

hormigón

**y ACERO**

*n°153*

*ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.*

*DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77*

*INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO.*

*GOSTILLARES (CHAMARTIN). MADRID-33.*

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).**— Pº de la Habana, 14. 28036 Madrid.
- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMEN".**— Velázquez, 23. 28001 Madrid.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**— Orense, 10. 28020 Madrid.
- AZMA, S.A.**— Pº de la Habana, 16. 28036 Madrid.
- CAMARA, S.A.**— Avda. de Santander, s/n. 47080 Valladolid.
- CAMINOS, EDIFICIOS Y OBRAS, S.A.**— J. Lázaro Galdiano, 4. 28036 Madrid.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.**— Grijalba, 9. 28006 Madrid.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.**— C.N. 340, Km. 329,300. San Vicenç dels Horts (Barcelona)
- CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A.**— Aribau, 185. 08021 Barcelona.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.**— Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
- COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS DE MADRID.**— Almagro, 42. 28010 Madrid.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.**— Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.**— Plaça Nova, 5. 08002. Barcelona.
- CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.**— Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.**— Ayala, 42. 28001. Madrid.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Avda. de América, 24. 28028 Madrid.
- ELABORADOS METALICOS, S.A.**— Apartado 553. 15080 La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI).** Departamento Obras Especiales.— José Ortega y Gasset, 40. 28006 Madrid.
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.**— Biblioteca.— Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.**— Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).**— Arapiles, 14. 28015 Madrid.
- FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).**— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- FORJADOS DOMO.**— Hermosilla, 64. 28001 Madrid.
- FREYSSINET, S.A.**— General Perón, 24. 28020 Madrid.
- HEREDIA Y MORENO, S.A.**— Princesa, 3. 28008 Madrid.
- HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.**— Archs, 10. 08002 Barcelona.
- HISPANO-ALEMANA DE CONSTRUCCIONES, S.A.**— Capitán Haya, 51. 28020 Madrid.
- HORMIGONES GERONA, S.A.**— Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
- HUARTE Y CIA., S.A. Departamento Técnico.**— Profesor Waksman, 14. 28036 Madrid.
- IBERDUERO, S.A. Centro de Documentación (8501).**— Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.

*(Continúa en el int. de contraportada)*

# MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

*(Continuación de Int. Portada)*

- IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).**— Príncipe de Vergara, 43. 28001 Madrid.
- IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.** Plaza Gala Placidia, 5-7. 08006 Barcelona.
- INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**— Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
- INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).**— Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
- INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.**— Buenos Aires, 19-21. 08029 Barcelona.
- INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.**— Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. Pº de la Castellana, 67. 28071 Madrid.
- INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).**— Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
- INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA).**— Biblioteca.— Orense, 70. 28020 Madrid.
- JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.**— Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
- LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**— Fábrica de Forjas de Buelna. Los Corrales de Buelna (Santander)
- PACADAR, S.A.**— Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
- PRELOAD SISTEMAS, S.A.**— Pº de la Castellana, 140. 28046 Madrid.
- PRENSOLAND, S.A.**— Calle Industria, s/n. San Martín de Centellas (Barcelona)
- PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.**— Polígono Industrial Atios. Porrifio (Pontevedra) 36080.
- PROMONAL, S.L.**— Poeta Artola, 12. 46021 Valencia.
- SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.**— Avda. del Triunfo, 56. Las Arenas (Vizcaya)
- SIKA, S.A.**— Carretera Madrid-Irún, km. 14,500. Polígono Industrial. Alcobendas (Madrid) 28000.
- SOCIEDAD ANONIMA ECHEVARRIA.**— Apartado 46. 48008 Bilbao.
- SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA BBR (S.A.E. BBR).**— Polígono Industrial Barcelonés. Carrero Blanco, s/n. Abrera (Barcelona) 08000.
- TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**— Velázquez, 105. 28006 Madrid.
- TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).**— Monturiol, 5. Santa María de Barbará (Barcelona)

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente, su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

# *hormigón y acero*

*n.º 153*

4.º trimestre, 1984

## CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales) .....	2.000,- ptas.	40,- dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) .....	5.000,- ptas.	100,- dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) .....	10.000,- ptas.	200,- dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - 28080 MADRID



PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



**HUESCA:**

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA

Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON

Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

**MADRID**

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10

Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4 - 8 -  
TORREJON DE ARDOZ

Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

**ZARAGOZA**

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
 BARREDO, Carlos  
 CUVILLO, Ramón del  
 CHUECA, Rafael  
 ELICES, Manuel  
 FERNANDEZ DE VILLALTA, Manuel  
 FISAC, Miguel  
 GONZALEZ VALLE, Enrique  
 JODAR, Juan  
 JULIA, Manuel  
 LLOMBART, José Antonio  
 MANTEROLA, Javier  
 MARIA TOME, Javier  
 MURCIA, Juan  
 PIÑEIRO, Rafael  
 POZO VINDEL, Florencio J. del  
 ROMERO, Rafael  
 SANCHEZ CASTRO, Carlos  
 SANCHEZ GALVEZ, Vicente  
 SIEGRIST, Carlos

# hormigón y acero

**N. 153**

*índice*

<b>457-0-91</b>	<b>Condensación estática de sistemas de ecuaciones simétricos y en banda en computadores con poca memoria central . . . . .</b> Condensation statique des systèmes d'équations symétriques et à bande pour des ordinateurs avec peu de mémoire centrale. Static condensation of symmetrical banded systems of equations for computers with small core memory. <i>A. Recuero y J.P. Gutiérrez.</i>	9
<b>457-0-92</b>	<b>Vínculos internos rígidos en el análisis matricial de estructuras de barras. . .</b> Liens internes rigides dans l'analyse matricielle de structures à barres. Rigid internal ties in the matrix analysis of bar structures. <i>Raúl N. Kaufmann.</i>	21
<b>457-0-93</b>	<b>Pilas altas de viaductos construidos por avance en voladizo. . . . .</b> Piles élancés pour viaducs construits à l'avancement en encorbellement sucesifs. High piers of viaducs constructed by advancing overhangs. <i>J.J. Arenas y L. Villegas.</i>	45
<b>457-3-16</b>	<b>Teoría y práctica, convención e historia. Los esfuerzos hiperestáticos de pretensado . . . . .</b> Théorie et pratique, convention e histoire. Les efforts hyperestatiques de précontrainte. Theory and practice, convention and history. Prestressing hiperstatic forces. <i>J. Murcia.</i>	85

457-4-8	<b>Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 1 Teoría</b> ..... Pertes de précontrainte per fluage et relaxation: 1 Theorie. Prestressing losses due to creep and relaxation: 1 Theory. <i>V. Sánchez Gálvez y M. Ellices.</i>	95
457-4-9	<b>Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 2 Comprobación experimental</b> ..... Pertes de précontrainte par fluage et relaxation: 2. Preuve expérimentale. Prestressing losses due to creep and relaxation. 2. Experimental control. <i>V. Sánchez Gálvez y M. Ellices.</i>	113
591-1-41	<b>Patología 3. Reparación de pilares de hormigón mediante zunchado</b> ..... Pathologie 3. Réparation des piliers en béton au moyen de frettage. Pathology 3. Concrete columns repair by bind reinforcement. <i>A. González Serrano.</i>	123
591-1-42	<b>Programa para el dimensionamiento de secciones rectangulares de hormigón armado en flexocompresión recta con un ordenador portátil</b> ..... Programme de calcul pour le dimensionnement des sections rectangulaires en béton armé soumises à flexo-compression plane, a l'aide d'un ordinateur portable. Computer program for the design of rectangular sections in reinforced concrete under plain bending and compression, by means of a portable computer. <i>F. Morán.</i>	141
591-6-12	<b>Teoría variacional de láminas</b> ..... Théorie variationale des voiles. Shells variational theory. <i>S. Monleón, J.F. Moya y P. Fúster.</i>	155
628-0-50	<b>Comportamiento de barras corrugadas de aceros de armar a bajas temperaturas</b> ..... Comportement à basses températures de barres à haute adhérence. Behaviour of ribbed bars for concrete reinforcement at low temperature. <i>H. Corres, J. Planas, M. Ellices, M. Buttice y R. Chueca.</i>	215

**RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".**

### **ESPAÑA**

AGROMAN, EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.—Madrid.  
ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
AMMON-RA.—Madrid.  
ARIDOS LIGEROS, S.A.—Madrid.  
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.—Barcelona.  
BIGUETES, S.L.—Elche (Alicante).  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.  
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).  
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A. PROCEDIMIENTOS RODIO.—Madrid.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. Biblioteca.—Zaragoza.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. Departamento de Laboratorios.—Santa Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.—Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
COLOCACIONES TECNICAS, S.A. (COTESA).—Barcelona.  
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR.—Biblioteca.—Sevilla.  
CONTROLEX.—Alicante.  
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.  
DIRECCION GENERAL DE OBRAS PUBLICAS E INFRAESTRUCTURAS. Ser. Gestión-Apoyo Técnico. Valladolid.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ELABORADOS DE HORMIGON, S.A. Villalbilla (Burgos).  
ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS, S.A. (EEPSA).—Manresa (Barcelona).  
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento de Construcción.—Madrid.  
ENAGA, S.A.—Pozuelo de Alarcón (Madrid).  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Cátedra de Construcción II.—Córdoba.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.  
ESCOLA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA. Departamento de Estructuras. La Coruña.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Córdoba.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE ALMADEN. Almadén (Ciudad Real).  
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.—Zumárraga (Guipúzcoa).  
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.  
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.  
FORJADOS DOL.—Esquivias (Toledo).  
GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).  
HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.  
IBERDUERO, S.A. Centro de Documentación.— (3001) Bilbao.

IBERTECNICA, S.A.—Madrid.  
 INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
 INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).  
 INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPSA). Biblioteca.—Madrid.  
 INSTITUT CARTOGRAFIC DE CATALUNYA.—Barcelona.  
 INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.  
 INSTITUTO NACIONAL DE EMPLEO. Sección Asuntos Generales.—Madrid.  
 INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.  
 J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).  
 LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.  
 LABORATORIO DE CARRETERAS Y GEOTECNIA JOSE LUIS ESCARIO.—Madrid.  
 LABORATORIO DE ENSAYOS DEL COLEGIO DE APAREJADORES DE MURCIA—Murcia.  
 LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).  
 LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
 LAING IBERICA, S.A.—Madrid.  
 LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.  
 LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
 MAHEMA, S.A.—Granollers (Barcelona).  
 MECANOGUMBA, S.A.—Mollet del Vallés (Barcelona).  
 MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.  
 MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION. Sección de Normativa.—Madrid.  
 MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.  
 NEX TEN, S.A.—Vitoria.  
 POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
 PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.  
 PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Barcelona.  
 PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.  
 PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).—Vitoria.  
 PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.  
 PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.  
 PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
 PREFLEX. COMPAÑIA LABORAL, S.A.—Gijón (Asturias).  
 PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.  
 REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A. (REISA).—Pinto (Madrid).  
 RED NACIONAL DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES (RENFE). División de Documentación.—Madrid.  
 SAINCE.—Madrid.  
 SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.  
 SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.—Gerona.  
 SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.—Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.—Zamora.  
 SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS (SAMO).—Valencia.  
 SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.  
 SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A.—SECEGSA.—Madrid.  
 SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.  
 TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).  
 TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Santander).  
 TOSAM, S.L.—Segovia.  
 TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).—Madrid.  
 UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.  
 VALLEHERMOSO, S.A.—Madrid.  
 VIGAS REMARRO.—Motril (Granada).  
 VIGUETAS MUBEMI.—Torrente (Valencia).

## EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.—Montevideo (Uruguay).  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).  
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).  
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).  
FACULTAD DE INGENIERIA. Universidad Nacional de Rosario.—Rosario (Argentina).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de Angola).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.—Santiago de Chile (Chile).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.—Lima (Perú).  
SARET P.P.B. Cadre Technique.—Le Pontet (France).  
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.—Londres (Inglaterra).  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería.—Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).  
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).  
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

## MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

\* \* \*

## Nota Editorial

Para general conocimiento, se estima imprescindible hacer unos breves comentarios sobre las razones que han dado lugar a que el número de páginas del presente número 153 de "Hormigón y Acero", correspondiente al último trimestre del año 1984, exceda ampliamente al de los anteriores, por lo que debe considerarse como un volumen realmente extraordinario.

Como todos los Miembros de nuestra Asociación conocen, en la última semana de septiembre se celebrará, en Santander, la XI Asamblea Técnica Nacional de la A.T.E.P., en la cual se presentarán ochenta Comunicaciones. La publicación de los textos de estas Comunicaciones se iniciará en el primer número del año 1985 y se proseguirá en los sucesivos; por lo que, en tanto no se hayan recogido dichas Comunicaciones, no se podrá incluir ningún otro trabajo.

Por otra parte, el exceso de originales pendientes de publicación rebasaba ampliamente la capacidad de un número ordinario de nuestra Revista. Pero no se estimó aceptable aplazar su publicación, por lo menos, hasta el primer número correspondiente al año 86, fecha en la cual habrían perdido ya actualidad.

Por todo ello y aunque esta solución representa un importante gasto suplementario que afecta muy desfavorablemente al limitado presupuesto de la A.T.E.P., la Junta de Gobierno ha acordado incluir en este último número de 1984 todos los artículos que se tenían pendientes.

Esperamos que nuestros lectores sabrán valorar como corresponde el sacrificio que ello supone para la Asociación y que comprenderán las razones que justifican la decisión adoptada.

## Nota de la Junta de Gobierno de la A.T.E.P.

Con lógica satisfacción hemos recibido la noticia de que D. Manuel Elices Calafat ha sido nombrado Consejero del C.D.T.I. y Vicerrector de la Universidad de Madrid.

D. Manuel Elices es Miembro de nuestra Asociación, con la cual desde hace años viene colaborando muy eficazmente y por cuyo motivo le fue concedida la Medalla de la A.T.E.P., en 1981.

Desde estas líneas deseamos expresar nuestra más sincera felicitación al Sr. Elices, a la que estamos seguro se adherirán gustosamente cuantos le conocen.

## Nueva Publicación de la A.T.E.P.

Continuando con la serie de Manuales que esta Asociación viene publicando con las recomendaciones que se consideran idóneas para conseguir una adecuada realización de las construcciones pretensadas y su buen comportamiento a lo largo de su vida de servicio, se ha editado ahora *el Manual H.P. 6-83* en el que, bajo el título "Recomendaciones para la conservación de obras pretensadas", se recogen las directrices que deben seguirse para mantener en buen estado las estructuras pretensadas.

Con este nuevo Manual se intenta salvar las lagunas hasta ahora existentes en la normativa oficial en relación con este problema tan de actualidad y que viene siendo objeto de especial atención en todos los países.

Por otra parte se ha estimado también interesante incluir en él las oportunas recomendaciones para la mejor aplicación de la técnica del pretensado en la realización de reparaciones y refuerzos de estructuras.

Debe subrayarse que, en realidad, el título de esta publicación resulta algo restrictivo, puesto que los principios sobre conservación que en ella se establecen para las obras pretensadas son de aplicación mucho más amplia; casi podría asegurarse que son de aplicación general a todo tipo de construcciones.

El precio de este Manual, de 110 páginas, con numerosas figuras y tablas, es de SEISCIENTAS PESETAS (OCHO DOLARES USA para el extranjero). No obstante, como siempre, a los Miembros de la ATEP se les concede un sensible descuento; por lo que podrán adquirir cuantos ejemplares necesiten al precio especial de CUATROCIENTAS PESETAS cada uno (CINCO DOLARES USA para el extranjero).

Los pedidos deben dirigirse a esta Asociación Técnica Española del Pretensado (ATEP), Apartado 19.002, 28080 Madrid.

Debe tenerse en cuenta que, de conformidad con las normas al efecto establecidas, solo podrán ser atendidas aquellas peticiones que vengan acompañadas, bien de cheque extendido a nombre de la Asociación por el importe total del pedido formulado, o bien por copia de la correspondiente orden de transferencia efectuada a la cuenta que la ATEP tiene abierta, con el nº 1560/271, en la Sucursal de Potosí, calle Bolivia, 11, 28016 Madrid, del Banco Español de Crédito.

# Condensación estática de sistemas de ecuaciones simétricos y en banda en computadores con poca memoria central

Alfonso Recuero Fornies  
Doctor Ing. de Caminos  
José Pedro Gutierrez Jimenez  
Ingeniero de Caminos  
INSTITUTO EDUARDO TORROJA

## 1. INTRODUCCION

Se denomina "condensación estática" de un sistema de ecuaciones lineales, del cual sólo se desea conocer explícitamente el valor de algunas de las variables, al proceso mediante el cual se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones lineales en el que intervienen exclusivamente las variables cuyos valores nos interesa conocer. Llamaremos sistema condensado a este nuevo sistema de ecuaciones.

Este tipo de procesos es de aplicación en gran número de disciplinas. Así, en Electricidad, la reducción de un conjunto de resistencias a una sola equivalente o de un circuito complejo a una rama equivalente (Teorema de Thevenin) son procesos de este tipo. Dentro del Cálculo de Estructuras, este proceso se utiliza en el cálculo por medio de subestructuras, en la generación de elementos finitos complejos, en la determinación del reparto de cargas entre varias estructuras portantes, en cálculo dinámico de estructuras, etc.

Existe abundante bibliografía sobre el tema. Citaremos aquí solamente algunas de las publicaciones referentes al Cálculo de estructuras. En las referencias 1 y 2 se recogen las bases teóricas para la resolución del problema. En las referencias 3 y 4 se hace un análisis comparativo sobre el uso de este tipo de procedimientos.

Cuando se dispone de memoria central suficiente para albergar todas las matrices que se manejan, la implementación de este tipo de procesos no presenta ninguna dificultad. Sin embargo, cuando se quieren utilizar en computadores con poca memoria central se hace necesario utilizar algoritmos muy elaborados. Así en la referencia 5 se presentan dos algoritmos para sistemas de matriz simétrica y en banda, uno para el caso en que la matriz del sistema a condensar resida en memoria central y el otro para el caso de que resida en disco, dejando en ambos casos la matriz del sistema condensado en memoria central.

En este trabajo se presenta un algoritmo, también para sistemas de matriz simétrica y en banda, que toma los datos de archivos de disco y deja los resultados también en archivos de disco. Trabaja no sólo con la matriz de coeficientes del sistema sino también con los segundos miembros, por lo que proporciona, además de la matriz del sistema de ecuaciones condensado, los segundos miembros de dicho sistema y una serie de matrices auxiliares necesarias si se desean calcular posteriormente los valores de las variables eliminadas.

Se hace uso del algoritmo para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simétricos y en banda que se presenta en la referencia 6 dado que tiene unos requerimientos mínimos de memoria central para su aplicación.

## 2. PLANTEAMIENTO TEORICO

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$K X = F$$

en el que K es una matriz simétrica y en banda. Llamaremos NEQ al número de ecuaciones y NBAN al semiancho de banda de sistema.

Se desea obtener el sistema de ecuaciones condensado en el que intervienen NG de las NEQ variables iniciales. Las variables a conservar están irregularmente situadas. La lista de los subíndices de estas variables está en la matriz IG.

Consideremos ahora el sistema reorganizado, mediante los oportunos intercambios de filas y de columnas, de modo que las NG variables a conservar se situen en las últimas posiciones, conservando la ordenación relativa tanto en las variables a eliminar como a conservar. El sistema, así reorganizado, se puede particionar de la forma:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix}$$

donde  $X_a$  agrupa las variables a eliminar y  $X_b$  las variables a conservar.

El sistema condensado será de la forma:

$$K^* X_b = F^*$$

donde:

$$K^* = K_{bb} - K_{ab}^T \cdot K_{aa}^{-1} \cdot K_{ab}$$

y

$$F^* = F_b - K_{ab}^T \cdot K_{aa}^{-1} \cdot F_a$$

Si, una vez determinado  $X_b$ , se quisiese determinar  $X_a$  se aplicará

$$X_a = K_{aa}^{-1} F_a - K_{aa}^{-1} \cdot K_{ab} \cdot X_b$$

En resumen, teniendo como datos de partida las matrices K y F, deberemos tener como resultados  $K^*$  y  $F^*$  si sólo se desea obtener el sistema condensado. Si se desea obtener también  $X_a$  debemos también obtener  $K_{aa}^{-1} F_a$  y  $K_{aa}^{-1} K_{ab}$ .

### 3. ANALISIS DEL PROBLEMA

Llamaremos NEQ1 al número de variables al eliminar,  $NEQ1 = NEQ - NG$ .

La matriz Kaa será una matriz cuadrada, simétrica y en banda, de dimensión NEQ1 y de semiancho de banda NBAN1. Este valor dependerá de como estén situadas las variables a conservar, pero en cualquier caso será menor o igual que NBAN.

La matriz Kab será de dimensiones NEQ1 x NG. Las matrices Kbb y K\* serán matrices cuadradas de dimensiones NG, simétricas y completas.

Si se tienen en cuenta los segundos miembros F, podremos considerar NHIP casos simultáneos. En tal caso, las matrices Fa y  $K_{aa}^{-1} Fa$  serán de dimensiones NEQ1 x NHIP, y las matrices Fb y F\* de NG x NHIP.

La obtención de la matriz  $K_{aa}^{-1} Kab$  equivale a resolver NG sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, de matriz Kaa y con segundos miembros Kab. Análogamente ocurre con  $K_{aa}^{-1} Fa$ , pero, puesto que previamente se ha tenido que resolver el sistema con Kab, la matriz Kaa ya la tendremos triangulada, lo que permite evitar un gran número de operaciones.

La resolución de estos dos sistemas de ecuaciones puede realizarse muy eficazmente y con mínimos requerimientos de memoria central utilizando el algoritmo de la referencia 6.

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta aquí, se puede esquematizar el proceso, que sigue el algoritmo que se presenta, del siguiente modo:

#### Fase A:

Determinación de la matriz de coeficientes del sistema condensado.

Determinar el ancho de banda de la matriz Kaa, a partir de la lista IG.

Separar las matrices Kaa, Kab y Kbb y preparar los datos para resolver el sistema de ecuaciones de matriz Kaa y de segundos miembros Kab de acuerdo con las especificaciones de la referencia 6, a partir de la matriz K y de la lista IG.

Resolver este sistema de ecuaciones, con lo que se obtiene la matriz  $K_{aa}^{-1} Kab$ .

Calcular la matriz  $K^* = Kbb - K_{ab}^T K_{aa}^{-1} Kab$ , para lo que ya se tienen todos los datos.

#### Fase B:

Determinación de los segundos miembros del sistema condensado y de las matrices auxiliares para el cálculo de Xa.

Separar las matrices Fa y Fb, a partir de la matriz F y de la lista IG.

Determinar  $F^* = Fb - K_{ab}^T K_{aa}^{-1} Fa$ , para lo que ya se tienen todos los datos.

Preparar los datos para el sistema de ecuaciones de matriz Kaa y segundos miembros Fa, utilizando la matriz Kaa ya triangulada, y de acuerdo con las especificaciones de la referencia 6.

Resolver este sistema de ecuaciones, con lo que se obtiene la matriz  $K_{aa}^{-1} Fa$ .

Puesto que en ocasiones solo se desea utilizar la fase A, estas fases se han programado como subrutinas independientes: La subrutina STED que ejecuta la fase A y la subrutina SMCON que efectúa la fase B.

### 4. ORGANIZACION DE LOS FICHEROS DE DISCO

A lo largo del proceso se utilizan tres tipos de ficheros de disco: archivos de datos, ar-

chivos de resultados y archivos auxiliares. Todos ellos se van a denominar genéricamente NtFx, donde t indica el tipo de archivo (D para datos, R para resultados, y A para auxiliares) y x es un dígito que permite diferenciar archivos de mismo tipo.

La transmisión de datos entre la memoria central y el disco se hace siempre por intermedio de la subrutina TRANS, que se describe en detalle en la referencia 6. Esta subrutina supone que los datos en disco están contenidos en un array unidimensional, y mediante la adecuada combinación de los parámetros permite manipularlos como un array bidimensional del que se fija el número de coeficientes de cada fila, permitiendo transferir un número de filas completas, a partir de la que se elija, desde una cierta parte de la memoria, que también se elige.

El archivo NDF1 contendrá la semibanda superior de la matriz K, ordenada por filas, y con las NBAN - 1 últimas filas completadas con coeficientes ficticios hasta NBAN coeficientes por fila. Almacenará NEQ x NBAN coeficientes.

El archivo NDF2 contendrá la matriz F de segundos miembros, ordenada por filas. Almacenará NEQ x NHIP coeficientes.

Estos archivos de datos no se modifican a lo largo del proceso. El archivo NDF1 se utiliza exclusivamente en la fase A, y el NDF2 exclusivamente en la fase B.

El archivo NRF1 contendrá la matriz K\*. Por ser una matriz simétrica y competa se almacenará sólo la mitad superior, organizada por filas. Así, los NG primeros coeficientes corresponden a la primera ecuación, los NG-1 siguientes a la segunda y así sucesivamente. Almacenará NG (NG+1)/2 coeficientes.

El archivo NRF2 contendrá la matriz  $K_{aa}^1$   $K_{ab}$  ordenada por filas. Almacenará NEQ1 x x NG coeficientes.

Los archivos NRF1 y NRF2 se obtienen como resultados de la fase A; además, el archivo NRF2 se utiliza en la fase B.

El archivo NRF3 contendrá la matriz F\*, ordenada por filas. Almacenará NG x NHIP coeficientes.

El archivo NRF4 contendrá la matriz  $K_{aa}^1$   $F_a$ , ordenada por filas. Almacenará NEQ x x NHIP coeficientes.

Los archivos NRF3 y NRF4 se obtienen como resultados de la fase B.

El archivo NAF1 contendrá los datos del sistema auxiliar de ecuaciones de la fase A, organizados según las especificaciones de la referencia 6. Almacenará NEQ1 x (NBAN1 x x NG) coeficientes.

El archivo NAF2 contendrá la matriz  $K_{ab}$ , ordenada por filas. Almacenará NEQ1 x NG coeficientes.

El archivo NAF3 contendrá los datos del sistema de ecuaciones de la fase B, ordenados de acuerdo con la referencia 6. Almacenará NEQ1 x (NBAN1 + NHIP) coeficientes.

Los archivos NAF1 y NAF2 se crean en la fase A. Mientras que el archivo NAF2 es eliminado en la fase A, el NAF1 se mantiene para ser utilizado por la fase B. El archivo NAF3 es creado y eliminado en la fase B.

## 5. UTILIZACION DE LAS SUBROUTINAS

El algoritmo ha sido programado en FORTRAN IV, en un miniordenador HP 1000. Los listados completos de todas las subrutinas que intervienen se incluyen en el Apéndice, e

incluyen junto a las subrutinas STED, la SMCON y la función IN, las subrutinas TRIAN, BAKCS y TRANS de la referencia 6.

La función auxiliar IN de parámetros N, NG e IG, verifica si la variable N está incluida en la lista IG. Si lo está devuelve su posición en la lista. Si no está devuelve 0.

El programa principal debe crear y llenar los archivos de datos (NDF1 y NDF2), y crear los archivos de resultados (NRF1 al NRF4).

La subrutina STED tiene como parámetros de entrada NDF1, NEQ, NBAN, NG, e IG, y como parámetros de salida NRF1, NRF2, NAF1 y NBAN1.

La subrutina SMCON tiene como parámetros de entrada NDF2, NRF2, NAF1, NEQ, NBAN1, NG, IG y NHIP, y como parámetros de salida NRF3 y NRF4.

El archivo NAF1 no se modifica en la llamada a SMCON, pudiendo ser utilizado en sucesivas llamadas a esta subrutina.

El programa principal debe eliminar, además de los archivos que se crean en él, el archivo NAF1.

## 6. EJEMPLO NUMERICO

Con objeto de poder comprobar el funcionamiento de las subrutinas, se ha tomado el mismo ejemplo dado en la referencia 5, véase figura 1, si bien al mismo se han añadido dos hipótesis de carga.

Las tablas 1 a 4 muestran el contenido de los archivos de resultados NRF1 a NRF4, respectivamente.

La hipótesis 1, tiene una sola carga en el nudo 4 de componentes  $F_x = 10$ ;  $F_y = 10$ ; y  $M = 2$ . La hipótesis 2, tiene las mismas cargas en el nudo 6.

Las tablas 1 a 4 muestran el contenido de los archivos de resultados NRF1 a NRF4, respectivamente.

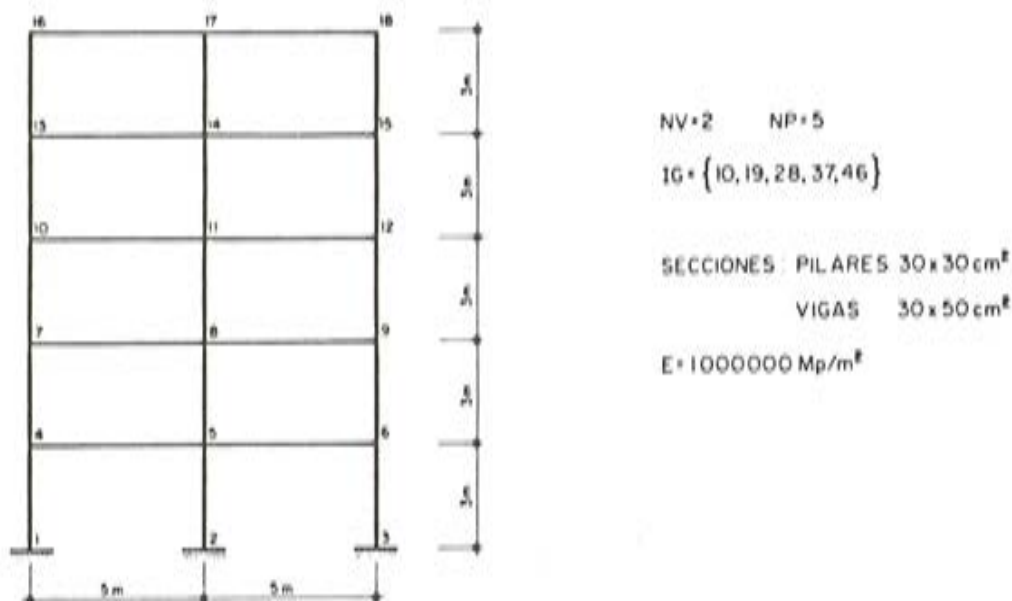


Fig. 1. Pórtico ejemplo.



## 7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se describe un algoritmo que permite resolver de forma completa y eficiente el problema de la condensación estática de sistemas de ecuaciones de matriz simétrica y en banda utilizando computadores de poca memoria central y discos magnéticos para almacenamiento de los datos iniciales y de los resultados.

Se incluye el conjunto completo de subrutinas, programadas en FORTRAN IV así como las condiciones precisas para su utilización en el programa principal que vaya a emplearlas.

Se incluye así mismo un ejemplo numérico que permite contrastar completamente los resultados de la utilización de las mismas.

## 8. REFERENCIAS

1. Edward L. Wilson. "The Static Condensation Algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 2, 198-203 (1970).
2. A. Recuero. "Resolución del sistema de ecuaciones en el método de los elementos finitos", *Revista de obras públicas*, Febrero 1973, págs. 107-120.
3. F. W. Williams. "Comparison between Sparse Stiffness Matrix and Sub-Structure Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 5, 383-394, (1973).
4. R. H. Dodds. "Substructuring in Linear and Nonlinear Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 538-597 (1980).
5. A. Recuero. "Cálculo de la matriz de rigidez de una estructura, referida a grados de libertad seleccionados", *Hormigón y Acero*, Número 140, 1981.
6. A. Recuero y J. P. Gutiérrez. "A Direct Linear System Solver with Small Core Requirements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 14, 633-645 (1979).

0000 Prg. Tercera 35. 05. CERRAR: 051AC. 0510AC. 0510AC. 0510AC. 0510AC. 0510AC.

```

0001 0510AC.
0002 0510AC.
0003 0510AC.
0004 0510AC.
0005 0510AC.
0006 0510AC.
0007 0510AC.
0008 0510AC.
0009 0510AC.
0010 0510AC.
0011 0510AC.
0012 0510AC.
0013 0510AC.
0014 0510AC.
0015 0510AC.
0016 0510AC.
0017 0510AC.
0018 0510AC.
0019 0510AC.
0020 0510AC.
0021 0510AC.
0022 0510AC.
0023 0510AC.
0024 0510AC.
0025 0510AC.
0026 0510AC.
0027 0510AC.
0028 0510AC.
0029 0510AC.
0030 0510AC.
0031 0510AC.
0032 0510AC.
0033 0510AC.
0034 0510AC.
0035 0510AC.
0036 0510AC.
0037 0510AC.
0038 0510AC.
0039 0510AC.
0040 0510AC.
0041 0510AC.
0042 0510AC.
0043 0510AC.
0044 0510AC.
0045 0510AC.
0046 0510AC.
0047 0510AC.
0048 0510AC.
0049 0510AC.
0050 0510AC.
0051 0510AC.
0052 0510AC.
0053 0510AC.
0054 0510AC.
0055 0510AC.
0056 0510AC.
0057 0510AC.
0058 0510AC.

```

```

0059 0510AC.
0060 0510AC.
0061 0510AC.
0062 0510AC.
0063 0510AC.
0064 0510AC.
0065 0510AC.
0066 0510AC.
0067 0510AC.
0068 0510AC.
0069 0510AC.
0070 0510AC.
0071 0510AC.
0072 0510AC.
0073 0510AC.
0074 0510AC.
0075 0510AC.
0076 0510AC.
0077 0510AC.
0078 0510AC.
0079 0510AC.
0080 0510AC.
0081 0510AC.
0082 0510AC.
0083 0510AC.
0084 0510AC.
0085 0510AC.
0086 0510AC.
0087 0510AC.
0088 0510AC.
0089 0510AC.
0090 0510AC.
0091 0510AC.
0092 0510AC.
0093 0510AC.
0094 0510AC.
0095 0510AC.
0096 0510AC.
0097 0510AC.
0098 0510AC.
0099 0510AC.
0100 0510AC.
0101 0510AC.
0102 0510AC.
0103 0510AC.
0104 0510AC.
0105 0510AC.
0106 0510AC.
0107 0510AC.
0108 0510AC.
0109 0510AC.
0110 0510AC.
0111 0510AC.
0112 0510AC.
0113 0510AC.
0114 0510AC.
0115 0510AC.
0116 0510AC.
0117 0510AC.
0118 0510AC.

```

```

0176 CALL MANTENECOL,MBAN,MBTP,IMB6,Z,MBP(3,4)
0177 CALL MANTENECOL,MBAN,MBTP,IMB6,MBP(4,4)
0178 CALL MANTENECOL,MBAN,MBTP,IMB6,MBP(5,4)
0179 RETURN
0180 END
C-----
0181 *****
0182 *****
0183 *****
0184 *****
0185 *****
0186 *****
0187 *****
0188 C SI + ESTA EN SU DEVOLVERA SU POSICION, SI NO ESTA DEVOLVERE 0.
0189 C
0190 C
0191 C
0192 DO 3 INT,NC
0193 DFIN=DF-TCCTIIME
0194 DFV=DF-TCCTIIME
0195 I CONTINUE
0196 RETURN
0197 END
C-----
0198 *****
0199 *****
0200 *****
0201 *****
0202 *****
0203 *****
0204 *****
0205 *****
0206 *****
0207 *****
0208 *****
0209 *****
0210 *****
0211 *****
0212 *****
0213 *****
0214 *****
0215 *****
0216 *****
0217 *****
0218 *****
0219 *****
0220 *****
0221 *****
0222 *****
0223 *****
0224 *****
0225 *****
0226 *****
0227 *****
0228 *****
0229 *****
0230 *****
0231 *****
0232 *****
0233 *****
0234 *****
0235 *****
0236 *****
0237 *****
0238 *****
0239 *****
0240 *****
0241 *****
0242 *****
0243 *****
0244 *****
0245 *****
0246 *****
0247 *****
0248 *****
0249 *****
0250 *****
0251 *****
0252 *****
0253 *****
0254 *****
0255 *****
0256 *****
0257 *****
0258 *****
0259 *****
0260 *****
0261 *****
0262 *****
0263 *****
0264 *****
0265 *****
0266 *****
0267 *****
0268 *****
0269 *****
0270 *****
0271 *****
0272 *****
0273 *****
0274 *****
0275 *****
0276 *****
0277 *****
0278 *****

```





## NATO—ARW “Pretensado Parcial: De la Teoría a la Práctica”

Bajo los auspicios de la División de Asuntos Científicos de las OTAN, se ha celebrado en el Centre d'Etudes du Bâtiment et des Travaux Publics (CEBTP), en Saint Rémy les Chevreuses (París), y a lo largo de la semana del 18 al 22 de junio pasado, el simposio internacional cuyo título encabeza estas líneas, con asistencia de 82 especialistas americanos, europeos y japoneses.

El encuentro era continuación del que en julio de 1983 tuvo lugar en la Universidad de Waterloo, Ontario (Canadá), bajo la denominación: “No linealidad y continuidad en hormigón pretensado” y, al igual que éste, fue organizado por el Profesor M.Z. Cohn, del Dpt. de Mecánica de Sólidos de dicha universidad. En las fuertes divergencias de opiniones constatadas en Waterloo entre Profesores europeos y americanos sobre diferentes aspectos de las estructuras de hormigón parcialmente pretensado tuvo el ARW de París uno de sus razones de ser.

Buscando tanto una aproximación de puntos de vista europeo y americano, por un lado, como una síntesis del conocimiento existente sobre hormigón parcialmente pretensado: la reunión se organizó sobre cinco aspectos parciales desarrollados en paralelo por un ponente europeo y otro americano, con discusiones preparadas y —finalmente— con discusión libre.

La estructura del ARW fue:

<b>Tema</b>	<b>Ponente americano</b>	<b>Ponente europeo</b>
Problemas del HPP	COHN (Waterloo)	LEVI (Turín)
Carga estática	NAAMAN (Michigan)	LACROIX (París)
Carga dinámica y repetida	BERTERO (Berkeley)	BENNETT (Leeds)
Estructuras continuas	COHN (Waterloo)	ARENAS (Santander)
Prácticas del HPP	FREYERMUTH (Arizona)	MENN (Zurich)
	JENNY (Chicago)	MULLER (París)

Cabe decir que, en líneas generales, se ha alcanzado una mayor aproximación de puntos de vista que los logrados en Canadá el año anterior. Además, comisiones constituidas tras el encuentro van a continuar un trabajo de síntesis cuya meta es llegar a ofrecer unas “líneas maestras para el empleo del hormigón parcialmente pretensado (HPP)” como síntesis del conocimiento teórico y de las experiencias prácticas acumuladas sobre el tema.

La publicación final del ARW, que incluirá las ponencias, las discusiones preparadas y la transcripción de las discusiones libres, así como las “Guidelines” citadas, será editada en breve por la Universidad de Waterloo. A la vista del interés que su contenido puede ofrecer a los miembros de “ATEP”, trataremos de informar sobre su publicación y facilitar su adquisición a quienes lo deseen.

Juan J. Arenas

# Vínculos internos rígidos en el análisis matricial de estructuras de barras

Raúl N. Kaufmann  
Profesor Titular, cátedra de Estructuras I  
Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería,  
Universidad de Rosario, Argentina.

## RESUMEN

En este trabajo se analizan algunos tipos especiales de vinculación entre nudos, para ser incorporados a los programas de resolución de estructuras de barras.

Se trata de vínculos internos rígidos, aptos para aquellos casos en que una parte de la estructura posee una rigidez muy superior a la de las restantes, de modo que puede ser considerada como indeformable: por ejemplo, los sistemas aporticados que incluyen la presencia de losas o tabiques. En tales casos, la conexión real entre algunos nudos se torna difícil de representar por medio de barras elásticas.

Se consideran:

- a) El piso rígido. Vincula a todos los nudos situados en un mismo plano horizontal, relacionando sus grados de libertad coplanares sin afectar los grados no coplanares. Permite representar directamente las losas de los edificios en torre, cuando se los analiza como pórticos espaciales.
- b) El cuerpo rígido. Vincula a un conjunto de nudos que actúan en forma solidaria, relacionando todos sus grados de libertad.
- c) La placa rígida. Es un caso particular del anterior, en dos dimensiones, para ser aplicada a pórticos planos.

Para cada uno de ellos se realiza el planteamiento teórico, y luego se analiza la incidencia en la generación de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas.

## 1. CONSIDERACIONES GENERALES

Los programas de computación para resolver estructuras de barras operan, como es sabido, sobre un esquema o modelo matemático formado por nudos y barras, con el cual se representa a la estructura real. Por lo común, estos programas consideran que la conexión entre dos nudos del conjunto se puede efectuar solamente por medio de una barra linealmente elástica, excluyendo cualquier otro tipo de vínculo interno entre nudos.

En un gran número de casos, esta limitación no representa ningún inconveniente para el usuario del programa, pues la estructura que hay que resolver está constituida, en su totalidad, por barras elásticas.

En otros casos, por el contrario, la vinculación real entre algunos nudos no puede ser representada en esa forma, pues se trata de una conexión rígida, no elástica. Esto sucede cuando un sector de la estructura posee una rigidez muy superior a la de los restantes, de modo que puede ser considerado como indeformable. Tal situación suele presentarse, por ejemplo, cuando el entramado de barras coexiste con un elemento bidimensional del tipo losa o tabique, cuyo carácter laminar no es representable por barras elásticas.

Un problema concreto de esta clase es el que plantea el edificio de varias plantas que debe actuar como sistema aperticado espacial frente a la acción de fuerzas horizontales generadas por viento o sismo. Las losas de hormigón armado que constituyen los diferentes pisos de la estructura pueden ser consideradas como indeformables en su plano, si se compara su rigidez con la de las columnas; y en cambio, son sumamente flexibles en dirección perpendicular a ese plano.

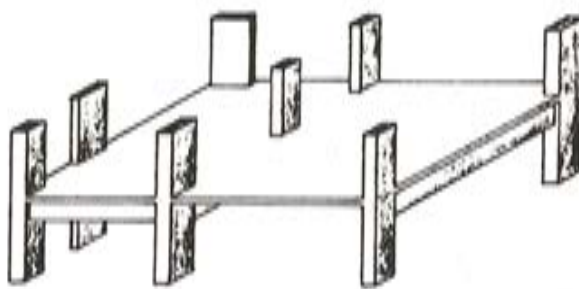


Fig. 1.

En la figura 1 se ha representado un piso intermedio de una estructura de este tipo. Al plantear el esquema correspondiente, se debe tener en cuenta que todos los nudos situados en ese nivel se hallan solidariamente unidos por la losa, de modo que sus desplazamientos horizontales se encuadran en un movimiento rígido plano: la distancia entre dos nudos cualesquiera queda invariable.

La losa constituye un vínculo interno rígido entre esos nudos, en lo concerniente a los grados de libertad coplanares; y deja sin ligar a los grados no coplanares.

Otro tipo de estructura que plantea dificultades similares es el pórtico plano con tabiques de hormigón armado conectados a vigas y columnas, como el indicado en la figura 2.

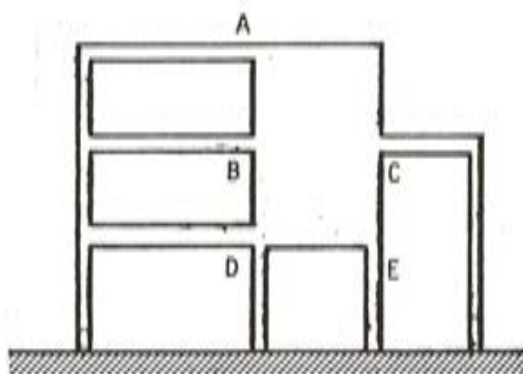


Fig. 2.

Al deformarse el sistema por acción de las cargas, los desplazamientos de los puntos A, B, C, D y E deben producirse sin que varíe la posición relativa de dichos puntos, pues la rigidez del tabique impone esa condición.

Por lo general, para solucionar esta clase de problemas se suele proponer un entramado de barras ficticias de rigidez infinita, en sustitución del sector indeformable. En la práctica se atribuye a esas barras una rigidez muy grande, de valor limitado por el máximo que admite el programa como dato de entrada.

En la figura 3 se puede observar el esquema correspondiente al pórtico plano mencionado anteriormente, con las barras ficticias representadas en líneas de trazos.

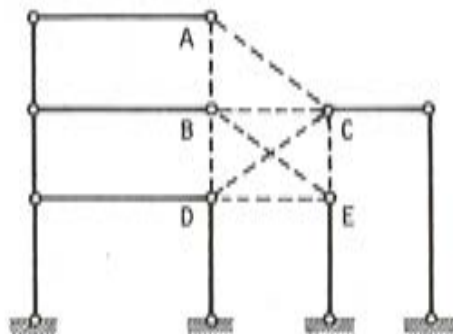


Fig. 3.

Este artificio no constituye una solución satisfactoria, por dos razones:

- Porque aumenta considerablemente la cantidad de barras, con la consiguiente complicación en el ingreso de datos y en la salida de resultados. La capacidad del programa queda de hecho menguada, pues estando preestablecido el número máximo de barras posibles, la existencia de barras ficticias limita la cantidad de las reales.
- Porque la presencia de coeficientes muy grandes en la matriz de rigidez total, afecta la exactitud de la solución del sistema de ecuaciones, pudiendo en algunos casos comprometer la validez de los resultados obtenidos.

La experiencia indica que no debe adoptarse como rigidez para las barras ficticias la máxima cantidad que admite el programa como dato numérico, pues se corre el riesgo de obtener valores incorrectos para las incógnitas. Es necesario limitarse a tomar áreas e inercias mayores que las correspondientes a las barras reales, sin exagerar al respecto.

Obviamente, no es posible precisar con antelación cuál es la rigidez máxima que puede asignarse a una barra ficticia sin que se perturbe el sistema; ello depende de la longitud de la barra, de su situación dentro del esquema general, etc.

Todo lo expuesto indica la conveniencia de poder expresar, en forma simple, la conexión rígida entre nudos, sin necesidad de recurrir a artificios como el mencionado.

El objeto del presente trabajo es estudiar algunos tipos de vínculos internos rígidos, a fin de incorporarlos a los programas de resolución de estructuras de barras y poder así encarar en forma directa el análisis de aquellos sistemas que presenten nudos conectados en forma rígida.

Ampliado el programa de esa manera, se podrán plantear esquemas estructurales más sencillos y más acordes con la realidad. Se ganará así en simplicidad y en exactitud, a la vez que se obtendrá una disminución notoria en los tiempos de procesamiento.

En las páginas siguientes se desarrollan tres tipos de vínculos internos; los dos primeros para ser aplicados a pórticos espaciales, y el tercero para pórticos planos. En cada caso se realiza el planteamiento teórico, a fin de obtener las ecuaciones correspondientes, y a continuación se estudia su aporte a la matriz de rigidez total y al vector de términos independientes.

## 2. EL PISO RIGIDO

Este tipo de vínculo permite representar el comportamiento de una placa horizontal, indeformable en su plano, que forma parte de una estructura aporticada espacial. Se trata entonces del vínculo interno al que se hizo referencia en la figura 1, al considerar las losas de hormigón armado de un edificio.

En la figura 4 se ha representado una placa de este tipo, y la porción que le corresponde del esquema estructural.

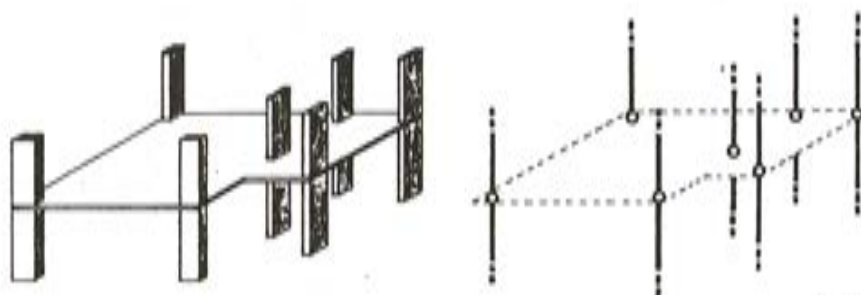


Fig. 4.

Por el momento, consideraremos que la losa es perfectamente flexible en dirección normal a su plano, es decir que su espesor es muy pequeño y carece de vigas o pliegues que actúen como elementos rigidizadores.

La vinculación producida en los nudos es parcial, pues el piso rígido actúa solamente sobre tres de los seis grados de libertad de cada nudo (figura 5). Los grados  $\delta_1$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_5$ , o sea los coplanares con el piso, quedan afectados; los restantes no.

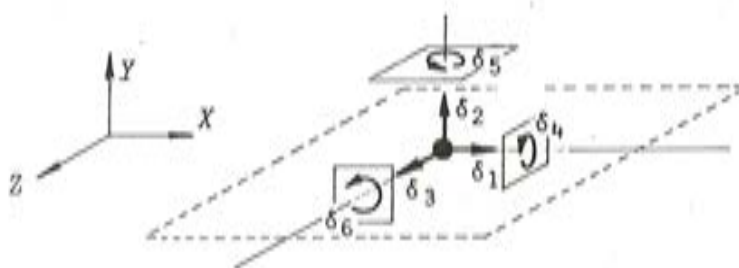


Fig. 5.

Un movimiento cualquiera de la placa en su plano, puede ser considerado como una rotación  $\theta$  alrededor de un centro  $C$ , figura 6. Ese movimiento producirá, en los nudos pertenecientes al piso, desplazamientos coplanares que serán proporcionales al giro  $\theta$  y a la distancia respectiva al centro  $C$ ; de manera que dichos corrimientos podrán ser expresados en función de los tres parámetros que definen la posición del piso en un instante determinado: las coordenadas  $X, Z$ , del centro  $C$  y la magnitud de la rotación  $\theta$ .

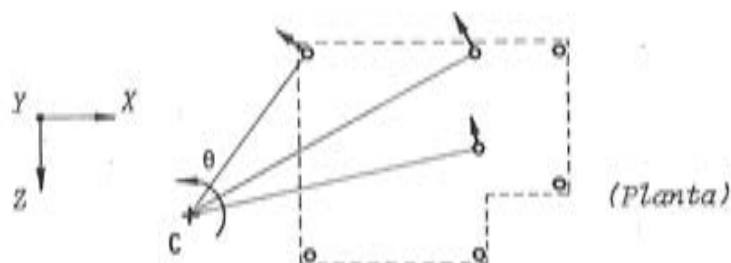


Fig. 6.

Pero esta terna de valores no resulta conveniente en todos los casos, pues cuando el movimiento del piso se limita a una traslación pura, el centro  $C$  se sitúa en el infinito, y ya no es posible obtener los desplazamientos de los nudos como producto de la rotación por la distancia a  $C$ . Otro tanto sucede cuando el centro se halla muy alejado de la placa, sin llegar a estar en el infinito, y la rotación tiende a cero.

Para no tener que contemplar estos casos particulares, es preferible definir la posición del piso rígido mediante una terna de parámetros: por ejemplo, los movimientos  $\Delta_1, \Delta_3$  y  $\phi$  de un punto de referencia  $A$  cualquiera, como puede verse en la figura 7.

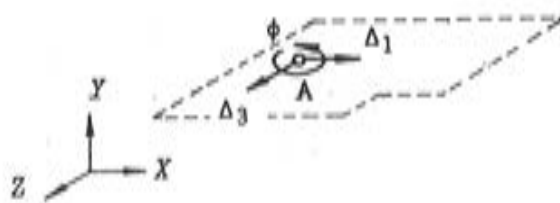


Fig. 7.

Una vez elegido el punto  $A$ , sus tres corrimientos horizontales permiten representar totalmente el movimiento del vínculo, por lo cual serán llamados en adelante "desplazamientos del piso".

Es necesario entonces expresar los corrimientos coplanares de cada nudo situado en el piso rígido, en función de los tres valores mencionados. De esta manera resulta posible eliminar del sistema general de ecuaciones, tres incógnitas por cada nudo. A cambio de ello, se incorporan los valores  $\Delta_1, \Delta_3$  y  $\phi$  como nuevas incógnitas; pero son solamente tres por piso.

De modo que si hay  $n$  nudos vinculados por el piso rígido, el sistema general de ecuaciones se reduce en  $3 \cdot (n-1)$  incógnitas, con la consiguiente disminución de rango de la matriz de rigidez total.

Si llamamos N a un nudo genérico vinculado por el piso rígido, los desplazamientos coplanares del mismo resultan (véase figura 8):

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \Delta_1 + \phi \cdot (Z_N - Z_A) = \Delta_1 + \phi \cdot \Delta Z \\ \delta_3 &= \Delta_3 - \phi \cdot (X_N - X_A) = \Delta_3 - \phi \cdot \Delta X \\ \delta_5 &= \phi\end{aligned}$$

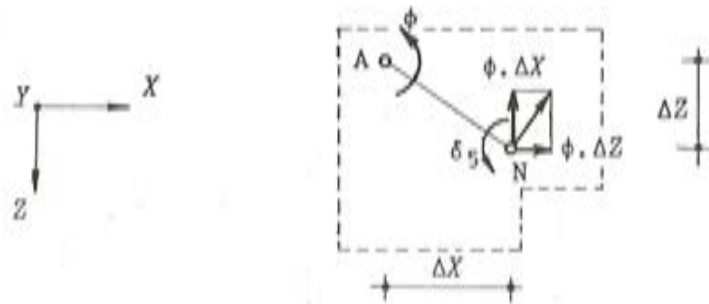


Fig. 8. Desplazamientos de N debidos al giro de A.

Considerando ahora todos los grados de libertad del nudo, podemos expresar:

$$D = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta Z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\Delta X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_H \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \delta_2 \\ \Delta_3 \\ \delta_4 \\ \phi \\ \delta_6 \end{pmatrix} = H \cdot D^*$$

donde:

D es el vector de desplazamientos del nudo, según todos sus grados de libertad propios, coplanares y no coplanares;

D\* es un vector auxiliar de desplazamientos, correspondiente también al nudo, formado por los corrimientos no coplanares del mismo y por los del piso. En D\* se encuentran las incógnitas que intervienen en el sistema general de ecuaciones.

H es una matriz de cambio.

El punto de referencia, A, se adopta en forma arbitraria. Una posibilidad es tomarlo coincidente con uno de los nudos del piso, con lo cual  $\Delta_1$ ,  $\Delta_3$  y  $\phi$  serían directamente los corrimientos  $\delta_1$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_5$  de ese nudo, y su vector D coincidiría con D\*, convirtiéndose H en la matriz unidad.

Consideremos ahora una barra cualquiera y su correspondiente vector desplazamiento  $D_b$ :

$$D_b = \begin{pmatrix} D_i \\ D_f \end{pmatrix}$$

$D_i$  contiene los seis corrimientos del nudo inicial  $N_i$  de la barra, y  $D_f$  los seis del nudo final  $N_f$ , siempre en ejes estructurales.

En el caso más general, una barra puede tener sus dos nudos extremos en sendos pisos rígidos (figura 9).

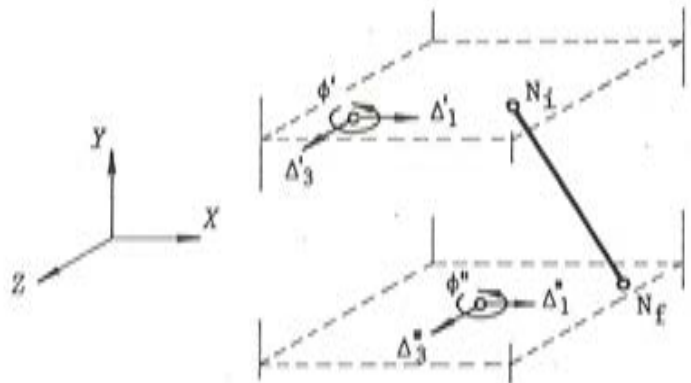


Fig. 9.

Llamando  $\Delta'_1, \Delta'_3, \phi'$ , a los desplazamientos del piso que contiene a  $N_i$ ; y  $\Delta''_1, \Delta''_3, \phi''$ , a los del piso correspondiente a  $N_f$ , podemos expresar:

$$D_b = \begin{bmatrix} D_i \\ D_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & H_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix} = H_T \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix}$$

donde  $D^*$  y  $D^{**}$  son los vectores auxiliares correspondientes a los nudos  $N_i$  y  $N_f$ , respectivamente, en tanto que  $H_T$  es la matriz de cambio total correspondiente a esa barra.

Ahora necesitamos trasladar las fuerzas coplanares  $F_x, F_z, M_y$ , actuantes en el nudo  $N$  (figura 10), al punto de referencia.

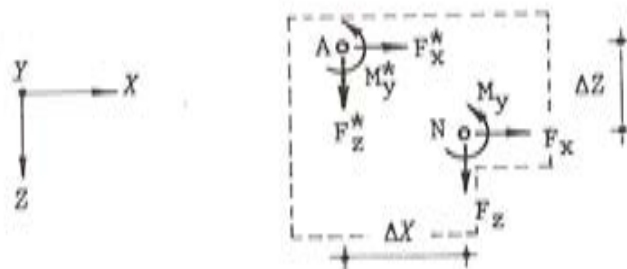


Fig. 10.

Llamando  $F_x^*, F_z^*, M_y^*$ , a las fuerzas resultantes en el punto A, observamos que

$$\begin{aligned} F_x^* &= F_x \\ F_z^* &= F_z \\ M_y^* &= F_x \cdot \Delta Z - F_z \cdot \Delta X + M_y \end{aligned}$$

Sea  $P$  el vector de fuerzas en el nudo  $N$ , según todos sus grados de libertad, y  $P^*$  un vector asociado al nudo, constituido por las fuerzas no coplanares actuantes en el mismo y por las coplanares aplicadas en el punto A:

$$P^* = \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_y^* \\ F_z^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = F \cdot P$$

Como puede verse, la matriz  $F$  resulta ser la traspuesta de  $H$ :  $F = H'$ .

Consideremos ahora los dos nudos extremos de la barra, para formar un solo vector con las fuerzas contenidas en  $P^*$  y  $P^{**}$ , vectores asociados a  $N_i$  y  $N_f$ , respectivamente. Asignando los subíndices (i), (f), a las matrices relacionadas con los nudos inicial y final, respectivamente, nos queda:

$$\begin{bmatrix} P^* \\ P^{**} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & F_f \end{bmatrix}}_{F_T} \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} = F_T \begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} \quad (F_T = H_T')$$

La ecuación constitutiva  $P = K \cdot D_b$ , en la cual  $K$  es la matriz de rigidez de la barra en ejes estructurales, puede ser expresada de esta manera:

$$\begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} D_i \\ D_f \end{bmatrix} = K \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix}$$

En consecuencia:

$$\begin{bmatrix} P^* \\ P^{**} \end{bmatrix} = F_T \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} = F_T \cdot K \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix} = H_T' \cdot K \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix}$$

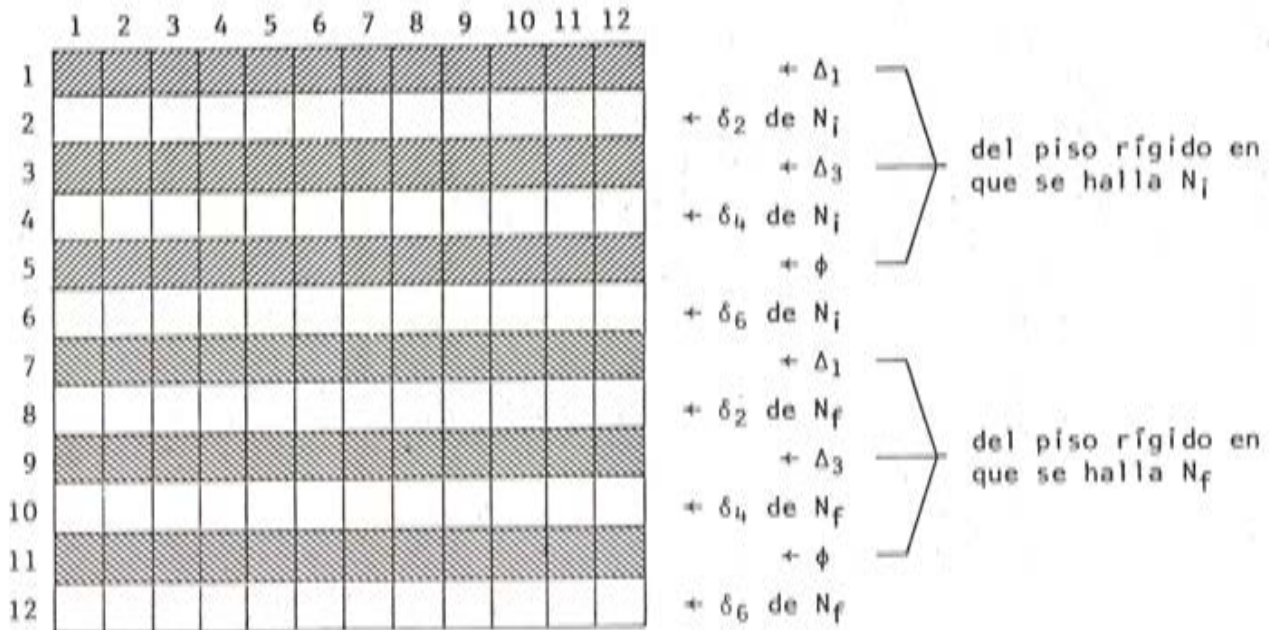
Como es sabido,  $K = R' \cdot k \cdot R$ , donde  $k$  es la matriz de rigidez de barra en ejes locales, y  $R$  la matriz rotación total de la misma barra. Reemplazando en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} P^* \\ P^{**} \end{bmatrix} = H_T' \cdot R' \cdot k \cdot R \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix} = K_0 \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix}$$

El producto matricial  $K_0 = H_T' \cdot R' \cdot k \cdot R \cdot H_T$  representa la matriz de rigidez de la barra, en ejes estructurales, según los nuevos grados de libertad considerados.

Para mayor claridad, se indica a continuación la correspondencia que existe entre las distintas filas de  $K_0$  y los desplazamientos elegidos como incógnitas.

Matriz  $K_0$  :



Lo indicado para las filas corresponde también, por supuesto, para las columnas. El aporte de  $K_0$  a la matriz de rigidez total de la estructura debe efectuarse, pues, siguiendo ese ordenamiento.

El análisis anterior corresponde al caso más general, en que la barra tiene sus dos extremos en pisos rígidos. Si uno de los nudos no está vinculado por un piso, la matriz  $H_T$  se modifica consecuentemente:

Si  $N_i$  no pertenece a un piso rígido:

$$H_i = I \text{ (matriz unidad)} \rightarrow H_T = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & H_f \end{array} \right]$$

Si  $N_f$  no pertenece a un piso rígido:

$$H_f = I \rightarrow H_T = \left[ \begin{array}{c|c} H_i & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

Hemos visto que se introducen tres nuevas incógnitas ( $\Delta_1$ ,  $\Delta_3$ ,  $\phi$ ) por cada piso, y a la vez se eliminan tres por cada nudo situado en el mismo.

Esto significa que en el sistema general de ecuaciones deben incluirse tres ecuaciones correspondientes al equilibrio del piso, según sus grados de libertad; y por otra parte, en cada uno de los nudos vinculados por el mismo, deben plantearse solamente tres de las seis ecuaciones habituales.

En lo que concierne a las tres condiciones de equilibrio del piso, es necesario considerar la rigidez del mismo según sus tres grados de libertad.

Si se produce un desplazamiento del piso en la dirección X, por ejemplo, todos los nudos situados sobre él participan de ese movimiento, y se pone en juego la rigidez de todas las barras que llegan a alguno de esos nudos. Lo mismo si se estudia un corrimiento según el eje Z, o el giro según Y.

La rigidez del piso en una dirección se obtiene entonces como suma de las rigideces individuales de todas las barras que llegan a algún nudo perteneciente a ese piso.

Asociada a cada una de las ecuaciones de equilibrio del piso se tiene una fila en la matriz de rigidez total. El razonamiento anterior indica que los elementos de dicha fila se generan por el aporte de los coeficientes de rigidez de las distintas matrices  $K_0$  correspondientes a las barras que tienen su nudo inicial o final en ese piso.

Así, la fila de la matriz total que está en correspondencia con la incógnita  $\Delta_1$  se forma por ensamble de:

- Fila 1 de  $K_0$ , de todas las barras con  $N_i$  en ese piso.
- Fila 7 de  $K_0$ , de todas las barras con  $N_f$  en ese piso.

Para la fila asociada a  $\Delta_3$ :

- Fila 3 de  $K_0$ , barras con  $N_i$  en ese piso.
- Fila 9 de  $K_0$ , barras con  $N_f$  en ese piso.

Para la fila asociada a  $\phi$ :

- Fila 5 de  $K_0$ , barras con  $N_i$  en ese piso.
- Fila 11 de  $K_0$ , barras con  $N_f$  en ese piso.

Por su parte, los términos independientes de las ecuaciones de equilibrio del piso rígido se generan también sumando los aportes de cada nudo perteneciente al mismo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para la primera ecuación: } \Sigma F_x^* \\ \text{Para la segunda: } \Sigma F_z^* \\ \text{Para la tercera: } \Sigma M_y^* \end{array} \right\} \text{ Las sumatorias comprenden a todos los nudos} \\ \text{vinculados por el piso rígido.}$$

Con el signo cambiado, estos valores constituyen los elementos del vector de términos independientes que se corresponden con las incógnitas  $\Delta_1$ ,  $\Delta_3$  y  $\phi$ , respectivamente.

Todo lo expuesto debe ser aplicado a cada uno de los pisos rígidos que presenta la estructura.

Una vez que se ha resuelto el sistema de ecuaciones y que se han obtenido los valores de las incógnitas, queda determinado el vector auxiliar  $D^*$  de cada nudo perteneciente a un piso. Empleando la matriz de cambio correspondiente, se halla el vector de desplazamientos del nudo:

$$D = H \cdot D^*$$

A partir de aquí el programa puede continuar su proceso en la forma habitual, pues ya se conocen los corrimientos de todos los nudos del sistema. Las subrutinas que deben operar a continuación para obtener reacciones exteriores, solicitaciones en extremos de barras, etc., no necesitan ser modificadas.

Hasta ahora hemos considerado que la placa era perfectamente flexible en dirección normal a su plano. Pero esta situación no se da prácticamente nunca, pues un pórtico espa-

cial con esas características resultaría sumamente ineficiente. El comportamiento de la estructura como sistema aporticado está ligado necesariamente a la presencia de travesaños de cierta rigidez.

Por lo tanto, lo lógico es disponer vigas, solidarias a la placa, entre las columnas (figura 11).

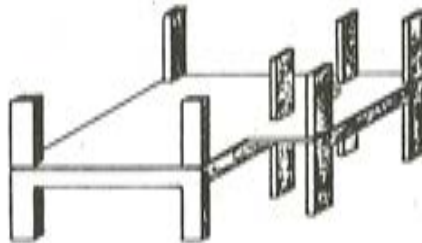


Fig. 11.

El vínculo introducido por el piso rígido no constituye ningún impedimento para considerar esas vigas, las cuales se representarán en el esquema de la manera habitual, con barras situadas en el plano de la losa (figura 12).

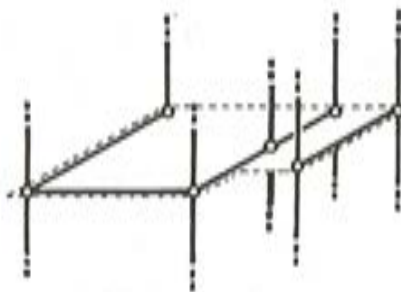


Fig. 12.

Las características elásticas de esas barras incidirán en los desplazamientos no copla- nares de los nudos extremos ( $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6$ ), pero no en los restantes, ya que la presencia del piso rígido es determinante al respecto.

En la figura 13 se han representado los ejes locales  $x, y, z$ , de una barra como las mencionadas, y los esfuerzos internos en una sección cualquiera de la misma.

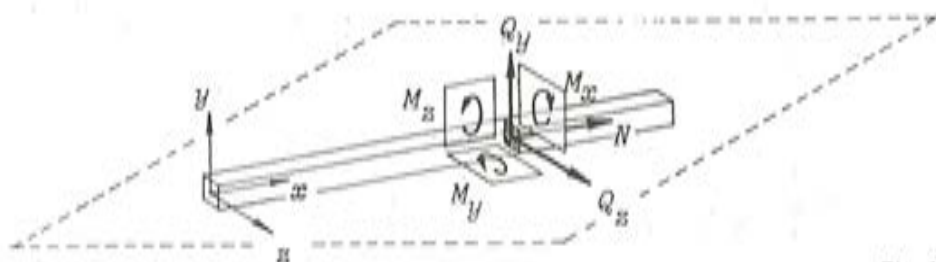


Fig. 13.

De las seis solicitaciones que se producen, tres están contenidas en el plano de la losa: el esfuerzo normal  $N$ , el momento flector  $M_y$ , y el cortante  $Q_x$ . Sus valores deben ser necesariamente nulos a lo largo de toda la barra, pues la rigidez de la placa elimina las deformaciones correspondientes, y no se produce alargamiento ni elástica horizontal. Por lo tanto, solamente habrá momentos torsores  $M_x$ , flectores  $M_z$  y esfuerzos cortantes  $Q_y$ , es decir solicitaciones transversales al piso rígido.

Aquí corresponde hacer una observación. Si no hay cargas actuantes sobre la barra que sean coplanares con la losa, las solicitaciones finales  $N$ ,  $M_y$  y  $Q_x$  que se obtendrán para los extremos serán efectivamente iguales a cero.



Fig. 14.

Pero si existen tales cargas, como se indica en la figura 14, el programa suministrará valores no nulos para esos esfuerzos, en oposición a lo previsto. Ello se debe a que el esquema utilizado considera que la barra es solidaria con la placa solamente en sus nudos extremos, y no en toda su longitud, como sucede en realidad. Por lo tanto, al actuar cualquier carga coplanar se comporta como una barra cualquiera del sistema, generando solicitaciones de empotramiento perfecto. El programa las almacena en la memoria, tal como lo hace con todas las demás barras, para adicionarlas posteriormente a las generadas por los desplazamientos de nudos. Estas últimas solicitaciones son nulas, pues los extremos de la barra no tienen movimiento relativo en ese plano, como hemos visto; pero los valores de empotramiento perfecto se conservan y aparecen como resultado final.

Para evitar esto, y obtener en la salida de resultados valores nulos para  $N$ ,  $M_y$  y  $Q_x$ , simplemente debemos agregar un par de sentencias en la porción del programa que elabora las solicitaciones finales, para efectuar esa corrección en aquellas barras que presentan sus dos nudos extremos en el mismo piso rígido.

El empleo de este vínculo interno presta su máxima utilidad cuando deben resolverse estructuras sin simetría elástica, sometidas a fuerzas horizontales de viento o sismo.

Es sabido que si existen condiciones de simetría en cuanto a rigideces y cargas, el problema puede abordarse descomponiendo la estructura en varios sistemas planos, pues los pisos se trasladan sin rotar. El esquema que se utiliza en esos casos responde a una estructura plana, de comportamiento aproximadamente equivalente, formada por los pórticos paralelos dispuestos en serie. Este método de análisis no es totalmente correcto, pues no tiene en cuenta todas las interacciones que se producen entre los pórticos paralelos; pero proporciona resultados aceptables en una gran cantidad de casos.

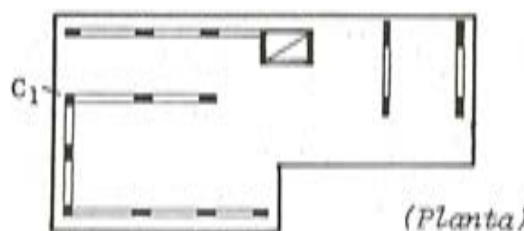


Fig. 15.

En cambio, si no hay tal simetría (figura 15), entra a jugar la rigidez torsional del sistema, y el problema se torna más complejo. El análisis por descomposición en sistemas planos, requiere la determinación del centro de torsión en cada nivel, y además presenta ciertas indefiniciones que no siempre pueden ser resueltas: por ejemplo, el comportamiento de las columnas que pertenecen simultáneamente a dos pórticos diferentes, como  $C_1$  en el esquema de la figura 15. Señalemos de paso que muchas veces se halla el centro de torsión de cada planta en función de las rigideces de los elementos estructurales de dicha planta; pero este procedimiento dista mucho de ser correcto, pues prescinde de la continuidad de esos elementos respecto a los pisos superior e inferior, y sólo es aceptable en ciertos casos particulares.

Obviamente, el análisis de la estructura como pórtico espacial elimina estas dificultades. Se efectúa un único procesamiento, obteniendo todos los resultados de una sola vez. Pero a pesar de que constituye, desde todo punto de vista, un camino más recomendable que el tratamiento por combinación de sistemas planos, no siempre se sigue, debido a que suele colmar la capacidad del programa.

El empleo de pisos rígidos torna más accesible el análisis de la estructura como sistema espacial, en virtud de la disminución que se logra en el número de grados de libertad. Recordemos que la cantidad total de incógnitas del sistema de ecuaciones se rebaja en  $3 \cdot (n - 1)$  por piso, siendo  $n$  el número de nudos situados en él.

Por ejemplo, un edificio de 15 pisos y 10 columnas, procesado como pórtico espacial sin emplear este tipo de vínculo, conduce a un sistema de 900 grados de libertad ( $15 \times 10 \times 6$ ); en tanto que utilizando pisos rígidos esa cantidad baja a 495:

$$\begin{array}{l} \text{Disminución por cada piso: } 3 \times (10 - 1) = 27 \text{ grados} \\ \text{Disminución total: } \qquad \qquad \qquad 15 \times 27 = 405 \text{ grados} \end{array}$$

Hemos podido comprobar, en forma concreta, el ahorro de tiempo que implica el empleo de este vínculo, al procesar varios edificios antisísmicos que presentaban plantas muy irregulares y extendidas. La comparación con estructuras similares resueltas con anterioridad sin usar pisos rígidos, indicó diferencias muy importantes en los tiempos de procesamiento.

### 3. EL CUERPO RIGIDO

Cuando en una estructura espacial existe un sector indeformable como el representado en la figura 16, los nudos situados en él mantienen invariable su posición relativa durante cualquier movimiento del sistema.

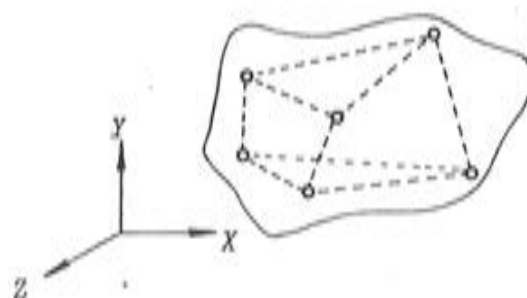


Fig. 16.

Ese sector se comporta, por lo tanto, como un cuerpo rígido, de modo que los grados de libertad de todos sus nudos quedan subordinados a los seis que posee un cuerpo en el espacio.

Para definir totalmente el movimiento del sector, es suficiente considerar los desplazamientos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$ , de un punto A cualquiera que le pertenezca (figura 17). Estos valores serán entonces las únicas incógnitas asociadas a ese conjunto de nudos que han de figurar en el sistema de ecuaciones. Los corrimientos de los restantes puntos vinculados por el cuerpo rígido, pueden ser expresados en función de ellos, y por lo tanto no necesitan ser introducidos como incógnitas.

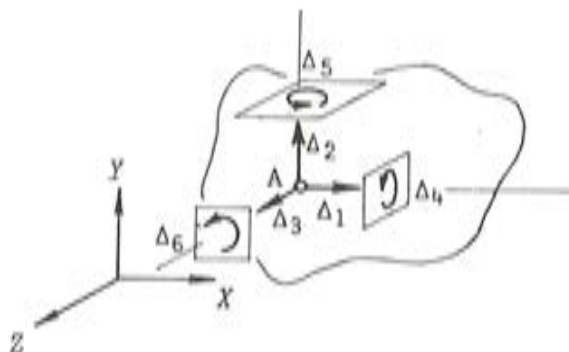


Fig. 17.

Ello significa que si hay  $n$  nudos solidarios con el cuerpo rígido, el sistema general de ecuaciones que debe plantearse se reduce en  $6 \cdot (n - 1)$  incógnitas.

Llamaremos  $D$  al vector de desplazamientos de un nudo genérico  $N$  y  $D^*$  al correspondiente al punto de referencia  $A$ :

$$D = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} \quad D^* = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix}$$

Según lo indicado, debemos expresar  $D$  en función de  $D^*$ , pues este último vector contiene las incógnitas asociadas al cuerpo rígido. La relación entre los corrimientos de  $N$  y  $A$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Delta_1 + \Delta_5 \cdot \Delta Z - \Delta_6 \cdot \Delta Y \\ \delta_2 &= \Delta_2 - \Delta_4 \cdot \Delta Z + \Delta_6 \cdot \Delta X \\ \delta_3 &= \Delta_3 + \Delta_4 \cdot \Delta Y - \Delta_5 \cdot \Delta X \\ \delta_4 &= \Delta_4 \\ \delta_5 &= \Delta_5 \\ \delta_6 &= \Delta_6 \end{aligned} \quad (\text{véase Fig. 18})$$

donde:  $\Delta X = X_N - X_A$ ;  $\Delta Y = Y_N - Y_A$ ;  $\Delta Z = Z_N - Z_A$ .

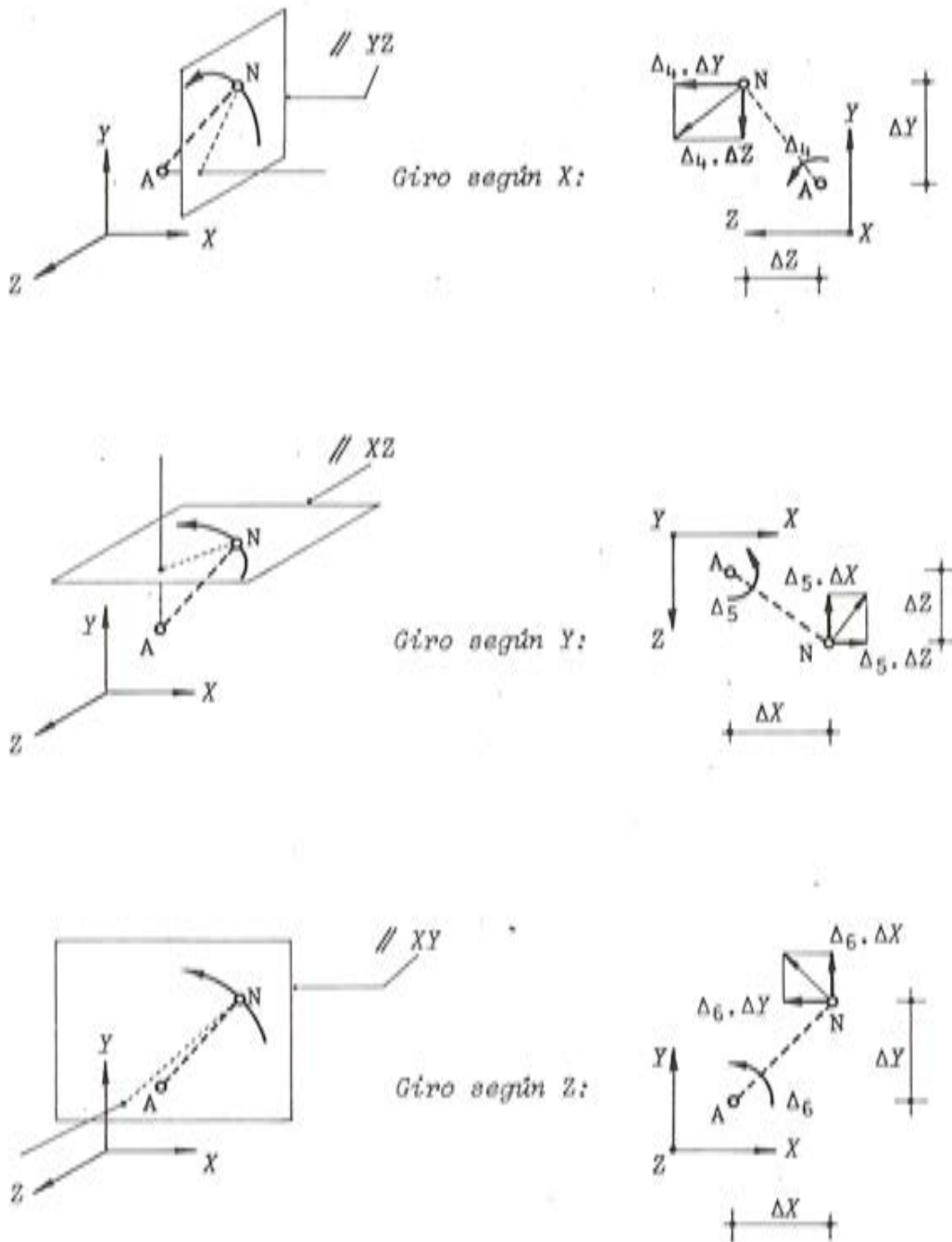


Fig. 18.

Las igualdades anteriores pueden ser expresadas, en forma matricial, relacionando los vectores  $D$  y  $D^*$  mediante una matriz de cambio  $H$ .

(Conviene advertir que las expresiones matriciales que siguen, a pesar de ser formalmente iguales a las obtenidas para pisos rígidos, difieren en su contenido. Por ello se ha optado por hacer el desarrollo completo, aunque parezca reiterativo).

$$D = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta Z & -\Delta Y \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta Z & 0 & \Delta X \\ 0 & 0 & 1 & \Delta Y & -\Delta X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = H \cdot D^*$$

El punto de referencia A se elige de forma arbitraria. Si se toma como tal a uno de los nudos del cuerpo, los desplazamientos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$ , resultan ser directamente los  $\delta$  de ese nudo, y la matriz H que le corresponde se transforma en la matriz unidad.

Una barra genérica, de nudos extremos  $N_i$  y  $N_f$ , tendrá como vector desplazamiento:

$$D_b = \begin{bmatrix} D_i \\ D_f \end{bmatrix}$$

$D_i$  contiene los seis corrimientos del nudo inicial, y  $D_f$  los seis del nudo final, según ejes estructurales.

Si la barra tiene cada uno de sus extremos en un cuerpo rígido, como indica la figura 19, podemos expresar:

$$D_b = \begin{bmatrix} D_i \\ D_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & H_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix} = H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix}$$

donde  $D^*$  y  $D^{**}$  son los vectores desplazamiento de ambos cuerpos, y  $H_T$  la matriz de cambio total correspondiente a esa barra. Los subíndices (i), (f), hacen referencia a los nudos inicial y final, respectivamente.

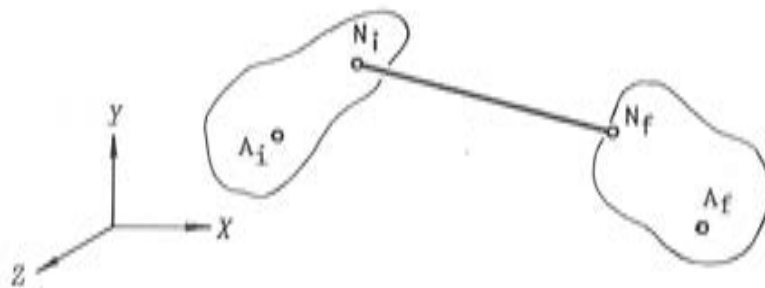


Fig. 19.

Si  $N_i$  no pertenece a un cuerpo rígido:

$$H_i = I \rightarrow H_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_f \end{bmatrix}$$

Si  $N_f$  no pertenece a un cuerpo rígido:

$$H_f = I \rightarrow H_T = \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Las fuerzas que actúan en un nudo N de un cuerpo rígido, deben ser trasladadas al punto de referencia A.

En la figura 20 se han representado, indicando su sentido positivo, las fuerzas actuantes en ambos puntos. De la observación de esa figura surgen de inmediato las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} F_x^* &= F_x \\ F_y^* &= F_y \\ F_z^* &= F_z \\ M_x^* &= M_x - F_y \cdot \Delta Z + F_z \cdot \Delta Y \\ M_y^* &= M_y + F_x \cdot \Delta Z - F_z \cdot \Delta X \\ M_z^* &= M_z - F_x \cdot \Delta Y + F_y \cdot \Delta X \end{aligned}$$

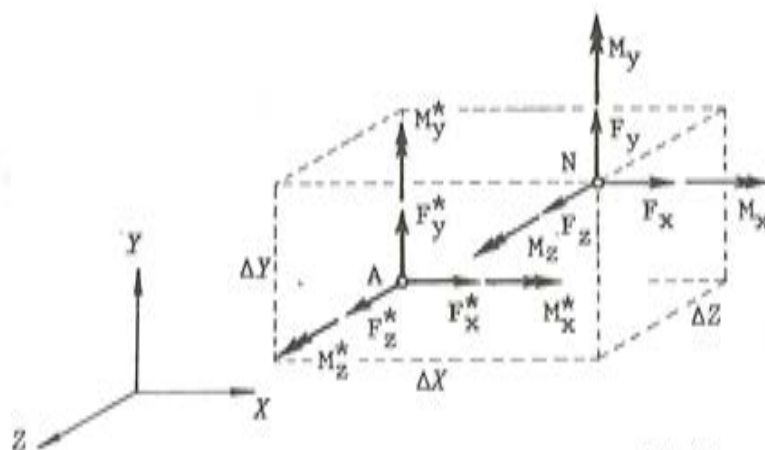


Fig. 20.

