia a las plastificaciones transversal y longitudinal, respectivamente, para el citado primer incremento de carga.

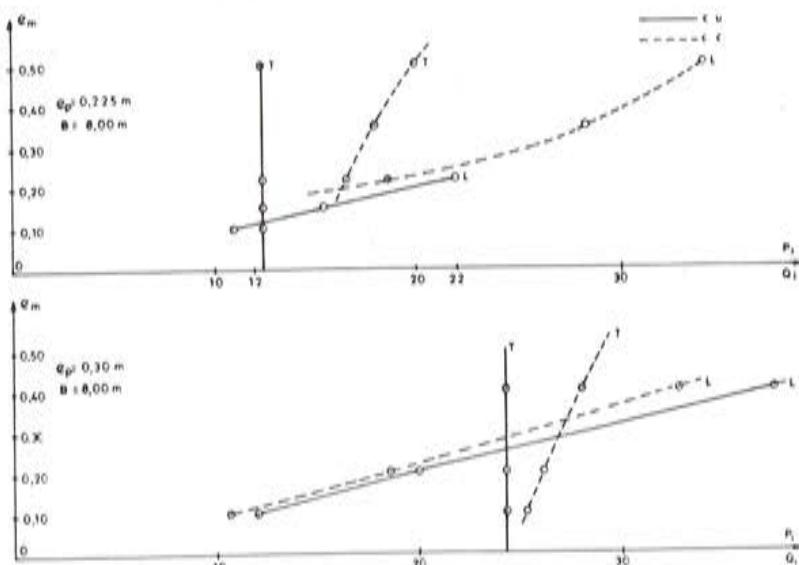


Fig. 33. Influencia de la variación de espesores en la formación de rótulas plásticas.

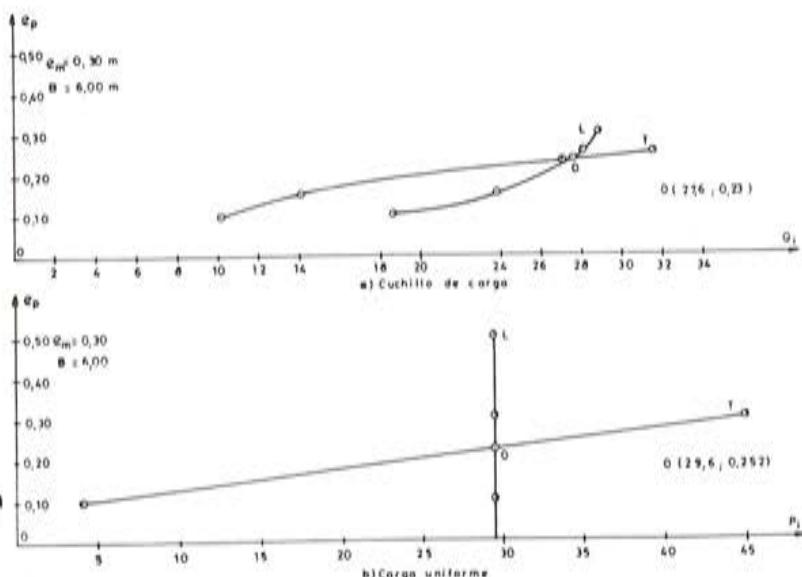


Fig. 34. Influencia de la variación de espesores en la formación de rótulas. ( $B = 6,00$  m).

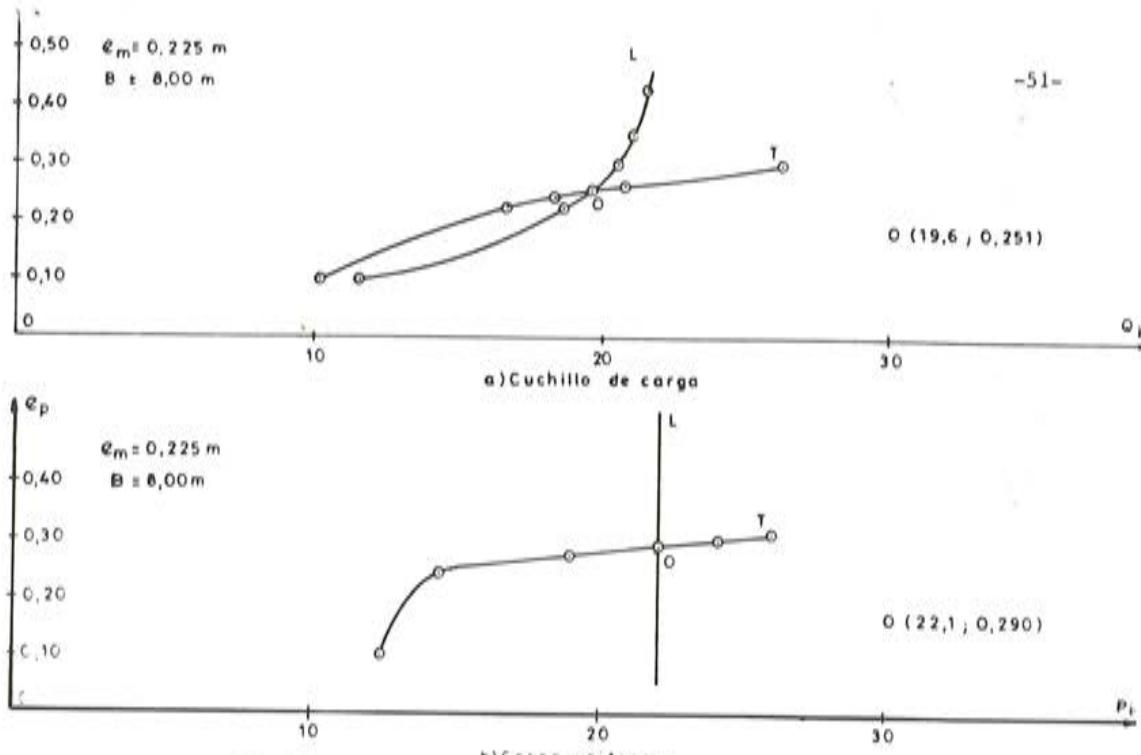


Fig. 35. Influencia de la variación de espesores ( $B = 8.00 \text{ m}$ ).

En las figuras 33 y 34 se representan los resultados de dos ejemplos cuyo interés es meramente teórico, habida cuenta de los razonamientos referentes a los mecanismos de rotura, anteriormente expuestos. En la primera se ha tomado  $B = 8,00 \text{ m}$  y se han fijado los valores de  $e_p$  en dos casos ( $0,225$  y  $0,30 \text{ m}$ ), obteniéndose curvas  $e_m (P_i)$ ,  $e_m (Q_i)$ , en ambas situaciones de carga, que definen en cada caso el valor de  $e_m$  para el cual ambos mecanismos de rotura —transversal y longitudinal— se alcanzan simultáneamente.

Análogas consideraciones pueden hacerse sobre la figura 34, salvo que en ese caso se ha mantenido constante  $e_m = 0,30 \text{ m}$ , obteniéndose el valor óptimo de  $e_p$ .

En las figuras 35, 36 y 37 se representan tres casos de interés práctico, puesto que corresponden a situaciones en las que, manteniendo el espesor de membrana, se pretende obtener el espesor de placa óptimo mediante la introducción de rigidizadores transversales. Dichos casos corresponden a valores de  $B$  iguales a  $8,00$ ,  $10,00$  y  $12,00$  metros.

Dichas figuras admiten una sencilla interpretación; por ejemplo, y por referencia a la figura 35, correspondiente a los valores  $B = 8,00 \text{ m}$  y  $e_m = 0,225 \text{ m}$ , se obtienen los puntos óptimos  $O$ , para los cuales se alcanzan simultáneamente los mecanismos de rotura longitudinal y transversal. Así, en el caso de actuación del cuchillo de carga, el punto óptimo corresponde a un valor  $Q_i = 19,6$  y a un espesor de placa  $e_p = 0,251 \text{ m}$ . Para la carga uniforme los valores anteriores son, respectivamente,  $22,1$  y  $0,290 \text{ m}$ .

Tanto en este caso, como para  $B = 10,00 \text{ m}$  se observa que  $e_p > e_m$ , es decir, que es necesario introducir rigidizadores a fin de aumentar el espesor de flexión.

A la izquierda del punto  $O$  el tipo de rotura viene marcado por el mecanismo transversal, mientras que a la derecha de dicho punto la rotura determinante es la longitudinal, al haber introducido una mayor rigidización que la estrictamente necesaria.

Se observa asimismo que en el caso de carga uniforme la rotura longitudinal es independiente del valor de  $e_p$ , es decir, una vez alcanzado el punto óptimo de rotura, el aumento de rigidización transversal no influye en la carga de colapso, que permanece constante, viniendo determinada por el mecanismo longitudinal. Ello puede ser explicado por la no aparición de

deformación torsional, dada la simetría existente, lo que conduce a un agotamiento de las almas en su trabajo como vigas cargadas en su plano, para las cuales se ha mantenido constante el espesor.

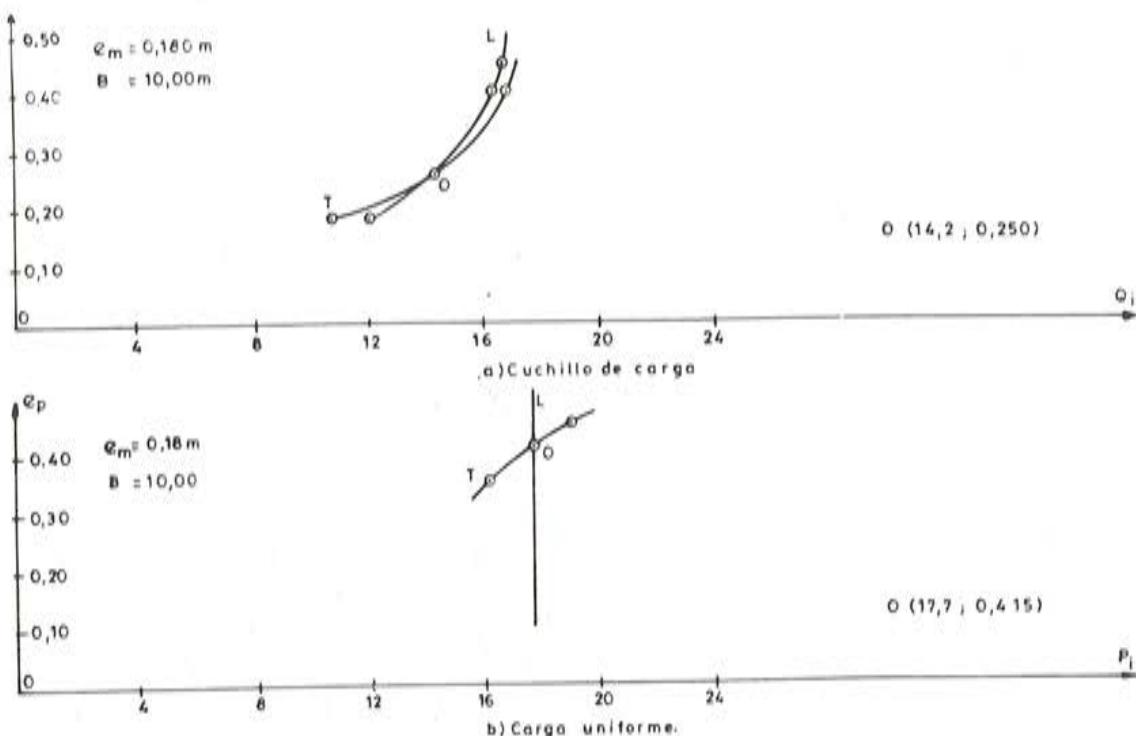


Fig. 36. Influencia de la variación de espesores ( $B = 10.00 \text{ m}$ ).

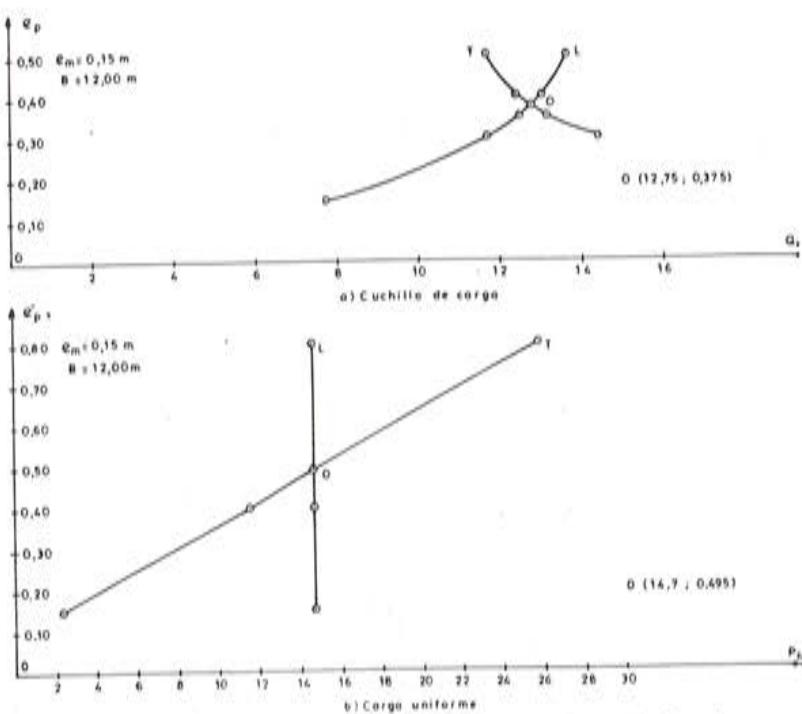


Fig. 37. Influencia de la variación de espesores ( $B = 12.00 \text{ m}$ ).

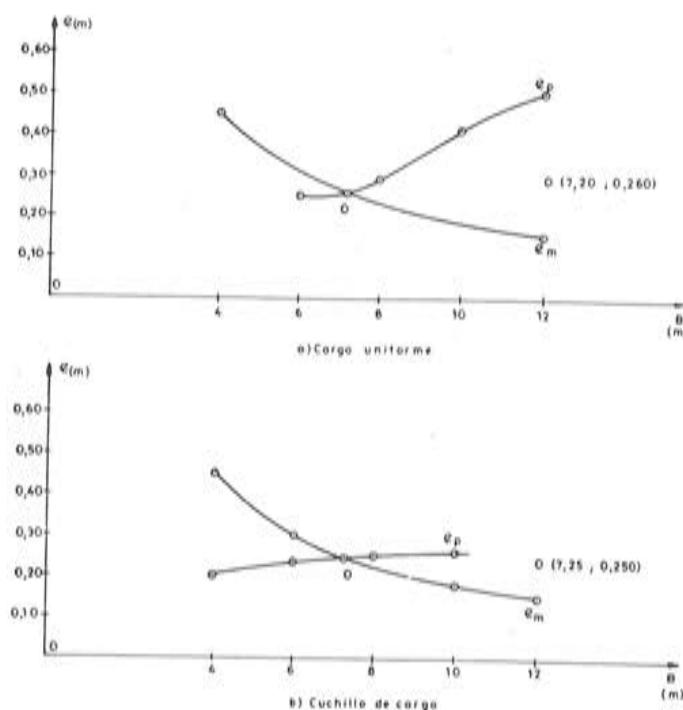


Fig. 38. Obtención de la separación óptima.

