

# hormigón

XI Asamblea Técnica Nacional  
de la Asociación Técnica  
Española del Pretensado.



# y ACERO

nº155



Santander,  
24 al 28 de septiembre de 1984.

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)

APARTADO 19.002. COSTILLARES. CHAMARTIN.

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).**— Pº de la Habana, 14. 28036 Madrid.
- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMEN".**— Velázquez, 23. 28001 Madrid.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**— Orense, 10. 28020 Madrid.
- AZMA, S.A.**— Pº de la Habana, 16. 28036 Madrid.
- CAMINOS, EDIFICIOS Y OBRAS, S.A.**— J. Lázaro Galdiano, 4. 28036 Madrid.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.**— Grijalba, 9. 28006 Madrid.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.**— C.N. 340, Km. 329,300. San Vicenç dels Horts (Barcelona)
- CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS.**— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A.**— Aribau, 185. 08021 Barcelona.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.**— Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
- COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS DE MADRID.**— Almagro, 42. 28010 Madrid.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.**— Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.**— Plaça Nova, 5. 08002. Barcelona.
- CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.**— Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.**— Ayala, 42. 28001. Madrid.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Avda. de América, 24. 28028 Madrid.
- ELABORADOS METALICOS, S.A.**— Apartado 553. 15080 La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI).** Departamento Obras Especiales.— José Ortega y Gasset, 40. 28006 Madrid.
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.**— Biblioteca.— Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.**— Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).**— Arapiles, 14. 28015 Madrid.
- FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).**— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- FORJADOS DOMO.**— Hermsilla, 64. 28001 Madrid.
- FREYSSINET, S.A.**— General Perón, 24. 28020 Madrid.
- HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.**— Archs, 10. 08002 Barcelona.
- HISPAÑO-ALEMANA DE CONSTRUCCIONES, S.A.**— Capitán Haya, 51. 28020 Madrid.
- HORMIGONES GERONA, S.A.**— Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
- HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.**— Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.
- HUARTE Y CIA., S.A. Departamento Técnico.**— Profesor Waksman, 14. 28036 Madrid.
- IBERDUERO, S.A.**— Centro Documentación. Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.

*(Continúa en el int. de contraportada)*

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

*(Continuación de Int. Portada)*

- IBERDUERO, S.A. Centro de Documentación (8501).**— Gardoqui, 8, 48008 Bilbao.
- IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).**— Príncipe de Vergara, 43. 28001 Madrid.
- IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.** Plaza Gala Placidia, 5-7. 08006 Barcelona.
- INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**— Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
- INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).**— Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
- INGENIERIA Y CONSTRUCCIONES SALA AMAT, S.A.**— Buenos Aires, 19-21. 08029 Barcelona.
- INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.**— Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. Pº de la Castellana, 67. 28071 Madrid.
- INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).**— Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
- INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA).**— Biblioteca.— Orense, 70. 28020 Madrid.
- JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.**— Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
- LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**— Fábrica de Forjas de Buelna. Los Corrales de Buelna (Santander)
- PACADAR, S.A.**— Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
- PRENSOLAND, S.A.**— Calle Industria, s/n. San Martín de Centellas (Barcelona)
- PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.**— Polígono Industrial Atios. Porriño (Pontevedra) 36080.
- PROMONAL, S.L.**— Poeta Artola, 12. 46021 Valencia.
- SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.**— Avda. del Triunfo, 56. Las Arenas (Vizcaya)
- SIKA, S.A.**— Carretera Madrid-Irún, km. 14,500. Polígono Industrial. Alcobendas (Madrid) 28000.
- SOCIEDAD ANONIMA ECHEVARRIA.**— Apartado 46. 48008 Bilbao.
- SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA BBR (S.A.E. BBR).**— Av. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**— Velázquez, 105. 28006 Madrid.
- TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).**— Monturiol, 5. Santa María de Barbará (Barcelona)

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente, su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO  
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO  
DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

# *hormigón y acero*

*n.º 155*

2.º trimestre, 1985

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales) .....	4.000,- ptas.	40,- dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) .....	6.000,- ptas.	100,- dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) .....	10.000,- ptas.	200,- dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - 28080 MADRID

Depósito Legal: M-853-1958  
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID  
ISSN: 0439-5689

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
BARREDO, Carlos  
CUVILLO, Ramón del  
CHUECA, Rafael  
ELICÉS, Manuel  
FERNANDEZ DE VILLALTA, Manuel  
FISAC, Miguel  
GONZALEZ VALLE, Enrique  
JODAR, Juan  
JULIA, Manuel  
LLOMBART, José Antonio  
MANTEROLA, Javier  
MARIA TOME, Javier  
MURCIA, Juan  
PIÑEIRO, Rafael  
POZO VINDEL, Florencio J. del  
ROMERO, Rafael  
SANCHEZ CASTRO, Carlos  
SANCHEZ GALVEZ, Vicente  
SIEGRIST, Carlos