Llamando  $P^*$  al vector de fuerzas correspondiente al punto A, y  $P$  al que contiene las fuerzas actuantes en el nudo N, podemos expresar:

$$P^* = \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_y^* \\ F_z^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta Z & \Delta Y & 1 & 0 & 0 \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta Y & \Delta X & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = F \cdot P$$

Las matrices  $F$  y  $H$  son traspuestas:  $F = H^t$ .

Consideremos nuevamente la barra que tiene sus dos nudos en sendos cuerpos rígidos. Sea  $P^*$  el vector de fuerzas correspondientes al punto  $A_i$ , y  $P^{**}$  el de las fuerzas en  $A_r$ .

El vector correspondiente a la barra será:

$$\begin{bmatrix} P^* \\ P^{**} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & F_f \end{bmatrix}}_{F_T} \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} = F_T \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} \quad (F_T = H_T')$$

La ecuación  $P = K \cdot D_b$ , donde  $K$  es la matriz de rigidez de la barra en ejes estructurales, puede expresarse en esta forma:

$$\begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} D_i \\ D_f \end{bmatrix} = K \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P^* \\ P^{**} \end{bmatrix} &= F_T \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_f \end{bmatrix} = F_T \cdot K \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix} = H_T' \cdot K \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix} = \\ &= H_T' \cdot R' \cdot k \cdot R \cdot H_T \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $k$  es la matriz de rigidez de la barra en ejes locales, y  $R$  la matriz de rotación total de la misma barra.

Si llamamos  $K_0$  al producto matricial  $H_T' \cdot R' \cdot k \cdot R \cdot H_T$ :

$$\begin{bmatrix} P^* \\ P^{**} \end{bmatrix} = K_0 \cdot \begin{bmatrix} D^* \\ D^{**} \end{bmatrix}$$

Observemos que esta expresión está relacionando las fuerzas actuantes en  $A_i$  y  $A_f$  con los desplazamientos que se han definido en esos mismos puntos.

Podemos entonces considerar que la barra situada entre  $N_i$  y  $N_f$  se prolonga idealmente hasta ambos puntos de referencia (figura 21), constituyendo así una nueva barra de eje poligonal que une  $A_i$  con  $A_f$ , cuya matriz de rigidez es  $K_0$ .

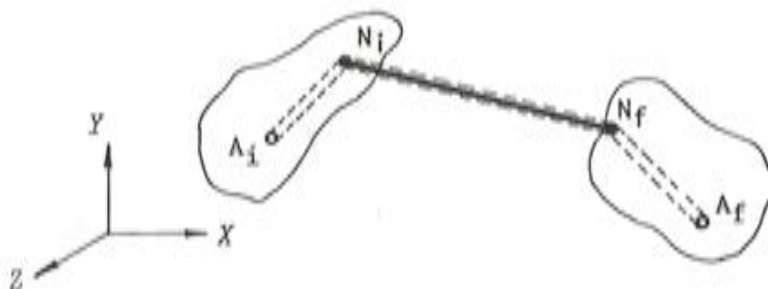


Fig. 21.

Según este enfoque, todas las barras que tienen un extremo en un nudo vinculado por un cuerpo rígido, llegan en realidad hasta el punto de referencia correspondiente (figura 22), de modo que éste último hace las veces de nudo único, con exclusión de todos los demás pertenecientes al cuerpo.



Fig. 22.

Esto significa que el programa debe considerar al punto A de cada cuerpo rígido como un nudo más del conjunto: sus desplazamientos integran el vector de incógnitas, y las seis solicitaciones  $F^*$ ,  $M^*$ , generan otros tantos elementos del vector de términos independientes. Su contribución a la matriz de rigidez total de la estructura se realiza siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de un nudo cualquiera; con la única diferencia de que las matrices de barra que aporta son del tipo  $K_0$ .

Una vez resuelto el sistema general de ecuaciones, se vuelve a considerar a los nudos pertenecientes a cuerpos rígidos. Los desplazamientos de cada uno de ellos se obtienen recurriendo a la matriz de cambio correspondiente:

$$D = H \cdot D^*$$

Siendo conocidos ahora los corrimientos de todos los nudos del sistema, el programa continúa sin ninguna otra innovación.

Entre los muchos casos que podemos mencionar relativos a la utilización de cuerpos rígidos como vínculos internos, figura el análisis de tableros de puente constituidos por un entramado de vigas longitudinales y viguetas transversales de arriostramiento.

Si bien su representación en planta es la de un emparrillado de vigas común (figura 23), este tipo estructural no puede ser estudiado como emparrillado plano sino como sistema espacial, por cuanto las acciones internas no se producen en un mismo plano horizontal.

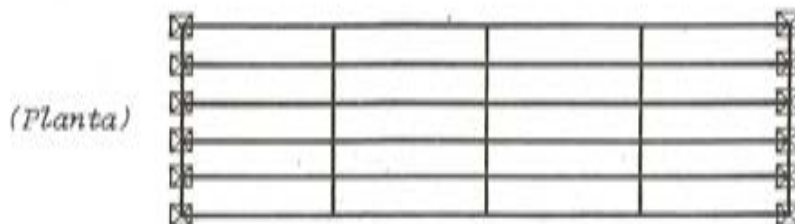


Fig. 23.

En la figura 24 se ha representado el corte trasversal de un tablero de esta clase, constituido por cuatro vigas longitudinales yuxtapuestas. Se trata de un caso real: es un tramo tipo del viaducto al puerto Punta Loyola, en Santa Cruz, República Argentina.

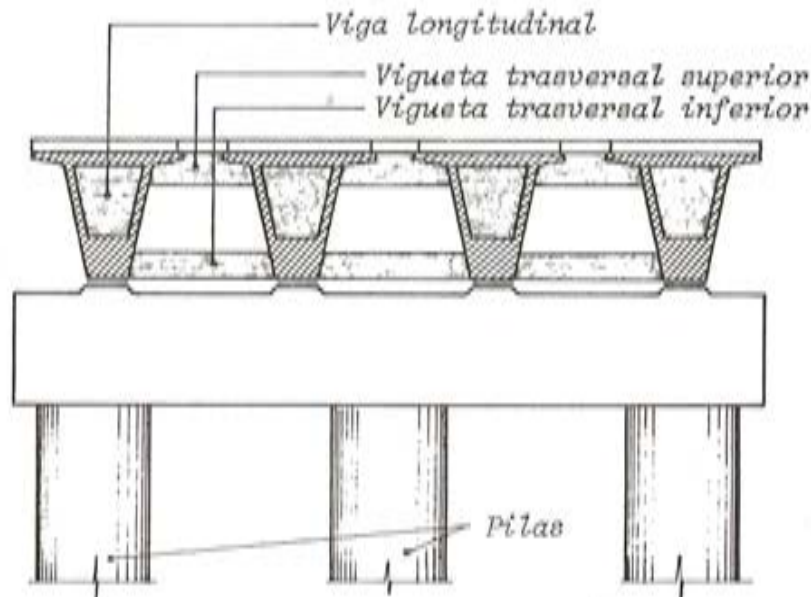


Fig. 24.

Las vigas principales, premoldeadas y pretensadas, son de sección cajón en la mayor parte de su longitud; solamente en los puntos de unión con las viguetas transversales, la sección es maciza. El espacio entre vigas está destinado a alojar conductos, por lo cual las viguetas no abarcan toda la altura de las vigas, sino que dejan libre la porción central; de modo que hay dos niveles de viguetas, en vez de uno.

En el esquema que se propuso para el procesamiento, cada viga longitudinal estaba representada por una barra situada en el plano horizontal del baricentro de la sección cajón. Como en el encuentro con las viguetas la sección era maciza, podía ser considerada como indeformable; por lo cual se representó a cada uno de esos sectores como un cuerpo rígido, como se puede observar en la figura 25.

De manera que el sistema presentaba 24 grados de libertad por cada plano vertical de arriostramiento, o sea por cada par de viguetas transversales.

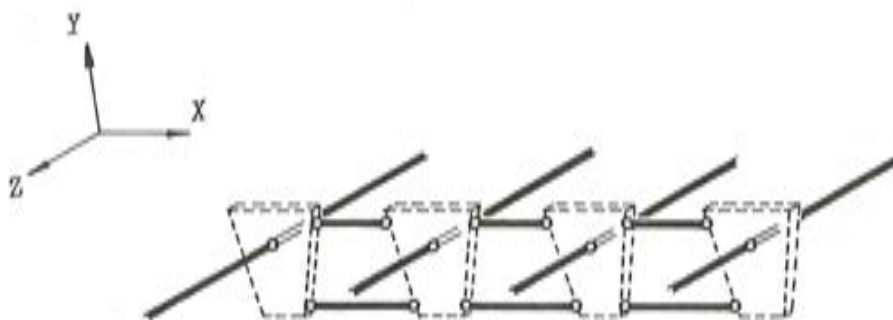
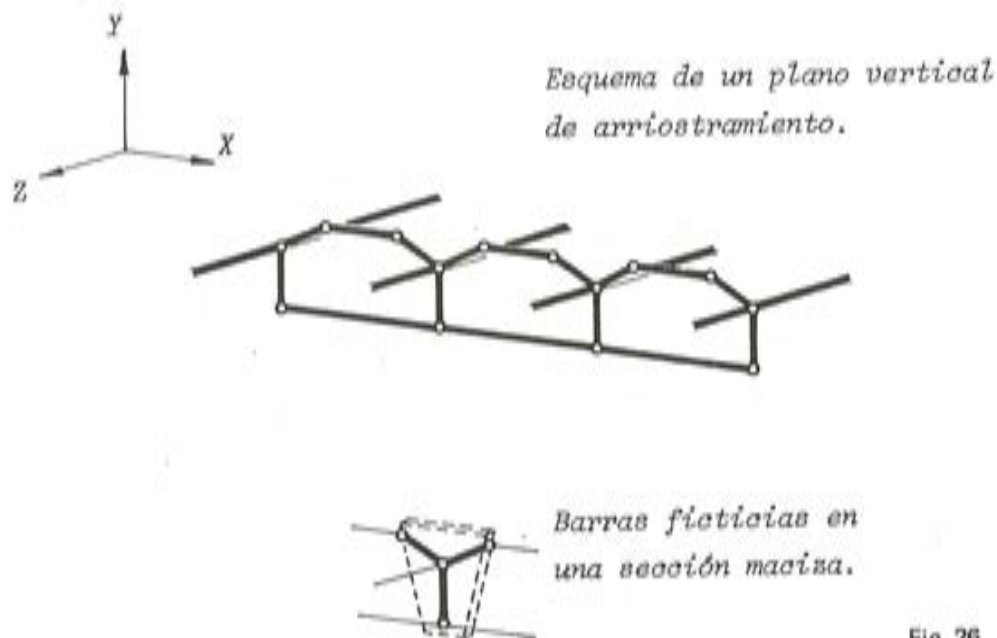


Fig. 25. Esquema de un plano vertical de arriostramiento.

Como comentario, señalemos que la primera versión de este tablero fue analizada proponiendo un esquema con barras ficticias rígidas, como el indicado en la figura 26, pues aún no se disponía de vínculos internos especiales en el programa utilizado. El tiempo de procesamiento fue considerablemente mayor al que demandó la versión final con cuerpos rígidos, ya que el número de incógnitas del sistema era cuatro veces más grande: en cada plano vertical de arriostramiento había 14 nudos, lo que implicaba 84 grados de libertad.

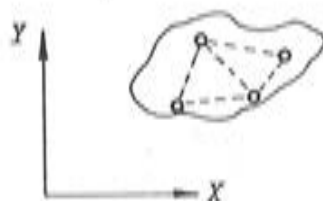


#### 4. LA PLACA RIGIDA

Este vínculo interno constituye un caso particular del cuerpo rígido estudiado en el capítulo anterior. En efecto, se trata del mismo tipo de vínculo, pero en dos dimensiones, para ser aplicado a los sistemas aporricados planos.

El desarrollo teórico es esencialmente el mismo que el correspondiente a cuerpos rígidos, con las variantes lógicas en el tamaño de vectores y matrices, y en el número de grados de libertad que deben ser considerados. Por ello nos limitaremos a señalar las diferencias existentes, evitando repeticiones innecesarias.

El sector indeformable es ahora bidimensional (figura 27), y posee tres grados de libertad, como toda placa en el plano.



En un sistema plano los desplazamientos de un nudo cualquiera son tres, de manera que se tienen tres incógnitas por cada uno. Lo mismo cabe decir con respecto al punto de referencia A, cuyos corrimientos  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , son las incógnitas asociadas al vínculo (figura 28).

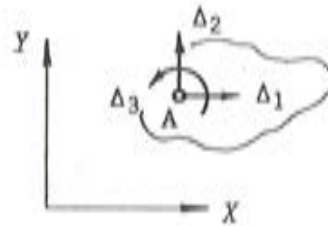


Fig. 28.

Por lo tanto, si hay  $n$  nudos solidarios con la chapa rígida, el sistema general de ecuaciones se reduce en  $3 \cdot (n - 1)$  incógnitas.

Los vectores y matrices que intervienen en el desarrollo teórico son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} & D^* &= \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} & H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta Y \\ 0 & 1 & \Delta X \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 P &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} & P^* &= \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_y^* \\ M^* \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta Y & \Delta X & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Las matrices  $H_T$  y  $F_T$  se forman de la manera ya conocida, ahora con seis filas y seis columnas.

El resto no requiere explicación adicional.

La placa rígida resulta especialmente apropiada para el análisis de sistemas apertados con pies derechos de anchura considerable (tabiques), como el representado en la figura 29.

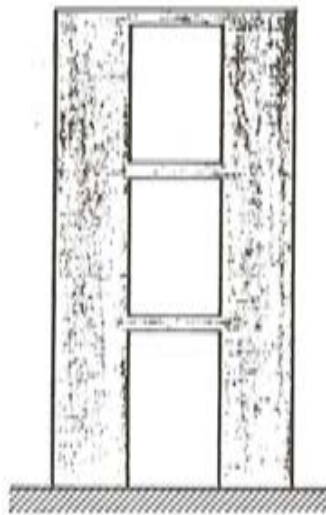


Fig. 29.

El esquema que se proponga no debe situar los nudos extremos de las vigas sobre el eje de las columnas (figura 30,a), pues se estaría otorgando excesiva flexibilidad a los travesaños, al suponerlos más largos de lo que son en realidad. Pero no debe tampoco desplazarse el eje de las columnas para dar a las vigas su longitud correcta (figura 30,b), pues disminuye el brazo de palanca de los esfuerzos normales en los postes. Ambos esquemas responden a una configuración del pórtico que es diferente a la real, y en ciertos casos pueden conducir a resultados con errores inaceptables.

El planteo correcto se logra respetando la posición del eje de las columnas y la longitud efectiva de las vigas, para lo cual es necesario adicionar a estas últimas un sector de rigidez infinita en cada extremos, o lo que es lo mismo, insertar una placa rígida en cada unión entre viga y columna (figura 30,c).

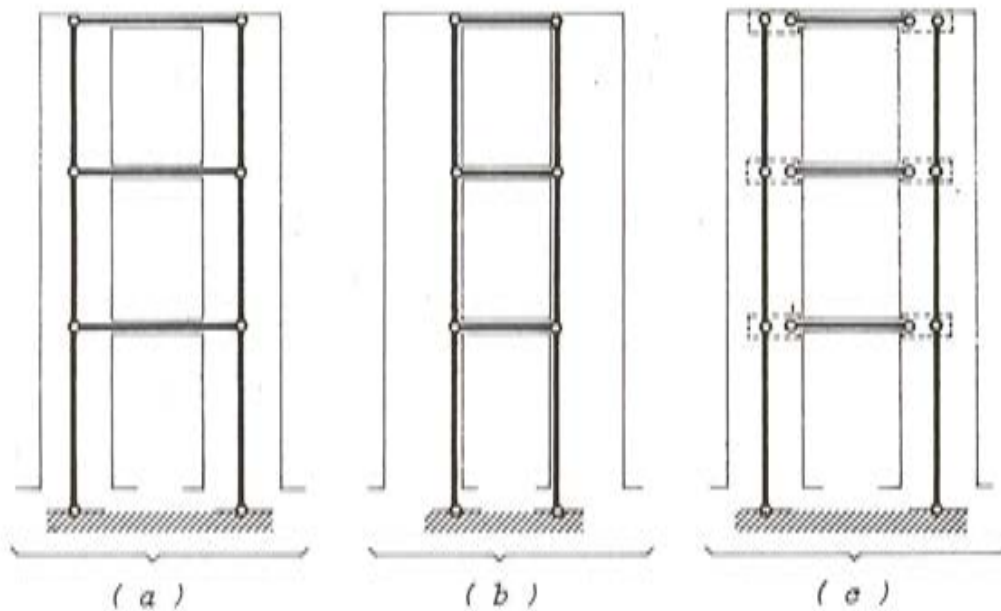
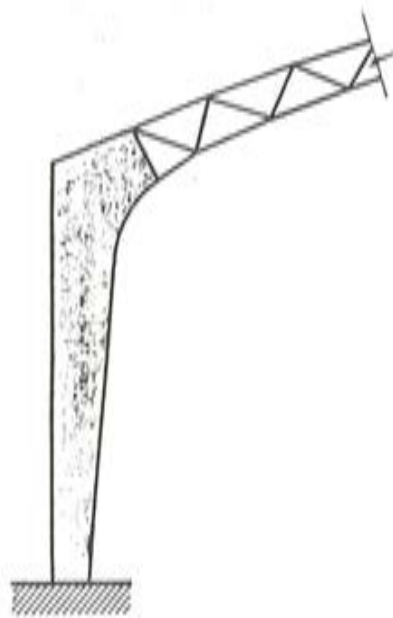


Fig. 30.

Para concluir, mencionaremos otro ejemplo de utilización de este tipo de vínculo, esta vez de una estructura atípica correspondiente a un caso real.

Se trata de una serie de arcos apoyados, de gran luz, formados por tres sectores de distintas características: un reticulado metálico en la parte superior y elementos de hormigón armado en los dos arranques. La conexión entre esos sectores de distinto material fue diseñada respetando ciertas exigencias arquitectónicas; en la figura 31 puede observarse el detalle de uno de los extremos del arco.

En el esquema que se planteó, la transición entre el eje del sector de hormigón y las líneas de barras que corresponden al inicio del reticulado fue obtenida insertando una placa rígida, como puede apreciarse en la misma figura.



VISTA



ESQUEMA

Fig. 31.

## **Pilas altas de viaductos construidos por avance en voladizo (\*)**

Juan J. Arenas de Pablo y Luis Villegas Cabredo  
Dres. Ingenieros de Caminos  
Dpto. de Tecnología de las Estructuras  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad de Santander

### **1. INTRODUCCION**

La técnica de construcción de tableros de puentes de hormigón pretensado por avance en voladizo, que comenzó a desarrollarse en Alemania en la década de los años cincuenta, se considera hoy en día como la más adecuada y económica para la construcción de puentes con luces comprendidas entre 60 y 150 metros, habiéndose llegado con este método a salvar vanos superiores a los 200 metros, como en el puente de Hamana (Japón), construido en 1976 (240 metros de luz), el de la Isla de Koror (Hawai), posterior al anterior (241 m) o el actualmente en ejecución en Brisbane (Australia) de 270 m de vano central.

La ejecución de estos importantes viaductos ha llevado consigo, en muchas ocasiones, la de pilas de gran altura, pudiendo afirmarse que estas últimas estructuras están muy ligadas al procedimiento de construcción de tableros de puentes por avance en voladizo.

Tales pilas se enfrentan fundamentalmente con dos problemas: por un lado, deben garantizar la estabilidad del tablero durante el proceso de construcción del mismo; por otro lado, deben ser lo suficientemente flexibles para permitir los movimientos horizontales impuestos que sufre el dintel durante la fase de servicio del puente.

Existen dos tipologías básicas de pilas que resuelven más o menos satisfactoriamente los dos problemas comentados: se trata de las pilas formadas por una "doble pantalla flexible vertical" y de las pilas con "sección celular".

En lo que sigue, y después de exponer la problemática que presenta la estabilidad de las pilas durante el proceso constructivo del dintel y las acciones de cálculo a considerar durante el mismo, analizaremos con detalle las pilas con "sección celular" en viaductos con esquema estructural tipo pórtico simétrico de 3 vanos. Se utilizan para ello los programas de ordenador DPIR y DPES descritos en el nº 149 de esta Revista.

(\*) Este Artículo es continuación de los aparecidos en los núms. 148, 149 y 152 de nuestra Revista bajo la firma de los mismos Autores.

## 2. ESTABILIDAD DE LA PILA DURANTE LA CONSTRUCCION DEL DINTEL

En la construcción de viaductos por avance en voladizo, nos encontramos con una tecnología que necesita asegurar la estabilidad del tablero, hasta que por cierre en clave y empalme con otros voladizos se constituyan dinteles continuos.

En fase de ejecución, el tablero se presenta normalmente bajo la forma de dos ménsulas sensiblemente iguales, constituyendo voladizos, cuyo equilibrio estático plantea un problema específico de este tipo de construcción; problema que se agudiza cuando sus luces son importantes y las pilas que lo soportan tienen gran altura.

Los esfuerzos de vuelco a los que está sometido un voladizo están producidos por la no simultaneidad del hormigonado o de la colocación de dovelas. A estos esfuerzos hay que añadir los que provienen de las imprecisiones de la construcción (diferencia de peso de una ménsula con respecto a otra), cargas de obra y del viento y, eventualmente, incidentes que pueden surgir en el curso de la construcción (caída del equipo móvil de hormigonado o del aparato de colocación de dovelas). La figura 1 obtenida de (14) ilustra lo anterior.

En el caso que nos ocupa, de pilas de gran altura, la estabilidad del tablero durante el proceso constructivo no puede confiarse a apoyos provisionales, de hormigón o de acero, como es normal en el caso de dinteles que discurren a poca altura del terreno, teniendo ahora aquéllas que garantizar por sí mismas, la estabilidad de los voladizos.

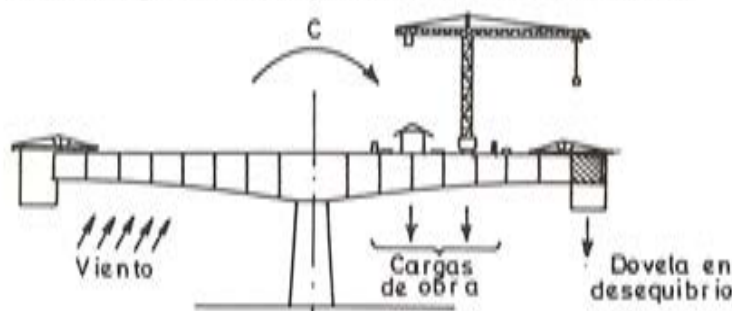


Fig. 1. Estabilidad de un tablero durante su construcción (14).

En estos casos es normal disponer empotramiento definitivo entre pila y dintel: por un lado, para conseguir un empotramiento con garantías frente a las fuertes flexiones que aparecen durante la construcción y, por otro lado, para aprovechar de forma definitiva la importante armadura que resulta necesaria en la pila en este período, de modo que se utilice también durante la fase de servicio de la estructura pòrtico, empotrando al dintel y reduciendo sus flexiones de vano.

Junto a la preocupación por asegurar la estabilidad de la obra en construcción, se encuentra en estas soluciones de empotramiento definitivo el conseguir unas pilas suficientemente flexibles que permitan los movimientos horizontales impuestos del dintel, de modo que, por su causa, no se creen momentos importantes en la cimentación.

En el caso de tableros largos con tramos múltiples, tendremos importantes acortamientos del dintel por retracción, fluencia debida al pretensado y variaciones termohigrométricas, siendo entonces una solución adecuada utilizar para las pilas pantallas flexibles verticales, como en el viaducto de Chillon (Suiza), las cuales permiten movimientos horizontales del plano del dintel, mientras empotran al tablero frente a cargas verticales. Tales pantallas se arriostran provisionalmente entre sí durante el proceso constructivo de avance de los voladizos para poder asegurar la estabilidad de éstos.

Otra solución que puede utilizarse (y que es muy adecuada para tableros de tres vanos) es la de pilas con sección celular que empotran al tablero en los vanos centrales (que es donde se presentan las mayores alturas y donde más problemática resulta la estabilidad en construcción), adoptando un esquema de pòrtico en esta zona del viaducto y dejando simplemente apoyado el dintel en el resto de los vanos laterales.

### 3. ACCIONES DE CALCULO DURANTE EL PROCESO CONSTRUCTIVO DEL DINTEL

#### 3.1. Consideraciones de Mathivat (14)

En el libro "Construcción de puentes de hormigón pretensado por voladizos sucesivos", Jacques Mathivat analiza las cargas a tener presentes en la verificación de la estabilidad de un dintel en construcción y las clasifica en:

##### *Cargas normales:*

- PESO DEL TABLERO, que interviene de dos formas:
  - Por el peso teórico de las dovelas (peso de la dovela construída o colocada antes que su simétrica).
  - Por las diferencias aleatorias entre los valores teóricos de los pesos previstos en los planos de ejecución y los valores reales en la obra (diferencia de peso de dos ménsulas).
- CARGAS DE OBRA, que comprenden:
  - Cargas conocidas y definidas en posición y magnitud, y que representan el material especial que sirve para la construcción del tablero: grúas, equipos móviles de hormigonado, vigas de lanzamiento, aparatos de colocación de dovelas, etc. Estas cargas pueden variar y desplazarse en el curso de la construcción.
  - Cargas aleatorias, repartidas de la manera más desfavorable y que corresponden a la maquinaria pequeña (compresores, bombas, etc.), a los materiales (cables de pretensado, armaduras, etc.) y al personal de obra.
- VIENTO, que puede actuar en el plano vertical del voladizo de forma desigual sobre las dos ménsulas, creando un momento de vuelco que se suma al de las cargas precedentes.

##### *Cargas accidentales:*

Son la consecuencia de un incidente de construcción o de una falsa maniobra. Puede tratarse de la caída de un equipo móvil de hormigonado durante el movimiento, de la caída de un aparato de colocación de dovelas prefabricadas o de una dovela misma. Al tratarse de una acción que desarrolla su valor máximo en un período de tiempo muy corto, el peso correspondiente debe mayorarse por un coeficiente dinámico igual a 2.

No se tienen en cuenta, en el estudio de la estabilidad de los voladizos, la caída de un equipo móvil en el curso del hormigonado ni el de una dovela prefabricada después de colocada y unida por pretensado provisional. La suspensión de los equipos móviles durante el hormigonado, en la medida en que aquélla está asegurada por dispositivos mecánicos, debe justificarse independientemente de acuerdo con la resistencia de las diferentes piezas que aseguran su estabilidad. Ocurre lo mismo para las dovelas prefabricadas, después de la colocación y antes del enfilado de los cables de pretensado definitivos, frente a la resistencia de los dispositivos de unión provisionales.

##### *Evaluación de las cargas:*

En obras normales se prescribe en Francia, generalmente, multiplicar el peso propio de una ménsula por 1,03 y el de la otra por 0,98 y considerar como carga de obra una carga uniforme de 50 Kg/m<sup>2</sup> y una carga puntual de 5 Mp (fig. 2). En (14) y (17) se hacen comentarios y se amplían las ideas básicas aquí expuestas.

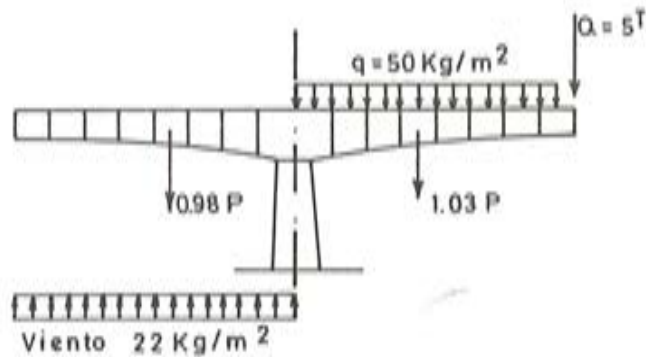


Fig. 2. Cargas aleatorias aplicadas a los voladizos, Prescripciones normales según J. Mathivat (14).

### 3.2. Hipótesis de carga a considerar de acuerdo con la Normativa española

Es sabido, y se pone de manifiesto en el apartado 4.2.1 de (17), cómo, a medida que aumenta la excentricidad de la carga vertical que actúa en la cabeza de una pila en ménsula, ésta alcanza su estado límite último de agotamiento o de inestabilidad para una carga cada vez menor.

En el proceso de avance en voladizo de un dintel, nos encontramos con que, en la fase final de su construcción, la pila pasa por una situación crítica, al actuar sobre ella las máximas cargas verticales con las mayores excentricidades. Ello puede verse en la figura 8 que muestra la evolución de la carga que actúa en la cabeza de una pila y la excentricidad de aquélla a medida que avanza la construcción del tablero del viaducto analizado en el apartado siguiente de este Artículo. Por otro lado, en esta situación, los esfuerzos debidos al viento transversal al viaducto son máximos, al presentar el dintel una mayor superficie frente al mismo.

En esta fase final nos encontramos con dos hipótesis de carga posibles: una que se produce con toda seguridad y que denominamos "hipótesis de dovela en desequilibrio" y otra que puede producirse accidentalmente, y que llamamos "hipótesis excepcional de caída de un carro de avance". En lo que sigue nos referimos a un viaducto construido por dovelas hormigonadas in situ sobre carro móvil soportado por el tablero, al que corresponde el ejemplo que se considera en el punto 4. Pero estas ideas pueden aplicarse al caso de un voladizo construido mediante dovelas prefabricadas.

#### a) *Hipótesis de dovela en desequilibrio*

Tomaremos como coeficiente de mayoración de las cargas  $\gamma_f = 1,40$ , al tratarse de una ejecución con nivel intenso de control y encontrarnos en fase de construcción.

De acuerdo con lo que prescribe la Instrucción EH-82, Artículo 32 (\*), y según que el efecto del peso propio del tablero y de la pila sea favorable o desfavorable, lo que a priori nos es desconocido, tenemos que considerar las siguientes posibilidades:

- a.1) Caso en que el efecto del peso propio de la estructura sea desfavorable. Se tomará:  $\gamma_{fg} = \gamma_f = 1,40$ .
- a.2) Caso en que el efecto del peso propio de la estructura sea favorable. Se tomará:  $\gamma_{fg} = 0,90$ .
- a.3) Dado que la carga permanente de peso propio es preponderante y sus efectos se compensan sensiblemente entre sí, establecemos una nueva ponderación de estas cargas, evaluando de modo diferente el coeficiente  $\gamma_{fg}$  según sea el efecto de la carga:

(\*) Se intenta realizar aquí un planteamiento de la seguridad de la obra durante la ejecución respetuoso en todo con la normativa vigente en España, aunque debemos subrayar que este trabajo no entra en consideraciones sobre su mayor o menor adecuación a la realidad.

– Si el efecto es desfavorable, tomamos:

$$\gamma_{fg} = \gamma_f/1,3 = 1,077 \leq 1,05 \text{ en fase de construcción}$$

– Si el efecto es favorable, tomamos:  $\gamma_{fg} = 0,90$ .

En esta hipótesis de carga se ha supuesto para el peso de los carros de avance, el carácter de permanencia, dado que su posición y magnitud está perfectamente definida en la misma, ponderándose por los mismos coeficientes de seguridad que el peso propio de las dovelas.

De todo lo anterior surgen las cuatro posibilidades que aparecen reflejadas en la figura 3.

La actuación de un viento paralelo al valle que salva el viaducto en estudio, y transversal a éste, supone unas nuevas verificaciones de la estabilidad de la estructura en construcción. En efecto, se hace necesario analizar la pila sometida a las cargas anteriormente comentadas, que están actuando en el plano longitudinal del viaducto, y a la integral de las fuerzas transversales de viento, que cargan perpendicularmente al mismo.

En este estudio, y de acuerdo con la Instrucción EH-82, al verificar las hipótesis de carga indicadas en la figura 3, combinadas con el efecto del viento, se multiplicarán los valores característicos de las cargas por un factor de minoración igual a 0,90, que refleja el hecho de que cuando se consideran simultáneamente acciones de diferente naturaleza existe una menor probabilidad de que todas actúen con sus valores característicos.

#### b) *Hipótesis excepcional de caída de un carro de avance*

La carga que suponen los carros móviles de hormigonado es importante. En los casos normales podemos pensar en carros cuyo peso puede equivaler a la mitad del de la dovela más pesada que puede hormigonarse con ellos.

La operación de movimiento de estos carros se debe realizar con voladizos equilibrados y, una vez anclados al tablero, no se contempla su caída durante la operación de hormigonado y posible desequilibrio del peso de una dovela (3.1).

Sin embargo, durante el movimiento de los carros hay que prever la posible caída de uno de ellos. Esto supone un efecto dinámico de reacción del dintel que, evaluado con un coeficiente igual a dos, y de acuerdo con 3.1, equivale en total a la actuación negativa del peso de dicho elemento.

Esta hipótesis de carga es muy desfavorable y tiene un carácter totalmente excepcional. En este sentido, nos parece que la actitud más sensata es la de extremar al máximo las precauciones durante esta operación y la de insistir en los mecanismos de seguridad que eviten este accidente. En el caso de que se produzca, dado su carácter de acción excepcional, nos parece adecuado adoptar un coeficiente de seguridad de ponderación de las acciones  $\gamma_f = 1,00$ , en paralelo al criterio que se sigue con la acción sísmica.

Verificando la estructura frente a los estados límites últimos de rotura e inestabilidad con este coeficiente  $\gamma_f$ , ésta no llegaría a alcanzar el colapso en el caso de producirse la caída de un equipo de hormigonado, habida cuenta de que la hemos verificado para los valores característicos de las cargas variables, contando con resistencias minoradas de los materiales.

Según lo anterior, las diferentes combinaciones posibles de cargas a considerar en este caso, aparecen reflejadas en la figura 4, habiendo adoptado los mismos criterios de ponderación que se plantearon en el caso a).

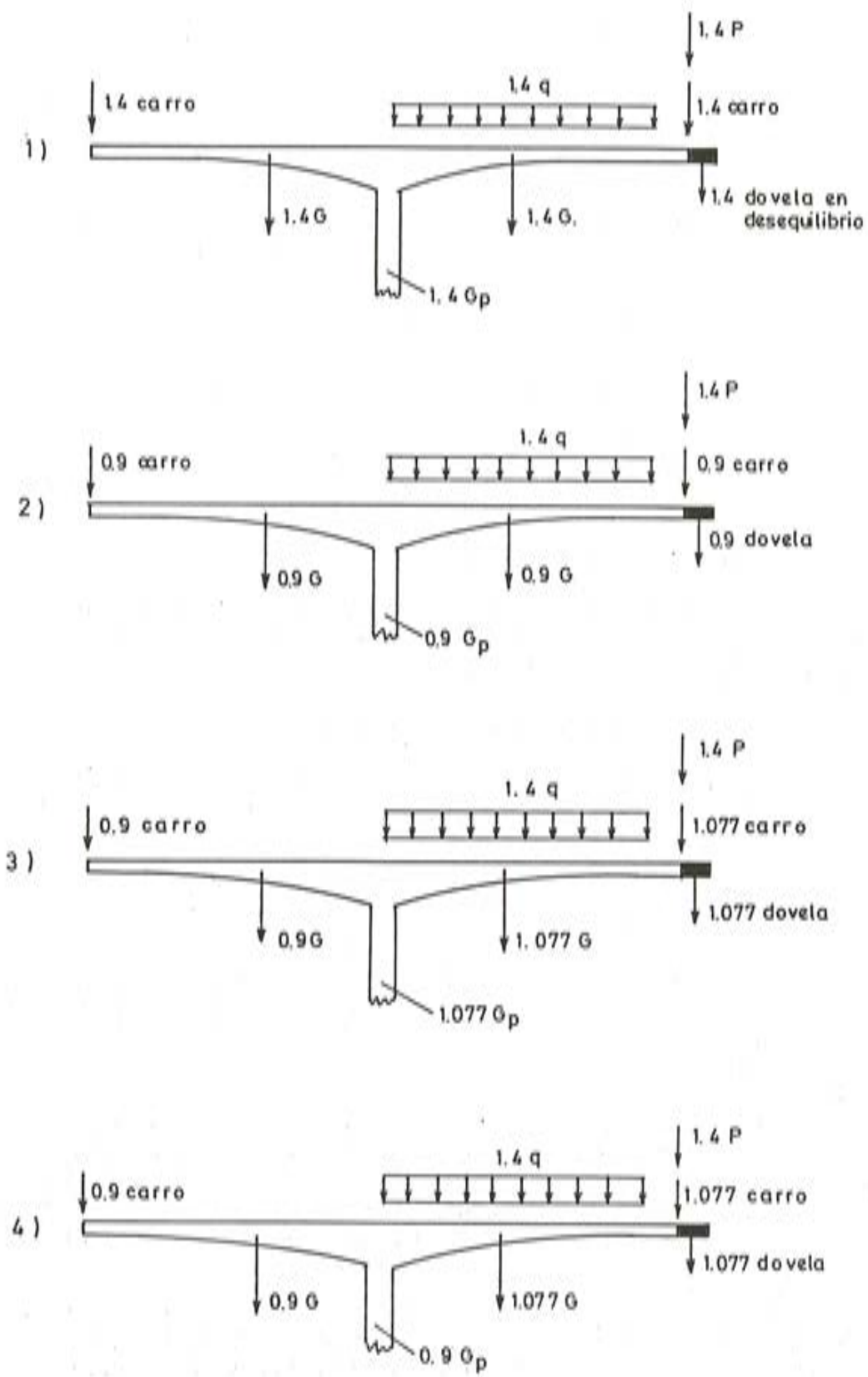


Fig. 3. Hipótesis normal de doveta en desequilibrio,  $\gamma_t = 1,40$ . Diferentes posibilidades.

Dado el carácter excepcional de este accidente, no se considerará la combinación de esta hipótesis de carga con la actuación del viento, ya que la probabilidad de que ambos fenómenos ocurran simultáneamente puede considerarse nula.

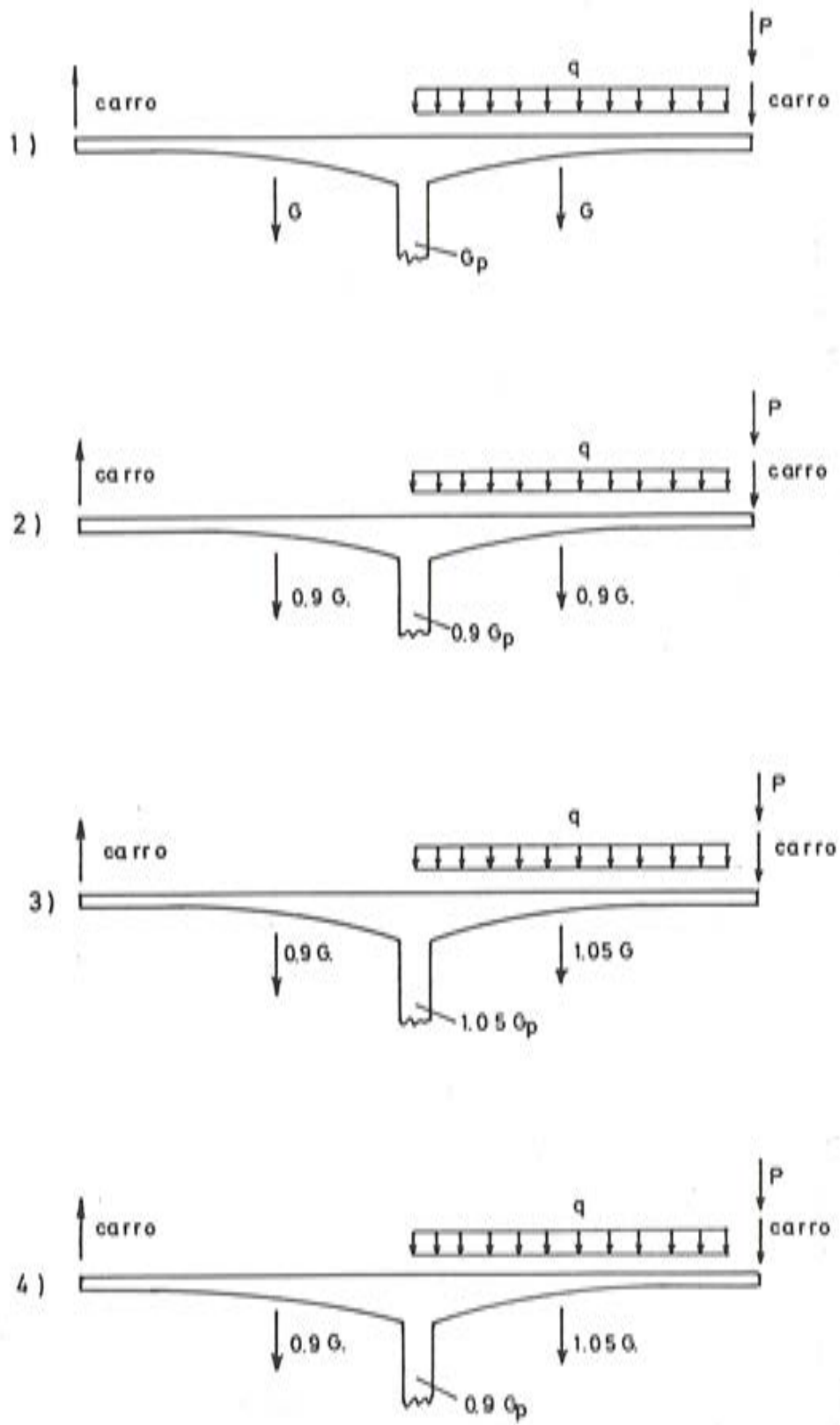


Fig. 4. Hipótesis excepcional de caída de un carro de avance,  $\gamma_l = 1,00$ . Diferentes posibilidades.

### 3.3. Excentricidades iniciales de la directriz

Las cargas aplicadas a las pilas deben considerarse que actúan con unas excentricidades iniciales mínimas, que cubran posibles errores de construcción y desviaciones de la directriz debidos, por ejemplo, a la persistencia de un viento dominante o a diferencia de soleamiento de dos caras de la pila.

Morisset en (15), al verificar las pilas del viaducto de Magnan, considera un defecto de rectitud de las mismas de valor 1 mm/m, lo que supone una excentricidad de 10 cm en su cabeza. En el viaducto de Roquebrune-Menton, con pilas de 70 m, introduce un error de verticalidad de 15 cms en cabeza, que supone unos 2 mm/m de defecto.

Mathivat en (14), da unas indicaciones para estas excentricidades mínimas, considerando:

- Defecto de verticalidad de la directriz, por ejemplo, igual a 0,5 mm/m.
- Defecto de rectitud, resultante de un radio de curvatura medio igual a, por ejemplo, 200 veces la altura de la pila.
- Efecto térmico (gradiente lineal de 10°C entre las dos caras).

## 4. PILAS ALTAS DE SECCION CELULAR EN VIADUCTOS CON ESQUEMA ESTRUCTURAL TIPO PORTICO

### 4.1. Objetivo propuesto

En los anteriores apartados de este trabajo, se ha puesto de manifiesto la problemática que presentan las pilas altas de viaductos construídos por avance en voladizo a partir de ellas y se han analizado con detalle las acciones a las que deben hacer frente durante dicho proceso.

Con las ideas anteriores se hará, a continuación, una aplicación del método de análisis expuesto en el número 149 de esta Revista al caso de las pilas altas con sección celular en viaductos con esquema estructural tipo pórtico.

Se trata de:

- Establecer unos criterios de predimensionamiento de tales pilas.
- Cuantificar su deformabilidad.
- Analizar su comportamiento resistente, evaluando la importancia del efecto de segundo orden en los casos de carga más desfavorables durante el proceso constructivo del dintel.
- Llevar a cabo una valoración del gasto de materiales necesarios en las diferentes pilas verificadas.

Los resultados del estudio se presentarán en forma tabulada, de modo que sirvan al Proyectista para el tanteo de pilas análogas a las dadas y la valoración económica de las mismas, lo que puede tener interés en la fase de anteproyecto y comparación de diferentes soluciones estructurales para un viaducto.

Comentamos en la Introducción cómo el campo de luces más corrientes para la construcción de dinteles de hormigón pretensado por el procedimiento de avance en voladizo comprende los vanos situados entre 60 y 150 metros.

Con objeto de "barrer" adecuadamente tal campo, se analizarán tres tipos de dintel, con luces principales de 140, 100 y 70 m y, dentro de cada uno, tres alturas de pila, de modo que se cubran las diferentes situaciones posibles. La geometría de los dinteles considerados es similar a la utilizada en los viaductos españoles de los últimos años.

En primer lugar, se analizará, de forma detallada, una pila de 120 m de altura, perteneciente a un pórtico de tres vanos con luz central de 140 m (fig. 5). Posteriormente, se resumirán los resultados a que da lugar un estudio paralelo al seguido con la pila de 120 m para el resto de las ocho soluciones que se verifican.

La geometría del dintel del viaducto analizado primeramente aparece reflejada en las figuras 6 y 7. El canto adoptado en la sección de empotramiento en pila es  $1/20$  de la luz central, y el de la sección de clave  $1/50$  de dicho vano.

Para las dovelas, que serán hormigonadas in situ sobre carro de avance móvil, se ha adoptado una longitud de 4 metros, y el peso de las mismas aparece en la figura 7, en la que se reflejan también el canto, el espesor variable de la tabla inferior del cajón y el área de las secciones que limitan cada dovela.

Las pilas son de sección celular y, como dimensiones básicas de partida, se han adoptado las que aparecen en la figura 6. En el empotramiento en cimentación se tienen unas esbelteces geométricas, altura/canto, de 15 y 10, en el sentido longitudinal y transversal del viaducto, respectivamente. El espesor de pared se supone constante a lo largo de la altura e igual a 40 centímetros.

La sección exterior de las pilas va creciendo desde la zona de unión con el dintel hasta la cimentación. El talud con que aumenta el canto de la pila en el alzado longitudinal del viaducto es  $1/80$ , y  $1/50$  en el transversal.

A priori, parece claro que la situación crítica para la pila se presenta durante la fase constructiva del dintel, cuando aquélla debe hacer frente a los esfuerzos que veremos en el apartado siguiente, funcionando como una gran ménsula.

Durante la fase de servicio de la estructura pórtico las pilas se verán sometidas a mayores esfuerzos que en construcción debido a la actuación de las sobrecargas pero, en cambio, se hallarán bastante más coaccionadas y más sujetas por el dintel en su sección de cabeza.

Según lo anterior, en el apartado 4.3 se va a partir de un determinado área de acero en la sección de cabeza de la pila, que verifique satisfactoriamente el estado límite último de agotamiento resistente frente a los esfuerzos de primer orden (coincidentes aquí con los totales) que solicitan dicha sección en construcción.

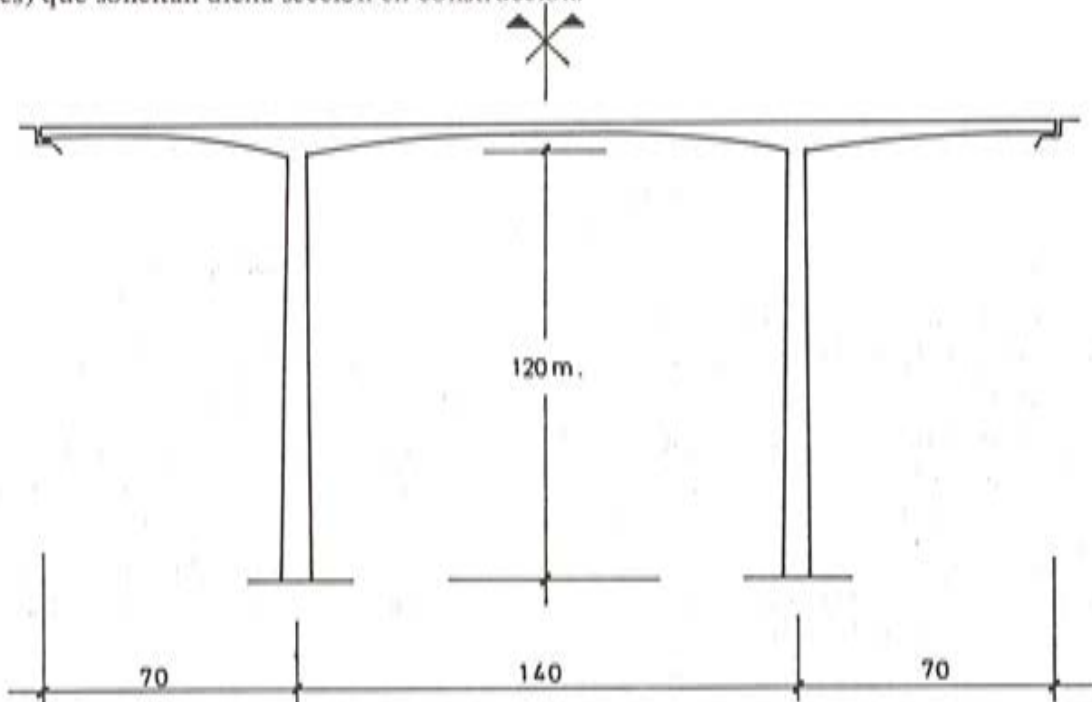


Fig. 5. Alzado longitudinal del viaducto analizado en primer lugar, con luz principal del dintel de 140 m y pilas de 120 m de altura.

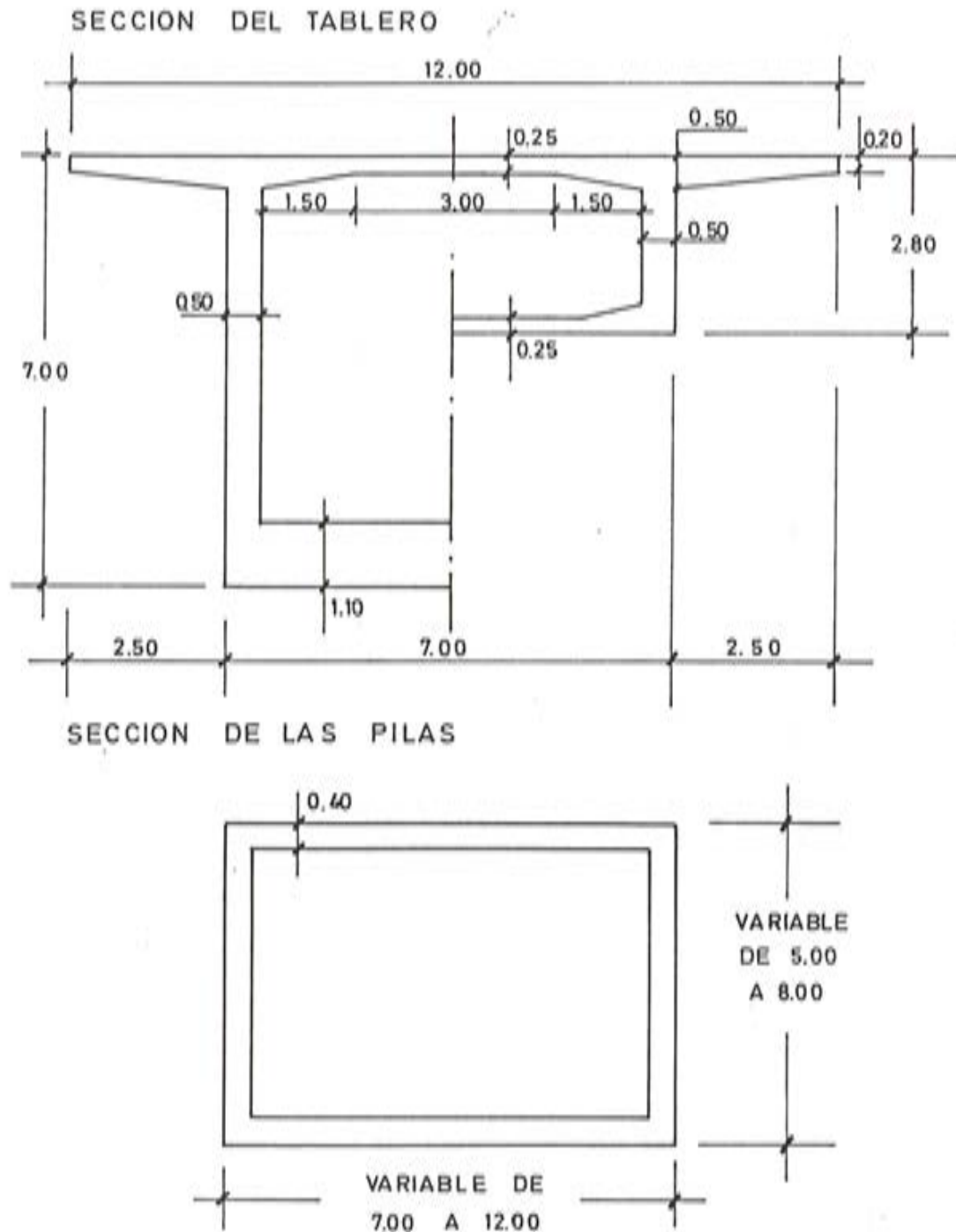


Fig. 6. Secciones del dintel y de las pilas del viaducto analizado en primer lugar y definido en la figura 5.

Posteriormente, partiendo de este área de acero que se ha prefijado, se tantearán diferentes distribuciones de armadura a lo largo de la altura de la pila, hasta conseguir una que satisfaga estrictamente el caso de carga más desfavorable durante el proceso constructivo.

En esta serie de tanteos, "prueba y error de la práctica ingenieril", que se realizarán con el programa DPIR de este trabajo, se verificarán también diferentes dimensiones para la pila, con vistas a obtener la solución más económica.

En el apartado 4.5 se verificará si el armado necesario en la pila durante el proceso constructivo de los voladizos es suficiente para las condiciones que aquella atraviesa durante la fase de servicio de la estructura pórtico.

Los esfuerzos reales que las pilas soportan en esta situación habría que obtenerlos mediante un análisis que contemplara globalmente el comportamiento real de la estructura pretensada del dintel y pilas esbeltas, teniendo presentes los efectos de segundo orden en éstas.

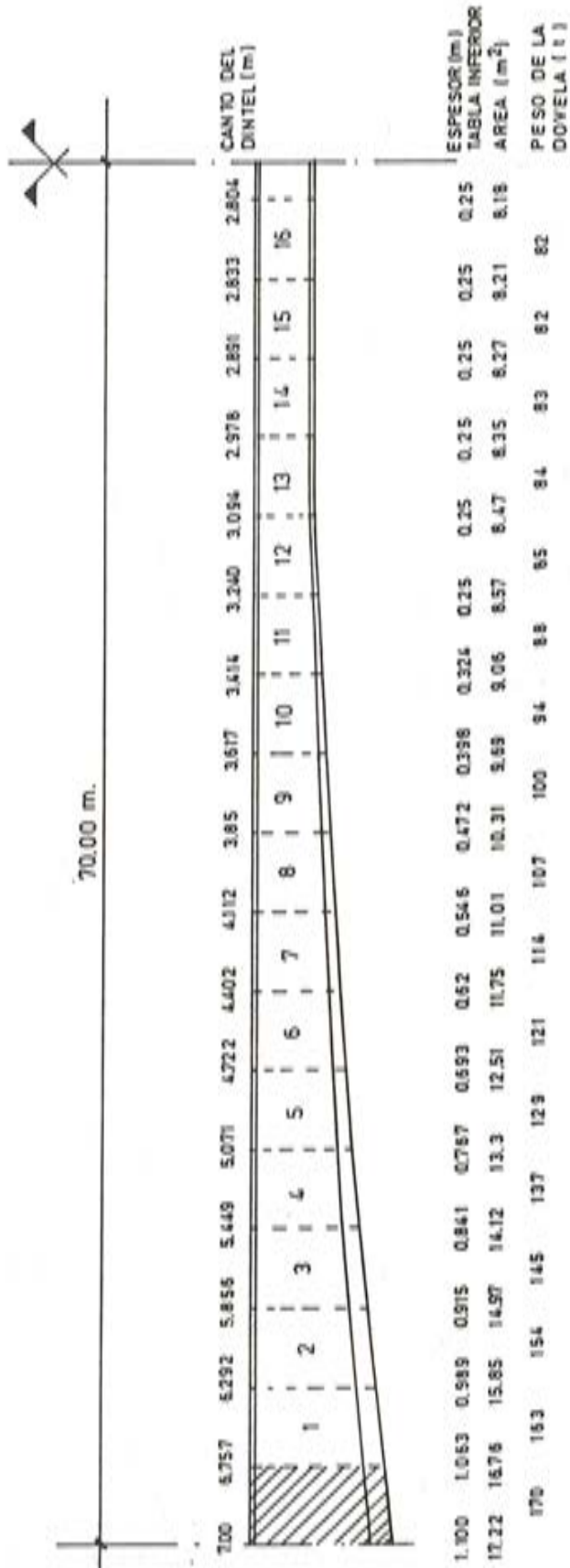


Fig. 7. Geometría del dintel del viaducto representado en la figura 5, con luz principal de 140 m.

En este estudio sólo nos aproximaremos a dichos esfuerzos reales con un análisis del pórtico en teoría elástica el cual nos proporciona un índice, que puede considerarse aceptable, de dichos valores.

Se verá que la hipótesis pésima para la pila en fase de servicio queda sobradamente cubierta por las dimensiones y armaduras elegidas para aquélla para soportar los esfuerzos de la fase de construcción del dintel. Sólo una pequeña zona junto a su coronación soporta en servicio esfuerzos más desfavorables que en el proceso constructivo y, en consecuencia, debe armarse previendo tales esfuerzos de servicio.

#### 4.2. Esfuerzos de diseño de la pila durante el proceso constructivo del dintel

De acuerdo con lo establecido en el apartado 3, se han obtenido los esfuerzos de diseño para la pila durante la construcción del tablero. Como cargas de obra se han considerado una carga repartida de 50 kp/m<sup>2</sup> y una carga puntual de 5 Mp. Para cada carro de avance se ha supuesto un peso de 80 Mp.

HIPOTESIS (1) EXISTENCIA DE UNA DOVELA EN DESEQUILIBRIO

Caso(3) : Diferente ponderación de las cargas permanentes :

$$\text{si } \begin{cases} \text{favorables } \gamma_{fg} = 0.90 \\ \text{desfavorables } \gamma_{fg} = \gamma_f / 1.30 = 1.077 \end{cases}$$

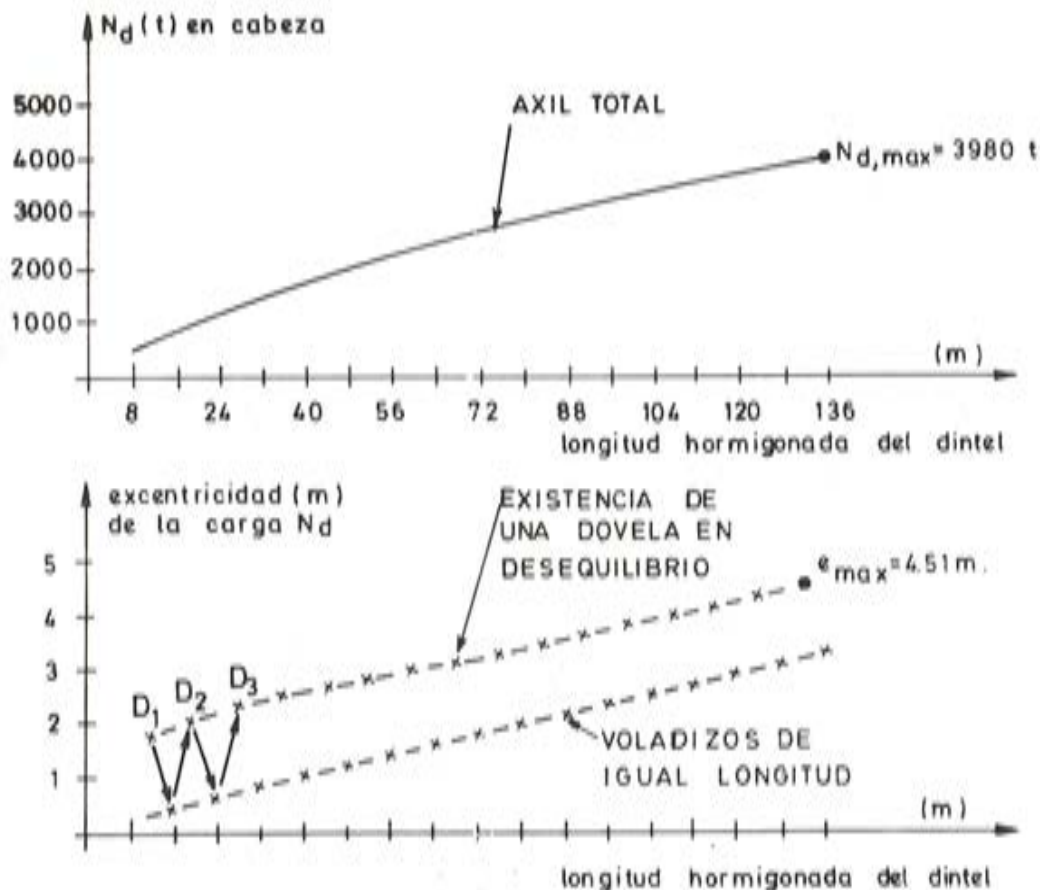


Fig. 8. Evolución de la carga axil  $N_d$  y de su excentricidad en la cabeza de la pila, a lo largo del proceso constructivo del dintel.

*Hipótesis 1:* Existencia de una dovela en desequilibrio.

Los diferentes casos a que da lugar esta hipótesis según se ponderen las cargas permanentes, esquematizados en la figura 3, quedan resumidos en la Tabla 1.

En las hipótesis 1.1 y 1.2 en que todas las cargas permanentes se ponderan con un mismo coeficiente  $\gamma_{fg}$ , la situación crítica para la pila se alcanza cuando tenemos en desequilibrio la dovela anterior a la de cierre en clave del viaducto, en la cual la excentricidad y el esfuerzo axil alcanzan su valor más desfavorable.

En la figura 8 se muestra, para la hipótesis 1.3 en que las cargas permanentes se ponderan con diferentes coeficientes  $\gamma_{fg}$ , la evolución de la carga axil  $N_d$  y de su excentricidad en la cabeza de la pila. En ella puede observarse cómo la excentricidad de la carga vertical va incrementándose a lo largo de la construcción del dintel y cómo su valor va oscilando entre dos leyes de máximos y mínimos, según que exista o no una dovela en desequilibrio. La situación crítica aparece de nuevo cuando tenemos en desequilibrio la última dovela, soportando la pila entonces el máximo momento flector existente a lo largo del proceso y un axil próximo al máximo, a falta del peso de sólo una dovela.

**TABLA 1**  
**ESFUERZOS DE DISEÑO PARA LA VERIFICACION DE LA PILA**  
(Fase final de la construcción de los voladizos)

<b>HIPOTESIS NORMAL (1). <math>\gamma_f = 1,40</math></b> <b>"ULTIMA DOVELA EN DESEQUILIBRIO"</b>	<b>Esfuerzos de diseño en cabeza de pila</b>		
<b>C A S O</b>	<b><math>N_d</math> (<math>M_p</math>)</b>	<b><math>M_d</math> (<math>M_{p,m}</math>)</b>	<b>Exc (m) de <math>N_d</math></b>
1) Ponderación de todas las cargas permanentes con $\gamma_{fg} = \gamma_f = 1,40$	5,600	9,758	1,74
2) Ponderación de todas las cargas permanentes con $\gamma_{fg} = 0,90$	3,625	7,052	1,95
3)* Ponderación de las cargas permanentes con: $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{fg} = \gamma_f / 1,3 = 1,077 \text{ si desf.} \\ \gamma_{fg} = 0,90 \text{ si fav.} \end{array} \right.$	3,980	17,939	4,51

<b>HIPOT. EXCEPCIONAL (2). <math>\gamma_f = 1,00</math></b> <b>"CAIDA DE UN CARRO DE AVANCE"</b>	<b>Esfuerzos de diseño en cabeza de pila</b>		
<b>C A S O</b>	<b><math>N_d</math> (<math>M_p</math>)</b>	<b><math>M_d</math> (<math>M_{p,m}</math>)</b>	<b>Exc (m) de <math>N_d</math></b>
1) Ponderación de todas las cargas permanentes con $\gamma_{fg} = \gamma_f = 1,00$	3,753	11,620	3,10
2) Ponderación de todas las cargas permanentes con $\gamma_{fg} = 0,90$	3,382	11,620	3,44
3)* Ponderación de las cargas permanentes con: $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{fg} = 1,05 \text{ si desfavorable} \\ \gamma_{fg} = 0,90 \text{ si favorable} \end{array} \right.$	3,700	19,137	5,17

\* Da lugar a dos verificaciones, según que el peso propio de la pila sea favorable o desfavorable.

### *Hipótesis 2: Caída de un carro de avance.*

La situación crítica para la pila se produce si uno de los carros de avance se cae cuando se está posicionando para hormigonar la última dovela del voladizo correspondiente. En la tabla 1 se resumen, de nuevo, los esfuerzos de diseño que, en este supuesto, actúan sobre la pila.

### *Excentricidades iniciales*

De acuerdo con lo comentado en 3.3, valoraremos unas excentricidades iniciales de la directriz de la pila, que cubran posibles errores de construcción y una diferencia de temperatura entre dos caras opuestas de la misma.

Según los criterios de Mathivat, expuestos en 3.3, tendríamos:

- 0,5 mm/m de error de verticalidad, lo que supondría en nuestro caso un desplazamiento de 60 mm de la cabeza de la pila respecto al eje teórico.
- Defecto de rectitud de la alineación anterior.
- Diferencia de temperatura de 20°C entre dos caras de la pila, lo que puede sustituirse por un gradiente lineal de 10°C entre las mismas.

Esto último supondría una curvatura para cada sección de nuestra pila de valor:

$$y'' = \alpha \cdot \Delta t/h(x)$$

siendo  $h(x) = (320 - X)/40$  el canto de la pieza a distancia X del empotramiento.

La doble integración de  $y''$  conduce a una flecha en cabeza de 110 mm, habiendo adoptado para el coeficiente de dilatación térmica del hormigón armado el valor  $10^{-5}$ .

El efecto de los tres términos anteriores puede venir representado por un error de verticalidad medio del orden de 1,5 mm/m, valor que está de acuerdo con los errores considerados por Morisset en (15), ya comentados.

En este estudio se ha adoptado un error medio de 2 mm/m, algo superior, como puede verse, a las recomendaciones francesas.

### *Casos de carga críticos*

De los resultados que aparecen en la tabla 1, se deduce que el caso de carga más desfavorable durante el proceso constructivo, corresponde a la "caída de un carro de avance" cuando se está posicionando en la zona final de un voladizo y a una diferente ponderación de los pesos de éstos (caso tercero de la hipótesis 2).

Se observa que el tercer caso de cargas de la hipótesis 1 da resultados próximos al anterior, pues aunque ahora existe una mayor carga axil en la cabeza de la pila actúa con una excentricidad menor.

Debe señalarse que una reducción de la longitud de las dovelas disminuirá el peso de éstas y de los carros de avance necesarios para construirlas, lo que se traduce en una reducción de los esfuerzos de flexión en la cabeza de la pila, a los que debe hacer frente ésta funcionando como ménsula, y, por consiguiente, en un abaratamiento de la misma. Como contrapartida, el ritmo de construcción de los voladizos será más lento y por lo tanto aumentará algo su coste de ejecución. Lo contrario puede decirse respecto a un aumento de la longitud de las dovelas.

### 4.3. Verificación de la pila durante el proceso constructivo del dintel

#### 4.3.1. Efecto de las deformaciones diferidas por fluencia

Al obtener en el apartado anterior los esfuerzos críticos para la pila durante el proceso constructivo del dintel, se ha visto que aquéllos se producen cuando los voladizos alcanzan su longitud máxima.

Ocurre que, en tal instante, las pilas han estado recibiendo carga a lo largo de un período de tiempo lo suficientemente importante como para tener presente el efecto desfavorable que en ellas origina la fluencia del hormigón.

Por otro lado, se debe analizar la situación en que se encontrarían estas pilas por un posible retraso de la unión del dintel que ellas sustentan con los adyacentes, o por una hipotética suspensión temporal de las obras, estudiando la evolución de sus flechas en dicho período y comprobando que no se alcanza su inestabilidad por efecto de la fluencia.

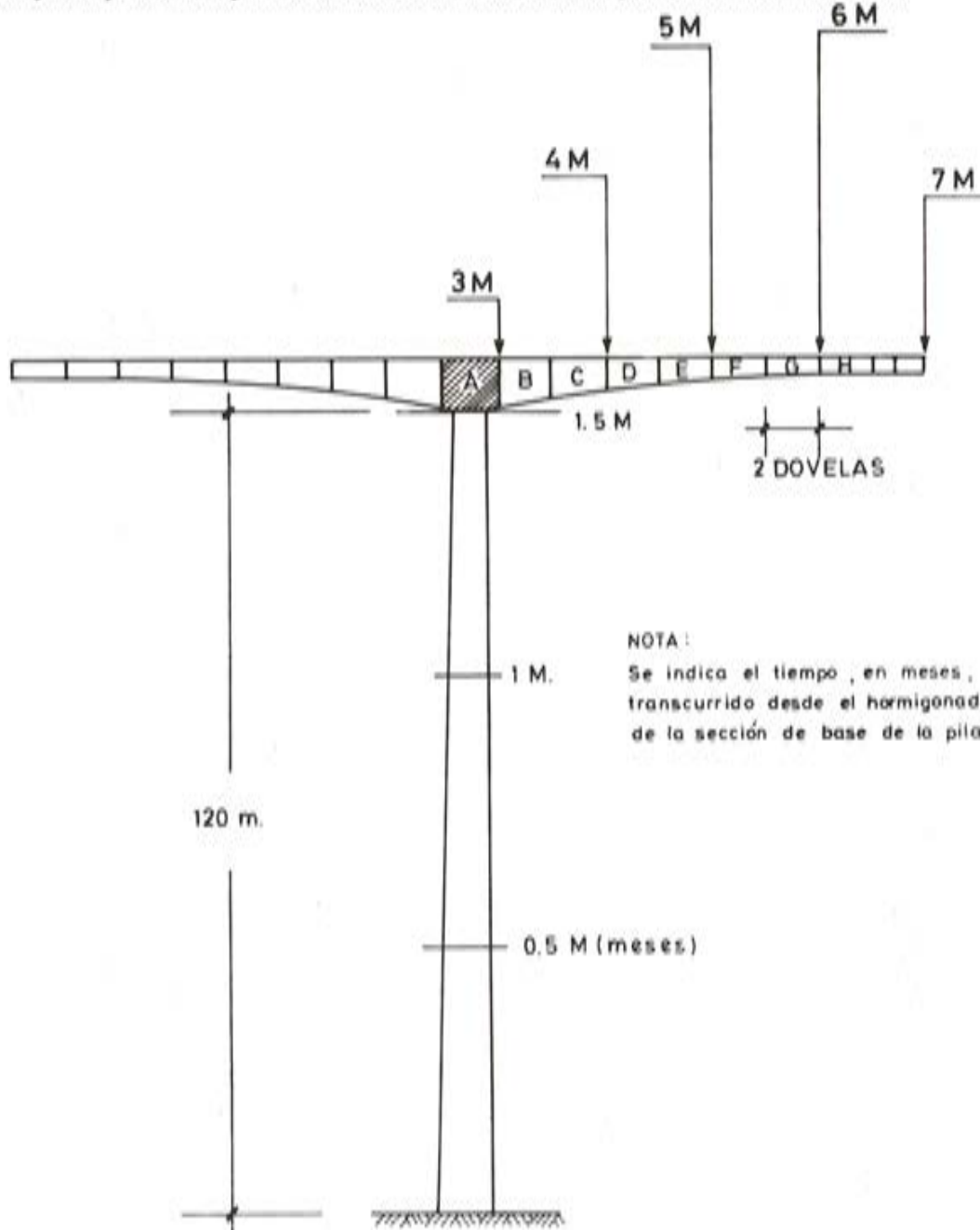


Fig. 9. Evolución en el tiempo de la construcción de una "T".

En la figura 9 se representa la evolución, en el tiempo, de la construcción de la T que constituyen la pila y los voladizos del viaducto que estudiamos. Se ha considerado un ritmo de avance para el hormigonado de las pilas, con encofrados deslizantes, de 4 m/día, lo que supone un total de 6 semanas de trabajo para la construcción de aquéllas. Además, hemos considerado un lapso de tiempo de 6 semanas para la ejecución de la cabeza del tablero sobre pila y para el montaje de los carros de avance. Finalmente se ha admitido para los voladizos un ritmo de trabajo de una dovela, de 4 metros, hormigonada por semana, lo que conduce a que éstos se construyan en 18 semanas.

Se han evaluado, en la sección de empotramiento de la pila y al final del proceso constructivo de los voladizos, las deformaciones diferidas por fluencia que originan los pesos,  $P_i$ , de los diversos "trozos" en que se ha dividido la "T" de la figura 9, y de éstas se ha obtenido un coeficiente global medio,  $\varphi_G$ , de la fluencia que origina todo el elemento estructural en dicha sección e instante, cuya definición es:

$$\varphi_G = \Sigma P_i \cdot \varphi_i / \Sigma P_i$$

donde  $\varphi_i$  es el coeficiente de fluencia del hormigón de la sección de base de la pila correspondiente al instante considerado y al tiempo de aplicación de la carga  $P_i$ .

En la tabla 2 aparecen reflejados los valores que toma dicho coeficiente global de fluencia, en diferentes instantes de tiempo posteriores al final de la construcción de los voladizos.

TABLA 2

Instante	Deformaciones diferidas en la sección de empotramiento. Valor de $\varphi_G$
" $t_0$ " (final de la construcción del dintel)	0,46
$t_1 = t_0 + 6$ meses	0,72
$t_2 = t_0 + 2$ años	1,13
$t_\infty$	2,-

Evaluando, del mismo modo, el coeficiente de fluencia medio que se tiene en la sección de cabeza de la pila al final del proceso constructivo del dintel, obtenemos  $\varphi_G = 0,40$ .

Dada la pequeña diferencia obtenida entre los coeficientes  $\varphi_G$  de las dos secciones extremas de la pila, en la verificación que haremos a continuación de la estabilidad de ésta en las diferentes hipótesis de carga recogidas en la tabla 1 consideraremos para todas sus secciones, como coeficiente básico de fluencia, el calculado para la de empotramiento.

El valor de  $\varphi_G$  vendrá ponderado con los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , que tienen presente la relación de las cargas permanentes a las totales, de acuerdo con la hipótesis aceptada del coeficiente de fluencia reducido.

Según ésta, la evaluación de estos coeficientes reductores  $\alpha$  (axil de cargas de larga duración/axil de cargas totales) y  $\beta$  (momento de primer orden de cargas de larga duración/momento de primer orden de cargas totales) debe hacerse en la sección más desfavorablemente solicitada por los esfuerzos de primer orden. En nuestro caso ésta es la de cabeza de pila, cuyo armado se ajustará estrictamente a estos esfuerzos (el resto de las secciones dispondrán de un margen en el momento flector a resistir, que cubre el efecto de segundo orden que en ellas se producirá).

De acuerdo con los comentarios que ARENAS hace en (5), al evaluar estos coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , en cada caso de carga de la tabla 1, se tomarán: para las cargas totales, los valores ma-

yorados que aparecen en dicha tabla; para las cargas de larga duración se considerarán los valores característicos de las mismas, afectándoles de un coeficiente de mayoración  $\gamma_{fl} = 1,15$ , que es tanto como admitir una cierta aleatoriedad en sus valores característicos. Como se expone en (5), evaluar  $\alpha$  y  $\beta$  con los valores mayorados de las cargas de larga duración supondría un exceso de seguridad ya que, en este caso, no sólo estaríamos contando con que existe la fluencia, sino que estaríamos considerando la fluencia que se produciría bajo cargas de larga duración mayoradas, con  $\gamma_{fg} = 1,5$  ó  $1,6$ .

#### 4.3.2. Armaduras en la pila

La sección de cabeza de la pila debe hacer frente, exclusivamente, a los esfuerzos de primer orden que aparecen reflejados en la tabla 1.

Con las dimensiones iniciales que se han adoptado para ella (fig. 5 y 6) se requiere la armadura que aparece en la figura 10.

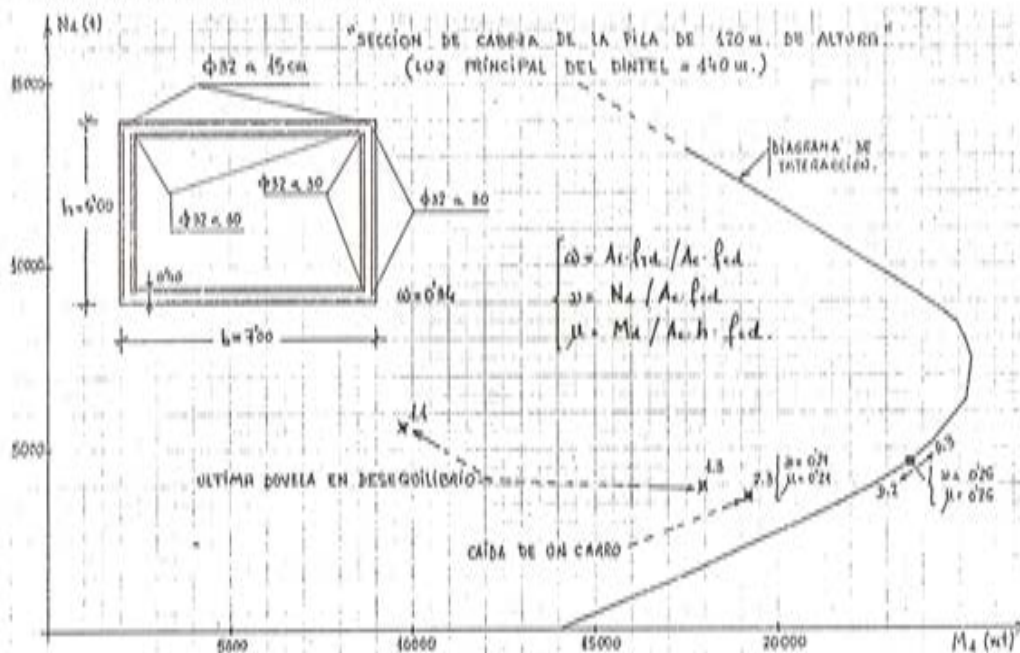


Fig. 10. "Sección de cabeza de la pila de 120 m de altura" (luz principal del dintel = 140 m).

Como criterio de distribución del acero en la sección se ha tomado el de disponer a lo largo del perímetro interior de la misma y de las dos caras laterales que limitan su canto en el sentido transversal al viaducto una densidad constante de armadura por unidad de longitud ( $\text{cm}^2/\text{ml}$ ), y en las caras laterales, exteriores, que limitan el canto de la sección según el alzado longitudinal de la pila, una densidad de armadura doble que la anterior. El total de armadura dispuesta supone una cuantía mecánica:  $\omega = 0,34$ , ( $\omega = A_s \cdot f_{yd} / A_0 \cdot f_{cd}$ ).

En la figura 10 se ha representado el diagrama de interacción de esta sección, indicándose la situación dentro del mismo de los tres casos de carga más desfavorables de la tabla 1, que son:

- Caso 1.1. Hipótesis normal 1, de existencia de la última dovela de un voladizo en desequilibrio y ponderación de todas las cargas permanentes con  $\gamma_{fg} = \gamma_f = 1,40$ .
- Caso 1.3. Hipótesis normal 1, de existencia de la última dovela de un voladizo en desequilibrio y ponderación de las cargas permanentes con diferentes coeficientes de seguridad, 0,90 y 1,077, según su efecto sea favorable o desfavorable.

- Caso 2.3. Hipótesis excepcional 2, de caída de un carro de avance, incluso coeficiente de impacto, y ponderación de las cargas permanentes con diferentes coeficientes de seguridad (0,90 y 1,05).

El resto de los casos de carga de la tabla 1, están cubiertos por los anteriores.

De los tres casos de carga contemplados, el 2.3 correspondiente a la caída de un carro de avance, con  $\nu = 0,21$  y  $\mu = 0,21$ , aparece como crítico por ser el más próximo al diagrama de interacción de la sección. De hecho, la armadura dispuesta en la sección, se ha buscado de modo que cubra los esfuerzos derivados de este caso de carga.

Para la distribución de la armadura a lo largo de la pila se debe proceder por tanteos, partiendo del área de acero necesaria en la sección de cabeza.

Con el alzado longitudinal y transversal que se ha adoptado para la pila (fig. 11 a) la distribución de armadura que se muestra en la figura 11 b se verá a continuación que verifica los diferentes casos de carga del proceso constructivo.

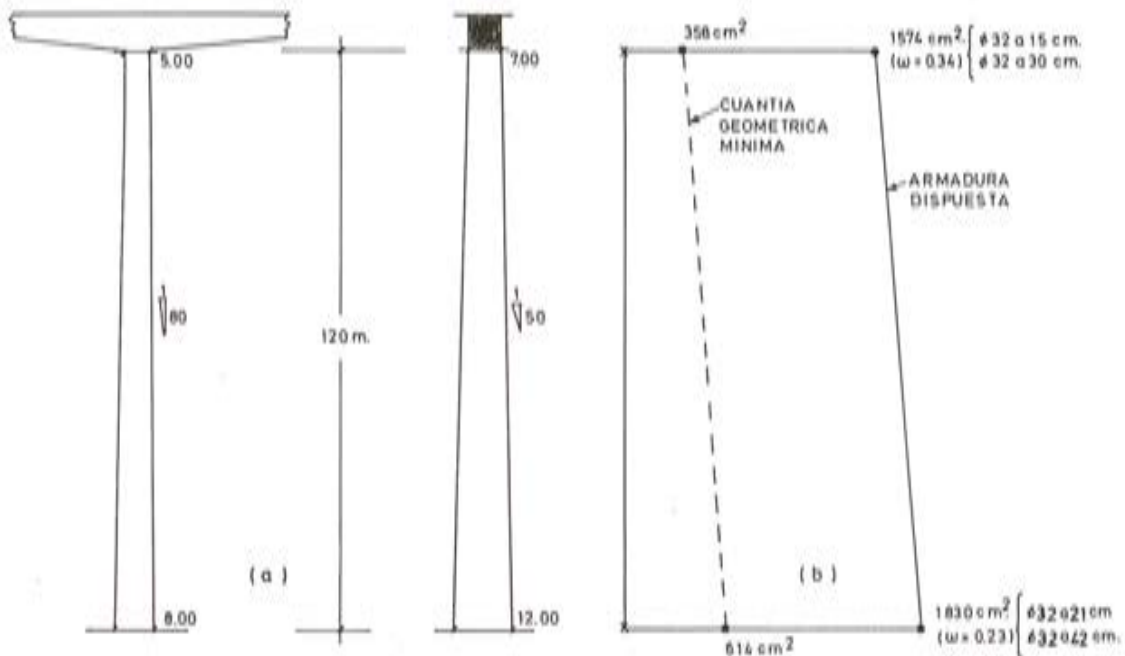


Fig. 11. Alzados longitudinal y transversal elegidos, para la pila de 120 m de altura, en el viaducto con luz principal del dintel de 140 m. Armadura dispuesta.

A efectos comparativos, se ha estudiado una segunda solución para la pila que nos ocupa con un canto de 4 m en su sección de cabeza, según el alzado longitudinal del viaducto, y un espesor de pared, constante a lo largo de la altura de la pila, y de valor 0,40 m como en el caso anterior.

En esta solución se requiere un incremento de armadura en toda la altura de la pila, respecto a la que exigía el primer diseño. Este aumento de las necesidades de acero es un índice de los mayores efectos de segundo orden que se producen en esta pila como consecuencia de sus cantos más reducidos a medida que ascendemos por ella.

Admitiendo que el coste de una tonelada de acero pasivo para armar equivale al de 10 m<sup>3</sup> de hormigón y hecha una valoración de los materiales consumidos, el segundo diseño supone un 13 por 100 más de gasto que el primero, por lo que ha sido abandonado.

Por otro lado, en esta segunda solución, el coste de la armadura longitudinal es un 45 por 100 superior al coste del hormigón, mientras que en la solución aceptada el coste de estos materiales está más equilibrado (coste de acero superior en sólo un 10 por 100 al del hormigón) lo que es considerado tradicionalmente en la tecnología del hormigón armado como un índice de solución acertada.

### 4.3.3. Solicitaciones en el plano longitudinal del viaducto

Para los tres casos de carga más desfavorables del proceso constructivo, comentados en el punto anterior, y con las dimensiones y armaduras dispuestas en la pila, se ha procesado ésta con el programa DPIR, verificándose que en ninguno de los casos se alcanzan los estados límites últimos de inestabilidad de la pila, ni de rotura de sus secciones. Las resistencias características elegidas para los materiales son  $f_{ck} = 330 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_{yk} = 4.200 \text{ kp/m}^2$  (dureza natural), adoptando para los coeficientes reductores de éstas los valores  $\gamma_c = 1,50$  y  $\gamma_s = 1,10$ .

En la tabla 3 se resumen los principales datos y resultados del caso 2.3. En (17) pueden consultarse las tablas referentes a los casos 1.1 y 1.3.