Por otra parte se comprueba que las cargas de colapso para la actuación del cuchillo de carga son menores que en el caso de carga uniforme, si bien también son menores los espesores de flexión a introducir. Esta circunstancia puede ser explicada por el hecho de que, una vez alcanzado el punto óptimo de rotura simultánea, la distorsión de la sección sigue siendo determinante en el colapso de la estructura, cuyo fallo se produce por rotura de las losas superior e inferior, y no por la almas.

Para un valor de  $B = 12.00$  m (figura 37.a), y en la hipótesis de actuación del cuchillo de carga, aparece una situación peculiar, ya que el tipo de rotura predominante es longitudinal (mecanismo de membrana), por fallo del alma directamente cargada (losa 2). Sin embargo, en este caso el primer escalón de carga representa únicamente el 79 por 100 de la carga de colapso, por lo que las conclusiones que puedan derivarse del cálculo anterior deben ser aceptadas con cierta reserva.

El análisis anterior permite un diseño racional de las estructuras láminas plegadas. En efecto, para cada valor del ancho  $B$  se pueden obtener los espesores de placa y membrana correspondientes, que garantizan la plastificación simultánea transversal y longitudinalmente. Sean estos valores  $e_p(B)$  y  $e_m(B)$ , respectivamente. Evidentemente, desde este punto de vista, el valor más adecuado para la separación  $B$  entre almas sería aquél para el cual  $e_p(B) = e_m(B)$ , en caso de no considerar la complicación constructiva de las costillas transversales (losas homogéneas e isótropas).

En la figura 38 se muestran curvas que permiten deducir dicha separación óptima para ambas situaciones de carga: uniforme y cuchillo. Es importante señalar que los valores óptimos de  $B$  y  $e$ , para los cuales se producen simultáneamente las roturas longitudinal y transversal, coinciden en este caso en ambas situaciones de carga, o lo que es igual, la rotura óptima es independiente del tipo de carga y sólo depende de las características geométricas.

La conclusión anterior adquiere una singular importancia desde el punto de vista práctico, puesto que permite un diseño óptimo de la lámina plegada, independientemente del tipo de carga a que vaya a estar sometida, si bien, obviamente, la intensidad que para la misma se adopte en el diseño será determinante en la seguridad estructural.

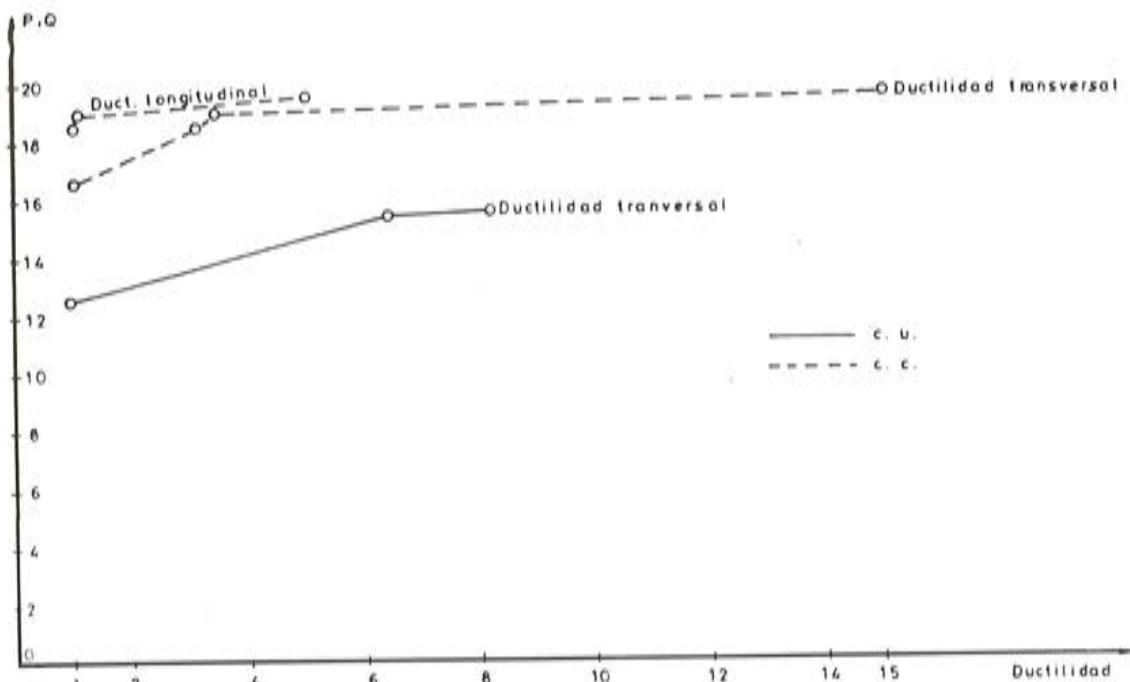


Fig. 39. Carga de colapso en función de la ductilidad.

#### 6.4. Influencia de la ductilidad

Con objeto de estudiar la influencia de la ductilidad en diferentes parámetros de interés en el cálculo, se ha procedido, en primer lugar, al análisis de la estructura de la figura 24; para la separación  $B = 8.00\text{ m}$ , bajo las situaciones de carga ya mencionadas (figura 25), y suponiendo distintos valores del factor de ductilidad. Los espesores  $e_m$  y  $e_p$  considerados corresponden a los del apartado 6.1.

En las figuras 39 y 40 se muestran, respectivamente, las relaciones entre la carga de colapso y flecha máxima con la ductilidad. Para las cargas de colapso se han tomado los coeficientes adimensionales  $P = P^T/p$  (carga uniforme) y  $Q = Q^T/q$  (cuchillo). Para la flecha máxima se considera el factor adimensional  $w_{m \text{ ax}}/\text{luz}$ , en tanto por mil.

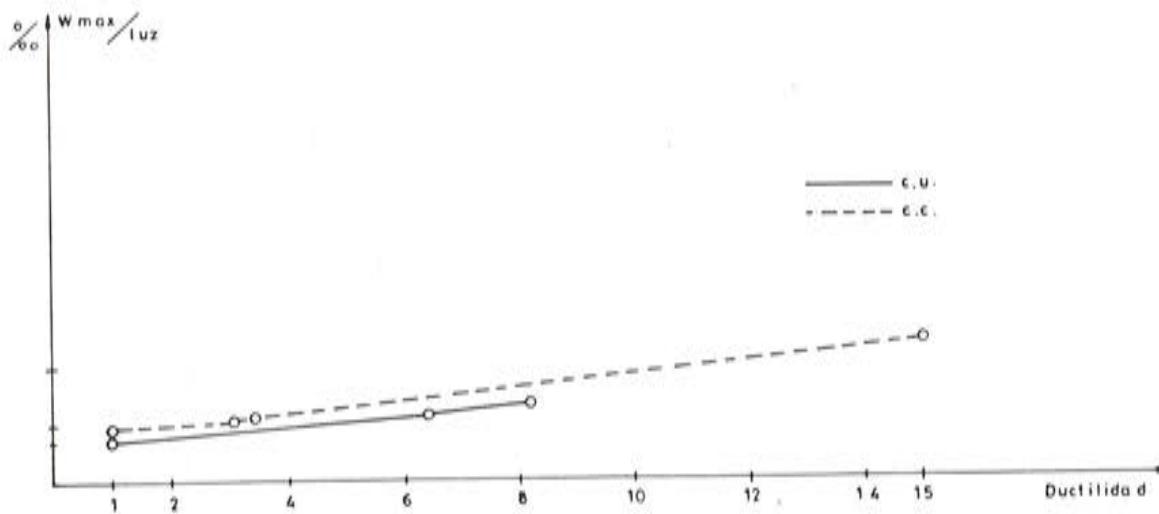


Fig. 40. Flecha máxima en función de la ductilidad.

Se observa, una vez más, la trascendencia del modo de rotura en los valores de la carga de colapso y flecha máxima. Así, en este caso concreto, la formación del mecanismo transversal provoca el fallo estructural para una ductilidad máxima de 8.2.

La interpretación conjunta de ambos gráficos, junto con los representados en las figuras 33 a 38, puede tener gran interés desde el punto de vista práctico de diseño, ya que, simultáneamente a la consideración de rigidización transversal, es posible tener en cuenta diferentes valores de las ductilidades transversal y longitudinal, para, finalmente, de acuerdo con las gráficas de las figuras 29 y 31, proceder al dimensionamiento adecuado de las diferentes losas.

En las figuras 41 y 42 se repite el análisis anterior para las distintas separaciones  $B = 4.00, 6.00, 8.00, 10.00$  y  $12.00$  metros.

En la tendencia de los resultados en flechas (figuras 41.b y 42.b) se observa una variación brusca entre los valores de  $B = 6.00$  y  $8.00$  metros. Ello es debido, como ya se ha descrito, a que entre dichos valores se produce el cambio de configuración de rotura: de longitudinal a transversal.

Finalmente, cabe resaltar el hecho de que para valores prácticos admisibles del factor de ductilidad (del orden de 6,00 en el hormigón armado) las flechas máximas alcanzadas representan porcentajes suficientemente bajos de la luz de la lámina plegada, por lo que la supuesta hipótesis de linealidad geométrica parece aceptable.

## 7. EJEMPLO DE APLICACION

El ejemplo que se presenta a continuación tiene un carácter marcadamente ilustrativo acerca de la potencialidad de un modelo y programa de computador como el aquí desarrollado, en su aplicación a situaciones reales. Con ese objeto se estudia un puente de sección variable tanto en dimensiones globales como en espesores, y sometido a la actuación de las cargas permanentes y sobrecargas definidas en la Instrucción española.

El análisis tiene como objetivo deducir el nivel de seguridad a la rotura de esta estructura. Sin embargo, a fin de simplificar el análisis, sólo se ha considerado un vano simplemente apoyado sin actuación del pretensado. Es posible, con el sacrificio de un mayor esfuerzo computacional, el cálculo de un tramo continuo en donde se incluya la acción del pretensado, si bien la problemática de mayoración de los esfuerzos procedentes de esta acción constituye un problema más allá del objetivo de este artículo.

En este ejemplo se analiza, como se ha indicado, un tablero de puente de sección cajón no prismática, con condiciones de tímpano en sus extremos y cuya geometría aparece reflejada en la figura 43.

La variación de espesores en almas y forjado inferior se muestra en la figura 44. La definición y numeración de losas y aristas se realiza en la figura 45 y se ha considerado una división en 10 dovelas.

Con objeto de evaluar la seguridad a rotura de la estructura anterior bajo la actuación de las sobrecargas de la Instrucción vigente, se ha calculado bajo las siguientes acciones:

- Peso propio (peso específico  $2,5 \text{ t/m}^3$ ).
- Sobrecarga uniforme de  $600 \text{ kg/m}^2$  en el tablero superior (losas 1, 2 y 3) que incluye los efectos de la superestructura (pavimento, barandillas, etc.) y la sobrecarga de la Instrucción.

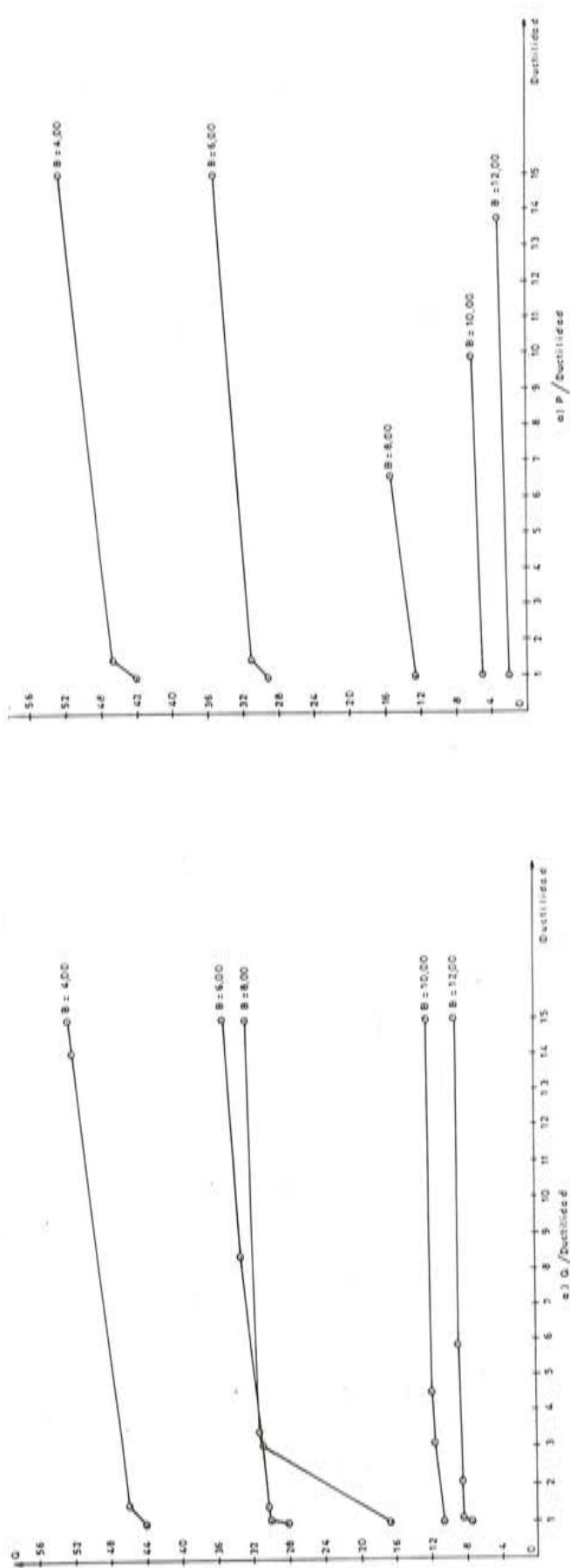


Fig. 41. Relación entre carga de colapso y flecha máxima con la ductilidad. Influencia de la geometría (cuchillo de carga).