TABLA 3

#### VERIFICACION DE LA PILA DURANTE LA CONSTRUCCION DEL DINTEL

– HIPOTESIS EXCEPCIONAL (2)

Caída de un carro de avance

– CASO 2.3

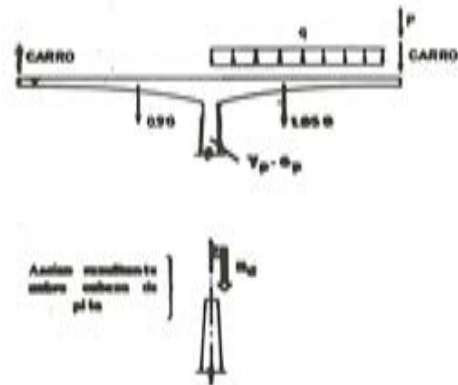
Ponderación de las cargas permanentes con  $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{fg} = \gamma_f/1,3 \not\leq 1,05 \rightarrow \text{si desfavorables} \\ \gamma_{fg} = 0,9 \rightarrow \text{si favorables} \end{array} \right.$

– Coeficientes de seguridad

Acciones:  $\gamma_f = 1,00$

Materiales:  $\gamma_c = 1,50, \quad \gamma_s = 1,10$

– Error de verticalidad: 2 mm/m.



Ponderación del peso propio de la pila $\gamma_p$	Acción resultante sobre cabeza de pila			Coeficiente fluencia reducido $\psi^e$	Situación de la pila	Flecha en cabeza (mm)	Momentos flect. en la sección de empotramiento			Situac. E.L.U. increm. excentricidad carga transmitida por dintel			Índices de seguridad		
	$N_d(t)$	$M_d$ (mt)	$e$ (m)				$M_1$ (mt)	$M_t$ (mt)	$M_t/M_1$	$eu$ (m)	$M_{1u}$ (mt)	$M_{tu}$ (mt)	$M_{tu}/M_{1u}$	$eu/e$	$M_{tu}/M_t$
1,05	3.700	19.137	5,17	0,08	Estable	2.595	20.436	31.438	1,54	5,43	21.399	35.105	1,64	1,05	1,12
0,90	3.700	19.137	5,17	0,08	Estable	2.664	20.377	31.376	1,54	5,38	21.154	34.561	1,63	1,04	1,10

De las tablas que resumen los resultados del análisis cabe destacar que:

- Se ha considerado como error de verticalidad medio el valor 2 mm/m.
- Se da la acción resultante,  $N_d$  y excentricidad que, sobre la cabeza de la pila, ejerce el dintel y las cargas que sobre él gravitan.
- Se indica el coeficiente de fluencia reducido, obtenido con los criterios anteriormente comentados, que corresponde al caso de carga que se contempla.
- Se indica la situación de estabilidad de la pila para las cargas consideradas, y la flecha que ésta adopta en cabeza.

Este último valor, al haber sido obtenido con cargas mayoradas y resistencias minoradas, no tiene un verdadero sentido físico y sólo debe ser contemplado como una indicación de la deformabilidad de la pila en cada caso de carga, y como índice comparativo con los otros casos.

- Se recoge, en la sección de base, el valor del momento flector total y de primer orden, y el cociente de estos dos valores, verdadero índice de la importancia de los efectos de segundo orden.
- Se ha determinado, mediante un método incremental, paso a paso, el valor de la excentricidad última,  $e_u$ , de la carga axil actuante sobre la sección de coronación de pila que conduce al agotamiento resistente de la pila por inestabilidad o por rotura de una de sus secciones. Así, la proximidad o lejanía de la excentricidad que presenta nuestro caso de carga al valor límite  $e_u$  es un índice del margen complementario de seguridad de que disponemos (complementario, porque la seguridad básica está garantizada a través de los coeficientes  $\gamma_f, \gamma_c, \gamma_s$ ).

En la situación del estado límite último, se vuelven a dar los valores del momento flector en la sección de base de la pila y la valoración del efecto de segundo orden.

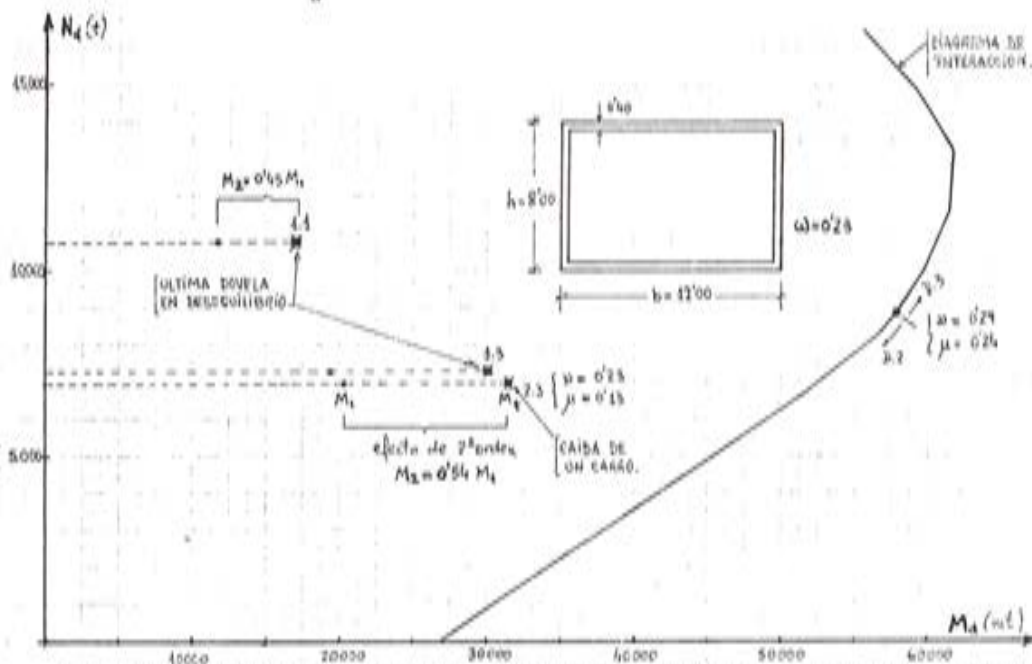
- Como índices complementarios de la seguridad que presenta la pila frente al caso de carga que se contempla, se dan: el cociente entre la excentricidad última y la de diseño, y el cociente entre los momentos flectores totales en la sección de base, en las dos situaciones anteriores.
- En los casos 1.3 y 2.3 en que las cargas permanentes de dintel se ponderan con diferente coeficiente según sea su efecto favorable o desfavorable, se ha verificado dos veces la pila ponderando sucesivamente su peso propio con los dos coeficientes, dado que a priori nos es desconocido si éste favorece o no la estabilidad.

Para esta pila se obtienen resultados muy similares, utilizando uno u otro coeficiente de ponderación de su propio peso, aunque es algo más desfavorable el caso en que se minorra éste por 0,90. Quiere ello decir que el peso de la pila aparece en este caso como un factor estabilizador.

- De los tres casos de carga contemplados, es crítico el correspondiente a la caída de un carro de avance, 2.3 (tabla 3), con un índice de seguridad respecto a incremento de la excentricidad de la carga axil de un 4 por 100. Este caso de carga, que condicionó el armado de la sección de cabeza, determina también la validez de la distribución elegida para la armadura a lo largo de la pila.

El caso de carga 1.3 da unos resultados próximos al anterior, con  $e_u/e$  igual a 1,10.

Por último, el caso de carga 1.1 es el menos preocupante, estando lejos de la situación de estado límite último:  $e_u/e = 2,03$ .



64 Fig. 12. "Sección de base de la pila de 120 m de altura". (Luz principal del dintel = 140 m).

En la figura 12 se representa el diagrama de interacción de la sección de base del soporte y la situación dentro del mismo de los esfuerzos totales (1° más 2° orden) que se tienen en los tres casos de carga, reflejando la importancia que en cada uno de ellos tiene el efecto de segundo orden. Este viene a suponer un 55 por 100 del momento de primer orden, en los casos 1.3 y 2.3 y del orden del 45 por 100 en el caso 1.1.

La distancia, relativamente importante, que se aprecia en esta figura entre los puntos representativos de los esfuerzos totales en la sección de base y su diagrama de interacción podría inducirnos a reducir algo la armadura de la sección de base y, en general, de toda la pila. Olvidaríamos entonces que la seguridad que en aquélla reflejan los puntos representativos de las solicitaciones respecto al diagrama de interacción se refiere tan sólo al agotamiento de dicha sección. Porque, como ya hemos visto, es la pila como tal la que se halla próxima al estado límite de inestabilidad, y una pequeña reducción de la armadura, al incrementar la flexibilidad de las secciones fisuradas, nos precipitaría en el mismo.

#### 4.3.4. Efecto del viento

La valoración del efecto que produce el viento se obtendrá de la "Instrucción relativa a las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carreteras", que en su apartado 4.2.2.1., se refiere a esta sobrecarga climática y del cual entresacamos los aspectos que más nos interesan en nuestro estudio y que comentaremos:

- La acción del viento puede asimilarse, en general, a una carga estática horizontal, obtenida según se indica más adelante.
- Las normas que se dan a continuación, se refieren a puentes cuya altura máxima de rasante sobre el terreno no sea mayor de 100 m.

De las pilas celulares que contemplamos en este apartado, con alturas que oscilan entre 120 m y 30 m, la primera de ellas sobrepasa los límites de la Instrucción.

Aún en este caso, y dado que el objeto de este estudio no es la valoración de los efectos del viento, seguiremos aplicando esta normativa.

- La Instrucción contempla la posibilidad de realizar ensayos aerodinámicos que permitan valorar más adecuadamente los empujes del viento, y las posibles reducciones de éstos, por formas aerodinámicas especiales de los elementos de construcción.

En el caso del viaducto que estudiamos en primer lugar, con unos voladizos importantes, de 70 m a cada lado de una pila de 120 m de altura, este estudio parece imprescindible y, a la vista de sus resultados, deberíamos valorar los empujes reales del viento, observando, además, si se originan fenómenos vibratorios importantes que podrían exigir estudios aerodinámicos más profundos.

- La dirección del viento se escogerá de forma que se obtengan los efectos más desfavorables sobre el elemento en estudio. En cualquier caso, deberá siempre considerarse la hipótesis de viento perpendicular al eje longitudinal del puente.

En lo que sigue, se considerará sistemáticamente el caso de presión del viento en sentido normal al plano del viaducto, aunque en cada situación real de un puente en proyecto será preciso contemplar las condiciones locales del mismo a tales efectos.

- El empuje producido por el viento sobre una superficie elemental de la construcción será igual a:

$$e = P_v \cdot S$$

siendo en nuestro caso concreto:

$P_v = 200 \text{ Kp/m}^2$  (presión básica horizontal).

S = Superficie total expuesta al viento, según se proyecta en un plano normal a la dirección del mismo.

De acuerdo con lo expuesto en 3.2, se ha verificado el caso de carga más desfavorable, 1.3 (véase tabla 1), correspondiente a la hipótesis de "existencia de la última dovela de un voladizo en desequilibrio", con la actuación simultánea de un viento transversal a la pila y dintel en construcción.

El factor de minoración igual a 0,90, que afecta al valor característico de las cargas cuando se combinan acciones de diferente naturaleza, da lugar a:

- Presión básica horizontal de diseño:

$$P_{vd} = 1,40 (0,9 \cdot 200) = 250 \text{ Kp/m}^2$$

- Respecto a la minoración de las cargas permanentes y variables que actúan sobre el dintel (véase tabla 1) y, dado que el axil actuante en el caso de carga que contemplamos es próximo al que realmente actúa, sólo se ha minorado por 0,90 el valor del momento transmitido por el dintel a la cabeza de la pila.

Creemos interpretar así la filosofía de seguridad en que se basa la Instrucción EH-82 cuando se refiere a estos aspectos (Artículo 32. Hipótesis de carga).

De acuerdo con lo anterior, se ha procesado la pila que estamos verificando, con el programa DPES de este trabajo, reflejando en la tabla 4 los principales datos y resultados del análisis, de la que haremos los siguientes comentarios:

- En su zona superior se anota la acción resultante sobre cabeza de pila, que suponen las cargas de peso propio y las que gravitan sobre el dintel, y el efecto de la acción del viento sobre el mismo.
- Se ha considerado un error de verticalidad de la pila de 2 mm/m, tanto en el plano longitudinal del puente como en el transversal al mismo.
- En la tabla, se refleja la situación de estabilidad de la pila en el caso de cargas verificado, y las flechas que toma su cabeza, en el sentido longitudinal y transversal al viaducto.

Se indican también los momentos flectores de primer orden y totales, así como la valoración del efecto de segundo orden, en las dos direcciones principales de la sección de base de la pila.

- Hemos procedido a incrementar sucesivamente el valor de la presión de diseño del viento, hasta obtener una situación de estado límite último, alcanzándose ésta para  $P_{vu} = 350 \text{ Kp/m}^2$ , que corresponde a un valor característico del viento de 275  $\text{kp/m}^2$  de presión dinámica.

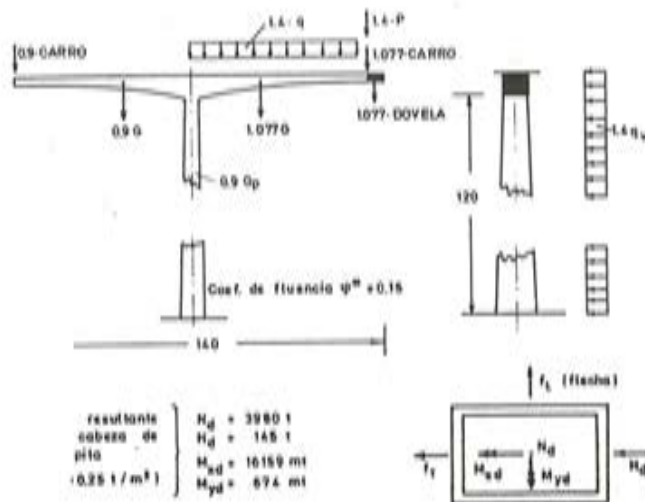
Para esta situación de carga se incluye en el citado cuadro la misma información que en el caso anterior.

Como índices complementarios de seguridad, se dan: el cociente entre la presión del viento última y de diseño, siendo en este caso de 1,40, y el de los momentos flectores totales en la sección base de la pila, para las dos situaciones anteriores.

#### 4.3.5. Consideraciones relativas a los esfuerzos transversales cortante y torsor

Se evalúa a continuación la influencia que en la deformación de la pieza tienen los esfuerzos transversales que la solicitan,

**TABLA 4. VERIFICACION DE LA PILA DURANTE LA CONSTRUCCION DEL DINTEL. EFECTO DE UN VIENTO TRANSVERSAL**



**HIPOTESIS:** Existencia de la última dovela en desequilibrio y actuación del viento.  
**ERROR DE VERTICALIDAD:** 2 mm/m, en las dos direcciones principales.  
**Factor de minoración por simultaneidad de acciones de diferente naturaleza:** 0,90.

Situación de:	Flechas en cabeza		Situac. de la pila	Momentos flectores en la sección de base					
	Longit. $f_L$ (mm)	Transv. $f_T$ (mm)		Longitudinales $M_{xd}$ (mt)			Transversales $M_{yd}$ (mt)		
				$M_{1x}$	$M_{Tx}$	$M_{Tx}/M_{1x}$	$M_{1y}$	$M_{Ty}$	$M_{Ty}/M_{1y}$
Construcción: $qvd = 0,25 \text{ t/m}^2$	2.445	1.239	Estable	17.474	28.097	1,61	30.114	35.066	1,16
E.L.U. por increm. de $qv$ ( $qvu = 0,35$ )	3.405	2.249	Inestable	17.474	30.745	1,76	41.634	50.274	1,21
Indices de seguridad:	$qvu/qvd = 1,40$			$M_{txu}/M_{tx} = 1,09$			$M_{tyu}/M_{ty} = 1,43$		

Llevaremos esto a cabo para el caso de carga que se acaba de verificar, cuando teníamos la última dovela de un voladizo en desequilibrio y actuaba un viento transversal al viaducto. En la figura 13 se representa los esfuerzos transversales que aparecen en la pila:

- Los cortantes, según el alzado longitudinal de la pila, (fig. 13.a) son de segundo orden, consecuencia de la inclinación del eje de ésta respecto a la vertical, a causa de las deformaciones de flexión.
- En el alzado transversal de la pila (fig. 13.b), tenemos los cortantes producidos por el viento que actúa perpendicular al plano del viaducto, más los de segundo orden, consecuencia de las flechas transversales de flexión.
- Finalmente, los torsores, (fig. 13.c) que solicitan a la pila son de segundo orden, debidos a las fuerzas horizontales del viento y a las flechas longitudinales de flexión.

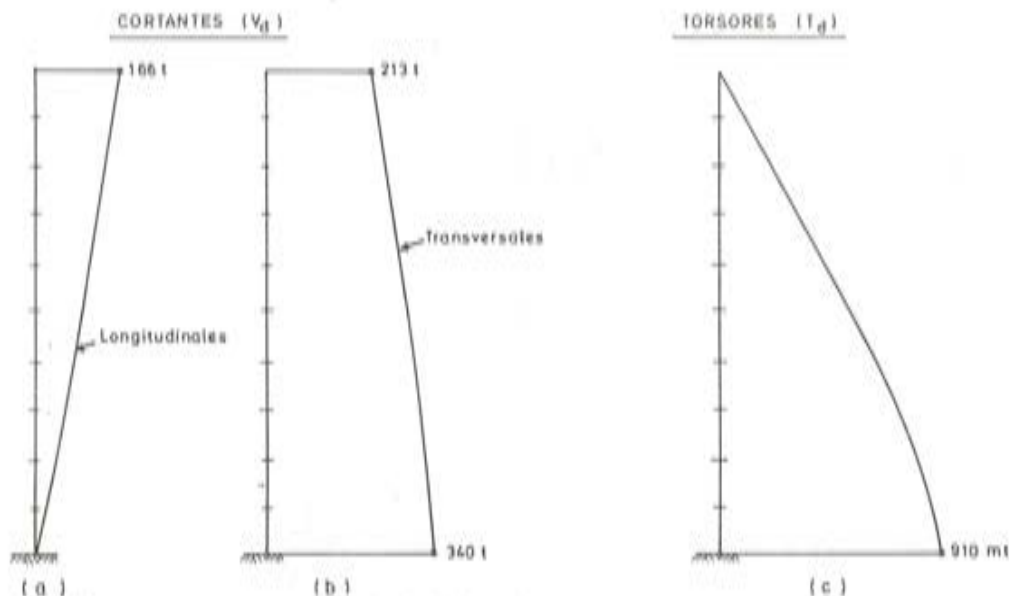


Fig. 13. Esfuerzos transversales en la pila de 120 m. de altura, en el caso de carga en que existe la última de vela de un voladizo en desequilibrio y actúa un viento transversal al viaducto.

Cuantificaremos a continuación las deformaciones que originan cada una de las leyes de esfuerzos anteriores:

- En el alzado longitudinal de la pila, el cortante máximo que actúa en la misma se produce en su sección de cabeza y vale  $166 M_p$ .

Este cortante es del orden del 7 por 100 del valor que da lugar a un agotamiento de dicha sección, por compresión oblicua del alma,  $V_{u1} = 0,30 f_{cd} \cdot bw \cdot d$ , según la Instrucción EH-82.

Por otro lado, no existe problema de agotamiento por tracción en el alma, al ser el cortante actuante del orden del 60 por 100 del valor que absorbe por sí solo el hormigón,  $V_{cu} = f_{cv} \cdot bw \cdot d$  (EH-82).

Tenemos, pues, que la sección de cabeza, que es la más solicitada por cortante longitudinal, se encuentra frente a él en condiciones muy favorables, sin que ningún tipo de armadura sea precisa y sin que la superposición de estas tensiones tangenciales con las normales, debidas a la carga vertical, reduzcan de modo apreciable su capacidad resistente frente a sollicitaciones normales.

La deformación debida al cortante es diferente según se haya producido o no la fisuración diagonal. En este segundo caso, se puede predecir el comportamiento de la pieza según los principios de elasticidad, utilizando la rigidez a cortante del elemento no fisurado. En caso contrario, las deformaciones debidas al cortante serán superiores.

Se pueden evaluar las distorsiones por cortante que se producen en el alma de las piezas cuando existe fisuración diagonal, a través de la analogía de la celosía, llegando a una cuantificación de su rigidez a cortante que, en casos normales, puede ser del orden del 10 al 30 por 100 de la rigidez no fisurada, según la cantidad de acero dispuesta en el alma (\*).

En nuestro caso, y dado el carácter secundario del esfuerzo cortante, no es de esperar que aparezca dicha fisuración.

Según el Código Modelo para estructuras de hormigón del CEB (7), en su apartado dedicado al estado límite último de agotamiento por esfuerzo cortante, el valor de este esfuerzo a partir del cual se forman fisuras inclinadas con origen en las de flexión viene dado por:

$$V_{Rd1} = \tau_{rd} \cdot K (1 + 50 \cdot \rho_1) bw \cdot d$$

(\*) Véase PARK y PAULAY: "Estructuras de concreto reforzado" (Editorial Limusa, 1979).

en donde:

$\tau_{rd}$  es función de la resistencia  $f_{ck}$  del hormigón,

$K = 1,6 - d \text{ (m)} \leq 1,00 \text{ m}$

$\rho_L = A_{s1}/bw \cdot d \geq 0,02$

$A_{s1}$  es el área de la armadura en tracción.

La anterior expresión es válida para miembros sin importantes fuerzas longitudinales. En el caso de que actúen axiles de compresión de cierta entidad, se puede incrementar el valor anterior multiplicándolo por un factor  $\beta_1$  no mayor de 2 y cuyo valor se indica en (7).

En nuestro caso, y sin considerar el efecto favorable de la carga axil existente en la sección de cabeza, tenemos un cortante de diseño del orden del 70 por 100 de  $V_{Rd1}$ , no siendo de temer por consiguiente la fisuración diagonal.

La rigidez a cortante de la sección no fisurada puede aproximarse en una pieza de hormigón por la expresión (7):  $K_v = G \cdot bw \cdot d$ .

De acuerdo con lo anterior, el corrimiento total debido al cortante es, en la cabeza de la pila y en su alzado longitudinal, un 0,12 por 100 de la flecha por flexo-compresión. Es decir, totalmente despreciable.

- En el alzado transversal, los cortantes varían desde un valor mínimo de 213 Mp en la sección de cabeza, a un máximo de 340 Mp en la de base.

De forma similar a la llevada a cabo anteriormente, se obtiene que desde el punto de vista resistente las secciones se encuentran sobradas respecto a los cortantes actuantes sin que se precise armadura transversal.

De igual modo, se comprueba que no aparece la fisuración diagonal, siendo el corrimiento total en la cabeza de la pila, producido por la ley de cortantes, un 0,45 por 100 de la flecha transversal por flexo-compresión y, por lo tanto, igualmente despreciable.

- Por último, los momentos torsores varían desde cero en la sección de cabeza a un máximo de 910 Mp.m en la de base (fig. 13.c).

En esta sección se tiene:

El torsor actuante es el 3,6 por 100 del valor del torsor que agota por compresión al hormigón,  $T_{u1} = 0,36 \cdot f_{cd} \cdot A_c \cdot h_o$  (EH-82).

La relación  $(T_d/T_{u1} + V_d/V_{u1})$  que tiene en cuenta la interacción entre el cortante y la torsión, toma un valor de 0,095 que es muy inferior a la unidad, valor máximo admisible según EH-82.

Respecto a la armadura que requiere el torsor, la longitudinal es un 2,8 por 100 de la necesaria por flexo-compresión, y la transversal supone 1,35 cm<sup>2</sup> por metro de pared del cajón.

Los anteriores valores demuestran la escasa importancia que, desde el punto de vista resistente, tienen los torsores de segundo orden que solicitan a la pila.

En cuanto a las deformaciones que estos pares originan, evaluándolas con las rigideces torsionales de las secciones no fisuradas, cuyo valor viene dado por:

$$k_T = G J = G \cdot (4 A_e^2 \cdot e/u)$$

en donde:

$A_e$  = área envuelta por el contorno medio de la sección hueca eficaz.

$e$  = espesor del cajón.

$u$  = perímetro del contorno medio de la sección hueca eficaz,

se tiene un incremento de la flecha transversal de flexión que no llega al 0,01 por 100 y un decremento de la longitudinal del orden del 0,0025 por 100, valores totalmente despreciables.

Resumiendo todo lo anterior, podemos concluir que en este tipo de pilas los esfuerzos transversales presentan un carácter secundario en cuanto al aspecto resistente, siendo más que suficientes para resistirlos las dimensiones que aquéllas tienen como consecuencia de las flexo-compresiones a las que deben hacer frente. En cuanto al aspecto de la deformabilidad del elemento estructural las deformaciones producidas por estos esfuerzos son despreciables.

#### 4.4. Verificación de la pila en ménsula, a largo plazo. Retraso o interrupción de las obras

Se plantean a continuación dos cuestiones referentes a la situación en que se encuentra una pila, una vez finalizada la construcción de los voladizos y antes de realizar la operación de "cierre en clave", cuando se retrasan o interrumpen las obras. Deseamos saber si un elemento en T, terminado y dejado exento durante un largo período de tiempo, podría, a causa de inexactitudes geométricas de ejecución, llegar a una situación de inestabilidad.

En primer lugar, se estudia la evolución en el tiempo, de la flecha que se tiene en la cabeza de la pila, a partir del momento en que finaliza la construcción del dintel.

Nos referimos a las flechas debidas exclusivamente al peso propio de la estructura en "T", admitiendo una pequeña diferencia de pesos entre los dos voladizos (0,98 y 1,03 G), véase la figura de la tabla 5, y a un error global de verticalidad de 2 mm/m en la ejecución del fuste.

Actuando con las resistencias características de los materiales y con los coeficientes de fluencia medios que se obtuvieron en 4.3, el programa DPIR nos suministra las flechas que se recogen en la tabla 5.

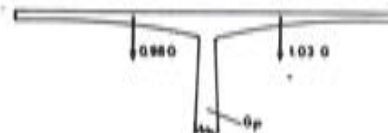
Es interesante señalar que ya a los seis meses de finalizada una "T", que puede ser un tiempo normal de espera hasta que los voladizos adyacentes estén en situación de realizar la

TABLA 5

#### EVOLUCION DE FLECHAS A LO LARGO DEL TIEMPO UNA VEZ FINALIZADA LA CONSTRUCCION DEL DINTEL (RETRASO O INTERRUPCION DE LAS OBRAS)

- Resistencias características de los materiales.
- Ponderación del peso propio de la pila  $\gamma = 1,00$ .
- Error global de verticalidad 2 mm/m.
- Valores característicos de las cargas en la cabeza de la pila
 

}	N = 3,978 t
	M = 2,950 mt
	e = 0,742 m



Instante	Deformaciones diferidas en la sección de empotramiento Valor de $\varphi_G$	Flecha en la cabeza de la pila (mm)
"t <sub>0</sub> " (final de la construcción del dintel)	0,46	404
t <sub>1</sub> = t <sub>0</sub> + 6 meses	0,72	432
t <sub>2</sub> = t <sub>0</sub> + 2 años	1,13	475
t <sub>∞</sub>	2	564

operación de "cierre en clave", podemos tener un corrimiento horizontal del dintel por efectos de segundo orden combinados con fluencia de 432 mm. Y, si en el elemento T adyacente los factores aleatorios han actuado en sentido contrario, podemos encontrarnos con una aproximación, no prevista, de unos 80 cms. entre ambos extremos. Ello, o una separación, supondría una reducción, o ampliación, muy importante en la longitud de la dovela de clave que, en puentes de esta envergadura y a la vista de estos resultados, deben ser concebidas y proyectadas contando con tales corrimientos posibles.

En segundo lugar, se verifica en condiciones de diseño (cargas ponderadas y resistencias de materiales minoradas), la situación en que se encuentra la pila bajo su peso propio y el del dintel, cuando hipotéticamente se interrumpen las obras durante un plazo de tiempo indefinido.

En la tabla 6 se recogen los principales datos y resultados de esta verificación, que conduce a una situación de estabilidad para la pila. En la misma, y al evaluar los factores reductores,  $\alpha$  y  $\beta$ , del coeficiente de fluencia de la pila a tiempo infinito en su sección de cabeza, de acuerdo con lo comentado en 4.3, resultan:

- $\alpha$  (cociente entre el axil característico de las cargas permanentes y axil de diseño de las cargas totales):  $\alpha = 1$ .
- $\beta$  (cociente entre el momento característico de primer orden de las cargas permanentes y el momento de diseño de primer orden de las cargas totales):  $\beta = 0,325$ .

Hemos considerado como valor del momento característico el que resulta de ponderar el peso propio de los voladizos con los coeficientes 0,98 y 1,03, que reflejan, de modo realista, su posible inexactitud.

De todo lo anterior, el coeficiente de fluencia reducido ha resultado:  $\varphi^* = 0,65$ .

TABLA 6

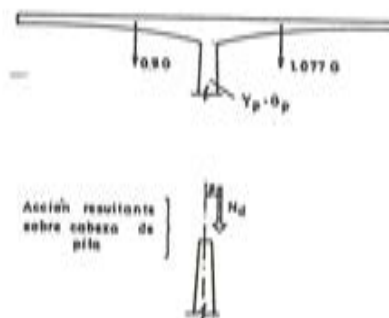
VERIFICACION DE LA PILA A LARGO PLAZO. INTERRUPCION DE LAS OBRAS

- HIPOTESIS

Actuación exclusiva del peso propio

- CASO

Ponderación de las cargas permanentes con  $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{fg} = \gamma_f/1,3 \quad \leftarrow \text{si desfavorables} \\ \gamma_{fg} = 0,90 \quad \rightarrow \text{si favorables} \end{array} \right.$



- Coeficientes de seguridad

Acciones:  $\gamma_f = 1,40$   
Materiales:  $\gamma_c = 1,5 \quad \gamma_s = 1,1$

- Error de verticalidad: 2 mm/m

Ponderación del peso propio de la pila $\gamma_p$	Acción resultante sobre cabeza de pila			Coeficiente fluencia reducido $\varphi^*$	Situación de la pila	Flacha en cabeza (mm)	Momentos flect. en la sección de empotramiento			Situación de E.L.U. por incremento de la excentricidad de la carga transmitida por el dintel				Indicadores de seguridad	
	$N_d(t)$	$M_d$ (mt)	$e$ (m)				$M_1$ (mt)	$M_t$ (mt)	$M_t/M_1$	$e_u$ (m)	$M_{1u}$ (mt)	$M_{tu}$ (mt)	$M_{tu}/M_{1u}$	$e_u/a$	$M_{tu}/M_t$
1,077	3,912	10,443	2,67	0,65	Estable	1,203	11,814	16,546	1,40	4,87	20,421	36,917	1,81	1,82	2,23
0,90	3,912	10,443	2,67	0,65	Estable	1,205	11,744	16,319	1,39	4,87	20,350	36,419	1,79	1,82	2,23

En la tabla 7 se verifica el caso de carga anterior combinado con la actuación de un viento transversal a la estructura, obteniendo nuevamente una situación de estabilidad para

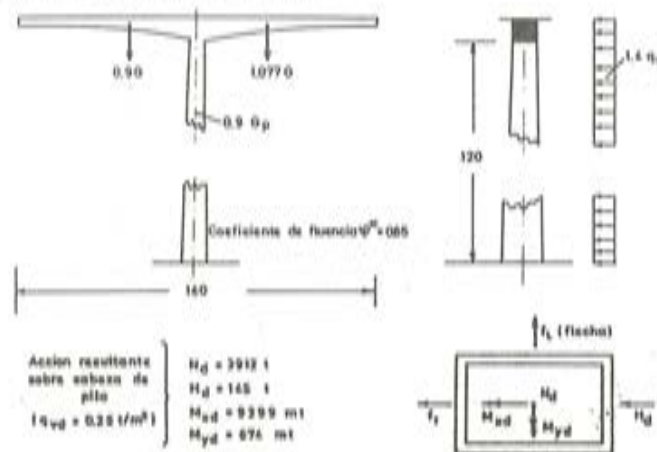
la pila, con unos índices complementarios de seguridad superiores a los que obtuvimos en las condiciones de construcción.

Iguals verificaciones se han llevado a cabo con las pilas más esbeltas de los prototipos de puente de luces 100 y 70 m, que más adelante se exponen. Los resultados, a este respecto, son idénticos a los de este caso.

Cabe así concluir que, pilas diseñadas para aceptar las acciones que engendran los voladizos en fase de construcción no alcanzarían estados límites de inestabilidad si, por causas cualesquiera, llegaran a quedar exentas en el espacio durante largos períodos de tiempo.

TABLA 7

VERIFICACION DE LA PILA A LARGO PLAZO. INTERRUPCION DE LAS OBRAS. EFECTO DE UN VIENTO TRANSVERSAL



HIPOTESIS: Actuación del peso propio y del viento.  
 ERROR DE VERTICALIDAD: 2 mm/m, en las dos direcciones principales.  
 Minoración por simultaneidad de acciones de diferente naturaleza: 0,90.

Situación de:	Flechas en cabeza		Situac. de la pila	Momentos flectores en la sección de base					
	Longit. $f_L$ (mm)	Transv. $f_T$ (mm)		Longitudinales $M_{x,d}$ (mt)			Transversales $M_{y,d}$ (mt)		
				$M_{1x}$	$M_{tx}$	$\frac{M_{tx}}{M_{1x}}$	$M_{1y}$	$M_{ty}$	$\frac{M_{ty}}{M_{1y}}$
$q_{vd} = 0,25 \text{ t/m}^2$	1.451	1.163	Estable	10.687	16.471	1,54	30.098	34.625	1,15
E.L.U. por increm. $q_v$ ( $q_{vu} = 0,4$ )	2.320	2.564	Inestable	10.687	20.597	1,93	47.377	58.692	1,24
Índices de seguridad:	$q_v/q_{vd} = 1,60$			$M_{tx,u}/M_{tx} = 1,25$			$M_{ty,u}/M_{ty} = 1,70$		

4.5. Aproximación a los esfuerzos de la pila en la estructura pórtico en servicio

Los esfuerzos de diseño a que va a estar sometida la pila en la situación de servicio del viaducto, dependerán de su rigidez real, así como de la del dintel.

Los esfuerzos debidos al peso propio de la estructura, que en el momento de cierre en clave del tablero someten a la pila fundamentalmente a axil y a un pequeño momento por desigualdades del peso de los voladizos, van a tender a aproximarse a tiempo infinito, por

fenómenos de adaptación plástica del hormigón, a los que existirían en la estructura pórtico que hubiera sido construída sobre cimbra.

Nosotros, quedando del lado de la seguridad en lo que a la pila respecta, aceptaremos, al no constituir este aspecto parte del núcleo de este trabajo, que dichos esfuerzos de peso propio evolucionan hasta coincidir con los correspondientes al pórtico ejecutado sobre cimbra.

Por otro lado, los esfuerzos debidos a la carga permanente de superestructura, a las sobrecargas y a las deformaciones impuestas, son los que se originan en la estructura con esquema pórtico.

La obtención de dichos esfuerzos de diseño, requiere la determinación de las reacciones hiperestáticas de la estructura, lo cual va ligado a una correcta evaluación de la deformabilidad de la misma. Esto exige realizar un análisis del dintel y de las pilas que tenga presente el comportamiento no lineal de sus materiales constituyentes y la no linealidad geométrica en aquéllas, aunque en la estructura pórtico sus efectos de segundo orden (funcionando como piezas empotradas, rígidamente en la cimentación y elásticamente en el dintel) son mucho menos importantes que en la fase de construcción del tablero (en que constituyen importantes ménsulas).

Una aproximación a los esfuerzos reales que van a soportar las pilas durante la época de servicio del viaducto, y que nos suministra un índice de la validez de las dimensiones y armaduras elegidas para que aquéllas verificasen satisfactoriamente la fase constructiva de avance en voladizo del tablero, nos lo proporciona el análisis lineal de la estructura pórtico, adoptando para las rigideces del dintel y de las pilas las correspondientes a sus secciones íntegras (valores que estarán por encima de los reales, habida cuenta de la fisuración que tendrán ciertas zonas de dichos elementos por actuación de las cargas mayoradas y considerando las resistencias de sus materiales constituyentes minoradas).

En la figura 14 puede verse la discretización de la estructura pórtico, a efectos de su análisis lineal mediante un programa ordinario de estructura compuesta por barras rectas.

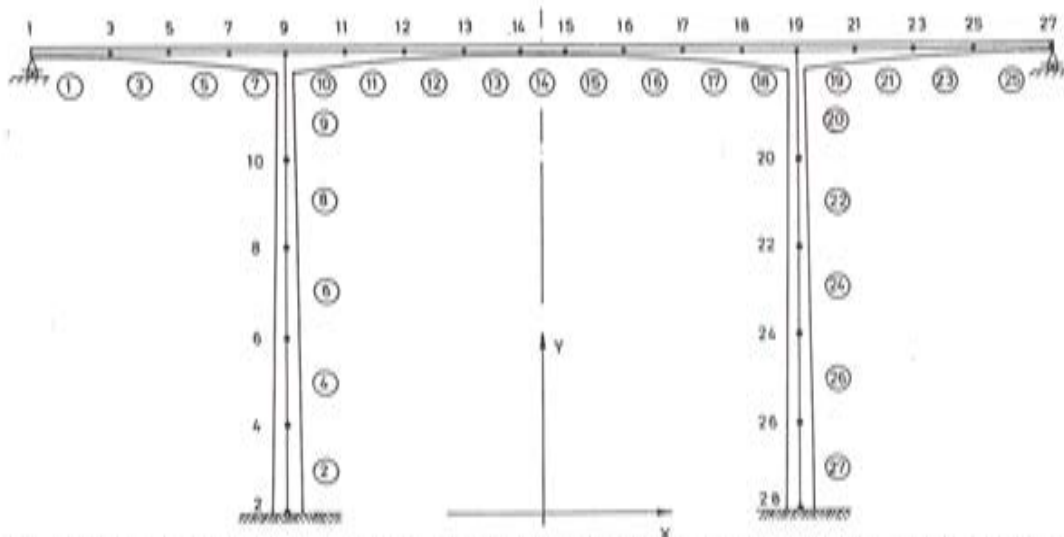


Fig. 14. Discretización del viaducto definido en la figura 5 para su análisis elástico con el programa RETPLAN.

La hipótesis de carga más desfavorable para la pila en situación de servicio se produce para el caso de actuación mayorada ( $\gamma_f = 1,50$ ) de las cargas del peso propio, superestructura, sobrecarga uniforme repartida en el vano central del viaducto, actuación del "carro de 60 t" al 40 por 100 de luz de dicho vano (junto a la pila en estudio) y acción del frenado.

En la figura 15 b, se representan los esfuerzos que solicitan a la pila en este caso. Se recogen también los flectores máximos que soporta esta pila con la distribución de armaduras elegida en 4.3 (fig. 11) para los axiles que actúan a lo largo de la misma.

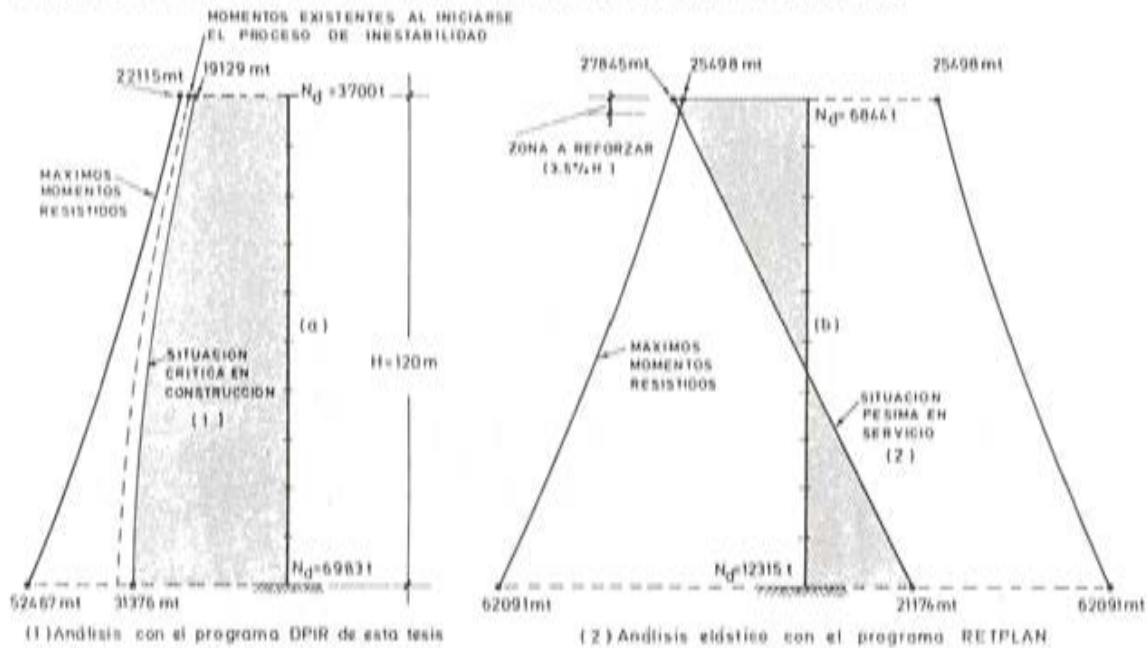


Fig. 15. Comparación entre los momentos flectores de diseño y resistentes por la pila, en las dos situaciones críticas para ésta: durante la fase de construcción del dintel (a) y durante la fase de servicio de la estructura pórtico (b).

En la mencionada figura puede observarse cómo una pila, dimensionada para aceptar adecuadamente las hipótesis de carga crítica durante el proceso constructivo del dintel, se encuentra en servicio muy sobrada desde el punto de vista resistente en toda su altura, excepto en una pequeña zona junto a su cabeza, extendida en una altura del orden del 3,5 por 100 de su altura total, la cual requiere un pequeño refuerzo de armadura respecto a la que se precisaría por sólo condiciones de construcción.

Aún sin tal refuerzo, esta zona de empotramiento de la pila en el dintel podría resistir en servicio gracias a ligeras redistribuciones de esfuerzos. Recordemos, además, que las flecciones del peso propio serán inferiores en la realidad a las que hemos considerado.

Hay que señalar que la segunda solución estudiada para esta pila de 120 metros de altura (4.3.2), menos rígida que la solución adoptada y desechada en relación a ésta, por consideraciones fundamentalmente económicas, se ha procesado igualmente con RETPLAN, obteniendo para la pila en situación de servicio menores esfuerzos que los reflejados en la figura 15 b. Esta solución de pila más flexible no requiere refuerzo alguno en servicio, siendo suficiente su armado inicial, pero dada la corta zona en que la pila más rígida requiere (teóricamente) algún refuerzo, se llega a la conclusión de que este último diseño sigue siendo claramente preferible.

De los esfuerzos que proporciona RETPLAN para la pila elegida deducimos, a partir de los diagramas momento-curvatura, que el 22 por 100 de su altura junto a la zona de cabeza, va a sufrir fisuración.

Se ha evaluado el incremento de momento flector de segundo orden que se tiene en la pila en la fase de servicio a partir de los axiles y corrimientos que proporciona RETPLAN, obteniéndose los máximos valores en secciones situados entre el 60 y el 80 por 100 de su altura, sin que dichos esfuerzos alcancen el 5 por 100 del momento de primer orden. Esto confirma la menor importancia del efecto de esbeltez de la pila en fase de servicio, como ya habíamos anunciado (recuérdese que en la fase constructiva se tuvieron efectos de segundo orden que superaban en la sección de base el 50 por 100 del valor del momento de primer orden) y cómo, aún contando con estos efectos de segundo orden, nos encontraremos lejos de los máximos momentos que han sido resistidos por la pila en la fase de construcción (fig. 15 b).

El sumando que más influye en la ley de momentos de diseño representada en la figura 15 (b) es el efecto del peso propio del puente, que supone un 62 por 100 del momento que tenemos en la sección de cabeza y un 60 por 100 del existente en el empotramiento en cimentación.

Respecto a la ley de flectores que origina en la pila la deformación impuesta que sufre el dintel, debe señalarse que es de signo contrario a la que produce el peso propio del puente.

Se ha evaluado la situación pésima para la pila, de momentos flectores de signo contrario a los que aparecen en la figura 15 b, que son originados por un acortamiento del dintel de 0,5 mm/m, por la actuación de la sobrecarga repartida en todo el primer vano lateral, con el carro en la posición más desfavorable de dicho vano y la fuerza de frenado, como cargas que dan momentos del signo deseado. Y, como momento compensador, solamente se ha considerado el de la superestructura, suponiendo que nos encontramos en la fase inicial de la vida de servicio de la estructura pórtico y que el peso propio de ésta, al no haberse aún desarrollado la adaptación plástica, apenas colabora a contrarrestar los otros momentos.

También esta hipótesis de carga conduce a esfuerzos de diseño que son perfectamente resistidos por la pila.

En la figura 15 a, se comparan también los flectores de diseño que se tienen en la pila elegida durante la construcción del dintel y en la situación crítica de caída de un carro de avance, caso de carga 2.3 (véase tabla 1), en relación a los máximos momentos resistidos para los axiles actuantes, observándose lo ajustada que se encuentra la pila en su zona de cabeza. La zona de la base se encuentra más lejos del estado límite último de agotamiento resistente, pero sus dimensiones y armaduras no pueden reducirse, pues resultan estrictos para rigidizar la pila frente al estado límite último de inestabilidad. Cabe recordar que tal estado se alcanza con sólo un incremento de un 4 por 100 en la excentricidad de la carga transmitida por el dintel (tabla 3), representando con línea discontinua en la figura 15 a la ley de flectores existentes en el instante en que se produce la inestabilidad de la pila.

#### 4.6. Diseño ajustado de diferentes pilas para varias luces del dintel

De acuerdo con los objetivos señalados al comienzo de este apartado, se proyectan a continuación un conjunto de ocho pilas más y de diferentes secciones y alturas, pertenecientes a tres dinteles tipo, que cubren el campo de luces normales de aplicación del procedimiento constructivo de avance en voladizo. Los resultados del estudio se ofrecen en forma tabulada, de modo que sirvan de ayuda y orientación en el encaje de este tipo de pilas.

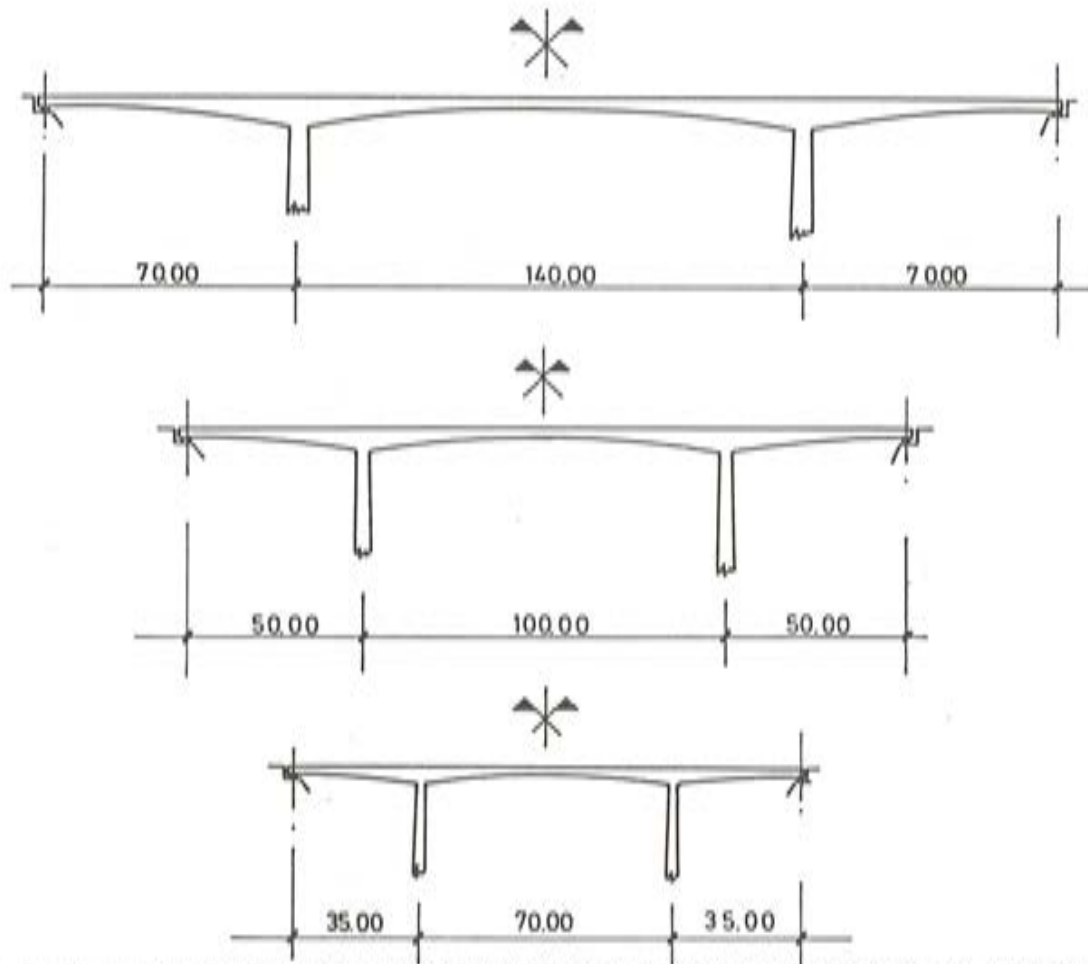


Fig. 16. Alzados longitudinales de los tres dinteles considerados, con vanos principales de 140, 100 y 70 m.

El esquema estructural elegido es el de pórtico simétrico de tres vanos, habiendo tomado para la luz del vano central los valores de 140, 100 y 70 m (fig. 16). La geometría detallada de los dos nuevos dinteles considerados (100 y 70 m) y los esfuerzos de diseño pésimos que se tienen en la cabeza de la pila que los estabiliza durante su proceso constructivo, en los diferentes casos de carga que se verifican en éste, pueden consultarse en (17).

El estudio que se realiza en cada pila sigue los criterios marcados en la ya diseñada, de 120 m de altura, y perteneciente al viaducto con luz principal de 140 m, habiéndose verificado para este mismo dintel otras dos alturas de pila: Una de 80 m con sección variable y otra de 40 m con área de hormigón constante.

En el dintel de luz principal igual a 100 metros, se estudian dos pilas de sección variable con alturas de 90 y 40 m, y esta última, además, con la variante de sección constante.

Finalmente, en el dintel con vano central de 70 m, verificamos una pila de 60 m de altura, con sección tanto variable como constante, y otra de 30 metros de área constante.

#### 4.6.1. Predimensionamiento y definición de las pilas analizadas

En la figura 17 se resumen los criterios que se han seguido para establecer las dimensiones y armaduras de las diferentes pilas estudiadas.

- El canto de la pila en la zona de cabeza es función de la luz del dintel que debe estabilizar durante la fase constructiva de éste. La relación  $L/25$  a  $L/30$ , siendo  $L$  la luz del vano, conduce a buenos resultados, como veremos a continuación.

Se ha visto, por otro lado, para la pila de 120 m de altura, cómo un intento de disminuir el canto por debajo de los valores anteriores condujo a una solución más costosa.

- El ancho de la pila en su coronación se hace coincidir con el de la sección cajón del dintel.
- El espesor de la pared del cajón que constituye la pila, se mantiene constante a lo largo de su altura, y se determina de modo que, para el caso de carga más desfavorable durante el proceso constructivo (que como se ha visto corresponde a la hipótesis de caída de un carro de avance y diferente ponderación del peso propio de los voladizos), se tengan momentos específicos:  $\mu = M_d / \Lambda_c \cdot f_{cd} \cdot h$ , en la sección de cabeza del orden de 0,20.

Obtenidas las dimensiones de esta sección con los anteriores supuestos, tenemos que el momento específico  $\mu_{2-3}$  correspondiente al plano último de deformaciones que separa los dominios 2 y 3 de rotura (planos con curvatura máxima) toma en el caso de los dinteles estudiados los siguientes valores:

$$\begin{aligned} L = 140 \text{ m} &\rightarrow \mu_{2,3} = 0,26 \\ L = 100 \text{ m} &\rightarrow \mu_{2,3} = 0,27 \\ L = 70 \text{ m} &\rightarrow \mu_{2,3} = 0,25 \end{aligned}$$

Se observa que en los casos normales tenemos secciones de coronación de pilas con un momento específico  $\mu_{2-3}$  de valor parecido.

Sabemos que el plano de deformaciones últimas a que nos estamos refiriendo corresponde a roturas con importantes deformaciones de aviso, o sea, con comportamiento dúctil de la sección. Por otro lado, se encuentra próximo a los planos últimos en que la sección responde con flector máximo, dominio 3 (fig. 10).

Dimensionando, pues, la sección de cabeza de las pilas con los criterios anteriores, en el caso de carga que resulta crítico durante el proceso constructivo del tablero nos encontramos por debajo de la zona en que aquélla responde con el máximo momento (fig. 10).

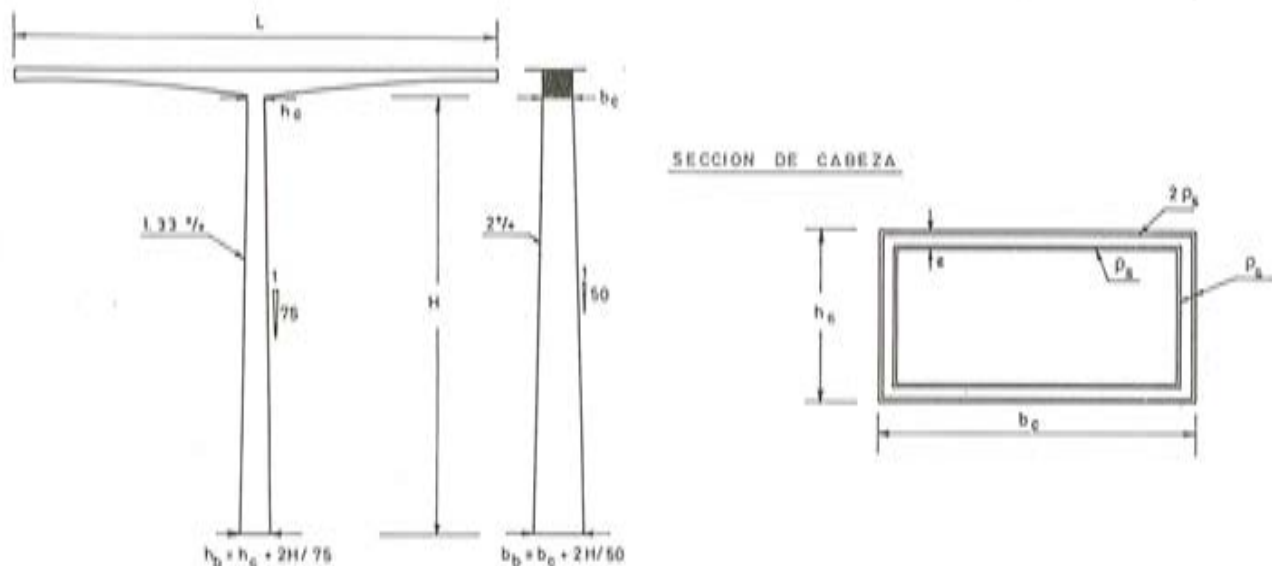
Ello supone que, en la situación de servicio, cuando aparezca un incremento de axil dispondremos de mayor momento respuesta en la sección, lo que es claramente favorable para el fenómeno, ya expuesto de posible necesidad de reforzar la armadura de la cabeza de la pila en las condiciones de servicio.

- El criterio de distribución de la armadura en la sección (fig. 17), es el descrito al desarrollar el estudio de la pila de 120 m de altura (reflejado en la figura 10).

El área de acero necesaria en la sección de coronación se obtiene de modo que ésta verifique el estado límite último de agotamiento resistente en el caso de carga crítica del proceso constructivo.

Este caso de carga nos define, también, la cantidad de acero precisa a lo largo de la altura de la pila. Tanteamos, para ello, diferentes distribuciones de acero con área constante o con variación lineal creciente hacia la base, hasta determinar aquélla que conduce a condiciones estrictas de estabilidad.

- Por último, el criterio que se adopta para el taluzado de las pilas se justificará en la parte final del apartado, al referirnos a los materiales utilizados en aquéllas.



#### CRITERIOS DE PREDIMENSIONAMIENTO DE LAS PILAS ANALIZADAS

- $h_e = L/25$  a  $L/30$ .
- $b_c$  = Ancho de la sección cajón del dintel.
- $e$  = Espesor de pared. Se determina de modo que, frente al máximo momento flector durante el proceso constructivo (caída de un carro de avance) se tenga:
 
$$\mu \approx 0,20 \quad (\mu = M_d / \Lambda_e \cdot h_e \cdot f_{cd})$$
- $\rho_s$  = Densidad de armadura ( $\text{cm}^2/\text{ml}$ ). Se obtiene de modo que el caso de carga anterior, verifique el E.L.U. de agotamiento resistente.
- Taluzado de las caras de la pila
 

$H > 50$	{	1/75 en alzado longitudinal
		1/50 en alzado transversal
$H \leq 50 \rightarrow 0$		(pila con sección constante)
- Distribución de las armaduras a lo largo de la altura de la pila:  $\Lambda_s$  constante o con variación lineal creciente hacia la base.

Fig. 17.

En la tabla 8 aparece la definición geométrica y de armaduras de las diferentes pilas que se analizan, de acuerdo con los criterios de dimensionamiento comentados.

Al definir las armaduras de las secciones de cabeza y base de la pila, se indica el área total de acero dispuesta en cada una, la cuantía mecánica  $\omega$  y las barras que son equivalentes a la armadura precisa.

Se dan, en primer término, los redondos que es necesario disponer junto a las caras principales de la sección (que delimitan el canto de la misma según la flexión longitudinal del viaducto) y, en segundo término, los redondos que van junto al resto de las caras (véanse figuras 10 y 17).

Esta equivalencia en barras solo pretende ofrecer un índice físico de la densidad de la armadura precisa en estas pilas, sin intentar dar la solución real que debe adoptarse y sin entrar en el tema de empalmes de armadura.

Se debe añadir, finalmente, que los materiales considerados en todas estas pilas, tienen las siguientes resistencias y coeficientes de seguridad:

Hormigón:  $f_{ck} = 330 \text{ Kp/cm}^2$  ,  $\gamma_c = 1,50$

Acero:  $f_{yk} = 4.200 \text{ Kp/cm}^2$  .  $\gamma_s = 1,10$  (dureza natural).

Se ha contado, además, con la reducción del 10 por 100 en la resistencia del hormigón por llenado vertical.

TABLA 8

DEFINICION GEOMETRICA Y DE ARMADURAS DE LAS DIFERENTES PILAS ANALIZADAS

Luz princip. del dintel (m)	Altura de pilas (m)	Sección a lo largo de la altura	Dimensiones (m) exteriores de la sección de:		Espesor const. de pared (m)	Area (m <sup>2</sup> ) de la sección de:		Armadura total en la sección de:					
			Cabeza h <sub>c</sub> x b <sub>c</sub>	Base h <sub>b</sub> x b <sub>b</sub>		Cabeza	Base	Cabeza			Base		
								A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	ω	Barras equival.	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	ω	Barras equival.
140	120	Variab.	5 x 7	8 x 12	0,40	8,96	15,36	1.574	0,34	φ 32 a 15 φ 32 a 30	1.830	0,23	φ 32 a 21 φ 32 a 42
	80	Variab.	5 x 7	7 x 10	0,40	8,96	12,96	1.574	0,34	"	1.574	0,23	φ 32 a 21 φ 32 a 42
	40	Const.	5 x 7	5 x 7	0,40	8,96	8,96	1.574	0,34	"	1.858	0,40	φ 32 a 12,50 φ 32 a 25
100	90	Variab.	3,5x6,5	6 x 10	0,35	6,51	10,71	1.124	0,33	φ 25 a 11 φ 25 a 22	1.124	0,20	φ 25 a 17 φ 25 a 34
	40	Variab.	3,5x6,5	4,5x8	0,35	6,51	8,26	1.124	0,33	"	1.124	0,26	φ 25 a 13 φ 25 a 26
	40	Const.	3,5x6,5	3,5x6,5	0,35	6,51	6,51	1.124	0,33	"	1.582	0,46	φ 25 a 7,5 φ 25 a 15
70	60	Variab.	2,5 x 5	4 x 7,5	0,30	4,14	6,54	598	0,28	φ 25 a 15 φ 25 a 30	598	0,17	φ 25 a 23 φ 25 a 46
	60	Const.	2,5 x 5	2,5 x 5	0,30	4,14	4,14	598	0,28	"	1.638	0,76	φ 32 a 9 φ 32 a 18
	30	Const.	2,5 x 5	2,5 x 5	0,30	4,14	4,14	598	0,28	"	974	0,45	φ 25 a 9 φ 25 a 18

4.6.2. Valoración de los efectos de segundo orden e índices de seguridad en las diferentes pilas analizadas

Para los casos de carga críticos del proceso constructivo del dintel, y siguiendo los pasos dados en 4.3 para la pila de 120 m de altura, se han procesado las diferentes pilas definidas anteriormente, con los programas DPIP y DPES descritos en el n° 149 de esta Revista.

En el Apéndice Núm. 3 de (17) se recogen los resultados que se tienen en cada pila analizada, resumiendo en las tablas 9 y 10 los valores más interesantes.

**TABLA 9**  
**VALORACION DEL EFECTO DE SEGUNDO ORDEN EN LA SECCION DE BASE DE LAS**  
**DIFERENTES PILAS ANALIZADAS**

Relación entre el momento total y el momento de primer orden en el caso de carga más desfavorable de cada una de las hipótesis verificadas en construcción

Luz principal del dintel (m)	Altura de pilas (m)	SITUACION DE:				Indice de seguridad $e_u/e_d$	
		Construcción ( $e_d$ )		E.L.U. por incremento de la excentricidad de la carga transmitida por el dintel ( $e_u$ )			
		Hipótesis de:		Hipótesis de:		Hipótesis de:	
		Dovela en desequilib.	Caída de un carro	Dovela en desequilib.	Caída de un carro	Dovela en desequilib.	Caída de un carro
140	120 Secc. Varía	1,56	1,54	1,71	1,64	1,10	1,04
	80 Secc. Varía	1,27	1,27	1,37	1,34	1,18	1,10
	40 Secc. Cte.	1,11	1,11	1,17	1,17	1,16	1,07
100	90 Secc. Varía	1,44	1,49	1,57	1,52	1,16	1,02
	40 Secc. Varía	1,12	1,12	1,17	1,16	1,23	1,06
	40 Secc. Cte.	1,17	1,18	1,23	1,22	1,17	1,02
70	60 Secc. Varía	1,34	1,35	1,42	1,40	1,15	1,03
	60 Secc. Cte.	1,63	1,60	1,72	1,66	1,14	1,04
	30 Secc. Cte.	1,14	1,13	1,16	1,14	1,18	1,06

En la tabla 9 y para la flexión longitudinal de la pila (debida a cargas contenidas en el plano del viaducto), se valora la importancia del efecto de segundo orden en las secciones de empotramiento en cimentación de las diferentes pilas, suministrando la relación entre el momento total y el momento de primer orden en las mismas. De ella podemos destacar:

- Queda claro cómo, a medida que disminuye la altura de la pila, el efecto de su esbeltez es menos importante,
- Este efecto, en las pilas más esbeltas, supone incrementos de momento que pueden superar el 50 por 100 del flector de primer orden.

- En el caso de carga crítica de caída de un carro de avance, el índice de seguridad complementaria que tenemos respecto a un incremento de la excentricidad de la carga transmitida por el dintel,  $e_u/e_d$ , se aproxima a la unidad, de acuerdo con lo establecido en 4.3, donde se explicó que la distribución de armadura de la pila se obtenía buscando un ajuste estricto a este caso de carga.
- En las pilas de 40 y 60 m de altura, en que se han verificado dos soluciones de sección de hormigón, constante o variable, se observa cómo mejora de forma notable el comportamiento de la pila con sección variable.

En la pila de 40 metros, se tienen incrementos del efecto de segundo orden del 5 por 100, al pasar de la sección variable a constante, subiendo tal incremento del momento de segundo orden hasta un 30 por 100 en la pila de 60 metros de altura.

En la tabla 10 se valora el efecto de segundo orden en las dos direcciones principales de la sección de base de las diferentes pilas, para el caso de carga en que se encuentra en desequilibrio la última dovela de un voladizo y actúa un viento transversal al viaducto. De su observación podemos destacar que:

- Vuelven a ponerse de manifiesto las conclusiones obtenidas de la tabla 9.
- El efecto de segundo orden en cuanto a flexión transversal de la pila tiene bastante menos importancia que en la flexión longitudinal.

El incremento de momento transversal por efecto de la esbeltez es del orden del 5 por 100 del de primer orden en pilas de hasta 50 m, y del 10 por 100 en pilas de hasta 100 metros.

- El índice complementario de seguridad que se tiene en las pilas, respecto a la situación de estado límite último por incremento de la presión ejercida por el viento, sobre el valor de diseño que proporciona la "Instrucción relativa a las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carreteras", supera o iguala el valor de 2 en ocho de las nueve pilas verificadas y adopta el valor de 1,40 en la pila de 120 m de altura, en la que los efectos de segundo orden en el plano transversal al puente alcanzan magnitudes del 15 al 20 por 100 de las correspondientes a las flexiones de primer orden. Todo lo cual es índice de que, para alturas de pila semejantes y superiores a 120 m, la acción transversal del viento (con sus efectos estáticos y dinámicos) va a resultar determinante en su dimensionamiento.

Por el contrario, en pilas de menor altura el índice de seguridad complementario asciende a un mínimo de 2. En un proyecto real, cabría plantearse aquí una reducción de la armadura en las caras transversales, pero nosotros buscando no introducir más parámetros de variación, continuamos con el esquema de distribución de barras dentro de la sección antes expuesto.

#### 4.6.3. Relación de materiales utilizados y costes en las diferentes pilas analizadas

En la tabla 11 se recogen los materiales estructurales en pilas y dintel que son necesarios por  $m^2$  de éste, en los diversos viaductos considerados.

En primer término, se reflejan los valores que se utilizan normalmente en estos tableros de acuerdo con la información obtenida de las publicaciones de la Asociación Técnica Española del Pretensado titulados "Hormigón Pretensado: Realizaciones españolas".

Se ofrecen a continuación, también por  $m^2$  de dintel, los materiales necesarios en las pilas dimensionadas según los criterios proporcionados en la figura 17 de este Artículo, dándose finalmente la relación entre el coste total de la armadura longitudinal y el hormigón utilizado en éstas (se ha supuesto que el coste de una tonelada de acero corrugado para armaduras pasivas, es 10 veces el coste de un  $m^3$  de hormigón).

TABLA 10

EFFECTO DE UN VIENTO TRANSVERSAL  
 VALORACION DEL EFECTO DE SEGUNDO ORDEN EN LAS DOS DIRECCIONES  
 PRINCIPALES DE LA SECCION DE BASE DE LAS DIFERENTES PILAS ANALIZADAS  
 Relación entre los momentos totales y los de primer orden, en el caso de carga más desfavorable de la hipótesis de construcción en que existe la última dovela de un voladizo en desequilibrio y actúa simultáneamente el viento

Luz principal del dintel (m)	Altura de pilas (m)	Sección a lo largo de la altura	SITUACION DE:				
			Construcción ( $q_{vd} = 250 \text{ kp/m}^2$ )		E.L.U. por incremento de presión ejercida por el viento ( $q_{vu}$ )		
			Momentos flectores		Momentos flectores		Indice de seguridad $q_{vu}/q_{vd}$
			Longitud. $M_{TX}/M_{IX}$	Transversal $M_{TY}/M_{IY}$	Longitud. $M_{TXU}/M_{IXU}$	Transversal $M_{TYU}/M_{IYU}$	
140	120	Variable	1,61	1,16	1,76	1,21	1,40
	80	Variable	1,27	1,10	1,34	1,12	2,00
	40	Constan.	1,11	1,05	1,13	1,05	2,40
100	90	Variable	1,45	1,09	1,65	1,15	2,00
	40	Variable	1,11	1,03	1,12	1,03	4,20
	40	Constan.	1,16	1,04	1,21	1,04	3,20
70	60	Variable	1,33	1,06	1,50	1,10	2,60
	60	Constan.	1,60	1,10	1,76	1,13	2,20
	30	Constan.	1,13	1,03	1,18	1,04	4,40

De los datos que aparecen en la tabla 11 podemos destacar:

- Para el dintel de 100 m de vano central y en las dos soluciones dadas para la pila de 40 m de altura, se tiene que el incremento de coste en materiales de la solución constante respecto a la de sección variable es un 6 por 100.

Parece claro que en este caso, y desde un punto de vista meramente económico, es más interesante la solución de sección constante, dado que el incremento de coste que supone construir la pila de sección variable va a ser probablemente superior al ahorro que se tiene en materiales.

Por otro lado, para estas alturas de pila hemos visto en las tablas 9 y 10 que el efecto de segundo orden no es muy importante.

- Para las dos soluciones estudiadas en la pila de 60 metros de altura, tenemos ahora que el incremento de coste de los materiales en la pila de sección constante respecto a aquella en que varía, es de un 30 por 100.

Lo anterior, junto al hecho de que en la pila de sección constante los efectos de segundo orden son bastante más importantes (un 30 por 100 superiores) que en el caso de sección variable (o sea, la pila de sección constante es notablemente más deformable y produce co-

rimientos en cabeza muy superiores a los de la de sección creciente hacia la base), nos inclinamos en este caso a adoptar esta última solución. Además del mejor comportamiento de la pila, parece claro que el incremento de coste que supone la sección variable puede compensarse con el ahorro que se tiene en materiales.

De los dos puntos anteriores se deduce la recomendación que aparece en la figura 17 respecto a este tema: La altura de 50 metros es un valor a partir del cual parece conveniente utilizar sección de pila variable. Con independencia de lo anterior, está la consideración estética de que pilas de cierta altura resultan más armoniosas con canto ligeramente decreciente desde base a coronación.

TABLA 11

VALORACION DE MATERIALES UTILIZADOS Y COSTES EN LAS DIFERENTES PILAS ANALIZADAS

Luz principal del dintel (m)	Materiales normalmente utilizados en estos tableros, por m <sup>2</sup> :			Altura de pilas (m)	Materiales utilizados en pilas, por m <sup>2</sup> de tablero		Relación de coste: Armad. longit. <hr/> Hormigón (1)
	M <sup>3</sup> de hormigón	Kgs. de acero pasivo	Kgs. de acero activo		M <sup>3</sup> de hormigón	Kgs. de acero pasivo	
140	0,80	90	40	120 Secc. Varía	0,87	95	1,10
				80 Secc. Varía	0,52	59	1,13
				40 Secc. Cte.	0,21	32	1,51
100	0,70	85	35	90 Secc. Varía	0,67	69	1,03
				40(2) Secc. Varía	0,26	31	1,19
				40(2) Secc. Cte.	0,23	37	1,63
70	0,60	80	30	60(2) Secc. Varía	0,48	42	0,88
				60(2) Secc. Cte.	0,37	80	2,14
				30 Secc. Cte.	0,19	28	1,49

(1) Se ha supuesto que el coste de una tonelada de acero corrugado para armaduras pasivas, es 10 veces el coste de un m<sup>3</sup> de hormigón.

(2) Relación entre el costo total de los materiales, hormigón y acero, en las soluciones de pila con sección constante y variable.

}	Pila de 40 m → 1,06
}	Pila de 60 m → 1,30

- En la tabla 11 se observa que en las cuatro "pilas altas" consideradas, con alturas superiores a 50 m, y de sección variable, los criterios de dimensionamiento de la figura 17 conducen a soluciones en que el costo de la armadura y del hormigón están equilibrados. Aspecto que, como ya se comentó, puede considerarse como un índice de solución económica y proporcionada.
- Para la pila de 90 metros, el consumo de materiales en ésta se encuentra próximo a los valores utilizados en el dintel.

En la pila de mayor altura diseñada (120 m) el consumo de materiales, hormigón y acero pasivo, por m<sup>2</sup> de tablero, supera los valores utilizados en la construcción del dintel. Ello justifica la importancia de un estudio a fondo, como se ha intentado en este trabajo, del elemento pila, y pone de manifiesto el error que subyace a la idea, mantenida por muchos ingenieros, de que el esfuerzo de proyecto que necesitan y merecen las pilas es claramente inferior al requerido por los dinteles.

Queda claro, pues, que en este tipo de "pilas altas" (y sin necesidad de insistir más en la primordial función resistente de las mismas) el consumo de materiales es un factor económico de primer orden, que influye de forma notable en el coste del m<sup>2</sup> de puente terminado.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Indicadas en "Hormigón y Acero n<sup>o</sup> 148".

\* \* \*

## Nueva Publicación

Coincidiendo con el desarrollo de la "Campaña de seguridad en la construcción", que se realiza con el objeto de mejorar las condiciones de trabajo en este Sector tan especialmente castigado por los accidentes, el Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo, del Ministerio de Trabajo y Seguridad Social, ha editado una publicación titulada "Redes de protección y sus sistemas de fijación", que es el resultado de las tareas del Grupo de Trabajo n<sup>o</sup> 7 de la Asociación Internacional de la Seguridad Social (AISS).

Es evidente que las caídas de altura y la caída de objetos, producen cada año un elevado número de accidentes laborales graves e incluso mortales, que pueden evitarse en un importante porcentaje con el uso generalizado de las redes de protección.

En el texto que se comenta, se recogen unas normas relativas a dichas redes y sus sistemas de fijación, para su correcto empleo en las obras de construcción, normas que han sido redactadas a partir de la documentación existente sobre la materia, las experiencias de utilización aportadas por los participantes y las pruebas realizadas en relación con las mismas por diferentes Entidades de los países representados en el citado Grupo de Trabajo n<sup>o</sup> 7.

Con el fin de que esta publicación pueda ser de utilidad práctica inmediata para la prevención de los riesgos en las obras, se han incluido una serie de fichas técnicas de utilización de las redes y sus sistemas de fijación, para algunos tipos de obras, marcando así una pauta o modelo para la elaboración de nuevas fichas de utilización de redes relacionadas con otros trabajos de la construcción.

Los interesados en esta publicación, de 94 páginas, numerosas figuras y ocho fichas técnicas, deberán ponerse en contacto con D. Fernando Monar, C/ Torrelaguna, 73, 28027 Madrid, Tfno.: 403 70 00.

## Teoría y práctica, convención e historia. Los esfuerzos hiperestáticos de pretensado(\*)

Juan Murcia Vela,  
Dr. Ingeniero de Caminos  
Lcdo. Ciencias Matemáticas  
Lcdo. Geografía e Historia

Es bien conocida la historia del hormigón pretensado, resultando verdaderamente atractivo y, más aún, apasionante, cómo una técnica que en sus orígenes se plantea para superar unos problemas derivados de la del hormigón armado se resuelve más tarde en logros sorprendentes en cuanto a la envergadura y los tipos de estructuras y los procedimientos constructivos que la propia técnica del pretensado consigue.

Su proceso histórico se nutre de intuición, práctica y teoría. Si nos referimos a la técnica del pretensado en general, ya se sabe lo antiguas que son su intuición y su práctica, no teorizadas entonces.

En el *origen* del hormigón pretensado, al que líneas antes nos referíamos, se combinan también esta intuición y esta práctica, por cierto fallida esta última, a partir de *los mismos materiales del hormigón armado* (lo cual fue, en principio, su fracaso pero a la larga fue su gran victoria, puesto que se puede pretensar hormigón de formas diferentes que mediante armaduras de acero).

Y esas intuición y práctica primigenias se tornan más adelante en una práctica y una teoría en relación dialéctica, pero donde la práctica suele ser el punto de partida. En ese camino existe un momento en que puede hablarse ya del paso de la práctica a la técnica del hormigón pretensado.

Dentro de todo este curioso, aunque no tan infrecuente, proceso es interesante examinar la teoría del análisis estructural del pretensado, lo que haremos a continuación en torno de los famosos *esfuerzos hiperestáticos de pretensado*. Nos ceñiremos al habitual pretensado mediante armaduras tesas o armaduras activas.

\* Conferencia pronunciada en el Instituto Eduardo Torroja el jueves 24 de mayo de 1984, organizada por la A.T.E.P. y en colaboración el I.E.T.c.c.

Comencemos por lo que puede llamarse *acción o acciones del pretensado*. En principio, es sencillo comprobar que consiste en un sistema de cargas sobre la estructura de sección neta de hormigón, compuesto por unas fuerzas  $P_a$  concentradas en los anclajes y unas repartidas  $p(x)$  aplicadas a lo largo del trazado de la armadura activa. Estas cargas no son conocidas de entrada, puesto que los únicos datos directos son las fuerzas en los anclajes activos (1) (2).

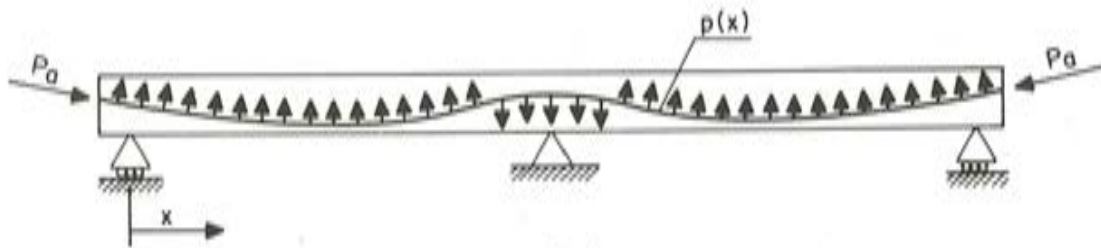


Fig. 1.

Este sistema tiene la propiedad de que es autoequilibrado. Para calcularlo se precisa establecer, en las coordenadas intrínsecas de la curva correspondiente al trazado, la relación entre la fuerza de pretensado  $P$  de la armadura y las componentes unitarias tangencial  $t$  y normal  $n$  de la fuerza repartida  $p$ .

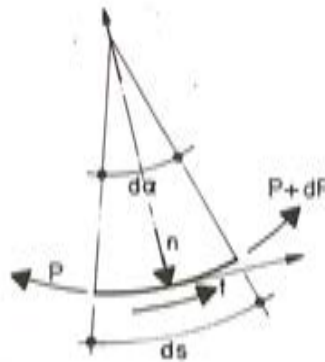


Fig. 2.

Si  $r$  es el radio de curvatura,  $(r = \frac{ds}{d\alpha})$

se tiene, por equilibrio:

$$t = -\frac{dP}{ds}$$

$$n = \frac{P}{r}$$

que, conjuntamente con la relación  $t = K \cdot n$  que expresa, en su caso, el rozamiento de la armadura activa contra las paredes de su conducto y una serie de correcciones posteriores (empíricas, como la consideración del fenómeno de la ondulación de la armadura; matemáticas, como la asimilación  $s = x$ , para los habituales trazados tendidos) conduce a las conocidas fórmulas de pérdidas por rozamiento que expresan  $P(x)$  en función de datos conocidos.

A partir de aquí se pueden calcular ya las cargas de pretensado de la siguiente forma:

- Derivar  $P \rightarrow t$
- Calcular  $r \rightarrow \frac{P}{r} = n$
- Componer  $t$  y  $r \rightarrow p$

Pasemos ahora a los *esfuerzos* producidos por el pretensado (1) (2).

En la estructura más sencilla que se concibe, una *pieza simple* como la de la figura 3, son

$$M = P.e. \cos \alpha$$

$$V = -P. \operatorname{sen} \alpha$$

$$N = -P. \cos \alpha$$

(con un convenio de signos en que la compresión  $P$  es positiva, con  $e$  negativa y  $\alpha$  positivo, tal como se muestran en la figura),

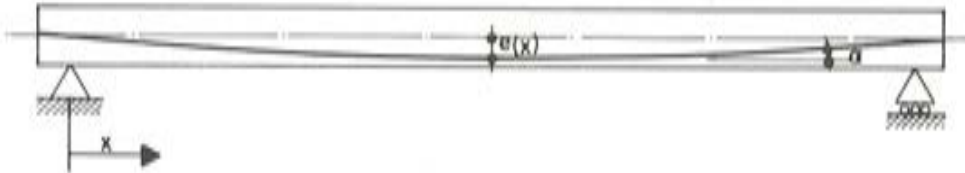


Fig. 3.

esfuerzos que se obtienen de forma inmediata, al ser la fuerza  $P$  la resultante de las cargas de pretensado referidas a la sección que se considere, con un cálculo incluso más directo que el de las propias cargas de pretensado según el procedimiento que se acaba de exponer. Cabe comentar aquí que como estas cargas se encuentran autoequilibradas no aparecen reacciones en los apoyos.

Se observa, por tanto, que para el pretensado, al contrario de lo que sucede para otras acciones, los esfuerzos se pueden obtener sin necesidad de conocer previamente el sistema de cargas, el cual por otro lado no se tiene a priori como dato. Pero, además, el cálculo de los primeros es incluso más sencillo y directo que el de estas últimas y, en consecuencia, hasta se diría, más elegante.

Aquí se encuentra ya, de entrada, una primera clave, en este caso teórica, de la importancia y del peso que se ha venido dando al concepto de *esfuerzo* en el análisis de estas estructuras pretensadas.

Es más, una manera sencilla, pero aproximada, de calcular las cargas de pretensado consiste en, una vez obtenida la ley de momentos  $M(x)$ , derivarla dos veces con lo que se obtiene la ley  $p(x)$  de fuerza repartida perpendicular al eje de la pieza; todo ello sin necesidad del cálculo de la ley de radios de curvatura del trazado de la armadura.

Al darse un paso más y considerar las *vigas continuas*, resulta bastante patente que los esfuerzos de pretensado no son ya, en general, los mismos de la viga simple ( $M = P.e. \cos \alpha$ ;  $V = -P. \operatorname{sen} \alpha$ ;  $N = -P. \cos \alpha$ ) puesto que existen ahora reacciones en los apoyos debidos al pretensado.

Aparece en ese momento el concepto de *esfuerzos hiperestáticos de pretensado* o, mejor dicho, un doble concepto de *isostáticos-hiperestáticos de pretensado*, quedando la siguiente *convención teórica*:

$$\begin{array}{l} \text{-- ESFUERZOS ISOSTATICOS DE PRETENSADO --} \\ \text{-- ESFUERZOS HIPERESTATICOS DE PRETENSADO --} \end{array} \rightarrow \begin{cases} M = P.e. \cos \alpha \\ V = -P. \operatorname{sen} \alpha \\ N = -P. \cos \alpha \end{cases} \text{ el resto}$$

Y esta convención, que refleja claramente una extrapolación de la situación para las vigas simples, es un hecho, a pesar de que quizá no haya sido, como tal, hecha explícita. Pero, estando perfectamente clara y definida, en particular en este su ámbito original de las vigas continuas, hace fortuna y, por decirlo así, se consagra por una serie de razones.

En efecto, en primer lugar hay que afirmar que resulta muy adecuada en el ámbito de las vigas continuas, ya que todas las posibles configuraciones isostáticas que se deducen de ellas son vigas simples y sus esfuerzos (isostáticos) son siempre los mismos, los de las ya bien conocidas expresiones, estando unívocamente determinados; de esto nace precisamente *lo nominal* (isostáticos, hiperestáticos) de la convención que, en estas estructuras, se ajusta *literalmente*. Para otra acción de cargas distinta del pretensado no es posible en general delimitar de una forma unívoca los esfuerzos isostáticos y los hiperestáticos.

Por otra parte, no hay que olvidar la situación destacada de los, ahora, isostáticos de pretensado cuyo cálculo es sencillo y no requiere, además, partir del sistema de cargas. Para otra acción distinta del pretensado el cálculo, partiendo de las cargas que son conocidas a priori, conduce a unos esfuerzos que son los totales sin más, sin desglose alguno.

Es de gran importancia en este punto hacer una referencia al contexto histórico. En la época de la aparición e implantación de la convención isostáticos-hiperestáticos, tiempos a los que nos venimos refiriendo, impera el cálculo de estructuras manual lo que, aparte de otras posibles consideraciones, asegura el éxito de planteamientos que se plasman en procesos de cálculo sencillos y "elegantes" cual, en lo que nos ocupa, es la vía isostáticos-hiperestáticos en perjuicio de la de cargas-esfuerzos totales. Pero también son tiempos de cálculo y dimensionamiento gráficos, especialmente este último para las estructuras de hormigón pretensado donde, en el contexto del cálculo clásico (lineal) de sección, tienen vigencia conceptos tales como los de centro y línea de presión tomados del cálculo de arcos; interesa, por tanto, mantener explícitos tanto el valor como la posición de la fuerza  $P$  sobre la sección, que es tanto como decir que interesa trabajar con esfuerzos y, en concreto, con los isostáticos de pretensado que corresponden a la situación en que la fuerza se aplica al nivel de la armadura activa.

Sin embargo, la consolidación de esta convención teórica se realiza de una forma un tanto absoluta, extrapolándose de hecho más allá del ámbito en el que aparece, sin mayor profundización teórica (significado de esfuerzo isostático e hiperestático en general; adecuación a estructuras lineales distintas de las vigas continuas y a pretensados en general; etc.). Esto, en definitiva, no es más que muestra de una situación más amplia consistente en que la teoría del análisis estructural del pretensado que se va desarrollando no queda totalmente inscrita dentro de la teoría general del análisis de estructuras; más bien constituye un apéndice, una teoría "ad hoc" en el mejor de los casos, cuando no una casuística (1).

Por ejemplo, si nos hacemos las siguientes preguntas:

¿Qué ocurre en lo que atañe a esta convención en otras estructuras hiperestáticas que no sean vigas continuas?

¿Qué ocurre al respecto en pretensados no ligados directamente a elementos o piezas de la estructura?,

y las referimos a un caso concreto muy simple, como el de la figura 4, obtenemos conclusiones interesantes.

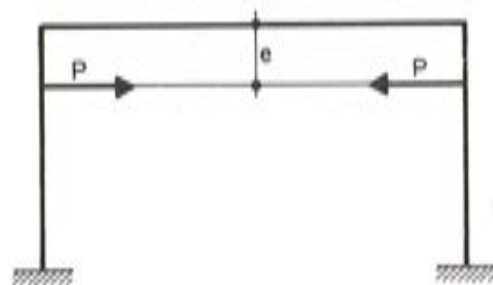


Fig. 4.

Según la estructura isostática que se tome a partir de la anterior se obtienen unos u otros esfuerzos, de forma que no siempre los esfuerzos isostáticos de la convención ( $M = P \cdot e \cdot \cos \alpha$ ; etc.) coinciden con los que resultan en estructuras isostáticas derivadas de la original. La convención sigue siendo posible, pero ya no se ajusta siempre "literalmente" como ocurría en las vigas continuas.

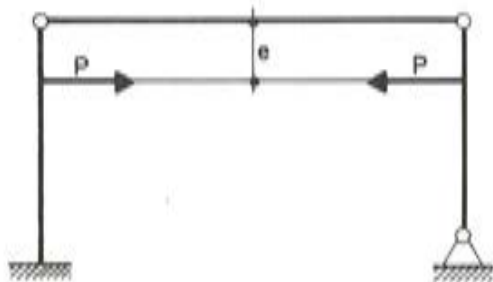


Fig. 5. Los esfuerzos *no* coinciden con los isostáticos de la convención.

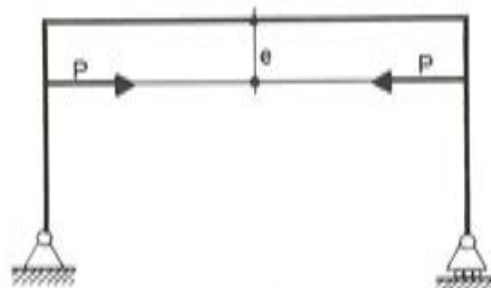


Fig. 6. Los esfuerzos *sí* coinciden con los isostáticos de la convención.

Estos resultados resaltan precisamente lo *convencional* y lo relativo de ese desglose entre isostáticos e hiperestáticos. Es conveniente indicar aquí que precisamente en un caso como el que se acaba de examinar no haría ninguna falta utilizar el concepto isostáticos-hiperestáticos puesto que su análisis es más directo a partir de las cargas, que aquí son conocidas; pero, de todas formas, una teoría general debe cubrir todos los casos y esto es lo que se ha hecho ahora, aplicando la de los isostáticos-hiperestáticos a este ejemplo.

Más adelante se verá cómo existen incluso casos de estructuras y pretensados en que ni siquiera es válida la convención por no poder estar los isostáticos en equilibrio dentro de la estructura.

Abundando en lo anterior debe añadirse que tampoco quedó muy clara la incidencia del pretensado en el comportamiento de las piezas y, así, existe algún trabajo en el que la interpretación analítica de unos resultados de ensayos hasta rotura de unas vigas continuas ignora por completo la actuación del efecto hiperestático debido al pretensado (2º Congreso de la FIP. Amsterdam, 1955) (3) (4).

Y todo ello, sin salirnos del campo de las estructuras lineales (y el pretensado mediante armaduras tesas o activas, el cual, desde luego, es casi el único que se emplea en la práctica).

Pero sigamos con la evolución de todo esto. El éxito del binomio *isostáticos-hiperestáticos* alcanza y configura, por supuesto, la práctica del análisis estructural y, en buena lógica dadas las circunstancias ya mencionadas, se conciben y desarrollan procedimientos de cálculo de los hiperestáticos de pretensado a partir de los isostáticos, llegándose incluso en esa línea al planteamiento práctico (CELASUN, 1963) (5) y parcialmente teórico (ALBIGES y LES BOURDELLES, 1964) (6) de líneas de influencia de los primeros en función de los segundos, pero una vez más sin una profundización teórica en sus bases (significado y alcance del análisis de estructuras a partir de esfuerzos de sección; unicidad y linealidad de las relaciones entre los isostáticos y los hiperestáticos, condiciones indispensables para la aplicación de toda línea de influencia; etc.).

Se llega incluso a planteamientos de cálculo como el siguiente (LIN, 1955, 1963) (7):

- Calcular los isostáticos.
- Derivar de ellos las cargas de manera aproximada:  $M''(x) \rightarrow p(x)$ .

- Calcular a partir de las cargas los esfuerzos (totales).
  - Obtener los hiperestáticos por diferencia entre los anteriores y los isostáticos,
- donde el énfasis en el factor *isostáticos-hiperestáticos* no puede ser mayor.

Las muchas dudas y preguntas en torno, que *todavía* siguen apareciendo en la actualidad, especialmente con relación a los esfuerzos hiperestáticos de pretensado, indican no solamente que hay siempre un tiempo para que los nuevos conocimientos (que sobre este asunto trataremos más adelante) se transmitan y "calen", sino también (y, quizá, sobre todo) que en la opinión pública profesional subyace todavía ese "absolutismo" conferido a estos conceptos.

En definitiva, y haciendo un primer resumen, puede decirse que la *convención isostáticos-hiperestáticos* aparece y hace fortuna *históricamente*, en el contexto de una *práctica* determinada (vigas continuas, normalmente para tableros de puentes, cuyos pretensados se ligan en consecuencia a las piezas; cálculo manual y gráfico; dimensionamiento gráfico; etc.) y de una *teoría* (rudimentaria y "ad hoc"; conceptos tomados de otros ámbitos, como los de centro y línea de presión; análisis lineal; etc.).

Podríamos preguntarnos, haciendo algo así como "historia-ficción", qué hubiera ocurrido al respecto (y, en concreto, si hubiera tenido tanta fortuna esta convención o se habría calculado directamente partiendo de las cargas de pretensado) si, por ejemplo, en los tiempos de referencia hubiera estado desarrollado ya el cálculo automático con todas sus consecuencias. Pero mejor que hacer historia-ficción tal vez resulte por el momento más útil y más correcto un examen de la situación actual, puesto que las cosas han cambiado bastante tanto en la práctica (pasaron ya los tiempos de las vigas continuas, del cálculo manual y del dimensionamiento gráfico) como en la teoría.

Así, *en la actualidad*, se han aclarado muchas cosas, al tratar de, superando la situación ya mencionada, hacer converger las teorías de análisis general de estructuras y del pretensado en particular, con un enriquecimiento por el aumento del campo de visión o perspectiva que ello ha llevado consigo (8) (9).

Son bien conocidas las relaciones entre los diferentes entes conceptuales del análisis estructural del pretensado. Un esquema de las mismas, dentro del análisis lineal, puede ser el siguiente (10):

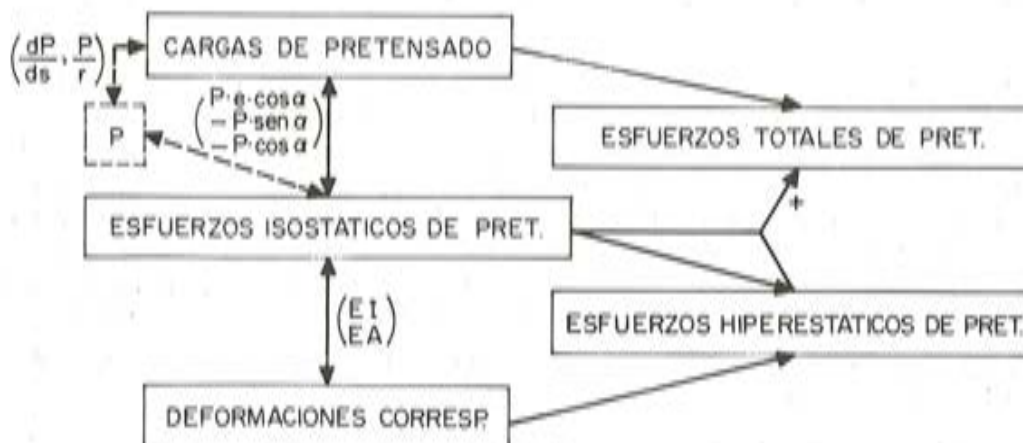


Fig. 7.

donde la simple flecha indica una relación lineal y unívoca (homomorfismo) y la doble flecha una relación lineal y biunívoca (isomorfismo).

En conexión con lo que precede, debe añadirse que también se conocen el significado y el alcance de lo que sería el *análisis de estructuras a partir de esfuerzos* (de sección) que, como se ha visto, aparece en el pretensado con el cálculo de los hiperestáticos a partir de los isostáticos: Las *acciones* sobre las estructuras son o bien de tipo *mecánico* (cargas en sentido amplio) o bien de tipo *geométrico* (deformaciones o desplazamientos) (8); los esfuerzos como acciones sólo tienen sentido indirectamente a través de sus correspondientes deformaciones de sección. En consecuencia, el análisis a partir de esfuerzos, siendo una entelequia innecesaria como tal, no debe tener ningún significado teórico; tan solo, si se quiere, práctico, dada la inmediata relación entre los esfuerzos y sus deformaciones.

Se ha superado el análisis lineal de estructuras en todos sus niveles quedando el cual como una situación particular, al mismo tiempo que han sido perfectamente establecidos los diferentes factores que llevan consigo la no linealidad del análisis (8). Esto no es ajeno a la actual consideración de situaciones de servicio y rotura en el análisis, en correspondencia con la aplicación de los estados límites de utilización y últimos en el dimensionamiento.

Se ha profundizado en el significado general de esfuerzo isostático e hiperestático por referencia, respectivamente, al ámbito mecánico (cargas; equilibrio; etc.) y geométrico (deformaciones; desplazamientos; compatibilidad; etc.) del análisis de estructuras dentro de una concepción del mismo que supera su tradicional sesgo mecánico, estableciendo en paralelo los dos ámbitos citados que, siendo en principio independientes, quedan ligados por el material de la estructura (8).

En relación con los dos párrafos anteriores, nuestra famosa convención teórica, tal como ha sido definida al principio, es literalmente correcta incluso más allá del análisis lineal. En este sentido, es muy importante afirmar que, teóricamente, puede seguirse hablando propiamente de esfuerzos hiperestáticos de pretensado fuera del ámbito lineal; sin embargo, también es cierto que no siendo válido el principio de superposición fuera de dicho ámbito, *no tiene sentido práctico alguno tratar de delimitar aisladamente dichos esfuerzos* cuando, como siempre ocurre en la realidad, existen otras acciones además del pretensado; y esta no linealidad se da, en la práctica, en ciertas situaciones de análisis de la estructura en servicio (pretensado parcial con fisuración) así como en el análisis de la estructura en rotura. Hay que decir que, asimismo, *es correcto mantener el valor de los esfuerzos isostáticos de pretensado aunque la pieza se fisure* y cambie la fibra neutra; ello no influye para nada, ya que lo propio de estos esfuerzos es el estar en equilibrio con las cargas; lo importante es mantener siempre el mismo eje, refiriendo a él también las deformaciones (curvaturas, deformaciones axiales) de la sección.

Se conoce también ahora con mayor nitidez el entronque entre el análisis de sección y el análisis de estructura (8), lo cual juntamente con la distinción entre el carácter *activo* (como acción) y el carácter *pasivo* (como resistencia o respuesta) que son al mismo tiempo propios del hormigón pretensado mediante armaduras activas, clarifica el papel de los isostáticos e hiperestáticos de pretensado en el análisis de sección (diagrama M-c; cálculo fuera del ámbito lineal y, en particular, en rotura; etc.). Y así por ejemplo, *el efecto hiperestático del pretensado debe ser considerado* (y añadido el correspondiente momento, si explícitamente se calcula y se admite el principio de superposición, al momento producido por las demás acciones) *en el análisis*, tanto en servicio como en rotura, *de la sección*.

A modo de resumen de todo esto puede establecerse ahora un nuevo esquema más general, *válido también para cualquier acción de cargas distintas del pretensado* (8):



Fig. 8.

donde las flechas que relacionan los distintos entes ya no suponen necesariamente ni linealidad ni univocidad. Evidentemente los esfuerzos isostáticos convencionales ( $M = P.e \cos \alpha$ ; etc.) pueden ser un caso particular de esfuerzos equilibrados (o isostáticos en su sentido más amplio) pero no necesariamente y, en caso de que lo sean, no ser los únicos.

A este respecto, recuérdese el caso anterior del pórtico simple con un pretensado recto no ligado directamente a ninguna de sus piezas (fig. 4); los esfuerzos isostáticos convencionales ( $M = P.e \cos \alpha$ ; etc.) son equilibrados, pero existen además otras posibilidades, en particular los esfuerzos que corresponden a los diferentes pórticos isostáticos deducidos del original, los cuales son también equilibrados. Ya se vio entonces como en este caso la convención isostáticos-hiperestáticos, siendo válida, ya no se ajustaba literalmente como en las vigas continuas.

Sin embargo, para el pórtico de la figura 9 los esfuerzos isostáticos convencionales no son equilibrados, existiendo otras configuraciones que sí lo son. En consecuencia, la convención aquí ya no es válida.

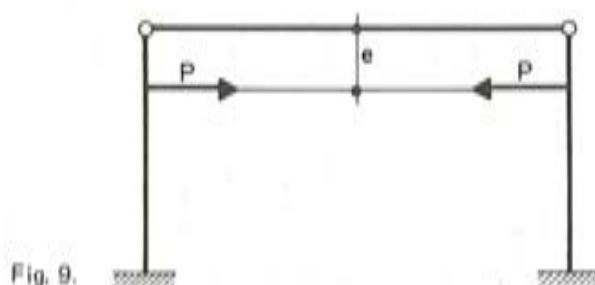


Fig. 9.

La clave de este asunto se encuentra en si la estructura es o no rígida entre los puntos de anclaje del pretensado. Si lo es, que es la situación más corriente (por lo que podemos entonces decir que el pretensado es *normal*) (1) (2), los esfuerzos isostáticos convencionales son equilibrados y, por ser inmediatos, suelen ser los más cómodos de elegir, además de que,

fuera de las zonas entre anclajes, tienen un valor idénticamente nulo. Si la zona entre anclajes no tiene rigidez en algún punto, los esfuerzos isostáticos de pretensado convencionales no son ya, en general, equilibrados; la convención deja de ser aplicable y, *si se desea seguir trabajando a través de esfuerzos*, es preciso partir de unos que se encuentren equilibrados en la estructura (véase figura 8).

En conclusión, puede decirse que, prácticamente, la convención isostáticos-hiperestáticos de pretensado sigue totalmente vigente porque, siendo correcta para la gran mayoría de los casos (pretensados normales) incluso fuera del ámbito lineal, es cómoda, sencilla y adecuada, con las circunstancias de ser conocida y estar ya muy consagrada. No obstante, en teoría no cubre todos los casos, pudiéndose generalizar en la forma *esfuerzos equilibrados-esfuerzos hiperestáticos* de pretensado, que ya no es unívoca en general.

Es más, en relación con la pregunta que más arriba se formulaba en el terreno de la "historia-ficción", es verosímil pensar que, si esta convención no hubiera surgido en su momento por estar ya muy desarrollado el cálculo automático, y calcularse directamente obteniendo antes las cargas de pretensado (véase fig. 7), hubiera terminado apareciendo. No hay que olvidar al respecto todos los argumentos anteriores, a los que se podría añadir que:

- Continúa interesando mantener explícito el efecto de la fuerza  $P$  sobre la sección (lo que equivale prácticamente a decir esfuerzos isostáticos de pretensado) en el análisis de la misma (servicio, rotura, diagrama,  $M$ - $e$ , etc.);
- Existe en todo caso una mayor acumulación de errores de cálculo cuando se obtienen previamente las cargas de pretensado y se procede a partir de ellas:  
 $P \rightarrow (dP/ds; P/r) \rightarrow$  cargas de pretensado  $\rightarrow$  (integración cuatro veces, en general)  $\rightarrow$  esfuerzos de pretensado, frente a  
 $P \rightarrow (P \cdot e, \cos \alpha; \text{etc.}) \rightarrow$  esfuerzos isostáticos de pretensado  $\rightarrow$  (integración dos veces, en general)  $\rightarrow$  esfuerzos hiperestáticos de pretensado.

Lo que ha cambiado, en definitiva, es la existencia actual de un marco teórico más general que engloba a los isostáticos-hiperestáticos de pretensado, perdiendo así éstos su carácter absoluto y universal que de hecho, quizá de forma ingenua pero comprensible, se les ha llegado a dar, y quedando como algo relativo y limitado a su ámbito; todo lo cual ha servido para dejar la situación mucho más clara.

Pero esta persistencia con el tiempo y a pesar de todo, aunque sea ya de una forma relativa y limitada, precisamente los refuerza históricamente ("al no perder con el tiempo han ganado") dando idea de su pertinencia como concepción "feliz" pero también "progresista" (en el sentido de que, habiendo nacido de una manera un tanto parcial y sin profundizar en la teoría subyacente, ha ayudado al desarrollo no sólo de esa teoría sino de la teoría general de estructuras).

Llegará un día, casi sin duda, en que todo esto perderá vigencia, al haber alcanzado el análisis de estructuras un enfoque y un nivel muy diferentes a los actuales. Pero, mientras tanto, *ahí siguen los esfuerzos isostáticos e hiperestáticos de pretensado.*

Para finalizar, todo lo examinado hasta aquí nos puede conducir, extrapolando poco o mucho, a algunas cuestiones que, menos que afirmaciones rotundas, vienen a ser reflexiones que como tales se dejan ahora planteadas.

La *teoría* va, muchas veces, a remolque de la *práctica*. Entonces suele ajustarse (por el camino que parece más fácil, en principio) a las necesidades de cada situación, en el contexto (*historia*) correspondiente, tendiendo a ser "ad hoc" y parcial y dotándose de *convenciones* influidas por todo ello (necesidades prácticas y contexto histórico).

Con los avances del tiempo (de las necesidades y el "aumento general de la complejidad"), esa *teoría* resulta insuficiente y/o inadecuada; pero, a falta de otra cosa, se tiende a extrapolar conceptos y convenciones, pudiendo llegarse a planteamientos erróneos.

Con todo, la *práctica*, en ocasiones, no progresa por falta de una *teoría* adecuada.

La *teoría* es de gran utilidad y también los teóricos (*bien enfocados*, por supuesto, y *esto* parece ser lo más difícil) sobre todo cuando la *práctica* ha avanzado mucho y hay que "servirla" (aparte de las ventajas de la teoría para la difusión del conocimiento, junto con su insuficiencia para ello). Aquí se choca con el problema de la conexión *teoría-práctica* con miras de cierto alcance.

Como en otros campos, también existen *inercias* respecto a la *innovación teórica*.

Al fin y al cabo, la *teoría*, si se analiza bajo el *prisma histórico*, es *humana* y *muy humana*.

## REFERENCIAS

1. MURCIA, J.— Estudio del cálculo de estructuras pretensadas hiperestáticas mediante líneas de influencia. Aplicación al cálculo de la redistribución de esfuerzos a lo largo del tiempo. Tesis Doctoral. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, 1972.
2. MURCIA, J.— Una introducción al análisis estructural del pretensado. Revista de Obras Públicas n° 3117, Madrid, 1975.
3. APARICIO, A.C.— Estudio de la evolución hasta la rotura por sollicitaciones normales de tableros continuos de puentes de hormigón armado o pretensado. Tesis doctoral. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Santander, 1980.
4. F.I.P.— Proceedings of the 2nd Congress of the Fédération Internationale de la Précontrainte. (Amsterdam, 1955). London, 1958.
5. CELASUN, H.— Lignes d'influence des moments hyperstatiques provenant du câble de précontraint dans les poutres continues à inertie variable. Annales I.T.B.T.P. n° 190. París, 1963.
6. ALBIGES, M. et LES BOURDELLES, Y.— Etude des effets produits par les forces de précontrainte dans les systèmes hyperstatiques, diagrammes d'influence. Annales I.T.B.T.P. n° 202. París, 1964.
7. LIN, T.Y.— Design of Prestressed Concrete Structures. John Wiley, New York, 1955, 1963.
8. MURCIA, J.— Reflexiones sobre las bases del análisis de estructuras. Revista de Obras Públicas n° 3178, Madrid, 1979.
9. MURCIA, J. y AGUADO, A.— Análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado. Informes de la Construcción n° 350. Madrid, 1983.
10. AGUADO, A. y MURCIA, J.— Some Bases for Structural Analysis of Prestressing. Partial Prestressing: From Theory to Practice, NATO Advanced Workshop. París, 1984.

# Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 1. Teoría

Vicente Sánchez Gálvez y Manuel Elices Calafat  
Departamento de Física y Física de Materiales  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid

## 1. INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es ofrecer al proyectista un método de cálculo que le permita estimar las pérdidas de tensión en un elemento de hormigón pretensado producidas por los efectos combinados de la retracción y fluencia del hormigón y la relajación del acero. Esta contribución se ha dividido en cuatro partes para mayor comodidad. En la primera se justifica teóricamente el método de cálculo. En la segunda se valida experimentalmente. En la tercera se compara con los métodos propuestos por la Comisión Permanente del Hormigón (EP-80), el CEB-FIP (Model Code 1978) y el Instituto Americano del Hormigón pretensado (PCI, 1975), y, finalmente, en el cuarto artículo, se estudia la influencia del tipo de acero (grados R2, R5 y R8) en las pérdidas por fluencia y relajación combinadas.

El método propuesto presenta ventajas de tipo formal y físico. En el planteamiento del problema por el CEB-FIP se tratan de distinta forma los fenómenos de la fluencia y de la relajación [1, anejo e]; mientras la fluencia y la retracción tienen un tratamiento detallado dentro del marco de las teorías viscoelásticas, a la relajación se le da un tratamiento empírico [1, e. 2.6]. Las recomendaciones del PCI son, en esencia, un itinerario a través de tablas para estimar rápidamente las pérdidas del pretensado [2] y resulta difícil, durante dicho cálculo, ir intuyendo el significado físico de proceso. El nuevo método trata los fenómenos de relajación al mismo nivel conceptual que los de fluencia y los presenta con un soporte físico ya experimentado [3, 4]. La formulación del método puede parecer, a primera vista, farragosa, pero es perfectamente manejable con un pequeño ordenador de mesa.

Se confía en que este nuevo procedimiento de cálculo proporcione valores más aproximados a la realidad que los obtenidos mediante los métodos antes citados. De ser así, este método resultaría atractivo para calcular, por ejemplo, los corrimientos en las construcciones por voladizos sucesivos o para estimar las pérdidas muy a largo plazo, excesivamente conservadoras cuando se calculan por métodos tradicionales.

## 2. PERDIDA DE TENSION EN UN TENDON CON TENSION INICIAL Y LONGITUD VARIABLES

La mayor dificultad conceptual que aparece al intentar calcular las pérdidas de pretensado debidas al efecto combinado de la fluencia y de la relajación es, posiblemente, la

determinación de la "relajación" del acero en unas condiciones en las que la longitud del tendón varía ya que, en rigor, la relajación se define para longitud constante. Los datos de relajación para el acero se obtienen a partir de ensayos normalizados donde no se permiten cambios en la deformación de la probeta durante el ensayo. Por este motivo cuando nos refiramos a la relajación de tensiones con variación de la longitud del tendón la escribiremos entre comillas.

La única solución, conocida por los autores, a este problema es la propuesta por R.J. Glodowski y G.E. Hoff en 1979 [5]. Es una solución empírica que predice bastante bien los resultados experimentales. El procedimiento se indica esquemáticamente en la Figura 1. En ella se han representado dos curvas de relajación isoterma para tensiones iniciales  $\sigma_0$  y  $\sigma_0 - E\Delta\epsilon$ , donde E es el módulo de elasticidad del material. Para calcular las pérdidas por relajación al cabo de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , contado a partir de t, cuando la tensión inicial es  $\sigma_0$ , suponiendo que en el instante t el tendón se acorta  $\Delta\epsilon$ , se procede de la siguiente forma:

- Se calcula primero un tiempo equivalente  $t'$ , que es aquél para el cual la relajación, cuando la tensión inicial es  $\sigma_0 - E\Delta\epsilon$ , es igual a la relajación para el tiempo t, cuando la tensión inicial es  $\sigma_0$ .
- Las pérdidas por relajación buscadas son sensiblemente iguales a las correspondientes al intervalo  $(t', t' + \Delta t)$ , para una tensión inicial  $\sigma_0 - E\Delta\epsilon$ .

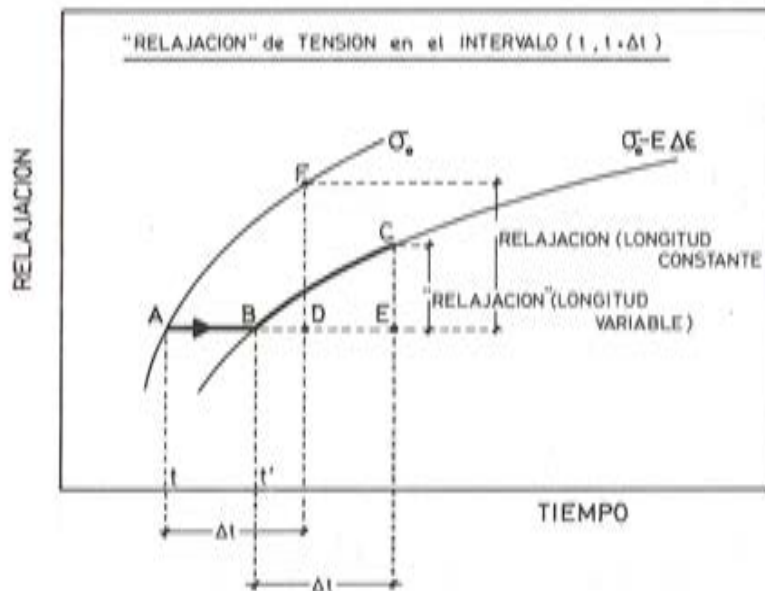


Fig. 1. Predicción de la "relajación" en el intervalo  $(t, t + \Delta t)$ , cuando la longitud del tendón varía  $\Delta\epsilon$  en el instante t. Método del tiempo equivalente (5).

Este procedimiento es tanto más aproximado cuanto menor es el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Nótese que si no se tuviera en cuenta el acortamiento del tendón las pérdidas serían iguales a FD en vez de ser CE.

La bondad del procedimiento empírico de Glodowski y Hoff está basada en una buena concordancia con resultados experimentales, [5]. Es interesante resaltar que otra posible construcción, (utilizada por algunos proyectistas) consistente en saltar directamente de la curva para  $\sigma_0$  a la curva para  $\sigma_0 - E\Delta\epsilon$ , en el mismo instante, no da tan buenos resultados. En la Figura 2 se ilustran los dos procesos; a tiempo constante y a "relajación" constante

(tiempo equivalente). Los datos se han tomado de [5]. La curva continua, para una tensión inicial del 77% del límite elástico representa resultados experimentales. La primera parte de la curva de trazos (hasta 24 horas) también reproduce resultados experimentales para una tensión inicial del 83% del límite elástico. El resto de la curva de trazos, en los dos casos, son valores experimentales después de una reducción súbita de la tensión del 6% del límite elástico. Glodowski y Hoff consideran que estos resultados son generalizables para los distintos tipos de aceros para pretensado y otras tensiones iniciales.

El inconveniente de este método es que se precisa conocer la familia de curvas de relajación para todas las posibles tensiones iniciales. Glodowski y Hoff utilizan una familia empírica (una aproximación cuadrática) que representa una mejora a la interpolación lineal preconizada por el CEB, FIP y el PCI, pero para ello necesitan conocer dos curvas de relajación obtenidas experimentalmente con dos tensiones iniciales distintas. Una aportación de este trabajo es la introducción de una familia de curvas para distintas tensiones iniciales que es consecuencia de una teoría física [3, 4] y se puede obtener a partir de un ensayo de relajación isoterma para una sola tensión inicial, e incluso, a otra temperatura. Es más, también podría obtenerse a partir de un solo ensayo de tracción o de fluencia.

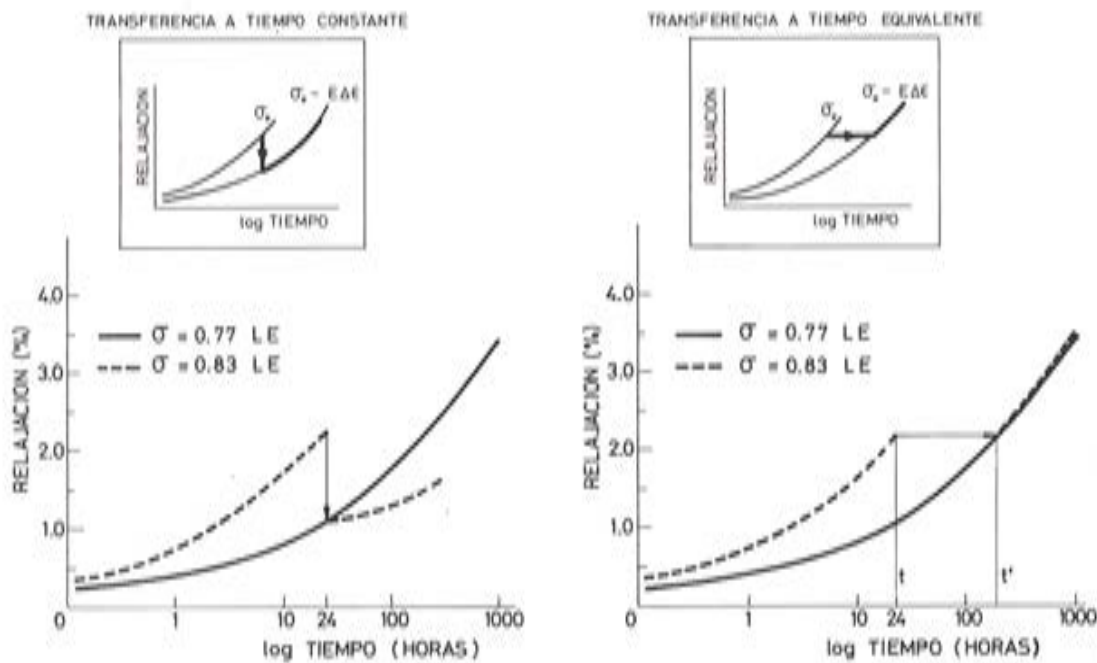


Fig. 2. Comparación de los métodos del "tiempo constante" y del "tiempo equivalente", para estimar las pérdidas por "relajación".

En consecuencia, utilizando el procedimiento de Glodowski y Hoff [5] junto con la teoría de relajación propuesta por los autores [3], el cálculo de la "relajación" durante el intervalo de tiempo  $(t, t + \Delta t)$ , cuando la tensión inicial es  $\sigma_0$  y el tendón se acorta  $\Delta \epsilon$  en el instante  $t$ , se haría en dos etapas:

- a. Cálculo del tiempo equivalente  $t'$ .

De acuerdo con el procedimiento de Glodowski, el tiempo equivalente  $t'$  se determina

obligando a que la pérdida de tensión en el instante  $t$  para tensión inicial  $\sigma_0$  sea igual a la que se tendría en el instante  $t'$  si el tendón se hubiese tesado con una tensión inicial  $\sigma_0 - E\Delta\epsilon$  y se hubiese mantenido a longitud constante. Como en ambos casos tenemos procesos de relajación a longitud constante es válida la teoría propuesta por los autores [3, 4] y las ecuaciones correspondientes son:

$$\frac{\Delta\sigma}{E} = \left[ \frac{\sigma_0 - \Delta\sigma + \alpha \ln \nu t}{P} \right]^m - \left[ \frac{\sigma_0 + \alpha \ln \nu t_0}{P} \right]^m \quad (1.a)$$

$$\frac{\Delta\sigma}{E} = \left[ \frac{\sigma_0 - \Delta\sigma - E\Delta\epsilon + \alpha \ln \nu t'}{P} \right]^m - \left[ \frac{\sigma_0 - E\Delta\epsilon + \alpha \ln \nu t_0}{P} \right]^m \quad (1.b)$$

donde  $\alpha = kTM/\nu$ , siendo  $k$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta y  $M$  y  $\nu$  dos constantes de la teoría. En general, a  $20^\circ\text{C}$  puede tomarse  $\alpha = 28 \text{ MPa}$ . El valor de  $\nu$  es de  $10^{13} \text{ seg.}$  y  $P$  y  $m$  son dos parámetros característicos del acero que pueden determinarse a partir de un ensayo de relajación convencional.

Ahora bien, la obtención de  $t'$  a partir de las ecuaciones (1.a) y (1.b) resulta bastante laboriosa. Sin embargo, se simplifica enormemente si se desprecia en ambas ecuaciones la contribución del segundo término de la derecha frente al primero; en tal caso la ecuación resultante es sencillamente

$$\sigma_0 + \alpha \ln \nu t = \sigma_0 - E\Delta\epsilon + \alpha \ln \nu t' \quad (2.a)$$

o bien, llamando tensión efectiva a  $\sigma_{ef}(\sigma, t) = \sigma + \alpha \ln \nu t$ , resulta

$$\sigma_{ef}(\sigma_0, t) = \sigma_{ef}(\sigma_0 - E\Delta\epsilon, t') \quad (2.b)$$

b. Cálculo de la "relajación" durante el intervalo  $(t, t + \Delta t)$ , cuando la relajación previa es  $\Delta\sigma$ .

Se obtiene aplicando las expresiones propuestas por los autores [3, 4] al intervalo  $(t', t' + \Delta t)$ . Así pues, si la pérdida de tensión adicional en dicho intervalo se denomina  $\Delta\sigma'$ , se obtendrá de la ecuación siguiente

$$\frac{\Delta\sigma'}{E} = \left[ \frac{\sigma_0 - E\Delta\epsilon - \Delta\sigma - \Delta\sigma' + \alpha \ln \nu (t' + \Delta t)}{P} \right]^m - \left[ \frac{\sigma_0 - E\Delta\epsilon - \Delta\sigma + \alpha \ln \nu t'}{P} \right]^m \quad (3)$$

En la Figura 3 se han representado los resultados de un caso práctico. Se han tomado como datos iniciales dos curvas experimentales de relajación isoterma a  $20^\circ\text{C}$  y al 78% y 80% de la tensión de rotura ( $\sigma'_0 = 1299 \text{ MPa}$  y  $\sigma_0 = 1336 \text{ MPa}$ ), que equivalen a un acortamiento del tendón de  $\Delta\epsilon = 0.00019$ , valor típico de fluencia a las 48 horas.

En primer lugar se muestra cómo se calcularía con el procedimiento de Glodowski la pérdida de tensión entre las 48 y las 96 horas si a las 48 horas se acortara el tendón en  $\Delta\epsilon = 0.00019$ . Hasta las 48 horas se seguiría la curva de relajación con tensión inicial  $\sigma_0$ , con lo que las pérdidas en ese instante serían de  $112 \text{ MPa}$ . En ese momento en que se produce el acortamiento del tendón se busca en la curva de tensión inicial  $\sigma'_0$  el tiempo  $t'$  para el que la pérdida de tensión es de  $112 \text{ MPa}$ , resultando ser 120 horas. Finalmente, las pérdidas entre las 48 y las 96 horas se obtienen sobre la curva de tensión inicial  $\sigma'_0$  llevando a partir de  $t'$  un incremento de tiempo de 48 horas, es decir entre 120 y 168 horas, obteniéndose una pérdida de tensión adicional de  $\Delta\sigma_{GH} = 6 \text{ MPa}$ , es decir una pérdida total de  $118 \text{ MPa}$ .

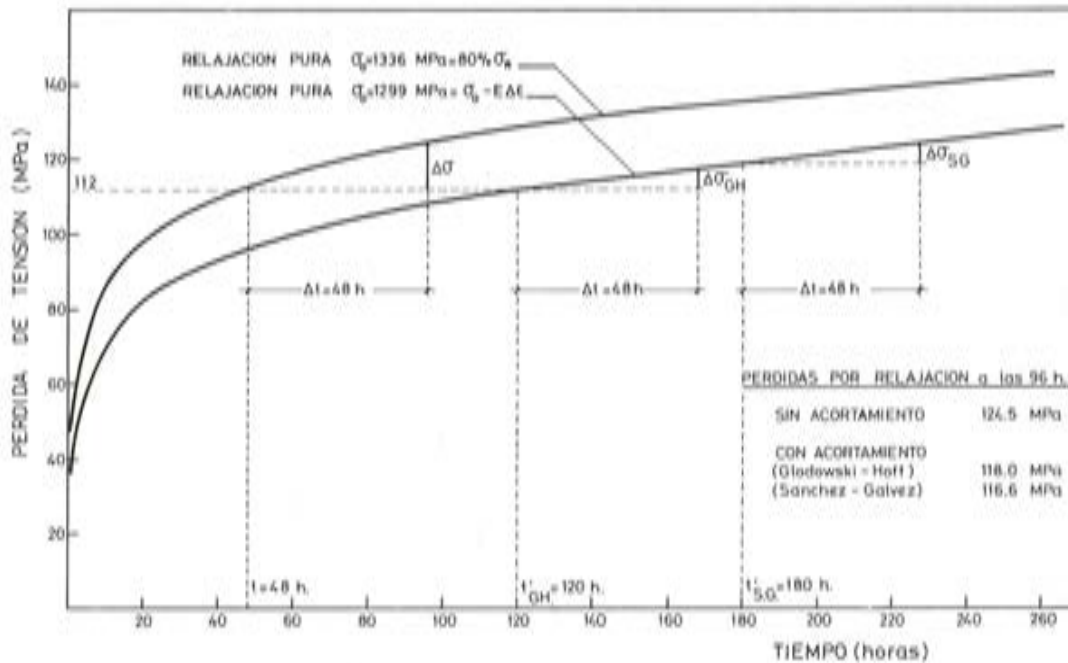


Fig. 3. Cálculo de las pérdidas por "relajación" a las 96 horas cuando a las 48 horas el tendón se acorta  $\Delta e = 0,00019$ .

Después se repite el mismo cálculo, utilizando para hallar el tiempo equivalente  $t'$  el método de igualar tensiones efectivas. De acuerdo con la ecuación (2) el tiempo  $t'$  resulta ser

$$1336 + 28 \ln (10^{13} \cdot 48 \cdot 3600) = 1299 + 28 \ln (10^{13} \cdot 3600 \cdot t')$$

o bien  $t' = 180$  horas y la pérdida de tensión entre las 48 y las 96 horas se obtiene utilizando la ecuación (3) con  $t' = 180$  horas y  $\Delta t = 48$  horas. Para este acero  $P = 2980$  MPa y  $m = 33$  (con estos valores de las constantes se han dibujado las dos curvas de la figura). Sustituyendo estos valores en la ecuación (3), resulta:

$$\frac{\Delta \sigma'}{2 \cdot 10^5} = \left[ \frac{1299 - 112 - \Delta \sigma' + 28 \ln (10^{13} \cdot 3600 \cdot 228)}{2980} \right]^{33} - \left[ \frac{1299 - 112 + 28 \ln (10^{13} \cdot 3600 \cdot 180)}{2980} \right]^{33}$$

que resulta  $\Delta \sigma'_{SG} = 4.6$  MPa, o bien una pérdida total de 116.6 MPa. Como se ve, el resultado es similar al que se obtiene con el procedimiento de Glodowski.

Ahora bien, en la realidad difícilmente se podrá disponer de las dos curvas experimentales para las dos tensiones iniciales que se necesiten para cada caso y, por consiguiente, la segunda curva será necesario deducirla teóricamente a partir de la primera. Para esta deducción teórica se pueden utilizar las ecuaciones propuestas por los autores [3, 4] o bien basarse en los métodos del Model Code o del PCI. El procedimiento propuesto por Glodowski exigiría obtener una segunda curva mediante ensayo. La experiencia de los autores indica que su método es más general (al incluir también la temperatura) y que proporciona valores más próximos a la experiencia que los obtenidos aplicando los procedimientos del Model Code.

### 3. PERDIDA DE TENSION EN UN TENDON DEBIDA AL EFECTO CONJUNTO DE LA FLUENCIA DEL HORMIGON Y A LA RELAJACION DEL ACERO

El resultado del párrafo anterior permite abordar este problema con más rigor del que figura en las normas y en los textos de hormigón pretensado, donde se trata linealmente un problema que no es lineal, ya que la fluencia del hormigón no es independiente de la relajación del acero. Si se ignora esta dependencia, y se calculan las pérdidas de tensión por separado, el resultado obtenido sumando las dos contribuciones no tiene por qué ser correcto.

Existe una forma sencilla y directa de abordar un problema no lineal, se basa en descomponerlo en una serie de intervalos y tratarlo linealmente en cada uno de ellos. En general, (para funciones suficientemente suaves) es posible reducir todo lo que se quiera el error de la aproximación, reduciendo el tamaño del intervalo. De esta forma los datos iniciales de cada intervalo son los resultados del intervalo anterior, lo que permite tener en cuenta las interacciones entre los dos fenómenos. Este es el procedimiento que se sigue en el método propuesto.

Consideremos, pues, un intervalo de tiempo  $t$ , entre  $t_{i-1}$  y  $t_i$ , y calculemos las pérdidas de tensión en un elemento pretensado, como el de la Figura 4, sumando las pérdidas producidas por retracción y fluencia del hormigón a las pérdidas debidas a la "relajación" del tendón cuya longitud no permanece constante.

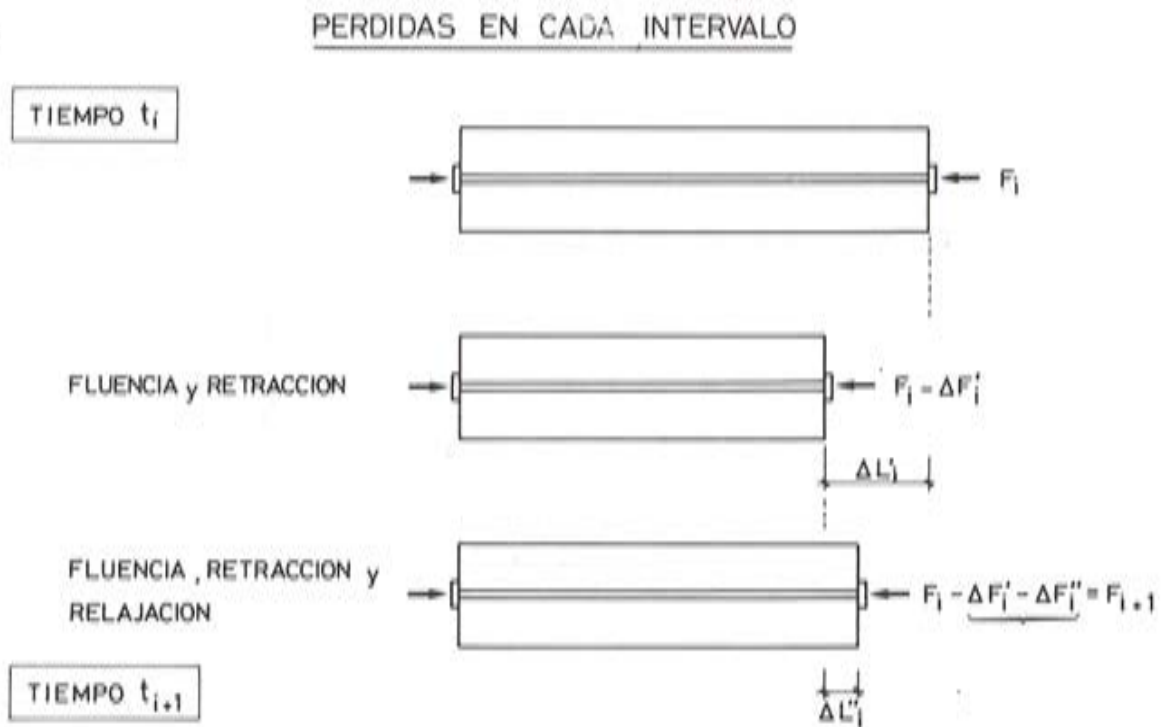


Fig. 4. Pérdidas de tensión en un intervalo  $(t_i, t_{i+1})$  debidas a la fluencia y retracción del hormigón y a la relajación del acero.

En la Figura 5 se indica cómo calcular las pérdidas de tensión en el acero,  $\Delta\sigma'_{s,i}$  —en el intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ — por el acortamiento del hormigón  $\Delta\epsilon'_{c,i}$ . Este acortamiento es debido a la fluencia y a la retracción,  $\Delta\epsilon_{fr,i}$ , (calculado según la HP.80) menos la dilatación debida a la descompresión elástica del hormigón al disminuir la tensión en el tendón,  $\Delta\epsilon_{e,i}$ , es decir:

$$\Delta\epsilon'_{c,i} = \Delta\epsilon_{fr,i} - \Delta\epsilon_{e,i} = \Delta\epsilon_{fr,i} - \frac{\Delta\sigma'_{c,i}}{E_{c,i}}$$

La pérdida de tensión en el acero se calcula teniendo en cuenta que la deformación en el acero,  $\Delta\epsilon'_{s,i}$ , es igual a la del hormigón,  $\Delta\epsilon'_{c,i}$ . Por consiguiente:

$$\frac{\Delta\sigma'_{s,i}}{E_s} = \Delta\epsilon_{fr,i} - \frac{\Delta\sigma'_{c,i}}{E_{c,i}}$$

o bien, utilizando la notación de la HP.80,

$$\Delta\sigma'_{s,i} = \frac{E_s}{1 + n_1 \lambda} \Delta\epsilon_{fr,i} \quad (4)$$

donde  $n_1 = E_s/E_{c,i}$  y  $\lambda = \Delta\sigma'_{c,i}/\Delta\sigma'_{s,i}$ .

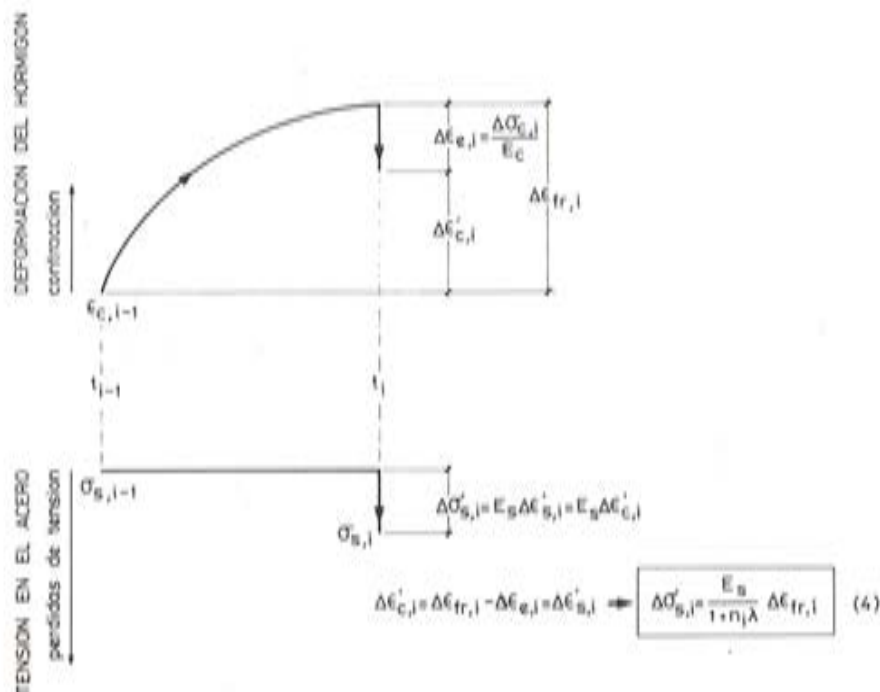


Fig. 5. Cálculo esquemático de las pérdidas por fluencia y retracción en el intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ .

El cálculo de las pérdidas de tensión en el tendón por "relajación",  $\Delta\sigma''_{s,i}$  —en el intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ — se indica en la Figura 6. Téngase presente que la longitud del tendón en el instante  $t_{i-1}$  es la debida a la interacción de la fluencia y retracción del hormigón y la relajación del acero en toda la historia anterior, pero que dentro del intervalo se considera constante. En el capítulo anterior se ha indicado cómo calcular la relajación en el

intervalo, fórmula (3), donde  $\sigma_0$  es la tensión inicial,  $\Delta\sigma$  las pérdidas de tensión acumuladas y  $E\Delta\epsilon$  el acortamiento hasta el instante  $t_{i-1}$ . Pero nótese que este resultado equivale a suponer el hormigón infinitamente rígido en el intervalo  $t_{i-1}$ ,  $t_i$ .

Debido a la pérdida de tensión  $\Delta\sigma''_{s,i}$ , el hormigón se dilatará  $\Delta\epsilon''_{c,i} = \Delta\sigma''_{c,i}/E_{c,i}$ . Si suponemos que esta dilatación se produce al final del intervalo  $t_i$ , como indica la Figura 6, el valor de  $\Delta\sigma''_{s,i}$  se obtendrá igualando las deformaciones del tendón,  $\Delta\epsilon''_{s,i}$ , y del hormigón  $\Delta\epsilon''_{c,i}$ .

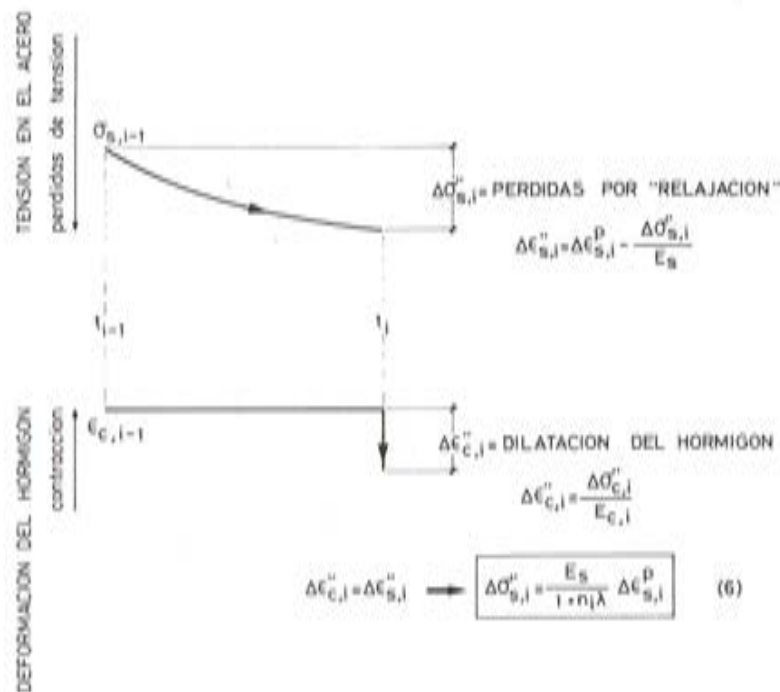


Fig. 6. Cálculo esquemático de las pérdidas por relajación en el intervalo ( $t_{i-1}$ ,  $t_i$ ).

La deformación del tendón,  $\Delta\epsilon''_{s,i}$ , se obtiene a partir de la siguiente consideración. En un proceso de relajación (a longitud constante) el acortamiento elástico debido a la pérdida de tensión ( $\Delta\sigma''/E$ ) se compensa con un aumento de la deformación plástica  $\Delta\epsilon^p$  (ver Referencias 3 y 4):

$$\frac{\Delta\sigma''}{E} = \Delta\epsilon^p$$

Ahora, como la deformación total no es nula, sino igual a  $\Delta\epsilon''$ , resultará

$$\Delta\epsilon''_{s,i} = \Delta\epsilon_{s,i}^p - \frac{\Delta\sigma''_{s,i}}{E} \quad (5)$$

Igualando la deformación del hormigón y del tendón, obtendremos:

$$\frac{\Delta\sigma''_{c,i}}{E_{c,i}} = \Delta\epsilon_{s,i}^p - \frac{\Delta\sigma''_{s,i}}{E_{s,i}}$$

de donde

$$\Delta\sigma_{s,i}'' = \frac{E_s}{1 + \lambda n_i} \Delta e_{s,i}^p \quad (6)$$

con la notación ya indicada.

Por consiguiente, los pasos a seguir, en cada intervalo, serán:

- a.— Calcular, primero, la deformación del hormigón por fluencia y retracción,  $\Delta e_{c,i}'$  y a partir de este resultado las pérdidas correspondientes en el acero  $\Delta\sigma_{s,i}'$ , según (4).
- b.— Calcular, después, las pérdidas en el acero por "relajación",  $\Delta\sigma_{s,i}''$ , según (6).
- c.— Las pérdidas de tensión en el tendón,  $\Delta\sigma_{s,i}$ , vendrán dadas por  $\Delta\sigma_{s,i}' + \Delta\sigma_{s,i}''$ .

Este cálculo, por tanto, se realiza de forma separada y sin tener en cuenta la interacción entre la fluencia y retracción del hormigón y la relajación del acero durante el intervalo. En realidad, la tensión de compresión del hormigón al comienzo del intervalo  $\sigma_{c,i-1}$  varía a lo largo del mismo, pero este efecto es de segundo orden frente a los incrementos de tensión que se consideran. De igual forma, la deformación del acero también disminuye a lo largo del intervalo por la fluencia y retracción del hormigón por lo que en el cálculo de la relajación podría tomarse como tensión del acero al comienzo del intervalo  $\sigma_{s,i-1} - \Delta\sigma_{s,i}'$  en lugar de  $\sigma_{s,i-1}$  pero este efecto es también de segundo orden.

Veamos, finalmente, con todo detalle cómo se calculan  $\Delta\sigma_{s,i}'$  (4) y  $\Delta\sigma_{s,i}''$  (6). Las deformaciones por fluencia se obtienen a partir de la normativa vigente que figura en la Referencia 1, y las pérdidas por relajación se calculan siguiendo la teoría desarrollada previamente por los autores en la Referencia 3.

Supongamos una sección de hormigón pretensado, como la indicada en la Figura 7. Siguiendo la notación del Model Code [1], llamaremos  $\sigma_{c,0}$  a la tensión inicial que actúa sobre el hormigón a la altura del tendón, debida a la acción del pretensado  $\sigma_{c,p0}$  y a las cargas permanentes  $\sigma_{c,g}$

$$\sigma_{c,0} = \sigma_{c,p0} + \sigma_{c,g}$$

La deformación en el hormigón, a la altura del tendón, viene dada, según el Model Code [1, anejo e, 2.3], por:

$$e_{c,i} = e_{n,i} + \sigma_{c,0} \Phi(t_i, t_0) - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{c,j} \Phi(t_i, t_j) - \frac{\Delta\sigma_{c,i}}{E_{c,i}} \quad (7)$$

El intervalo de tiempo transcurrido se ha dividido en  $n$  intervalos, y la expresión (7) da la deformación al cabo del intervalo  $i$ . En ella  $e_n$  es la componente de la deformación que no depende de la tensión y que, en general, coincide con la retracción.  $\Phi$  es la función de fluencia, definida por:

$$\Phi(t_i, t_j) = \frac{1}{E_{c,j}} + \frac{\varphi(t_i, t_j)}{E_{c,28}} \quad (8)$$

donde  $E_{c,i}$  es el módulo de elasticidad del hormigón para el tiempo  $t_i$  y  $\Delta\sigma_{c,i}$  es la pérdida de tensión en el hormigón (en valor absoluto) producida en el intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ .

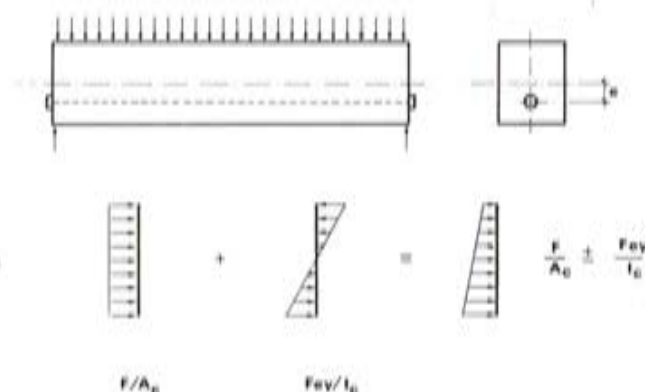


Fig. 7. Sección de hormigón pretensado considerada en el cálculo.

Las relaciones entre las correspondientes tensiones del hormigón,  $\sigma_{c,p}$ , y del acero,  $\sigma_{s,p}$ , debidas solamente a la acción del pretensado, vendrán dadas por:

$$\sigma_{c,p} = \frac{F}{A_c} + \frac{F e^2}{I_c} \quad (9.a)$$

$$\sigma_{c,p0} = \sigma_{s,p0} w \left( 1 + \frac{A_c e^2}{I_c} \right) \quad (9.b)$$

$$\Delta \sigma_{c,i} = \Delta \sigma_{s,i} w \left( 1 + \frac{A_c e^2}{I_c} \right) = \Delta \sigma_{s,i} \frac{\sigma_{c,p0}}{\sigma_{s,p0}} = \lambda \Delta \sigma_{s,i} \quad (9.c)$$

donde  $A_c$ ,  $A_s$  y  $w$  representan, respectivamente, el área del hormigón, la del tendón y la cuantía del pretensado.  $I_c$  es el momento de inercia de la sección con respecto a la fibra neutra y  $e$  es la excentricidad.

Equipados con todo este bagaje calculemos, en primer lugar,  $\Delta \sigma'_{s,i}$ , las pérdidas en el tendón (en el intervalo  $t_{i-1}$ ,  $t_i$ ) debidas solamente a la fluencia y retracción del hormigón. Este resultado está indicado esquemáticamente en la Figura 8.

La expresión (4) se puede escribir, más explícitamente, así:

$$\Delta \sigma'_{s,i} = E_s \Delta \epsilon'_c(t_i, t_{i-1}) \quad (10)$$

La deformación del hormigón,  $\Delta \epsilon'_c(t_i, t_{i-1})$ , se obtiene a partir de la expresión (7), restándole la deformación hasta el final del intervalo  $t_{i-1}$ . El resultado final es:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon'_c(t_i, t_{i-1}) = & e_{n,i} - e_{n,i-1} + \frac{\sigma_{c,0}}{E_{c,28}} [\varphi(t_i, t_0) - \varphi(t_{i-1}, t_0)] - \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta \sigma_{c,j}}{E_{c,28}} [\varphi(t_i, t_j) - \varphi(t_{i-1}, t_j)] - \frac{\Delta \sigma'_{c,i}}{E_{c,i}} \end{aligned} \quad (11)$$

Las pérdidas en el tendón se obtendrán multiplicando esta expresión por el módulo de elasticidad del acero. Llamando  $E_s/E_{c,28} = n$  y  $E_s/E_{c,i} = n_i$ , resulta, finalmente:

$$\Delta \sigma'_{s,i} = \frac{E_s(e_{n,i} - e_{n,i-1}) + n \sigma_{c,0} [\varphi(t_i, t_0) - \varphi(t_{i-1}, t_0)] - \sum_{j=1}^{i-1} n \lambda \Delta \sigma_{s,j} [\varphi(t_i, t_j) - \varphi(t_{i-1}, t_j)]}{1 + n_i \lambda} \quad (12)$$

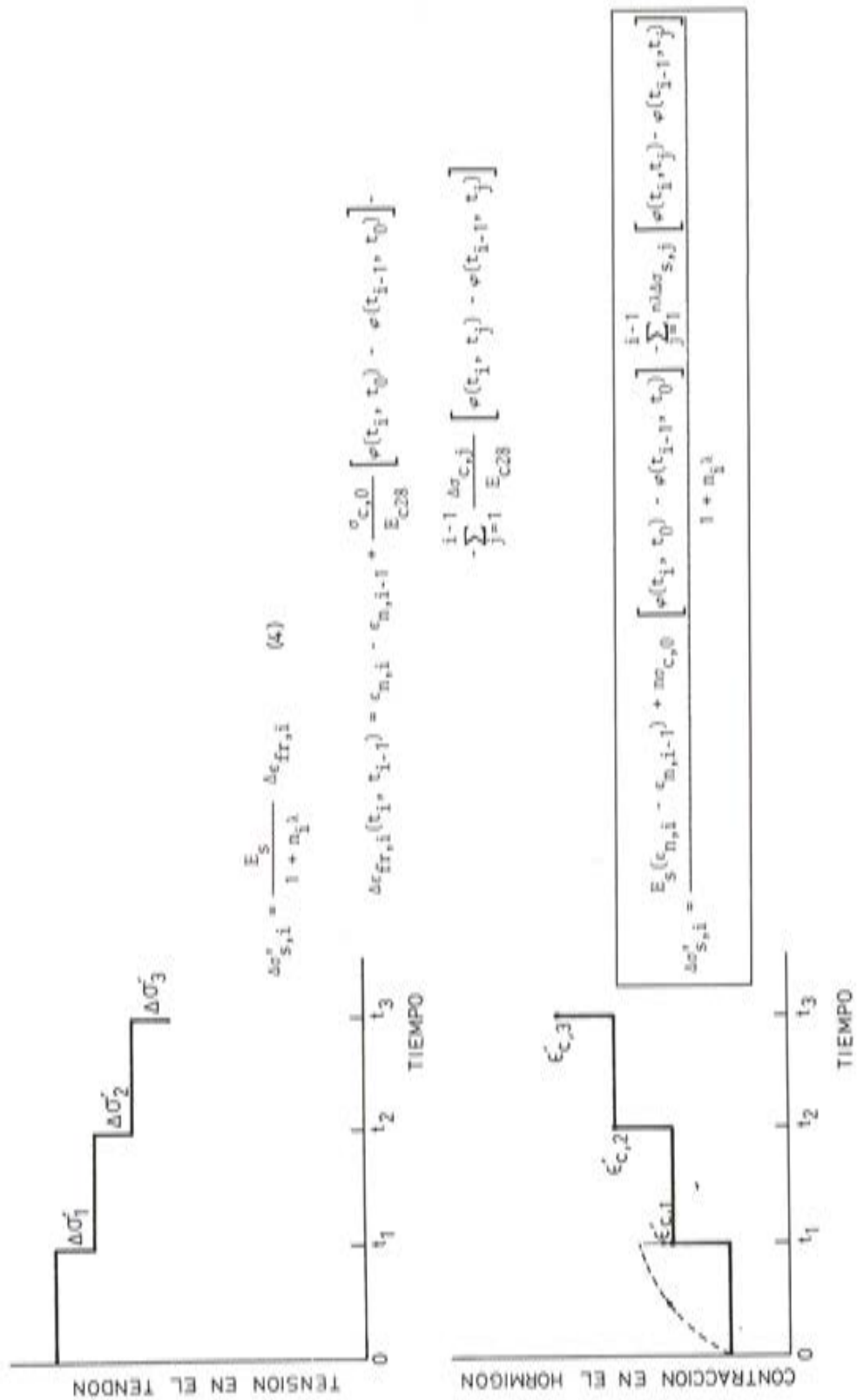


Fig. 8. Pérdidas de tensión por fluencia y retracción en el intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ .

El cálculo de la segunda contribución, las pérdidas en el tendón,  $\Delta\sigma''_{s,i}$ , (en el intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ ), debidas solamente a la "relajación" del acero, —mientras el tendón se deforma  $\Delta e'$ — se indica, esquemáticamente, en la Figura 9. Nótese que debido a estas pérdidas el hormigón experimentará otra deformación adicional (una expansión en este caso) que a su vez ocasionaría un pequeño retesado elástico del tendón. Esta contribución es un infinitésimo de orden superior al que estamos considerando y que podemos desprestigiar, al hacer los intervalos  $(t_i, t_{i-1})$  suficientemente pequeños.

La expresión de partida es la obtenida en (6).

$$\Delta\sigma''_{s,i} (1 + \lambda n_1) = E_s \Delta e''_{s,i} (\Delta\sigma''_{s,i}) \quad (6)$$

El término de la derecha es la "relajación" calculada en (3), teniendo en cuenta el modelo desarrollado por los autores y la idea de Glodowski y Hoff. Con la notación utilizada en (2b) la deformación plástica en el intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ , viene dada por

$$\Delta e''_{s,i} = \left[ \frac{\sigma_{ef}(\sigma_{i-1} - \Delta\sigma''_{s,i}, t'_{i-1} + \Delta t)}{P} \right]^m - \left[ \frac{\sigma_{ef}(\sigma_{i-1}, t'_{i-1})}{P} \right]^m \quad (13)$$

y las pérdidas por "relajación" valdrán:

$$\Delta\sigma''_{s,i} = \frac{E_s}{1 + \lambda n_1} \left\{ \left[ \frac{\sigma_{ef}(\sigma_{i-1} - \Delta\sigma''_{s,i}, t'_{i-1} + \Delta t)}{P} \right]^m - \left[ \frac{\sigma_{ef}(\sigma_{i-1}, t'_{i-1})}{P} \right]^m \right\} \quad (14)$$

En conclusión, las pérdidas totales al final del intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$  debidas a la retracción y fluencia del hormigón y a la "relajación" del acero vendrán dadas por la suma de (12) y (14), es decir:

$$\Delta\sigma_{s,i} = \Delta\sigma'_{s,i} + \Delta\sigma''_{s,i}$$

A partir de este resultado se calcula la tensión  $\sigma_{s,i}$  al final del intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$

$$\sigma_{s,i} = \sigma_{s,i-1} - \Delta\sigma_{s,i} \quad (16)$$

y el único parámetro que falta aún por determinar para comenzar el cálculo del intervalo siguiente es el tiempo equivalente  $t'_i$ ; éste se halla igualando las tensiones efectivas para el instante final del intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ :

$$\sigma_{s,i} + \alpha \ln(\nu t'_i) = \sigma_{s,i-1} - \Delta\sigma''_{s,i} + \alpha \ln[\nu(t'_{i-1} + \Delta t_i)] \quad (17)$$

donde la única incógnita es ahora  $t'_i$ . Conocidos los valores de todas las magnitudes al final del intervalo puede comenzarse el cálculo para el intervalo siguiente.

A continuación se describe con detalle un ejemplo numérico.

#### 4. EJEMPLO NUMERICO DE CALCULO

En la Figura 10 se ha representado la sección del ejemplo, junto con los valores más característicos. El hormigón tiene una resistencia característica  $f_{ck} = 35$  MPa, que se supondrá constante para mayor sencillez, (en el artículo siguiente se consideran varios ejemplos con toda generalidad). La armadura activa está constituida por tres cables de 8 cordones de 0,5", con una sección por cordón de 0,929 cm<sup>2</sup>. La fuerza de pretensado inicial, después

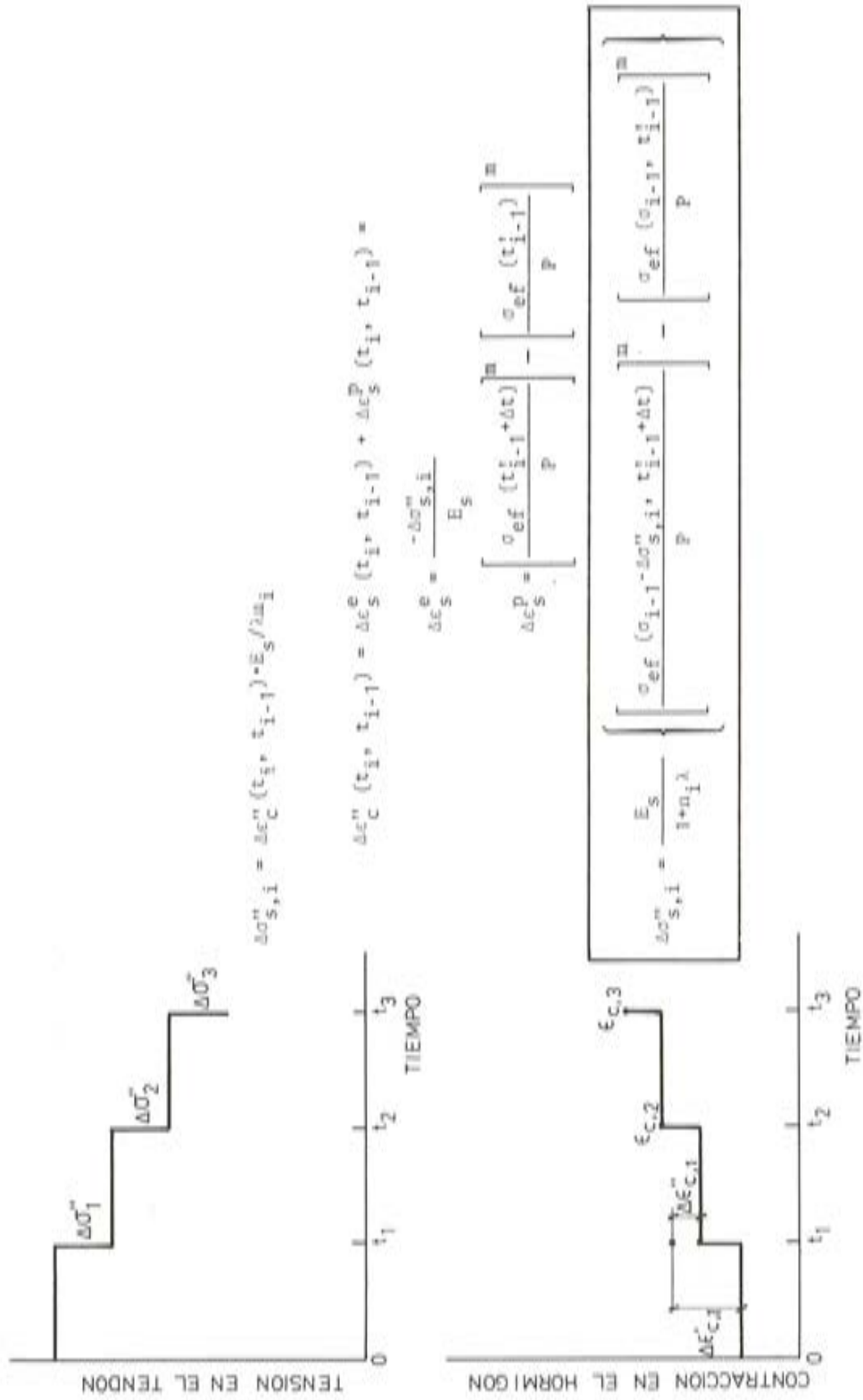


Fig. 9. Pérdidas de tensión por "relajación" del acero en el intervalo (t<sub>i-1</sub>, t<sub>i</sub>).

de descontar las pérdidas por rozamiento, penetración de cuñas y acortamiento elástico del hormigón es de 2963,5 kN. El peso propio y las cargas permanentes ocasionan unas tensiones de tracción en el hormigón a la altura del tendón de  $\sigma_{c,ff} = 13,26$  MPa. Se supone que la viga se encuentra en un ambiente con humedad media del 70%.

Para el cálculo de las pérdidas de pretensado por fluencia-relajación se determinan en primer lugar las características de la sección, que resultan ser

$$\begin{aligned} A_c &= 0,4274 \text{ m}^2 & A_s &= 0,0022296 \text{ m}^2 \\ I_c &= 0,075949 \text{ m}^4 & w &= 0,005217 \\ e &= 0,574 \text{ m} & \lambda &= 0,01489 \end{aligned}$$

Los módulos de elasticidad del hormigón y del acero son, respectivamente:

$$\begin{aligned} E_c &= 19.000 \sqrt{f_{ck}} = 35.000 \text{ MPa} & n &= 5,626 \\ E_s &= 200.000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Los valores iniciales de las tensiones son

$$\begin{aligned} \sigma_{s,po} &= \frac{F_0}{A_s} = \frac{2963,5}{24 \cdot 0,929} = 1329 \text{ MPa} & \sigma_{s,o} &= 1329 + 13,26 \cdot 5,626 = 1404 \text{ MPa} \\ \sigma_{c,po} &= \lambda \sigma_{s,po} = 0,01489 \cdot 1329 = 19,79 \text{ MPa} & \sigma_{c,o} &= 19,79 - 13,26 = 6,53 \text{ MPa} \end{aligned}$$

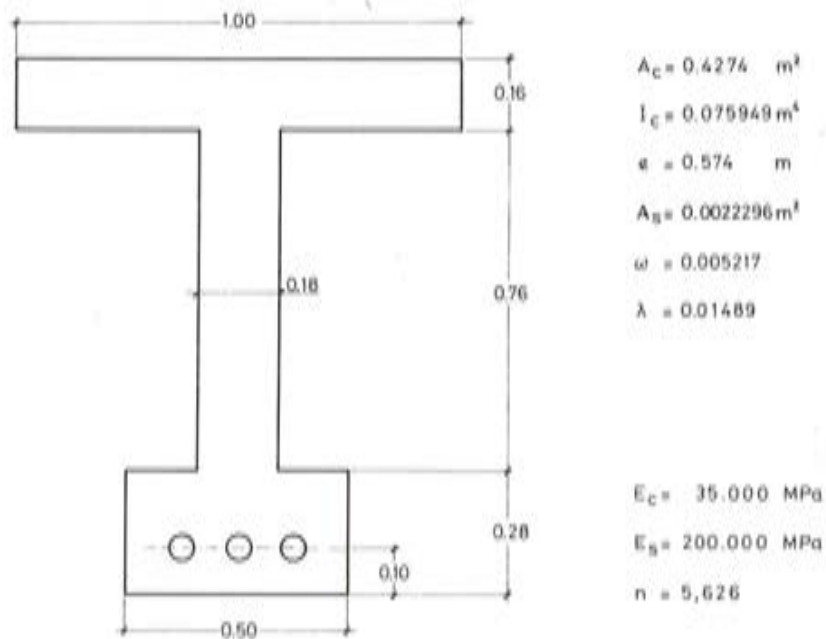


Fig. 10. Sección de hormigón pretensado considerada en el ejemplo.

Para el cálculo de la retracción y fluencia se tienen, de acuerdo con la Instrucción EP80, los datos siguientes:  $\epsilon_0 = -25 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha = 1,5$ , espesor ficticio  $e = 26$  cm,  $\varphi_0 = 2$ . Se supondrá que la puesta en carga tiene lugar cuando el hormigón tiene una edad despreciable (lo que deja del lado de la seguridad).

Para el cálculo de la relajación se supondrá que el acero cumple la ley propuesta por los autores y sus parámetros deducidos de un ensayo normalizado valen  $P = 3230$  MPa y  $m = 31,9$ .

Como ejemplo se realiza el cálculo de las pérdidas de pretensado a 5000 días dividiendo el período en 8 intervalos, de forma aproximadamente constante en escala logarítmica. En cada intervalo se utilizan las expresiones (12) y (14) para obtener las pérdidas de tensión en el acero por fluencia y retracción  $\Delta\sigma'_{s,i}$  y por relajación  $\Delta\sigma''_{s,i}$  que se suman al final del intervalo para obtener la pérdida total de tensión en el acero  $\Delta\sigma_{s,i}$ .

*Primer intervalo (0-3 días)  $\Delta t = 259200$  s*

$$\sigma_{s,0} = 1404 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ef,0} = 1404 + 28 \ln 10^{13} \cdot 120 = 2376,2 \text{ MPa} \quad (\text{hipótesis; tiempo de carga 2 minutos})$$

Para 3 días la retracción es  $\epsilon_{r,1} = \beta_t \epsilon_0 = 0,075 \cdot 25 \cdot 10^{-5}$  y la fluencia es  $\varphi(3,0) = 0,12$ .

Las pérdidas por retracción y fluencia serán:

$$\Delta\sigma'_{s,1} = \frac{6,53 \cdot 5,626 \cdot 0,12 + 2 \cdot 10^5 \cdot 0,075 \cdot 25 \cdot 10^{-5}}{1 + 5,626 \cdot 0,01489} = 7,5 \text{ MPa}$$

Las pérdidas por relajación valdrán:

$$\frac{\Delta\sigma''_{s,1}}{2 \cdot 10^5} (1 + 5,626 \cdot 0,01489) = \left[ \frac{1404 - \Delta\sigma'_{s,1} + 28 \ln 10^{13} \cdot 259200}{3230} \right]^{31,9} - \left[ \frac{2376,2}{3230} \right]^{31,9}$$

de donde

$$\Delta\sigma''_{s,1} = 63,6 \text{ MPa}$$

Las pérdidas totales se obtienen sumando las anteriores:

$$\Delta\sigma_{s,1} = 7,5 + 63,6 = 71,1 \text{ MPa}$$

y por consiguiente:

$$\sigma_{s,1} = 1404 - 71,1 = 1332,9 \text{ MPa}$$

La tensión efectiva y el tiempo equivalente, necesarios para los cálculos del siguiente intervalo son:

$$\sigma_{ef,1} = 1404 - 63,6 + 28 \ln 10^{13} \cdot 259200 = 2527,57 \text{ MPa}$$

$$t'_1 = 4,842 \cdot 10^5 \text{ seg., deducido de } 2527,57 = 1332,9 + 28 \ln 10^{13} t'_1$$

Segundo intervalo (3-9 días)  $\Delta t = 518.400 \text{ seg.}$ ,  $t_1' + \Delta t = 1,0026 \cdot 10^6 \text{ seg.}$

Los datos de retracción y fluencia a considerar son

$$\epsilon_{r,2} = 0,107 \cdot 25 \cdot 10^{-5}$$

$$\varphi(9,0) = 0,268 \quad \text{y} \quad \varphi(9,3) = 0,250$$

con lo cual

$$\Delta\sigma_{s,2}' = \frac{6,53 \cdot 5,626(0,268 - 0,12) + 2 \cdot 10^5(0,107 - 0,075) \cdot 25 \cdot 10^{-5} - 71,1 \cdot 5,626 \cdot 0,01489 \cdot 0,250}{1 + 5,626 \cdot 0,01489}$$

$$\Delta\sigma_{s,2}' = 5,1 \text{ MPa}$$

$$\frac{\Delta\sigma_{s,2}''}{2 \cdot 10^5} (1 + 5,626 \cdot 0,01489) = \left[ \frac{1332,9 - \Delta\sigma_{s,2}'' + 28 \ln 10^{13} \cdot 1,0026 \cdot 10^6}{3230} \right]^{31,9} - \left[ \frac{2527,57}{3230} \right]^{31,9}$$

y, por consiguiente:

$$\Delta\sigma_{s,2}'' = 15,4 \text{ MPa}$$

y las pérdidas totales en este intervalo serán:

$$\Delta\sigma_{s,2} = 5,1 + 15,4 = 20,5 \text{ MPa}$$

La tensión y el nuevo tiempo equivalente valdrán:

$$\sigma_{s,2} = 1332,9 - 20,5 = 1312,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ef,2} = 1332,9 - 15,4 + 28 \ln 10^{13} \cdot 1,0026 \cdot 10^6 = 2542,55 \text{ MPa}$$

$$t_2' = 1,203 \cdot 10^6 \text{ seg.}, \text{ deducido de } 2542,55 = 1312,4 + 28 \ln 10^{13} t_2'$$

El cálculo se realiza de forma análoga para todos los intervalos de tiempo considerados. En la Tabla siguiente se han resumido los resultados del cálculo, con lo que la pérdida de tensión final en el acero es  $\Delta\sigma_s = 234,4 \text{ MPa}$  y las tensiones remanentes en acero y hormigón son, por tanto:

$$\sigma_s = 1169,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = 1169,6 \cdot 0,01489 - 13,26 = 4,15 \text{ MPa (de compresión)}$$

En la Figura 11 se han representado las pérdidas de tensión y la contracción del hormigón debido al efecto combinado de la fluencia y retracción del hormigón y a la relajación del acero.

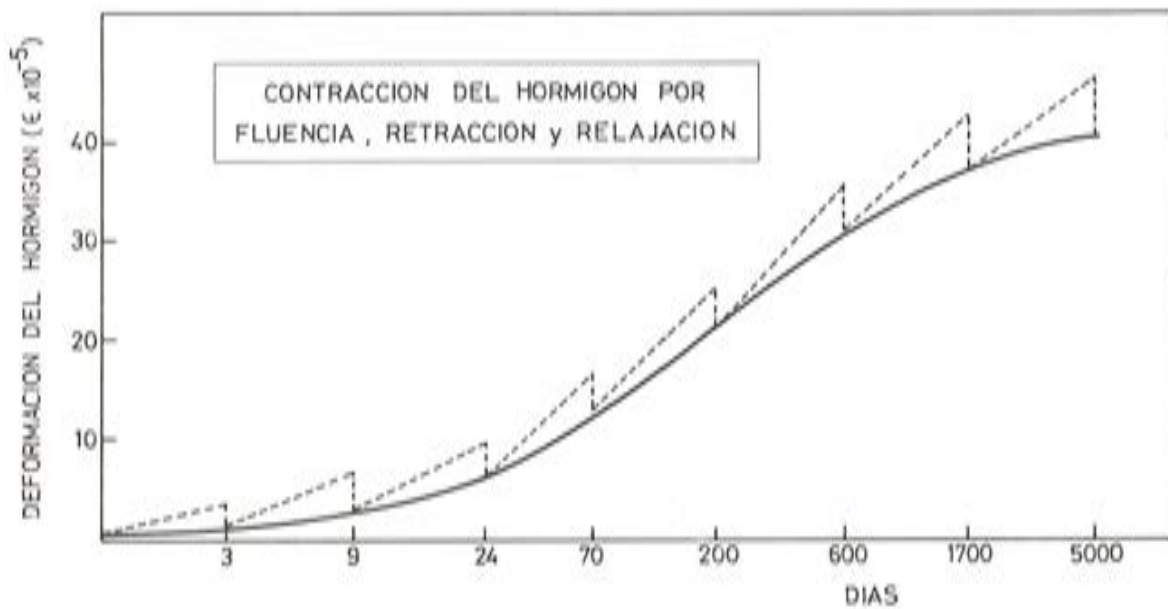
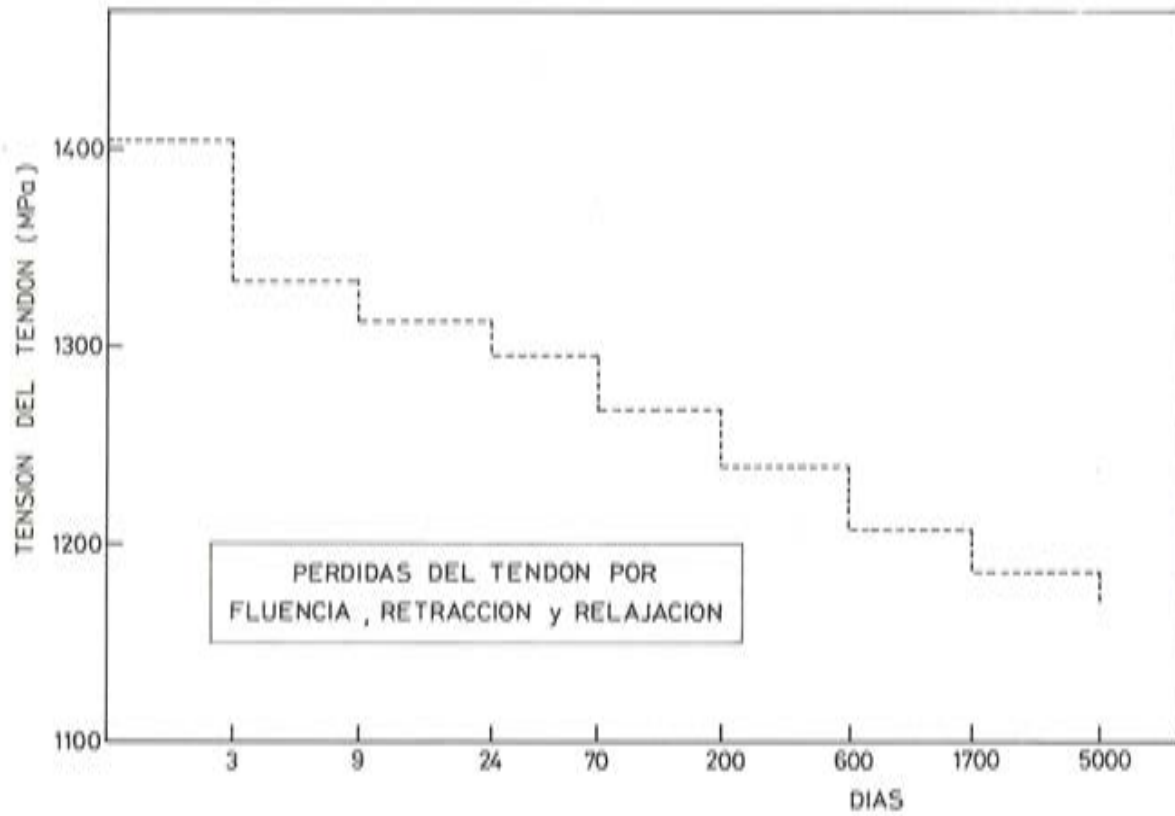


Fig. 11. Pérdidas de tensión y contracción del hormigón por efecto combinado de la fluencia y retracción del hormigón y la relajación del acero.