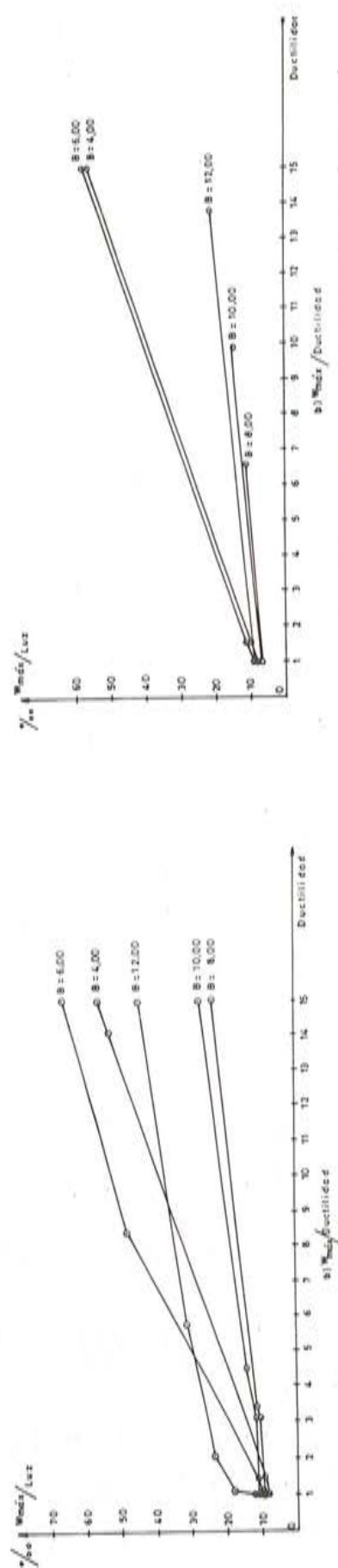
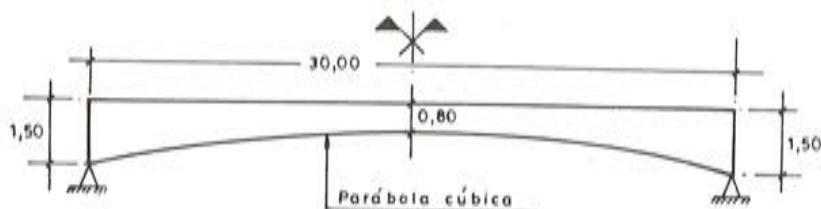
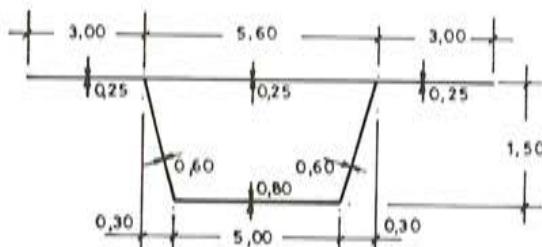


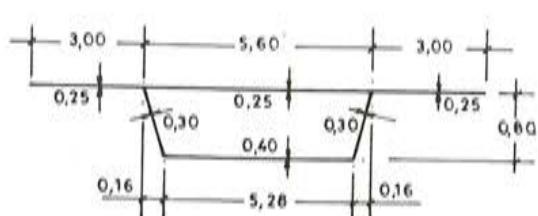
Fig. 42. Relaciones entre carga de colapso y flecha máxima con la ductilidad. Influencia de la geometría (cuchillo de carga).



a) Perfil longitudinal

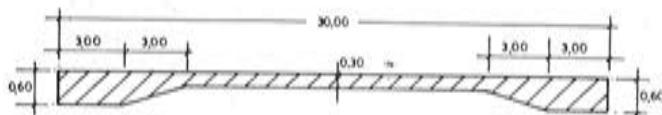


b) Sección apoyos

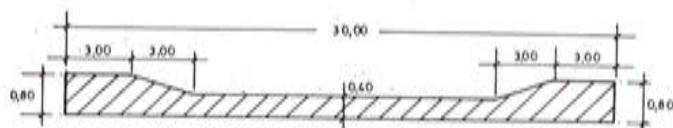


b) Sección centro vano

Fig. 43. Ejemplo de aplicación, Geometría.



a) Alturas



b) Perfilo interior

Fig. 44. Ejemplo de aplicación, Espesores.

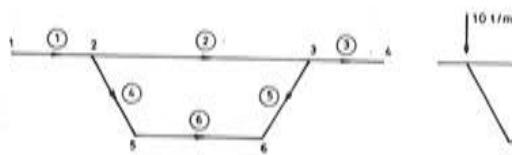


Fig. 45. Ejemplo de aplicación, Topología.

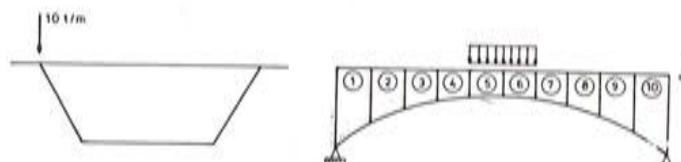


Fig. 46. Ejemplo de aplicación, Cargas.

- Carro de 60 t de la Instrucción, simulado mediante una carga uniformemente repartida de 10 t/m actuando sobre la arista 2, y extendida únicamente a las dovelas 5 y 6 (figura 46).

Como parámetros del cálculo plástico se han adoptado los siguientes:

- Tensión de plastificación:  $5.000 \text{ t/m}^2$ .
- Coeficientes de plastificación: 1.50.

- Pendiente del diagrama plástico:  $E_p = 0.01 E_e$ .
- Número máximo de ciclos del proceso: 6.
- $E_e = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ .
- Ductilidad límite: 15.

Conviene señalar que el alto valor previsto para la ductilidad no afecta excesivamente a la carga de colapso, que se alcanza para el tercer escalón, con un incremento poco significativo respecto al inicial del primer escalón.

En la figura 47 se describe el proceso de plastificación, que se resume en la tabla 3.

TABLA 3

Escalón de carga	Incremento de carga	Valor total	Tipo de plastificación	Dovela	Losa	$D_L$	$D_T$
1	3,09 p	3,09 p	Longitudinal	5-6	6	1,00	1,00
2	0,159 p	3,25 p	Longitudinal	5-6	4-5	1,63	1,00
3	0,287 p	3,54 p	Longitudinal	4-7	6	15,00	1,00

Como se observa, todas las plastificaciones que se producen son longitudinales, siendo el valor de la carga de colapso de 3,54 veces el valor inicial adoptado para el cálculo elástico. Este análisis permite definir de un modo más racional el valor usual del coeficiente de seguridad a rotura de la estructura. Conviene señalar, además, que para pasar de la ductilidad 1,63 del segundo escalón al valor 15,00 del tercero únicamente se necesita un incremento de 0,287 p, inferior al 9 por 100 del valor 3,25 p alcanzado en el citado segundo escalón. Ello proporciona un orden de magnitud de las diferencias que se pueden producir al considerar distintas ductilidades entre los valores 1,63 y 15,00.

Finalmente, en la figura 48 se representan los valores de diferentes magnitudes de interés en el cálculo para el estado elástico inicial y el estado de colapso.

## 8. CONCLUSIONES

Entre las conclusiones derivadas del estudio anterior, se citan a continuación como más importantes, las siguientes:

1. El cálculo plástico constituye un procedimiento fundamental para la evaluación del grado de lejanía del colapso de una estructura. Este concepto de colapso es fuertemente dependiente del tipo estructural y de su utilización.
2. Dado que, en comparación con el cálculo lineal, el análisis plástico exige un esfuerzo de computación muy elevado, es necesario desarrollar procedimientos de análisis eficientes.
3. Existen determinados modelos estructurales de aplicación suficientemente general –un caso típico lo constituyen las láminas plegadas– para los cuales la utilización de un método general de cálculo es ineficiente, resultando, en ese caso, atractiva la aplicación de procedimientos específicos de análisis. La justificación del desarrollo de dichos métodos específicos se evidencia ante un elevado porcentaje de aplicaciones. Esta evidencia aumenta de un modo extraordinario cuando se analizan las estructuras en regímenes no lineales (cálculos plásticos, por ejemplo).

En particular, el análisis plástico de láminas plegadas exige, desde un punto de vista computacional, el desarrollo de procedimientos específicos. Por otra parte, un análisis plástico precisa y produce una muy elevada cantidad de información a nivel de "input-output" que, en el caso de utilizar un método general, es susceptible de generar errores, además de contribuir a una pérdida de la interpretación estructural, e incrementar los costes de entrada de datos y análisis de resultados. Si bien este volumen de información se puede tratar mediante programas pre y posprocesadores, éstos enmascaran a veces el comportamiento estructural.

4. Los cálculos tradicionales de láminas plegadas prismáticas de tipo semianalítico (solución Levy, por ejemplo) no son susceptibles, por su carácter armónico lineal, de ser extendidos, mediante una ampliación directa, al análisis plástico. A este respecto, se hace necesario un modelo específico de cálculo lineal de láminas plegadas, de carácter completamente numérico. En este contexto, el modelo desarrollado en (11) resulta plenamente adecuado.
5. Mediante la utilización de una técnica de búsqueda directa de rótulas —ya empleada anteriormente en entramados planos—, se pueden reducir de modo importante los tiempos de computación, frente a los tradicionales procedimientos paso a paso.

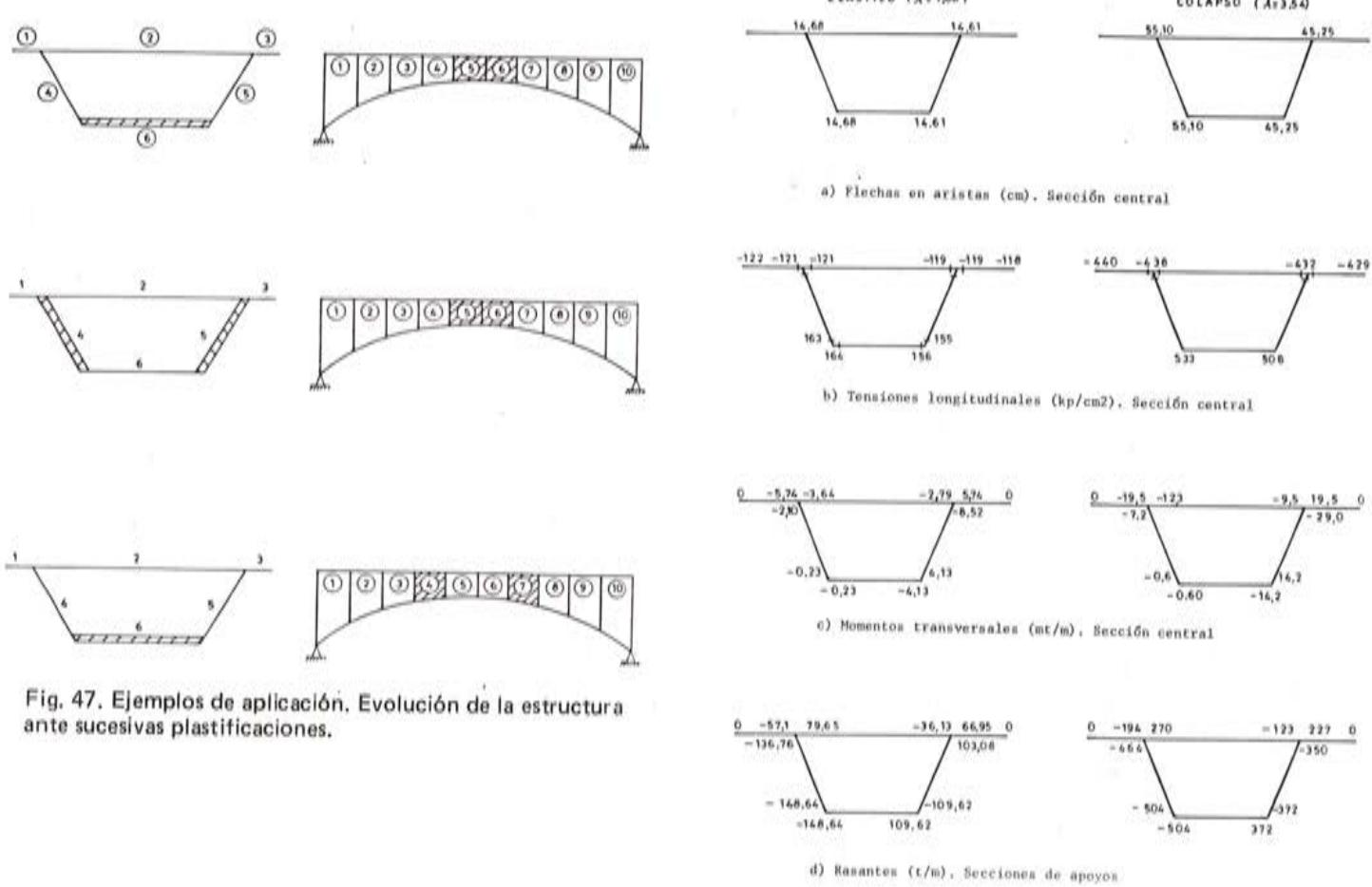


Fig. 47. Ejemplos de aplicación. Evolución de la estructura ante sucesivas plastificaciones.

Fig. 48. Ejemplo de aplicación. Diferentes resultados para los estados elástico y de rotura.

6. Un grave inconveniente numérico que aparece en la mayoría de los métodos de cálculo plástico reside en la degradación de la matriz de rigidez de la estructura en fases cercanas a su colapso.

Criterios numéricos de parada basados exclusivamente en la comprobación de la singularidad de dicha matriz han resultado fallidos y, en general, dependientes de la precisión del ordenador utilizado. Aquí se han introducido criterios muy amplios de colapso, más de acuerdo con algunos resultados de la práctica de la ingeniería, basados en la limitación de movimientos, ductilidad máxima, etc.

Por otra parte, la introducción de una pendiente plástica no horizontal, fracción muy pequeña del módulo elástico de Young, constituye una técnica numérica adecuada, que evita el problema de la degradación numérica de las matrices que aparecen en el análisis.

Esta técnica ha sido empleada únicamente en el análisis longitudinal de la lámina plegada, por aparecer en esta fase matrices de flexibilidad. Por el contrario, en el análisis transversal el método de cálculo de rigidez no exigió la introducción de esta técnica y se consideró elastoplasticidad perfecta. La experiencia obtenida en los casos estudiados muestra la bondad y eficacia de este procedimiento.