PERDIDAS DE PRETENSADO POR FLUENCIA Y RELAJACION

INTERVALO	$t_i$ (DIAS)	$\sigma_{s,i}$ (MPa)	$\sigma_{ef}$ (MPa)	$\Delta\sigma'_{s,i}$ (MPa)	$\Delta\sigma''_{s,i}$ (MPa)	$\Delta\sigma_{s,i}$ (MPa)	$t_i'$ (seg)
	0	1404	2376,2				
1	3	1332,9	2527,57	7,5	63,6	71,1	
2	9	1312,4	2542,5	5,1	15,4	20,5	$4,842 \cdot 10^5$
3	24	1294,7	2551,92	6,6	11,1	17,7	$1,203 \cdot 10^6$
4	70	1267,6	2561,70	14,1	13,0	27,1	$3,163 \cdot 10^6$
5	200	1238,7	2569,32	17,8	11,1	28,9	$1,180 \cdot 10^7$
6	600	1207,7	2575,59	20,9	10,1	31,0	$4,351 \cdot 10^7$
7	1700	1185,9	2580,24	13,7	8,1	21,8	$1,646 \cdot 10^8$
8	5000	1169,6		7,0	9,3	16,3	$4,236 \cdot 10^8$
Totales				92,7	141,7	234,4	

REFERENCIAS

- [1] CEB-FIP "Model code for concrete structures".
- [2] PCI Committee on Prestress Losses. "Recommendations for Estimating Prestress Losses" PCI Journal, V. 20, N° 4, July-August 43-75 (1975).
- [3] Sánchez Gálvez, V., Elices, M., Astiz, M.A. "A new formula for relaxation of stress-relieved steels". Materials and Structures, V. 9, N° 54, 411-417 (1976).
- [4] Sánchez Gálvez, V., Elices, M., Erdelyi, A., Kosiorek, M. "Stress relaxation due to steam curing". Materials and Structures, V. 10, N° 60, 351-356 (1977).
- [5] Glodowski, R.J., Hoff, G.E. "Stress relaxation of steel tendons used in prestressed concrete under conditions of changing applied stress" ASTM STP 676, A. Fox Ed., 42-58 (1979).

## **Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 2.Comprobación experimental**

Vicente Sánchez Gálvez y Manuel Elices Calafat  
Departamento de Física y Física de Materiales  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid

### **1. INTRODUCCION**

En un artículo precedente, los autores han presentado un nuevo método de cálculo de las pérdidas de pretensado diferidas (1). Este nuevo método de cálculo trata las pérdidas por relajación al mismo nivel que las pérdidas por fluencia y puede realizarse en pocos minutos con la ayuda de una pequeña calculadora programable.

En este artículo se presenta la comprobación experimental del método de cálculo desarrollado por los autores. En la primera parte se comparan las predicciones teóricas con resultados experimentales de ensayos de relajación a longitud decreciente realizados por Cahill (2) y por Glodowski y Hoff (3). En la segunda parte se comparan las predicciones teóricas con resultados experimentales de pérdidas de pretensado en vigas de hormigón, en ensayos realizados por Atallah (4) y por Ghali y Demorieux (5). Tanto en un caso como en el otro, se observa una buena concordancia entre las pérdidas de tensión que predice el método de cálculo y las obtenidas en los ensayos, lo que confirma la validez del método.

Así pues, el método de cálculo propuesto por los autores constituye una herramienta útil para la predicción de las pérdidas de pretensado diferidas. Trata la relajación del acero al mismo nivel de precisión que la retracción y la fluencia del hormigón y queda suficientemente validado experimentalmente, de forma que puede afirmarse que a partir de datos del material obtenidos por medio de ensayos sencillos pueden predecirse las pérdidas de pretensado diferidas con gran precisión.

### **2. ENSAYOS DE RELAJACION A LONGITUD DECRECIENTE**

El procedimiento experimental más sencillo de comprobar la validez de un método de cálculo de las pérdidas de tensión por fluencia y relajación lo constituyen los ensayos de relajación a longitud decreciente.

En los ensayos de relajación normalizados, la probeta de acero tras ser sometida a tensión se mantiene a longitud constante y se miden las pérdidas de tensión con el tiempo. En un ensayo de relajación a longitud decreciente, la probeta de acero se carga y se miden las pérdidas de tensión, pero no se mantiene constante su longitud sino que ésta se reduce ar-

tificialmente para tener en cuenta, de alguna forma, el efecto sobre el tendón que produce en la realidad el acortamiento del hormigón por fluencia y retracción.

Ensayos de este tipo los han realizado Glodowski y Hoff (3), estudiando el efecto sobre la relajación de una reducción artificial brusca y única de la tensión del acero en un instante dado y Cahill (2), que estudia la evolución de la pérdida de tensión en el acero cuando se reduce artificialmente la longitud de la probeta varias veces a lo largo del ensayo, simulando una ley de acortamiento con el tiempo típica de fluencia en el hormigón. En este apartado se van a comparar los resultados experimentales obtenidos por estos autores con las predicciones teóricas del método de cálculo propuesto.

Glodowski y Hoff (3) han realizado ensayos de relajación con un acero de 1700 MPa de resistencia y 1540 MPa de límite elástico y a tres tensiones iniciales distintas: 77%, 79,5% y 83% del límite elástico. Han realizado tanto ensayos de relajación clásicos —a longitud constante— como ensayos en los que, tras un periodo de tiempo determinado, se redujo artificialmente la longitud del tendón, de forma que la tensión en el acero disminuyera en 38,5 MPa para los ensayos con tensión inicial del 79,5% del límite elástico o en 92,4 MPa para los ensayos con tensión inicial del 83% del límite elástico. Es decir una reducción brusca de la tensión igual a la diferencia entre la tensión inicial del ensayo y el 77% del límite elástico.

Para la predicción teórica de los resultados de los ensayos a longitud decreciente a partir del modelo propuesto, se parte de los resultados de los ensayos de relajación a longitud constante. Los resultados de estos ensayos se recogen en un gráfico doblemente logarítmico llevando  $e^p$  frente a  $\sigma_{ef}$ :

$$e^p = e_0^p + \frac{\Delta \sigma}{E}$$

$$\sigma_{ef} = \sigma_0 - \Delta \sigma + \alpha \ln(\nu t)$$

donde  $e_0^p$  es la deformación plástica inicial (para el tiempo de carga),  $\Delta \sigma$  la pérdida de tensión en el ensayo en el instante  $t$  y  $\sigma_0$ ,  $\alpha$ ,  $E$  y  $\nu$  tienen los significados ya expresados. Como se observa en la Figura 1, todos los resultados experimentales se sitúan sobre una recta, confirmando la validez de la fórmula

$$e^p = \left[ \frac{\sigma_{ef}}{P} \right]^m$$

y permitiendo deducir los valores de los parámetros experimentales  $P$  y  $m$  que para el acero considerado resultan  $P = 3145$  MPa y  $m = 31,86$ .

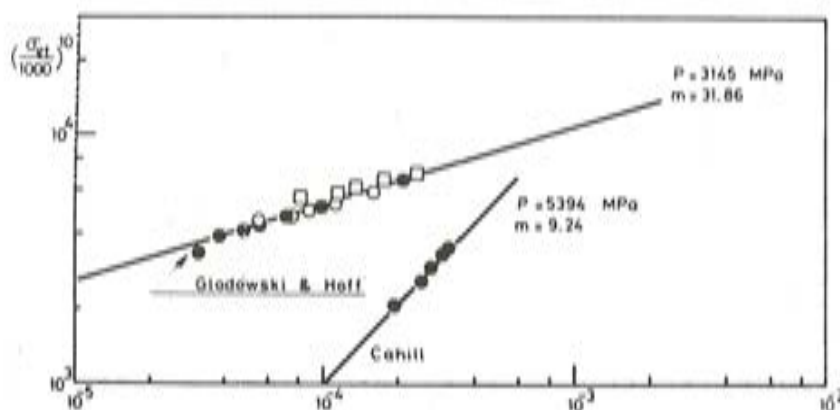


Figura 1. Características de los aceros de las referencias (2) y (3), obtenidas a partir de ensayos de relajación isotérmica.

Una vez calculados  $P$  y  $m$ , pueden deducirse las pérdidas de tensión en los ensayos a longitud decreciente. Si llamamos  $t$  al instante en que se reduce artificialmente la tensión en un valor determinado  $\Delta\sigma_1$ , las expresiones del modelo que permiten obtener la pérdida de tensión  $\Delta\sigma$  en todo instante  $t$  resultan:

Para  $t < t_1$

$$\frac{\Delta\sigma}{E} = \left\{ \frac{\sigma_0 - \Delta\sigma + \alpha \ln(\nu t)}{P} \right\}^m - \left\{ \frac{\sigma_0 + \alpha \ln(\nu t_0)}{P} \right\}^m$$

El tiempo equivalente  $t'_1$ , se calcula a partir de

$$\sigma_0 + \alpha \ln(\nu t_1) = \sigma_0 - \Delta\sigma_1 + \alpha \ln(\nu t'_1)$$

Para  $t > t_1$

$\Delta\sigma = \Delta\sigma(t = t_1) + \Delta\sigma''$ , donde  $\Delta\sigma''$  se obtiene de

$$\frac{\Delta\sigma''}{E} = \left\{ \frac{\sigma_1 - \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma'' + \alpha \ln[\nu(t'_1 + t - t_1)]}{P} \right\}^m - \left\{ \frac{\sigma_1 - \Delta\sigma_1 + \alpha \ln(\nu t'_1)}{P} \right\}^m$$

Con estas expresiones se han determinado los puntos de las Figuras 2 y 3 que pueden compararse con los resultados experimentales para los ensayos en que se redujo la tensión a las 24 y a las 72 horas respectivamente, comprobándose que la aproximación alcanzada es excelente.

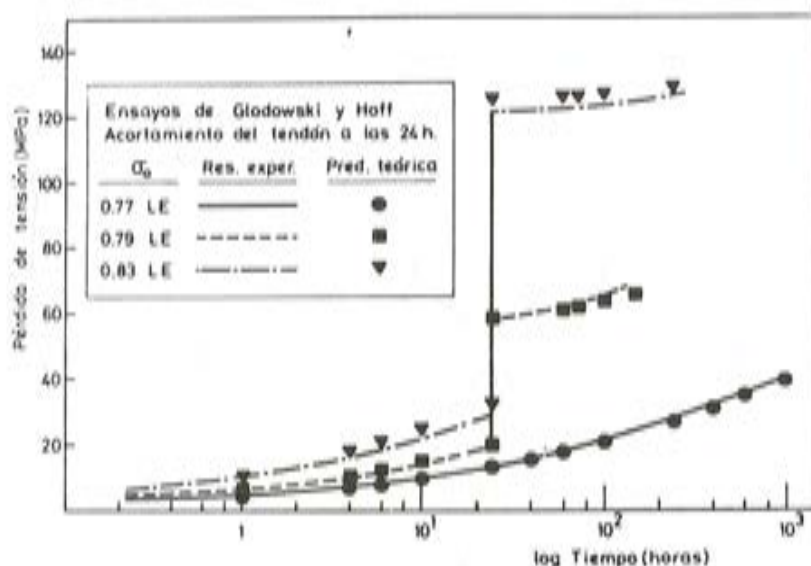


Figura 2. Pérdidas por relajación, con una variación brusca de la longitud del tendón a las 24 horas. Comparación de los resultados experimentales (Ref. 3) y las predicciones teóricas basadas en la Ref. 1.

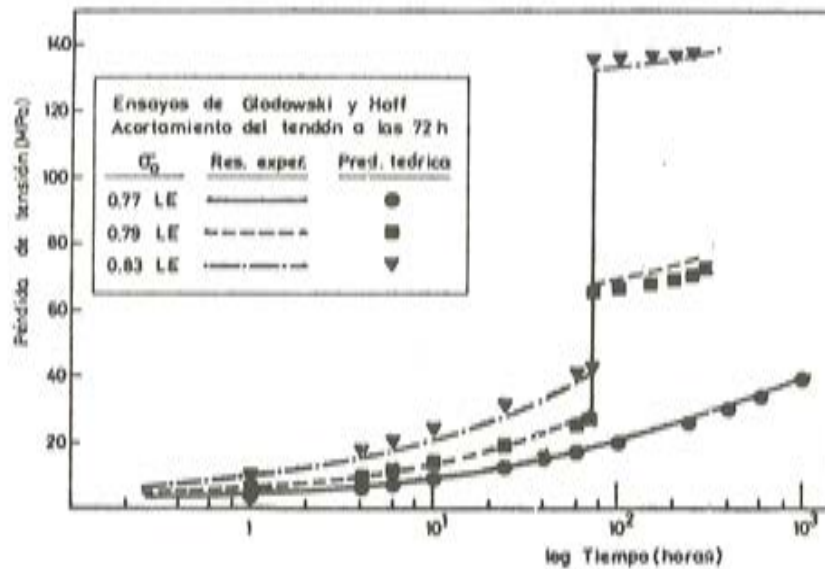


Figura 3. Pérdidas por relajación, con una variación brusca de la longitud del tendón a las 72 horas. Comparación de los resultados experimentales (Ref. 3) y las predicciones teóricas basadas en la Ref. 1.

Por otro lado, Cahill (2) realizó ensayos similares, pero en los que la reducción artificial de longitud del tendón tuvo lugar en varios pasos sucesivos siguiendo una secuencia similar a la que se observa experimentalmente en un fenómeno de fluencia del hormigón típico. El tratamiento de los datos se realiza en este caso de forma totalmente análoga, si bien no existe un solo paso sino varios. En primer lugar, a partir de los resultados experimentales de un ensayo de relajación clásico a longitud constante se llevan en un gráfico doblemente logarítmico  $\epsilon^P$  frente a  $\sigma_{ef}$ , obteniéndose la recta que muestra la Figura 1, lo que permite determinar los valores de los parámetros P y m para el acero utilizado por Cahill. Estos parámetros resultan en este caso  $P = 5394 \text{ MPa}$  y  $m = 9,24$ .

Finalmente pueden calcularse las pérdidas de tensión en el ensayo de relajación a longitud decreciente utilizando las expresiones del modelo:

Para un intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ , siendo  $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ , si se conocen los valores de la tensión  $\sigma_{i-1}$  y del tiempo equivalente  $t_{i-1}^*$  al comienzo del intervalo y si se denomina  $\Delta \sigma_i'$  a la reducción artificial de tensión al final del intervalo, la pérdida de tensión por "relajación" durante el intervalo,  $\Delta \sigma_i''$ , y el tiempo equivalente,  $t_i^*$ , al final del intervalo se obtienen de las expresiones del modelo:

$$\frac{\Delta \sigma_i''}{E} = \left\{ \frac{\sigma_{i-1} - \Delta \sigma_i'' + \alpha \ln [\nu (t_{i-1}^* + \Delta t)]}{P} \right\}^m - \left\{ \frac{\sigma_{i-1} + \alpha \ln (\nu t_{i-1}^*)}{P} \right\}^m$$

$$\sigma_{i-1} - \Delta \sigma_i'' - \Delta \sigma_i' + \alpha \ln (\nu t_i^*) = \sigma_{i-1} + \sigma_{i-1} - \Delta \sigma_i'' + \alpha \ln [\nu (t_{i-1}^* + \Delta t)]$$

La pérdida total de tensión es por tanto

$$\Delta \sigma_i = \Delta \sigma_i' + \Delta \sigma_i''$$

y la tensión  $\sigma_i$  al final del intervalo resulta inmediatamente

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} - \Delta \sigma_i' - \Delta \sigma_i''$$

con lo que se conocen ya todas las magnitudes necesarias para el cálculo de las pérdidas de tensión en el intervalo siguiente.

Este es el procedimiento seguido para la predicción de los resultados del ensayo de Cahill. La tensión inicial es de 116,5 MPa y el periodo de ensayo (144 horas) se ha dividido en 5 intervalos de tiempo (0-1 h.), (1-8 h.), (8-24 h.), (24-100 h.) y (100-144 h.) al final de los cuales la reducción artificial de tensión en el tendón ha sido de 4,5, 15,6, 14,5, 24,6 y 6,7 MPa respectivamente.

Los resultados del cálculo se recogen en la figura 4 junto con la curva que sigue la evolución de las pérdidas de tensión observadas experimentalmente. Asimismo se ha recogido en la misma figura los resultados experimentales y las predicciones del modelo respecto del ensayo de relajación a longitud constante. Puede comprobarse que en ambos casos la concordancia entre los resultados empíricos y la predicción teórica es excelente, confirmando la validez del modelo.

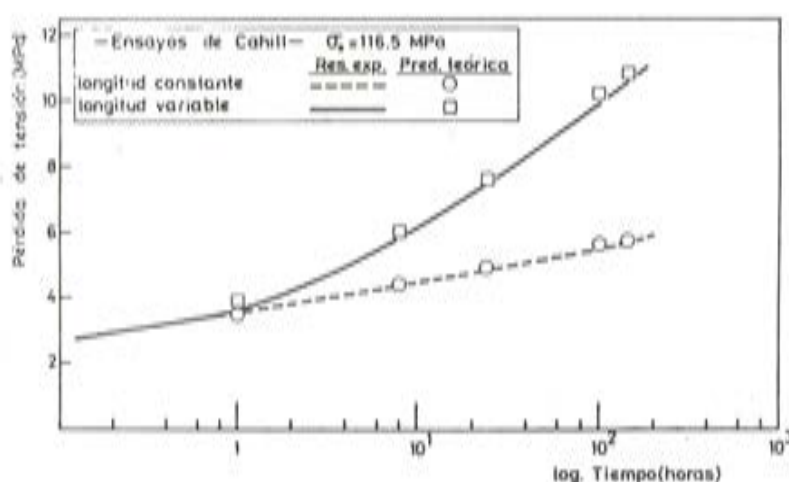


Figura 4. Pérdidas por "relajación", con variación escalonada de la longitud del tendón. Comparación de los resultados experimentales (Ref. 2) y las predicciones teóricas basadas en la Ref. 1.

### 3. ENSAYOS DE FLUENCIA-RELAJACION COMBINADAS

El paso final para la comprobación de la validez del modelo consiste en comparar las predicciones teóricas del mismo con resultados experimentales de ensayos de fluencia-relajación combinadas. Se han utilizado para esta comprobación los resultados de ensayos realizados por Atallah (4) y por Ghali y Demorieux (5).

Estos últimos autores midieron las pérdidas diferidas de pretensado en varias vigas de hormigón pretensado. Con el fin de comprobar el modelo se ha realizado el cálculo de las pérdidas de tensión para una de ellas, la denominada A1. Los datos de la viga son los siguientes:

- Sección rectangular de 400 x 150 mm<sup>2</sup>, con 4 barras de acero de armar de 5 mm de diámetro.
- Tendón constituido por 3 alambres rectos de 10 mm de diámetro situado en el centro de gravedad de la sección.

La viga se tesó cuando la edad del hormigón era de 2,75 días. La tensión inicial en el

tendón fue  $\sigma_{s,0} = 1277,5$  MPa después de las pérdidas instantáneas. En cuanto a los materiales de la viga, se tienen los siguientes datos:

El acero de pretensado tiene un módulo de elasticidad de 204000 MPa. Un ensayo de relajación a longitud constante con tensión inicial de 1263,1 MPa da unas pérdidas de tensión de 147 MPa a los 15 días y 202 MPa a los 193 días.

El módulo de elasticidad del hormigón se ha observado experimentalmente que varía con la edad según la fórmula

$$E = \frac{38070 t + 355}{t + 15,65}$$

donde t es la edad en días y E se mide en MPa.

Se tienen datos de retracción ( $27 \cdot 10^{-5}$  a los 196 días) pero no de fluencia del hormigón.

A partir de estos datos, se han calculado las magnitudes que se utilizan en el cálculo obteniéndose los siguientes valores:

$A_s$	= 235,62 mm <sup>2</sup>	$n$	= 8,35	$\sigma_{s,0}$	= 1277,5 MPa
$E_s$	= 204000 MPa	$w = \lambda$	= $3,9 \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{c,0}$	= 4,98 MPa
$A_c$	= 60342 mm <sup>2</sup>	$e$	= 0		
$E_{c,28}$	= 24429 MPa				

En primer lugar, a partir de los datos de relajación del acero, se han determinado los parámetros de la fórmula obteniéndose  $P = 2860,7$  MPa y  $m = 37,3$ .

A continuación, como no se tienen datos de fluencia, se han utilizado los gráficos de la Instrucción EP80 con espesor ficticio 12,76 cm y  $\varphi_0 = 2,67$ .

El cálculo de las pérdidas diferidas de tensión se ha realizado dividiendo el período total de ensayo (196 días) en 8 intervalos: (2,75-4 días), (4-10 días), (10-18 días), (18-28 días), (28-56 días), (56-84 días), (84-112 días) y (112-196 días). Los resultados del cálculo siguiendo el modelo propuesto se reflejan en la Figura 5 junto con las pérdidas de tensión medidas experimentalmente. Como puede verse la concordancia entre resultados empíricos y predicciones teóricas es excelente.

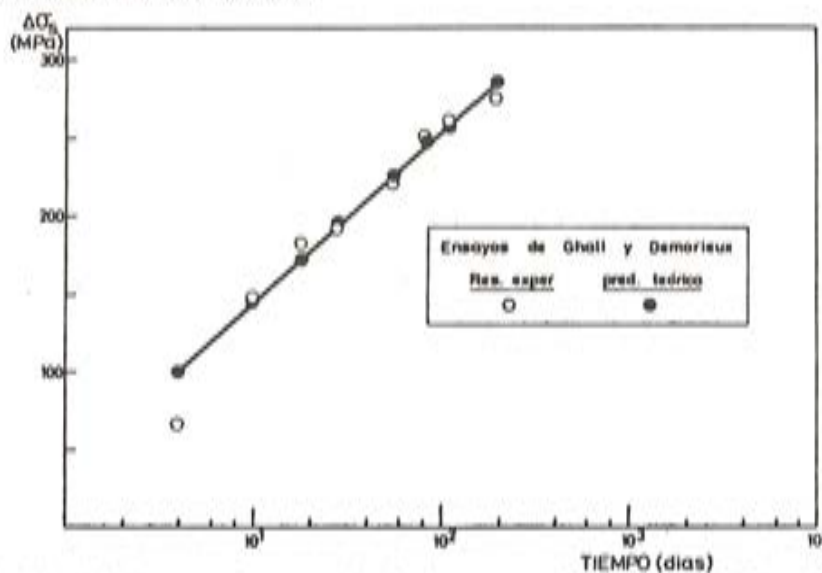
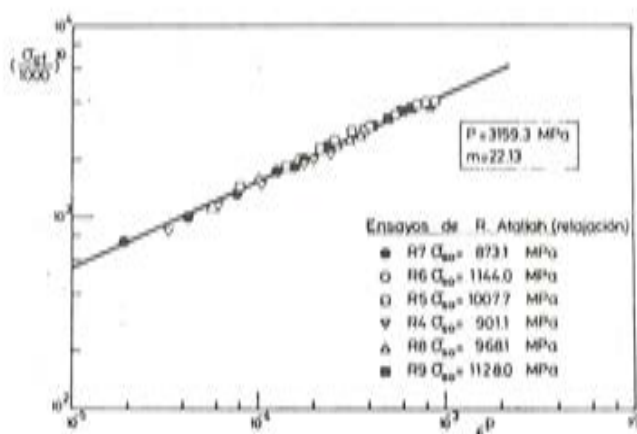


Figura 5. Pérdidas diferidas por efecto combinado de la retracción y fluencia del hormigón y relajación del acero. Comparación de los resultados experimentales (Ref. 5) y las predicciones teóricas basadas en la Ref.1.

Finalmente, se han utilizado también los resultados de los ensayos de fluencia-relajación de Atallah (4) para una mayor verificación del modelo.

Los datos de relajación del acero utilizado se han elaborado, llevándose a un gráfico  $\sigma_{ef} - \epsilon^p$  en escala doblemente logarítmica, obteniéndose el diagrama que muestra la Figura 6. Como puede observarse, la aproximación de los resultados experimentales por una recta en esta escala es muy satisfactoria, y ello permite determinar los valores de los parámetros  $P$  y  $m$  para el acero utilizado por Atallah, obteniéndose  $P = 3159,3$  MPa,  $m = 22,13$ .

Fig. 6. Los resultados de seis ensayos de relajación (Ref. 4), con distintas tensiones iniciales, se agrupan sobre la misma recta, según predice la teoría (Ref. 1).



El siguiente paso ha consistido en elaborar los datos de fluencia del hormigón utilizado, para expresarlos en la forma

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_{c,28}} \varphi(t, t_0)$$

Como puede observarse en la Figura 7, cuando se expresan los datos de fluencia de esta manera, todos los resultados para distintas tensiones en el hormigón se funden en una sola curva. Dado que la edad del hormigón de las probetas era de 6 meses en el momento de su puesta en carga, se supondrá en el cálculo de las pérdidas de tensión diferidas que el hormigón había endurecido suficientemente para adoptar la misma curva de la Figura 7 para el cálculo de la fluencia debida a las descargas sucesivas.

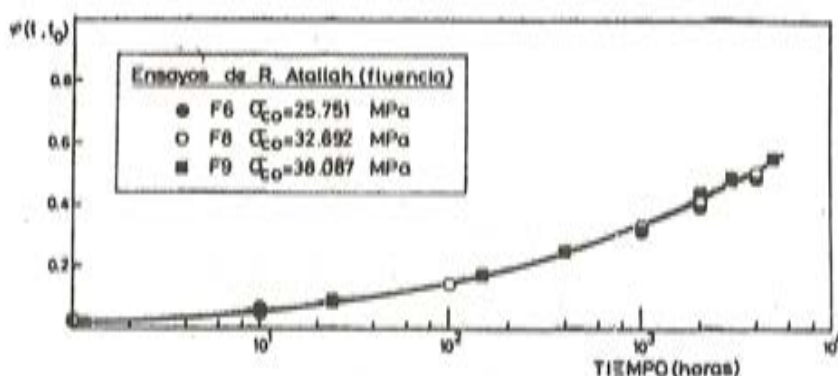
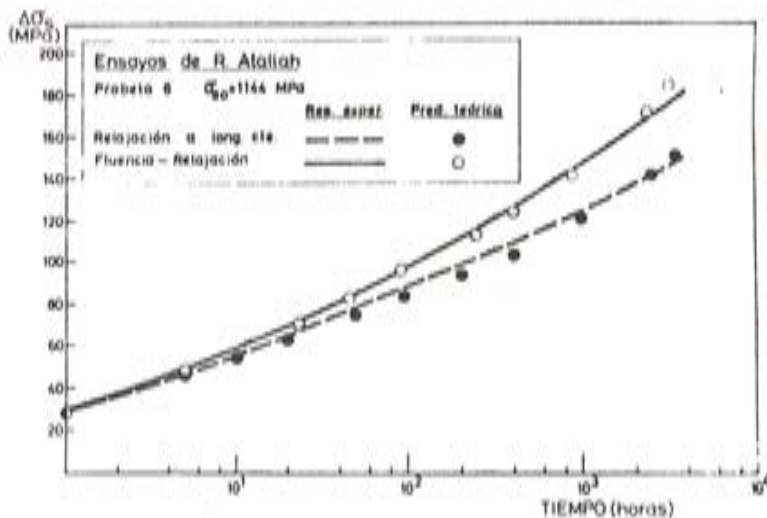
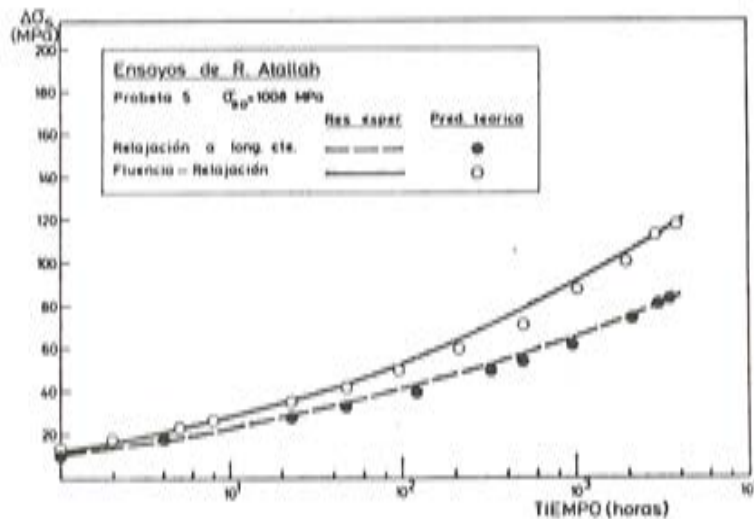


Figura 7. Resultados de tres ensayos de fluencia del hormigón, según la Referencia (4).

En las Figuras 8, 9 y 10 se representan los resultados del cálculo de las pérdidas de tensión diferidas para tres de las probetas ensayadas por Atallah utilizando el modelo propuesto y se comparan con las observaciones experimentales. El cálculo se ha realizado dividiendo el período total de ensayo en 6 intervalos. Como puede observarse, una vez más se encuentra una excelente concordancia entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas del modelo, confirmando la validez de éste para obtener las pérdidas diferidas de tensión por fluencia y relajación combinadas.



Figuras 8 y 9, Pérdidas diferidas por efecto combinado de la fluencia del hormigón y la relajación del acero. Comparación de los resultados experimentales (Ref. 4) y las predicciones teóricas basadas en la Referencia 1. También se han representado los datos de la relajación del acero.

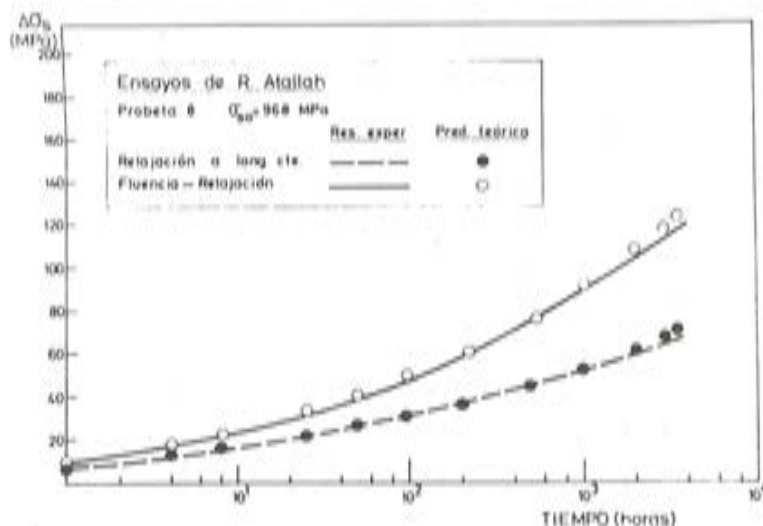


Figura 10. Pérdidas diferidas por efecto combinado de la fluencia del hormigón y la relajación del acero. Comparación de los resultados experimentales (Ref. 4) y las predicciones teóricas basadas en la Referencia 1. También se han representado los datos de la relajación del acero.

#### 4. CONCLUSIONES

El modelo teórico propuesto, basado en la Ciencia de Materiales, permite predecir la pérdida de tensión por relajación del acero de pretensar tanto en condiciones de longitud constante (ensayos normalizados de relajación) como en ensayos en los que se reduce artificialmente la longitud del tendón.

La utilización conjunta de las expresiones deducidas para la relajación del acero a longitud decreciente junto a las fórmulas de fluencia y retracción del hormigón conduce a un método de cálculo de las pérdidas de pretensado diferidas que considera el efecto combinado de ambos fenómenos, dividiendo el período de estudio en intervalos en cada uno de los cuales la fluencia y retracción del hormigón y la relajación del acero se calculan por separado. El cálculo puede llevarse a cabo en pocos minutos con la ayuda de una calculadora programable.

El modelo se ha comprobado, comparando las predicciones teóricas del mismo con las observaciones experimentales tanto de ensayos de relajación a longitud decreciente como de ensayos de fluencia-relajación combinadas.

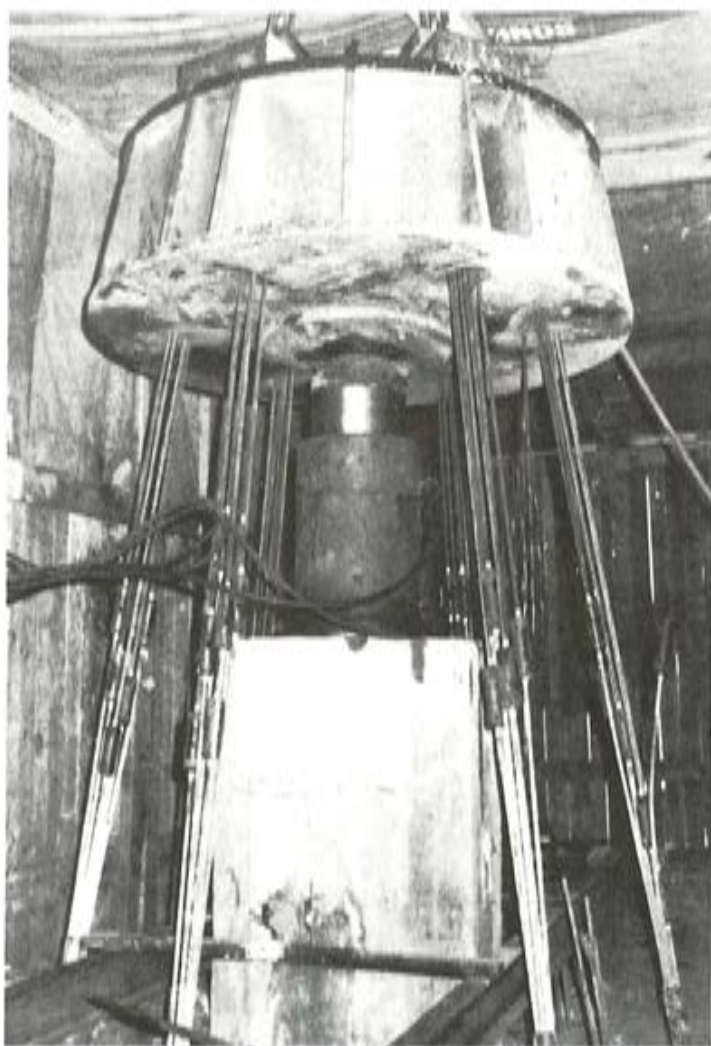
#### REFERENCIAS

- (1) Sánchez Gálvez, V., Elices, M., "Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación. I. Teoría". Hormigón y Acero. Nº 153, 4º trimestre 1984, (Pág. 95).
- (2) Cahill, T., "Modification of Relaxation in Prestressing Wires due to Creep of Concrete". GKN Report.
- (3) Glodowski, R.J. y Hoff, G.E., "Stress Relaxation of Steel Tendon used in Prestressed Concrete under conditions of changing applied stress" en Stress Relaxation Testing. ASTM STP 689, 1979.
- (4) Atallah, R., "Contribution a l'Etude de la perte de précontrainte par fluage-relaxation combinés dans les éléments en béton précontraint". Revue de l'Industrie Minérale, Junio 15, 1972.
- (5) Ghali, A. y Demorieux, J.M., "Une méthode de calcul de la perte de précontrainte et sa vérification expérimentale" Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. N. 286, Octobre 1971.

# INTEMAC



## INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Prueba de carga  
de un pilote.

### MADRID

Oficinas:  
Monte Esquinza, 30 - 4º D  
MADRID-4  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:  
Carretera de Losches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. (91) 675 31 00/04/08

### BARCELONA

Pasaje Busquets, 37  
CORNELLA DE LLOBREGAT  
Tels. (93) 377 43 58/62

## Patología 3. Reparación de pilares de hormigón mediante zunchado

Por Antonio González Serrano  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Experto en Patología y Hormigón

*¡ aquel Cristo que no arco de pedra  
abatido a frente incrina,  
soio, cal si inda no Gólgota  
loitase coas agonías,  
ós corazóns oprimidos  
resignación lle infudía.*

*Rosalía de Castro.*

*A miña nai  
"na sua lembranza."*

### 1. SIPNOSIS

En el presente artículo se exponen diversos sistemas utilizados para reforzar mediante zunchado pilares de hormigón que están infradimensionados para unas determinadas condiciones de servicio de la estructura.

Los sistemas de refuerzo diseñados son siempre refuerzos pasivos, es decir, se trata de refuerzos que no trabajan introduciendo acciones sobre la estructura para poner en carga alguna parte de la misma, sino que refuerzan al pilar en la medida en que este lo necesita.

Este artículo es continuación y sigue la misma línea de los artículos publicados en los números 136 y 142 de esta misma revista, que figuran en la bibliografía con (1) y (2).

## 2. CAUSAS QUE MOTIVAN UN REFUERZO

El refuerzo viene siempre motivado por estar el pilar infradimensionado para unas condiciones determinadas de servicio. Entre las causas más frecuentes que pueden motivar un refuerzo se pueden enumerar las siguientes:

- Utilización futura de la estructura para una sobrecarga superior a la de proyecto.
- Defectos de diseño o de proyecto.
- Errores de ejecución.
- Deterioro, bien sea de forma brusca o bien de forma lenta y progresiva, de los materiales constituyentes del pilar, es decir del hormigón y/o del acero.

Son errores de ejecución las diferencias que se originan entre la obra proyectada y la obra ejecutada. Estas desviaciones pueden presentarse en las resistencias de los materiales (hormigón y/o acero) o en las dimensiones de las secciones. El caso más frecuente es aquel en que el hormigón ha experimentado un descenso en el valor de la resistencia estimada con respecto al valor característico o especificado ( $f_{est} < f_{ek}$ ) y en este caso se ha de determinar la influencia que dicho descenso tiene en la seguridad del elemento.

La forma de tratar este asunto se detalla en el apartado "Repercusiones en la seguridad de los elementos" del artículo "Comentarios al Título 3º del Control de la EH-73", publicado en el número 129 de esta revista en el 4º trimestre del año 1978 por el mismo autor de este trabajo, y también en la "Monografía" 324 del Instituto Eduardo Torroja". Estas publicaciones se reseñan con ( 3 ) y ( 4 ) en la bibliografía.

Aunque en este tema no se pueden dar reglas de carácter general, sino que es necesario que el técnico correspondiente adopte las decisiones oportunas, tras un estudio minucioso y detallado de cada caso en concreto, sin embargo, se puede concluir que los pilares son los elementos estructurales que se ven más afectados ante una caída del valor de la resistencia del hormigón y cuando esta caída del valor de la resistencia es sensible, la decisión final a adoptar suele ser la de reforzar la pieza.

La caída en el valor de la resistencia a la que nos referimos, suele ser en la práctica bastante frecuente y se debe siempre a una variación, empeorando sus características, de algunos de los elementos constituyentes del hormigón. En la mayoría de los casos, la causa que origina la caída en el valor de la resistencia es una variación de las características del cemento que se utiliza para elaborar el hormigón, que, además, es el componente que más se le escapa al control a un constructor.

En efecto, el hormigón es un producto al que la reglamentación existente, la EH-82 y/o la EP-80, le exige unas características de uniformidad que no le son exigidas al cemento, según su reglamentación, la RC-75. Es decir, mientras que al producto hormigón se le juzga por medio de unos estimadores que son centrados y excesivamente sensibles frente a las posibles desviaciones en los resultados de su resistencia, al cemento, por el contrario, para cumplir una determinada categoría, sólo se le exige que su resistencia esté por encima de un valor prefijado en un ensayo de resistencia normalizado según la RC-75. Según esto, si un determinado fabricante de cemento suministra a una obra o usuario una serie de partidas de cemento que cumplen holgadamente con el valor mínimo especificado en la RC-75 y en un instante determinado de su producción suministra una partida de cemento con una resistencia inferior, aunque cumpliendo con el mínimo especificado en la RC-75, el comprador, como no es advertido de esta variación por parte del suministrador, ya que a efectos legales el cemento que vende cumple con la categoría exigida en el pliego, al no aumentar la dosificación del cemento, para compensar de esta forma la deficiencia del suministro, se ve sorprendido, muchas veces en contra de su voluntad, por una caída en el valor de la resistencia. De esta caída en el valor de la resistencia ha de hacerse responsable el construc-

tor, aunque realmente no tenga mucha culpabilidad en el proceso, ya que para no parar su producción de hormigón no pudo analizar con la antelación suficiente la partida de cemento de inferior calidad suministrada.

Una nueva causa que puede originar caídas en el valor de resistencia, es la exigencia por parte de algunos proyectistas de valores de la resistencia especificada elevados que, muchas veces, son impropios e innecesarios en obras de escaso volumen, como ocurre frecuentemente en edificación por ejemplo.

Otra causa que ha motivado refuerzos en estructuras de hormigón, es la degradación del hormigón por carbonatación. Este hecho se produce cuando la película superficial de hormigón carbonatado, que en un hormigón normal pasiva y defiende de este ataque al resto de la masa del hormigón, no puede proteger de este ataque al resto de la masa de hormigón, progresando el fenómeno en profundidad hasta llegar a producirse la total degradación del hormigón, si no se toman medidas idóneas para detener el proceso. Esta carbonatación va siempre acompañada con una disminución del pH del hormigón, hecho que produce una sensible alteración del efecto pasivante que el hormigón tiene sobre las armaduras. Al destruirse este efecto la armadura se corroe formándose el óxido poroso de hierro en capas blandas y superpuestas que se conoce por "herrumbre". Este proceso va siempre acompañado de un gran incremento de volumen o expansión de la armadura, lo que da lugar al desprendimiento del recubrimiento del hormigón debido a las fuertes tensiones internas que se originan. De esta forma se favorece una progresiva degradación del hormigón conjuntamente con la destrucción de la propia armadura. La "explicación química de la degradación del hormigón por carbonatación y de la corrosión de las armaduras" se puede ver en el anejo nº 1 del artículo: "La demolición de los halles centrales de Reims. Una propuesta alternativa de salvación y recuperación", publicado en el número 148 de la revista Hormigón y Acero correspondiente al 3º trimestre de 1983 (5) por el mismo autor de este artículo junto con el Ingeniero de Caminos José Antonio Fernández Ordoñez.

En las fotografías números 1, 2, 3, 4 y 5, se puede ver el estado en que se encontraba el hormigón y las armaduras en unos pilares de una estructura que tuvo la satisfacción de reparar y cuyos daños eran debidos al fenómeno que se ha descrito.

Los Halles Centrales de la ciudad de Reims, obra del insigne Ingeniero Eugène Freyssinet también están siendo castigados por el proceso de degradación por carbonatación del hormigón que se ha descrito, y habrá que detener necesariamente la aludida degradación además de reparar la estructura resistente; ya que si no se hiciese así, finalmente, al cabo de más o menos tiempo, habría que demoler lamentablemente tan valiosa obra. Este hecho lo conocemos por una asistencia técnica, en la que colaboramos con los técnicos Franceses del Ayuntamiento de Reims, para evitar la demolición de dicha estructura. Véase la publicación reseñada con (5) en la bibliografía.

### **3. REFUERZO PASIVO DE PILARES DE HORMIGÓN MEDIANTE ZUNCHADO**

Todas las Normas o Códigos de hormigón indican que un pilar zunchado tiene una carga de agotamiento superior a la de un pilar sin zunchar.

Esta afirmación se puede demostrar fácilmente si se observa detenidamente la curva de resistencia intrínseca del hormigón que se dibuja en el gráfico nº 1 y en la que se representan los círculos de Mohr correspondientes a la rotura por tracción pura (b) y por comprensión simple (a). La forma de esta curva difiere notablemente de unos materiales a otros y depende de forma muy directa de la relación que existe entre el valor de la resistencia a tracción con respecto al valor de la resistencia a compresión. Concretamente en el hormigón esta curva es muy abierta, es decir con elevada pendiente. Se puede apreciar que el punto de tangencia de esta curva con el círculo de rotura por tracción pura está muy próximo al polo



Foto 1. En esta fotografía se aprecia un fragmento del hormigón de un pilar, que se desprendió fácilmente con las manos. En la fotografía se pueden ver los restos de la armadura transformados en herrumbre y un fragmento de una concha marina.



Foto 2. En esta fotografía se aprecia el estado de degradación tan avanzado en que se encontraba el hormigón de un pilar, juntamente con la corrosión total de las armaduras.

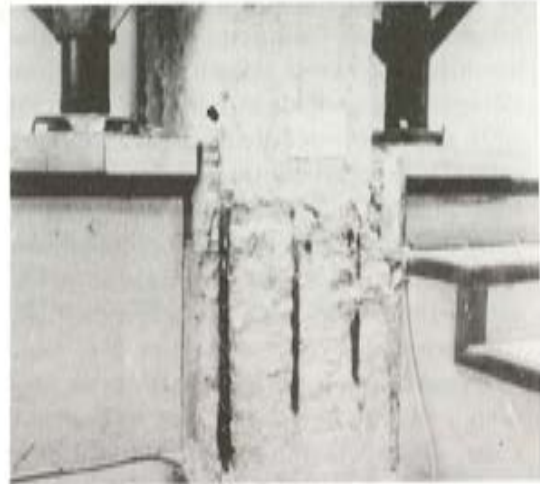


Foto 3. En esta fotografía se puede observar la misma destrucción descrita en las fotografías anteriores.



Foto 4. En esta fotografía, además de una fuerte degradación del hormigón junto con una corrosión muy avanzada de las armaduras, se puede observar un enfoscado superficial del pilar sin fines estructurales.

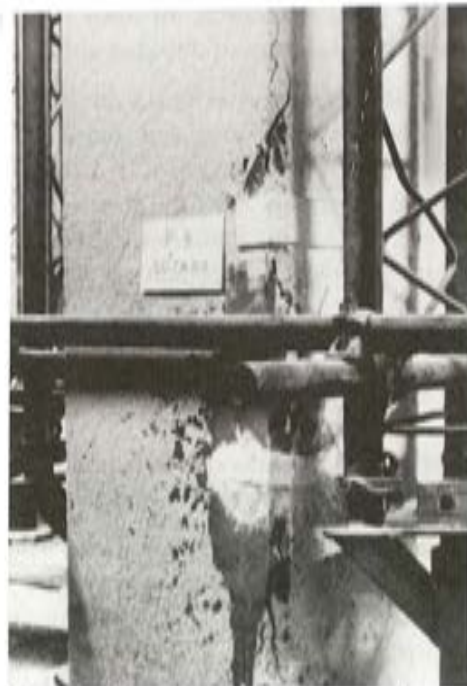


Foto 5. Esta fotografía corresponde al aspecto exterior que tenían algunos pilares de la mencionada obra y en los que todavía no se había quitado el enlucido. Se pueden observar las grietas exteriores debidas a la expansión de la armadura.

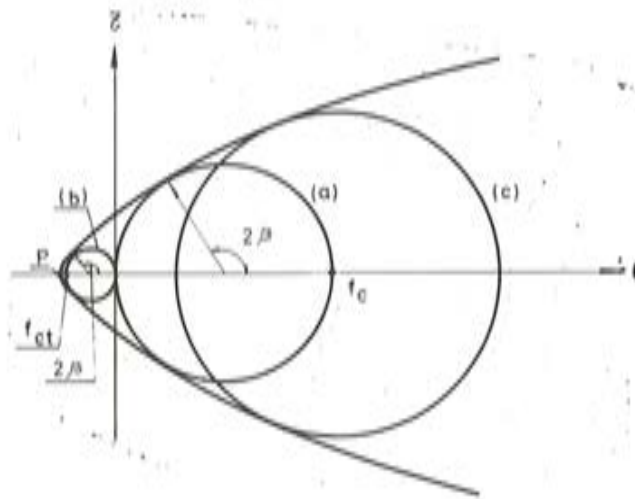


Gráfico 1. Curva de resistencia intrínseca del hormigón.

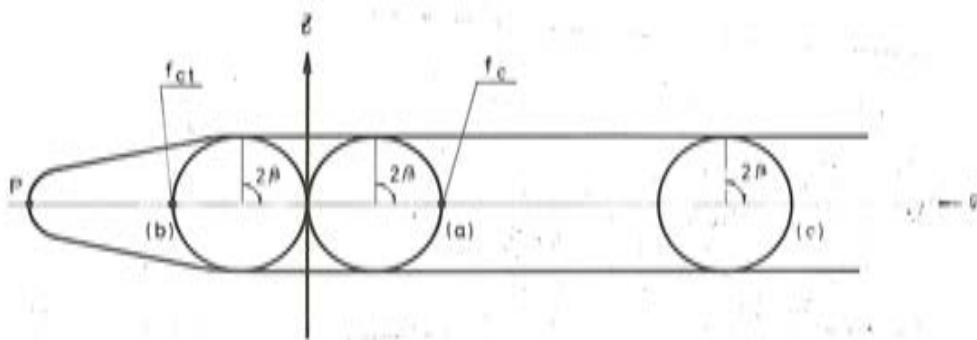


Gráfico 2. Curva de resistencia intrínseca de un metal dúctil.

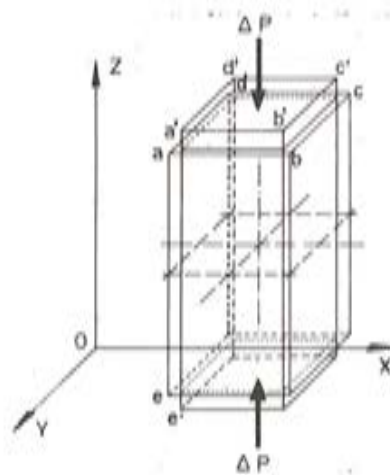


Gráfico 3.

P de la curva ( $2\beta \simeq -180^\circ$ ) indicando que el plano de rotura es prácticamente ortogonal a la dirección de la fuerza como se confirma con los resultados experimentales. Representando ahora el círculo (c), correspondiente a la rotura por compresión de una probeta a la que se le aplica un zunchado por medio de una compresión lateral, se puede observar que una ligera compresión lateral aumenta enormemente la carga de rotura por compresión axial.

Simplemente a efectos comparativos y puramente didácticos, se dibuja en el gráfico nº 2 la curva de resistencia intrínseca de un metal dúctil, que viene definida por tener igual valor de la resistencia a tracción que a compresión. Si se dibuja análogamente el círculo (c) correspondiente a un sólido al que se ha aplicado una compresión lateral, se puede observar que se mantiene constante el valor  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$  sin obtener un incremento tan apreciable de la carga axial como en el caso del hormigón ya estudiado. En este caso los planos de rotura toman inclinaciones de  $45^\circ$  con respecto a la dirección de la fuerza ( $2\beta \simeq -90^\circ$ ) como confirman los resultados experimentales.

Este estudio, basado en la forma de las curvas de resistencia intrínseca del hormigón y de un metal dúctil, se ha tomado del capítulo 2.1.8, "Caquot's intrinsic curve del libro "Concrete Strength and Strains" que se reseña con (6) en la bibliografía.

Cuando un pilar, considerado como pieza elástica de hormigón se somete a una compresión axial, experimenta un acortamiento longitudinal y al mismo tiempo un alargamiento en sentido transversal (véase gráfico nº 3).

El estado tenso-deformacional del mismo viene regido por las ecuaciones generales de elasticidad, válidas para cuerpos elásticos homogéneos e isotrópicos:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E_c} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E_c} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E_c} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (1)$$

Estas ecuaciones, en las que se ha despreciado el peso propio del pilar, se pueden modificar teniendo en cuenta la simetría existente en el plano XOY y considerando al mismo tiempo la influencia del coeficiente de fluencia  $\varphi$ , en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon_v &= \frac{(1 + \varphi)}{E_c} [\sigma_v - 2 \mu \sigma_h] \\ \epsilon_h &= \frac{(1 + \varphi)}{E_c} [\sigma_h (1 - \mu) - \mu \sigma_v] \end{aligned} \quad (2)$$

Ahora bien, cuando se zuncha con un refuerzo pasivo un pilar, por alguno de los procedimientos que posteriormente se describirán, se impone una restricción elástica a toda deformación en el plano horizontal que viene regida por una ley similar a la de Winkler,

$$\sigma_h = K \cdot \Delta c \quad (3)$$

en la que  $\sigma_h$  es la presión horizontal y  $c$  es una magnitud (longitud) relativa a la sección transversal del pilar, que depende del tipo de zunchado —cilíndrico o paralelepípedo— como más adelante se verá. El valor de la deformación transversal unitaria  $\epsilon_h$  se puede escribir de la forma siguiente:

$$e_h = \frac{\Delta c}{c} = \frac{\sigma_h}{K \cdot c} \quad (4)$$

operando con las ecuaciones (2) y (4), se llega inmediatamente a las expresiones siguientes que nos permiten obtener la presión horizontal que ha de resistir la estructura con la que se refuerza el pilar y el acortamiento vertical del mismo:

$$\sigma_h = \frac{\mu \sigma_v}{(1 - \mu) - \frac{E_c}{K c (1 + \varphi)}} \quad (5)$$

$$e_v = \frac{\sigma_v}{E_c} (1 + \varphi) \left[ 1 - \frac{2 \mu^2}{(1 - \mu) - \frac{E_c}{K c (1 + \varphi)}} \right] \quad (6)$$

En el gráfico n° 4 se representan los ensayos realizados con carga triaxial por Richart y otros en 1928. Estos ensayos se realizaron con presiones de confinamiento reducidas ( $-\sigma_2 = -\sigma_3$ ), al contrario que en los ensayos realizados por Balmer que se representan en el gráfico n° 5. Con presiones de confinamiento elevadas el hormigón no rompe por fisuración a tracción en la interfase del mortero con los áridos, sino que rompe por la presión de aplastamiento de los áridos sobre el mortero. Por esta causa la resistencia aumenta con la presión de confinamiento, llegándose a medir resistencias enormemente elevadas. Al mismo tiempo las deformaciones que se producen en un hormigón confinado son muy superiores a las que se producen en un hormigón con compresión monoaxial lo que se traduce también en un comportamiento mucho más dúctil de la pieza. Por esta causa, en las regiones en las que se pueden admitir mayores deformaciones, se puede mejorar la capacidad resistente de los soportes confinando al hormigón como se indica en esta publicación.

El esfuerzo de confinamiento que indica el artículo A.6.5 del apéndice A del Código ACI, "Special Provisions for Seismic Design", está deducido para aumentar las cargas de agotamiento de los soportes con compresiones elevadas ( $P_e > 0,4 \phi P_b$ ) en áreas sísmicas.

Las fórmulas (1) a (6) responden a un comportamiento elástico de las piezas además de considerar la reología del hormigón, mientras que los ensayos realizados por Richart y Balmer responden a un comportamiento más allá del régimen elástico.

Con cargas elevadas se puede producir la disgregación del hormigón sobre todo si éste se encuentra inicialmente dañado y su comportamiento final se puede asimilar al de un terreno arenoso transmitiendo a la estructura de zunchado una presión igual a un empuje al reposo

$$\sigma_h = (1 - \text{sen } \varphi_0) \sigma_v \quad (5.A)$$

expresión en la que  $\varphi_0$  es el ángulo de rozamiento interno del hormigón una vez disgregado.

La situación real puede ser superior a la indicada por la expresión (5) y la magnitud de este incremento dependerá del estado en que se encuentre el hormigón del pilar a reforzar y de la magnitud de las presiones transmitidas. Aunque en este tema tampoco se pueden dar reglas de carácter general, sino que es necesario que el técnico especialista adopte las decisiones oportunas tras un estudio minucioso del problema, se puede sin embargo concluir que nunca se debe proyectar un refuerzo estrictamente.

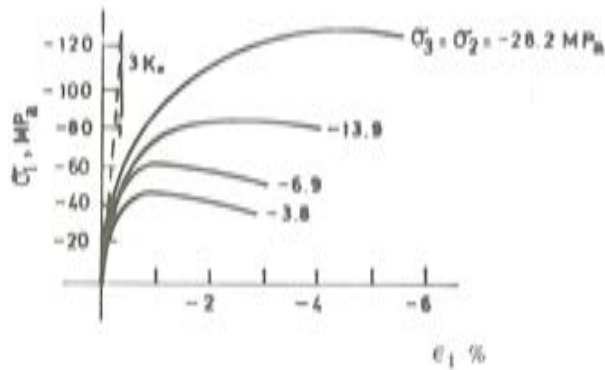


Gráfico 4.

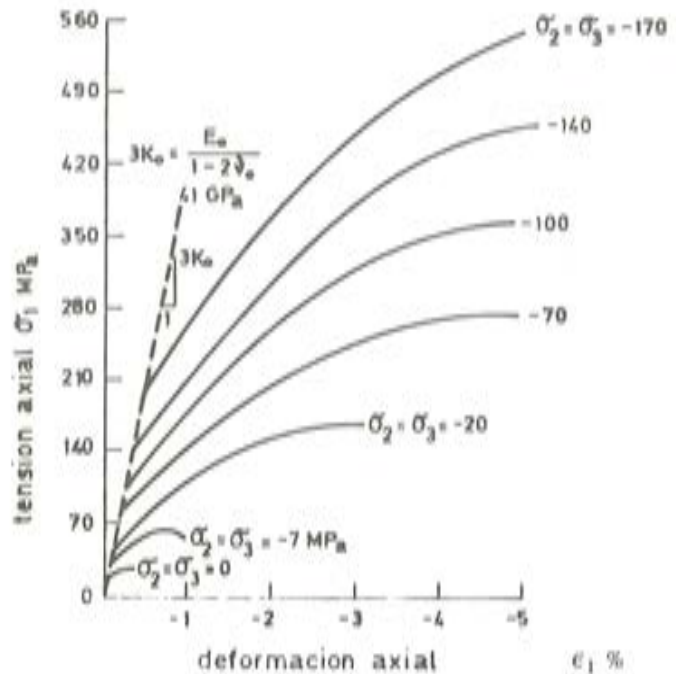


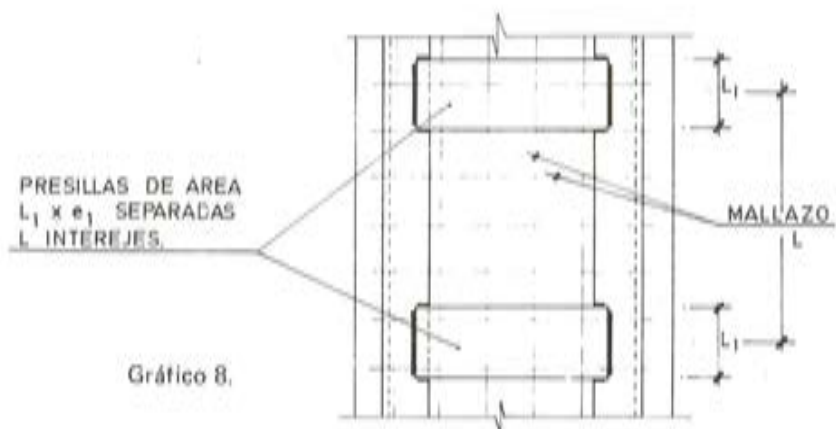
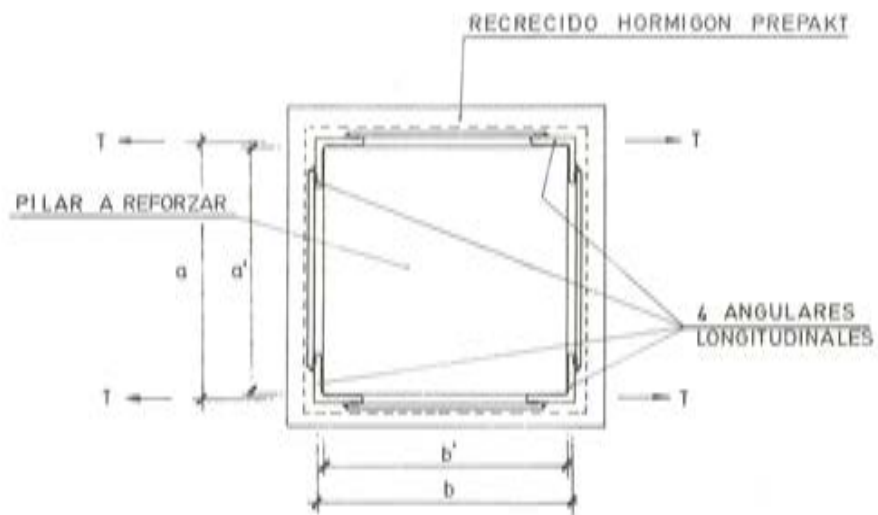
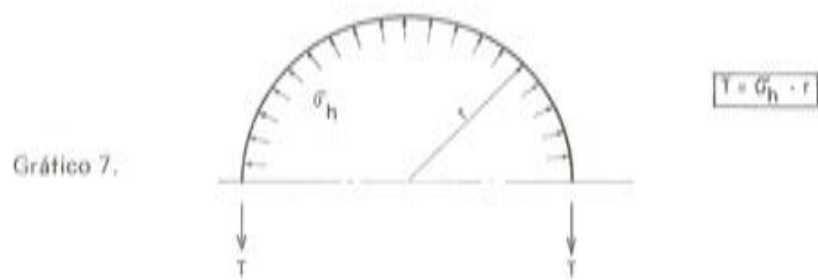
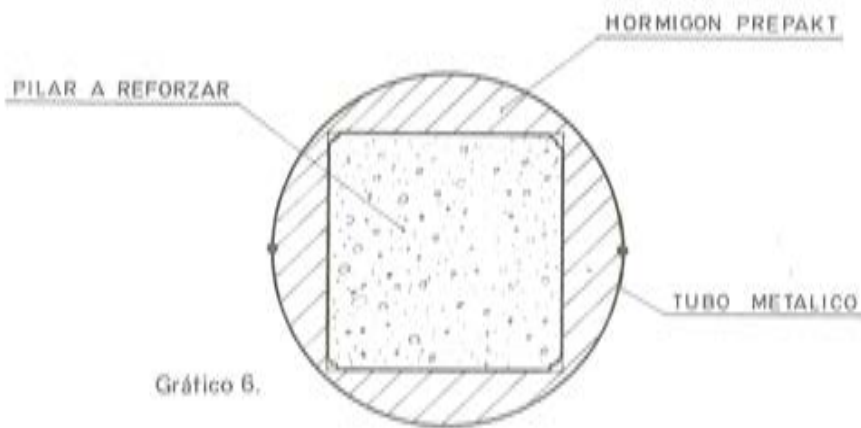
Gráfico 5.

### 3.1. Zunchado cilíndrico

El sistema más eficaz que hasta la fecha se conoce para reforzar un pilar consiste en zuncharlo mediante un tubo metálico, inyectando el espacio comprendido entre el tubo y el pilar a reforzar con hormigón especial exento de retracción. (Véase gráfico n° 6). Para el hormigón de la inyección venimos utilizando con pleno éxito el hormigón Prepakt, ya que este hormigón está exento prácticamente de retracción, que es una condición indispensable para que el refuerzo entre en carga con las pequeñas deformaciones que se van a producir en el pilar por efecto Poisson.

Se debe comenzar el refuerzo matando ligeramente las esquinas del pilar a reforzar a fin de no aumentar excesivamente el diámetro del pilar una vez reforzado.

Otro aspecto importante es que la superficie del hormigón antiguo que va a quedar en contacto con el hormigón Prepakt ha de estar limpia, con los áridos al descubierto aunque sin presentar áridos sueltos, húmeda pero sin charcos y con una rugosidad que garantice una adherencia entre ambos hormigones tal y como indica el apartado 17.5. del ACI - CODE - 318 - 77 (véase referencia ( 7 ) en bibliografía). Para esta última operación se puede utilizar el chorro de arena, el cepillo de alambre o un abujardado mecánico realizado mediante



pistolas con agujas o con una martellina accionadas mediante aire comprimido que son muy ligeras (de 2 a 3 kgs. de peso) o bien, mediante martillos picadores algo más pesados (de 7 a 10kgs.) accionados mediante energía eléctrica. La adherencia a la que nos referimos, aunque no es necesaria para conseguir que funcione el zunchado, sí en cambio es conveniente porque permite, además, utilizar el tubo del zunchado como armadura longitudinal del pilar al cumplirse de esta forma la hipótesis de Navier.

Después de soldar los dos semicilindros para formar así el zuncho metálico cilíndrico, se rellena todo el volumen a inyectar con el hormigón Prepakt con un árido grueso de tamaño uniforme, comprendido entre 30 y 40 mm., que ha de tener un coeficiente de forma idónea tendiendo a la forma esférica.

La técnica clásica de inyección del mortero Prepakt, es una inyección en contra de la gravedad que se realiza por bombeo al tener el mortero una consistencia fluida. Esta consistencia del mortero se mide por el tiempo que tarda en vaciarse un determinado volumen del mismo en un ensayo standard conocido como ensayo del Flow-Cone. (véase bibliografía (8)) El mortero de inyección está compuesto por arena, cemento, agua y un aditivo. La arena ha de tener un tamaño máximo no superior a 2,5 mm - por imposiciones de la maquinaria de la inyección - y su módulo de finura quedará comprendido entre 1,4 y 2,5. El valor inferior viene limitado por condiciones de resistencia, mientras que el valor superior es una condición que impone el poder realizar adecuadamente la inyección. El tipo y clase de cemento vendrá fijado por las condiciones de agresividad del medio ambiente en el que va a quedar inmersa la obra y la categoría del cemento se corresponderá, en general, con un valor elevado de la resistencia. Se emplearán cementos en los que la categoría se alcance por la calidad del clinker y no por una finura de molido elevada. La finura de molido, que como se sabe es una característica que está íntimamente ligada al valor hidráulico de un cemento, ya que influye decisivamente en la velocidad de las reacciones químicas que tienen lugar durante el fraguado y primer endurecimiento, se ha de mantener por debajo de límites tolerables. Se admite que esta condición se cumple cuando la superficie específica Blaine de los cementos a utilizar no supera los 3.500 cm<sup>2</sup>/gr. Esta limitación se ha de exigir, ya que la R.C.-75, a la que antes nos hemos referido, tampoco limita actualmente la finura de molido de un cemento. Igualmente no se deben utilizar los cementos con adiciones inertes o poco activas, ya que ello da lugar a serios problemas en la retracción. Tomando las precauciones indicadas se conseguirá un hormigón Prepakt de alta resistencia y en el que no son de temer los problemas que plantea la retracción de un hormigón convencional. Esto último es debido al aditivo empleado "intrusión aid", que es objeto de patente. Este aditivo actúa modificando el fraguado, retrasando el principio y fin de fraguado y prolongando la duración del mismo, con lo que, además de facilitar la colocación de la masa, sobre todo cuando se trata de grandes volúmenes, se produce un incremento de temperatura que es inferior al que se produce en un hormigón convencional. Este, hecho tiene un efecto favorable en la retracción (véase bibliografía (9), (10) y (11)) que se ve todavía potenciado por la expansión que produce el aditivo en el mortero a edades tempranas, lo que conlleva a que se anule totalmente la retracción inicial. El aditivo tiene además un cierto efecto de fluidificante, que facilita la inyección del mortero y sobre todo actúa haciendo que la arena y el cemento se mantengan en suspensión en toda la masa del mortero impidiendo así la segregación del mismo antes de su fraguado.

Los factores enumerados permiten obtener un hormigón homogéneo, muy compacto, desprovisto prácticamente de retracción y que alcanza, además, resistencias características elevadas ( $f_{ck} \geq 450 \text{ Kg/cm}^2$ ).

Con este zunchado la constante  $K_c$  de las fórmulas de cálculo (3) a (6) se puede deducir de la forma siguiente:

$$T = \sigma_h \cdot r \quad (7)$$

expresión que se conoce como la fórmula de los tubos de pared delgada (véase gráfico nº 7), siendo además

$$\sigma_s = \frac{\sigma_h \cdot r}{e}$$

Ahora bien, como

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$$

Verificándose, además, que

$$\epsilon_s = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta r}{r}$$

Podemos escribir entonces:

$$\frac{\sigma_h \cdot r}{e} = E_s \frac{\Delta r}{r}$$

Es decir:

$$\sigma_h = \frac{E_s}{r^2} e \cdot \Delta r$$

De donde se deduce que:

$$K = \frac{E_s \cdot e}{r^2} \quad (8)$$

Sustituyendo en las expresiones (5) y (6)  $e$  por  $r$ , y  $K$  c por  $\frac{E_s e}{r}$  se llega a las fórmulas que permiten obtener la presión horizontal que ha de resistir el tubo de refuerzo del pilar y el acortamiento vertical del mismo. En las fotografías 6, 7 y 8 se pueden ver algunos pilares reforzados por el sistema descrito.

A los tubos metálicos que se utilizan para reforzar el pilar mediante zunchado cilíndrico, se les puede dar continuidad a través del nudo mediante armaduras longitudinales alojadas entre el tubo y el pilar a reforzar. De esta forma los pilares quedan reforzados mediante zunchado cilíndrico y al mismo tiempo como elemento lineal pudiendo restablecerse con el refuerzo la estructura inicial de nudos rígidos.

En las fotografías 9, 10 y 11 se pueden ver las armaduras de continuidad que se han dejado en la obra que se ha mostrado en las fotografías 6 y 7.

Una variante del sistema anterior consiste en sustituir el tubo metálico por una serie de cercos cerrados muy próximos entre sí ( $s_t \simeq 5$  cm). El espesor  $e$  de la fórmula (8) se habrá de sustituir en este caso por:

$$e = \frac{n \cdot \phi}{b}$$

siendo  $n$  el número de cercos cerrados de área  $\phi$  que hay en una longitud  $b$ .

En la fotografía 12 se puede ver un pilar reforzado mediante zunchado cilíndrico realizado con cercos cerrados con separaciones a interjes muy pequeñas. En esta fotografía se puede ver el pilar con la armadura, tanto longitudinal como transversal, ya colocada. También se aprecia que el pilar está relleno de grava antes de ser encofrado para proceder a inyectarlo con hormigón Prepakt.



Foto 6. En esta fotografía se pueden ver tres pilares reforzados mediante un zunchado cilíndrico. También se pueden ver unas vigas anchas que, junto con los pilares constituyen un refuerzo integral de la estructura.

Foto 7. Para esta fotografía valen los mismos comentarios que se hicieron en la fotografía 6.



Foto 8. En esta fotografía se puede apreciar un pilar reforzado mediante un zunchado cilíndrico en una estructura normal de edificación constituida a base de forjados bidireccionales.

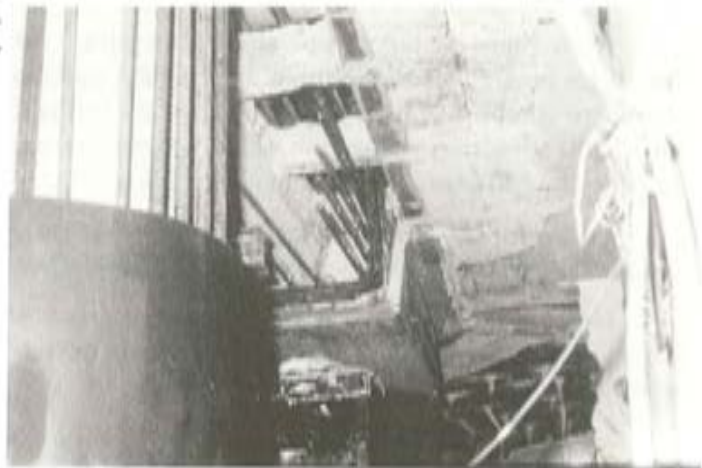


Foto 9. En la presente fotografía se puede ver una vista inferior de un nudo con la armadura de continuidad del tubo a través del mismo.



Foto 10, En la presente fotografía se puede ver una vista superior de un nudo con la armadura de continuidad del tubo sobresaliendo adosada al pilar superior que posteriormente también se reforzará. Al mismo tiempo se puede ver en la fotografía una viga rellena de grava que está preparada para ser inyectada con hormigón Prepakt.

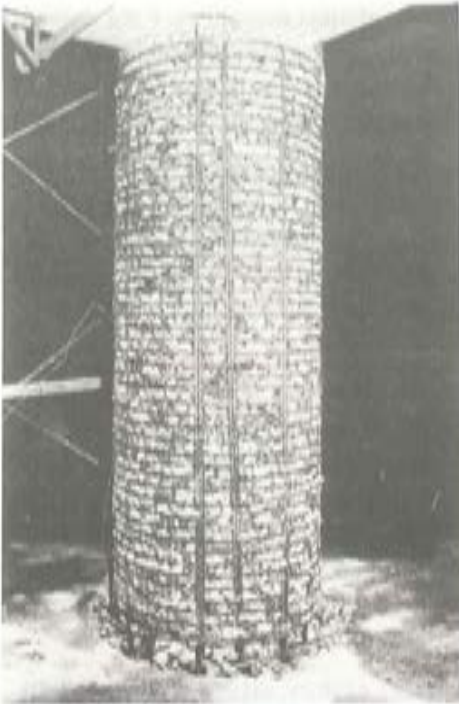


Foto 12,



Foto 11, En la presente fotografía se aprecia una vista superior de un nudo con la armadura de continuidad sobresaliendo adosada al pilar superior que posteriormente también se reforzará. Además se puede observar el mortero de la inyección aflorando en la superficie de la grava.

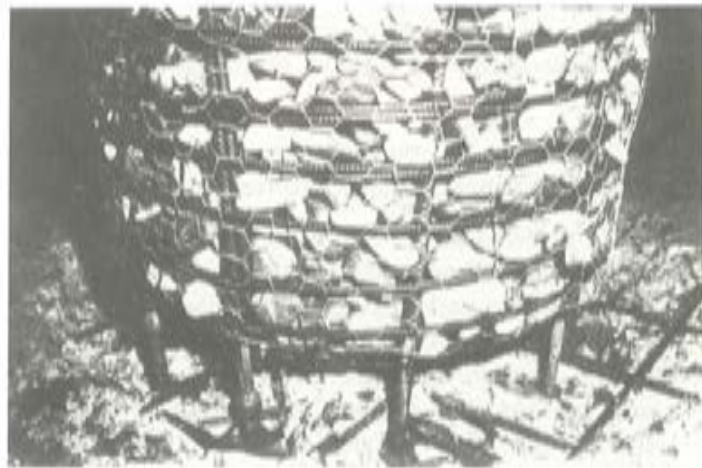


Foto 13,

La fotografía 13 corresponde a una toma parcial de la base de unos pilares que, además de haber sido reforzados mediante zunchado cilíndrico realizado con cercos cerrados, fueron reforzados como pieza prismática —o elemento lineal— dando continuidad a las armaduras longitudinales del refuerzo a través del forjado, que en el presente caso era una losa maciza con ábacos.

### 3.2. Zunchado paralelepípedo

El refuerzo más usualmente empleado es el clásico zunchado metálico mediante presillas, que se puede encuadrar en este subapartado.

El refuerzo, que generalmente se viene utilizando para reforzar un pilar cuadrado o rectangular de lados no muy desiguales, consiste en disponer cuatro angulares longitudinales a lo largo de las generatrices del pilar empresillados mediante chapas metálicas. Esta celosía metálica que envuelve al pilar no suele tener normalmente ningún capitel metálico en la cabeza, ni en el pie del pilar, porque el refuerzo se pretende que trabaje fundamentalmente zunchando al pilar y con este fin las presillas se suelen calentar antes de soldarlas.

Realmente el funcionamiento de este refuerzo es de muy dudosa eficacia, (siempre que no se considere la rotura del pilar, cosa que puede ocurrir teóricamente aunque no es correcto diseñar un refuerzo basándose en un riesgo calculado) porque las presillas difícilmente entrarán en carga por efecto de la dilatación transversal del pilar, por efecto Poisson, ya que no están íntimamente en contacto con el mismo, debido a las tolerancias normales de toda ejecución.

Estas tolerancias o desviaciones en la geometría de un pilar con respecto a su forma teórica se producen en todas las construcciones de hormigón y están admitidas con unos valores tope o límite por las diferentes Normas o Reglamentos (véase bibliografía (12), (13), (14), (15), (16), (17) y (18)). Por ejemplo, la tolerancia en pilares por rectitud, de acuerdo con la publicación (13), es de 10 mm para longitudes inferiores a 3 m y estas desviaciones son infinitamente superiores a las deformaciones que toma el pilar por dilatación transversal por efecto Poisson (valores del orden de la décima de mm), lo que confirma la tesis expuesta sobre la ineficacia del refuerzo descrito.

Sin embargo, este refuerzo lo vengo utilizando con pleno éxito y satisfacción, introduciendo una modificación que permita y garantice la puesta en carga de la celosía o empresillado metálico debido a la dilatación transversal del pilar por efecto Poisson. La modificación consiste en separar intencionadamente el empresillado metálico del pilar y hormigonar un reecrecido alrededor del pilar en el que se deja embebido dicho zuncho metálico. (Véase gráfico 8).

Este reecrecido puede hacerse de débil espesor con micromigón Prepakt o de mayor espesor con hormigón Prepakt convencional,

El primer caso es el que generalmente se emplea con más frecuencia, sobre todo en edificación, porque no obliga a sobredimensionar con exceso el tamaño del pilar. El empresillado metálico se suele distanciar del pilar, colocando los correspondientes separadores, de forma que queden unos 10 mm libres entre el pilar y el empresillado, ya que se conoce por la experimentación existente que el micromigón Prepakt rellena espacios con espesores superiores a 5 mm. Por fuera de la celosía metálica del refuerzo se debe colocar un mallazo de débil cuantía y con separaciones entre barras muy reducidas (del orden de 5 cms) a fin de que no se fisure el reecrecido exterior del micromigón a causa de la retracción a edades no tempranas, puesto que el hormigón Prepakt está exento prácticamente, como se ha dicho, de la retracción inicial. El espesor total del reecrecido en las cuatro caras del pilar no debe

tener un valor superior a 6 cms. a fin de que el recubrimiento exterior de la celosía no sea superior a 3 cms para que la retracción aludida no lo fisure exteriormente.

El micromigón Prepakt difiere del hormigón Prepakt convencional, en que se emplea cuando se inyectan volúmenes de hormigón de débil espesor que no han sido previamente rellenos con grava, y en que la dosificación del mortero de inyección del micromigón Prepakt, que es análogo al mortero de inyección de un hormigón Prepakt convencional, tiene un contenido en cemento inferior, al no existir en este caso un porcentaje elevado del volumen a inyectar —del orden del 50 o del 60 por 100—, ocupado por la grava, lo que hace disminuir la dosificación final del cemento en un hormigón Prepakt convencional al considerar la totalidad del volumen inyectado.

El valor de la constante K de la fórmula (3) que nos sirve para determinar mediante la ecuación (5) las acciones que ha de resistir el empresillado del refuerzo, se deduce como a continuación se indica:

$$T = K \frac{\sigma_h \cdot a}{2} = \sigma_h \cdot a$$

El coeficiente  $K = 2$  se toma de acuerdo con Blume, Newmark y Corning (véase publicación (19) en la bibliografía) para tener en cuenta que el confinamiento realizado con cercos o presillas rectangulares es el 50% de eficaz que el realizado con una entubación o con estribos circulares —o en espiral— ya que los lados rectos en el zunchado rectangular se desvían hacia el exterior disminuyendo la presión de confinamiento. En la expresión anterior T es la tracción por unidad de longitud que han de resistir las presillas que están colocadas en las dos caras del pilar de dimensión b (ver gráfico 6).

Como:

$$\sigma_s = \frac{T \cdot L}{e_1 L_1}$$

siendo  $\sigma_s$  la tensión en cada presilla de dimensión  $e_1 \times L_1$  con separaciones a interjejes L.

Ahora bien, como:

$$\sigma_s = E_s \cdot \frac{\Delta b}{b}$$

se pueden escribir las expresiones siguientes que nos definen el valor de la constante K

$$\frac{\sigma_h a L}{e_1 L_1} = E_s \cdot \frac{\Delta b}{b}$$

$$\sigma_h = \frac{E_s e_1 L_1}{a b L} \cdot \Delta b$$

de donde se deduce que:

$$K = \frac{E_s e_1 L_1}{a b L}$$

Sustituyendo en las expresiones (5) y (6) c por b y K c por  $\frac{E_s e_1 L_1}{a L}$  (o bien, c por a y K c por  $\frac{E_s e_1 L_1}{b L}$ ) se llega a las fórmulas que permiten obtener la presión horizontal que ha de resistir el empresillado de refuerzo del pilar y el acortamiento vertical del mismo.

En las fotografías 14 y 15 se pueden ver dos fases diferentes de la reparación de un pilar con el sistema descrito.

El segundo caso consiste en hacer el recrecido de hormigón Prepakt con un espesor muy superior al descrito en el caso anterior. El empresillado metálico del refuerzo se separa en este caso de 10 a 15 cms del pilar, rellenando este espacio con la grava e inyectándolo con el mortero de inyección Prepakt. Por fuera de la celosía metálica del refuerzo se debe colocar un mallazo como el que se describió en el caso anterior. El recubrimiento de mortero por fuera de la celosía no sobrepasará los 3 cms por las razones ya apuntadas. También vale la deducción de la constante K que se ha hecho anteriormente.

En ambos casos el recrecido se ha de hacer con un hormigón de baja retracción. Yo vengo proyectando refuerzos y realizando con plena satisfacción estos recrecidos empleando el micromigón Prepakt y el hormigón Prepakt convencional, según el espesor de dicho recrecido. Si el refuerzo se realiza con un hormigón convencional se corre el peligro de agrietar y cuartear el recrecido —tanto más cuanto menor sea el espesor del mismo— al acortarse el hormigón del refuerzo por retracción, que está envolviendo a un núcleo prácticamente indeformable.

En los dos casos descritos en este subapartado, se pueden sustituir las presillas por redondos laminados, sustituyendo en el cálculo del parámetro K, e el valor  $\frac{e_1 L_1}{L}$  por  $\frac{n \phi}{b}$ , en donde n es el número de barras de área  $\phi$  que hay en una longitud b.

En el primer caso descrito se deben de mantener los cuatro angulares en las esquinas del pilar y sustituir las presillas por redondos tal y como se puede ver en la fotografía 16. En el segundo caso descrito, como el recrecido ya tiene un espesor superior, se puede hacer todo el zunchado con cercos cerrados —con solapo a tracción—, disponiendo además en las esquinas y en puntos intermedios de los lados del pilar barras longitudinales. Esta solución permite eliminar el mallazo que se colocaba por fuera del zuncho metálico en celosía, siempre que las armaduras tengan un recubrimiento inferior a 3 cms para evitar las fisuras de retracción no inicial ya descritas.

El caso de un zunchado paralelepípedo se puede combinar con el refuerzo del pilar como pieza prismática o elemento lineal. Para poder conseguirlo, si así se deseara, habrá que dar continuidad a la armadura longitudinal del pilar a través del nudo de la estructura, dependiendo la forma de hacerlo del tipo de estructura que se trate de reforzar (supuesta siempre de hormigón armado). Cuando la estructura, por ejemplo, sea un forjado reticular la armadura de continuidad a través del ábaco en el contorno del pilar tendrá el menor número n de barras posibles ( $n \geq 4$ ) siempre que estructuralmente sean equirresistentes con la armadura del refuerzo. Si por el contrario, la estructura estuviese diferenciada en vigas y pilares con un forjado unidireccional, la armadura de continuidad a través del nudo se colocará adosada a las dos caras del pilar que son paralelas a las vigas que inciden en el nudo, con una distribución equirresistente con la armadura del refuerzo.

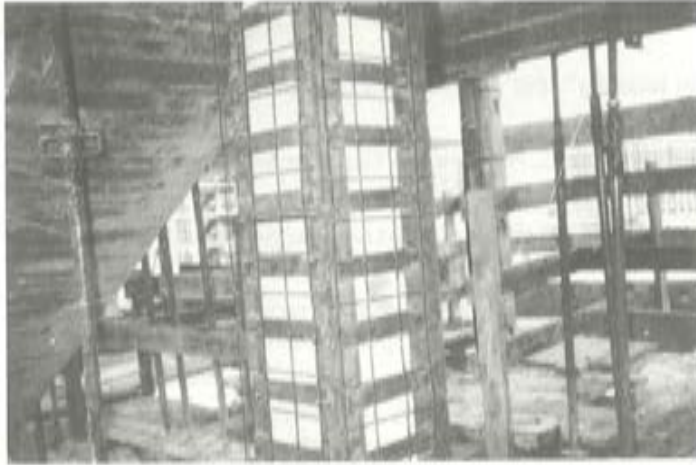


Foto 14. En esta fotografía se puede ver el empresillado metálico correspondiente a un zunchado paralelepédico de un pilar, que posteriormente quedó embebido en un recrido de hormigón Prepakt de 5 cm de espesor total.

Foto 15. Esta fotografía muestra un pilar reforzado con un zunchado paralelepédico, como el indicado en la fotografía anterior, una vez que se terminó de ejecutar el refuerzo,

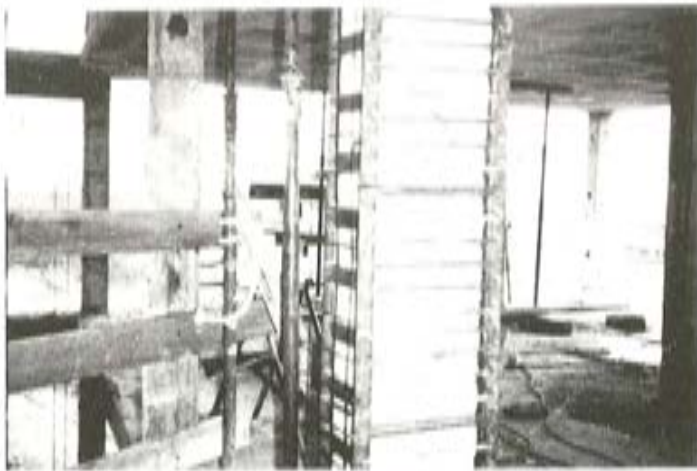
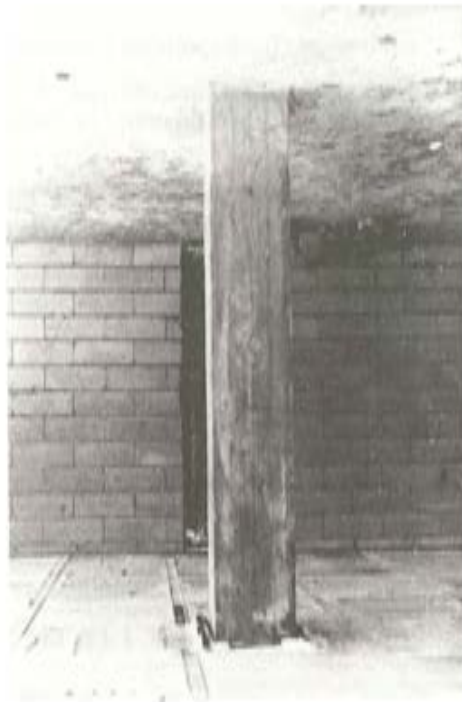


Foto 16. En la presente fotografía se puede ver un zunchado paralelepédico de un pilar en el que el empresillado metálico se ha sustituido en dos de sus caras por redondos de acero laminado para disminuir al máximo el espesor del recrido en las mismas.

## Bibliografía

- (1) "Patología: Reparación de un forjado reticular". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero No 136. 3<sup>er</sup> trimestre de 1980.
- (2) "Patología: Refuerzo de encepados sobre pilotes". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N<sup>o</sup> 142. 1<sup>er</sup> trimestre de 1982.
- (3) "Comentarios al título 3<sup>o</sup> del control de la EH-73". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N<sup>o</sup> 129. 4<sup>o</sup> trimestre de 1978.
- (4) "La influencia de las variaciones resistentes de los materiales y de las variaciones dimensionales de las piezas de hormigón armado sobre su capacidad resistente" por J. Calavera. Monografía 324 del Instituto Eduardo Torroja. Febrero 1975.
- (5) "La demolición de los halles centrales de Reims. Una propuesta alternativa de salvación y recuperación". Por José Antonio Fernández Ordoñez y Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N<sup>o</sup> 148. 3<sup>er</sup> trimestre de 1983.
- (6) "Concrete Strength and Strains" by Constantin Avram, Ioan Făcăoaru, Ovidiu Mirsu, Iion Filimon e Igor Terteu. Developments in Civil Engineering. Elsevier Scientific Publishing Company 1981.
- (7) Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI-318-77). American Concrete Institute.
- (8) CRD.C 79-58. "Method of test for flow of Grout Mixtures (Flow Cone Method)". Corps of Engineers U.S. Army. "Investigation of the Suitability of Prepack Concrete for mass and reinforced Concrete Structures". Oc. 1951.
- (9) Corps of Engineers U.S. Army. "Investigation of the suitability of Prepack Concrete for mass and reinforced Concrete Structures" Tabla 13. Octubre 1951.
- (10) "Temperature Rise in Block and Shrinkage in Large Block" Pag. 3 y siguientes. Corps of Engineers U.S. Army. "Investigation of the suitability of Prepack Concrete for mass and reinforced Concrete Structures". Octubre 1951.
- (11) "Temperature Rise of Grout". Pags. B34 y siguientes. Corps of Engineers U.S. Army. "Investigation of the Suitability of Prepack Concrete for mass and reinforced Concrete Structures". Appendix A and Appendix B. Agosto 1964.
- (12) Apartado 2.4. "Suggested tolerances" de la norma (ACI-347-68). "Recommended Practice for Concrete Formwork".
- (13) Formwork for Concrete, by M.K. Hurd with the assistance of R.C. Baldwin under the direction of ACI Committee 622 (now redesignated Committee 347).
- (14) Tolerancias en Estructuras de Hormigón. F.I.P. Comisión de Práctica Constructiva. F.I.P. Comisión de Prefabricación.
- (15) C.B.R. "Béton structure-architectonique. Ouvrages d'art. Tolérances et spécifications".
- (16) Danskbetonforeningen "Tolerances for betonelementers hovedmal" (Tolerances for concrete elements).
- (17) Commission de Recherche pour la construction de Logements". Tolérances dimensionnelles dans le gros oeuvre des constructions des logements préfabriques". Commission de Recherche pour la Construction de Logements (CRL-FKW-CRA).
- (18) DIN 18.202-h 1 (Dimension tolerances in building construction. Permissible allowances for execution of the work. Wall and floor openings, recesses, store and landing heights). "Masstoleranzen im Hochbau: Zulässige Abmasse für die Bauausführung, Wand-und-Decköffnungen, Nischen, Geschoss und Podesthöhen. March 1969.
- (19) Blume, J.A.; Newmark, N.M.; and Corning, L.H.; "Design of Multi-story Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions". Portland Cement Assn., 1961.

## Programa para el dimensionamiento de secciones rectangulares de hormigón armado en flexocompresión recta con un ordenador portátil.

Por Francisco Morán Cabré  
Dr. Ingeniero de Caminos  
Instituto Eduardo Torroja

### 1. INTRODUCCION. OBJETO DEL PROGRAMA

A continuación se describe un programa para el dimensionamiento de secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a solicitaciones de flexocompresión recta  $M$ ,  $N$ , en el estado límite último de agotamiento. Se supone que se trata de secciones de soportes y que la disposición de armaduras es simétrica.

El programa, llamado DMNE, está escrito en lenguaje BASIC para el ordenador personal portátil HP-75. Ocupa algo menos de 2K octetos de memoria y puede adaptarse con gran facilidad a cualquier otro ordenador personal. Forma parte de un conjunto de 14 programas para el dimensionamiento y la comprobación de secciones de hormigón armado de distintas formas, sometidas a solicitaciones de flexión simple  $M$ ; flexocompresión recta  $M$ ,  $N$ ; y flexocompresión esviada  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$ .

Las bases de cálculo son las contenidas en el artículo 36 "Principios generales de cálculo de secciones sometidas a solicitaciones normales" de la EH-82 (1), es decir:

- Dominios de deformación definidos por el diagrama de pivotes del apartado 36.2 (fig. 1).
- Diagrama parábola-rectángulo para el hormigón del apartado 26.6 (fig. 2).
- Diagrama bilineal para el acero (dureza natural) del apartado 25.3 (fig. 3).
- Excentricidad mínima según el apartado 36.3

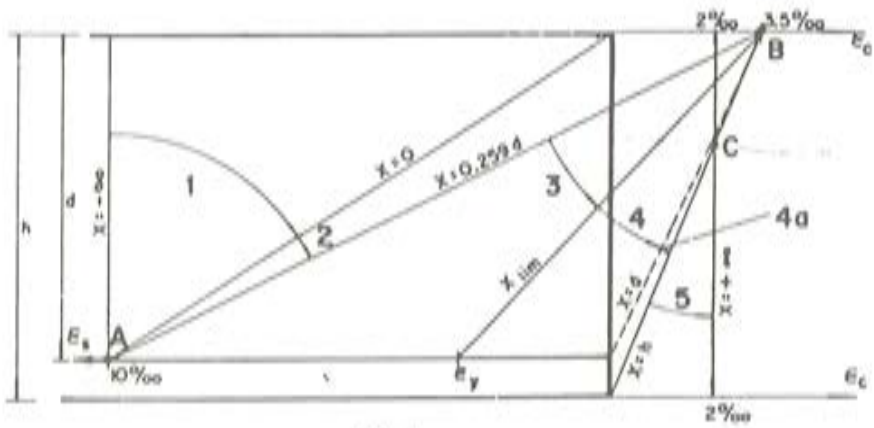


Fig. 1.

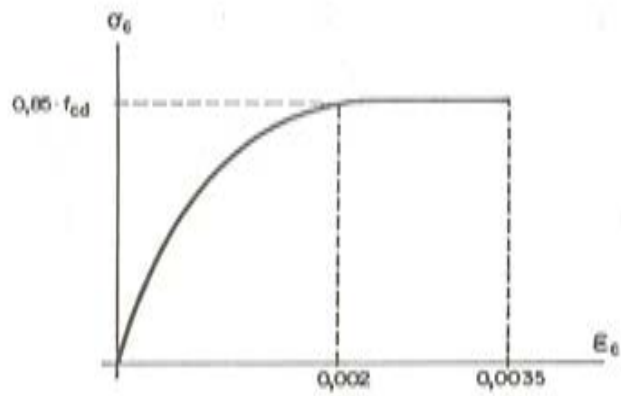


Fig. 2.

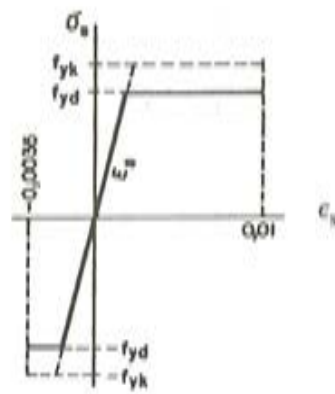


Fig. 3.

Estas bases de cálculo son coincidentes con las del Código Modelo CM-78 del CEB.

En lo que respecta a cuantías mínimas, se respeta la limitación de la tabla 38.3 de la EH-82 para soportes armados con acero de las calidades AEH-400, AEH-500 o AEH-600, esto es, una cuantía geométrica mínima de la armadura longitudinal del cuatro por mil. Esta condición es más exigente que la indicada en el apartado 38.2 de la EH-82.

Tanto las resistencias de los materiales hormigón y acero como las solicitaciones actuantes en la sección, datos del programa, deben ser valores de cálculo, esto es, deben estar afectados por los correspondientes coeficientes de seguridad. En particular, la resistencia de cálculo del hormigón,  $f_{cd}$ , debe incluir el coeficiente reductor 0,9 si el hormigonado se hace en posición vertical (apartado 26.5 de la EH-82).

No se consideran en el programa la esbeltez del soporte ni los efectos de segundo orden producidos por la misma. Estos efectos pueden tenerse en cuenta calculando previamente el momento suplementario  $M_a = N_d \cdot e_a$  producido por la excentricidad adicional  $e_a$  debida a la esbeltez, y sumándolo al momento de primer orden  $M_{o,d}$  para obtener el momento de cálculo  $M_d$ :  $M_d = M_{o,d} + M_a$ .

El dimensionamiento se obtiene en forma de la cantidad de armadura estrictamente necesaria para resistir la solicitación actuante, eligiéndose como datos una determinada disposición (simétrica) de armado entre las de un repertorio de disposiciones posibles dado, y un recubrimiento determinado. Dicha cantidad de armadura resultante se expresa mediante la capacidad mecánica en toneladas de cada una de las barras de la armadura y su diámetro teórico en milímetros, que luego el proyectista substituirá por un diámetro de la serie normalizada.

Con respecto a otros métodos recientemente publicados para el dimensionamiento de secciones con ordenadores personales (3), creemos que el programa que aquí se presenta, pese a su sencillez, pequeña ocupación de memoria y razonable velocidad de cálculo, tiene una mayor facilidad para considerar distintos valores del límite elástico y del recubrimiento, y distintas disposiciones de armado.

## 2. ESTRUCTURA Y FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA

La estructura y el funcionamiento del programa son comunes a los 14 programas del conjunto aludido en la introducción. En la preparación de dichos programas se ha atendido de forma prioritaria a los siguientes criterios:

- a) Tamaño mínimo de los programas, para su utilización en ordenadores personales e incluso en calculadoras programables (\*).
- b) Rapidez de cálculo máxima compatible con la precisión deseada en cada caso.
- c) Número de datos necesario mínimo para cada problema.
- d) Posibilidad de efectuar recálculos con el mínimo esfuerzo, bien sea de una misma sección o de distintas secciones en las que cambian sólo algunos datos, como sucede en la práctica al dimensionar los soportes de una estructura de hormigón armado.

Los criterios a), b) y c) han aconsejado preparar un conjunto de programas en lugar de uno sólo que valga para todos los casos; de esta forma se consigue una mejor adaptación a las características concretas de cada problema.

En cuanto al criterio d), ha conducido a la estructura del programa que se esquematiza en el organigrama de la figura 4 y cuyo funcionamiento se describe a continuación.

(\*) En efecto, 4 de los 14 programas del conjunto han sido adaptados para su uso en la calculadora programable de bolsillo HP-15.

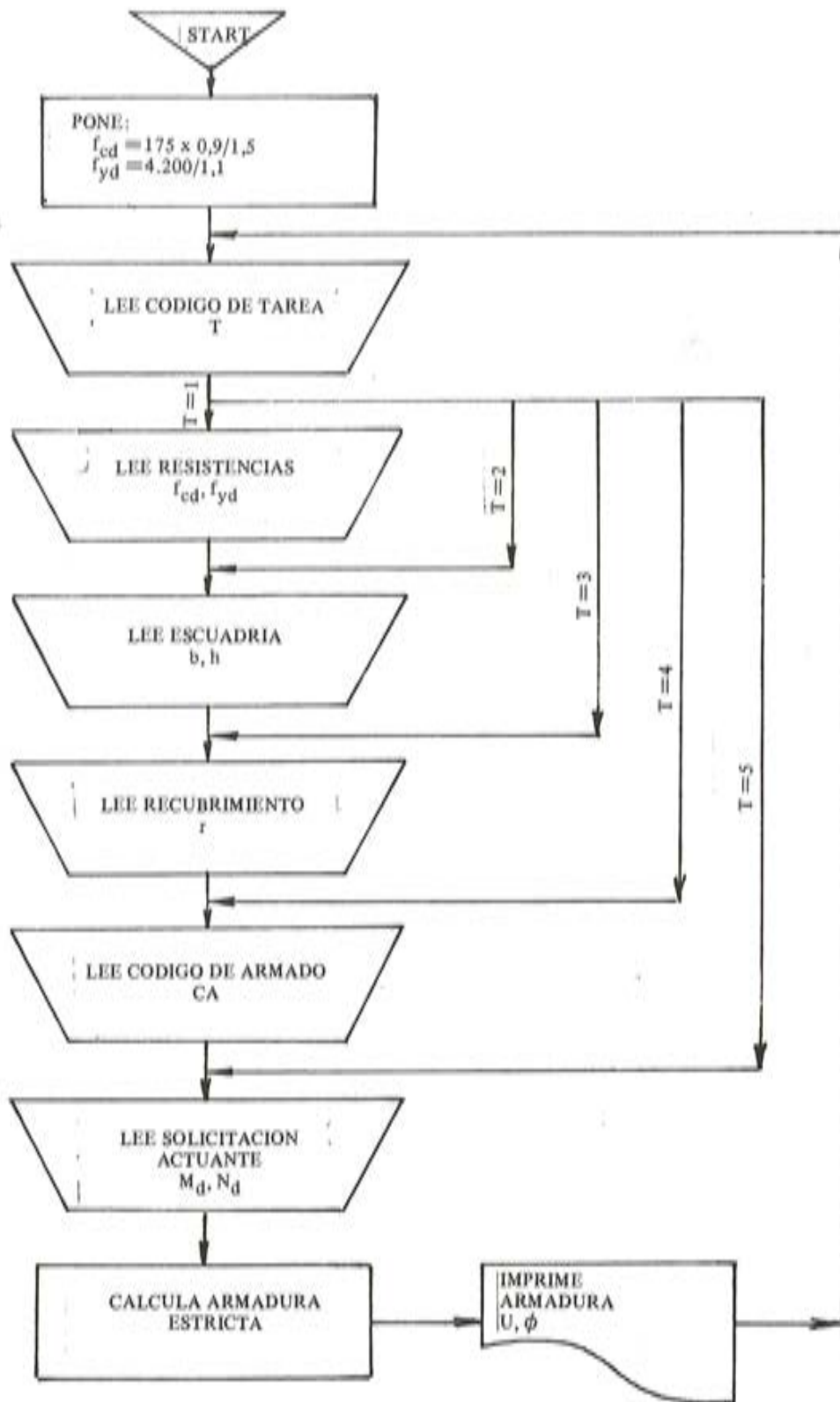


Fig. 4.

Al comienzo, el programa pide y lee el *código de tarea* T. Si se introduce T=1 el programa pide y lee, a continuación, los valores de las resistencias de cálculo del hormigón y del acero  $f_{cd}$  y  $f_{yd}$  en  $\text{kp/cm}^2$ . En caso de que se introduzca T=2 el programa no lee estos datos, manteniendo las resistencias usadas anteriormente. Si se arranca el programa con T=2, se adoptan los siguientes valores, considerados como los más frecuentes en el momento de escribirse el programa:

$$f_{cd} = 175 \times 0,9 / 1,5 = 105 \text{ kp/cm}^2;$$

$$f_{yd} = 4.200 / 1,1 = 3.818 \text{ kp/cm}^2.$$

A continuación, o siempre que se haya introducido T=2, el programa pide y lee la *es cuadría* de la sección b x h en cm x cm.

A continuación, o siempre que se haya introducido T=3, el programa pide y lee el *recubrimiento* r en centímetros, distancia del centro de gravedad de la armadura al paramento de la sección. Como dicho recubrimiento, que es igual al recubrimiento libre c más el diámetro del cerco  $\phi_t$  y el semidiámetro de la barra longitudinal  $\phi_l$ :  $r = c + \phi_t + 1/2 \phi_l$ , no es conocido a priori, es frecuente introducir un valor estimativo y luego corregirlo, en especial si al substituir el diámetro teórico de la barra longitudinal por el de la serie normalizada el margen de seguridad obtenido es pequeño (véase un ejemplo en el apartado 6).

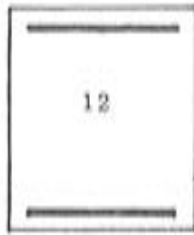
A continuación, o siempre que se haya introducido T=4, el programa pide y lee el *código de armado* CA, que indica cuál es la disposición de armado elegida por el proyectista entre las posibles, que se indican en la fig. 5. El primer dígito del código de armado indica el número de barras de las armaduras frontales, y debe ser un entero comprendido entre 1 y 9. El segundo dígito indica el número de barras de las armaduras laterales, y debe ser un entero comprendido entre 2 y 5. Mediante el código de armado especial CA=12 se indica que las armaduras frontales tienen una sola barra. En este caso, el resultado será la *cuantía mecánica* U en toneladas de dichas armaduras frontales, y el diámetro  $\phi$  que tendrían en el caso hipotético de que se armara con una sola barra. Si CA=12 el valor de  $\phi$  no se utilizará, y el valor de U servirá para entrar en una tabla de capacidades mecánicas correspondiente al acero utilizado y encontrar la combinación más conveniente n,  $\phi$  de número de barras y diámetro de las mismas para las armaduras frontales.

A continuación, o siempre que se haya introducido T=5, el programa pide y lee la *solicitación* de cálculo actuante  $M_d$ ,  $N_d$  en metros toneladas y en toneladas, respectivamente. Como se ha indicado, estos valores deben estar mayorados, y el momento  $M_d$  debe incluir, en su caso, los efectos de segundo orden, en forma de momento suplementario.  $M_d$  y  $N_d$  deben ser positivos.

Con todos estos datos el programa está ya en condiciones de calcular las armaduras estrictamente necesarias para resistir la solicitación actuante. Al cabo de unos segundos de cálculo aparecerán en pantalla los valores de la capacidad mecánica U y del diámetro teórico  $\phi$  de cada barra, en toneladas y en milímetros. Una vez facilitados estos resultados el programa vuelve atrás automáticamente y pide un nuevo código de tarea T.

En caso de existir varias hipótesis de cálculo o, más precisamente, varias solicitaciones actuantes sobre la misma sección, bastará con dar T=5 e introducir la siguiente solicitación, obteniéndose la capacidad mecánica y el diámetro teórico necesarios para cada barra, y así sucesivamente. La sección deberá armarse para la mayor de las capacidades y diámetros obtenidos, que corresponderán a la hipótesis más desfavorable.

CODIGOS DE ARMADO C A



El Código CA =12 no debe emplearse en flexión esviada

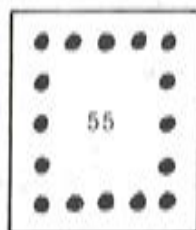
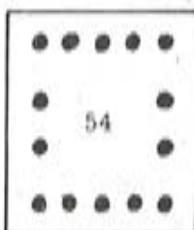
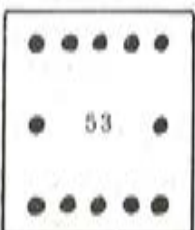
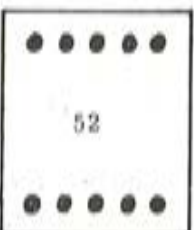
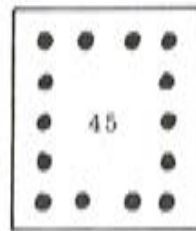
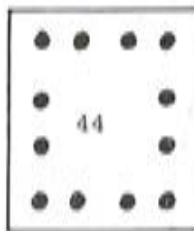
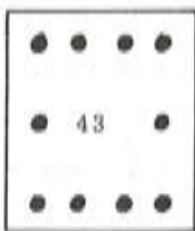
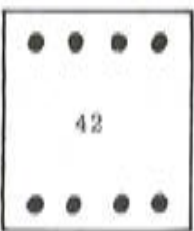
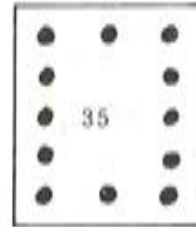
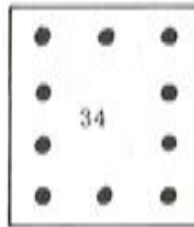
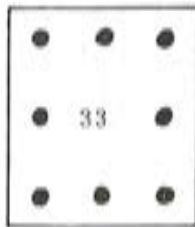
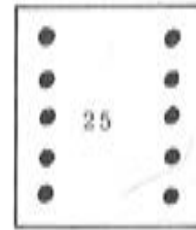
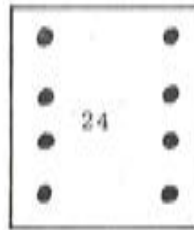
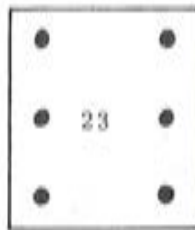


Fig. 5.

Si la capacidad o el diámetro resultantes aconsejan cambiar la disposición de armado elegida, ello podrá hacerse sin más que introducir T=4, tecleando a continuación el código de armado CA de la nueva disposición elegida, y a continuación la solicitud o solicitaciones actuantes (véase un ejemplo en el apartado 6).

En caso de que el diámetro normalizado resultante aconseje modificar el recubrimiento r, bastará para ello dar T=3, introduciendo a continuación el nuevo recubrimiento r, y luego el código de armado CA y la solicitud o solicitaciones actuantes,  $M_d$ ,  $N_d$ .

Si se desea pasar a otro elemento con distinta sección bastará dar T=2, introduciendo sucesivamente la esquadra b x h, el recubrimiento r, el código de armado CA y la solicitud o solicitaciones actuantes.

Por último, si se desea cambiar la resistencia de cálculo del hormigón o del acero se dará T=1, introduciendo luego las nuevas resistencias  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$  y a continuación la esquadra b x h, el recubrimiento r, el código de armado CA y la solicitud o solicitaciones  $M_d$ ,  $N_d$  actuantes.

El programa prosigue estos ciclos de forma indefinida. Si se desea interrumpirlo basta con pulsar la tecla ATTN cuando el programa está en espera de datos (por ejemplo, cuando pide un nuevo código de tarea T).

Si se ha cometido un error, o bien para hacer continuar el programa interrumpido mediante la tecla ATTN, basta con pulsar las teclas C O N T 9 RTN, con lo cual el programa vuelve a pedir un nuevo código de tarea T, y prosigue su ejecución.

Como es obvio, al arrancar el programa hay que dar un código de tarea T=1 o T=2, pues si no el ordenador no dispondrá de todos los datos necesarios para el cálculo.

### 3. METODO DE RESOLUCION

Se utiliza el método indicado en el apartado 2.4 de la referencia (2), con algunas variantes, tal y como se expone a continuación.

Si la solicitud actuante se representa por el vector  $\overline{OD}$  de componentes  $M_d$ ,  $N_d$  (véase fig. 6), para cada valor de la profundidad del eje neutro x que fija la posición del plano de deformaciones de acuerdo con el diagrama de pivotes (fig. 1) pueden obtenerse los esfuerzos resistidos por el hormigón, que se representan mediante el vector  $\overline{OC}$ , de componentes  $M_c$ ,  $N_c$ , y los esfuerzos resistidos por la armadura de referencia, supuesto que cada una de sus barras tuviera una sección unitaria  $A = 1 \text{ cm}^2$ , que se representan por el vector  $\overline{CS}$ , de componentes  $M_s$ ,  $N_s$ .

Si el vector  $\overline{CD}$  coincidiera en dirección con el  $\overline{CS}$  (caso de la solicitud actuante  $D_1$ ), entonces el área estrictamente necesaria para cada barra de la armadura valdría:

$$A (\text{cm}^2) = \frac{\overline{CD}_1}{\overline{CS}} = \frac{M_d - M_c}{M_s}$$

Para un valor cualquiera de la profundidad del eje neutro x esto no sucederá, siendo preciso buscar el valor de x para el cual sucede. Para conseguirlo se considera el valor del seno del ángulo  $\varphi$  que forman ambos vectores:

$$\text{sen } \varphi = \frac{(N_d - N_c) \cdot M_s - (M_d - M_c) \cdot N_s}{\sqrt{(N_d - N_c)^2 + (M_d - M_c)^2} \cdot \sqrt{N_s^2 + M_s^2}}$$

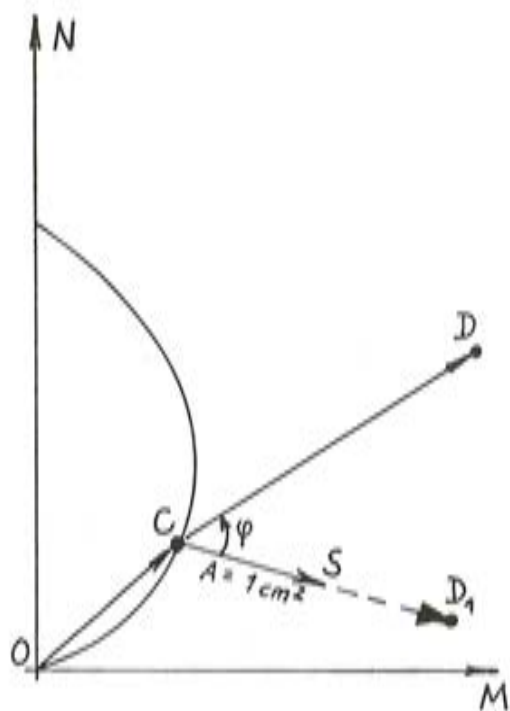


Fig. 6.

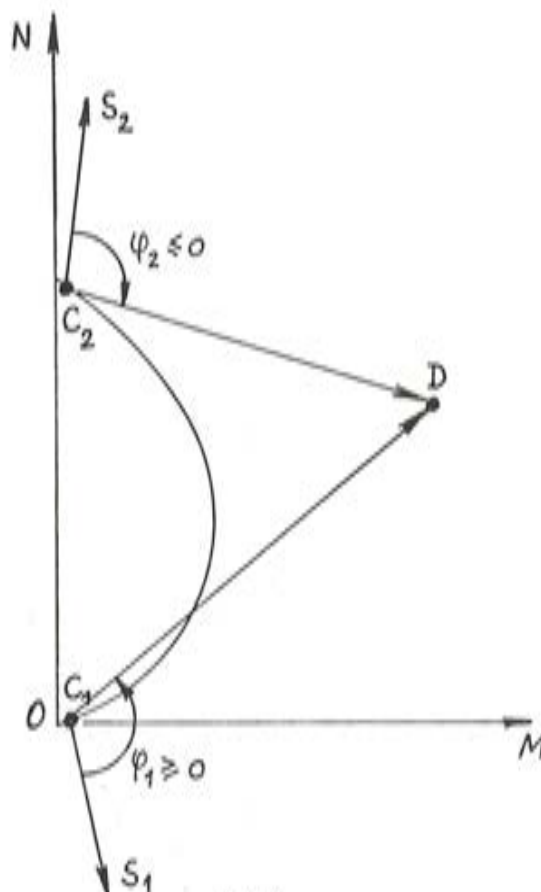


Fig. 7.

que resultará distinto de cero, por lo que será preciso hacer tanteos hasta anular la función error  $y = \text{sen } \varphi$ . Estos tanteos se hacen por el método de bipartición. Se supone que para  $x_1 = 0,01 \cdot h$  es  $y \geq 0$ , puesto que el punto  $C_1$  estará prácticamente en el origen  $O$  (véase fig. 7) y el vector  $\overline{C_1 D}$  estará por encima del  $\overline{C_1 S_1}$ , ya que las armaduras estarán todas en tracción, y se supone que la sollicitación  $D$  no es de tracción dominante, como corresponde a secciones de soportes de edificación.

Se supone análogamente que para  $x_2 = 10 \cdot h$  es  $y \leq 0$ , puesto que el punto  $C_2$  estará prácticamente en el vértice superior del diagrama de interacción del hormigón solo (compresión simple), y el vector  $\overline{C_2 D}$  estará por debajo del  $\overline{C_2 S_2}$ , ya que todas las armaduras estarán en compresión (véase fig. 7), y se supone que la sollicitación  $D$  no es de compresión simple ni demasiado cercana a ella, debido al hecho de haber impuesto una excentricidad mínima, de acuerdo con el apartado 36.3 de la EH-82.

Por consiguiente, la función  $y$  cambia de signo en el intervalo  $x_1 - x_2$ , y siendo una función continua debe anularse en algún punto del intervalo.

Se tantea para el valor intermedio  $x = 1/2 (x_1 + x_2)$ . Si resulta  $y > 0$ , entonces  $y$  se anulará en el intervalo  $x - x_2$ . Se tiene, pues, un nuevo intervalo de amplitud mitad que el inicial, en el que vuelve a tantearse para el punto medio, y así sucesivamente. Si, por el contrario, resulta  $y < 0$ , entonces se explora, de la misma forma, el nuevo intervalo mitad  $x_1 - x$ .

En cualquier caso, se prosigue así hasta conseguir que:

$$y = \text{sen } \varphi \leq 0,0001 ,$$

en cuyo momento se detiene el proceso de cálculo.

El método de bipartición, que es relativamente más lento que otros métodos iterativos (por ejemplo, el método de la cuerda), se ha elegido por la seguridad de su convergencia en un número determinado de pasos. La velocidad no ha parecido demasiado importante, desde el momento en que el tiempo de cálculo, en el ordenador HP-75, es de sólo 6 segundos (\*).

#### 4. FORMULACION

Para el cálculo de los esfuerzos  $M_c$ ,  $N_c$ ,  $M_s$ ,  $N_s$  a partir de la profundidad del eje neutro  $x$  se sigue la formulación que se indica a continuación (véase también referencia (4), tomo I, apartado 13.2). Como se verá se utilizan fórmulas analíticas exactas, con las ventajas de mayor rapidez y precisión respecto a la integración numérica aproximada, a costa de una menor sencillez en la programación, que no es importante.

##### 4.1. Cálculo de $M_c$ , $N_c$ :

a) Dominios 2-3-4 (flexión compuesta)  $x \leq h$ . Se elige como parámetro la profundidad relativa del eje neutro, referida al canto útil:  $\xi = x/d$ . Los esfuerzos resistentes del hormigón valen:

$$N_c = \Psi \cdot x \cdot b \cdot f_{cd};$$
$$M_c = N_c (0,5 \cdot h - \lambda \cdot x),$$

siendo:

$\Psi(\xi)$  un parámetro adimensional que da la tensión media relativa del bloque de compresiones;

$\lambda(\xi)$  un parámetro adimensional que da la distancia relativa de la resultante de las tensiones de dicho bloque a la fibra superior.

Estos parámetros vienen dados por las siguientes expresiones:

Dominio 2 a:  $0 \leq \xi < 0,1667$ :

$$\Psi = \frac{4,25 \xi (3 - 8 \cdot \xi)}{3 (1 - \xi)^2};$$
$$\lambda = \frac{4 - 9 \xi}{12 - 32 \xi}.$$

Dominio 2 b:  $0,1667 \leq \xi < 0,2593$ :

$$\Psi = 0,85 \frac{16 \xi - 1}{15 \xi};$$
$$\lambda = \frac{171 \xi^2 - 22 \xi + 1}{320 \xi^2 - 20 \xi}.$$

(\*) Para otros ordenadores puede no ser así. En el ordenador de bolsillo SHARP PC-1251 (precio actual: 23.700 Ptas.) el tiempo de cálculo es de unos 90 segundos, y resulta más conveniente el método de la cuerda, usando una función de error modificada, con lo que el tiempo de cálculo se reduce a unos 25 segundos.

Dominios 3 y 4:  $0,2593 < \xi$ :

$$\Psi = 0,688095;$$

$$\lambda = 0,415966 .$$

b) Dominio 5 (compresión compuesta)  $x > h$ . Se elige como parámetro la profundidad relativa del eje neutro, referida al canto total:  $\xi = x/h$ . Los esfuerzos resistentes del hormigón valen:

$$N_c = \Psi \cdot h \cdot b \cdot f_{cd} ;$$

$$M_c = N_c (0,5 - \lambda) h ,$$

siendo en este dominio:

$$\Psi = 0,85 \left[ 1 - \frac{64}{21 (7 \xi - 3)^2} \right] ;$$

$$\lambda = \frac{3}{14} \cdot \frac{2401 \xi^2 - 2058 \xi + 185}{1029 \xi^2 - 882 \xi + 125} .$$

#### 4.2. Cálculo de $M_s$ , $N_s$

a) Se calcula la deformación  $e_c$  de la fibra superior:

$$\text{Dominio 2: } e_c = 0,01 \xi / (1 - \xi);$$

$$\text{Dominios 3,4: } e_c = 0,0035;$$

$$\text{Dominio 5: } e_c = 0,0020 \xi / (\xi - 3/7).$$

b) Para cada armadura  $i$ , situada a una altura  $y_i$  respecto al centro de la sección, se calcula su deformación y su tensión:

$$e_i = e_c \frac{x + y_i - 0,5 \cdot h}{x} ;$$

$$\sigma_i = e_i \cdot E_s$$

con las limitaciones:

$$\sigma_i \geq f_{yd} ;$$

$$\sigma_i \leq -f_{yd} .$$

c) Se calculan los esfuerzos resistentes en las armaduras, supuesta un área  $A = 1 \text{ cm}^2$  en cada una de ellas, mediante las sumatorias:

$$N_s = \sum_{i=1}^n \sigma_i ;$$

$$M_s = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot y_i .$$

Para mayor rapidez de cálculo se agrupan las barras que tienen la misma altura  $y_i$  y por consiguiente la misma tensión  $\sigma_i$ .

## 5. LISTADO EN BASIC

A continuación se incluye un listado del programa en el lenguaje BASIC del ordenador personal portátil Hewlett-Packard HP-75. Este listado ha sido producido por la impresora HP-82.162A, que imprime líneas con un máximo de 24 caracteres; cuando una instrucción no cabe en una línea, la corta en los caracteres núm. 24, 48, etc. y la imprime en varias líneas sucesivas.

```

1 REM DIMEN: Dimens. Soport
es
2 INTEGER N(5),N1,N2
3 DIM Y(5)
6 F1=1750*.9/1.5
7 F2=4.2/1.1
9 INPUT 'Tarea=';K
12 ON K GOTO 15,17,19,20
,40
15 INPUT 'fcd,fyd(kp/cn2
)=';F1,F2
16 F1=F1*10 @ F2=F2/1000
17 INPUT 'b,h(cn)=';B,H
18 B=B/100 @ H=H/100
19 INPUT 'Recubr. r(cn)=
';C @ C=C/100
20 INPUT 'Cod. Arnado CA=
';N1
21 N2=IP(N1/10)
22 N1=N1-10*N2
23 N(1),N(N1)=N2
24 Y(1)=H/2-C @ Y(N1)=-Y
(1)
25 IF N1<3 THEN 30
26 D=(H-2*C)/(N1-1)
27 FOR I=2 TO N1-1
28 N(I)=2 @ Y(I)=Y(I-1)-
D
29 NEXT I
30 D=H-C @ F3=F1*B
32 U1=40*F2*H*B/(N1+N2-2
)/2
35 E3=.02*H/B @ IF E3<.0
2 THEN E3=.02
38 IF E3<H/20 THEN E3=H/
20
40 INPUT 'Md,Nd(mt,t)=';
D2,D1
45 IF D2<E3*D1 THEN D2=E
3*D1
60 X1=.01*H @ X2=10*H
70 X3=(X1+X2)/2 @ X=X3/3
80 IF X>.167 THEN 120
90 F=4.25*X*(3-8*X)/3/(1
-X)/(1-X)
100 L=(4-9*X)/(12-32*X)
110 GOTO 150

120 IF X>.259 THEN 160
130 F=.85*(16*X-1)/15/X
140 L=((171*X-22)*X+1)/(
320*X-20)/X
150 E4=100*X/(1-X) @ GOT
0 100
160 IF X3>H THEN 210
170 F=.6001 @ L=.416 @ E
4=35
180 C1=X3*F3*F
190 C2=C1*(H/2-X3*L)
200 GOTO 270
210 X=X3/H @ E4=20*X/(X-
3/7)
220 F=7*X-3
230 F=.05-54.4/21/F/F
240 L=3/14*((2401*X-2058
)*X+105)/((1029*X-882)*X
+125)
250 C1=H*F3*F
260 C2=C1*H*(.5-L)
270 S1,S2=0 @ S4=.21*E4
280 FOR I=1 TO N1
290 S=S4*(X3+Y(I)-H/2)/X
3
300 IF S<-F2 THEN S=-F2
310 IF S>F2 THEN S=F2
320 S=S*N(I) @ S1=S1+S
330 S2=S2+S*Y(I)
350 NEXT I
360 S3=D1-C1 @ S4=D2-C2
365 E=(S2*S3-S1*S4)/SQRT
(S3*S3+S4*S4)*(S1*S1+S2*
S2)
370 IF ABS(E)<.0001 THEN
400
380 IF E<0 THEN X2=X3 @
GOTO 70
390 X1=X3 @ GOTO 70
400 A=(D2-C2)/S2 @ U=A*F
2
405 IF U<U1 THEN U=U1 @
A=U/F2
407 F4=SQRT(400*A/PI)
410 DISP USING '2(4d.2d)
';U,F4
430 WAIT 8
440 GOTO 9

```

Sobre este listado conviene hacer algunas aclaraciones, señalando las principales peculiaridades del BASIC del HP-75 en relación con el BASIC de otros ordenadores personales:

- En las instrucciones de asignación no es necesario utilizar la palabra LET. Así, por ejemplo, la línea número 6 dice:  $F1 = 1750 * .9 / 1.5$ , mientras que en otros ordenadores se pondría LET  $F1 = 1750 * .9 / 1.5$ .
- Una misma línea puede contener varias instrucciones separadas por el símbolo @. Por ejemplo, la línea 16 tiene dos instrucciones de asignación:  $F1 = F1 * 10$  y  $F2 = F2 / 1.000$ .
- Una instrucción de asignación puede ser múltiple, asignando un cierto valor a varias variables separadas por comas. Así, la línea 270 tiene la instrucción  $S1, S2 = 0$  equivalente a las dos instrucciones  $S1 = 0$  y  $S2 = 0$ .
- La función IP (línea 21) tiene como resultado la parte entera de la expresión que figura entre paréntesis como argumento. En este programa es equivalente a la función INT, de uso más común en otras máquinas.
- La función PI (línea 407) es una función sin argumentos que proporciona el valor de la constante  $\pi = 3,1415927$ .
- El programa no lleva un END al final, porque el intérprete del HP-75 presupone que al final de cualquier listado BASIC existe este END. Para otros ordenadores puede ser necesario ponerlo explícitamente.

## 6. EJEMPLO

Se trata de dimensionar la sección de un soporte corto de  $30 \times 40 \text{ cm}^2$  sometida a las siguientes solicitaciones actuantes:

a)  $M_d = 14,9 \text{ mt}$  ;  $N_d = 81,9 \text{ t}$

b)  $M_d = 8,5 \text{ mt}$  ;  $N_d = 105,0 \text{ t}$

Se adoptan las siguientes resistencias y coeficientes de seguridad:

$$f_{ck} = 175 \text{ kp/cm}^2 ; \gamma_c = 1,5$$

$$f_{yk} = 4.200 \text{ kp/cm}^2 ; \gamma_s = 1,1$$

Se comienzan los tanteos suponiendo un recubrimiento  $r = 4 \text{ cm}$  y adoptando el código de armado  $CA = 12$  (armaduras frontales iguales, fig. 8). Los datos de entrada y los resultados correspondientes son los siguientes:

Tarea	b x h	r	CA	$M_d$	$N_d$	U	$\phi$
2	30 40	4	12	14,9	81,9	40,91	36,94
5				8,5	105	27,90	30,50

Entrando con la capacidad mecánica  $U = 40,91 \text{ t}$  en una tabla de capacidades mecánicas resulta la combinación  $4 \phi 20$  ( $U = 48 \text{ t}$ ), véase fig. 8, sobrando bastante acero. Se decide cambiar el código de armado a  $CA = 33$  (fig. 9), que es por otra parte más lógico. Los datos de entrada y resultados son:

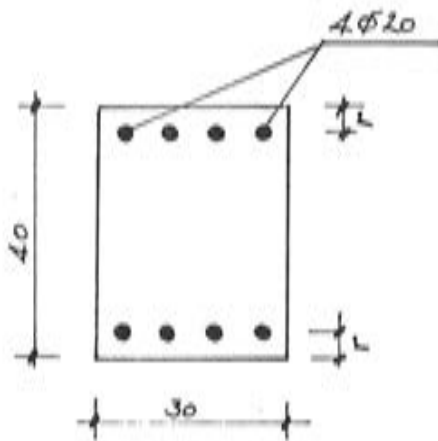


Fig. 8.

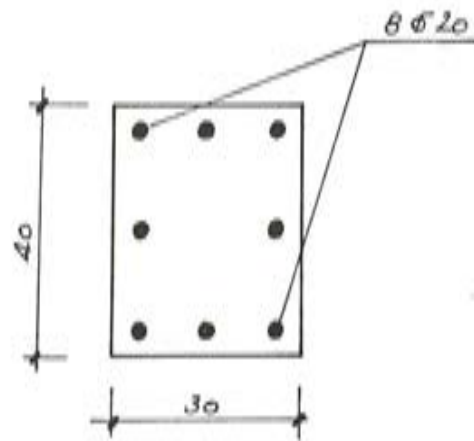


Fig. 9.

Tarea	b x h	r	CA	M <sub>d</sub>	N <sub>d</sub>	U	φ
4			33	14,9	81,9	12,19	20,16
5				8,5	105	7,63	15,95

Ahora resulta para cada barra un diámetro teórico  $\phi = 20,16$  mm, que es ligeramente superior al diámetro normalizado  $\phi 20$ . Sería necesario ir a  $\phi 25$ . No obstante, se prueba a corregir el recubrimiento para ajustarlo al correspondiente a  $\phi 20$ , que es  $r = 20 + 6 + 10 = 36$  mm = 3,6 cm:

Tarea	b x h	r	CA	M <sub>d</sub>	N <sub>d</sub>	U	φ
3		3,6	33	14,9	81,9	11,87	19,89

Por consiguiente, la solución correcta es 8  $\phi 20$  (fig. 9).

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON: "Instrucción EH-82 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado". Servicio de publicaciones del Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid, 1982.
2. F. MORAN: "Cálculo de secciones de Hormigón Armado, sometidas a solicitaciones normales, en el estado límite último". Monografía núm. 304 del Instituto Eduardo Torroja. Madrid, 1972.
3. H. CORRES, O. UNANUE, R. FERNANDEZ: "Dimensionamiento analítico directo de secciones de hormigón armado en estado límite último de agotamiento". Hormigón y Acero núm. 150, Madrid 1<sup>er</sup> trimestre 1984.
4. P. J. MONTOYA, A. G. MESEGUER, F. MORAN: "Hormigón Armado". 11<sup>a</sup> Edición. Editorial Gustavo Gill. Barcelona, 1983.



## Nota Necrológica

Con profundo sentimiento tenemos que comunicar que el Ingeniero Carlos Ernesto Duvoy, Presidente de la Asociación Argentina del Hormigón Pretensado (A.A.H.P.) y Director Técnico del Instituto del Cemento Portland Argentino, falleció repentinamente el 28 de junio pasado, víctima de una afección cardíaca.


El Ingeniero Duvoy, durante su prolongada actuación como Presidente de la A.A.H.P., realizó una eficaz labor llevando a la Asociación a ocupar un elevado nivel tanto en el ámbito local como en el internacional. Era Vicepresidente de la F.I.P. en representación del Grupo nacional argentino del pretensado y como tal participó en diferentes Congresos y reuniones internacionales de la Federación.

Organizó varias Jornadas argentinas del Pretensado, en algunas de las cuales han participado representantes españoles y fue el promotor de las I Jornadas Ibero-latinoamericanas del Hormigón Pretensado celebrada, en Buenos Aires, en octubre de 1977, en las cuales se trató de constituir una confederación de las Asociaciones ibero-latinoamericanas del pretensado, para actuar conjuntamente dentro del marco de la F.I.P., formando así un Grupo de mayor peso específico, con los consiguientes beneficios.

Los trabajos para el desarrollo de esta colaboración se han venido realizando por las Asociaciones de Argentina y España en íntimo contacto y dentro de un clima de la mayor cordialidad. Ultimamente y debido a la actual difícil situación económica de los diferentes países, estas negociaciones, lamentablemente, se encontraban suspendidas.

Con estas líneas queremos rendir un cálido y respetuoso recuerdo de homenaje a la ilustre figura del Ingeniero Duvoy, con quien tan entrañables relaciones veníamos manteniendo y que tanto y tan eficazmente trabajó para el desarrollo de la técnica del pretensado en los diferentes campos de promoción, divulgación e investigación.

En sustitución del Ingeniero Duvoy, ha sido designado nuevo Presidente de la A.A.H.P., nuestro también muy estimado amigo el Ingeniero José Bagg, a quien deseamos el mayor de los éxitos en su nuevo cargo.



## Teoría variacional de láminas

Por. Salvador Monteón Cremades \*

Juan F. Moya Soriano\*\*

Pedro Fuster García \*\*\*

*El orden de los acontecimientos históricos nos muestra claramente cuál es la verdadera posición de los principios variacionales: se encuentran al término de una larga cadena de razonamientos, como una bella y satisfactoria condensación de los resultados deducidos.*

MAX BORN

### SINOPSIS

La reducción de las ecuaciones que gobiernan la deformación de una lámina al dominio bidimensional definido por su superficie de referencia (usualmente su superficie media) se desarrolló en una publicación anterior [4] en sus aspectos cinemáticos exclusivamente.

En el presente trabajo, este tratamiento se extiende a los restantes sistemas de ecuaciones: ecuaciones del movimiento, constitutivas y condiciones de contorno. Para obtener su forma consistente con la modelización cinemática adoptada se han utilizado los *principios variacionales* aplicados al equilibrio de un cuerpo hiperelástico, en nuestro caso lámina hiperelástica; estos nos proporcionarán de forma compacta y elegante las ecuaciones de equilibrio junto con las condiciones de contorno correspondientes a nuestro modelo bidimensional de lámina.

---

\* Dr. Ingeniero de Caminos, profesor encargado de la cátedra de Puentes de la ETSICCPV.

\*\* Ingeniero de Caminos, profesor ayudante de Puentes de la ETSICCPV.

\*\*\* Dr. Ingeniero de Caminos, catedrático de Cálculo de Estructuras de la ETSICCPV.

## 1. INTRODUCCION

En el presente trabajo se prosigue la construcción de una teoría bidimensional de láminas general, adoptando el mismo punto de vista que en la publicación anterior [4], esto es, en orden a completar las ecuaciones cinemáticas allí presentadas (reducidas a la superficie de referencia de la lámina, en nuestro caso su superficie media) vamos a obtener las ecuaciones de equilibrio, y las condiciones de contorno correspondientes en una lámina constituida por un material hiperelástico, referidas al mismo dominio bidimensional. De forma análoga a lo expuesto en los capítulos de cinemática, trasladaremos toda la información relativa al estado tensional de la estructura y fuerzas en los puntos  $\mathbf{p}(\theta^\alpha, \eta)$  situados sobre una misma línea coordenada  $\eta$ , exterior e inicialmente normal a la superficie media  $\Sigma(\theta^\alpha)$  de la lámina, a un único punto  $\mathbf{r}(\theta^\alpha) \in \Sigma$ .

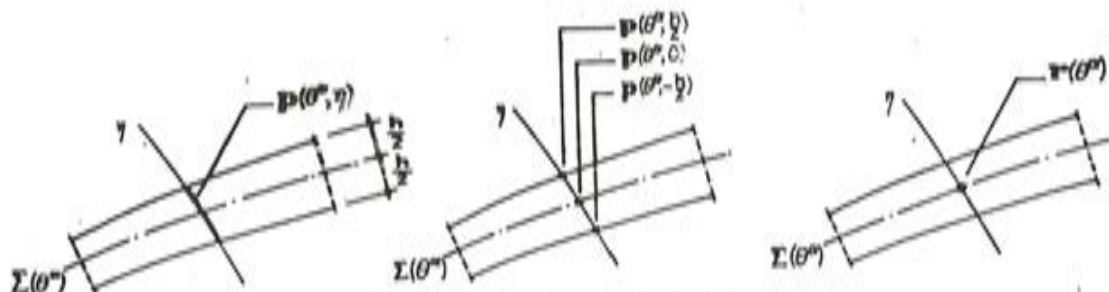


Fig. 1.1. "Los propósitos de la teoría".

Esta condensación en el modelo implicará nuevamente una pérdida de información, relativa en este caso a la distribución de tensiones en el cuerpo y sobre su contorno. Esta distribución vendrá sustituida, en el modelo 2D, por unas nuevas funciones, denominadas esfuerzos generalizados, en función de los cuales quedarán expresadas las nuevas ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno.

La deducción de ambos sistemas de ecuaciones se ha abordado por la vía Lagrangiana (en lugar de optar por una aproximación Newtoniana al fenómeno, basada en los conceptos vectoriales de fuerza y movimiento, y resumida en el anexo A), utilizando los principios variacionales para su derivación. La principal ventaja de estos métodos, también denominados frecuentemente métodos energéticos, reside tanto en la capacidad y elegancia de su formulación como en la posibilidad de generar e interpretar adecuadamente los esfuerzos generalizados.

Para ello se ha seguido el presente orden de exposición.

De forma análoga a lo realizado en [4], se presenta en el capítulo 2, una síntesis de teoría variacional del continuo para posteriormente (capítulo 3) aplicar estos mismos principios a una lámina de geometría arbitraria, constituida por un material hiperelástico y referida a un sistema convectivo de coordenadas  $(\theta^\alpha, \eta)$ . Deducidas sus ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno, se presentan a continuación las ecuaciones constitutivas del método 2D así elaborado y consistentes con el tratamiento cinemático adoptado.

Posteriormente se realiza la particularización de esta teoría general a *láminas con comportamiento transversal de primer orden*, dentro de las cuales quedan incluidas teorías más conocidas, como la de los hermanos Cosserat [1], Reissner-Mindlin [3] o Love-Kirchhoff.

También se han incluido algunos anexos complementarios al texto principal, con objeto de escribir al margen algunos conceptos mencionados en los capítulos anteriores y ofrecer mayores detalles.

Todos los cálculos y desarrollos se han realizado en notación tensorial, y se indica en el apéndice bibliográfico algún texto guía al respecto.

## 2. TEORIA VARIACIONAL DEL CONTINUO

Dado un cuerpo  $B$  en movimiento bajo la acción del correspondiente sistema de fuerzas, las ecuaciones que gobiernan su comportamiento son:

- (1) las ecuaciones fundamentales de la dinámica, equivalentes a las dos leyes de Cauchy del movimiento (ver anexo A) que proporcionan un conjunto de tres ecuaciones diferenciales en las seis variables independientes del tensor de tensiones.
- (2) Las ecuaciones cinemáticas que relacionan las seis componentes independientes del tensor de deformación con las tres componentes del campo de desplazamientos.
- (3) Las ecuaciones constitutivas, que definen la ley de comportamiento del material a través de seis ecuaciones tensión-deformación.

Este sistema permite obtener, por eliminación, tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con tres incógnitas (las componentes del campo de desplazamientos) que, junto con las condiciones de contorno existentes, definen el proceso dinámico del cuerpo.

Una formulación alternativa del problema puede obtenerse a partir de los principios variacionales. Para ello introduciremos en este capítulo los conceptos de *funcional de acción de un cuerpo hiperelástico* y demostraremos como el principio de estacionalidad de dicho funcional equivale a las ecuaciones del movimiento del cuerpo.

El principio variacional se escribirá de una forma ligeramente diferente a la seguida usualmente en los textos de mecánica clásica de medios continuos, para facilitar su posterior aplicación a las estructuras laminares de tal forma que se deriven sus ecuaciones de equilibrio junto con las condiciones de contorno *necesarias y consistentes* con las ecuaciones cinemáticas que se empleen en su estudio.

### 2.1. Consideraciones previas

Sea pues un cuerpo tridimensional hiperelástico  $B$  sobre la definición de hiperelasticidad y su relación con la elasticidad convencional, puede consultarse el anexo C. Supondremos que en un instante determinado  $t_0$  ocupa, en el espacio tridimensional Euclideo, un conjunto de puntos conexo  $V_0(B)$  que denominaremos *configuración de referencia*.

En esta configuración, la posición ocupada por cada partícula del cuerpo vendrá descrita por el vector posición  $\mathbf{P}$  de dicho punto con respecto a cierto origen de referencia. Cada partícula del cuerpo podrá entonces definirse mediante las coordenadas Cartesianas  $X^i$  de ese punto  $\mathbf{P}$  o, alternativamente, empleando unas coordenadas convectivas  $\theta^i$  no necesariamente pertenecientes a un sistema de referencia ortonormal.

En cualquier otra configuración del cuerpo, la posición de cada partícula vendrá definida por un nuevo vector posición  $\mathbf{p}$  con respecto al mismo origen de referencia. La dependencia de esta nueva posición con respecto a las variables independientes que hayamos elegido será entonces:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\theta^i) = X^k \mathbf{i}_k \quad (2.1.a)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\theta^i) = x^k(X^j) \mathbf{i}_k \quad (2.1.b)$$

Introduciremos entonces el concepto de *variable de estado geométrica* como aquel conjunto de parámetros, función de las variables independientes, que nos definen la posición de cada partícula del cuerpo en cada una de sus configuraciones.

Este concepto general abarca, en nuestro caso, tanto a las funciones  $x^k$  ( $X^i$ ) como a la función vectorial  $\mathbf{p}$  ( $\theta^i$ ). Puede además generalizarse a otros tipos de cuerpos al considerar unas nuevas funciones  $\mathbf{n}$  ( $\theta^i$ ) como *variables de estado geométricas*.

En cada configuración definiremos los vectores naturales covariantes por las derivadas parciales del vector posición con respecto al sistema coordenado adoptado como variables independientes. Esto es

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_i^* = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta^i} \quad ; \quad \mathbf{g}_i^* = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta^i} \\ \bar{\mathbf{G}}_i^* = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^i} = \mathbf{i}_i \quad ; \quad \bar{\mathbf{g}}_i^* = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^i} = \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \mathbf{i}_k \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Según queda expuesto en las ecuaciones anteriores, los vectores *naturales* referidos a las coordenadas Cartesianas se han escrito con una barra horizontal. Este criterio se aplicará a otros sistemas posteriores.

Definiremos el *gradiente de deformación* como el tensor mixto que relaciona los vectores naturales de una configuración cualquiera con la de referencia (este sistema también suele denominarse gradiente del movimiento), es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}_i^* = z_i^{*k} \mathbf{G}_k^* \\ \bar{\mathbf{g}}_i^* = \bar{z}_i^{*k} \bar{\mathbf{G}}_k^* \quad ; \quad z_i^{*k} = \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Recordemos que el tensor de deformación de Lagrange se definía como la semi-variación del tensor métrico referida a la configuración inicial, o de referencia:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_j^* - \mathbf{G}_i^* \cdot \mathbf{G}_j^*) \\ &= \frac{1}{2} (z_i^{*k} z_j^{*l} - \delta_i^k \delta_j^l) \mathbf{G}_{kl}^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tanto los sistemas (2.3) como (2.4) proporcionan una medida de la deformación del cuerpo, y puesto que admitimos que el cuerpo es hiperelástico existirá entonces una función de energía de deformación. Por ello las variables características de la deformación se denominan *variables de estado energéticas*.

Ampliando este concepto, definiremos como *variable de estado energética* a toda función derivada de las variables de estado geométricas con respecto a las variables independientes consideradas. Este concepto abarca tanto a los vectores naturales  $\mathbf{g}_i^*$  (cuando consideremos como variables de estado geométricas las funciones vectoriales  $\mathbf{p}$ ), como a los gradientes de deformación  $\bar{z}_i^{*k}$  si se toman como variables de estado geométricas a los escalares  $x^k$ .

Nos interesaremos a continuación por las características materiales del cuerpo, volumen y masa. Situados en la configuración inicial, el elemento diferencial de volumen se escribirá:

$$\begin{aligned} dV_0 &= \sqrt{G^*} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3, \\ &= dX^1 dX^2 dX^3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

A cada punto del espacio Euclideo ocupado por el cuerpo en esta misma configuración, le asignaremos una función de densidad de masa, denotada  $\rho_0^*$ , de forma que la masa de cada parte  $P$  del cuerpo venga dada por

$$m(P) = \int_{V_0(P)} \rho_0^* \cdot dV_0 \quad (2.6')$$

En cualquier otra configuración, el elemento diferencial de volumen vendrá dado por la ecuación

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{g^*} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &= dx^1 dx^2 dx^3, \end{aligned} \quad (2.6)$$

y a cada punto  $p$  del cuerpo le asignaremos análogamente una función de densidad de masa  $\rho^*$  tal que, para cada parte de  $B$  se cumpla:

$$m(P) = \int_{V(P)} \rho^* \cdot dV \quad (2.7)$$

Recordemos que en todas las ecuaciones anteriores  $g^*$  designa el determinante del tensor métrico en una configuración cualquiera del cuerpo. Sea ahora el *diferencial de volumen material* definido por:

$$dv = d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3, \quad (2.8)$$

en esta ecuación los diferenciales se refieren exclusivamente a las variables independientes adoptadas. Expresado en coordenadas Cartesianas se comprueba directamente que el diferencial de volumen material coincide con  $dV_0$ , además las ecuaciones (2.5) y (2.6) que definen un mismo concepto en configuraciones distintas podrán reescribirse como sigue:

$$\begin{cases} dV_0 = \sqrt{G^*} dv, \\ dV = \sqrt{g^*} dv. \end{cases} \quad (2.9)$$

También podemos definir ahora una *función de densidad de masa material*, independiente de la configuración adoptada por el cuerpo, de forma que

$$m(P) = \int_{v(P)} \gamma^* \cdot dv \quad (2.10)$$

Utilizando ahora las definiciones (2.6'), (2.7) y (2.10), el principio de conservación de la masa puede expresarse en la forma siguiente:

$$\gamma^* = \sqrt{G^*} \cdot \rho_0^* = \sqrt{g^*} \cdot \rho^*. \quad (2.11)$$

Esta ecuación es válida para cualquier sistema de referencia de la posición de las partículas de  $B$ . En particular si las variables independientes adoptadas son las coordenadas Cartesianas  $X^i$ , entonces (2.11) pasará a escribirse

$$\begin{cases} \gamma^*(X^i) = \rho_0^*(X^i) = J \cdot \rho^*(X^i), \\ J = |\bar{z}^{*k}| \end{cases} \quad (2.12)$$

En esta expresión  $J$  designa al Jacobiano de la transformación  $x^k(X^i)$ , que coincide con

la raíz cuadrada del cociente de los determinantes del tensor métrico en la configuración actual y deformada,  $\sqrt{g^*/G^*}$ .

## 2.2. Energía potencial y funcional de acción

Comenzaremos por definir algunos conceptos de mecánica Lagrangiana.

Asumiremos que en cada configuración se puede asignar a toda partícula de  $B$  una función  $\mathcal{L}^*$  denominada *función de densidad Lagrangiana*, dada por la diferencia entre la densidad de energía cinética y la densidad de energía potencial. Denominaremos *funcional de acción* del cuerpo a la integral extendida a todos los puntos materiales de  $B$  de la función de densidad Lagrangiana así definida:

$$A = \int_{v(B)} \mathcal{L}^* \cdot dv, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L}^* = K^* - V^* \quad (2.14)$$

En la ecuación (2.14)  $K^*$  y  $V^*$  representan la densidad de energía cinética y potencial respectivamente, ambas por unidad de volumen material.

Si además el cuerpo  $B$  está constituido por un material hiperelástico, existirá entonces una función escalar denominada *densidad de energía de deformación* (ver anexo C) que designaremos por  $W_m^*$ , tal que la densidad de energía potencial pueda expresarse en la forma

$$V^* = \gamma^* \cdot (W_m^* + \Omega^*), \quad (2.15)$$

En esta ecuación la densidad de energía de deformación se ha dado por unidad de masa, y  $\Omega^*$  representa el potencial del que derivan las fuerzas de masa, supuestas conservativas.

Si además nos interesamos exclusivamente por las ecuaciones que gobiernan el equilibrio estático del cuerpo, podremos restringir nuestra atención a la configuración de equilibrio, en la que la densidad de energía cinética es precisamente nula. La lagrangiana del cuerpo coincidirá con su energía potencial cambiada de signo y por unidad de volumen material, correspondiendo la energía potencial total de  $B$  al propio funcional de acción.

Si queremos definir la Lagrangiana por unidad de volumen en cualquier configuración nos basta recurrir a (2.9), resultando

$$\begin{cases} L_0^* = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \mathcal{L}^*, \\ L^* = \frac{1}{\sqrt{g^*}} \mathcal{L}^* \end{cases} \quad (2.16)$$

Recurriendo ahora a las ecuaciones (2.14) y (2.15), la Lagrangiana correspondiente a configuraciones de equilibrio de cuerpo será

$$L^* = -\rho^* (W_m^* + \Omega^*), \quad (2.17)$$

definida ésta por unidad de volumen de la configuración actual de equilibrio. La ecuación anterior permite introducir la densidad de energía de deformación referida a esta misma medida:

$$W^* = \rho^* \cdot W_m^* \quad (2.18)$$

Llevando esta definición a (2.17) y particularizando posteriormente a la configuración de referencia, o inicial y también de equilibrio, obtendremos

$$\begin{cases} L^* = -(W^* + \rho^* \cdot \Omega^*), \\ L_0^* = -(W_0^* + \rho_0^* \cdot \Omega^*). \end{cases} \quad (2.19)$$

A partir de la definición de la función de densidad Lagrangiana expuesta en líneas anteriores, las derivadas parciales respecto a las variables de estado geométricas serán (por definición la densidad de energía de deformación sólo depende de las variables de estado energéticas),

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{p}} &= -\gamma^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{p}} \\ &= \gamma^* \cdot \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{b}$  define las fuerzas de masa que actúan sobre el cuerpo.

Como éstas se han supuesto conservativas, a falta de una constante la ecuación anterior podrá integrarse, obteniendo

$$\Omega^* = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}, \quad (2.21)$$

o bien, en forma variacional

$$\delta \Omega^* = -\mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{p}. \quad (2.22)$$

Unos cálculos análogos pueden aplicarse a la densidad de energía de deformación, de la que derivan las tensiones en un material hiperelástico; por definición tendremos

$$\begin{cases} T^{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial e_{ij}^*} \\ \tilde{T}^{ij} = \frac{\partial W_0^*}{\partial e_{ij}^*} \end{cases} \quad (2.23)$$

siendo  $T^{ij}$  y  $\tilde{T}^{ij}$  los tensores de tensiones de Cauchy y de Piola-Kirchhoff respectivamente (ver el anexo B). Nótese que estas derivadas se han simetrizado respecto a los índices  $i, j$ :

$$\frac{\partial}{\partial e_{ij}^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial e_{ij}^*} + \frac{\partial}{\partial e_{ji}^*} \right)$$

A partir de las definiciones (2.23) podremos evaluar las derivadas parciales de la Lagrangiana respecto a las variables de estado energéticas. Para ello será de utilidad la ecuación de definición del tensor de deformación de Lagrange (2.4). Operando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} &= -\gamma^* \cdot \frac{\partial W_m^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} = -\gamma^* \cdot \frac{\partial^j W_m^*}{\partial e_{ij}^*} \cdot \frac{\partial e_{ij}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*}, \\ \frac{\partial e_{ij}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} &= \frac{1}{2} (\delta_i^k \mathbf{g}_j^* + \delta_j^k \mathbf{g}_i^*) \end{aligned}$$

luego finalmente

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} = -\gamma^* \cdot \frac{\partial W_m^*}{\partial e_{jk}^*} \cdot \mathbf{g}_j^* \quad (2.24)$$

Esta ecuación puede darse en función de las tensiones, en este caso se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} &= -\sqrt{g^*} T^{kj} \mathbf{g}_j^* \\ &= -\sqrt{G^*} \tilde{T}^{kj} \mathbf{g}_j^* = -\mathbf{T}^k \end{aligned} \quad (2.25)$$

Esta ecuación puede nuevamente integrarse, y a falta de una constante podremos escribir la forma de la función de densidad Lagrangiana en función de los vectores  $\mathbf{T}^k$  definidos en (2.25):

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* = -\mathbf{T}^k \cdot \mathbf{g}_k^* , \\ \delta \mathcal{L}^* = -\mathbf{T}^k \cdot \delta \mathbf{g}_k^* \end{cases} \quad (2.26)$$

Alternativamente, si hubiéramos adoptado como variables energéticas el propio tensor de deformación de Lagrange los resultados finales serían:

$$\begin{cases} L^* = -T^{ij} \cdot e_{ij}^* , & \delta L^* = -T^{ij} \cdot \delta e_{ij}^* \\ L_0^* = -\tilde{T}^{ij} \cdot e_{ij}^* , & \delta L_0^* = -\tilde{T}^{ij} \cdot \delta e_{ij}^* \end{cases} \quad (2.27)$$

estas ecuaciones se deducen inmediatamente a partir de (2.18) y (2.23), y equivalen al sistema (2.26) referido a unidades de volumen consistentes.

### 2.3. Las ecuaciones de Euler-Lagrange

En la sección anterior hemos introducido el concepto de funcional de acción, vamos a investigar a continuación las condiciones bajo las cuales dicho funcional adopta un valor estacionario. Para ello compararemos el valor del funcional  $\mathcal{A}$  correspondiente a una configuración del cuerpo descrita por el estado geométrico  $\mathbf{p}$  con el valor asociado a un estado próximo  $\hat{\mathbf{p}}$ .

Con este propósito consideraremos una familia de transformaciones de parámetro  $\lambda$  del estado  $\mathbf{p}$ , de la forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}(\lambda) &= \mathbf{H}(\theta^i, \mathbf{p}, \lambda) , \\ \hat{\mathbf{p}}(0) &= \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Admitiremos que la función vectorial  $\mathbf{H}$  es suficientemente diferenciable, de forma que la ecuación anterior pueda desarrollarse en serie de potencias del parámetro  $\lambda$ , resultando bajo estas condiciones:

$$\hat{\mathbf{p}}(\lambda) = \mathbf{p} + \lambda \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{d\lambda} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{h}(\theta^i, \mathbf{p}) , \quad N = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

entonces la *variación lineal* del estado geométrico  $\mathbf{p}$  vendrá dada por

$$\delta \mathbf{p} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}}{\lambda} = \mathbf{h}(\theta^i, \mathbf{p}) \quad (2.30)$$

Un cálculo similar nos permitirá evaluar la variación sufrida por las variaciones de estado energéticas, el resultado se reproduce a continuación, expresado en términos de la variación lineal del estado geométrico obtenida anteriormente:

$$\delta g_k^* = \frac{\partial}{\partial \theta^k} (\delta p) \quad (2.31)$$

Hasta ahora sólo hemos investigado las variaciones de las variables de estado al desplazarnos hacia una configuración próxima. El funcional de acción del cuerpo admitirá también un tratamiento similar, cuyas ecuaciones desarrollamos a continuación.

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \int_{v(\theta)} \hat{\mathcal{L}}^* \cdot dv \\ &= \int_{v(\theta)} \left\{ \mathcal{L}^* + \lambda \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \cdot \delta \mathbf{g}_k^* \right] + O(\lambda^M) \right\} dv, \quad M > 1, \end{aligned}$$

resultando para la variación lineal:

$$\delta A = \int_{v(\theta)} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \cdot \delta \mathbf{g}_k^* \right] dv \quad (2.32)$$

Introduciendo (2.31) e integrando por partes, el segundo sumando entre corchetes conduce a una expresión que puede transformarse con la ayuda del teorema de Gauss (ver anexo D):

$$\begin{aligned} \int_{v(\theta)} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \cdot \delta \mathbf{g}_k^* dv &= \int_{v(\theta)} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^k} (\delta p) dv \\ &= \int_{v(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta^k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \cdot \delta p \right) - \frac{\partial}{\partial \theta^k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \right) \cdot \delta p \right] dv \\ &= \int_{v(\theta)} - \frac{\partial}{\partial \theta^k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \right) \cdot \delta p dv + \int_{\partial v(\theta)} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \cdot \delta p \right) \nu_k ds \end{aligned}$$

donde  $\nu_k ds$  son las componentes del vector normal exterior al contorno  $\partial v(\theta)$  del cuerpo. Llevando a (2.32) obtendremos

$$\delta A = \int_{v(\theta)} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \theta^k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \right) \right] \cdot \delta p dv + \int_{\partial v(\theta)} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \cdot \delta p \right) \nu_k ds \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) es válida para cualquier proceso dinámico. Si la particularizamos a los estados de equilibrio del cuerpo serán aplicables las ecuaciones (2.20) y (2.25), definiendo de esta manera la variación lineal de la energía potencial del cuerpo hiperelástico, funcional de acción del problema estático:

$$\delta V = - \int_{v(\theta)} \left[ \gamma^* \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{T}^k}{\partial \theta^k} \right] \cdot \delta p dv + \int_{\partial v(\theta)} [\mathbf{T}^k \cdot \delta p] \nu_k ds \quad (2.34)$$

Esta última ecuación puede darse en la configuración actual del cuerpo, o de referencia se-

gún se desee. Basta recordar la ecuación de conservación de la masa (2.11), resultando respectivamente

$$\left. \begin{aligned} \delta V &= - \int_{V(\theta)} \left[ \rho^* \mathbf{b} + \frac{1}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial \mathbf{T}^k}{\partial \theta^k} \right] \cdot \delta \mathbf{p} \, dV + \int_{\partial V(\theta)} [\mathbf{T}^k \cdot \delta \mathbf{p}] \hat{n}_k \frac{d\Sigma}{\sqrt{g^*}} \\ &= - \int_{V_0(\theta)} \left[ \rho_0^* \mathbf{b} + \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial \mathbf{T}^k}{\partial \theta^k} \right] \cdot \delta \mathbf{p} \, dV_0 + \int_{\partial V_0(\theta)} [\mathbf{T}^k \cdot \delta \mathbf{p}] \hat{N}_k \frac{dS}{\sqrt{G^*}} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Vamos a interesarnos en primer lugar por la integral extendida a todo el contorno  $\partial V_0$  del cuerpo en su configuración de referencia, de normal exterior  $\hat{N} = \hat{N}^k \mathbf{G}_k^*$ . Podemos definir un vector de tensión por unidad de superficie no deformada  $\mathbf{t}_0$ ,

$$\mathbf{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \mathbf{T}^k \hat{N}_k = \tilde{T}^{jk} N_k \mathbf{g}_j^* \quad , \quad (2.36)$$

entonces la citada integral representa *el trabajo virtual efectuado por las tensiones en el contorno* asociado a unos desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{p}$ . Es más, si consideramos ahora la integral extendida a todo el volumen  $V_0(\mathcal{B})$ , los dos sumandos que la definen corresponderán al trabajo virtual desarrollado por las fuerzas internas al imponer unos desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{p}$ : fuerzas de masa  $\mathbf{b}$  que dan un trabajo virtual  $\mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{p}$ , y tensiones  $\mathbf{T}^k$  de desplazamientos virtuales asociados  $\delta \mathbf{g}_k^*$  según se deduce de (2.32).

Si ahora imponemos la estacionalidad del funcional de acción, deberemos exigir que su primera variación, o variacional, sea nula para cualquier variación lineal de  $\mathbf{p}$ . Supondremos que  $\delta \mathbf{p}$  se anula sobre  $\partial v(\mathcal{B})$  (en la sección siguiente estudiaremos con más detalle las condiciones de contorno) entonces deberá cumplirse de forma general, según (2.33)

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \theta^k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \right) = 0 \quad (2.37)$$

Particularizada a problemas de equilibrio, esta ecuación será equivalente según (2.34) a:

$$\gamma^* \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{T}^k}{\partial \theta^k} = 0 \quad , \quad (2.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g^*} \rho^* \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{T}^k}{\partial \theta^k} &= 0 \quad , \\ \sqrt{G^*} \rho_0^* \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{T}^k}{\partial \theta^k} &= 0 \quad . \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Las ecuaciones (2.39) son las versiones actual e inicial de la ecuación de equilibrio (2.38).

El sistema (2.37) se conoce como *ecuaciones de Euler-Lagrange* para sistemas conservativos, en su versión estática (2.39) coincide con las *ecuaciones de equilibrio de Cauchy* presentadas en el anexo A.

#### 2.4. Condiciones de contorno

La anulación de las integrales de contorno puede conseguirse de dos maneras, obteniendo respectivamente:

- (1) *condiciones de contorno geométricas*, en las que  $\delta \mathbf{p} = 0$ , con lo cual los desplazamientos desde la configuración de referencia tendrán un valor prefijado (usualmente nulo).
- (2) *condiciones de contorno naturales*, o libres de tracciones, en las que el vector de tensiones  $\mathbf{t}_0$  medido por unidad de área del contorno en su configuración no deformada tiene un valor nulo.

Se nos plantea ahora la cuestión de pensar en qué términos pueden ser añadidos a la función de densidad Lagrangiana sin que se vean afectadas las ecuaciones que gobiernan la estacionalidad del funcional de acción, es decir las ecuaciones (2.37) de Euler-Lagrange.

Sea pues una nueva función de densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}_Q^*$  y el funcional de acción asociado, ambos definidos por

$$\mathcal{L}_Q^* = \mathcal{L}^* + Q^*, \quad (2.40)$$

$$A_Q = \int_{\nu(\theta)} (\mathcal{L}^* + Q^*) \, d\nu$$

Llevando a (2.37) se obtiene

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \theta^k} \left( \frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \right) = 0 \quad (2.41)$$

La ecuación anterior deberá satisfacerse en cualquier punto  $\mathbf{p}$  del cuerpo y para todas sus posibles configuraciones. Ello puede conseguirse imponiendo la siguiente estructura a la función  $Q^*$ :

$$Q^* = \frac{\partial}{\partial \theta^m} Q^{*m}(\mathbf{p}, \mathbf{g}_k^*), \quad (2.42)$$

luego

$$A_Q = A + \int_{\partial \nu(\theta)} Q^{*m} \cdot \nu_m \, ds \quad (2.43)$$

deduciéndose que la función sumada a la Lagrangiana no afectará a la integral de volumen, con lo cual las ecuaciones de Euler-Lagrange seguirán cumpliéndose. Por ello todas las funciones  $Q^*(\mathbf{p}, \mathbf{g}_k^*)$  que cumplan (2.41) se denominan *funciones de densidad Lagrangiana de clase nula*, éstas conducen a las condiciones de contorno siguientes:

$$\int_{\partial \nu(\theta)} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \right) \cdot \delta \mathbf{p} \, \nu_k \, ds = 0 \quad (2.44)$$

Las condiciones de contorno geométricas se cumplirán de forma idéntica, pero las condiciones de contorno naturales proporcionarán las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{T}^k \nu_k = \frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \nu_k \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= \frac{1}{\sqrt{G^*}} \mathbf{T}^k \hat{N}_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{G^*}} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \hat{N}_k = \frac{\partial Q_0^*}{\partial \mathbf{g}_k^*} \hat{N}_k \end{aligned} \quad (2.36)$$

y en configuración actual,

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{g^*}} \mathbf{T}^k \hat{n}_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g^*}} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial g_k^*} \hat{n}_k = \frac{\partial q^*}{\partial g_k^*} \hat{n}_k \end{aligned} \quad (2.46)$$

En otros términos, las condiciones de contorno naturales serán ahora de tensión dada sobre  $\partial V_0(\mathcal{P})$  o  $\partial V(\mathcal{P})$ , según vengan expresadas por unidad de superficie no deformada o actual, y de valor

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= \frac{\partial Q_0^*}{\partial g_k^*} \hat{N}_k, \\ \mathbf{q} &= \frac{\partial q^*}{\partial g_k^*} \hat{n}_k \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Nótese que estas condiciones sólo se han impuesto sobre una parte  $\partial v(\mathcal{P})$  del contorno material del cuerpo, siendo compatibles con condiciones geométricas impuestas en los puntos  $\partial v(\mathcal{B}) - \partial v(\mathcal{P})$ . Volvamos ahora a la ecuación (2.42). Esta definición de las Lagrangianas de clase nula permite, como hemos visto, ampliar el funcional de acción para construir nuevas condiciones de contorno más generales que las inicialmente enunciadas (geométricas o de tensión nula). Si desarrollamos esta ecuación tendremos

$$Q^* = \frac{\partial Q^{*m}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{g}_m^* + \frac{\partial Q^{*m}}{\partial g_k^*} \cdot \frac{\partial g_k^*}{\partial \theta^m},$$

y al imponer una estructura de  $Q^*$  idéntica a la de la función de densidad Lagrangiana, que sólo depende explícitamente de  $\mathbf{p}$  y  $g_k^*$ , deberá verificarse

$$\frac{\partial Q^{*m}}{\partial g_k^*} \cdot \frac{\partial g_k^*}{\partial \theta^m} = 0 \quad (2.48)$$

desarrollando índices  $\{m, k\}$  y recordando que  $g_k^* = \frac{\partial}{\partial \theta^k} \mathbf{p}$  se obtiene una condición adicional para las funciones  $Q^{*m}$ :

$$\frac{\partial Q^{*m}}{\partial g_k^*} = - \frac{\partial Q^{*k}}{\partial g_m^*}$$

En consecuencia la forma más general de estas funciones explícitas de  $\mathbf{p}$  y  $g_k^*$  será

$$\left. \begin{aligned} Q^{*m} &= \hat{Q}^{*m}(\mathbf{p}) + \hat{Q}^{*mj} \cdot g_j^* \\ \hat{Q}^{*mj}(\mathbf{p}) &= - \hat{Q}^{*jm}(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Las funciones  $\hat{Q}^{*mj}$  serán funciones antisimétricas vectoriales de argumento  $\mathbf{p}$ , por lo que la estructura final de las Lagrangianas de clase nula será

$$Q^* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \hat{Q}^{*m}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{g}_m^* \quad (2.50)$$

Esta expresión cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.41) y permite construir el funcional de acción de un cuerpo  $\mathcal{B}$  sometido a condiciones de contorno totalmente generales

puesto que se reproducirán tanto condiciones de tensión impuesta como de tensión función de la deformación en el punto considerado (problemas de interacción) al ser la Lagrangiana de clase nula función de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{g}_k^{\mathbf{p}}$ . Condiciones de contorno geométricas se cumplirán en cualquier caso al no producir trabajo virtual.

### 3. TEORIA VARIACIONAL DE LAMINAS

#### 3.1. Consideraciones previas

En este capítulo tomaremos por punto de partida la propiedad intrínseca de *cuerpo tridimensional* de cualquier estructura laminar, por ello consideraremos una lámina como un *cuerpo B, hiperelástico* en el que han quedado definidas unas coordenadas curvilíneas  $(\theta^\alpha, \eta)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Estas coordenadas se escogerán de tal forma que la ecuación  $\eta = 0$  represente una superficie  $\Sigma$  en el espacio tridimensional Euclideo, quedando la lámina geoméricamente delimitada por las dos superficies  $\Sigma^-, \Sigma^+$  y el cilindro de directriz  $\partial\Sigma$  y generatrices  $\eta$ .

Todas estas definiciones quedan representadas en la figura 3.1. Admitiremos además que  $\Sigma$  es la superficie media del cuerpo, es decir de la lámina en este caso. En estas condiciones si se denomina  $h(\theta^\alpha)$  a su espesor, las ecuaciones del intradós y extradós  $\Sigma^-, \Sigma^+$  de la lámina serán respectivamente:

$$\begin{cases} \eta = -\frac{h}{2} \text{ sobre } \Sigma^-, \\ \eta = \frac{h}{2} \text{ sobre } \Sigma^+ \end{cases}$$

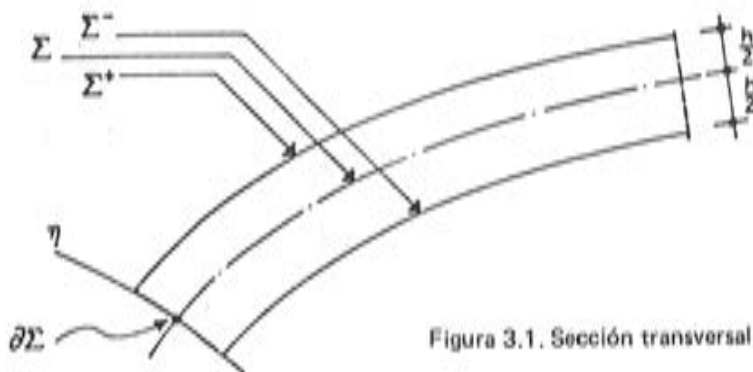


Figura 3.1. Sección transversal de la lámina

Estos primeros conceptos resultarán comunes al lector familiarizado con este tipo de estructuras.

En cualquier caso, la nomenclatura y metodología seguidos en este capítulo para construir una teoría de láminas son muy afines a las empleadas en los capítulos dedicados al estudio de la cinemática de estas estructuras. Recordemos que en la configuración de referencia, el vector posición de todo punto de la lámina podía darse en la forma

$$\mathbf{P}(\theta^\alpha, \eta) = \mathbf{R}(\theta^\alpha) + \eta \mathbf{A}_3(\theta^\alpha) \quad (3.1)$$

Por la definición del sistema coordinado dada en líneas anteriores,  $\theta^\alpha$  son las coordenadas

de superficie de  $\Sigma$ . En (3.1)  $\mathbf{R}$  será el vector posición de un punto de la superficie de referencia,  $\mathbf{A}_3$  el vector normal a está en ese mismo punto  $\theta^\alpha$ , y  $\eta$  la tercera coordenada curvilínea, normal a  $S$  en la configuración inicial (en esta configuración de la lámina, designaremos por  $S$  a su superficie de referencia, o superficie media).

Para cualquier otra configuración de la lámina escribiremos

$$\mathbf{p}(\theta^\alpha, \eta) = \mathbf{r}(\theta^\alpha) + \eta^N \mathbf{n}_N(\theta^\alpha), \quad N = 1, 2 \dots \quad (3.2)$$

Este tratamiento es adecuado para el estudio de láminas delgadas, puesto que permite dar una mayor preponderancia a las características superficiales de estas estructuras. En (3.2) el vector  $\mathbf{r}(\theta^\alpha)$  describe ahora la posición de la superficie  $\Sigma$ , pero nuestras nuevas *variables de estado geométricas* incluirán además los vectores  $\mathbf{n}_N$  asociados a cada punto de  $\Sigma$  de coordenadas de superficie  $\theta^\alpha$ .

Estos vectores también pueden contemplarse como *vectores directores* de la superficie en una formulación exclusivamente bidimensional de una teoría de láminas como la de Cosserat [1], más tarde recogida por Green y Naghdi [2]. Estas teorías bidimensionales, también conocidas como teorías directas, enlazan a su vez con los modelos de *materiales orientados* de Toupin.

De forma consistente con las variables geométricas adoptadas, las *variables de estado energéticas* a considerar ahora en nuestra formulación Lagrangiana serán los vectores siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} \\ \mathbf{n}_N \cdot \boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \mathbf{n}_N \end{array} \right. \quad (3.3)$$

De forma análoga a lo realizado por el espacio tridimensional en la sección 2.1, podemos definir ahora un elemento diferencial de área material sobre la superficie mediante

$$ds = d\theta^1 d\theta^2 \quad (3.4)$$

los elementos de área correspondientes a configuraciones de referencia y cualquiera de la superficie serán entonces respectivamente:

$$dS = \sqrt{\Lambda} \cdot d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{\Lambda} \cdot ds, \quad (3.5.1)$$

$$d\Sigma = \sqrt{a} \cdot d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{a} \cdot ds \quad (3.5.2)$$

En estas expresiones  $a$  es el determinante del tensor métrico de  $\Sigma$ .

Al haber reducido las variables de estado a funciones de las coordenadas de superficie, deberemos aplicar un tratamiento análogo a las cantidades características del proceso. Si, por ejemplo, nos interesamos por las funciones de densidad de masa y Lagrangiana, su reducción a cantidades escalares definidas sobre la superficie media material de la lámina se obtendrá como sigue.