7. Un aspecto fundamental del cálculo, a veces olvidado en distintos modelos, es el denominado cierre de rótula plástica, que adquiere de nuevo su virtualidad elástica. El desarrollo de un algoritmo que simula este comportamiento, recogido en el programa de computador, ha probado su eficiencia.
8. El cálculo plástico permite un diseño más racional de las estructuras y, en particular, deducir de un modo coherente el grado de seguridad de las mismas. En este contexto, es posible utilizar de un modo natural el método de cálculo plástico para el diseño óptimo de láminas plegadas. Los criterios de aparición simultánea de rótulas están relacionados con un adecuado aprovechamiento del material.
9. La ductilidad es un parámetro de excepcional importancia en el proceso de redistribución de esfuerzos y tensiones en estructuras. El cálculo plástico permite considerar y analizar estas redistribuciones. A estos efectos, es fundamental, en el caso de láminas plegadas, la consideración simultánea de la plasticidad en las dos direcciones, longitudinal y transversal, si se desea captar el complejo fenómeno de su comportamiento.
10. Dentro del área específica del cálculo de tableros de puentes, en el que la aplicación del modelo lámina plegada se hace cada vez más intensiva, un aspecto que suscita una elevada actividad investigadora está representado por la seguridad a la rotura de puentes continuos pretensados. La mayoría de las técnicas hasta ahora desarrolladas para su estudio consideran únicamente el tablero de forma global, es decir, como viga continua (elemento monodimensional). De este modo, los efectos de excentricidad de la carga son ignorados sistemáticamente.

El modelo elastoplástico de láminas plegadas aquí desarrollado puede constituir un procedimiento idóneo para el análisis a rotura de estos tipos estructurales, dando que considera simultáneamente los dos efectos: longitudinal y de reparto transversal.

## 9. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a la empresa STEEL-BETON, S.A. de El Astillero (Santander) por las facilidades dadas en la utilización de sus recursos informáticos.

## REFERENCIAS

- (1) EHLERS, G. "Ein neues konstruktions Prinzip", Bauingenieur, Vol. II, n° 8. Berlín, 1930.
- (2) YITZHAKI, D. "Prismatic and Cylindrical Shell Roofs". Haifa Science Publishers. Haifa, Israel, 1958.
- (3) SCORDELIS, A.C. "Analysis of Continuous Box Girder Bridges". College of Engineering. Office of Research Services. University of California. Berkeley, 1967.
- (4) PHASE I REPORT ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION, REPORT OF THE TASK COMMITTEE ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION. Journ. of the Structur. Div. ASCE, Vols. 60 and 89 ST6. 1963.
- (5) I.A.S.S. SYMPOSIUM. Vols. 1 and 2. Viena, 1970.
- (6) DEL POZO, F.; TORROJA, J.A. and LOPEZ PALANCO, R. "Tribune for the Dog Racing Stadium of Madrid". World Conference on Shell Structures. San Francisco. National Academy of Science Publication. 1964.
- (7) GRANELL, J. Tesis doctoral presentada en la Universidad Politécnica de Madrid, 1966.
- (8) DEL POZO, F. and SAMARTIN, A. "Nonprismatic Folded Roof Structure". IASS Symposium. Udine (Italia). 1974.
- (9) JOHNSON, C.D. and TI-TA LEE "Long Nonprismatic Folded Plate Structures". Journ. of the Struct. Div. ASCE, n° ST6. Junio, 1968.
- (10) SAMARTIN, A.; J.R. GONZALEZ DE CANGAS and J. MARTINEZ. "A Computer Formulation for the Analysis on Continuous Nonprismatic Folded Plate Structures of Arbitrary Cross-Section". Vol. 2. IASS World Congress on Shell and Spatial Structures. Madrid, 1979.
- (11) GONZALEZ DE CANGAS, J.R. y A. SAMARTIN. "Cálculo matricial de láminas plegadas continuas, no prismáticas, de sección transversal arbitraria". E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. n° AE80.7. Santander, 1980.
- (12) GONZALEZ DE CANGAS, J.R.; A. SAMARTIN y J. MARTINEZ. "Evolución de los métodos de cálculo de láminas plegadas. Una aportación al análisis de estructuras no prismáticas". Hormigón y Acero, n° 139, 2º trimestre, 1981.
- (13) BAKER, J.F. "The Steel Skeleton". Cambridge University Press. Londres, 1956.
- (14) NEAL, B.G. "The Plastic Methods of Structural Analysis". Chapman and Hall, Ltd. Londres, 1956.
- (15) JOHANSEN, K.W. "Yield-line Theory". Cement and Concrete Association. Londres, 1962.
- (16) T. VAN LANGENDONCK. "Teoria elementar das Charneiras Plásticas". Associação Brasileira de Cimento Portland. São Paulo, 1970.
- (17) POWELL, G.H.; A. SUDHAKAR; G. ORR and R. WHEATON. "ULARC". National Information Service Earthquake Engineering University of California, Berkeley, 1972.
- (18) ARROYO, V.; GONZALEZ DE CANGAS, J.R. and A. SAMARTIN. "A Plastic Analysis of Nonprismatic Folded Plate Structures". International Symposium on Shell and Spatial Structures' 83. Rio de Janeiro, Setiembre, 1983. (A publicar en los "Proceedings" de dicho Simposio).
- (19) BENITO, C. "Cálculo plástico. Vigas y pórticos" 2ª edición, Madrid, 1966.

## Las armaduras en los pilotes

José Soler Nadal  
Director Adjunto de CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.  
Fernando Soler Liceras  
Arquitecto

En general los diversos tipos de pilotes no presentan ninguna dificultad en disponer armaduras en toda su longitud, centradas e incluso, con el recubrimiento que se considere oportuno, recurriendo a separadores que o bien suelen ser de mortero o de plástico.

Su secuencia en la ejecución da una buena idea de lo anterior; es decir: perforación, colocación de armaduras y hormigonado.

Sin embargo, sí existe un tipo de pilote, que es al que nos vamos a referir, donde se presentan dificultades para la colocación de la armadura y más aún si se trata de centrarla y obtener un buen recubrimiento de hormigón sobre la misma.

De cómo se han vencido estas dificultades y cómo se ha llegado a introducir y centrar armaduras de 12,00 m de longitud, es de lo que vamos a tratar en estas líneas.

El pilote en cuestión es el que se ejecuta con barrena continua, según se describe a continuación: (foto 1).

1º Se introduce en el terreno, hasta llegar a la profundidad deseada, una hélice continua que se desarrolla sobre un núcleo central formado por un tubo de 100 mm de diámetro, taponado en el fondo. (foto 2).

2º Alcanzada la profundidad necesaria (foto 3), la bomba de hormigón, conectada al tubo central de la barrena, expulsa el tapón y comienza el bombeo del hormigón a partir del fondo del pilote, a la vez que se va recuperando la barrena que transporta hacia arriba el terreno alojado dentro de la hélice (Fotos 4 y 5). Queda así sustituido el terreno alojado en la hélice por el hormigón bombeado.

Como puede observarse, en este tipo de pilote se alteran las fases de ejecución: se ha perforado, se ha hormigonado, pero no se ha colocado la armadura.

Las armaduras en este tipo de pilote han evolucionado con el tiempo:

Primero se colocaban introduciendo en su parte superior 5 ó 6 barras sueltas que servían para su unión con las vigas y macizos.

Después, esas mismas barras de 1,50 a 2,00 m de largo se unían con cercos o espiral formando jaula, aunque de mucho menor diámetro que el pilote.

Posteriormente, se llegó a una armadura de 6,00 m, aunque en ocasiones costaba trabajo o no se podía introducir totalmente.

Entretanto se llegó a la sujeción de la armadura con doble plato y tubo central provisto de un vibrador (foto 6). De tal manera, la armadura empieza a introducirse en el seno del hormigón por su propio peso, para después seguir introduciéndose con ayuda del vibrador.

Con el vibrador habíamos logrado ya introducir armaduras de 12 y 14 m de longitud en los pilotes; faltaba solamente corroborar que tal armadura se hallaba inmersa en el hormigón del pilote, centrada y con un recubrimiento suficiente.

De su inmersión en el hormigón no teníamos la menor duda, ya que, por experiencia, cuando una o varias barras se desvíen hacia el terreno que circunda el hormigón no penetran y hay que extraerlas; en cuanto a su centrado y recubrimiento, no había otra solución que el ensayo a tamaño natural.

Se eligió para ello una obra en Sevilla:

Propiedad: GECOVISA (Gestora Comunidades de Viviendas, S.A.).

Arquitecto: OTAISA (Oficina Técnica Arquitectos e Ingenieros, S.A.).

Contratista: Hispano Alemana de Construcciones, S.A.

El corte geológico es el siguiente:

0,00	relleno
- 6,50	limo arenoso
- 12,00	arena limosa con gravas
- 20,00	grava con arena
- 25,00	marga azul

El nivel freático a la -7,00.

Plataforma de trabajo a -5,00.

Profundidad de los pilotes a -21,50.

Se ejecutaron los pilotes siguientes:

φ 350	38
φ 450	59
φ 550	59
φ 650	62
φ 750	63

El pilote que debía ser objeto de examen posterior se ejecutó desde la cota -2,00 al objeto de poder recuperar el mayor trozo posible (5,00 m) sin achique en la excavación posterior y utilizando el  $\phi$  55 cm.

La armadura que había que colocar, era de 12,00 m de longitud, formada por 6 barras de  $\phi$  20 mm unidas por espiral de  $\phi$  7 con paso de 20 cm (cuantía 8%). (Fotos 7, 8 y 9).

Los separadores de 7 cm se hicieron de tubo de plástico (foto 10), colocando 3 en cada sección a 120° y separados 1,50 m a lo largo de la armadura (Foto 11). (Final de colocación de la armadura).

Diez días después se excavó alrededor del pilote (foto 12) recuperando los 5 primeros metros. Se hicieron varios cortes transversales (foto 13) y en ellos se puede observar perfectamente, tanto el centrado de las armaduras como su uniforme recubrimiento, e, incluso, un corte por el plano de los separadores los señala con suficiente precisión. (Fotos 14 y 15).



Foto 1.



Foto 2.



Foto 3.



Foto 4.



Foto 5.



Foto 6.



Foto 7.



Foto 8.

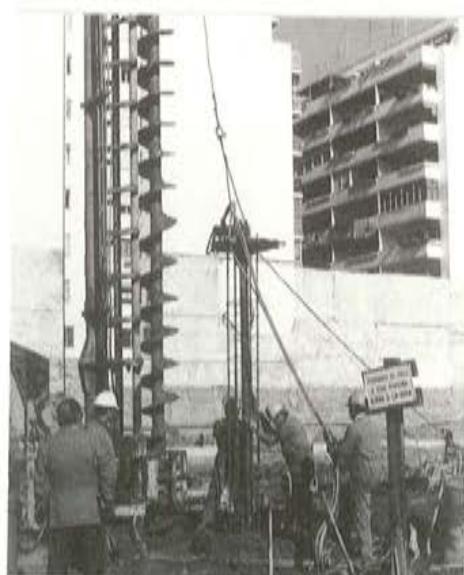


Foto 9.



Foto 10.



Foto 11.



Foto 12.



Foto 13.



Foto 14.



Foto 15.

## **José Antonio Torroja, Dr. Honoris Causa.**

El día 1 de marzo tuvo lugar la investidura de Doctor Honoris Causa por la Universidad Politécnica de Barcelona del Vice-Presidente de ATEP, Prof. Torroja.

La ceremonia se celebró en el majestuoso salón de actos de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de aquella Universidad, lleno de un selecto auditorio.

El Director de dicha Escuela Prof. Oñate, hizo una exposición de los motivos por los cuales la Escuela había solicitado de la Universidad tal nombramiento. Aparte de los muchos méritos que reune el Prof. Torroja para la distinción de que era objeto, señaló muy especialmente el de haber sido el creador, organizador y primer Director del expresado Centro de enseñanza técnica superior que sigue funcionando con las pautas señaladas por él.

Después de un magnífico discurso (que será publicado en "Hormigón y Acero" próximamente) del Sr. Torroja, el Rector Magnífico de la Universidad, Prof. Ferraté, hizo la imposición de birrete, guantes blancos y anillo al nuevo Doctor y tras la audición de los himnos de Cataluña y el nacional se produjo una impresionante ovación pocas veces oída por su calor y su duración.

A continuación se celebró una comida a la que asistieron numerosos representantes del Rectorado de aquella Universidad y muchos colaboradores del Prof. Torroja en la Escuela de Caminos de Barcelona y de otras entidades, incluso de otros puntos de España, que acudieron al acto.

## **Concesión del premio y medalla Bengough, a D. Manuel Elices**

Con gran satisfacción, hemos recibido la noticia de que han sido otorgados a nuestro compañero el Dr. Ingeniero de Caminos D. Manuel Elices, el premio y la Medalla Bengough por dos artículos sobre corrosión bajo tensión en alambres de pretensado, publicados en los números 3 y 4 de 1981 de la Revista "British Corrosion Journal".

En estos artículos, en los que se daban a conocer los resultados de los trabajos de investigación que sobre el particular se vienen desarrollando, bajo la dirección de Elices, en la Cátedra de Física de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos de Madrid, se introducían por primera vez los conceptos de la Mecánica de la Fractura. Sus títulos eran:

"Sorting tests for stress corrosion resistance of cold drawn prestressing tendon".

"Stress corrosion resistance of transverse precracked prestressing tendon in tension".

¡Nuestra más cordial enhorabuena!

# Ingeniería y práctica de los hormigones reforzados en fibras de acero

Ildefonso Lucea Martínez

## 1. OBJETO

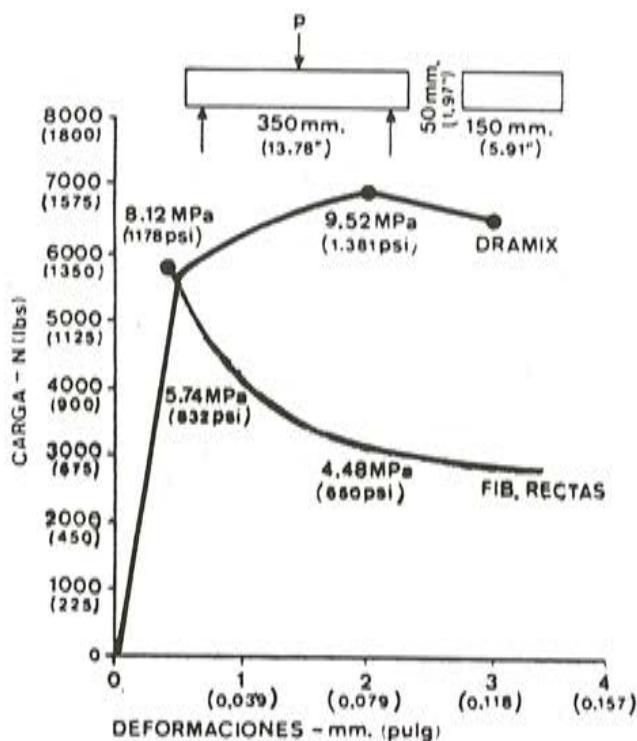
Dado el continuo incremento que en España está experimentando el uso de hormigones reforzados con fibras de acero (Fig. 1), resulta interesante dar un repaso a la influencia de las fibras de acero sobre las propiedades del hormigón, así como algunos consejos prácticos para su utilización, basados en las más importantes obras realizadas en España hasta la fecha, obras de las que al final del presente artículo ofreceremos una sucinta descripción.