	Configuración material	Inicial	Actual
vector posición		$\mathbf{R}$	$\mathbf{r}$
elemento de área	$ds$	$dS$	$d\Sigma$
densidad de masa	$\gamma$	$\rho_0$	$\rho$
densidad Lagrangiana	$\mathcal{L}$	$L_0$	$L$

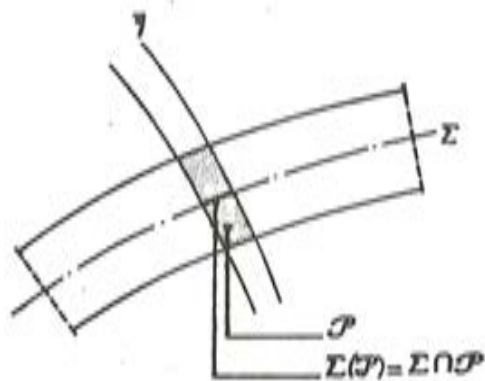


Figura 3.2.

$$m(P) = \int_{v(P)} \gamma^* ds d\eta = \int_{s(P)} \gamma ds$$

luego la densidad de masa por unidad de superficie material será

$$\gamma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma^* d\eta \quad (3.6)$$

Aplicando un tratamiento idéntico al funcional de acción correspondiente al tubo  $P$  de lámina se obtendrá la expresión de la densidad Lagrangiana por unidad de superficie material:

$$\mathcal{L} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathcal{L}^* d\eta \quad (3.7)$$

Recurriendo ahora a las ecuaciones (3.5) todas estas magnitudes pueden referirse cómodamente a unidades de superficie no deformada o actual, según se desee. El criterio seguido para designar las cantidades en unidades superficie es el de suprimir el asterisco (\*) atribuido a su expresión por unidad de volumen. Esta notación se extiende a otros campos vectoriales como el de los vectores naturales. Los resultados son los siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \cdot \rho_0^* d\eta, & \mu_0 &= \sqrt{\frac{G^*}{\Lambda}}, \\ \rho &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \cdot \rho^* d\eta, & \mu &= \sqrt{\frac{g^*}{a}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$L_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \cdot L_0^* d\eta, \quad L = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \cdot L^* d\eta \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.9) se han establecido con ayuda de (2.19).

### 3.2. Energía potencial de la lámina

Comenzaremos por construir el funcional de acción de la lámina, puesto que su particularización a problemas estáticos proporcionará directamente la expresión de la energía potencial de la estructura. Partiremos pues de la función de densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}^*$  y de una lagrangiana de clase nula  $Q^*$ , considerada la lámina como cuerpo tridimensional. El funcional de acción será, en virtud de la ecuación (3.7):

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \int_s (\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\alpha; \mathbf{n}, \mathbf{n}_\alpha) + Q) ds \quad (3.10)$$

donde la Lagrangiana de clase nula por unidad de superficie material valdría

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q^*(\mathbf{p}, \mathbf{g}_i^*) d\eta \quad (3.11)$$

Pero es necesario recordar la ecuación (2.42) para ampliar esta última expresión a dos nuevos sumandos que identificaremos como fracción *tangente* y fracción *externa* de  $Q$ :

$$\begin{aligned} Q^* &= \frac{\partial Q^{*m}}{\partial \theta^m} \\ &= \frac{\partial Q^{*\alpha}}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial Q^{*3}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.42)$$

luego

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q^{*\alpha} d\eta + \left\{ Q^{*3} \left( \theta^\beta, \frac{h}{2} \right) - Q^{*3} \left( \theta^\beta, -\frac{h}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial Q^\alpha}{\partial \theta^\alpha} + Q^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

El sistema  $Q^\alpha$  definirá una nueva Lagrangiana de clase nula con respecto a la superficie (fracción *tangente*), mientras que  $Q^3$  deberá considerarse como carga externa propia de la superficie, o fracción *externa*, y por tanto la incluiremos en la Lagrangiana de la superficie.

Por otra parte, al abordar exclusivamente problemas de equilibrio tendremos

$$\mathcal{L}^* = -\gamma^* (W_m^* + \Omega^*) \quad (2.14) \text{ y } (2.15)$$

y llevando a (3.7)

$$\mathcal{L} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma^* (W_m^* + \Omega^*) d\eta \quad (3.13)$$

Definiendo una función de densidad de energía de deformación y una función de densidad de energía potencial de las fuerzas de masa, ambas por unidad de masa superficial, en la forma

$$W_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\gamma^*}{\gamma_i} W_m^* d\eta \quad (3.14.1)$$

$$\Omega = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\gamma^*}{\gamma} \Omega^* d\eta, \quad (3.14.2)$$

el funcional de acción de la lámina (3.10) podrá escribirse como sigue:

$$A = \int_s \{Q^3 - \gamma(W_m + \Omega)\} ds + \int_{\partial s} Q^\alpha \nu_\alpha d\ell \quad (3.15)$$

En esta ecuación  $\nu_\alpha d\ell$  son las componentes del vector normal al contorno material  $\partial s$ . Particularizada a la configuración inicial (o de referencia), y posteriormente a la actual obtendremos respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_s \{Q_0^3 - (W_0 + \rho_0 \Omega)\} dS + \int_{\partial s} Q_0^\alpha \hat{N}_\alpha d\ell_0, \\ &= \int_\Sigma \{q^3 - (W + \rho \Omega)\} d\Sigma + \int_{\partial \Sigma} q^\alpha \hat{n}_\alpha d\ell \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

siendo

$$W_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \cdot W_0^* d\eta,$$

$$W = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \cdot W^* d\eta,$$

$$\begin{aligned} Q_0^i &= \frac{Q^i}{\sqrt{A}}, \quad q^i = \frac{Q^i}{\sqrt{a}} \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \cdot Q_0^{*i} d\eta \dots \end{aligned}$$

Conviene subrayar algunas características propias del funcional de acción (energía potencial con signo cambiado en nuestro caso) de la lámina, concebida ésta como medio bidimensional con unas propiedades constitutivas particulares puesto que su energía de deformación depende de unos vectores  $\mathbf{n}_{N,\alpha}$  adicionales a las variables de estado energéticas propias de una superficie: los vectores  $\mathbf{a}_\alpha$ .

- (1) La energía potencial de la que derivan las fuerzas de masa en este medio 2D, que podemos denominar material orientado, no depende sólo de la posición  $r$  de sus partículas sino además de los vectores directores  $\mathbf{n}_N$ .
- (2) La energía de deformación no depende sólo de las derivadas del vector posición, vectores  $\mathbf{a}_\alpha$ , sino que además es también función de los vectores  $\mathbf{n}_N$  y de sus derivadas  $\mathbf{n}_{N,\alpha}$ .
- (3) Al reducir el comportamiento tridimensional intrínseco de la lámina hiperelástica a un comportamiento bidimensional, debemos incluir un término adicional en la

función de densidad de energía potencial,  $Q^3$ , que como se verá más adelante, representa las acciones exteriores sobre las superficies  $\Sigma^-$  y  $\Sigma^+$ . Estas pueden, en consecuencia, considerarse como fuerzas de masa adicionales.

- (4) Al igual que en el caso 3D, podremos sumar una Lagrangiana de clase nula a la densidad de energía potencial de la superficie:  $Q_{SUP} = Q_{,\alpha}^{\alpha}$ , sin que se alteren las *ecuaciones de equilibrio* sobre la superficie. Además nos proporcionará el sistema de tensiones a aplicar sobre el contorno de la superficie de referencia de la lámina.

### 3.3. Teoría variacional de láminas hiperelásticas

#### 3.3.1. Ecuaciones de equilibrio de la lámina y condiciones de contorno

Para derivar las ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno consistentes con la aproximación bidimensional de la lámina adoptada, partiremos del funcional de acción (3.10) expresado en la forma

$$A = \int_s \left\{ Q^3 - \gamma (W_m + \Omega) + \frac{\partial Q^{\alpha}}{\partial \theta^{\alpha}} \right\} ds$$

Al considerar variaciones independientes de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{n}_N$ , las ecuaciones variacionales que se obtendrán siguiendo un proceso análogo al del apartado 2.3 serán:

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_s \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathcal{L} + Q) - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_{\alpha}} (\mathcal{L} + Q) \right] \right\} \cdot \delta \mathbf{r} ds + \\ & \int_s \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_N} (\mathcal{L} + Q) - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{N,\alpha}} (\mathcal{L} + Q) \right] \right\} \cdot \delta \mathbf{n}_N ds + \\ & \int_{\partial s} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_{\alpha}} (\mathcal{L} + Q) \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{N,\alpha}} (\mathcal{L} + Q) \cdot \delta \mathbf{n}_N \right\} \nu_{\alpha} d\ell \end{aligned} \quad (3.17)$$

Imponiendo la estacionalidad del funcional de acción, las ecuaciones de equilibrio de la lámina (particularización de las ecuaciones de Euler-Lagrange) se obtendrán en términos de superficie anulando la ecuación (3.17). Estas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathcal{L} + Q) - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_{\alpha}} (\mathcal{L} + Q) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_N} (\mathcal{L} + Q) - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{N,\alpha}} (\mathcal{L} + Q) \right] &= 0, \end{aligned}$$

y puesto que la fracción tangente de la Lagrangiana de clase nula cumplirá directamente estas ecuaciones sobre la superficie, nos bastará exigir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathcal{L} + Q^3) - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_{\alpha}} (\mathcal{L} + Q^3) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_N} (\mathcal{L} + Q^3) - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{N,\alpha}} (\mathcal{L} + Q^3) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

En cuanto a las condiciones de contorno, podremos nuevamente separarlas en

$$(a) \text{ condiciones geométricas sobre } \partial s(P): \delta \mathbf{r} = 0, \quad \delta \mathbf{n}_N = 0$$

$$(b) \text{ condiciones naturales, o mecánicas, sobre } \partial s(B) - \partial s(P): \frac{\partial}{\partial a_\alpha} (\mathcal{L} + Q) v_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial n_{N,\alpha}} (\mathcal{L} + Q) v_\alpha = 0$$

Por analogía a la formulación tridimensional, vamos a definir a continuación unos sistemas vectoriales derivados de la función de densidad de energía de deformación y de energía potencial de las fuerzas de masa de la superficie.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} &= -\mathbf{B}^0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{n}_N} &= -\mathbf{B}^N, \end{aligned} \right\} \quad (3.19.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma \frac{\partial W_m}{\partial a_\alpha} &= N^\alpha \\ \gamma \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{n}_N} &= \mathbf{Q}^N \\ \gamma \frac{\partial W_m}{\partial n_{N,\alpha}} &= M^{\alpha N} \end{aligned} \right\} \quad (3.19.2)$$

Las funciones  $Q^3$  requerirán a su vez una evaluación independiente. Situados en la configuración inicial, las superficies  $S^-$  y  $S^+$ , de ecuación  $\eta = -\frac{h}{2}$ ,  $\eta = \frac{h}{2}$  respectivamente, tendrán por vector normal

$$\hat{N} = \pm \mathbf{A}_3, \quad \hat{N}^\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \hat{N}^3 = \pm 1$$

llevando a (2.36) tendremos

$$q_0^+ = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial Q^*}{\partial g_3^*} \Big|_{\eta = \frac{h}{2}}$$

$$q_0^- = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial Q^*}{\partial g_3^*} \Big|_{\eta = -\frac{h}{2}}$$

y recordando (2.50)

$$\left. \begin{aligned} q_0^+ &= \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial Q^{*3}}{\partial p} \Big|_{\eta = \frac{h}{2}} \\ q_0^- &= -\frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial Q^{*3}}{\partial p} \Big|_{\eta = -\frac{h}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

En la ecuación (3.18) aparecen las derivadas parciales de  $Q^3$ , definida en (3.12), respecto a los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{n}$ . Su evaluación se expone a continuación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^3}{\partial \mathbf{r}} &= \left. \frac{\partial Q^{*3}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\eta = \frac{h}{2}} - \left. \frac{\partial Q^{*3}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\eta = -\frac{h}{2}} \\ &= (\sqrt{G^*} \mathbf{q}_0)^+ + (\sqrt{G^*} \mathbf{q}_0)^- \end{aligned} \quad (3.21.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^3}{\partial \mathbf{n}} &= \left. \frac{\partial Q^{*3}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\eta = \frac{h}{2}} - \left. \frac{\partial Q^{*3}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\eta = -\frac{h}{2}} \\ &= (\sqrt{G^*} \eta^N \mathbf{q}_0)^+ + (\sqrt{G^*} \eta^N \mathbf{q}_0)^- \end{aligned} \quad (3.21.2)$$

Definiendo unos nuevos vectores materiales sobre las dos ecuaciones (3.21) en la forma

$$\begin{cases} \overset{0}{\tilde{\mathbf{q}}} = (\sqrt{G^*} \mathbf{q}_0)^+ + (\sqrt{G^*} \mathbf{q}_0)^- \\ \overset{N}{\tilde{\mathbf{q}}} = (\sqrt{G^*} \eta^N \mathbf{q}_0)^+ + (\sqrt{G^*} \eta^N \mathbf{q}_0)^- \quad \text{con } N = 1, 2 \dots \end{cases} \quad (3.22)$$

podremos evaluar cómodamente su particularización a cualquier configuración de la superficie de referencia. Esta será:

$$\begin{cases} \overset{N}{\mathbf{q}}_0 = (\mu_0 \eta^N \mathbf{q}_0)^+ + (\mu_0 \eta^N \mathbf{q}_0)^- \\ \overset{N}{\mathbf{q}} = (\mu \eta^N \mathbf{q})^+ + (\mu \eta^N \mathbf{q})^- \quad , \quad N = 0, 1, 2 \dots \end{cases} \quad (3.23)$$

Llevando (3.19), (3.21) y (3.22) a las ecuaciones de equilibrio (3.18) obtendremos el sistema que gobierna la estática de una lámina hiperelástica, expresado en función de unos sistemas vectoriales equivalentes a las tensiones en un cuerpo tridimensional. En configuración material estas ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} \left( \overset{0}{\tilde{\mathbf{q}}} + \overset{0}{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) + \frac{\partial \overset{0}{\mathbf{N}}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} &= 0 \\ \left( \overset{N}{\tilde{\mathbf{q}}} + \overset{N}{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma} \right) - \overset{N}{\mathbf{Q}} + \frac{\partial \overset{N}{\mathbf{M}}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} &= 0 \quad , \quad N = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

obteniendo para la configuración inicial

$$\begin{cases} \sqrt{\Lambda} \left( \overset{0}{\mathbf{q}}_0 + \rho_0 \overset{0}{\mathbf{B}} \right) + \frac{\partial \overset{0}{\mathbf{N}}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0 \quad , \\ \sqrt{\Lambda} \left( \overset{N}{\mathbf{q}}_0 + \rho_0 \overset{N}{\mathbf{B}} \right) - \overset{N}{\mathbf{Q}} + \frac{\partial \overset{N}{\mathbf{M}}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0 \quad . \end{cases} \quad (3.24)$$

y para la configuración final, de equilibrio o actual:

$$\begin{cases} \sqrt{a} \left( \overset{0}{\mathbf{q}} + \rho \overset{0}{\mathbf{B}} \right) + \frac{\partial \overset{0}{\mathbf{N}}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0 \\ \sqrt{a} \left( \overset{N}{\mathbf{q}} + \rho \overset{N}{\mathbf{B}} \right) - \overset{N}{\mathbf{Q}} + \frac{\partial \overset{N}{\mathbf{M}}^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

**Tabla 3.1**  
*Resumen de teoría variacional*

<i>Configuración inicial</i>	<i>Configuración actual</i>
Ecuaciones de equilibrio de la lámina	$\sqrt{\Lambda} (\overset{0}{q}_0 + \rho_0 \overset{0}{B}) + \frac{\partial N^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0$
N = 1, 2 ...	$\sqrt{\Lambda} (\overset{N}{q}_0 + \rho_0 \overset{N}{B}) - \overset{N}{Q} + \frac{\partial M^\alpha}{\partial \theta^\alpha} = 0$
densidad de masa superficial	$\rho_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \cdot \rho_0^* d\eta$
potencial de las fuerzas másicas superficiales	$\Omega = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \cdot \rho_0^* \Omega^* d\eta$
	$\overset{0}{B} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \overset{N}{B} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{n}_N}$
reducción a la superficie de referencia de las fuerzas actuantes sobre $\eta = \pm \frac{h}{2}$ (caras externas)	$\overset{N}{q}_0 = (\mu_0 \eta^N \overset{N}{q}_0)^+ + (\mu_0 \eta^N \overset{N}{q}_0)^-$ N = 0, 1, 2 ...

Recordemos que en todas las expresiones anteriores, los escalares  $\mu_0$  y  $\mu$  son la particularización a la correspondiente configuración de la lámina del determinante del tensor laminar, o tensor de Krauss. Este puede darse en función de las curvaturas media y total de la superficie de referencia, resultando

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= 1 - 2 H_0 \eta + K_0 \eta^2 \\ \mu &= 1 - 2 H \eta + K \eta^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Pasemos ahora a estudiar las condiciones de contorno.

Volviendo a (3.17), estas condiciones podrán escribirse como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_\alpha} \\ \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}_{N,\alpha}} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{n}_{N,\alpha}} \end{aligned} \right\}$$

y por (3.19.2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_\alpha} &= N^\alpha \\ \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}_{N,\alpha}} &= M^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

En este último sistema, falta por definir las derivadas parciales de la Lagrangiana de clase nula de la superficie respecto a las variables de estado energéticas. Para ello nos situaremos en la configuración de referencia (la adaptación de los resultados a cualquier otra configuración viene siendo sistemática), en la cual la normal exterior al contorno definido por borde  $(\partial S, \eta) \equiv E$  sólo tiene componentes tangentes:

$$\hat{N}_E = \hat{N}^\alpha G_\alpha^*$$

por lo que las tensiones de contacto sobre E serán

$$q_0^E = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \left. \frac{\partial Q^*}{\partial g_\alpha^*} \hat{N}_\alpha \right|_E \quad (3.28)$$

Volviendo a (3.27), podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q^* d\eta \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial Q^*}{\partial g_\alpha^*} d\eta \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por  $\frac{1}{\sqrt{A}} \hat{N}_\alpha$  obtendremos, particularizando sobre E

$$\frac{1}{\sqrt{A}} N^\alpha \cdot \hat{N}_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left. \frac{G^*}{A} \right|_E q_0^E d\eta$$

Sea

$$\mu_0^E = \left. \frac{G^*}{A} \right|_E \quad (3.29.1)$$

$$F_0^N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0^E \cdot \eta^N q_0^E d\eta \quad (3.29.2)$$

Entonces las ecuaciones de contorno (3.27) podrán darse en la forma siguiente

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} N^\alpha \cdot \hat{N}_\alpha &= F_0^0 \\ \frac{1}{\sqrt{A}} M^N \cdot \hat{N}_\alpha &= F_0^N, \quad N = 1, 2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

y en configuración actual

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} N^\alpha \cdot \hat{n}_\alpha &= F^0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} M^N \cdot \hat{n}_\alpha &= F^N, \quad N = 1, 2 \dots \end{aligned} \right\}$$

calculando las fuerzas de contacto  $\overset{N}{\mathbf{F}}$ ,  $N = 0, 1, 2 \dots$  con la ecuación (3.29) traducida a configuración actual (basta prescindir del subíndice o).

### 3.3.2. Interpretación de fuerzas de superficie, esfuerzos generalizados y fuerzas de borde

En la sección anterior nos hemos limitado a desarrollar las ecuaciones variacionales del problema de equilibrio planteado (lámina hiperelástica) introduciendo unas definiciones auxiliares inspiradas en la formulación tridimensional: ecuaciones (3.19) y (3.23), ecuación (3.29) sobre el contorno.

En las líneas siguientes nos proponemos dar una interpretación cualitativa de estas funciones, y en este sentido reescribiremos la ecuación variacional (3.17) expresada en función de estos nuevos campos:

$$\delta A = \int_{\Sigma} \{ \sqrt{a}(\overset{o}{\mathbf{q}} + \rho \overset{o}{\mathbf{B}}) \cdot \delta \mathbf{r} - N^{\alpha} \cdot \delta a_{\alpha} + [ \sqrt{a}(\overset{N}{\mathbf{q}} + \rho \overset{N}{\mathbf{B}}) - \overset{N}{\mathbf{Q}} ] \cdot \delta \mathbf{n} - \overset{N}{\mathbf{M}}^{\alpha} \cdot \delta n_{,\alpha} \} d\Sigma + \int_{\partial \Sigma} \{ \overset{B}{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{r} + \overset{N}{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{n} \} \sqrt{a} d\ell = 0 \quad (3.31)$$

Del mismo modo que los esfuerzos  $\mathbf{T}^k$  llevaban asociados unos desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{g}_k$ , variación de las variables energéticas (ecuación 2.26), la teoría bidimensional de láminas desarrollada pondrá en correspondencia las variaciones  $\delta a_{\alpha}$ ,  $\delta n_{,\alpha}$  de las variables energéticas consideradas con los *esfuerzos generalizados*  $N^{\alpha}$  y  $\overset{N}{\mathbf{M}}^{\alpha}$  respectivamente, obteniendo el consecuente trabajo virtual.

Los vectores  $\sqrt{a}(\overset{o}{\mathbf{q}} + \rho \overset{o}{\mathbf{B}})$  y  $\sqrt{a}(\overset{N}{\mathbf{q}} + \rho \overset{N}{\mathbf{B}})$  serán el modelo bidimensional de las fuerzas de masa  $\rho^* \mathbf{b}$  del cuerpo tridimensional; cada uno de ellos produce un trabajo virtual al dar desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}$  y  $\delta \mathbf{n}$  de las variables geométricas adoptadas. Es interesante comentar las dos fracciones que definen estas fuerzas superficiales:  $\overset{N}{\mathbf{q}}$ ,  $N = 0, 1, 2 \dots$  está medida por unidad de área de la superficie de referencia  $\Sigma$ , y proviene de las cargas aplicadas en las caras superior e inferior de la lámina. Por su parte  $\overset{N}{\mathbf{B}}$  proporciona la versión superficial de las fuerzas de masa reales de la estructura, y viene medida por unidad de masa sobre  $\Sigma$ .

Los vectores  $\overset{N}{\mathbf{Q}}$  resultan ser unas nuevas fuerzas capaces de producir trabajo al dar unos desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{n}$ , pero no provienen de las fuerzas exteriores sino de la propia energía de deformación.

Los vectores  $\overset{o}{\mathbf{F}}$  y  $\overset{N}{\mathbf{F}}$  corresponden a las fuerzas de contacto, o *fuerzas de borde* aplicadas en todo el contorno de la superficie media y medidas por unidad de longitud de arco en la configuración actual. Cada una de estas fuerzas de borde lleva asociados unos desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{n}$ .

Estas relaciones entre campos tridimensionales y bidimensionales pueden explicitarse más concretamente recurriendo a las funciones de densidad de las que derivan; para las fuerzas de masa se obtiene:

$$\overset{o}{\mathbf{B}} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{p}} d\eta$$

$$\overset{N}{\mathbf{B}} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{n}} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} d\eta$$

En cuanto a los esfuerzos generalizados, podremos poner

$$N^\alpha = \gamma \frac{\partial W_m}{\partial a_\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma^* \frac{\partial W_m^*}{\partial g_\alpha^*} d\eta$$

$$M_N^\alpha = \gamma \frac{\partial W_m}{\partial n_{N,\alpha}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma^* \frac{\partial W_m^*}{\partial g_\alpha^*} \frac{\partial g_\alpha^*}{\partial n_{N,\alpha}} d\eta$$

$$Q_N = \gamma \frac{\partial W_m}{\partial n_N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma^* \frac{\partial W_m^*}{\partial g_3^*} \frac{\partial g_3^*}{\partial n_N} d\eta$$

Recurriendo a las ecuaciones (2.20), (2.24) y (2.25), y (3.2) se obtienen las siguientes ecuaciones de conexión entre campos bi y tridimensionales:

Tabla 3.2

Fuerzas de masa y esfuerzos generalizados

$\overset{0}{B}$	$\overset{N}{B}$	$N^\alpha$	$M_N^\alpha$	$Q_N$
$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{b} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^N \mathbf{b} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{T}^\alpha d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^N \mathbf{T}^\alpha d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} N \eta^{N-1} \mathbf{T}^3 d\eta$
	$N = 1, 2, \dots$		$N = 1, 2, \dots$	$N = 1, 2, \dots$

De estas relaciones se desprende que los campos  $\overset{0}{B}$  y  $\overset{N}{B}$  son la fuerza y momento de orden N resultantes de las fuerzas másicas de la lámina, respecto a la superficie. Idéntica interpretación puede hacerse de los esfuerzos generalizados respecto a las tensiones.

Vamos a demostrar a continuación que estos esfuerzos generalizados no son estrictamente independientes entre sí. Para ello recurriremos a la segunda ley de Cauchy:

$$g_i^* \times T^i = 0 ,$$

luego

$$a_\alpha \times T^\alpha + n_{N,\alpha} \times \eta^N T^\alpha + n_N \times N \eta^{N-1} T^3 = 0 ,$$

integrando sobre el espesor resulta pues

$$a_\alpha \times N^\alpha + n_{N,\alpha} \times M_N^\alpha + n_N \times Q_N = 0 \quad (3.32)$$

$$N = 1, 2, \dots$$

Ecuación que relaciona el sistema de esfuerzos generalizados correspondiente a la teoría desarrollada.

### 3.3.3. Ecuaciones constitutivas de la lámina

#### 3.3.3.1. Forma general para materiales hiperelásticos

Las ecuaciones de definición de los vectores de esfuerzos generalizados  $\{N^\alpha, M^\alpha, Q^N\}$  como derivadas de la energía de deformación, pueden considerarse como las ecuaciones constitutivas de la lámina (o de la superficie considerada como material orientado) análogamente al caso tridimensional, donde la ecuación constitutiva del material hiperelástico venía dada por

$$T^k = \gamma^* \frac{\partial W_m^*}{\partial g_k^*} .$$

En un material hiperelástico la energía de deformación puede considerarse tanto función de las variables de estado energéticas  $g_k^*$ , como de las componentes del tensor de deformación de Lagrange  $e_{ij}^*$ . La derivada de la función de densidad de energía de deformación con respecto a este tensor nos proporciona el tensor de tensiones de Cauchy o de Piola-Kirchhoff, según la configuración del cuerpo a la cual nos estamos refiriendo.

Para definir unas cantidades análogas en el caso de la lámina, generaremos en primer lugar las componentes del tensor de deformación de Lagrange en función de nuestras variables de estado.

$$2 e_{\alpha\beta}^* = (a_\alpha + \eta^N n_{N,\alpha}) \cdot (a_\beta + \eta^M n_{M,\beta}) - (\Lambda_\alpha + \eta \Lambda_{3,\alpha}) \cdot (\Lambda_\beta + \eta \Lambda_{3,\beta}) \quad (3.33)$$

$$= (a_\alpha \cdot a_\beta - \Lambda_\alpha \cdot \Lambda_\beta) + \eta^N (a_\alpha \cdot n_{N,\beta} + a_\beta \cdot n_{N,\alpha}) + \eta^{N+M} n_{N,\alpha} \cdot n_{M,\beta} + 2 \eta B_{\alpha\beta} - \eta^2 C_{\alpha\beta}$$

sumando en N, M

siendo  $B_{\alpha\beta}$  y  $C_{\alpha\beta}$  los tensores de definición de la segunda y tercera forma fundamental de S. Definiremos

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_\alpha \cdot a_\beta - \Lambda_\alpha \cdot \Lambda_\beta)$$

$$K_{N\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_\alpha \cdot n_{N,\beta} + a_\beta \cdot n_{N,\alpha}) , \quad N = 2, 3 \dots$$

$$K_{1\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_\alpha \cdot n_{1,\beta} + a_\beta \cdot n_{1,\alpha}) + B_{\alpha\beta}$$

$$R_{NM\alpha\beta} = \frac{1}{2} (n_{N,\alpha} \cdot n_{M,\beta}) , \quad NM = 2, 3 \dots$$

$$R_{11\alpha\beta} = \frac{1}{2} (n_{1,\alpha} \cdot n_{1,\beta} - C_{\alpha\beta}) \quad (3.34.1 a 5)$$

llevando a (3.33), el tensor de deformación de Lagrange de la lámina podrá darse en la forma

$$e_{\alpha\beta}^* = e_{\alpha\beta} + \eta^N K_{N\alpha\beta} + \eta^{N+M} R_{NM\alpha\beta} , \quad (3.35)$$

para las componentes  $\alpha, \beta$ . Nótese que estos elementos son simétricos en general, cuando las componentes  $R_{NM\alpha\beta}$  en general no lo son.

Pasemos a evaluar las derivadas de la energía de deformación de S respecto a estas tres clases de parámetros de deformación de la superficie de referencia. Recordando (2.18) y (3.16) tendremos

$$\rho_0 W_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \rho_0^* W_m^* d\eta \quad (3.36)$$

luego

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \rho_0^* \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{\lambda\gamma}^*} \frac{\partial \epsilon_{\lambda\gamma}^*}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} d\eta, \\ \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial K_{N\alpha\beta}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \rho_0^* \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{\lambda\gamma}^*} \frac{\partial \epsilon_{\lambda\gamma}^*}{\partial K_{N\alpha\beta}} d\eta, \\ \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial R_{NM\alpha\beta}} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \rho_0^* \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{\lambda\gamma}^*} \frac{\partial \epsilon_{\lambda\gamma}^*}{\partial R_{NM\alpha\beta}} d\eta. \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones y recordando (2.23) y (3.35) se obtiene

**Tabla 3.3**  
*Esfuerzos generalizados, componentes en configuración inicial (o de referencia)*

	$\tilde{N}^{\alpha\beta}$	$\tilde{M}^{N,\alpha\beta}$	$\tilde{M}^{N+M,\alpha\beta}$
en función de la densidad de energía de deformación de S	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial K_{N\alpha\beta}}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial R_{NM\alpha\beta}}$
en función del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \tilde{T}^{\alpha\beta} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^N \tilde{T}^{\alpha\beta} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^{N+M} \tilde{T}^{\alpha\beta} d\eta$

Nótese que estas derivadas están simetrizadas en  $\alpha, \beta$ .

Realicemos un proceso análogo para las componentes  $\alpha, 3$  del tensor de deformación de la lámina.

$$\begin{aligned} 2 \epsilon_{\alpha 3}^* &= (\mathbf{a}_\alpha + \eta^N \mathbf{n}_{N,\alpha}) \cdot (M \eta^{M-1} \mathbf{n}_M) - (\mathbf{A}_\alpha + \eta \mathbf{A}_{3,\alpha}) \cdot \mathbf{A}_3 \\ &= M (\eta^{M-1} \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n}_M + \eta^{N+M-1} \mathbf{n}_{N,\alpha} \cdot \mathbf{n}_M) \text{ sumado en } N, M \end{aligned} \quad (3.37)$$

Definiendo:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_M^\alpha = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{n}_M, \\ S_{NM}^\alpha = \mathbf{n}_{N,\alpha} \cdot \mathbf{n}_M, \end{cases} \quad (3.38)$$

la ecuación (3.37) puede reescribirse como sigue,

$$\epsilon_{\alpha 3}^* = \frac{1}{2} M (\eta^{M-1} \frac{n_\alpha}{M} + \eta^{N+M-1} \frac{S_{\alpha}}{NM}) \quad (3.39)$$

Las derivadas de la densidad superficial de energía de deformación respecto a los dos conjuntos dados en (3.38) serán:

$$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial n_\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \rho_0^* \left[ \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{\lambda 3}^*} \frac{\partial \epsilon_{\lambda 3}^*}{\partial n_\alpha} + \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{3\lambda}^*} \frac{\partial \epsilon_{3\lambda}^*}{\partial n_\alpha} \right] d\eta$$

$$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial S_{\alpha}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \rho_0^* \left[ \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{\lambda 3}^*} \frac{\partial \epsilon_{\lambda 3}^*}{\partial S_{\alpha}} + \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{3\lambda}^*} \frac{\partial \epsilon_{3\lambda}^*}{\partial S_{\alpha}} \right] d\eta$$

Finalmente, para la componente restante del tensor de deformación se podrá escribir de forma similar

$$2 \epsilon_{33}^* = (N \eta^{N-1} \frac{n}{N}) \cdot (M \eta^{M-1} \frac{n}{M}) - A_3 \cdot A_3$$

$$= NM \eta^{N+M-2} (\frac{n}{N} \cdot \frac{n}{M}) - 1, \quad (3.40)$$

tomando como parámetros auxiliares

$$\begin{cases} H_{NM} = \frac{1}{2} (\frac{n}{N} \cdot \frac{n}{M}), & N \cdot M = 2, 3 \dots \\ H_{11} = \frac{1}{2} (\frac{n}{1} \cdot \frac{n}{1} - 1) \end{cases} \quad (3.41)$$

escribiremos (3.40) como

$$\epsilon_{33}^* = NM \eta^{N+M-2} H_{NM}, \quad (3.42)$$

con lo cual las derivadas correspondientes de  $W_m$  se reducirán a:

$$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial H_{NM}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \rho_0^* \frac{\partial W_m^*}{\partial \epsilon_{33}^*} \frac{\partial \epsilon_{33}^*}{\partial H_{NM}} d\eta$$

A partir de este nuevo sistema de parámetros de deformación  $H_{NM}$ , junto con los anteriormente definidos  $\frac{n_\alpha}{M}$ ,  $\frac{S_{\alpha}}{NM}$  podemos construir un conjunto suplementario de esfuerzos generalizados. Expuestos en forma de cuadro resumen, estos serán:

Tabla 3.4

*Esfuerzos generalizados, componentes en configuración inicial (o de referencia)*

	$M \tilde{Q}^{M,\alpha}$	$M \tilde{Q}^{N+M,\alpha}$	$NM \tilde{V}^{N+M}$
en función de la densidad de energía de deformación de S	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{n}_M^\alpha}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{S}_{NM}^\alpha}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{H}_{NM}}$
en función del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff	$M \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^{M-1} T^{\alpha 3} d\eta$	$M \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^{N+M-1} T^{\alpha 3} d\eta$	$NM \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^{N+M-2} T^{\alpha 3} d\eta$

Sobre la base de las tablas 3.3 y 3.4 puede darse una expresión desarrollada de los esfuerzos generalizados recogidos en la tabla 3.2. Conviene, en este sentido, desarrollar las derivadas parciales respecto a las variables de estado energéticas sobre la base de las definiciones vectoriales (3.34), (3.38) y (3.41) de los parámetros de deformación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{N}^\alpha &= \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{a}_\alpha} = \\ &= \rho_0 \left\{ \frac{\partial W_m}{\partial \epsilon_{\lambda\gamma}} \frac{1}{2} (\delta_\lambda^\alpha \mathbf{a}_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \mathbf{a}_\lambda) + \frac{\partial W_m}{\partial K_{N\lambda\gamma}} \frac{1}{2} (\delta_\lambda^\alpha \mathbf{n}_{N,\gamma} + \delta_\gamma^\alpha \mathbf{n}_{N,\lambda}) + \frac{\partial W_m}{\partial n_\lambda} (\delta_\lambda^\alpha \mathbf{n}) \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{M}^\alpha &= \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{n}_N^\alpha} = \\ &= \rho_0 \left\{ \frac{\partial W_m}{\partial K_{L\lambda\gamma}} \frac{1}{2} (\delta_L^N \delta_\lambda^\alpha \mathbf{a}_\gamma + \delta_\gamma^N \delta_\lambda^\alpha \mathbf{a}_\lambda) + \frac{\partial W_m}{\partial R_{LM\lambda\gamma}} \frac{1}{2} (\delta_L^N \delta_\lambda^\alpha \mathbf{n}_{M,\gamma} + \delta_\gamma^N \delta_\lambda^\alpha \mathbf{n}_{M,\lambda}) + \frac{\partial W_m}{\partial S_{LM}^\alpha} (\delta_L^N \delta_\lambda^\alpha \mathbf{n}) \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{Q} &= \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{n}_N} = \\ &= \rho_0 \left\{ \frac{\partial W_m}{\partial n_\lambda} (\delta_M^N \mathbf{a}_\lambda) + \frac{\partial W_m}{\partial S_{LM}^\alpha} (\delta_L^N \mathbf{n}_{M,\lambda}) + \frac{\partial W_m}{\partial H_{LM}} \frac{1}{2} (\delta_L^N \mathbf{n}_M + \delta_M^N \mathbf{n}_L) \right\} \end{aligned} \quad (3.43.1)$$

resultando

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{N}^\alpha &= \tilde{N}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + \tilde{M}^{N,\alpha\beta} \mathbf{n}_{N,\beta} + M \tilde{Q}^{M,\alpha} \mathbf{n}_M \quad (\text{sumado en } N, M, \beta) \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{M}^\alpha &= \tilde{M}^{N,\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + \tilde{M}^{N+M,\alpha\beta} \mathbf{n}_{M,\beta} + M \tilde{Q}^{N+M,\alpha} \mathbf{n}_M \quad (\text{sumado en } M, \beta) \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{Q} &= N \tilde{Q}^{N,\beta} \mathbf{a}_\beta + N \tilde{Q}^{N+M,\beta} \mathbf{n}_{M,\beta} + NM \tilde{V}^{N+M} \mathbf{n}_M \quad (\text{sumado en } M, \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.43.2)$$

Las ecuaciones (3.43.1) son las ecuaciones constitutivas de una lámina hiperelástica en términos de la función de densidad de energía de deformación superficial. Por sustitución, nos han proporcionado la relación existente entre las componentes de los vectores de esfuerzos generalizados y estos últimos (ecuaciones 3.43.2).

Debe subrayarse que estas ecuaciones constitutivas se han derivado directamente de la teoría variacional y que por lo tanto son las necesarias y consistentes con la aproximación cinemática adoptada (ecuación 3.2). De hecho, según el número de vectores directores  $\mathbf{n}$  que tomemos en nuestro modelo cinemático bidimensional, obtendremos una aproximación distinta del comportamiento tridimensional real de la lámina, y también un sistema diferente de ecuaciones constitutivas.

En el apartado siguiente presentamos la particularización del sistema genérico de definición de las relaciones constitutivas de la lámina (ecuaciones 3.43.1, o tablas 3.3 y 3.4) al caso particular de un material elástico Hookiano.

### 3.3.3.2. Aplicación a materiales Hookianos. Constantes constitutivas de la lámina

Admitiendo que la lámina está constituida por un material hiperelástico lineal, o material Hookiano, la energía de deformación será una función cuadrática de las deformaciones:

$$\begin{aligned} W_0^* &= \rho_0^* W_m^* = \frac{1}{2} e_{ij}^* E^{ijkl} e_{km}^* \\ &= \frac{1}{2} \tilde{T}^{ij} e_{ij}^* \end{aligned} \quad (3.44)$$

deduciéndose que el tensor de tensiones es una función lineal homogénea del tensor de deformación.

Traslademos esta hipótesis de comportamiento a la superficie de referencia, ello nos proporcionará una *relación entre esfuerzos y deformaciones generalizadas* (definidos en 3.34, 3.38 y 3.41). Además, de esta última ecuación deduciremos a su vez la densidad de energía de deformación como función cuadrática de estas deformaciones generalizadas.

Los coeficientes de la relación lineal entre esfuerzos y deformaciones generalizadas serán precisamente las constantes elásticas del medio bidimensional en que hemos modelizado la lámina, y se obtendrán de los coeficientes elásticos del material constitutivo de ésta. Su obtención se expone en líneas siguientes.

Volviendo a la tabla 3.3 tendremos:

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 T^{\alpha\beta} d\eta \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 E^{\alpha\beta ij} e_{ij}^* d\eta \end{aligned}$$

y desarrollando  $e_{ij}^*$  en función de los  $e_{\alpha\beta}$ ,  $K_{N\alpha\beta}$ ,  $R_{NM\alpha\beta}$  ...

$$\tilde{N}^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \{ E^{\alpha\beta\lambda\gamma} e_{\lambda\gamma}^* + 2 E^{\alpha\beta\lambda\lambda} e_{\lambda\lambda}^* + E^{\alpha\beta\beta\beta} e_{\beta\beta}^* \} d\eta$$

Sea  $I_0^N(\cdot) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^N(\cdot) d\eta$ , y las constantes

$$\left. \begin{aligned} D^{N,\alpha\beta\lambda\gamma} &= I_0^N E^{\alpha\beta\lambda\gamma} \\ D^{N,\alpha\beta\lambda} &= I_0^N E^{\alpha\beta\lambda\lambda} \\ D^{N,\alpha\beta} &= I_0^N E^{\alpha\beta\beta\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

tendremos en definitiva

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= D^{0,\alpha\beta\lambda\gamma} e_{\lambda\gamma} + D^{N,\alpha\beta\lambda\gamma} K_{N\lambda\gamma} + D^{N+M,\alpha\beta\lambda\gamma} R_{NM\lambda\gamma} + \\ &M [D^{M-1,\alpha\beta\lambda} n_{M\lambda} + D^{M+N-1,\alpha\beta\lambda} S_{MN\lambda}] + MN D^{M+N-2,\alpha\beta} H_{MN} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Análogamente, para los restantes esfuerzos generalizados se deduce

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{L,\alpha\beta} &= D^{L,\alpha\beta\lambda\gamma} e_{\lambda\gamma} + D^{L+N,\alpha\beta\lambda\gamma} K_{N\lambda\gamma} + D^{L+M+N,\alpha\beta\lambda\gamma} R_{MN\lambda\gamma} + \\ &M [D^{L+M-1,\alpha\beta\lambda} n_{M\lambda} + D^{L+M+N-1,\alpha\beta\lambda} S_{MN\lambda}] + MN D^{L+M+N-2,\alpha\beta} H_{MN} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{L,\alpha} &= D^{L-1,\alpha\lambda\gamma} e_{\lambda\gamma} + D^{L+N-1,\alpha\lambda\gamma} K_{N\lambda\gamma} + D^{L+M+N-1,\alpha\lambda\gamma} R_{MN\lambda\gamma} + \\ &M [G^{L+M-2,\alpha\lambda} n_{M\lambda} + G^{L+M+N-2,\alpha\lambda} S_{MN\lambda}] + MN D^{L+M+N-3,\alpha} H_{MN} \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}^L &= D^{L-2,\lambda\gamma} e_{\lambda\gamma} + D^{L+M-2,\lambda\gamma} K_{M\lambda\gamma} + D^{L+M+N-2,\lambda\gamma} R_{MN\lambda\gamma} + \\ &M [D^{L+M-3,\lambda} n_{M\lambda} + D^{L+M+N-3,\lambda} S_{MN\lambda}] + MN D^{L+M+N-4} H_{MN} \end{aligned} \quad (3.49)$$

siendo

$$\left. \begin{aligned} G^{N,\alpha\beta} &= I_0^N E^{\alpha\beta\beta\beta} \\ D^{N,\alpha} &= I_0^N E^{\alpha\beta\beta\beta} \\ D^N &= I_0^N E^{3333} \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Las ecuaciones (3.46) a (3.49) definen la ley de comportamiento bidimensional de una lámina formada por un material Hookiano; las constantes constitutivas vienen dadas por (3.45) y (3.50) y todas estas relaciones admiten una expresión matricial resumen.

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{L,\alpha\beta} \\ \tilde{Q}^{L,\alpha} \\ \tilde{V}^L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D^{0,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{N,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{M+N,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{M-1,\alpha\beta\lambda} & D^{M+N-1,\alpha\beta\lambda} & D^{M+N-2,\alpha\beta} \\ D^{L,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{L+N,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{L+M+N,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{L+M-1,\alpha\beta\lambda} & D^{L+M+N-1,\alpha\beta\lambda} & D^{L+M+N-2,\alpha\beta} \\ D^{L-1,\alpha\lambda\gamma} & D^{L+N-1,\alpha\lambda\gamma} & D^{L+M+N-1,\alpha\lambda\gamma} & G^{L+M-2,\alpha\lambda} & G^{L+M+N-2,\alpha\lambda} & D^{L+M+N-3,\alpha} \\ D^{L-2,\lambda\gamma} & D^{L+N-2,\lambda\gamma} & D^{L+M+N-2,\lambda\gamma} & D^{L+M-3,\lambda} & D^{L+M+N-3,\lambda} & D^{L+M+N-4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{\lambda\gamma} \\ K_{N\lambda\gamma} \\ R_{MN\lambda\gamma} \\ n_{M\lambda} \cdot M \\ S_{MN\lambda} \cdot M \\ H_{MN} \end{pmatrix}$$

$$M, N = 1, 2, \dots \quad (3.51)$$

Un caso particular clásico en teoría de la elasticidad es el de material Hookiano isótropo. Entonces las relaciones anteriores se simplifican todavía más, como vamos a ver a continuación.

Comenzaremos por expresar los coeficientes elásticos del material en función de los dos coeficientes de Lamé  $G$  y  $\lambda$ :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

en materiales isótropos se cumple (para nuestro sistema de referencia inicial):

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta\lambda\gamma} &= G (G^{*\alpha\lambda} \cdot G^{*\beta\gamma} + G^{*\alpha\gamma} \cdot G^{*\beta\lambda}) + \lambda G^{*\alpha\beta} \cdot G^{*\lambda\gamma} \\ E^{\alpha\beta\lambda\beta} &= E^{\alpha\beta\beta\lambda} = E^{\lambda\beta\alpha\beta} = E^{\beta\lambda\alpha\beta} = 0 \\ E^{\alpha\beta\beta\beta} &= E^{\beta\beta\alpha\beta} = \lambda \cdot G^{*\alpha\beta} \\ E^{\alpha\beta\beta\beta} &= E^{\beta\beta\beta\alpha} = E^{\beta\beta\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\beta\beta} = G \cdot G^{*\alpha\beta} \\ E^{\alpha\beta\beta\beta} &= E^{\beta\beta\beta\beta} = E^{\beta\beta\beta\beta} = E^{\beta\beta\beta\beta} = 0 \\ E^{\beta\beta\beta\beta} &= 2G + \lambda \end{aligned}$$

Llevando estas relaciones a las ecuaciones de definición de las constantes de la lámina se deduce:

$$\left. \begin{aligned} D^{N,\alpha\beta\lambda} &= 0 \\ D^{N,\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.52.1)$$

$$\left. \begin{aligned} D^{N,\alpha\beta\lambda\gamma} &= G \cdot I_0^N (G^{*\alpha\lambda} \cdot G^{*\beta\gamma} + G^{*\alpha\gamma} \cdot G^{*\beta\lambda}) + \lambda I_0^N (G^{*\alpha\beta} \cdot G^{*\lambda\gamma}) \\ D^{N,\alpha\beta} &= \lambda \cdot I_0^N G^{*\alpha\beta} \\ D^N &= (2G + \lambda) I_0^N \cdot 1 \\ G^{N,\alpha\beta} &= G \cdot I_0^N G^{*\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.52.2)$$

con lo cual la ecuación (3.51) pasa a escribirse

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{L,\alpha\beta} \\ \tilde{Q}^{L,\alpha} \\ \tilde{V}^L \end{array} \right\} = \\ & = \left[ \begin{array}{cccccc} D^{0,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{N,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{M+N,\alpha\beta\lambda\gamma} & 0 & 0 & D^{M+N-2,\alpha\beta} \\ D^{L,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{L+N,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{L+M+N,\alpha\beta\lambda\gamma} & 0 & 0 & D^{L+M+N-2,\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & G^{L+M-2,\alpha\lambda} & G^{L+M+N-2,\alpha\lambda} & 0 \\ D^{L-2,\lambda\gamma} & D^{L+N-2,\lambda\gamma} & D^{L+M+N-2,\lambda\gamma} & 0 & 0 & D^{L+M+N-4} \end{array} \right] \\ & \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{\lambda\gamma} \\ K_{N\lambda\gamma} \\ R_{MN\lambda\gamma} \\ M n_{M\lambda} \\ M S_{MN\lambda} \\ MN H_{MN} \end{array} \right\} \\ & \quad M, N = 1, 2, \dots \quad (3.53) \end{aligned}$$

Esta última ecuación matricial nos revela el desacoplamiento existente entre las deformaciones generalizadas  $(\epsilon_{\alpha\beta}, K_{N\alpha\beta}, R_{MN\alpha\beta}, H)$  y  $(n_{M\lambda}, S_{MN\lambda})$ .

En el presente apartado nos hemos interesado exclusivamente por la particularización de la teoría desarrollada a determinados tipos de materiales, como son los materiales hiper-

elásticos de primer orden, o lineales, y en particular los materiales isótropos de esta categoría. En la sección siguiente abordamos un estudio distinto consistente en particularizar la teoría cinemática general (3.2) al caso en que

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + \eta \mathbf{n}_1$$

### 3.4. Teorías derivadas

En la sección 3.3 se han obtenido las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones constitutivas correspondientes a la hipótesis cinemática general de aproximación del vector posición  $\mathbf{p}(\theta^\alpha, \eta)$  de los puntos de la lámina por una serie de potencias de  $\eta$

$$\mathbf{p}(\theta^\alpha, \eta) = \mathbf{r}(\theta^\alpha) + \eta^N \mathbf{n}_N(\theta^\alpha), \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{n}_N(\theta^\alpha)$  son los vectores directores de la superficie de referencia de la lámina.

Un modelo cinemático frecuentemente empleado, derivado del anterior pero mucho más elemental, se deriva tomando un único vector director  $\mathbf{v}(\theta^\alpha) \equiv \mathbf{n}_1(\theta^\alpha)$  para describir la geometría de la lámina. Bajo este caso particular se cubren las teorías más clásicas de los hermanos Cosserat (1909) [1], Green y Naghdi (1965) [2] o de Reissner y Mindlin (1945) [3]. Las únicas variables de estado geométricas son ahora los vectores  $\{\mathbf{r}(\theta^\alpha), \mathbf{v}(\theta^\alpha)\}$ , relacionadas por la correspondiente particularización de (3.2):

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} + \eta \mathbf{v} \quad (3.54)$$

Una restricción suplementaria a esta ecuación permite a su vez integrar en nuestro modelo la conocida teoría de Love-Kirchhoff. En efecto, a ésta le corresponde el caso particular

$$\mathbf{v}(\theta^\alpha) = \mathbf{a}_3(\theta^\alpha) \quad (3.55)$$

En los apartados siguientes nos ocuparemos de la adecuada particularización de las ecuaciones del modelo general desarrollado a todas estas teorías derivadas, deduciendo sus correspondientes ecuaciones de equilibrio y constitutivas.

#### 3.4.1. Lámina con comportamiento transversal de primer orden

En el caso particular de tomar un único vector director (ecuación 3.54), la forma variacional de las ecuaciones de equilibrio en la configuración inicial se deduce fácilmente de (3.31):

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} = & \int_S \{ \sqrt{\Lambda} (\overset{\circ}{\mathbf{q}}_0 + \rho_0 \overset{\circ}{\mathbf{B}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \mathbf{N}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha + [ \sqrt{\Lambda} (\overset{\circ}{\mathbf{q}}_0 + \rho_0 \overset{\circ}{\mathbf{B}}) - \overset{\circ}{\mathbf{Q}} ] \cdot \delta \mathbf{v} - \overset{\circ}{\mathbf{M}}^\alpha \cdot \delta \mathbf{v}_{,\alpha} \} dS \\ & + \int_{\partial S} \sqrt{\Lambda} \{ \overset{\circ}{\mathbf{F}}_0 \cdot \delta \mathbf{r} + \overset{\circ}{\mathbf{F}}_0 \cdot \delta \mathbf{v} \} d\ell_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Los vectores correspondientes, en esta ecuación, a las fuerzas actuantes sobre la superficie de referencia se explicitan en la tabla siguiente

	<i>Cargas sobre S<sup>-</sup> y S<sup>+</sup></i>	<i>Fuerzas de masa</i>	<i>Fuerzas de borde</i>
esfuerzo total producido sobre S	$\overset{o}{q}_0 = (\mu_0 q_0)^+ + (\mu_0 q_0)^-$	$\overset{o}{B} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \, d\eta$	$\overset{o}{F}_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0^E q_0^E \, d\eta$
momento producido sobre S	$\overset{l}{q}_0 = \frac{h}{2} [(q_0 \mu_0)^+ - (q_0 \mu_0)^-]$	$\overset{l}{B} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta b \, d\eta$	$\overset{l}{F}_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0^E \eta q_0^E \, d\eta$

Las ecuaciones de equilibrio de la lámina, condiciones de contorno y relación entre esfuerzos generalizados pueden escribirse fácilmente. Al considerar un único vector director de la superficie, podremos prescindir del superíndice ( $N = 1$ ) en la escritura de los momentos de orden  $N$  del vector tensión  $T^k$ , por lo tanto tendremos:

$$\begin{aligned}
 N^\alpha &= \sqrt{\Lambda} \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial a_\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T^\alpha \, d\eta \\
 M^\alpha &= \sqrt{\Lambda} \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial v_{,\alpha}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta T^\alpha \, d\eta \\
 Q &= \sqrt{\Lambda} \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial v} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T^3 \, d\eta
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Tabla 3.5

	<i>Ecuaciones de equilibrio</i>	<i>Condiciones de contorno</i>
equilibrio de fuerzas	$\sqrt{\Lambda} (\overset{o}{q}_0 + \rho_0 \overset{o}{B}) + N_{,\alpha}^\alpha = 0$	$\overset{o}{F}_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} N^\alpha \dot{N}_\alpha$
equilibrio de momentos	$\sqrt{\Lambda} (\overset{l}{q}_0 + \rho_0 \overset{l}{B}) - Q + M_{,\alpha}^\alpha = 0$	$\overset{l}{F}_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} M^\alpha \dot{N}_\alpha$

La ecuación (3.32), particularizada a la simplificación cinemática adoptada (3.54), proporciona la relación vectorial existente entre los esfuerzos generalizados:

$$a_\alpha \times N^\alpha + v_{,\alpha} \times M^\alpha + v \times Q = 0 \tag{3.58}$$

Siguiendo el orden de exposición de la sección 3.3, pasemos a explicitar las deformaciones generalizadas para posteriormente definir nuestras nuevas ecuaciones constitutivas. Volvien-

do a (3.41), (3.38) y (3.34), y prescindiendo en su caso de subíndices innecesarios, escribiremos:

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta}) \\
 K_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha} \cdot v_{,\beta} + a_{\beta} \cdot v_{,\alpha}) + B_{\alpha\beta} \\
 R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (v_{,\alpha} \cdot v_{,\beta} - C_{\alpha\beta}) \\
 e_{\alpha\beta}^* &= e_{\alpha\beta} + \eta K_{\alpha\beta} + \eta^2 R_{\alpha\beta} \\
 v_{\alpha} &= a_{\alpha} \cdot v \\
 S_{\alpha} &= v_{,\alpha} \cdot v \\
 e_{\alpha 3}^* &= \frac{1}{2} (v_{\alpha} + \eta S_{\alpha}) \\
 e_{33}^* &= \frac{1}{2} (v \cdot v - 1) = H
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Podemos ahora particularizar las tablas 3.3 y 3.4 a estas deformaciones generalizadas. Así obtendremos tanto las ecuaciones constitutivas en la forma *componentes de esfuerzos generalizados - deformaciones generalizadas*, como la expresión de los citados esfuerzos generalizados en función del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Ambas relaciones se dan en forma de tabla.

**Tabla 3.6**  
*Esfuerzos generalizados, componentes en configuración inicial y relaciones constitutivas*

	$\tilde{N}^{\alpha\beta}$	$\tilde{M}^{1,\alpha\beta}$	$\tilde{M}^{2,\alpha\beta}$
ecuaciones constitutivas en función de la energía de deformación de S	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial e_{\alpha\beta}}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial K_{\alpha\beta}}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial R_{\alpha\beta}}$
en función del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \tilde{T}^{\alpha\beta} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta \tilde{T}^{\alpha\beta} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^2 \tilde{T}^{\alpha\beta} d\eta$
	$\tilde{V}$	$\tilde{Q}^{1,\alpha}$	$\tilde{Q}^{2,\alpha}$
	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial H}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial v_{\alpha}}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial S_{\alpha}}$
	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \tilde{T}^{33} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \tilde{T}^{\alpha 3} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta \tilde{T}^{\alpha 3} d\eta$

Los esfuerzos generalizados en forma vectorial, expresados en términos de las componentes dadas en esta última tabla se pueden obtener de la particularización de (3.43.2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{N}^\alpha &= \tilde{\mathbf{N}}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + \tilde{\mathbf{M}}^{1,\alpha\beta} \mathbf{v}_{,\beta} + \tilde{\mathbf{Q}}^{1,\alpha} \mathbf{v} \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{M}^\alpha &= \tilde{\mathbf{M}}^{1,\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + \tilde{\mathbf{M}}^{2,\alpha\beta} \mathbf{v}_{,\beta} + \tilde{\mathbf{Q}}^{2,\alpha} \mathbf{v} \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{Q} &= \tilde{\mathbf{Q}}^{1,\beta} \mathbf{a}_\beta + \tilde{\mathbf{Q}}^{2,\beta} \mathbf{v}_{,\beta} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Resulta interesante transformar estas relaciones para obtener las componentes de  $\{\mathbf{N}^\alpha, \mathbf{M}^\alpha, \mathbf{Q}\}$  en el triedro local  $\mathbf{a}_i$ . Para ello deberemos expresar  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_{,\beta}$  en componentes locales. Esto es:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v^j \mathbf{a}_j \\ \mathbf{v}_{,\beta} &= (\tilde{\chi}_\beta^\gamma - b_\beta^\gamma) \mathbf{a}_\gamma - \hat{\psi}_\beta \mathbf{a}_3 = \lambda_\beta^\gamma \mathbf{a}_\gamma + \lambda_\beta^3 \mathbf{a}_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} b_\beta^\gamma + \lambda_\beta^\gamma &= \tilde{\chi}_\beta^\gamma = v_{,\beta}^\gamma - (v^3 - 1) b_\beta^\gamma \\ -\lambda_\beta^3 &= \hat{\psi}_\beta = -(v_{,\beta}^3 + v^\gamma b_{\gamma\beta}) \end{aligned}$$

Nótese que esta notación corresponde exactamente a la adoptada para el estudio cinemático de láminas expuesto en la anterior publicación [4]. Llevando (3.61) a (3.60) obtendremos

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{N}^\alpha &= N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + N^{\alpha 3} \mathbf{a}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{M}^\alpha &= M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + M^{\alpha 3} \mathbf{a}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{Q} &= Q^\beta \mathbf{a}_\beta + Q^3 \mathbf{a}_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Las componentes locales  $N^{\alpha\beta}$ ,  $N^{\alpha 3}$ ,  $M^{\alpha\beta}$ ,  $M^{\alpha 3}$ ,  $Q^\beta$  y  $Q^3$  de los esfuerzos generalizados se dan en la tabla siguiente.

Tabla 3.7

<i>vector de esfuerzo generalizado</i>	<i>componentes tangentes</i>	<i>componentes normales</i>
$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{N}^\alpha$	$N^{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{N}}^{\alpha\beta} + \lambda_\gamma^\beta \tilde{\mathbf{M}}^{1,\alpha\gamma} + v^\beta \tilde{\mathbf{Q}}^{1,\alpha}$	$N^{\alpha 3} = v^3 \tilde{\mathbf{Q}}^{1,\alpha} + \lambda_\gamma^3 \tilde{\mathbf{M}}^{1,\alpha\gamma}$
$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{M}^\alpha$	$M^{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{M}}^{1,\alpha\beta} + \lambda_\gamma^\beta \tilde{\mathbf{M}}^{2,\alpha\gamma} + v^\beta \tilde{\mathbf{Q}}^{2,\alpha}$	$M^{\alpha 3} = v^3 \tilde{\mathbf{Q}}^{2,\alpha} + \lambda_\gamma^3 \tilde{\mathbf{M}}^{2,\alpha\gamma}$
$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \mathbf{Q}$	$Q^\beta = \tilde{\mathbf{Q}}^{1,\beta} + \lambda_\gamma^\beta \tilde{\mathbf{Q}}^{2,\gamma} + v^\beta \tilde{\mathbf{V}}$	$Q^3 = v^3 \tilde{\mathbf{V}} + \lambda_\gamma^3 \tilde{\mathbf{Q}}^{2,\gamma}$

Consideremos ahora el caso de material hiperelástico de primer orden, o Hookiano lineal. La relación matricial esfuerzos generalizados versus deformaciones generalizadas, expuesta en (3.51), pasará a ser:

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{1,\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{2,\alpha\beta} \\ \tilde{Q}^{1,\alpha} \\ \tilde{Q}^{2,\alpha} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D^{0,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{1,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{0,\alpha\beta\lambda} & D^{1,\alpha\beta\lambda} & D^{0,\alpha\beta} \\ D^{1,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{3,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{1,\alpha\beta\lambda} & D^{2,\alpha\beta\lambda} & D^{1,\alpha\beta} \\ D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{3,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{4,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\beta\lambda} & D^{3,\alpha\beta\lambda} & D^{2,\alpha\beta} \\ D^{0,\alpha\lambda\gamma} & D^{1,\alpha\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\lambda\gamma} & G^{0,\alpha\lambda} & G^{1,\alpha\lambda} & D^{0,\alpha} \\ D^{1,\alpha\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\lambda\gamma} & D^{3,\alpha\lambda\gamma} & G^{1,\alpha\lambda} & G^{2,\alpha\lambda} & D^{1,\alpha} \\ D^{0,\lambda\gamma} & D^{1,\lambda\gamma} & D^{2,\lambda\gamma} & D^{0,\lambda} & D^{1,\lambda} & D^0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{\lambda\gamma} \\ K_{\lambda\gamma} \\ R_{\lambda\gamma} \\ V_{\lambda} \\ S_{\lambda} \\ H \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

La ecuación (3.63) relaciona las 17 componentes de los esfuerzos generalizados (que se reducen a 14 independientes por simetría en  $\alpha\beta$ ) con las 17 deformaciones generalizadas (14 distintas por la simetría en  $\lambda\gamma$ ). Se comprueba fácilmente la simetría de la matriz de constantes constitutivas, cuya particularización al caso isótropo es ya inmediata, obteniendo sobre la base de (3.53):

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{1,\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{2,\alpha\beta} \\ \tilde{Q}^{1,\alpha} \\ \tilde{Q}^{2,\alpha} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D^{0,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{1,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & 0 & 0 & D^{0,\alpha\beta} \\ D^{1,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{3,\alpha\beta\lambda\gamma} & 0 & 0 & D^{1,\alpha\beta} \\ D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{3,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{4,\alpha\beta\lambda\gamma} & 0 & 0 & D^{2,\alpha\beta} \\ 0 & 0 & 0 & G^{0,\alpha\lambda} & G^{1,\alpha\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{1,\alpha\lambda} & G^{2,\alpha\lambda} & 0 \\ D^{0,\lambda\gamma} & D^{1,\lambda\gamma} & D^{2,\lambda\gamma} & 0 & 0 & D^0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{\lambda\gamma} \\ K_{\lambda\gamma} \\ R_{\lambda\gamma} \\ V_{\lambda} \\ S_{\lambda} \\ H \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Nuevamente se pone de manifiesto el desacoplamiento existente entre las deformaciones propias de la superficie (extensiones y cambios de curvatura, según lo expuesto en [4]) y las debidas a la deformación transversal de la lámina,  $v_{\lambda}$  y  $S_{\lambda}$ . Como puede observarse en (3.59),  $H$  da directamente la deformación  $e_{33}^{\#}$  de la lámina.

Volvamos ahora a la ecuación (3.54), sobre la cual se ha construido esta teoría con comportamiento transversal linealizado, o de primer orden. El único vector director considerado,  $v$  ( $\theta^{\alpha}$ ), puede descomponerse en la forma siguiente

$$v = a_3 + w \quad (3.65)$$

donde el vector  $a_3$  ( $\theta^{\alpha}$ ) representa la normal unitaria a  $\Sigma$ . Con esta presentación alternativa de (3.54) la interpretación geométrica de la cinemática de la lámina resulta más cómoda; ello quedó expuesto en [4], y las deformaciones generalizadas correspondientes serán ahora:

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta})$$

$$K_{1\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\hat{X}_{\alpha\beta} + \hat{X}_{\beta\alpha})$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\hat{\psi}_\alpha \hat{\psi}_\beta + (b_\alpha^\gamma - \hat{\chi}_\alpha^\gamma) (b_{\gamma\beta} - \hat{\chi}_{\gamma\beta}) - C_{\alpha\beta}] \quad (3.66)$$

$$v_\alpha = w_\alpha$$

$$S_\alpha = w_\gamma (\hat{\chi}_\alpha^\gamma - b_\alpha^\gamma) - (1 + w^3) \hat{\psi}_\alpha$$

$$H = w^3 + \frac{1}{2} w^i w_i$$

Los esfuerzos generalizados tendrán ahora la siguiente expresión, obtenida de la tabla 3.7 interpretando las relaciones (3.61) adecuadamente:

$$\begin{pmatrix} N^{\alpha\beta} \\ N^{\alpha 3} \\ M^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha 3} \\ Q^\beta \\ Q^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\chi}_\gamma^\beta - b_\gamma^\beta & 0 & w^\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\psi}_\gamma & 0 & 1 + w^3 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\gamma^\beta & \hat{\chi}_\gamma^\beta - b_\gamma^\beta & 0 & w^\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\psi}_\gamma & 0 & 1 + w^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_\alpha^\beta & \hat{\chi}_\alpha^\beta - b_\alpha^\beta & w^\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\psi}_\alpha & 1 + w^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{1,\alpha\gamma} \\ \tilde{M}^{2,\alpha\gamma} \\ \tilde{Q}^{1,\alpha} \\ \tilde{Q}^{2,\alpha} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Otra ventaja de esta nueva forma adoptada para el único vector director es la de poder generar con mayor comodidad teorías de láminas más usuales como la de Reissner-Mindlin o la teoría clásica de Love-Kirchhoff. Presentamos esta última en el apartado siguiente.

### 3.4.2. Teoría de Love-Kirchhoff

La teoría de láminas de Love-Kirchhoff admite como primera simplificación que las normales a la superficie de referencia en la configuración de partida de la lámina permanecen perpendiculares a  $\Sigma$ , configuración actual, e inextensibles. Por lo tanto esta primera hipótesis, llevada a (3.65), se traducirá en la siguiente condición:

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \mathbf{p} &= \mathbf{r} + \eta \mathbf{a}_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Esta ecuación simplifica notablemente la estructura de las deformaciones generalizadas expuestas en el sistema (3.66). Imponiendo ( $w^i = 0$ ) se obtiene directamente

$$\left. \begin{aligned} \hat{\chi}_\alpha^\gamma &= 0 \\ \hat{\psi}_\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

luego

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \\ K_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (c_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} v_\alpha &= 0 \\ S_\alpha &= 0 \\ H &= 0 \end{aligned}$$

El tensor de deformación de Lagrange de la lámina tendrá, por (3.59), la siguiente expresión

$$e_{\alpha\beta}^* = e_{\alpha\beta} + \eta K_{\alpha\beta} + \eta^2 R_{\alpha\beta} \quad (3.71)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha 3}^* &= 0 \\ e_{33}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

La primera de las ecuaciones (3.72) confirma que la teoría de Love-Kirchhoff corresponde, dentro del comportamiento transversal de primer orden, al caso particular de *lámina sin deformación transversal*. Los esfuerzos generalizados tendrán ahora por componentes *constitutivas* exclusivamente las siguientes.

**Tabla 3.8**

*Teoría de Love-Kirchhoff, esfuerzos generalizados y relaciones constitutivas en configuración inicial*

	$\tilde{N}^{\alpha\beta}$	$\tilde{M}^{1,\alpha\beta}$	$\tilde{M}^{2,\alpha\beta}$
ecuaciones constitutivas en función de la energía de deformación de S	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial e_{\alpha\beta}}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial K_{\alpha\beta}}$	$\rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial R_{\alpha\beta}}$
expresiones en función del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \bar{T}^{\alpha\beta} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta \bar{T}^{\alpha\beta} d\eta$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^2 \bar{T}^{\alpha\beta} d\eta$

Si ahora recurrimos al sistema (3.67), y llevamos a estas relaciones las condiciones (3.69) propias de la teoría que ahora nos interesa, obtendremos:

$$\begin{Bmatrix} N^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b_\gamma^\beta & 0 \\ 0 & \delta_\gamma^\beta & -b_\gamma^\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{1,\alpha\gamma} \\ \tilde{M}^{2,\alpha\gamma} \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\begin{Bmatrix} N^{\alpha 3} \\ M^{\alpha 3} \\ Q^\beta \\ Q^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta_\alpha^\beta & -b_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \begin{Bmatrix} \tilde{T}^{\alpha 3} \\ \eta \tilde{T}^{\alpha 3} \\ \tilde{T}^{33} \end{Bmatrix} d\eta \quad (3.74)$$

Debe anotarse que tan sólo la ecuación (3.73) proporciona componentes de los esfuerzos generalizados en función de sus componentes constitutivas. Las restantes componentes locales (ecuación 3.74) sólo pueden relacionarse con resultantes de las tensiones de Piola-

Kirchhoff al carecer el modelo de Love-Kirchhoff de información sobre el comportamiento transversal de la lámina, según quedó expuesto en (3.72).

Por su parte, la particularización a materiales hiperelásticos Hookianos de las relaciones constitutivas expresadas en la tabla 3.8 nos proporciona fácilmente la relación equivalente a (3.63):

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{1,\alpha\beta} \\ \tilde{M}^{2,\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D^{0,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{1,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} \\ D^{1,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{3,\alpha\beta\lambda\gamma} \\ D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{3,\alpha\beta\lambda\gamma} & D^{4,\alpha\beta\lambda\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{\lambda\gamma} \\ K_{\lambda\gamma} \\ R_{\lambda\gamma} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$$D^{L,\alpha\beta\lambda\gamma} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \eta^L E^{\alpha\beta\lambda\gamma} d\eta$$

La expresión de las constantes elásticas del material,  $E^{\alpha\beta\lambda\gamma}$ , se dió en la sección anterior, así como la forma desarrollada del determinante del tensor de Krauss. Ambas relaciones eran, recordemos

$$E^{\alpha\beta\lambda\gamma} = G (G^{*\alpha\lambda} \cdot G^{*\beta\gamma} + G^{*\alpha\gamma} \cdot G^{*\beta\lambda}) + \lambda G^{*\alpha\beta} \cdot G^{*\lambda\gamma}$$

$$\mu_0 = 1 - 2 H_0 \eta + \eta^2 K_0$$

El tensor métrico  $G^{*\alpha\beta}$  puede a su vez referirse a funciones definidas sobre S utilizando la propiedad del tensor de Krauss (recordemos que esta permitía expresar los vectores naturales en un punto cualquiera de la lámina en función de los vectores  $A_\alpha$ ). El resultado es

$$G^{*\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} - 2 \eta B^{\alpha\beta} + \eta^2 C^{\alpha\beta}$$

Esta última expresión facilita el cálculo explícito de las constantes constitutivas de la lámina puesto que en ella, y en la ecuación que proporciona  $\mu_0$ , la variable de integración  $\eta$  ha quedado despejada. En el caso particular de que la lámina en cuestión sea una placa, estas operaciones quedan muy simplificadas puesto que esta peculiar geometría se caracteriza por:

$$H_0 = K_0 = 0$$

$$B^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} = 0$$

$$\mu_0 = 1$$

$$E^{\alpha\beta\lambda\gamma} = G (A^{\alpha\lambda} \cdot A^{\beta\gamma} + A^{\alpha\gamma} \cdot A^{\beta\lambda}) + \lambda A^{\alpha\beta} \cdot A^{\lambda\gamma}$$

y las constantes serán directamente:

$$D^{0,\alpha\beta\lambda\gamma} = E^{\alpha\beta\lambda\gamma} \cdot h$$

$$D^{2,\alpha\beta\lambda\gamma} = E^{\alpha\beta\lambda\gamma} \cdot \frac{h^3}{12}$$

$$D^{4,\alpha\beta\lambda\gamma} = E^{\alpha\beta\lambda\gamma} \cdot \frac{h^5}{80}$$

$$D^{1,\alpha\beta\lambda\gamma} = D^{3,\alpha\beta\lambda\gamma} = 0$$

Luego, según (3.75), se producirá un desacoplamiento entre las deformaciones generalizadas  $e_{\lambda\gamma}$  y  $K_{\lambda\gamma}$ .

Consecuentemente este desacoplamiento no existirá en las demás estructuras laminares formalmente, sólo simplificaciones posteriormente impuestas y generalmente basadas en la propiedad de "lámina delgada" que puede resumirse por

$$|\eta \cdot b_\nu^\gamma| \ll 1$$

permitirán introducir esta condición de desacoplamiento en las ecuaciones constitutivas.

Volvamos ahora a las ecuaciones (3.73) y (3.74). Recordando la definición del tensor  $\mu_\nu^\gamma = \delta_\nu^\gamma - \eta b_\nu^\gamma$ , podemos sustituirlas por las integrales siguientes, obtenidas a partir de la tabla 3.8:

$$\begin{Bmatrix} N^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \mu_\gamma^\beta \tilde{T}^{\alpha\gamma} \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta \end{Bmatrix} d\eta \quad (3.76)$$

$$\begin{Bmatrix} N^{\alpha 3} \\ M^{\alpha 3} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \tilde{T}^{\alpha 3} \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta \end{Bmatrix} d\eta \quad (3.77)$$

$$Q^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_0 \mu_\gamma^\alpha \tilde{T}^{\gamma 3} d\eta \quad (3.78)$$

Evaluemos ahora la tensión actuante en un punto de la sección normal de la lámina definida por las direcciones  $\{a_\beta, a_3\}$ . Su normal tendrá por ecuación

$$\hat{n} = g^{*\alpha\alpha} / \sqrt{g^{*\alpha\alpha}}$$

luego

$$t_0^\alpha = \tilde{T}^{ij} \delta_i^\alpha g_j^* / \sqrt{g^{*\alpha\alpha}}$$

$$T^\alpha d\theta^\beta d\eta = [\tilde{T}^{\alpha\gamma} g_\gamma^* + \tilde{T}^{\alpha 3} g_3^*] \cdot \sqrt{G^*} d\theta^\beta d\eta$$

y como consecuencia de la hipótesis genérica de la teoría de Love-Kirchhoff:

$$T^\alpha = [\mu_\gamma^\beta \tilde{T}^{\alpha\gamma} a_\beta + \tilde{T}^{\alpha 3} a_3] \cdot \sqrt{G^*} \quad (3.79)$$

En consecuencia la ecuación (3.76) define las componentes tangentes del esfuerzo y momento resultantes de integrar las tensiones  $t_0^\alpha$ , referidas a unidad de área no-deformada, sobre el espesor de la lámina. Igualmente, por (3.77)  $M^{\alpha 3}$  serán las componentes normales de esta misma integración. Todos ellos se representan a continuación.

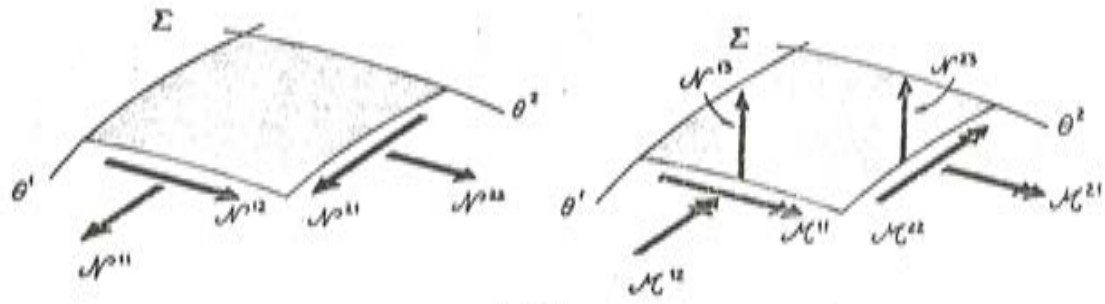


Fig. 3.3.

En efecto, el esfuerzo resultante de integrar las  $t_0^\alpha$  sobre  $\eta$  será

$$n^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{T^\alpha}{\sqrt{\Lambda}} d\eta = N^{\alpha\beta} a_\beta + N^{\alpha 3} a_3 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} N^\alpha \quad (3.80)$$

y el momento se calculará como sigue:

$$m^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} (\eta a_3) \times T^\alpha d\eta = \epsilon_{\nu\beta} M^{\alpha\beta} a^\nu = M^{\alpha\beta} \hat{a}_\beta \quad (3.81)$$

siendo  $\hat{a}_\alpha$  el vector conjugado de  $a_\alpha$ , según ha quedado grafiado en la figura 3.3. En cuanto a la ecuación (3.78), podremos sustituirla por

$$Q^\alpha = N^{\alpha 3} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma 3} \quad (3.82)$$

y por lo tanto el sistema  $Q^\alpha$  podrá eliminarse de las ecuaciones de equilibrio de la lámina. Un último comentario debe dedicarse a los sistemas  $M^{\alpha 3}$  y  $Q^3$ , puesto que su interpretación física no ha sido posible. Ello está exclusivamente derivado de la forma en que se ha construido nuestra teoría 2D, al degenerar la lámina intrínsecamente tridimensional en un modelo superficial, posteriormente simplificado (puesto que en esta sección tan sólo hemos considerado un único vector director de la superficie de referencia). La formulación variacional presentada asocia a cada variable de estado energética un esfuerzo generalizado dual, y aplicado al caso de Love-Kirchhoff hemos obtenido:

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} N^\alpha = \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial a_\alpha}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} M^\alpha = \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial a_{3,\alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} Q = \rho_0 \frac{\partial W_m}{\partial a_3}$$

Consecuentemente, los esfuerzos  $M^{\alpha 3}$  y  $Q^3$ , siempre expresables a partir de las componentes  $\bar{T}^{ij}$  del tensor de tensiones de Piola Kirchhoff, heredarán este significado: serán las componentes locales necesarias para completar la expresión local de los *esfuerzos generalizados duales de la formulación cinemática* adoptada para describir la deformación de la lámina.

## ANEXO A. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO EN UN CONTINUO TRIDIMENSIONAL

### A.1. Generalidades sobre procesos dinámicos

El concepto de fuerzas actuando sobre un cuerpo  $B$  resume la acción del mundo exterior sobre un cuerpo en movimiento, y la interacción entre las diferentes partes del cuerpo. Centraremos nuestra atención sobre el caso de mecánica no polar del medio, esto es, asumiremos que no existen pares de tensiones distribuidos por el continuo. También admitiremos, para mayor simplicidad, que no existen fuerzas de atracción mutua dentro del cuerpo y que todas las fuerzas están continuamente distribuidas.

Bajo estas condiciones, un sistema de fuerzas asociado a un cuerpo  $B$  en movimiento tendrá las siguientes características.

- (1) En cada instante  $t$  se conoce un campo vectorial  $\mathbf{b}(\mathbf{p}, t)$ , definido para cada punto  $\mathbf{p}$  de la región del espacio ocupada por el cuerpo  $B$  en ese instante. Se le denomina *densidad por unidad de masa de las fuerzas ejercidas por las masas externas*.

El vector  $\mathbf{F}_b(P)$  definido por la integral volumétrica

$$\mathbf{F}_b(P) = \int_{V(t)} \mathbf{b} \rho^* \cdot dV \quad (\text{A.1})$$

sobre cada parte  $P$  del cuerpo  $B$  se denomina *resultante de fuerzas de masa externas ejercidas sobre la parte  $P$  en el instante  $t$* .

- (2) En cada instante  $t$ , a cada parte  $P$  del cuerpo  $B$  le corresponde un campo vectorial  $\mathbf{t}(\mathbf{p}, P)$  definido para cada punto  $\mathbf{p}$  del contorno  $\partial P$  de  $P$ . Se le denomina *densidad de fuerza de contacto*, o simplemente *tensión actuante sobre la parte  $P$  del cuerpo  $B$* . La fuerza de contacto resultante  $\mathbf{F}_t(P)$  ejercida sobre  $P$  en el instante  $t$  viene definida por la integral de superficie

$$\mathbf{F}_t(P) = \int_{\Sigma(t)} \mathbf{t} \cdot d\Sigma \quad (\text{A.2})$$

extendida a toda la superficie  $\Sigma$  del contorno  $\partial P$  de la parte  $P$  en ese instante.

- (3) La fuerza total resultante  $\mathbf{F}(P)$  ejercida sobre la parte  $P \subset B$  se define por la suma de las resultantes de fuerzas de masa y fuerzas de contacto,

$$\mathbf{F}(P) = \mathbf{F}_b(P) + \mathbf{F}_t(P) \quad (\text{A.3})$$

- (4) Principio de tensión: existe una función vectorial  $\mathbf{t}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{n}})$  definida en cada punto  $\mathbf{p} \in B$  y para todos los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{n}}$  tal que las tensiones actuantes sobre cualquier parte  $P \subset B$  están dadas por

$$\mathbf{t}(\mathbf{p}; P) \equiv \mathbf{t}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{A.4})$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario normal exterior en el punto  $\mathbf{p}$  sobre el contorno  $\partial P$ . El vector  $\mathbf{t}$  se denomina vector de tensiones en el punto  $\mathbf{p}$  actuando a través de un elemento superficial orientado con normal  $\hat{\mathbf{n}}$ . Si el punto  $\mathbf{p}$  pertenece al contorno  $\partial B$  del cuerpo, entonces para cada configuración  $\mathbf{t}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{n}})$  se reduce a una función  $\mathbf{q}(\mathbf{p})$  que se denomina tracción superficial sobre el contorno  $\partial B$ .

Si se da un cuerpo en movimiento y el correspondiente sistema de fuerzas, especificado según los principios (1) a (4), hablaremos de un proceso dinámico siempre que se cumplan las leyes fundamentales de la mecánica, esto es, el principio de la cantidad de movimiento y el principio del momento cinético. Bajo apropiadas condiciones de continuidad, existe un tensor de tensiones tal que el vector de tensión  $\mathbf{t}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{n}})$  postulado por el principio (4) puede expresarse como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{n}}) = T^{ij}(\mathbf{p}) \hat{n}_i \mathbf{g}_j^* \quad (\text{A.5})$$

donde  $\hat{n}_i$  son las componentes covariantes del vector  $\hat{\mathbf{n}}$ ,

$$\hat{n}_i = \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{g}_i^* \quad (\text{A.6})$$

y  $\mathbf{g}_i^*$  son los vectores naturales en el punto  $\mathbf{p}$  del sistema convectivo en una configuración dada de  $\mathcal{B}$ . En lo sucesivo supondremos implícita la dependencia funcional del tensor de tensiones de Cauchy, definido en (A.5), del punto del cuerpo en que se evalúe y escribiremos simplemente:

$$\mathbf{t} = T^{ij} \hat{n}_i \mathbf{g}_j^* \quad , \quad t^j = T^{ij} \hat{n}_i \quad (\text{A.7})$$

siendo  $t^j$  las componentes contravariantes del vector tensión en el sistema de referencia local convectivo.

En las secciones siguientes, a partir de los principios fundamentales de la mecánica, obtendremos las ecuaciones locales del movimiento, aplicables a cada partícula del cuerpo cuyo vector posición sea  $\mathbf{p}$  en la configuración de  $\mathcal{B}$  correspondiente al instante  $t$ .

## A.2. Principio de conservación de la masa

La masa de un cuerpo es una propiedad física fundamental, asignada a priori como parte de la especificación del cuerpo, siendo por tanto invariable en cualquiera de sus configuraciones. No ocurre lo mismo con la densidad de masa  $\rho^*$ , la cual expresa una relación entre la masa  $m(P)$  de cada parte medible  $P \subset \mathcal{B}$ , y el volumen  $V(P)$  de la región del espacio Euclídeo ocupado por  $P$  en la configuración del instante  $t$ .