## 2. ANTECEDENTES

Inicialmente, todos los estudios fueron llevados a cabo utilizando fibras rectas, lo que obligaba a utilizar grandes cantidades de fibras por metro cúbico de hormigón para lograr ventajas técnicas apreciables (Fig. 2). El elevado costo así alcanzado y la necesidad de equipos especiales para la adición al hormigón de las fibras sueltas, retrasaron su utilización hasta los años setenta.

## RESISTENCIA A LA FLEXION



El comportamiento a la fisuración del hormigón armado con DRAMIX proporciona una mayor resistencia final a la flexión que el de fibras rectas de igual longitud y diámetro.

Fig. 2. Comparación entre fibras rectas y con extremos conformados.

A partir de esa fecha, con la aparición en el mercado de fibras conformadas (Fig. 3), que proporcionan un mayor anclaje en el hormigón, así como el encolado en peines de las fibras Dramix, que facilitan su mezclado, hacen que la utilización de los hormigones reforzados con fibras de acero haya experimentado un rápido crecimiento.

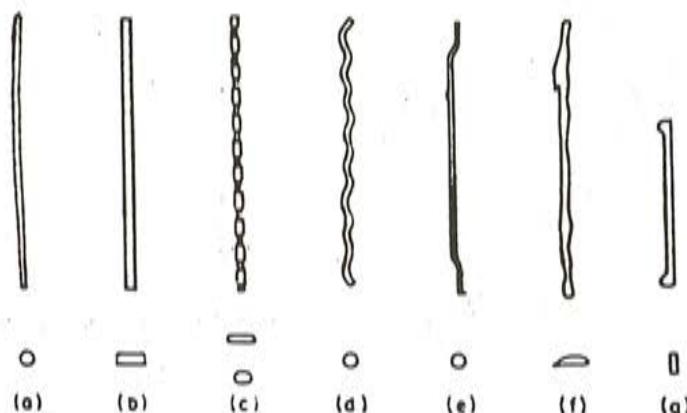


Fig. 3. Formas de las fibras de acero.

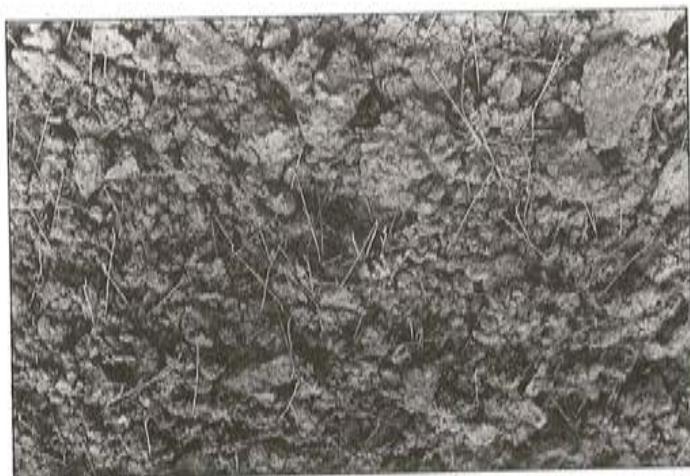
- a) Redonda, b) Rectangular, c) Duoform, National Standard Patent. d) Plegada, G.K.N. e) Extremos conformados, Bekart Patent. f) Viruta extraída de fundición, Battelle Patent. g) Extremos engrosados, Australian Wire Industries.

# Ingeniería y práctica de los hormigones reforzados en fibras de acero

Ildefonso Lucea Martínez

## 1. OBJETO

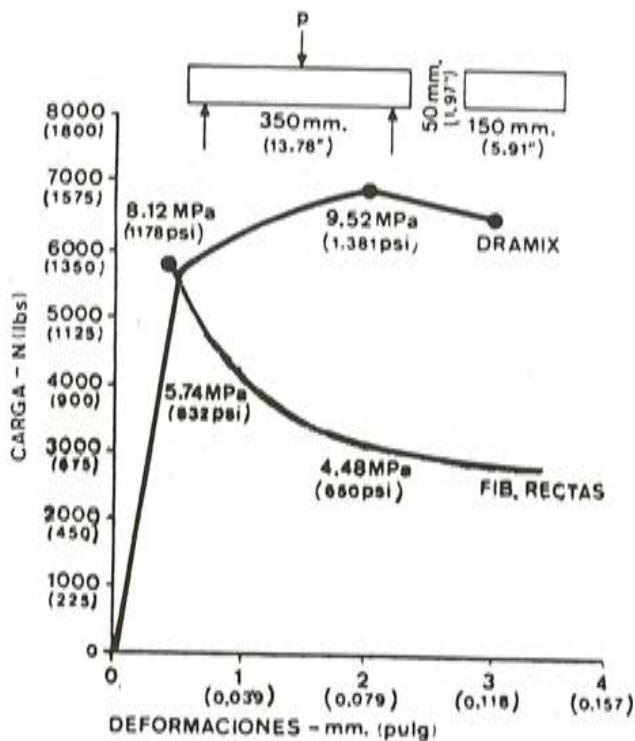
Dado el continuo incremento que en España está experimentando el uso de hormigones reforzados con fibras de acero (Fig. 1), resulta interesante dar un repaso a la influencia de las fibras de acero sobre las propiedades del hormigón, así como algunos consejos prácticos para su utilización, basados en las más importantes obras realizadas en España hasta la fecha, obras de las que al final del presente artículo ofreceremos una sucinta descripción.



## 2. ANTECEDENTES

Inicialmente, todos los estudios fueron llevados a cabo utilizando fibras rectas, lo que obligaba a utilizar grandes cantidades de fibras por metro cúbico de hormigón para lograr ventajas técnicas apreciables (Fig. 2). El elevado costo así alcanzado y la necesidad de equipos especiales para la adición al hormigón de las fibras sueltas, retrasaron su utilización hasta los años setenta.

## RESISTENCIA A LA FLEXION



**El comportamiento a la fisuración del hormigón armado con DRAMIX proporciona una mayor resistencia final a la flexión que el de fibras rectas de igual longitud y diámetro.**

Fig. 2. Comparación entre fibras rectas y con extremos conformados.

A partir de esa fecha, con la aparición en el mercado de fibras conformadas (Fig. 3), que proporcionan un mayor anclaje en el hormigón, así como el encolado en peines de las fibras Dramix, que facilitan su mezclado, hacen que la utilización de los hormigones reforzados con fibras de acero haya experimentado un rápido crecimiento.

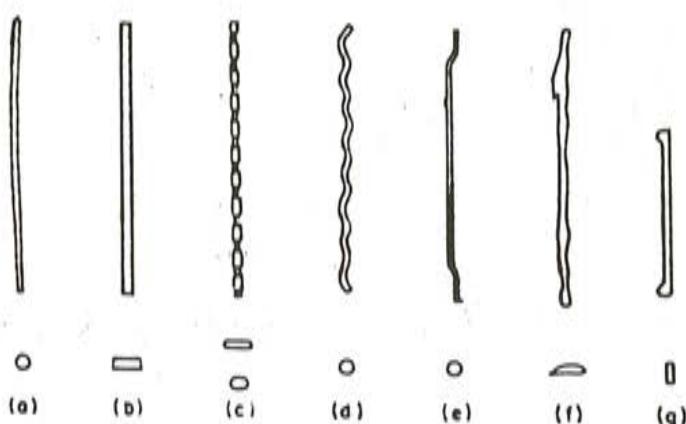


Fig. 3. Formas de las fibras de acero.

a) Redonda. b) Rectangular. c) Duoform. National Standard Patent. d) Plegada. G.K.N. e) Extremos conformados. Bekaert Patent. f) Viruta extraída de fundición. Battelle Patent. g) Extremos engrosados. Australian Wire Industries.

Se puede estimar que las fibras rectas sin ningún tipo de conformación, son las de mínima adherencia, mientras que los cambios de sección o las formas irregulares pueden producir tensiones localizadas. Las formas onduladas suelen producir grandes deformaciones bajo tensión sin un incremento importante de la resistencia a flexotensión.

### 3. PROPIEDADES

Para una rápida y más fácil comprensión de las variaciones de las propiedades de los hormigones reforzados con fibras de acero, en comparación con los hormigones en masa, recogemos en el Cuadro 1 un resumen de las más importantes de ellas.

#### Principios teóricos del refuerzo con fibras en tensiones uniaxiales

Para estudiar los principios teóricos de los hormigones reforzados con fibras de acero sometidos a tensiones uniaxiales, nos basaremos en las leyes de mezclas expuestas en diversos textos científicos del mundo. Las hipótesis que vamos a asumir son las siguientes:

- 1) Las fibras están alineadas en la dirección del esfuerzo.
- 2) Antes de producirse la fisuración, las fibras están totalmente adheridas a la matriz, y
- 3) El Coeficiente de Poisson entre fibra y matriz es cero.

La notación que vamos a emplear es:

$A$  = Superficie,  $V$  = Volumen,  $E$  = Módulo de elasticidad,  $\sigma$  = Tensión.

$e$  = Deformación,  $F$  = Fuerza,  $u$  = Ultima,  $f$  = Fibra,  $m$  = Matriz  $c$  = Hormigón ref.

Supondremos que el área de la sección transversal del hormigón reforzado es  $A_c = 1$  y que igualmente  $V_c = 1$ .

$$e_c = e_m = e_f = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_f}{E_f}$$

$$F = \sigma_c \cdot A_c = \sigma_f \cdot A_f = \sigma_m \cdot A_m$$

Como  $A_c = 1$  y  $A_m = 1 - A_f$ , resulta que el promedio de tensión  $\sigma_c$  soportado por el hormigón reforzado por unidad de área ( $A_c = 1$ ) a una deformación dada  $e_c$  antes de fisurar es:

$$\sigma_c = \sigma_f A_f + \sigma_m (1 - A_f) \text{ ó } \sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (\text{A})$$

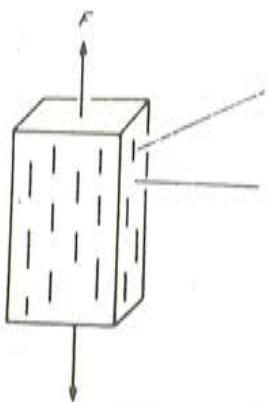
que al ser  $\sigma_f/\sigma_m = E_f/E_m = M$  podemos expresar como:

$$E_c/E_m = \sigma_c/\sigma_m = 1 + V_f (M-1)$$

**CUADRO 1**

**Efectos de las fibras de acero en las propiedades de los hormigones en masa.  
(Comparación de un mismo hormigón sin fibras y con fibras entre el 0,3% y el 1% en volumen)**

Propiedad	¿Influencia notoria por la presencia de fibras?	Comentarios
Resistencia a la compresión	No	—Pequeños incrementos de la resistencia a compresión, pero hay una importante influencia en la forma de rotura.
Fluencia	No	—No hay un elevado número de investigaciones pero el efecto de las fibras es mínimo.
Densidad	No	—Ligero incremento del orden de un 0,05 Tn/m <sup>3</sup> .
Fisuración de retracción	Sí	—Hay una colaboración de las fibras en las resistencias iniciales a tracción, combinada con una redistribución de tensiones. (Microfisuración en lugar de macrofisuración).
Módulo elástico	No	—Los ensayos efectuados en el I.E.T. muestran muy ligeras variaciones.
Resistencia a la fatiga	Sí	—La resistencia a la fatiga de estos hormigones alcanza el 80-90% de la resistencia a flexotracción. (50% para los hormigones en masa).
Resistencia a flexotracción	Sí	—Hay un aumento elevado de la resistencia a flexotracción (hasta del 300%), transformando el hormigón en un material dúctil, minimizando el espesor de las fisuras y el astillamiento asociado a ellas.
Resistencia hielo/deshielo	No	—Ligero incremento indirecto por menor fisuración No se han realizado demasiadas investigaciones.
Resistencia al impacto	Sí	—Incremento muy importante. Elevada absorción de energía, incluso después de la fisuración
Resistencia a tracción	Sí	—Los incrementos en función de la cantidad de fibras superan el 200%.
Conductividad térmica	No	—Parece existir un incremento entre el 5-15%. Ensayos realizados en el I.E.T.
Dilataciones térmicas	No	—Para el rango normal de temperaturas, muy ligeras variaciones.
Tiempo fraguado	No	—
Trabajabilidad del hormigón fresco	—	—Se requiere, generalmente, la utilización de vibradores; imprescindibles para cantidades elevadas de fibras.
Resistencia al desgaste	—	—Depende del tipo de desgaste, pero aún bajas concentraciones de fibras incrementan su resistencia.



Sección transversal de fibras  
 $A_f$  = Superficie     $V_f$  = Volumen

Sección transversal de la matriz  
 $A_m = A_c - A_f = 1 - A_f$

$V_m = V_c - V_f = 1 - V_f$

Fig. 4. Hormigón reforzado con fibras alineadas sometido a tensiones uniaxiales.

De esta forma, podemos estimar bien el valor del nuevo módulo de elasticidad de la mezcla en función de los componentes (matriz y fibra) o bien el incremento de la tensión para producir la primera fisura. Por ejemplo, suponiendo que  $E_m = 26 \text{ GN/m}^2$  y que  $E_f = 240 \text{ GN/m}^2$ , con un volumen de fibras del 0,5 por 100, resultaría:

$$E_c = 240 \cdot 0,005 + 26 (0,98) = 26,68 \text{ GN/m}^2$$

que demuestra la pequeña influencia de las fibras sobre el módulo de elasticidad.

Refiriéndonos ahora al incremento de las tensiones de fisuración, los ensayos realizados en el Instituto Eduardo Torroja sobre probetas prismáticas sometidas a flexotensión, dan valores que alcanzan el 1,4 de la tensión de rotura para el mismo hormigón sin fibras.

Para tener en cuenta la distribución de las fibras en lo que a orientaciones se refiere, se utiliza un coeficiente multiplicador del volumen de las fibras que se denomina Factor de Eficiencia ( $\eta_1$ ), con valores algo diferentes según distintos investigadores, pero que podemos situar en:

Orientación de las fibras	$\eta_1$ según	
	Cox	Krenchel
1-Dimensión	1	1
2-Dimensiones	1/3	3/8
3-Dimensiones	1/6	1/5

Hay un segundo factor multiplicador del volumen de fibras (que corresponde a la longitud de las fibras) y que, aunque algunos autores consideran que es la unidad, oscila alrededor de 0,98 para piezas delgadas y antes de alcanzar la deformación de rotura de la matriz. Su valor más exacto viene fijado por la relación entre dicha longitud y la longitud crítica, definida ésta última como la longitud de fibra embebida en el hormigón que puede causar la rotura de la misma en un ensayo de pull-out. En base a esta definición, Allen da los siguientes valores:

$$\begin{aligned} l &\leq l_c & \eta_z &= 1/2 l_c \\ l &\geq l_c & \eta_z &= 1 - 1/2 l_c \end{aligned}$$

Independientemente de lo anterior, hay además que tener en cuenta una cuestión fundamental: no solo es importante conocer cuando se produce la primera fisura sino también cual es la capacidad de carga del hormigón una vez fisurado.

Para mantener esa capacidad de carga o superarla, es necesario que la cantidad de fibras sea tal que se supere un volumen mínimo definido como volumen crítico. Si recordamos la fórmula (A) y tenemos en cuenta que  $\sigma_f = \epsilon_{m u} E_m$ , resulta:

$$\sigma_c = \epsilon_{m u} E_f V_{f crit} + \sigma_{m u} (1 - V_{f crit})$$

Para que se mantenga  $\sigma_c$  es necesario que:

$$\sigma_{fu} V_{f crit} = \epsilon_{m u} E_f V_{f crit} + \sigma_{m u} (1 - V_{f crit})$$

Por lo que:

$$V_{f crit} = \sigma_{m u} / \sigma_{fu} - \sigma_{m u} E_f + \sigma_{m u}$$

Que puede expresarse como:

$$V_{f crit} = \frac{E_c \epsilon_{m u}}{\sigma_{fu}}$$

y que en el caso de las fibras de acero, suponiendo:

$$\epsilon_{m u} = 100 \cdot 10^{-6} \quad \sigma_{m u} = 3 \text{ MN/m}^2 \quad E_f = 200 \text{ GN/m}^2$$

$$\sigma_{fu} = 100 \text{ MN/m}^2 \quad ; \text{ resulta } V_{f crit} \approx 0,3 \text{ por 100}$$

Una representación gráfica del volumen crítico de fibras, es la dibujada en la Fig. 5.

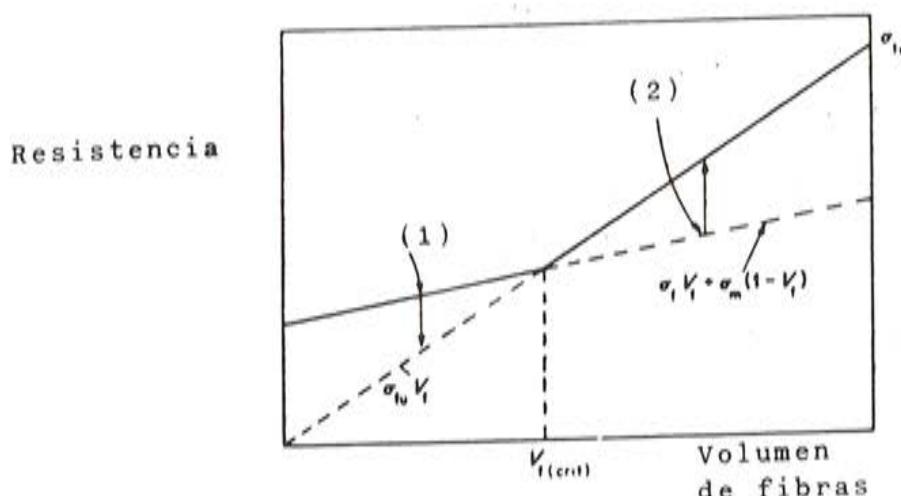
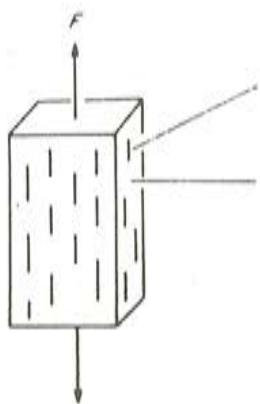


Fig. 5. Representación gráfica de la ecuación (A) y posición del volumen crítico de fibras.

- (1) Si la matriz rompe ahí, debe decrecer la carga.
- (2) Si la matriz rompe ahí, mayor carga post-fisuración.

### Principios teóricos del comportamiento a flexotracción en los hormigones reforzados con fibras de acero

Los principios teóricos básicos que voy a exponer a continuación, tienen sus fundamentos en las investigaciones llevadas a cabo por Avestos, Mercer, Sillwood y Hannant.



Sección transversal de fibras  
 $A_f$  = Superficie     $V_f$  = Volumen  
 Sección transversal de la matriz  
 $A_m = A_c - A_f = 1 - A_f$   
 $V_m = V_c - V_f = 1 - V_f$

Fig. 4. Hormigón reforzado con fibras alineadas sometido a tensiones uniaxiales.

De esta forma, podemos estimar bien el valor del nuevo módulo de elasticidad de la mezcla en función de los componentes (matriz y fibra) o bien el incremento de la tensión para producir la primera fisura. Por ejemplo, suponiendo que  $E_m = 26 \text{ GN/m}^2$  y que  $E_f = 240 \text{ GN/m}^2$ , con un volumen de fibras del 0,5 por 100, resultaría:

$$E_c = 240 \cdot 0,005 + 26 (0,98) = 26,68 \text{ GN/m}^2$$

que demuestra la pequeña influencia de las fibras sobre el módulo de elasticidad.

Refiriéndonos ahora al incremento de las tensiones de fisuración, los ensayos realizados en el Instituto Eduardo Torroja sobre probetas prismáticas sometidas a flexotensión, dan valores que alcanzan el 1,4 de la tensión de rotura para el mismo hormigón sin fibras.

Para tener en cuenta la distribución de las fibras en lo que a orientaciones se refiere, se utiliza un coeficiente multiplicador del volumen de las fibras que se denomina Factor de Eficiencia ( $\eta_1$ ), con valores algo diferentes según distintos investigadores, pero que podemos situar en:

Orientación de las fibras	$\eta_1$ según	
	Cox	Krenchel
1-Dimensión	1	1
2-Dimensiones	1/3	3/8
3-Dimensiones	1/6	1/5

Hay un segundo factor multiplicador del volumen de fibras (que corresponde a la longitud de las fibras) y que, aunque algunos autores consideran que es la unidad, oscila alrededor de 0,98 para piezas delgadas y antes de alcanzar la deformación de rotura de la matriz. Su valor más exacto viene fijado por la relación entre dicha longitud y la longitud crítica, definida ésta última como la longitud de fibra embebida en el hormigón que puede causar la rotura de la misma en un ensayo de pull-out. En base a esta definición, Allen da los siguientes valores:

$$\begin{array}{ll} l \leq l_c & \eta_z = 1/2 l_c \\ l \geq l_c & \eta_z = 1 - 1/2 l_c \end{array}$$

Independientemente de lo anterior, hay además que tener en cuenta una cuestión fundamental: no solo es importante conocer cuando se produce la primera fisura sino también cuál es la capacidad de carga del hormigón una vez fisurado.

Para mantener esa capacidad de carga o superarla, es necesario que la cantidad de fibras sea tal que se supere un volumen mínimo definido como volumen crítico. Si recordamos la fórmula (A) y tenemos en cuenta que  $\sigma_f = \epsilon_{m u} E_m$ , resulta:

$$\sigma_c = \epsilon_{m u} E_f V_{f crit} + \sigma_{m u} (I - V_{f crit})$$

Para que se mantenga  $\sigma_c$  es necesario que:

$$\sigma_{fu} V_{f crit} = \epsilon_{m u} E_f V_{f crit} + \sigma_{m u} (I - V_{f crit})$$

Por lo que:

$$V_{f crit} = \sigma_{m u} / \sigma_{fu} - \sigma_{m u} E_f + \sigma_{m u}$$

Que puede expresarse como:

$$V_{f crit} = \frac{E_c \epsilon_{m u}}{\sigma_{fu}}$$

y que en el caso de las fibras de acero, suponiendo:

$$\epsilon_{m u} = 100 \cdot 10^{-6} \quad \sigma_{m u} = 3 \text{ MN/m}^2 \quad E_f = 200 \text{ GN/m}^2$$

$$\sigma_{fu} = 100 \text{ MN/m}^2 \quad ; \text{ resulta } V_{f crit} \approx 0,3 \text{ por 100}$$

Una representación gráfica del volumen crítico de fibras, es la dibujada en la Fig. 5.

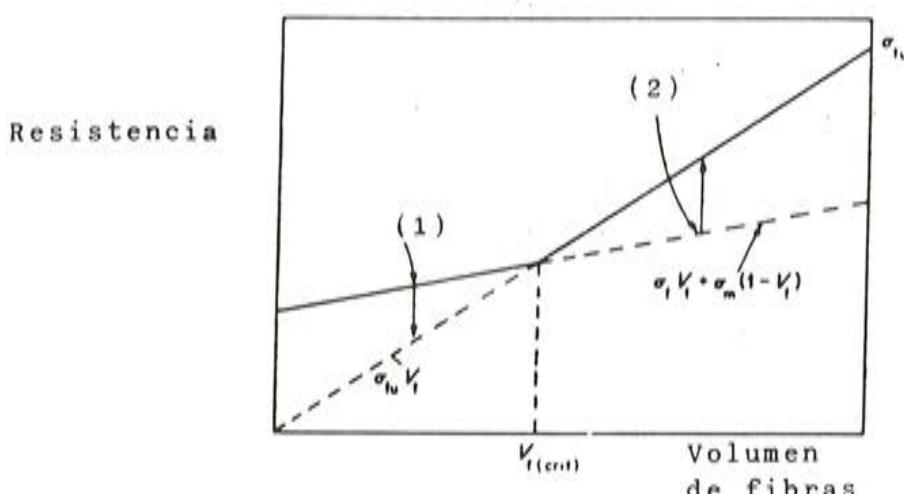


Fig. 5. Representación gráfica de la ecuación (A) y posición del volumen crítico de fibras.  
(1) Si la matriz rompe ahí, debe decrecer la carga.  
(2) Si la matriz rompe ahí, mayor carga post-fisuración.

## Principios teóricos del comportamiento a flexotensión en los hormigones reforzados con fibras de acero

Los principios teóricos básicos que voy a exponer a continuación, tienen sus fundamentos en las investigaciones llevadas a cabo por Avestos, Mercer, Sillwood y Hannant.

Si como se desprende del cuadro de propiedades expuesto anteriormente, una de las más beneficiadas por la incorporación de fibras al hormigón es la resistencia a flexotracción, no hay la menor duda de que es necesario tener un profundo conocimiento de sus mecanismos.

El aumento de resistencia a flexotracción se debe principalmente a la conducta quasiplástica de estos hormigones, producida por la adherencia de las fibras a la matriz después de la fisuración (Fig. 6).

Si consideramos una viga de hormigón reforzado con fibras de acero sometida a una carga creciente  $P$ , al incrementarse las tensiones de tracción fisurará, pero en este caso una parte o un incremento de la carga será mantenida por las fibras que atraviesan la fisura y que conseguirán el total equilibrio de fuerzas sin llegar a la rotura.

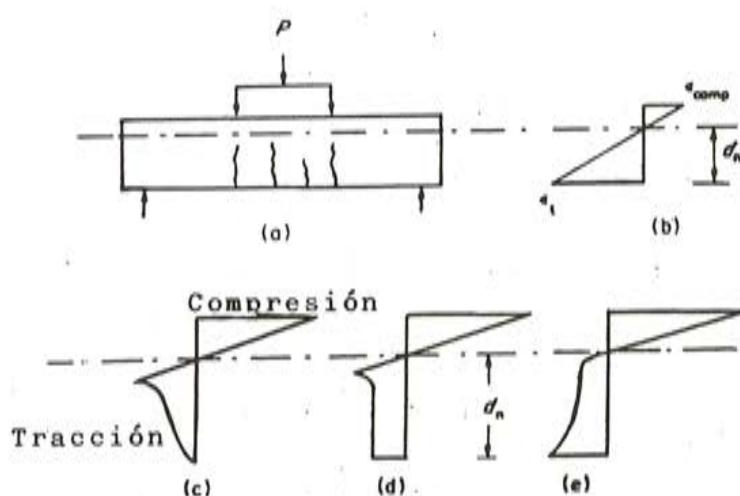


Fig. 6

Fig. 6. Distribución de tensiones y deformaciones en secciones fisuradas sujetas a flexotracción. (a) Viga bajo carga (b) Promedio de distribución de deformaciones después de fisuración (c) (d) (e) Distribución de tensiones en función del tipo de fibras y del volumen de las mismas.

Debido a la formación de las fisuras, se incrementan las deformaciones a tracción y el valor de  $d_n$ , distancia de la fibra neutra a la cara de tracción, aumenta.

Este incremento de deformaciones es superior al correspondiente a la zona de compresión. Las figuras (c) o (d) son la distribución de tensiones que más comúnmente presentan los hormigones reforzados con fibras de acero.

Un estudio perfecto de todos los fenómenos es prácticamente imposible, ya que si tenemos de tener en cuenta las tensiones de adherencia bajo deformaciones, las interacciones fibra-fibra o fibra-áridos, la dispersión y orientación de las fibras, etc... se comprende que son tantos los parámetros que no existe esa posibilidad. Sin embargo, si es posible establecer una teoría lo suficientemente precisa para que sirva de base al cálculo y diseño de los hormigones reforzados con fibras de acero.

Para ello, vamos a suponer en primer lugar que la ley de esfuerzos en la zona de tracción es rectangular (una vez fisurada la pieza) y que en la zona de compresión permanece triangular. Aunque sobre estas hipótesis puedan influir el tipo de fibras, su volumen, su longitud, la relación agua/cemento, edad, condiciones de curado o el espesor de las fisuras, la práctica ha demostrado su aproximación a la realidad.