Puesto que

$$m(P) = \int_V \rho^* dV \quad (\text{A.8})$$

el principio de conservación de la masa se podrá expresar matemáticamente como

$$m(P) = \int_{V(t)} \rho^* dV = \int_{V(t_0)} \rho_0^* dV_0$$

La ecuación anterior debe cumplirse para cada parte  $P$  del cuerpo, luego haciendo uso de las relaciones geométricas

$$\left. \begin{aligned} dV_0 &= \sqrt{G^*} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ dV &= \sqrt{g^*} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

se obtiene la expresión local de la conocida ecuación de continuidad:

$$\rho^* \sqrt{g^*} = \rho_0^* \sqrt{G^*} \quad (\text{A.10})$$

### A.3. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento  $F$  de un cuerpo  $B$  de masa  $m(B)$  se define por

$$\begin{aligned} F &= \int_{m(B)} \dot{\mathbf{p}} \, dm \\ &= \int_V \dot{\mathbf{p}} \rho^* \, dV = \int_{V_0} \dot{\mathbf{p}} \rho_0^* \, dV_0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} \mathbf{p}$  es el vector velocidad de cada punto del cuerpo.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento establece que la variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la resultante de fuerzas actuantes sobre el cuerpo en ese instante. Expresado matemáticamente, y recurriendo a (A.3) se tiene

$$\dot{F} = F_b(B) + F_t(B) \quad (\text{A.12})$$

A partir de esta ecuación e invocando (A.1), (A.2) y (A.11) podemos escribir

$$\int_V \ddot{\mathbf{p}} \rho^* \, dV = \int_V \mathbf{b} \rho^* \, dV + \int_{\Sigma} T^{ij} \hat{n}_i \mathbf{g}_j^* \, d\Sigma \quad (\text{A.13})$$

la última integral de superficie de los vectores de tensión en el contorno puede transformarse, aplicando el teorema de Gauss, en una integral de volumen (ver anexo D) como sigue

$$\int_{\Sigma} T^{ij} \hat{n}_i \mathbf{g}_j^* \, d\Sigma = \int_V [\sqrt{g^*} T^{ij} \mathbf{g}_j^*]_{,i} \frac{dV}{\sqrt{g^*}} \quad (\text{A.14})$$

y llevando a (A.13), el principio de conservación de la cantidad de movimiento puede expresarse en la forma siguiente:

$$\int_V \left\{ \frac{1}{\sqrt{g^*}} (\sqrt{g^*} T^{ij} \mathbf{g}_j^*)_{,i} + \rho^* \mathbf{b} - \rho^* \ddot{\mathbf{p}} \right\} dV = 0 \quad (\text{A.15})$$

Si la ecuación anterior debe verificarse en todo volumen arbitrario  $V(P)$ , entonces el integrando será necesariamente nulo, deduciéndose de esta forma las ecuaciones locales del principio de conservación de la cantidad de movimiento, también conocidas como ecuaciones de Cauchy del movimiento:

$$(\sqrt{g^*} T^{ij} \mathbf{g}_j^*)_{,i} + \sqrt{g^*} \rho^* \mathbf{b} = \sqrt{g^*} \rho^* \ddot{\mathbf{p}} \quad (\text{A.16})$$

donde  $\ddot{\mathbf{p}}$  es el vector aceleración de cada punto del cuerpo y  $g^*$  el determinante del tensor métrico del sistema de coordenadas (convectivas). Las ecuaciones de Cauchy pueden escribirse en forma más simplificada, para su versión estática, como sigue:

$$\left. \begin{aligned} T^i_{,i} + \sqrt{g^*} \rho^* \mathbf{b} &= 0 \\ T^i &= \sqrt{g^*} T^{ij} \mathbf{g}_j^* \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.17})$$

El vector  $T^i$  define directamente la fuerza actuante sobre un paralelogramo de lados diferenciales medidos sobre las líneas  $\theta^j, \theta^k$  ( $i \neq j \neq k$ ). En efecto, esta fuerza valdrá

$$dF_t = T^{kj} \hat{n}_k g_j^* d\Sigma$$

$$\hat{n} \cdot d\Sigma = g_j^* d\theta^j \times g_k^* d\theta^k = g^{*i} \cdot \sqrt{g^*} d\theta^j d\theta^k \quad (i \neq j \neq k)$$

luego

$$dF_t = \sqrt{g^*} T^{ij} g_j^* d\theta^j d\theta^k$$

$$= T^i d\theta^j d\theta^k \quad (\text{A.18})$$

#### A.4. Principio de conservación del momento cinético

El momento cinético  $M_A$  de un cuerpo  $B$  de masa  $m(B)$  con respecto a un punto  $A$  se define por

$$M_A = \int_{m(B)} (\mathbf{R}_A \times \dot{\mathbf{p}}) dm$$

$$= \int_V \rho^* (\mathbf{R}_A \times \dot{\mathbf{p}}) dV = \int_{V_0} \rho_0^* (\mathbf{R}_A \times \dot{\mathbf{p}}) dV_0 \quad (\text{A.19})$$

donde  $\mathbf{R}_A$  es el vector posición del punto  $\mathbf{p}$  relativo a  $A$ . El principio de conservación del momento cinético establece que la variación con respecto al tiempo del momento cinético de un cuerpo es igual al momento resultante de las fuerzas actuantes sobre el cuerpo, ambas magnitudes evaluadas con respecto a  $A$ . Expresado matemáticamente, este principio se escribirá:

$$\dot{M}_A = \int_V (\mathbf{R}_A \times \mathbf{b}) \rho^* dV + \int_\Sigma (\mathbf{R}_A \times \mathbf{t}) d\Sigma \quad (\text{A.20})$$

Haciendo uso del principio de la conservación de la masa, del hecho de que el punto  $A$  es fijo, y por (A.17.2), la ecuación anterior podrá reescribirse como sigue:

$$\int_V \rho^* (\mathbf{R}_A \times \ddot{\mathbf{p}}) dV = \int_V \left\{ \rho^* (\mathbf{R}_A \times \mathbf{b}) + \frac{1}{\sqrt{g^*}} (\mathbf{R}_A \times \mathbf{T}^i)_{,i} \right\} dV \quad (\text{A.21})$$

para llegar a esta expresión debe nuevamente aplicarse el teorema de Gauss, transformando adecuadamente la integral de superficie de (A.20). Desarrollando la derivada parcial incluida en el integrando de la ecuación anterior, segundo miembro, y agrupando sumando se llega a

$$\int_V \mathbf{R}_A \times (\rho^* \ddot{\mathbf{p}} - \rho^* \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{\sqrt{g^*}} \mathbf{T}^i_{,i}) dV = \int_V \mathbf{R}_{A,i} \times \frac{\mathbf{T}^i}{\sqrt{g^*}} dV \quad (\text{A.22})$$

Invocando las ecuaciones del movimiento de Cauchy, y al ser el punto  $A$  un punto fijo, deberá verificarse en forma local

$$\mathbf{g}_i^* \times \mathbf{T}^i = 0 \quad (\text{A.23})$$

para que la ecuación (A.22) se cumpla exactamente. Expresando el vector  $\mathbf{T}^i$  en función del tensor de tensiones de Cauchy, la última ecuación puede sustituirse por

$$\mathbf{g}_i^* \times (\mathbf{T}^{ij} \mathbf{g}_j^*) = 0$$

luego

$$\epsilon_{ijk} g^{*k} T^{ij} = 0$$

Esta última ecuación, desarrollando las sumas en  $ij$ , exige para cada componente (es decir para cada valor de  $k$ ) que se cumpla

$$\epsilon_{ijk} T^{ij} + \epsilon_{jik} T^{ji} = 0 \quad (i \neq j \neq k)$$

(sin sumar en  $i, j$ )

y al ser  $\epsilon_{ijk}$  un sistema antisimétrico se deduce

$$T^{ij} = T^{ji} \tag{A.24}$$

indicándonos que el tensor de tensiones de Cauchy es simétrico, y por tanto que de sus nueve componentes sólo seis son independientes.

## ANEXO B. TENSIONES DE PIOLA-KIRCHHOFF

En el apartado anterior se han obtenido las leyes del movimiento de Cauchy, expresadas en función del tensor de tensiones de Cauchy; para el caso estático estas eran:

$$\left. \begin{aligned} T^i_{,i} + \sqrt{g^*} \cdot \rho^* \mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{g}_i^* \times T^i &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{A.17, 23}$$

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{g^*} \cdot T^{ij} \mathbf{g}_j^*)_{,i} + \sqrt{g^*} \cdot \rho^* \mathbf{b} &= 0 \\ T^{ij} &= T^{ji} \end{aligned} \right\} \tag{A.16, 24}$$

Este tensor, según se ha definido, proporciona la fuerza por unidad de área del cuerpo en su configuración actual (o deformada) referida al triedro local  $\mathbf{g}_j^*$

$$d\mathbf{F}_i = \mathbf{t} d\Sigma = T^{ij} (\hat{n}_i d\Sigma) \mathbf{g}_j^* \tag{A.5}$$

Nótese que el segundo índice del tensor indica la dirección de la componente de tensión, mientras que el primer índice corresponde a la dirección de la normal a la superficie sobre la que actúa la fuerza.

En la mecánica de sólidos, generalmente asumimos que la geometría del cuerpo es conocida a priori en alguna configuración inicial (o de referencia), y es por tanto conveniente definir el estado tensional en cada punto del cuerpo con referencia a esta configuración inicial. Surgen de esta forma los conceptos básicos de los tensores de tensiones de Piola-Kirchhoff.

El primero de ellos indica la fuerza real actuante en cada punto del cuerpo, medida por unidad de área no deformada. El segundo tensor de tensiones se construye de forma que nos describa una pseudo-fuerza medida por unidad de área no deformada tal que sus componentes de tensión en el sistema local convectivo inicial  $\mathbf{G}_i^*$  coincidan con las componentes reales respecto al sistema local actual  $\mathbf{g}_j^*$ .

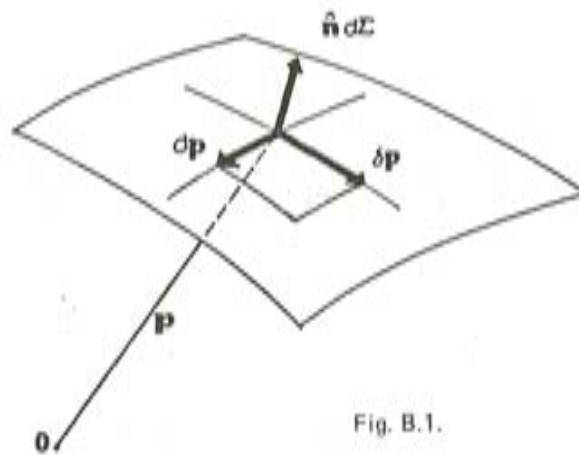
La definición de estos sistemas se aborda en las secciones siguientes del presente anexo,

y para ello comenzaremos por estudiar el cambio de área inducido por la deformación del cuerpo sobre el contorno  $\partial P$  de cualquier parte  $P \subset B$ ,

### B.1. El cambio de área

Sea  $d\Sigma$  un elemento de área infinitesimal definido, en un punto  $\mathbf{p}$  de la configuración actual, por el paralelogramo de lados  $d\mathbf{p}$ ,  $\delta\mathbf{p}$  (ver figura B.1). El vector normal a este elemento de área en el punto considerado vendrá definido por el producto vectorial de los dos vectores infinitesimales que definen sus aristas, es decir

$$\hat{\mathbf{n}} d\Sigma = d\mathbf{p} \times \delta\mathbf{p} \quad (\text{B.1})$$



Desarrollando la expresión de los vectores elementales de (B.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} d\Sigma &= (\mathbf{p}_{,i} d\theta^i) \times (\mathbf{p}_{,j} \delta\theta^j) \\ &= \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^{*k} d\theta^i \delta\theta^j \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Recordemos que  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de orientación, nulo si alguno de sus índices se repite, e igual a  $\pm \sqrt{g^*}$  en los demás casos, esto es para  $i \neq j \neq k$ , variando el signo según el tipo de permutación indicial (par o impar) a partir del valor

$$\epsilon_{123} = + \sqrt{g^*}$$

La ecuación (B.2) es de sencilla particularización a cualquier otra configuración del cuerpo distinta de la actual, en particular si la evaluamos en la configuración inicial obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{N}} dS &= \epsilon_{ijk}^0 \mathbf{G}^{*k} d\theta^i \delta\theta^j \\ \epsilon_{123}^0 &= \sqrt{G^*} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.3})$$

Sobre la base de las ecuaciones anteriores (B.2, 3) podemos formar la cantidad escalar siguiente

$$\frac{1}{\sqrt{g^*}} \hat{n} \cdot \mathbf{g}_k^* d\Sigma = \frac{\hat{n}_k}{\sqrt{g^*}} d\Sigma$$

Se comprueba inmediatamente que si  $(i \neq j \neq k)$  este escalar tiene por valor absoluto  $d\theta^i \delta\theta^j$  y ello independientemente de la configuración del cuerpo, luego se ha de cumplir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g^*}} \hat{n} \cdot \mathbf{g}_k^* d\Sigma &= \frac{1}{\sqrt{G^*}} \hat{N} \cdot \mathbf{G}_k^* dS \\ \frac{\hat{n}_k}{\sqrt{g^*}} d\Sigma &= \frac{\hat{N}_k}{\sqrt{G^*}} dS \end{aligned} \right\} \quad (B.4)$$

Las ecuaciones (B.4) definen el cambio de área en forma vectorial o tensorial, pero es importante notar que  $d\Sigma$  no corresponde a la imagen deformada de  $dS$ , sino que es la evaluación del elemento diferencial de área en otra configuración del cuerpo. Para evidenciar este hecho basta evaluar, en la configuración actual, la expresión del vector posición asociado a  $\mathbf{P} + \delta\mathbf{P}$ . Tendremos:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{d}^*$$

y en la configuración inicial pondremos

$$\mathbf{P}(\theta^i + d\theta^i) = \mathbf{P}(\theta^i) + \delta\mathbf{P}(\theta^i) \quad (B.5)$$

Pasemos a evaluar el vector posición del punto material de  $\mathcal{B}$  cuyas coordenadas convectivas son  $\theta^i + d\theta^i$ ,

$$\mathbf{p}(\theta^i + d\theta^i) = \mathbf{P}(\theta^i + d\theta^i) + \mathbf{d}^*(\theta^i + d\theta^i) \quad (B.6)$$

invocando (B.5) y desarrollando el último sumando del segundo miembro de la ecuación anterior en serie de potencias de  $d\theta^i$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\theta^i + d\theta^i) &= \mathbf{P}(\theta^i) + \delta\mathbf{P}(\theta^i) + \mathbf{d}^*(\theta^i) + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \frac{\partial^N \mathbf{d}^*(\theta^i)}{\partial\theta^j \dots \partial\theta^n} d\theta^j \dots d\theta^n \\ &= \mathbf{p}(\theta^i) + \delta\mathbf{p}(\theta^i) + \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \frac{\partial^N \mathbf{d}^*(\theta^i)}{\partial\theta^j \dots \partial\theta^n} d\theta^j \dots d\theta^n \end{aligned} \quad (B.7)$$

sea la primera variación del vector posición en la configuración actual

$$\delta\mathbf{p}(\theta^i) = \delta\mathbf{P}(\theta^i) + \frac{\partial \mathbf{d}^*}{\partial\theta^j}(\theta^i) d\theta^j$$

llevando a (B.7) se deduce

$$\mathbf{p}(\theta^i + d\theta^i) = \mathbf{p}(\theta^i) + \delta\mathbf{p}(\theta^i) + \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \frac{\partial^N \mathbf{d}^*(\theta^i)}{\partial\theta^j \dots \partial\theta^n} d\theta^j \dots d\theta^n \quad (B.8)$$

con lo cual queda probada la no-correspondencia de los elementos de superficie presentados en esta sección.

## B.2. Los tensores de tensiones de Piola-Kirchhoff

La primera tensión de Piola-Kirchhoff se define de forma que nos de la fuerza actuan-

te en un elemento de superficie definido entorno a  $\mathbf{p} \in B$ , pero medida por unidad de área no deformada por (A.5) tendremos:

$$d\mathbf{F}_t = \mathbf{t} \cdot d\Sigma = T^{ij} \hat{n}_i \mathbf{g}_j^* d\Sigma$$

y recurriendo a (B.4.2), se obtiene

$$d\mathbf{F}_t = \sqrt{\frac{g^*}{G^*}} T^{ij} \hat{N}_i \mathbf{g}_j^* dS \quad (\text{B.9})$$

Podremos entonces definir el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, en nuestro sistema de coordenadas convectivas, de forma que

$$d\mathbf{F}_t = \mathbf{t}_0 \cdot dS = T_0^{ij} \hat{N}_i \mathbf{g}_j^* dS \quad (\text{B.10})$$

luego la relación entre el primer tensor de Piola-Kirchhoff y el de Cauchy será:

$$T_0^{ij} = \sqrt{\frac{g^*}{G^*}} T^{ij} \quad (\text{B.11})$$

Nótese que ambos proporcionan la fuerza elemental real, actuando en un diferencial de superficie definido en  $\mathbf{p} \in B$ , pero quedan referidos a distintas medidas de esta superficie elemental. El primer índice del tensor  $T_0^{ij}$  define la componente del vector normal a la superficie en la configuración de referencia, mientras que el segundo índice nos indica la componente del primer vector de tensiones de Piola-Kirchhoff en el triedro local actual. Además, de estas definiciones pueden deducirse las ecuaciones siguientes, basadas en (B.11), (A.10) y (A.17):

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{G^*} T_0^{ij} &= \sqrt{g^*} T^{ij} \\ \frac{1}{\rho_0^*} T_0^{ij} &= \frac{1}{\rho^*} T^{ij} \\ \mathbf{T}^i &= \sqrt{g^*} T^{ij} \mathbf{g}_j^* \\ &= \sqrt{G^*} T_0^{ij} \mathbf{g}_j^* \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.12})$$

El segundo vector de tensiones de Piola-Kirchhoff, o pseudo-vector de tensiones, se define en cada punto  $\mathbf{P} \in B$  por la ecuación

$$\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{T}^{ij} \hat{N}_i \mathbf{G}_j^* \quad , \quad \tilde{T}^{ij} = T_0^{ij} \quad (\text{B.13})$$

El definir el correspondiente segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff de forma diferenciada frente al primero, cuando sus componentes son iguales, pretende distinguir el sistema vectorial local de referencia del vector tensión asociado. De esta forma el tensor de tensiones de Cauchy proporciona la tensión real actuante en cada punto  $\mathbf{p} \in B$ , medida por unidad de área en la configuración actual, y el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff proporciona la pseudo-tensión existente en cada punto  $\mathbf{P} \in B$ , medida por unidad de área de esta configuración, tal que sus componentes se identifiquen con las del primer tensor (que sí proporciona la tensión real actuante).

La pseudo-fuerza podrá relacionarse con la fuerza elemental real como sigue:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_t \cdot \mathbf{g}^{*j} &= T^{ij} \hat{n}_i d\Sigma \\ &= \tilde{T}^{ij} \hat{N}_i dS = d\tilde{\mathbf{F}}_t \cdot \mathbf{G}^{*j} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

con

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathbf{F}}_t &= \tilde{T}^{ij} \hat{N}_i \mathbf{G}_j^* dS \\ &= \tilde{\mathbf{t}} dS \end{aligned}$$

Vemos pues que las relaciones que definen las pseudo-tensiones y pseudo-fuerzas en función del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff son análogas a las que existen entre vector de tensión y fuerza elemental y el tensor de tensiones de Cauchy. Varían los vectores locales de referencia y el elemento de área siendo en el primer caso los valores asociados a la configuración inicial, y en el segundo (valores reales) los correspondientes a la configuración actual, o deformada. La tabla B.1 intenta resumir todos estos conceptos.

Tabla B.1

	<i>Configuración actual</i>	<i>Configuración inicial</i>
vector posición	$\mathbf{p}(\theta^l)$	$\mathbf{P}(\theta^l)$
área elemental	$d\Sigma$	$dS$
vector normal	$\hat{\mathbf{n}} d\Sigma$ $\hat{\mathbf{n}} = \hat{n}^i \mathbf{g}_i^*$	$\hat{\mathbf{N}} dS$ $\hat{\mathbf{N}} = \hat{N}^i \mathbf{G}_i^*$
tensiones reales:	$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{F}_t}{d\Sigma}$ $= T^{ij} \hat{n}_i \mathbf{g}_j^*$	pseudo-tensiones: $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{d\tilde{\mathbf{F}}_t}{dS}$ $= \tilde{T}^{ij} \hat{N}_i \mathbf{G}_j^*$
Relación entre:	tensor de tensiones de Cauchy	y pseudo-tensiones de Piola-Kirchhoff
	$T^{ij} = \sqrt{\frac{g^*}{G^*}} \tilde{T}^{ij}$	

### B.3. Expresiones en un sistema cartesiano

En este apartado efectuaremos una transformación de los tensores anteriores, definidas en coordenadas convectivas  $\theta^i$ , para expresarlos según unos ejes Cartesianos fijos con vectores unitarios  $\mathbf{i}_k$ .

Sean  $X^i$  las coordenadas Cartesianas del vector posición  $\mathbf{P}$  de un punto de la configuración inicial de  $B$ . Estas coordenadas estarán relacionadas con el sistema convectivo mediante ecuaciones del tipo

$$X^i = X^i(\theta^k) \quad (\text{B.15})$$

Recurriendo a la matriz Jacobiana de esta transformación podremos escribir

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= X^m \mathbf{i}_m \\ \mathbf{G}_i^* &= \frac{\partial X^m}{\partial \theta^i} \cdot \mathbf{i}_m \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.16})$$

Análogamente, sean  $x^l$  las coordenadas Cartesianas del vector posición  $\mathbf{p}$  de un punto de la configuración deformada de  $\mathcal{B}$ . Podremos escribir las siguientes ecuaciones de transformación de coordenadas

$$\left. \begin{aligned} x^l &= x^l(\theta^k) \\ \mathbf{p} &= x^n \cdot \mathbf{i}_n \\ \mathbf{g}_j^* &= \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \cdot \mathbf{i}_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.17})$$

El gradiente de deformación, según se definió en (2.3), será la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas desde la configuración inicial a la deformada. Esto es:

$$\left. \begin{aligned} x^l &= x^l(X^k) \\ z_{\ k}^{*l} &= \frac{\partial x^l}{\partial X^k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{2.1-b y 2.3})$$

Mediante las reglas de transformación de tensores, podemos expresar este mismo gradiente de la deformación en función de las coordenadas convectivas en la forma siguiente:

$$z_{\ s}^{*r}(\theta^l) = \frac{\partial X^k}{\partial \theta^s} \cdot \frac{\partial \theta^r}{\partial X^l} z_{\ k}^{*l} \quad (\text{B.18})$$

En (2.3) se explicitó las propiedades de este sistema  $z_{\ s}^{*r}$ . A partir de las ecuaciones de transformación (B.17) podremos expresar el tensor de tensiones de Cauchy en coordenadas Cartesianas:

$$\mathbb{T}^{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial \theta^s} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^r} T^{rs} \quad (\text{B.19})$$

y evaluando fuerzas elementales obtendremos

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_t &= \mathbf{t} \, d\Sigma \\ &= T^{rs} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g}_r^*) \mathbf{g}_s^* \, d\Sigma \end{aligned}$$

luego por (B.17-b) y (B.19)

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_t &= T^{rs} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \theta^r} \cdot \mathbf{i}_l) \frac{\partial x^j}{\partial \theta^s} \cdot \mathbf{i}_j \, d\Sigma \\ &= \bar{T}^{ij} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{i}_i) \mathbf{i}_j \, d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

El primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, al tener su primer índice referido a la configuración inicial y el segundo a la actual (o deformada), se transformará en coordenadas Cartesianas de forma mixta, como

$$\bar{T}_{\theta}^{ij} = \frac{\partial X^l}{\partial \theta^r} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^s} T_0^{rs} \quad (\text{B.21})$$

y por unos cálculos análogos a los anteriores

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_t &= \mathbf{t}_0 \, dS \\ &= T_0^{rs} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{G}_r^*) \mathbf{g}_s^* \, dS \\ &= \bar{T}_0^{ij} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_i \, dS \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

La ecuación (B.21) confirma que, aunque  $T_0^{rs}$  sea un tensor simétrico,  $\bar{T}_0^{ij}$  en general no lo será. Pasemos a estudiar a continuación el segundo tensor de Piola-Kirchhoff. Su expresión en coordenadas Cartesianas será

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{\partial X^i}{\partial \theta^r} \frac{\partial X^j}{\partial \theta^s} \tilde{T}^{rs} \quad (\text{B.23})$$

y la evaluación de la fuerza ficticia actuante sobre  $dS$  conducirá a

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathbf{F}}_t &= \tilde{\mathbf{t}} \cdot dS \\ &= \tilde{T}^{rs} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{G}_r^*) \mathbf{G}_s^* \, dS \\ &= \tilde{T}^{ij} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_i \, dS \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Eliminemos ahora, entre las ecuaciones (B.21) y (B.12) el tensor  $T_0^{rs}$ , correspondiente a la primera tensión de Piola-Kirchhoff en el sistema convectivo. Obtendremos:

$$\bar{T}_0^{ij} = \frac{\partial X^i}{\partial \theta^r} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^s} \cdot \sqrt{\frac{g^*}{G^*}} T^{rs}$$

y por (B.19), resulta finalmente

$$\bar{T}_0^{ij} = \sqrt{\frac{g^*}{G^*}} \cdot \frac{\partial X^i}{\partial x^m} \bar{T}^{mj} \quad (\text{B.25-a})$$

Una actuación similar a partir de las ecuaciones (B.21) y (B.23) nos dará

$$\bar{T}_0^{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial X^n} \tilde{T}^{in} \quad (\text{B.25-b})$$

Invocando finalmente la ecuación (2.3), de definición del gradiente de deformación, podemos escribir las relaciones entre los dos tensores de tensiones de Piola-Kirchhoff y el de Cauchy, todos ellos referidos a coordenadas Cartesianas  $X^i$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}^{ij} &= \sqrt{\frac{G^*}{g^*}} \bar{z}_i^r \bar{T}_0^{rj} \\ \bar{T}^{ij} &= \sqrt{\frac{G^*}{g^*}} \bar{z}_i^r \tilde{T}^{rs} \bar{z}_s^j \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.26})$$

Estas ecuaciones son equivalentes a (B.11) y (B.13), pero resultan de estructura más compleja que sus correspondientes expresiones en el sistema de coordenadas convectivas.

#### B.4. Ecuaciones de equilibrio en configuración inicial

Las ecuaciones de equilibrio obtenidas en el anexo anterior pueden darse tanto en tensiones de Cauchy como en tensiones de Piola-Kirchhoff. Expresadas en forma vectorial a partir de  $\mathbf{T}^i$  y  $\mathbf{b}$ , se deberán verificar en cada punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ , pero esta configuración de equilibrio correspondiente al sistema de fuerza  $\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_t$  actuante no será conocida a priori y convendrá reexpresar estas ecuaciones con cantidades referidas a la configuración inicial. Volviendo a las ecuaciones (A.17, 23)

$$\begin{cases} \mathbf{T}^i_{,i} + \sqrt{g^*} \cdot \rho^* \mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{g}_i^* \times \mathbf{T}^i = 0 \end{cases}$$

Estas pueden darse en componentes locales, resultando

$$\begin{cases} (\sqrt{g^*} T^{ij})_{,i} + \sqrt{g^*} \rho^* b^j = 0 \\ T^{ij} = T^{ji} \end{cases} \quad (B.27)$$

donde el símbolo  $(:)$  denota la derivación covariante respecto a la métrica  $g_{ij}^*$ . En función del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, el sistema anterior se convierte en

$$\begin{cases} (\sqrt{G^*} T_0^{ij})_{,i} + \sqrt{G^*} \rho_0^* b^j = 0 \\ T_0^{ij} = T_0^{ji} \end{cases} \quad (B.28)$$

Si recurrimos ahora al segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, se llega a

$$\begin{cases} (\sqrt{G^*} z_i^j \tilde{T}^{is})_{,i} + \sqrt{G^*} \rho_0^* \tilde{b}^j = 0 \\ \tilde{T}^{ij} = \tilde{T}^{ji} \end{cases} \quad (B.29)$$

El símbolo  $(:)$  representa la derivación covariante respecto a la métrica  $G_{ij}^*$ ;  $\tilde{b}^j$  serán las componentes del vector  $\mathbf{b}$  en el sistema local,

$$\tilde{b}^j = \mathbf{b} \cdot \mathbf{G}^{*j}$$

Las ecuaciones (B.29) corresponden a las ecuaciones del movimiento en configuración inicial.

#### ANEXO C. ELASTICIDAD VERSUS HIPERELASTICIDAD

Las ecuaciones del movimiento de Cauchy, y las ecuaciones de equilibrio que se derivan, proporcionan un conjunto de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en función de las componentes del tensor de tensiones. Sin embargo estas tres ecuaciones no son suficientes para determinar completamente los seis términos independientes de dicho tensor de tensiones, y deben imponerse unas nuevas ecuaciones características del comportamiento del material que constituye el cuerpo. Dichas ecuaciones se denominan *ecuaciones constitutivas*, describen el comportamiento macroscópico del cuerpo resultante de la constitución interna de su material.

En los apartados siguientes trataremos únicamente de los materiales elásticos e hiperelásticos, para ello desarrollaremos las diferentes ecuaciones que caracterizan a dichos materiales, así como las relaciones existentes entre ambos.

### C.1. Materiales elásticos

La definición elemental de material elástico surge de imponer que las tensiones en tales materiales sólo dependen del estado de deformación actual y no de su historia de deformaciones.

Matemáticamente esta definición vendrá descrita por un conjunto de nueve ecuaciones que nos relacionarán las componentes de uno cualquiera de los tres tensores de tensiones anteriormente presentados, con uno cualquiera de los tensores de deformación que describen el estado actual de deformación del cuerpo, por ejemplo:

$$\tilde{T}^{ij} = \zeta^{ij} (e_{k\ell}^*) \quad (C.1)$$

Dentro de los materiales elásticos merece especial atención el material elástico lineal, también denominado Hookiano. Este se obtiene de imponer, además, la condición de que las tensiones se puedan definir como combinación lineal de las deformaciones. Para este material, las ecuaciones constitutivas elásticas lineales, frecuentemente denominadas leyes de Hooke generalizadas, son nueve ecuaciones lineales expresando las componentes del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff como función (lineal) homogénea de las componentes del tensor de deformación de Lagrange. De esta manera tanto la tensión en un punto como la deformación quedan referidas a la misma métrica (la de la configuración inicial). Estas ecuaciones serán pues de la forma:

$$\tilde{T}^{ij} = E^{ijkl} e_{k\ell}^* \quad (C.2)$$

El sistema  $E^{ijkl}$  es un conjunto de 81 constantes en la configuración de referencia, de las cuales sólo 36 son independientes puesto que tanto el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff como el tensor de deformación de Lagrange son sistemas simétricos.

### C.2. Material hiperelástico

La definición de material hiperelástico proviene de la noción de reversibilidad de las deformaciones y de la independencia de la historia de deformación.

A partir de consideraciones termodinámicas, Green definió un material hiperelástico como aquél para el cual existiera una función escalar de energía de deformación  $W_m^*$ , tal que su gradiente respecto a las deformaciones proporciona las tensiones en el modelo exclusivamente mecánico. En forma matemática esto es:

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{1}{2} \rho_0^* \left[ \frac{\partial W_m^*}{\partial e_{ij}^*} + \frac{\partial W_m^*}{\partial e_{ji}^*} \right] \quad (C.3)$$

donde  $W_m^*$  es la función de densidad de energía de deformación, definida por unidad de masa. En lo sucesivo la derivación se supondrá simetrizada respecto a  $e_{ij}^*$  y escribiremos directamente

$$\tilde{T}^{ij} = \rho_0^* \frac{\partial W_m^*}{\partial e_{ij}^*} \quad (C.4)$$

La ecuación de continuidad y la relación entre tensiones de Cauchy, y de Piola-Kirchhoff nos permite escribir, en coordenadas convectivas:

$$T^{ij} = \rho^* \frac{\partial W_m^*}{\partial e_{ij}^*} \quad (C.5)$$

y la energía de deformación total del cuerpo se expresará mediante

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0} \rho_0^* W_m^* dV_0 \\ &= \int_V \rho^* W_m^* dV \end{aligned} \quad (C.6)$$

Una formulación alternativa de las ecuaciones anteriores puede obtenerse introduciendo el concepto de densidad de energía complementaria de deformación por unidad de masa, que no es más que la transformación de Legendre de la densidad de energía de deformación. La densidad de energía complementaria será pues

$$\rho_0^* U_m^* = \tilde{T}^{ij} e_{ij}^* - \rho_0^* W_m^* \quad (C.7)$$

definida de esta forma, será una función de las tensiones y se comprueba fácilmente que su gradiente proporciona las deformaciones. En efecto, recordando (C.4) se obtiene

$$\rho_0^* \frac{\partial U_m^*}{\partial \tilde{T}^{ij}} = e_{ij}^* + \tilde{T}^{k\ell} \frac{\partial e_{k\ell}^*}{\partial \tilde{T}^{ij}} - \rho_0^* \frac{\partial W_m^*}{\partial e_{k\ell}^*} \cdot \frac{\partial e_{k\ell}^*}{\partial \tilde{T}^{ij}} = e_{ij}^* \quad (C.8)$$

esto es

$$e_{ij}^* = \rho_0^* \frac{\partial U_m^*}{\partial \tilde{T}^{ij}} \quad (C.9)$$

### C.3. Relación entre elasticidad e hiperelasticidad

Veamos cómo pueden relacionarse los dos modelos de comportamiento presentados anteriormente. Si admitimos que la densidad de energía de deformación es una función analítica de las deformaciones,  $W_m^*$  podrá desarrollarse en serie de polinomios homogéneos de sus argumentos  $e_{ij}^*$ , luego

$$W_m^* = \hat{W} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} H^{ij\dots mn} e_{ij}^* \dots e_{mn}^* \quad (C.10)$$

donde  $\hat{W}$  es una constante arbitraria y los coeficientes  $H^{ij}$ ,  $H^{ijk\ell}$ , ...,  $H^{ij\dots mn}$  se denominan hiperelasticidades de orden 0, 1, ..., N respectivamente. Recordando ahora (C.5), el segundo tensor de Piola-Kirchhoff se podrá expresar como

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{ij} &= \rho_0^* \left\{ \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} H^{ij\dots mn} e_{ij}^* \dots e_{mn}^* \right\}_{,e_{ij}^*} \\ &= \rho_0^* \left\{ H^{ij} + \sum_{N=1}^{\infty} H^{ijk\ell\dots ts} e_{k\ell}^* \dots e_{ts}^* \right\} \end{aligned} \quad (C.11)$$

La condición de que un material elástico sea también hiperelástico será, según (C.1) y (C.11):

$$\zeta^{ij}(e_{k\ell}^*) = \rho_0^* \frac{\partial W_m^*}{\partial e_{ij}^*} \quad (C.12)$$

y desarrollando analíticamente las funciones  $\zeta^{ij}$ , la condición de integrabilidad de (C.12) será sencillamente

$$E^{ij\dots mn} = \rho_0^* H^{ij\dots mn} \quad (C.13)$$

donde

$$\zeta^{ij}(e_{k\ell}^*) = E^{ij} + \sum_{N=1}^{\infty} E^{ijk\ell\dots rs} e_{k\ell}^* \dots e_{rs}^* \quad (C.14)$$

pero por suponer que la densidad de energía de deformación es una función analítica del tensor de deformación de Lagrange, deberá cumplirse el teorema de Schwatz, induciendo la simetría de las hiperelasticidades respecto a los sucesivos pares de índices. Consecuentemente será necesario, para que un material elástico sea hiperelástico, que las elasticidades  $E^{ij\dots rs}$  también sean simétricas en los pares de índices, esto es:

$$E^{ijk\ell} = E^{k\ell ij} \dots$$

Supondremos en lo sucesivo que la configuración inicial está libre de tensiones y deformaciones. En este caso la definición de un material hiperelástico de primer orden será, según (C.11)

$$\tilde{T}^{ij} = \rho_0^* H^{ijk\ell} e_{k\ell}^* \quad (C.15)$$

y un material Hookiano hiperelástico tendrá por ecuación característica:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}^{ij} &= E^{ijk\ell} e_{k\ell}^* \\ E^{ijk\ell} &= p_0^* H^{ijk\ell} \end{aligned} \right\} \quad (C.16)$$

quedando definido por 21 constantes independientes por la simetría respecto a los pares de índices que exige la hiperelasticidad. Para este tipo de material, prescindiendo de la constante  $\dot{W}$ , la densidad de energía de deformación por unidad de masa vendrá dada por

$$W_m^* = \frac{1}{2} e_{ij}^* H^{ijk\ell} e_{k\ell}^*$$

luego la densidad de deformación por unidad de volumen en configuración inicial será, por (C.16)

$$W_0^* = \frac{1}{2} e_{ij}^* E^{ijk\ell} e_{k\ell}^* \quad (C.17)$$

Es también interesante notar que, para el material Hookiano (hiperelástico) la densidad de energía complementaria viene dada por

$$U_m^* = \frac{1}{\rho_0^*} \tilde{T}^{ij} e_{ij}^* - W_m^* = \frac{1}{2} e_{ij}^* H^{ijk\ell} e_{k\ell}^* \quad (C.18)$$

Definiendo la transformación inversa a (C.16) en la forma

$$F_{ijk\ell} \tilde{T}^{ij} = e_{k\ell}^* \quad , \quad [F] = [E]^{-1} \quad (C.19)$$

podremos poner

$$\rho_0^* U_m^* = \frac{1}{2} \tilde{T}^{ij} F_{ijk\ell} \tilde{T}^{k\ell} \quad (C.20)$$

De lo anterior se deduce que:

- (1) La densidad de energía de deformación de un material Hookiano (hiperelástico) es una función cuadrática de las deformaciones de Lagrange.
- (2) La densidad de energía complementaria es una función cuadrática del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, y
- (3) Ambas son, en este caso, numéricamente iguales.

#### C.4. Material Hookiano isótropo

Es un material hiperelástico de primer orden cuyas ecuaciones constitutivas se mantienen invariantes frente a las transformaciones isométricas (rotaciones y simetrías). En este caso las hiperelasticidades pueden expresarse en función de dos únicos escalares,  $E$  y  $\nu$ , conocidos respectivamente como módulo de Young y coeficiente de Poisson. Definiendo los conocidos coeficientes de Lamé

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{array} \right.$$

tendremos entonces

$$E^{ijk\ell} = G (G^{*ij} G^{*j\ell} + G^{*i\ell} G^{*jk}) + \lambda G^{*ij} G^{*k\ell} \quad (C.21)$$

y

$$F_{ijk\ell} = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) G_{ik}^* G_{j\ell}^* - \nu G_{ij}^* G_{k\ell}^* \} \quad (C.22)$$

Estas dos ecuaciones permitirán definir las formas cuadráticas características de la densidad de energía de deformación y energía complementaria respectivamente, ambas referidas a la unidad de volumen inicial.

#### ANEXO D. TEOREMAS INTEGRALES

Sea  $\mathbf{u} (\theta^1)$  un campo vectorial definido en cada punto de la región conexa del espacio tridimensional Euclideo denominada  $V$ , y de contorno  $\partial V$ . Supondremos que este contorno tiene las adecuadas condiciones de continuidad, de tal forma que pueda definirse en todo punto de  $\partial V$  un vector unitario normal  $\hat{\mathbf{n}}$ , de orientación exterior respecto al dominio  $V$ .

Supondremos además que  $\mathbf{u} \in C^1(V)$  y que es integrable sobre  $\partial V$ , entonces el teorema de Gauss, conocido como teorema de la divergencia, nos dice que

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Sigma \quad (\text{D.1})$$

y en notación tensorial:

$$\int_V u^i{}_{;i} \, dV = \int_{\partial V} u^i \hat{n}_i \, d\Sigma \quad (\text{D.2})$$

donde  $(:)$  indica la derivación covariante respecto a la métrica  $g_{ij}^*$ . Vamos a interesarnos en la forma explícita del primer miembro de esta última ecuación, y para ello estudiaremos primeramente la expresión desarrollada de la derivada parcial de  $\sqrt{g^*}$ .

$$\sqrt{g^*} = g_1^* \cdot (g_2^* \times g_3^*)$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta^i} \sqrt{g^*} &= \Gamma_{11}^k g_k^* \cdot (g_2^* \times g_3^*) + g_1^* \cdot (\Gamma_{21}^k g_k^* \times g_3^*) + g_1^* \cdot (g_2^* \times \Gamma_{31}^k g_k^*) \\ &= \Gamma_{\ell 1}^\ell \sqrt{g^*}, \text{ sumado en } \ell. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g^*}} (\sqrt{g^*} u^i)_{;i} &= \Gamma_{\ell 1}^\ell u^i + u^i{}_{;i} \\ &= u^i{}_{;i} + \Gamma_{ik}^i u^k \equiv u^i{}_{;i} \end{aligned}$$

Llevando a (D.2) se deduce finalmente:

$$\int_V u^i{}_{;i} \, dV = \int_V \frac{1}{\sqrt{g^*}} (\sqrt{g^*} u^i)_{;i} \, dV = \int_{\partial V} u^i \hat{n}_i \, d\Sigma \quad (\text{D.3})$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Théorie des corps déformables. E & F. Cosserat. Hermann, éditeurs (1909).
- [2] General theory of a Cosserat surface. A.E. Green & P.M. Naghdi. Arch. Rational Mech., **20** (1965).
- [3] The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. E. Reissner. J. Appl. Mechanics, **12** (1945).  
Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. R.D. Mindlin. J. Appl. Mechanics, **18** (1951).
- [4] Cinemática de láminas. S. Monleón, J.F. Moyá & P. Fuster. AEM 84, 1, ETSICCPV (1984).  
Aspects of variational arguments in the theory of elasticity: fact and folklore. D.G.B. Edelen. J. Solids & Structures, **17** (1981).  
On conservation laws of continuum mechanics. A.G. Hermann. J. Solids & Structures, **17** (1981).  
Formes différentielles. H. Cartan. Hermann, éditeurs (1967).  
Applications of tensor analysis. A.J. Mc Connell. Dover publications (1957).  
Introduction to the mechanics of a continuous medium. L.E. Malvern. Prentice-Hall, Inc. (1969).  
The non-linear field theories of Mechanics. C. Truesdell & W. Noll. Springer-Verlag (1965).  
Thin-shell structures. Y.C. Fung & E.E. Sechler (editors). Prentice-Hall, Inc. (1974).  
Introduction to the theory of thin shells. H. Møllmann. John Wiley & sons (1981).  
Theory of thin elastic shells. M. Dikmen. Pitman Books Ltd. (1982).  
Theory of shell structures. C.R. Calladine. Cambridge U. Press (1983).  
Energy methods in applied mechanics. H.L. Langhaar. John Wiley & sons (1962).



**JORNADAS  
sobre  
TECNICAS  
DEL  
HORMIGON  
ARMADO  
Y  
PRETENSADO  
EN  
CENTRALES  
NUCLEARES**

**EDITADO POR:**



**asociación técnica  
española del pretensado**

**Precio del ejemplar: 3.000 ptas.**

## Comportamiento de barras corrugadas de aceros de armar a bajas temperaturas

H. Corres, J. Planas, M. Elices, M. Buttice y R. Chueca\*  
Departamento de Física y Física de Materiales.  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid.

\*Auxini, S.A. y Dragados y Construcciones, S.A.

### 1. INTRODUCCION

Los datos experimentales disponibles relativos al comportamiento del acero de armar a bajas temperaturas son escasos y dispersos. (Elices, M., Sleigh, G., 1978, Whitely J.D. et al, 1981, Galland J.C. et al. 1981, Elices M. et al 1982, Lessel G, Bernard A. 1983). En particular, respecto a las barras corrugadas casi no existen resultados y esto puede ser debido a la enorme dificultad que comporta la realización de este tipo de ensayos.

A pesar de la escasa información disponible, existe una idea muy extendida sobre la falta de idoneidad del acero de armar para usos criogénicos. Esta idea proviene de algunos resultados que muestran una gran sensibilidad a las entallas de este tipo de aceros a bajas temperaturas. Algunos autores recomiendan la sustitución del acero de armar por acero de pretensado en el proyecto de estructuras criogénicas de hormigón armado, por ejemplo, A.S. Bruggeling en la referencia citada.

Esta situación ha inducido a algunos fabricantes del acero a producir aceros especiales, en general de grano muy fino, que les confiere una gran ductilidad a bajas temperaturas. Además de los aceros ferríticos de grano fino, también se han desarrollado aceros austeníticos y austenítico-ferríticos, cuyas propiedades se han descrito en la monografía de la FIP, citada en las referencias. Estos aceros, con muy buenas propiedades a temperaturas criogénicas, son muy caros y no siempre absolutamente necesarios.

El problema del acero de armar para uso criogénico se complica aún más si se tiene en cuenta que no existen especificaciones concretas que definan las características que deben cumplir estos materiales a bajas temperaturas.

Esta problemática ha motivado la iniciación de un programa de investigación en el Departamento de Física y Física de Materiales de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid para conocer el comportamiento y las propiedades de los aceros de armar a bajas temperaturas. El trabajo que se describe corresponde a una investigación realizada por encargo de AUXINI, S.A. y DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A., destinada a estudiar las propiedades de dos aceros nacionales: uno dureza natural tipo AEH-400N y otro endurecido en frío AEH-400F. En ambos casos se han utilizado barras de 16 mm de diámetro.

Los objetivos de la investigación fueron:

1. Estudio del comportamiento de barras corrugadas de acero de armar a bajas temperaturas.

Para este objetivo se han realizado ensayos de tracción simple a  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ , con probetas obtenidas de las barras suministradas.

2. Estudio de la influencia de la corruga sobre el comportamiento de los aceros estudiados, a bajas temperaturas.

La corruga constituye una singularidad geométrica que puede ser una fuente de concentración de tensiones y, por lo tanto, el origen de roturas frágiles.

A estos efectos se han realizado ensayos de tracción simple con probetas rectificadas, en las que se eliminaba la corruga.

3. Estudio de la influencia de defectos superficiales sobre el comportamiento de los aceros estudiados a temperatura de GNL ( $-165^{\circ}\text{C}$ ).

En este sentido se ha intentado valorar el efecto de aquellos defectos superficiales que pudiesen producirse durante el proceso de fabricación de las barras o durante el proceso de preparación, transporte y colocación en obra de la ferralla.

Para este estudio se han realizado ensayos de tracción simple con probetas con defectos.

En este trabajo se presentan algunos de los resultados experimentales obtenidos y las conclusiones generales que se deducen de la investigación realizada.

## 2. MATERIALES

Los resultados que se presentan corresponden a dos tipos diferentes de aceros. Se ha utilizado un acero dureza natural y otro endurecido en frío. De esta forma se han podido comparar los resultados correspondientes a los dos tipos de aceros utilizados para la fabricación de barras corrugadas.

Todos los ensayos se han realizado con acero de calidad 400 MPa (AEH-400N y AEH-400F) y barras de 16 mm de diámetro.

En cuanto a la calidad, ésta se ha elegido debido a que resulta la más frecuentemente utilizada y a la tendencia general a disminuir el uso de los aceros de armar de mejor calidad.

En cuanto al diámetro, han existido distintas razones para su elección. En primer término, habría resultado imposible estudiar todos los diámetros y por lo tanto se pensó en un diámetro intermedio y de uso frecuente como el diámetro 16 mm. Por otra parte, para diámetros mayores, y debido al aumento de resistencia de los aceros con la disminución de la temperatura, pueden necesitarse máquinas de tracción de gran capacidad que dificulta aún más este tipo de ensayos.

Finalmente, las características mecánicas de los aceros utilizados se resumen en la Tabla 1.

**TABLA I**  
Características mecánicas de los aceros utilizados

Acero	$\sigma_{ys}$ $\sigma_{0,1}$ (MPa)	$\sigma_{yi}$ $\sigma_{0,2}$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	$\epsilon_u$ (%)	$\rho$ (%)
AEH-400-N	443	441	624	13,72	62,45
AEH-400-F	429	464	560	7,60	61,60

### 3. PROBETAS

En todos los ensayos realizados, las probetas utilizadas eran de 65 cm de longitud. Los distintos tipos de probeta se obtuvieron de barras de 16 mm de diámetro.

Para los ensayos de caracterización se utilizaron probetas obtenidas directamente de las barras suministradas.

Para el estudio de la influencia de la corruga, se utilizaron probetas en las que se había rectificado a 14,5 mm de diámetro los 250 mm centrales.

Finalmente, para el estudio de la influencia de defectos superficiales, se han utilizado probetas previamente entalladas.

En principio, resulta extremadamente difícil saber cuál puede ser la tipología y geometría de los defectos superficiales que puedan producirse durante el proceso de fabricación de las barras o durante el proceso de preparación, transporte y puesta en obra de la ferralla.

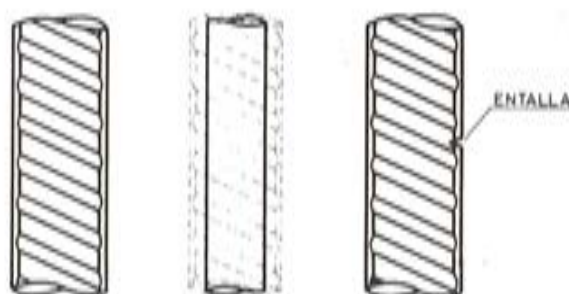


Fig. 1. Distintos tipos de probetas: corrugadas, rectificadas y entalladas.

En este estudio se han utilizado probetas indentadas mediante cuña metálica. En todas las probetas la entalla se realizó en una de las corrugas longitudinales.

Las entallas utilizadas pueden representar aquellos defectos que muestran las barras debido a golpes. Este tipo de defectos se produce sin pérdida de material tal como sucede con las entallas realizadas por indentación.

Para poder caracterizar las entallas durante el proceso de indentación se registraba la carga de indentación, la penetración del indentador y la energía suministrada a la probeta.

#### 4. EQUIPOS EXPERIMENTALES

Los ensayos se han realizado con una máquina servohidráulica INSTRON de 50 kN de capacidad, a una velocidad de deformación constante de  $10^{-3} \text{ seg}^{-1}$ .

Las cargas se han medido con una célula de carga de 250 kN con una precisión de 0,5%.

Para la medida de deformaciones se ha utilizado un extensómetro con una base de medida de 20 cm, especialmente diseñado para estos ensayos. El extensómetro está dotado de un captador inductivo HBM modelo W20K, para bajas temperaturas (Rango nominal de temperatura:  $-200^{\circ}\text{C}$  a  $+100^{\circ}\text{C}$ ). La precisión en la medida de deformaciones es de  $\pm 0,4\%$  del rango de medida.

Para enfriar la probeta se ha utilizado una cámara ambiental de tres módulos con control independiente en cada uno de ellos. Debido a la longitud de las probetas y para garantizar una adecuada uniformidad de la temperatura el enfriamiento se controla independientemente en los tres módulos. Para el enfriamiento se utilizó nitrógeno líquido controlando el caudal a través de una electroválvula.

Inicialmente se enfría a potencia plena y luego se controla la temperatura manteniéndola igual a la temperatura nominal del ensayo.

Para el control de la temperatura a lo largo de la probeta se disponen de cinco termopares. Dos extremos situados en las mordazas y por lo tanto en los módulos extremos de la cámara. Los restantes en la cámara central, dentro de la base de medida. Los termopares utilizados son tipo J de hierro constantán.

Durante todo el ensayo, las señales correspondientes a los distintos sensores utilizados (temperatura, carga y deformación) se recogen con un sistema de adquisición de datos.

Durante el enfriamiento la temperatura de los termopares de la probeta se recogen cada 20 segundos y se representan utilizando un registrador X,Y en función del tiempo. Este registro permite conocer la historia de temperaturas de la probeta.

Durante el ensayo de tracción se obtienen 250 valores de carga y deformación. Estos datos permiten construir las curvas tensión-deformación que se presentan como resultados en este trabajo.

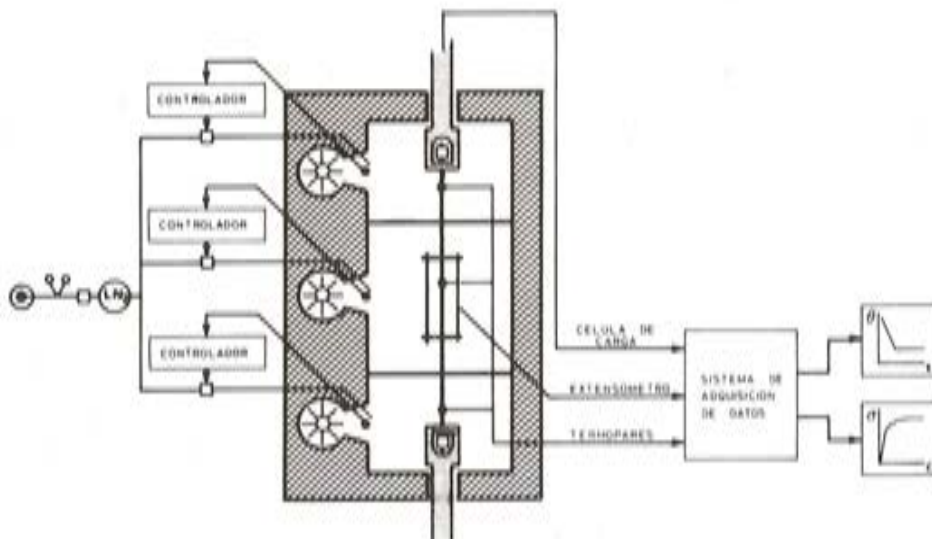


Fig. 2. Esquema general de ensayo.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

### Acero dureza natural tipo AEH-400-N.

#### 5.1. Caracterización de barras corrugadas a bajas temperaturas

En la figura 3 se muestran las curvas tensión-deformación medias, correspondientes a ensayos de tracción simple a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ . Estas curvas se han obtenido a partir de cuatro resultados experimentales para cada temperatura. Las curvas tensión-deformación se han representado en trazo continuo hasta que se alcanza la tensión máxima y con trazo discontinuo para deformaciones mayores. Las diferencias que se observan en el tramo discontinuo son debidas a que la rotura y estricción no siempre se producen dentro de la base de medida.

Tal como se muestra en la figura, los valores de resistencia aumentan notablemente con la disminución de la temperatura. Este aumento es mayor para la tensión máxima ( $\sigma_u$ ) que para el límite elástico ( $\sigma_{ys}$  o  $\sigma_{yl}$ ) y por lo tanto al disminuir la temperatura disminuye asimismo la relación  $\sigma_u/\sigma_y$ , pasando desde 1,4 a temperatura ambiente hasta 1,1 a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

Teniendo en cuenta las dispersiones que son de esperar en la determinación de  $\epsilon_u$  (se trata del comienzo de un proceso inestable), los resultados obtenidos muestran que este parámetro puede considerarse inalterado con la disminución de la temperatura.

Todas las roturas obtenidas son de tipo dúctil, precedidas de un proceso de estricción. En la fotografía 1 se muestran, de derecha a izquierda, roturas de probetas ensayadas a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$  respectivamente.

Estos resultados ponen de manifiesto el buen comportamiento de este tipo de acero para las distintas temperaturas estudiadas.

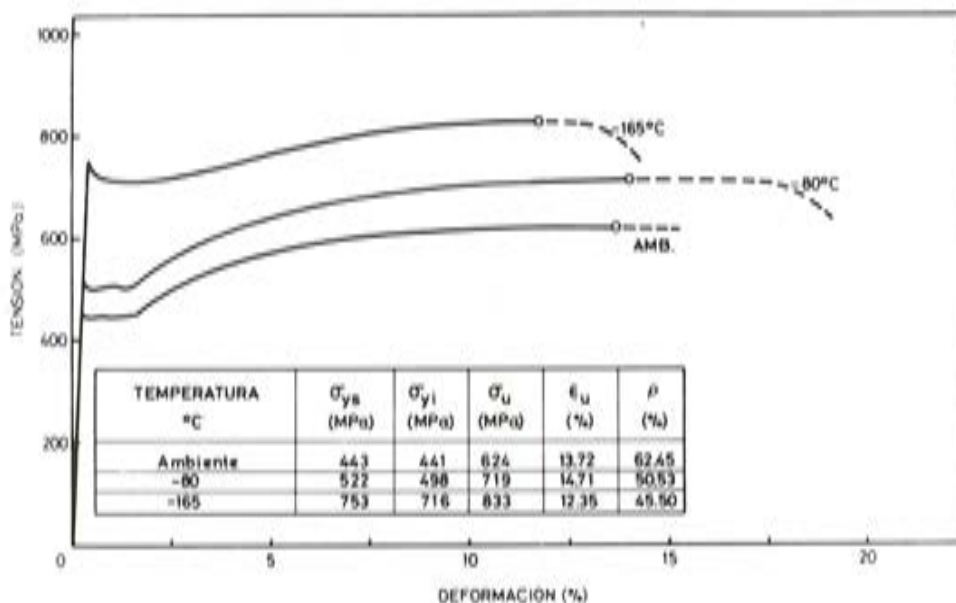


Fig. 3. Curvas tensión-deformación de probetas corrugadas de acero AEH-400N a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .



Fotografía 1. Tipos de rotura de probetas corrugadas de acero AEH-400N a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

### 5.2. Influencia de las corrugas a bajas temperaturas

En la figura 4 se muestran las curvas tensión-deformación medias, correspondientes a probetas rectificadas y corrugadas a  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$  respectivamente.

Como puede verse, las probetas rectificadas muestran un comportamiento muy similar al de las probetas corrugadas y por lo tanto puede pensarse que las corrugas no tienen prácticamente influencia sobre el comportamiento de este material a bajas temperaturas.

Puede llamar la atención que las curvas tensión-deformación correspondientes a las probetas rectificadas están ligeramente por debajo de las de las probetas corrugadas. Este efecto puede ser debido a que en las probetas rectificadas, de sección transversal circular, la distribución de tensiones es más uniforme que en el caso de las probetas corrugadas, de sección transversal más irregular. En ambos casos, los valores presentados se han obtenido dividiendo la carga de la probeta por su área, y por tanto, suponiendo una distribución completamente uniforme de tensiones. En el caso de las probetas corrugadas es muy probable que la distribución de tensiones no sea uniforme, existiendo en la zona de las corrugas, especialmente, tensiones muy inferiores a las del resto de la sección.

En las probetas rectificadas se obtuvieron roturas del mismo tipo que para las probetas corrugadas. En la fotografía 2 se muestran las roturas de una probeta corrugada y rectificada a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

### 5.3. Influencia de defectos superficiales, entallas, a temperatura de GNL

A los efectos de caracterizar la entalla de las distintas probetas se ha tomado el valor de la carga de indentación.

Para tener una idea física de las energías suministradas, al aplicar las distintas cargas de indentación utilizadas, debe pensarse que el efecto producido por una carga de indentación de 2,5 kN equivale a la energía suministrada por un elemento punzante de 100 gr

de peso que se deja caer desde una altura de 0,3 m. En el caso de la carga de indentación de 5,0 kN, el mismo cuerpo debería dejarse caer desde 1 m de altura y desde 3,5 m de altura para el defecto producido por una carga de indentación de 10 kN.

Para la presentación de estos resultados, en la figura 5 se muestra la curva tensión-deformación media correspondiente a las probetas corrugadas ensayadas a  $-165^{\circ}\text{C}$  y, sobre esta curva, se han representado los valores de tensión máxima ( $\sigma_u$ ) y deformación bajo carga máxima ( $\epsilon_u$ ) correspondientes a las probetas entalladas.

Para las entallas producidas por una carga de indentación de 2,5 kN los resultados muestran que el comportamiento de este tipo de aceros no resulta afectado.

Para cargas de indentación mayores, 5 kN por ejemplo, la tensión máxima ( $\sigma_u$ ) disminuye de forma poco significativa mientras que la deformación bajo carga máxima ( $\epsilon_u$ ) se reduce al 50%. Entallas como las producidas por una carga de indentación de 10 kN producen roturas prácticamente sin deformación plástica.

Respecto al tipo de rotura, salvo algunas probetas con entallas producidas por cargas de indentación de 2,5 kN, la rotura siempre se produce en la entalla y sin estricción. En la fotografía 3 se muestran las roturas correspondientes a probetas con entallas de 2,5 kN, 5 kN y 10 kN respectivamente.

Los resultados obtenidos confirman la idea generalizada de la gran sensibilidad a los defectos, de este tipo de aceros, a temperaturas de GNL.

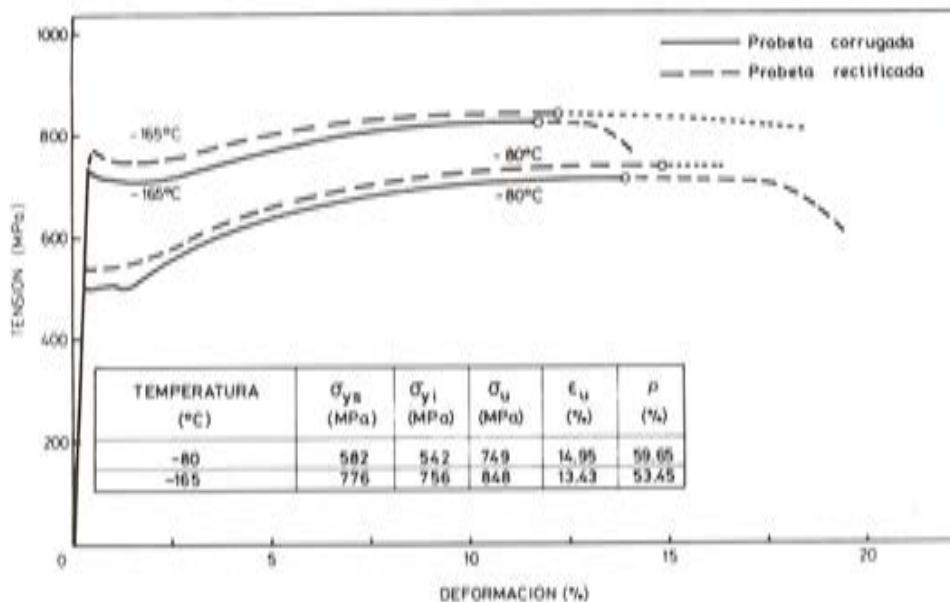
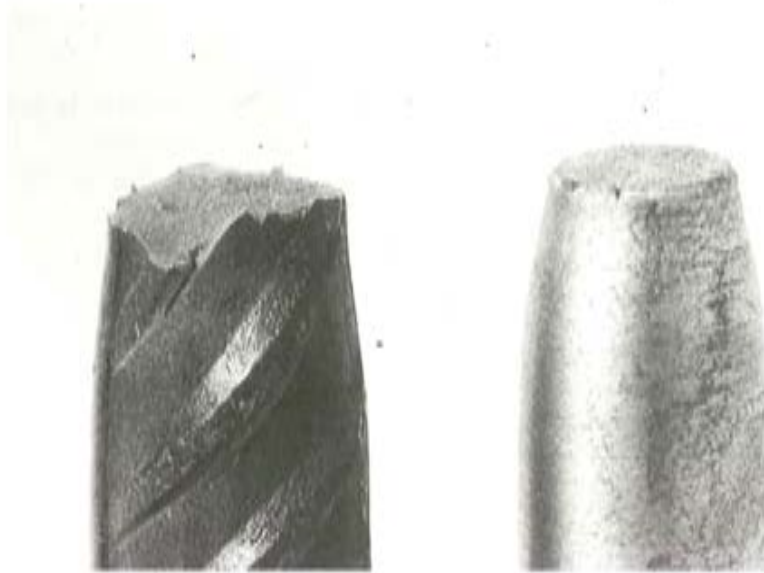


Fig. 4. Curvas tensión-deformación de probetas rectificadas de acero AEH-400N a  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .



Fotografía 2. Tipos de rotura de probetas rectificadas y corrugadas de acero AEH-400N a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

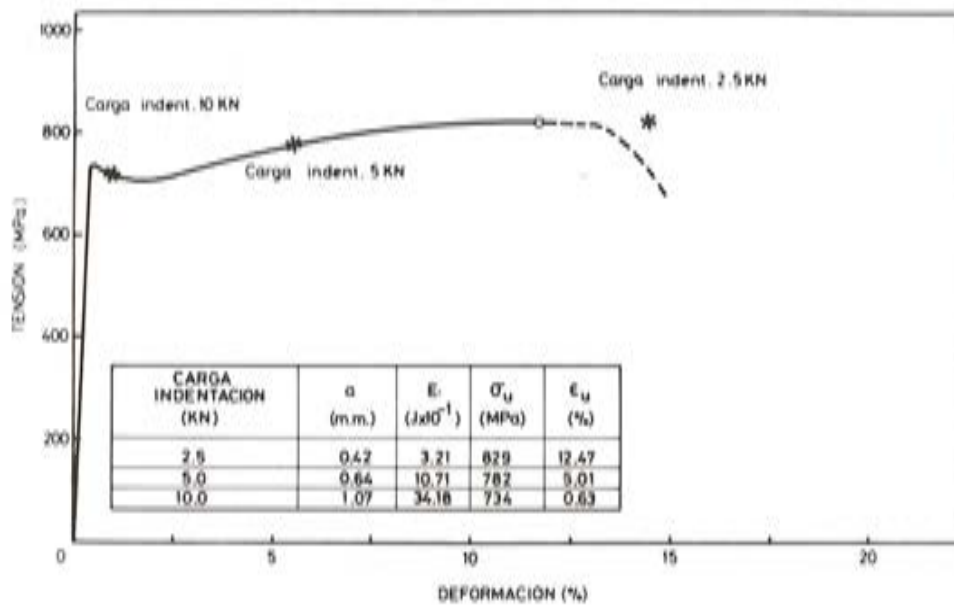


Fig. 5. Comportamiento de probetas entalladas de acero AEH-400N a  $-165^{\circ}\text{C}$ .



Fotografía 3. Tipos de rotura de probetas entalladas de acero AEH-400N a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

### Acero endurecido en frío tipo AEH-400F

#### 5.4. Caracterización de barras corrugadas a bajas temperaturas

En la figura 6 se muestran las curvas tensión-deformación medias correspondientes a ensayos de tracción simple a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

Tal como puede verse, los valores de resistencia aumentan con la disminución de la temperatura mientras que las deformaciones bajo carga máxima disminuyen ligeramente a  $-80^{\circ}\text{C}$  y se presentan roturas sin deformación plástica generalizada a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

A  $-80^{\circ}\text{C}$  el límite elástico aparente con 0,1% ó 0,2% de deformación permanente aumenta aproximadamente un 27%, la tensión máxima un 19% respecto a los valores obtenidos a temperatura ambiente.

En cuanto a la deformación bajo carga máxima, se observa una ligera disminución pero debida a la dispersión que presenta este parámetro podría pensarse que los valores se mantienen más o menos constantes.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  el comportamiento es muy disperso. En general los comportamientos observados son de dos tipos.

En primer lugar, algunas probetas rompen antes de alcanzar el límite elástico. En este caso, las roturas se han producido casi siempre en zonas donde existían defectos superficiales casi imperceptibles, posiblemente producidos durante el proceso de fabricación. Todas las probetas que han mostrado este comportamiento, alcanzan valores de tensión máxima siempre superiores al del límite elástico a temperatura ambiente.

El resto de las probetas muestran un comportamiento más normal, con roturas sin estricción y deformaciones bajo carga máxima aproximadamente un 50% más pequeñas que las obtenidas a temperatura ambiente.

En la fotografía 4 se muestran de izquierda a derecha, las roturas correspondientes a ensayos realizados a temperaturas ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

En términos generales, este tipo de acero muestra un comportamiento aceptable a  $-80^{\circ}\text{C}$ , con aumento de resistencia y manteniendo la capacidad de deformación. El

comportamiento a  $-165^{\circ}\text{C}$  parece inadecuado ya que existen roturas frágiles con tensiones menores que los del límite elástico y cuando la rotura no es frágil, mientras que las tensiones aumentan considerablemente las deformaciones bajo carga máxima disminuyen a valores de aproximadamente la mitad de los obtenidos a temperatura ambiente.

### 5.5. Influencia de las corrugas a bajas temperaturas

En la figura 7 se muestran las curvas tensión-deformación medias correspondientes a ensayos de probetas rectificadas y corrugadas a  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

Igual que para el acero dureza natural, se observa un aumento de tensiones en los diagramas de probetas rectificadas respecto a los diagramas de probetas corrugadas. La explicación expuesta en el apartado 5.2 resulta también válida en este caso.

A  $-80^{\circ}\text{C}$  el comportamiento de las probetas rectificadas y corrugadas es semejante. En ambos casos la rotura se produce con estricción.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  las probetas rectificadas siempre rompen con estricción y no se han obtenido roturas frágiles. El comportamiento de estas probetas es del tipo del de las probetas corrugadas que presentan deformación plástica generalizada.

Estos resultados parecen indicar que, en este tipo de acero, los procesos de fabricación y manipulación producen defectos superficiales capaces de inducir roturas frágiles a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

### 5.6. Influencia de defectos superficiales, entallas, a temperatura de GNL

Debido al comportamiento de las barras corrugadas a  $-165^{\circ}\text{C}$  no se ha considerado necesario estudiar este tipo de efectos para este tipo de acero.

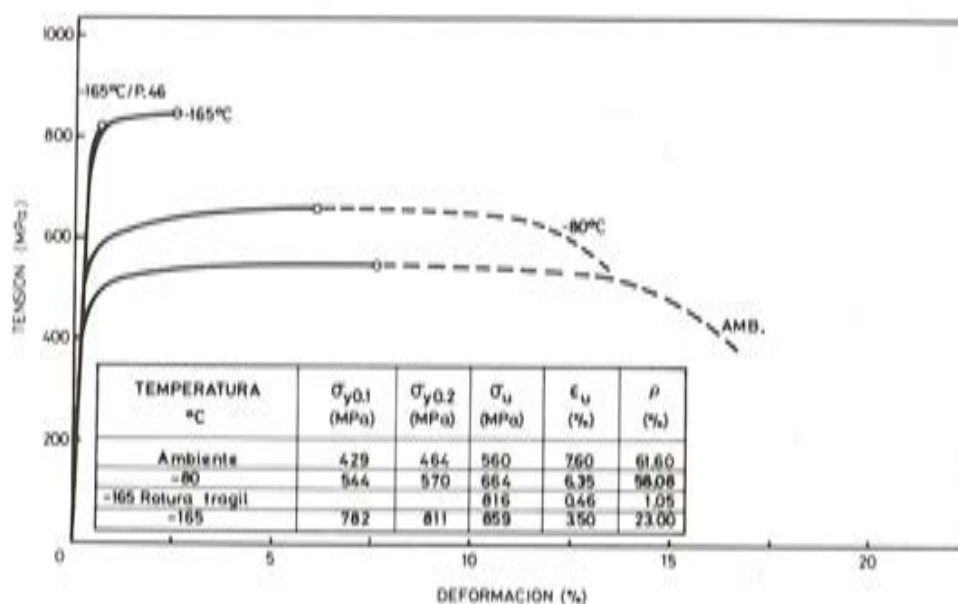
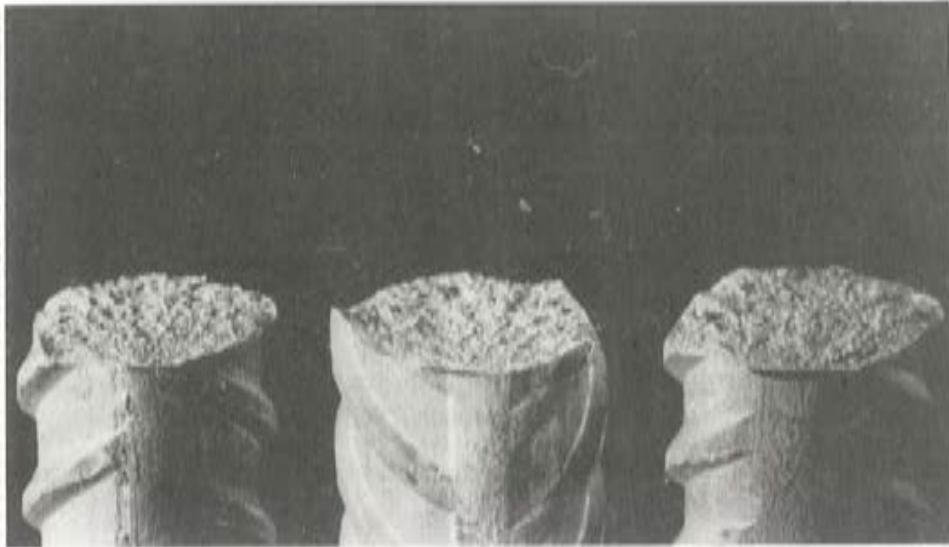


Fig. 6. Curvas tensión-deformación de probetas corrugadas de acero AEH-400F a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .



Fotografía 3. Tipos de rotura de probetas entalladas de acero AEH-400N a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

### Acero endurecido en frío tipo AEH-400F

#### 5.4. Caracterización de barras corrugadas a bajas temperaturas

En la figura 6 se muestran las curvas tensión-deformación medias correspondientes a ensayos de tracción simple a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

Tal como puede verse, los valores de resistencia aumentan con la disminución de la temperatura mientras que las deformaciones bajo carga máxima disminuyen ligeramente a  $-80^{\circ}\text{C}$  y se presentan roturas sin deformación plástica generalizada a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

A  $-80^{\circ}\text{C}$  el límite elástico aparente con 0,1% ó 0,2% de deformación permanente aumenta aproximadamente un 27%, la tensión máxima un 19% respecto a los valores obtenidos a temperatura ambiente.

En cuanto a la deformación bajo carga máxima, se observa una ligera disminución pero debida a la dispersión que presenta este parámetro podría pensarse que los valores se mantienen más o menos constantes.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  el comportamiento es muy disperso. En general los comportamientos observados son de dos tipos.

En primer lugar, algunas probetas rompen antes de alcanzar el límite elástico. En este caso, las roturas se han producido casi siempre en zonas donde existían defectos superficiales casi imperceptibles, posiblemente producidos durante el proceso de fabricación. Todas las probetas que han mostrado este comportamiento, alcanzan valores de tensión máxima siempre superiores al del límite elástico a temperatura ambiente.

El resto de las probetas muestran un comportamiento más normal, con roturas sin estricción y deformaciones bajo carga máxima aproximadamente un 50% más pequeñas que las obtenidas a temperatura ambiente.

En la fotografía 4 se muestran de izquierda a derecha, las roturas correspondientes a ensayos realizados a temperaturas ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

En términos generales, este tipo de acero muestra un comportamiento aceptable a  $-80^{\circ}\text{C}$ , con aumento de resistencia y manteniendo la capacidad de deformación. El

comportamiento a  $-165^{\circ}\text{C}$  parece inadecuado ya que existen roturas frágiles con tensiones menores que los del límite elástico y cuando la rotura no es frágil, mientras que las tensiones aumentan considerablemente las deformaciones bajo carga máxima disminuyen a valores de aproximadamente la mitad de los obtenidos a temperatura ambiente.

### 5.5. Influencia de las corrugas a bajas temperaturas

En la figura 7 se muestran las curvas tensión-deformación medias correspondientes a ensayos de probetas rectificadas y corrugadas a  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

Igual que para el acero dureza natural, se observa un aumento de tensiones en los diagramas de probetas rectificadas respecto a los diagramas de probetas corrugadas. La explicación expuesta en el apartado 5.2 resulta también válida en este caso.

A  $-80^{\circ}\text{C}$  el comportamiento de las probetas rectificadas y corrugadas es semejante. En ambos casos la rotura se produce con estricción.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  las probetas rectificadas siempre rompen con estricción y no se han obtenido roturas frágiles. El comportamiento de estas probetas es del tipo del de las probetas corrugadas que presentan deformación plástica generalizada.

Estos resultados parecen indicar que, en este tipo de acero, los procesos de fabricación y manipulación producen defectos superficiales capaces de inducir roturas frágiles a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

### 5.6. Influencia de defectos superficiales, entallas, a temperatura de GNL

Debido al comportamiento de las barras corrugadas a  $-165^{\circ}\text{C}$  no se ha considerado necesario estudiar este tipo de efectos para este tipo de acero.

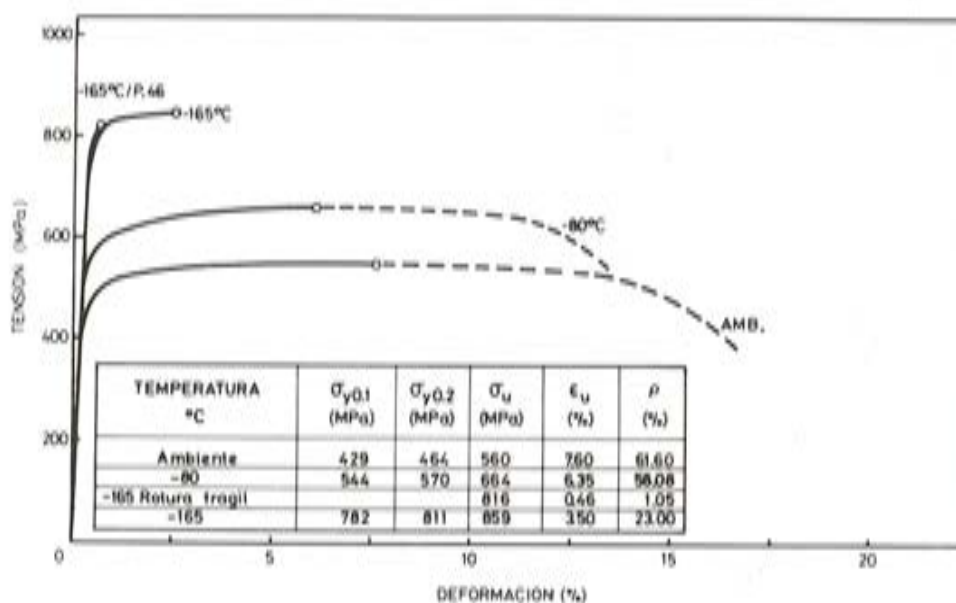


Fig. 6. Curvas tensión-deformación de probetas corrugadas de acero AEH-400F a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .



Fotografía 4. Tipos de rotura de probetas corrugadas de acero AEH-400F a temperatura ambiente,  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

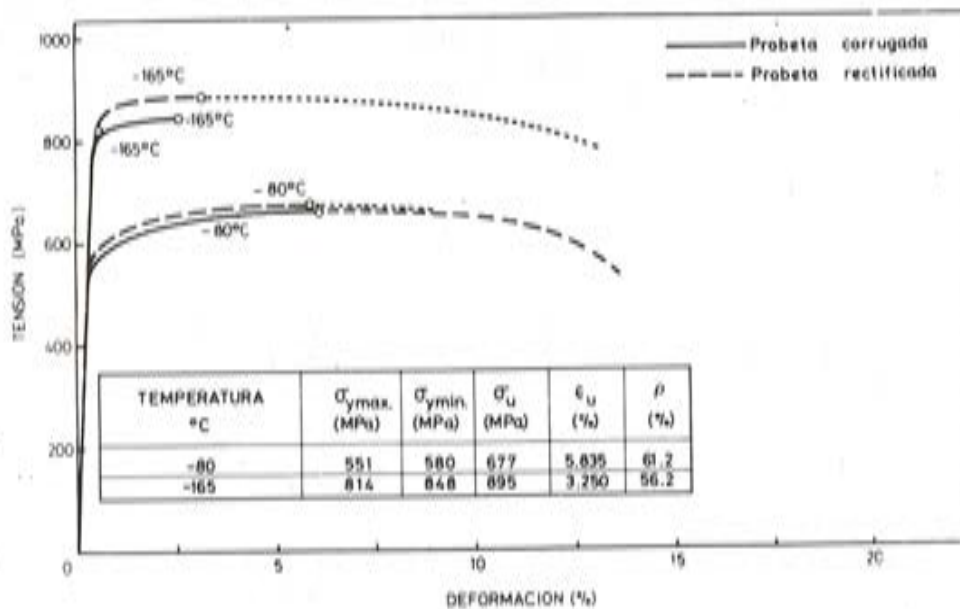


Fig. 7. Curvas tensión-deformación de probetas rectificadas de acero AEH-400F a  $-80^{\circ}\text{C}$  y  $165^{\circ}\text{C}$ .



Fotografía 5. Tipos de rotura de probetas rectificadas y corrugadas de acero AEH-400F a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

## 6. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

### Acero de dureza natural tipo AEH-400N

1. Las barras corrugadas de este tipo de acero presentan un comportamiento adecuado a bajas temperaturas. Desde el punto de vista de resistencia, a medida que disminuye la temperatura aumenta tanto el límite elástico ( $\sigma_y$ ) como la tensión máxima ( $\sigma_u$ ). La velocidad de crecimiento de  $\sigma_y$  es mayor que la observada en  $\sigma_u$  y por lo tanto la relación  $\sigma_u/\sigma_y$  disminuye con la temperatura.

En cuanto a capacidad de deformación, la deformación bajo carga máxima ( $\epsilon_u$ ) permanece prácticamente constante para las distintas temperaturas estudiadas. Este resultado, contrario a la opinión generalizada de que el alargamiento disminuye drásticamente al disminuir la temperatura, puede ser debido a una falta de control de la temperatura a lo largo de la probeta, como ya han puesto de manifiesto los autores (Planas J. et al. 1983). La rotura observada para las distintas temperaturas es siempre con estricción. Los valores de reducción de área ( $\rho$ ) disminuyen levemente con la disminución de temperaturas.

2. No se observa influencia apreciable de las corrugas en el comportamiento de este tipo de acero a bajas temperaturas.

Los valores de  $\sigma_y$ ,  $\sigma_u$  y  $\epsilon_u$  obtenidos con probetas rectificadas son del mismo orden de magnitud que los obtenidos con probetas corrugadas a igualdad de temperatura de ensayo.

Respecto a la rotura, las probetas rectificadas presentan reducciones de área ligeramente mayores y se mantiene la tendencia de disminución de este parámetro con la temperatura.

3. Para las entallas utilizadas en este trabajo, las barras estudiadas muestran una gran sensibilidad a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

Entallas pequeñas de  $1,0 \pm 1,1$  mm de profundidad, del tipo de las ensayadas en este estudio, conducen a una rotura frágil sin deformación plástica con valores de tensión próximos al límite elástico a esa temperatura.

Para entallas de  $0,6 \pm 0,7$  mm la rotura se produce con deformaciones plásticas pero con una disminución del 50% de la deformación bajo carga máxima respecto a las deformaciones obtenidas a la misma temperatura para probetas sin defecto.

Finalmente entallas de  $0,4 \pm 0,45$  mm no parecen afectar el comportamiento de este tipo de acero a temperatura de GNL.

4. De acuerdo con los resultados obtenidos este acero presenta un comportamiento adecuado cuando no tiene defectos superficiales. Con entallas como las estudiadas se producen roturas frágiles que podrían no recomendar su utilización. En cualquier caso es imprescindible profundizar en el estudio de este efecto para poder obtener criterios concluyentes.

#### Acero endurecido en frío tipo AEH-400F

1. Las barras corrugadas de este tipo de acero presentan un comportamiento diferente para las dos temperaturas estudiadas.

A  $-80^{\circ}\text{C}$  el comportamiento observado parece adecuado. A esta temperatura se produce un aumento de resistencia y se mantiene la capacidad de deformación respecto a los valores obtenidos a temperatura ambiente. Todas las roturas son precedidas de estricción con valores que oscilan entre 50 y 55%.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  el comportamiento observado parece inadecuado. Parte de las probetas ensayadas rompen frágilmente antes de alcanzar el límite elástico aparente correspondiente a esta temperatura. En general, este tipo de rotura puede estar asociado a defectos superficiales producidos posiblemente durante el proceso de fabricación.

En aquellas probetas en las que la rotura se produce con deformaciones plásticas se observa un importante aumento de resistencia pero una considerable disminución de la deformación bajo carga máxima respecto a los resultados obtenidos a temperatura ambiente.

En cualquier caso todas las probetas a  $-165^{\circ}\text{C}$  rompen sin estricción.

2. No se ha observado influencia de la corruga a  $-80^{\circ}\text{C}$ , habiéndose obtenido resultados similares con probetas lisas y corrugadas.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  las probetas rectificadas siempre rompen con estricción y no se han observado roturas frágiles. Por otro lado, tal como se ha comentado, las probetas corrugadas presentan desde roturas con deformación plástica y estricción importante a roturas en la rama elástica. Este resultado parece indicar que, en este caso, los procesos de fabricación y/o manipulación producen defectos superficiales capaces de inducir roturas frágiles a  $-165^{\circ}\text{C}$ .

3. De acuerdo con los resultados obtenidos, este tipo de acero presenta un comportamiento adecuado a  $-80^{\circ}\text{C}$ . A esta temperatura aumenta la resistencia y se mantiene la capacidad de deformación. Todas las roturas obtenidas fueron con estricción.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  el comportamiento es muy disperso. Aunque en cualquier caso las cargas de rotura son muy superiores que las obtenidas a  $20^{\circ}\text{C}$  no parece aconsejable su utilización en estructuras criogénicas de alta responsabilidad.

Estos resultados ponen de manifiesto dos aspectos relacionados con la utilización de los aceros de armar a bajas temperaturas: En primer lugar, no todos los aceros comerciales son frágiles a temperaturas criogénicas, entendiéndose por fragilidad; un alargamiento aceptable, escasa sensibilidad a las entallas y un efecto de corruga despreciable.

En segundo lugar para una eficaz utilización de estos aceros que demuestran un buen comportamiento a bajas temperaturas, es preciso conocer el alcance de las propiedades medidas. El proyectista debería especificar unos valores mínimos de la ductilidad, basados en un comportamiento realista de la armadura.

Esta información es la que permitirá establecer un adecuado pliego de condiciones y no la aplicación a estructuras de hormigón armado, de Códigos concebidos para estructuras metálicas que tienen otra forma de trabajo.

## REFERENCIAS

- Bruggeling A.S.G. (1981), Prestressed concrete for the storage of liquefied gases. A viewpoint publication, U.K.
- Elices M., Rostasy F., Faas W. y Wiedemann G. (1982). Cryogenic behaviour of materials for prestressed concrete. Monografía de la FIP. State of art report.
- Planas J., Corres H., Sánchez-Gálvez V., Elices M. (1983). Tensile tests of steel at low temperatures. Problems due to non uniformity in the temperature distribution along the specimen. 2nd. Int. Conf. on Cryogenic Concrete, Amsterdam.
- Elices M., Sleight G. (1978), Steels for prestressing concrete structures for cryogenic applications. Proceeding 8º Congreso de la FIP, Londres.
- Whiteley J.D., Armstrong B.M., Welburn R. (1981), Reinforcing and prestressing steels for cryogenic applications. 1st. Int. Conf. on Cryogenic Concrete, Newcastle.
- Lessel G., Bernard A. (1983). Mechanical properties of concrete reinforcing bars used for liquefied gas storage tanks. 2nd. Int. Conf. on Cryogenic Concrete, Amsterdam.
- Galland J.C., Saint Moulin T., Walter J. (1981). Acceptance criteria and testing of concrete reinforcement for LNG safety structures. 1st. Int. Conf. on Cryogenic Concrete, Newcastle.



**asociación técnica  
española del pretensado**