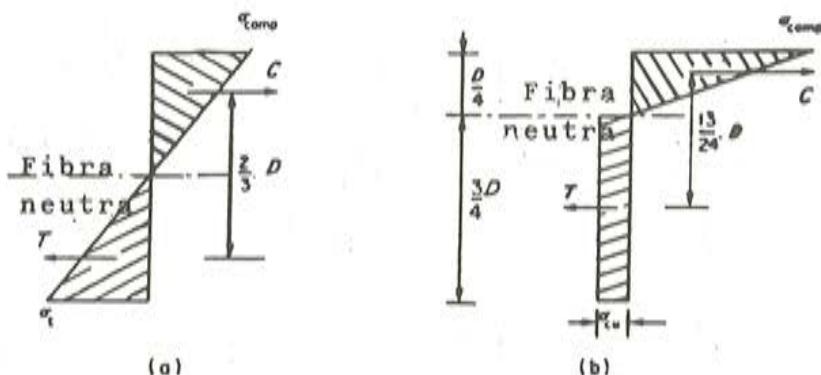


Fig. 7. Tensiones en flexotracción. (a) Material elástico  $M = \sigma_t \cdot D^2/6$  (b) Elástico en compresión. Plástico en tracción  $M = \sigma_{cu} \cdot 13 D^2/32$ .

La figura 7a responde a las características de un material elástico con la fibra neutra situada en el centro de la sección y siendo la resistencia a tracción en el momento de la fisuración igual a la resistencia última a flexotracción. La figura 7b muestra el dibujo de un diagrama típico de un hormigón con fibras de acero después de fisuración y en donde las fibras estén soportando la carga a través de la sección fisurada. En estas condiciones, la resistencia última a tracción post-fisuración viene dada por el valor de la carga que pueden soportar las fibras, es decir:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} V_f \quad , \text{en donde}$$

$\sigma_{cu}$  = Resistencia última a flexotracción post-fisuración,

$\sigma_{fu}$  = Resistencia a tracción de las fibras.

$V_f$  = Volumen de fibras.

y siempre que el espesor de las fisuras ( $< 0,3$  mm) sea pequeño comparado con la longitud de las fibras. Aunque las últimas investigaciones parecen indicar que las deformaciones de la matriz fisurada pueden teóricamente incrementarse con diámetros de fibras inferiores a un determinado valor crítico para un volumen de fibras constante, todavía no ha sido confirmado este extremo. Ha sido demostrado por Edgington que para este tipo de hormigones la fibra neutra puede estar a solo  $0,2 D$  de la cara de compresión, siendo por tanto una estimación conservadora suponerla a  $D/4$ .

Sabemos que el momento que puede soportar un material elástico como el descrito en la figura 7 (a) es, por unidad de anchura:

$$M = \sigma_t D^2/6$$

y que de acuerdo con la figura 7 b, resulta:

$$T = \sigma_{cu} \cdot 3D/4 \quad ; \quad l_a = 1/2 \cdot 3D/4 + 2/3 \cdot D/4 = 13D/24$$

$$M = \sigma_{cu} 13D^2/32$$

En orden a que los dos elementos representados en ambas figuras tuvieran la misma resistencia, sus momentos deberían ser iguales, por lo que:

$$\sigma_t D^2/6 = \sigma_{cu} 13 D^2/32 \Rightarrow \sigma_{cu} = 0,41 \sigma_t$$

Esto implica que, superada la resistencia post-fisuración para grandes deformaciones que excede del 0,41 de la resistencia a tracción, es cuando entra en juego el refuerzo a flexotracción.

Además, de la igualdad anterior, resulta que la resistencia a flexotracción es 2,44 veces la resistencia a tracción directa. Si el desplazamiento de la fibra neutra pudiera llegar a la cara de compresión, resultaría que:

$$\sigma_{cu} D.D/2 = \sigma_t D^2/6 \Rightarrow \sigma_t/\sigma_{cu} = 3$$

En la práctica esto resulta inalcanzable, ya que rompería antes a compresión.

Todo lo anterior se basa en una adecuada ductilidad después de la fisuración y en que la rotura no se inicie en la zona comprimida. Para que así resulte, es necesario que:

$$C = T ; 1/2 \sigma_{comp} D/4 = \sigma_{cu} 3D/4$$
$$\sigma_{comp}/\sigma_{cu} \geq 6$$

Este es el caso más usual para hormigones con fibras de acero, pero pudiera suceder que para elevadas dosificaciones de fibras con altos incrementos de la resistencia a flexotracción y mínimos a compresión, se llegara a alcanzar esa relación. De todo ello se deduce además que el momento de rotura para secciones gruesas es algo menor que para secciones delgadas. Esto se debe a que cuando la fibra neutra alcanza la profundidad de  $3D/4$ , las primeras fisuras serán más anchas para secciones gruesas que delgadas, por lo que para las primeras será más difícil alcanzar esa profundidad.

Otras investigaciones llevadas a cabo para estudiar la influencia del espaciamiento de las fibras en la resistencia post-fisuración, han demostrado que su influencia es mínima y que son más importantes otros factores tales como superficie y longitud de adherencia, orientación de las fibras, etc...

En lo que respecta a la influencia de la pérdida de ductilidad sobre la resistencia a flexotracción, que en el caso de fibras de vidrio es grande, podemos resumir que en el caso de las fibras de acero es muy pequeña y que como máximo y en el peor de los casos, podría representar al cabo de tiempo una pérdida máxima de alrededor del 10 por 100.

En algunos cálculos, independientemente de la resistencia a flexotracción es necesario tener en cuenta un coeficiente de seguridad función de la resistencia a fatiga de este tipo de hormigones. Las investigaciones realizadas, que incluyen ensayos hechos en el Instituto Eduardo Torroja, muestran la posibilidad de sobrepasar los  $2.10^6$  ciclos con cargas superiores al 75 por 100 de la que produce la primera fisura. Sobre esta base, se recomienda en la literatura existente la utilización de coeficientes de seguridad que normalmente varían entre 1,45 y 1,65, con valores extremos entre 1,35 y 1,8.

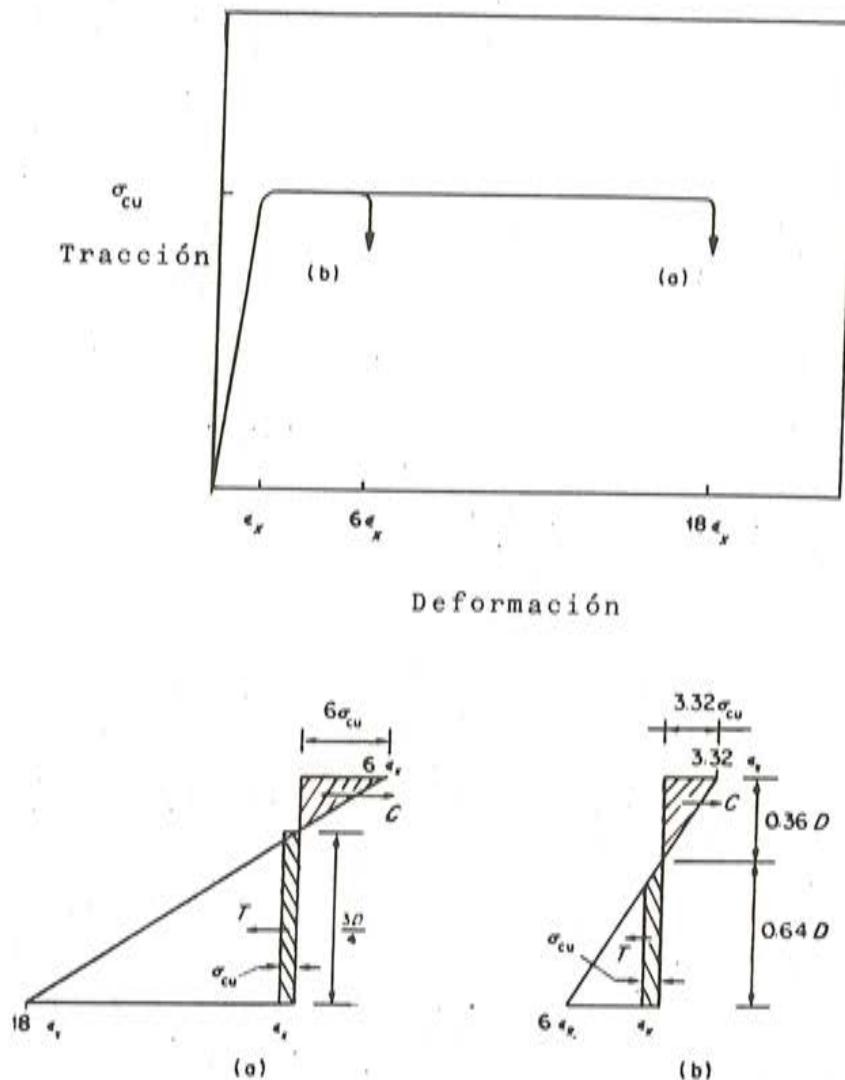


Fig. 8. Distribución de deformaciones y tensiones a flexo tracción para las curvas deformaciones-tracciones representadas encima. Para la curva (a)  $M = 0,41 \sigma_{cu} D^2$ , Para la curva (b)  $M = 0,35 \sigma_{cu} D^2$ .

## UTILIZACION PRACTICA

Para la utilización práctica de las fibras, hemos de tener en cuenta diversos factores, como son:

- Tamaño máximo del árido

Cuanto más cerca esté el tamaño del árido de la longitud de la fibras, es fácil comprender que menor será su efectividad (Fig. 9).

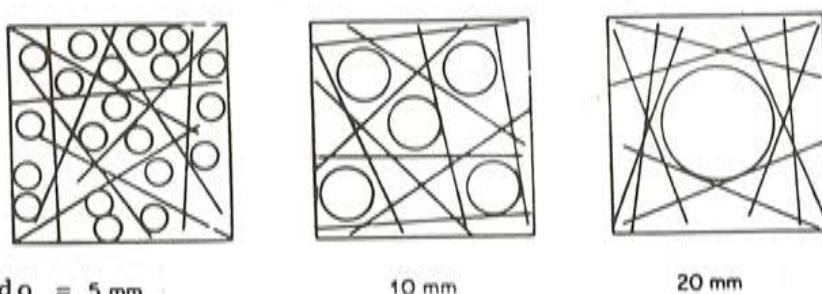


Fig. 9. Efecto del tamaño del árido sobre la distribución de las fibras dentro de un cuadrado de lado igual a la longitud de la fibra.

Ello, unido a que la presencia de árido más grande proporciona menos sitio para la ubicación de las fibras, hace que sea aconsejable que el tamaño máximo de los áridos no sobrepase los 25 mm pudiendo utilizarse áridos de hasta 40 mm con las fibras más grandes (alrededor de 60 mm de longitud) y dosificaciones bajas.

#### *– Aditivos*

Retardadores, acelerantes, plastificantes, etc., desarrollan idéntica misión en un hormigón con fibras que en un hormigón en masa.

#### *– Contenido de cemento*

Dado que las fibras necesitan estar rodeadas de mortero, es lógico pensar que a mayor cantidad de fibras por  $m^3$  y a más pequeño el tamaño de las fibras (mayor número de fibras por kilo), se necesita una mayor cantidad de pasta. Por ello, por ejemplo, es más aconsejable utilizar una mayor cantidad de cemento P-350 que utilizar una menor cantidad de cemento P-450.

#### *– Contenido de agua*

El uso de las fibras de acero en el hormigón tiene un aparente efecto adverso sobre la facilidad de movimiento y consolidación del hormigón. Esta pérdida de trabajabilidad es "aparente" si el cono de Abrams del hormigón se mide antes y después de la adición de fibras. Por ejemplo, un hormigón con un cono de 6 cm puede mostrar un cono de 2 cm después de añadir 40 kg/ $m^3$  de fibras. No hay duda de que la energía requerida para mover y consolidar el hormigón con fibras es mayor que para el mismo hormigón sin fibras. Sin embargo, debe ser recordado que, si mágicamente pudiéramos retirar las fibras, el cono del hormigón sería 6. Por tanto, la principal consideración a hacer, recordando los dos hormigones reforzados o no, es que el hormigón reforzado con fibras de acero requiere una mayor cantidad de energía de vibración.

Desafortunadamente, ha habido casos donde se ha seguido la establecida pero odiosa costumbre de añadir agua al hormigón en un esfuerzo para incrementar el cono. Es necesario decir que esta práctica no sólo no es recomendable sino que de hecho no resuelve el problema. Es un buen diseño de la mezcla el que debe realizarse para obtener óptimos resultados.

#### *– Consolidación y acabado*

Como he mencionado anteriormente, en general es necesario el uso de vibradores para la consolidación y acabado de los hormigones reforzados con fibras de acero. El buen diseño

de la mezcla y el uso adecuado de la vibración, eliminan la casi totalidad de las fibras presentes en la superficie.

La presencia de las fibras en la superficie, es técnicamente aconsejable pero estéticamente no deseable.

— *Consideraciones de diseño de la mezcla*

Si un buen diseño de la mezcla en un hormigón normal es importante, en un hormigón reforzado con fibras puede ser crítico. Afortunadamente, no es difícil obtener un buen hormigón con fibras, pero es necesario recordar algunos puntos principales, como:

- En función de la cantidad de fibras y del tamaño de las mismas (cantidad de fibras por kilo y esbeltez de las mismas), puede ser necesario aumentar la cantidad de finos.
- Es preferible desde el punto de vista de trabajabilidad, utilizar arena de río que la procedente de machaqueo, así como granulometrías de tipo continuo en lugar de discontinuo.
- Para hormigones de muy buena calidad, es aconsejable la utilización de plastificantes.

A continuación se describen diversas fórmulas de trabajo realizadas específicamente para hormigones con fibras de acero, en diversas obras en España o para la realización de ensayos.

Cemento PA-350 .....	380 kg .....	350 kg
Arena 0/5 mm .....	800 kg .....	860 kg
Gravilla 5/10 mm .....	— .....	820 kg
Gravilla 5/20 mm .....	850 kg .....	—
Agua .....	171 l. Plastificante	140 l.
Fibras Dramix .....	60 kg .....	30 kg

Para las dosificaciones usuales de fibras encoladas con extremos conformados utilizadas en España, podemos estimar que la mayoría de los hormigones fabricados en central son factibles de utilizar con fibras sin introducir modificación alguna.

## ADICION PRACTICA DE LA FIBRA

Es aconsejable, siempre que sea posible, realizar la mezcla de la fibra incorporándola como un arido más en central y no en el camión, procurando evitar un mezclado prolongado. En caso de no añadir inmediatamente con los aridos el cemento y el agua, se procurará que los peines no queden totalmente separados antes de incorporar esos dos componentes.

Si por necesidades de la obra, la incorporación de las fibras al hormigón se hace en el camión, es necesario tener en cuenta que:

- Ha de procurarse que el hormigón sea lo más fluido posible, para que el camino a recorrer por las fibras desde la boca hasta el fondo de la cuba resulte fácil.
- El vertido de las fibras se realizará lentamente para no provocar una excesiva concentración de fibras en el hormigón situado en la boca de la cuba, procurando al mismo tiempo que la cuba gire a sus máximas revoluciones. Si a continuación ha de trans-

portarse ese hormigón hasta su puesta en obra, se disminuirá al mínimo la velocidad de giro de la cuba.

- Se procurara que el tamaño máximo del árido no sea superior a 20-25 mm.
- Si es posible, se utilizaran los camiones con la caraga mínima de hormigón compatible con el costo del transporte.

## OBRAS EN ESPAÑA

Analizaremos las diferentes obras ejecutadas hasta la fecha o en ejecución, en función del campo de aplicación de las fibras (gunita, pavimentos industriales, etc.) o en función del tipo de fibras (galvanizadas, sueltas, etc.).

### CARRETERAS

Las dos principales obras realizadas hasta la fecha son la ejecución de la capa de rodadura de 7 cms. de espesor de los tableros de los puentes del nudo de la Vía Favencia en Barcelona y en los puentes del Desdoblamiento de la N-VI, en Despeñaperros.

En el primer caso, y bajo la dirección de la Generalitat, el contratista realizó los tableros de diversos puentes en Barcelona, con un hormigón reforzado con fibras de acero tipo ZC-50/50 y una dosificación de 50 kgs. por  $m^3$ , que alcanzó una resistencia a flexotracición a 28 días del orden de los 90 kgs./ $cm^2$ , y una resistencia media a primera fisura de 58 kgs./ $cm^2$ .

En lo que respecta a Despeñaperros, con una superficie total de 18.000  $m^2$ , se han utilizado la misma dosificación y el mismo tipo de fibras, usando una lechada de cemento como puente de unión entre los dos hormigones. Las resistencias a primera fisura alcanzadas a los 7 días dan una media de 53 kgs./ $cm^2$ .

Igualmente, hemos realizado la capa de rodadura del firme de una vía de salida de la Autopista de Villalba-Adanero, utilizando hormigón reforzado con fibras ZC-60/80 ó ZC-50/50 en diferentes espesores y dosificaciones (Fotografía 1).



Foto 1.

### ESTACIONAMIENTOS

Para el Ministerio de Transportes y dentro del Plan Nacional de Estaciones de Mercancías por Carretera, se construyó un estacionamiento en Oviedo, con una superficie de unos 45.000  $m^2$  y utilizando hormigón reforzado con fibras tipo ZC-60/80 en cantidades que, en función de las cargas a soportar, variaban entre 25 y 40 kg/ $m^3$  (Fotografía 2).



Foto 2.

## AEROPUERTOS

Después de la realización de varias pruebas en los aeropuertos de Mallorca, Málaga, Sevilla, etc., salió a concurso la ampliación del estacionamiento para Jumbos y DC-8 del aeropuerto de Mallorca, con una superficie de unos  $100,000 \text{ m}^2$ , un espesor de 23 cm de hormigón reforzado con fibras de acero tipo ZC-50/50 y una resistencia característica a flexotensión de  $62 \text{ kg/cm}^2$ . El plazo para la realización de la obra es el comprendido entre los meses de mayo y septiembre de 1984.

## PAVIMENTOS INDUSTRIALES

En la Central Nuclear de Trillo, se están realizando unos  $50,000 \text{ m}^2$  de pavimentos con hormigones reforzados con fibras de acero. La dosificación utilizada es de  $30 \text{ kg/m}^3$  de fibras tipo ZC-50/50, alcanzándose unas resistencias a flexotensión que en algunas ocasiones superan los  $125 \text{ kg/cm}^2$ .

## GUNITA

Las tres principales obras en las que el refuerzo tradicional ha sido sustituido por fibras de acero, son las siguientes:

- Presa de Aldeadavila.

Una parte de las galerías de la ampliación de la central, están siendo gunitadas con fibras de acero tipo ZC-30/50 en una dosificación media de  $30 \text{ kg/m}^3$ . (Fotografía 3).

- Taludes del Pantano de Foix.

Se han gunitado con fibras de acero tipo ZP-30/50, unos  $10,000 \text{ m}^2$  para la consolidación de las laderas del pantano de Foix.

- Túneles de Feve.

Diversas reparaciones en túneles FEVE, que se están llevando a cabo en Asturias, están siendo realizadas con hormigón proyectado reforzado con fibras de acero tipo ZC-30/50.

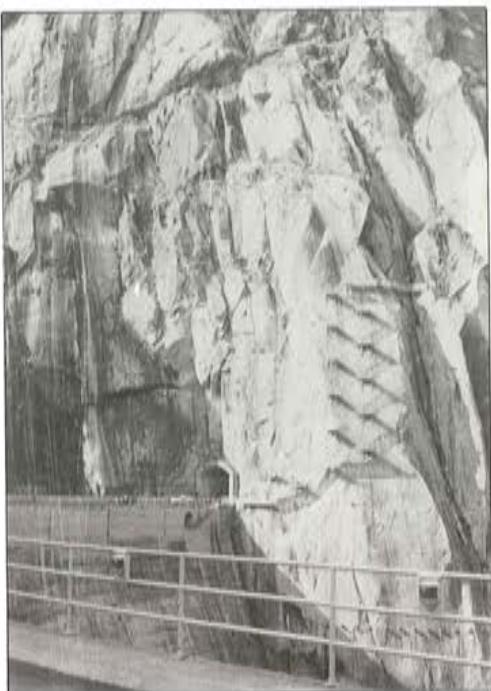


Foto 3.

## CONSTRUCCIONES MILITARES

Se han realizado diversos pavimentos, entre los que cabe destacar el de una nave taller para helicópteros, realizada con fibra tipo ZC-60/80 y una pista para maniobras de tanques.

Es de destacar que en Europa, se han realizado diversas construcciones de polvorines y bunkers, ya que —mediante ensayos— se ha visto la necesidad de triplicar la cantidad de explosivo para producir el mismo daño.

## FIBRAS GALVANIZADAS

Las fibras galvanizadas, han sido utilizadas fundamentalmente por cuestiones estéticas y no por posibles problemas de corrosión. La aparición de manchas de óxido producidas por aquellas fibras que queden en superficie, pueden dar lugar a una sensación de abandono o mala construcción, que obliga a tratar de evitarlo mediante la utilización de fibras galvanizadas. Las principales realizaciones con ellas, son las siguientes:

- *Viviendas*: Utilizadas como armadura para flexotracción y antifisuración; se han utilizado las fibras tipo ZC-60/80 en la construcción de un grupo de 180 viviendas con la técnica de encofrado-túnel (Fotografía 4).
- *Centros penitenciarios*: Ese mismo tipo de fibras ha sido utilizado para la construcción de diversos paneles-sandwich, acrecentando además las medidas de seguridad.
- *Piscinas*: Con el fin de evitar al máximo la fisuración, se han utilizado fibras galvanizadas en diversas piscinas exentas.
- *Piscifactorías*: En diversos tramos de las instalaciones de una piscifactoría se han utilizado, para aumentar las medidas antifisuración, este tipo de fibras.



Foto 4.



Foto 5.

## APLICACIONES ESPECIALES

Podemos destacar entre ellas:

- Realización de un depósito para elementos radioactivos, en el Laboratorio Central del INCE en Madrid. Todos los muros del depósito han sido reforzados con fibras de acero tipo ZC-50/50 en una proporción de  $50 \text{ kg/m}^3$ , con una doble finalidad:
  - a) Aumentar la densidad del hormigón.
  - b) Evitar todo tipo de fisuración.
- Realización de la solera y muros de un sótano, con hormigón reforzado con fibras de acero tipo ZC-30/50, con el objeto de evitar todo tipo de fisuración que pudiera destruir la impermeabilización de esos elementos construidos en una zona con mucha agua.
- Realización de un muro en Ensidesa, con hormigón reforzado con  $45 \text{ kg/m}^3$  de fibras tipo ZC-60/.80, sometido a impacto de escorias a muy alta temperatura (Foto-graffia 5).

## BIBLIOGRAFIA

- Publicaciones sobre Hormigones con Fibras DRAMIX. Bekaert-España.
- Fibre cements and fiber concretes. D. J. Hannant. John Wiley and sons—1978.
- State of the Art Report. Battelle Development Inst. 1982.
- Concrete Science. Ramachandran, Feldman and Beadoin. Ed. Heyden 1981.
- Hormigones reforzados con fibras de acero. M. Fernández Canovas. Informes de la Construcción nº 342. Agosto 1982.
- SP-44 American Concrete Institute.
- Measurement of Properties of Fiber reinforced Concrete. ACI 544-2r 78.
- Simposyumm RILEM 1975: Fiber Reinforce Cement and Concrete.
- C.E.B. Grupo 12 Assessment of Concrete Structures and Design Procedur for up-grading. 1983.
- A simple constitutive model of steel fiber reinforced concrete. Y. Tanigawa. The International Journal of Cement Composites and Lightweigh Concrete. May 1983.

## **Actividades de la Unión Internacional de Arquitectos en el marco de la I.B.A.**

El Consejo Superior de los Colegios de Arquitectos nos envía, para su difusión, la siguiente información sobre las próximas actividades de la Unión Internacional de Arquitectos.

### **EXPOSICION INTERNACIONAL DE LA CONSTRUCCION**

Tendrá lugar en el Centro de Congresos Internacionales (ICC), Messegelände, Hall 14 B. 1000 Berlín 19 (R.F.A.), durante los días 15 al 29 de setiembre de 1984.

Con motivo de esta Exposición se han programado las siguientes actividades:

- A. EXPOSICION sobre el tema "Construir con medios limitados" (15-27 setiembre 1984).

Se trata de un tema de palpable actualidad. Se expondrán ejemplos presentados por distintas Secciones Nacionales de la U.I.A. o por Arquitectos o equipos independientes.

- B. SEMANA DE LA ARQUITECTURA U.I.A. (17-22 setiembre de 1984).

Tema General: "Integración de las funciones en la ciudad".

En el transcurso de esta Semana, cada Grupo de Trabajo permanente de la U.I.A. "se presentará" y expondrá su criterio sobre el aspecto científico de su competencia particular, dentro del tema general apuntado. Por otra parte, una personalidad, independiente de los Grupos de Trabajo de la Unión, expondrá su punto de vista personal. Se abrirá después un debate en el que todo arquitecto podrá participar libremente.

- C. ENCUENTRO DE PROFESORES Y ESTUDIANTES DE ARQUITECTURA, con los Miembros del Jurado de la Confrontación de Escuelas de Arquitectura (23-25 setiembre de 1984).

Este encuentro tiene el carácter de un "estreno" y permitirá a todos los participantes conocer mejor los proyectos seleccionados por el Jurado y escuchar, de viva voz, de los representantes del Jurado, las razones de su decisión.

- D. ENCUENTRO DE CRITICOS DE ARQUITECTURA, sobre el tema del papel de la crítica de Arquitectura y de los "medios" (informativos), con ocasión de los concursos de Arquitectura (25-26 setiembre de 1984).

- E. COLOQUIO ICOMOS-U.I.A., sobre los problemas específicos de las ciudades en expansión que cuentan con un centro o con barrios históricos (27-29 de setiembre de 1984).

Se partirá, para el estudio, del análisis de seis ciudades: Bari, Berna, Hakodate, Plovdiv, Puebla y Túnez.

Los problemas de cada uno de estos "casos-ejemplos" serán presentados por representantes responsables de cada una de estas ciudades y serán ilustrados por paneles, diapositivas o películas.

Todas estas manifestaciones están abiertas, sin ningún derecho o cuota de participación, a todos los arquitectos, urbanistas, profesores, estudiantes, periodistas, y a todos aquellos interesados en los problemas expuestos.

Se ha previsto entregar a los participantes, en la medida de las disponibilidades de los organizadores, una serie de publicaciones, con carácter gratuito.

Los interesados pueden obtener una más amplia información dirigiéndose al Consejo Superior de los Colegios de Arquitectos, Castellana, 12, Madrid-1, en donde les facilitarán los programas detallados de las diferentes actividades.

## **"Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón armado para Edificios".— Tomo I**

**Por: J. Calavera, Dr. Ingeniero de Caminos  
Instituto Técnico de Materiales y Construcciones**

Acaba de ser puesto a la venta el primero de los dos tomos de que constará esta obra dedicada al proyecto y cálculo de las estructuras de hormigón armado para edificios. La información que en ella se incluye es válida para estructuras de hormigón armado en general y no sólo para las de edificios; por lo que, en realidad, el título es más restringido que el alcance efectivo del libro.

Aparece ahora este Tomo I, dedicado al cálculo de esfuerzos. En breve plazo le seguirá el Tomo II, dedicado al dimensionamiento y detalles constructivos.

En esta obra se ha procurado limitar el alcance de cada Capítulo a lo necesario para proporcionar al lector una información suficiente sin llegar a una extensión excesiva del texto. En cada Capítulo, se indica una bibliografía específica para que el lector interesado pueda profundizar en el tema en él tratado.

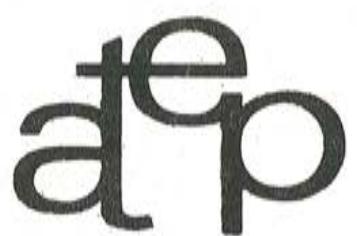
El libro se ha escrito con la intención de que, simultáneamente, resulte útil a los profesionales en ejercicio y a los alumnos de los cursos avanzados de las Escuelas Técnicas. En este sentido se ha procurado prestar la atención debida, tanto al rigor y a los conceptos básicos como a la aplicación práctica y a los detalles constructivos. Y para los poco habituados al cálculo matricial o al cálculo con ordenadores, en los Capítulos 12 y 13 se incluye una breve iniciación a dichos temas.

Con el convencimiento de que la visualización de los procesos de cálculo, además de incrementar su seguridad, aumenta la intuición auténtica, a lo largo de todo el libro se ha procurado dar una importancia primordial a la visualización de los problemas. Y así, en el tratamiento de cada tema, entre los varios métodos posibles se ha seleccionado, en todos los casos, aquél que más se ciñe al proceso físico del funcionamiento de la estructura; pero siempre con el criterio de mantener el necesario rigor y de matizar claramente la validez y el alcance de las conclusiones deducidas.

Parte del material utilizado en este libro procede de los Cursos y Seminarios impartidos por el Autor en su Cátedra de Edificación y Prefabricación en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, de Madrid. Ha utilizado también abundante material procedente de sus lecciones en los Cursos para postgraduados del Instituto Técnico de Materiales y Construcciones (INTEMAC). El resto de las fuentes se indica, en cada caso, en la Bibliografía.

Este Tomo I, de cerca de 600 páginas, con numerosísimas figuras, tablas y gráficos, puede adquirirse al precio de 3.800,— ptas., más gastos de envíos, dirigiendo las peticiones a:

**INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES  
Monte Esquinza, 30-5º D  
Madrid-4**



**asociación técnica  
española del pretensado**