# hormigón y acero

**N. 155**

**índice**

	<u>Pág.</u>
<b>591-6-13</b> <b>Análisis armónico de láminas cilíndricas multilobulares . . . . .</b>	<b>9</b>
<i>Analyse harmonique des voiles cylindriques multilobuléess. Harmonical analysis of multilobulate cylindrical shells. J.R. Atienza, R. Ramón-Llín y V.J.L. Desfills.</i>	
<b>628-0-51</b> <b>Aplicación de la mecánica de fractura para predecir la resistencia a fatiga del acero de pretensado . . . . .</b>	<b>29</b>
<i>Application de la mécanique de rupture pour prédire la résistance à la fatigue de l'acier de précontrainte. Application of the failure mechanics to predict the fatigue strength of the prestressing steels. A. Valiente y V.S. Gálvez.</i>	
<b>457-2-26</b> <b>Comportamiento del hormigón en fractura . . . . .</b>	<b>39</b>
<i>Comportement du béton en fracture. Behaviour of the concrete en fracture. J. Planas, H. Corres y M. Ellices.</i>	
<b>457-8-98</b> <b>Comportamiento de sistemas de pretensado a temperaturas criogénicas. . . . .</b>	<b>55</b>
<i>Comportement des systèmes de précontrainte à des températures criogéniques. Behaviour of the prestressing systems at criogenic temperatures. J. Planas, H. Corres, M. Ellices y R. Chueca.</i>	

457-4-10	<b>Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: Estudio comparativo de distintos modelos</b> ..... Pertes de précontrainte par fluage et relaxation: etude des différents modèles. Prestressing losses due to creep and relaxation: study of distinct models. <i>H. Corres, V. S. Gálvez y M. Elices.</i>	71
457-4-11	<b>Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: Teoría y comprobación experimental</b> ..... Pertes de précontrainte par fluage et relaxation: theorie et vérification expérimental. Prestressing losses due to creep and relaxation: theory and experimental verification. <i>V.S. Gálvez y M. Elices.</i>	82
457-4-12	<b>Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: Estudio de distintos tipos de acero</b> ..... Pertes de précontrainte par fluage et relaxation: etude des différents types d'acier. Prestressing losses due to creep and relaxation: study of varying steel types. <i>H. Corres, V.S. Gálvez y M. Elices.</i>	83
457-8-99	<b>Programa de I + D de depósitos criogénicos de hormigón pretensado</b> .. Programme de I + D pour réservoirs criogéniques en béton précontraint. I + D program for prestressed concrete cryogenic reservoirs. <i>R. Chueca.</i>	89
591-4-13	<b>Análisis no lineal de tanques criogénicos bajo cargas térmicas</b> ..... Analyse non linéale des réservoirs criogéniques sous charges thermiques. Non linear analysis of cryogenic storage vessels under thermal loads. <i>J. Oliver, E. Oñate, J. Pereira y R. Chueca.</i>	99
457-8-100	<b>Determinación de la adherencia de armaduras de pequeño diámetro. Nuevo método RILEM de Ensayo de Arrancamiento: Pull Out Test</b> .. Détermination de l'adhérence des armatures de petit diamètre. Une nouvelle méthode de RILEM pour l'essai d'arrachement: Pull Out Test. Bond determination for small diameter reinforcing bars. A new RILEM method of pull Out Test. <i>A. Dellbes y G. González.</i>	125
685-0-16	<b>Estudio de la influencia de las condiciones iniciales de curado en la resistencia de las probetas de hormigón</b> ..... Etude de l'influence des conditions de cure initiale sur la résistance des éprouvettes en béton. Influence of the initial conditions of curing procedure on the strength of concrete test specimens. <i>E.G. Valle, A. Dellbes y G.G. Isabel.</i>	137
457-0-95	<b>Análisis del comportamiento hasta cargas últimas, de estructuras de hormigón, por el método de los elementos finitos</b> ..... Analyse du comportement jusqu'à charge à la rupture, des structures en béton, par la méthode des éléments finis. Analysis of the concrete structures behaviour under ultimate loads, by means of the finite elements. <i>F. J. del Pozo y J.M. Arrieta.</i>	145

457-5-10	<b>Efectos dinámicos en puentes de ferrocarril</b> ..... Effets dynamiques dans les ponts de chemin de fer. Dynamic effects on railway bridges. <i>E. Alarcón, R. Alvarez, M. Doblaré y J. Molina.</i>	173
457-5-11	<b>Análisis dinámico frente a acciones sísmicas del futuro puente atirantado sobre el río Barxell en Alcoy (Alicante)</b> ..... Analyse dynamique face à des actions sismiques du future pont à hauban sur le Barxell en Alcoy (Alicante). Dynamic analysis under seismic actions in the projected stayed bridge across Barxell river in Alcoy (Alicante). <i>J. F. Millanes.</i>	187
<b>Portada</b>	<b>Reproducción del Cartel anunciador de la XIª Asamblea, que obtuvo el primer premio en el Concurso al efecto celebrado.</b> <i>Autor: Miguel Angel Figueroa Fernández.</i>	

**RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".**

## **ESPAÑA**

AGROMAN, EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.—Madrid.  
ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
AMMON-RA.—Madrid.  
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.—Barcelona.  
BIGUETES, S.L.—Elche (Alicante).  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.  
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).  
CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A. PROCEDIMIENTOS RODIO.—Madrid.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. Biblioteca.—Zaragoza.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. Departamento de Laboratorios.—Santa Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.—Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
COMERCIAL Y COLOCADORA DE TEXA, S.A.—08014 Barcelona.  
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR.—Biblioteca.—Sevilla.  
CONTROLEX.—Alicante.  
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.  
DIRECCION GENERAL DE OBRAS PUBLICAS E INFRAESTRUCTURAS. Ser. Gestión-Apoyo Técnico. Valladolid.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ELEMENTOS ESTRUCTURALES PREFABRICADOS, S.A. (EEPSA).—Manresa (Barcelona).  
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento de Construcción.—Madrid.  
ENAGA, S.A.—Pozuelo de Alarcón (Madrid).  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—28040 Madrid.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Cátedra de Construcción II.—Córdoba.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.  
ESCOLA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA. Departamento de Estructuras. La Coruña.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Córdoba.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE ALMADEN. Almadén (Ciudad Real).  
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.—Zumárraga (Guipúzcoa).  
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.  
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.  
FERROVIAL, S.A.—28001 Madrid.  
FORJADOS DOL.—Esquivias (Toledo).  
GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).  
HORMEDISA, S.L.—Puentecesures-Cordeiro (Pontevedra).  
HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.

IBERTECNICA, S.A.—Madrid.  
 INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
 INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).  
 INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPSA). Biblioteca.—Madrid.  
 INSTITUT CARTOGRAFIC DE CATALUNYA.—Barcelona.  
 INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.  
 INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.  
 J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).  
 LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.  
 LABORATORIO DE CARRETERAS Y GEOTECNIA JOSE LUIS ESCARIO.—Madrid.  
 LABORATORIO DE ENSAYOS DEL COLEGIO DE APAREJADORES DE MURCIA—30010 Murcia.  
 LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).  
 LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
 LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.  
 LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
 MAHEMA, S.A.—Granollers (Barcelona).  
 MECANOGUMBA, S.A.—Mollet del Vallés (Barcelona).  
 MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.  
 MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION, Sección de Normativa.—Madrid.  
 MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.  
 NEX TEN, S.A.—Vitoria.  
 POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
 PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.  
 PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Barcelona.  
 PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.  
 PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).—Vitoria.  
 PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.  
 PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.  
 PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
 PREFLEX. COMPAÑIA LABORAL, S.A.—Gijón (Asturias).  
 PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.  
 REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A. (REISA).—Pinto (Madrid).  
 RED NACIONAL DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLAS (RENFE). División de Documentación.—Madrid.  
 RUBIERA, S.A.—León.  
 SAINCE.—Madrid.  
 SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.  
 SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.—Gerona.  
 SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.—Zamora.  
 SOCIEDAD ANONIMA MATERIALES Y OBRAS (SAMO).—Valencia.  
 SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.  
 SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A.—SECEGSA.—Madrid.  
 SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.  
 TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).  
 TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Santander).  
 TOSAM, S.L.—Segovia.  
 TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).—Madrid.  
 UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.  
 VIGUETAS MUBEMI.—Torrente (Valencia).

## EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.-Montevideo (Uruguay).  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).  
CONSULAR, CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).  
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de Angola).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.—Santiago de Chile (Chile).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.—Lima (Perú).  
SARET P.P.B. Cadre Technique.—Le Pontet (France).  
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.—Londres (Inglaterra).  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).  
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).  
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

## MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

\* \* \*

## AVISO IMPORTANTE

### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, Madrid-33, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.



PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJÁR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



**HUESCA:**

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA

Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON

Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

**MADRID**

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10

Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4- 8 -  
TORREJON DE ARDOZ

Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

**ZARAGOZA**

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

**II Sesión de Trabajo.****Tema III: Investigaciones y Estudios (Continuación)****Análisis armónico de láminas cilíndricas multilobulares**

José R. Atienza Reales  
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Rafael Ramón-Llín García  
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Vicente J. López Desfilis  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

**RESUMEN**

Se expone un método matricial de análisis armónico en rigidez que permite calcular estructuras constituidas por segmentos de lámina cilíndrica ensamblados rígidamente por sus bordes longitudinales y soportados por tímpanos en sus secciones normales extremas.

Aplicando este método de análisis se ha desarrollado el programa LCC (Láminas Cilíndricas en Cascada) con el que se han procesado diversos sistemas estructurales. Los ejemplos aquí recogidos tratan del análisis estático de tubos, de láminas cilíndricas con posibles vigas de rigidización longitudinales y, en general, del análisis estático de láminas plegadas prismáticas constituidas por elementos superficiales cilíndricos y/o planos.

**1. INTRODUCCION**

Las estructuras laminares se suelen definir como sólidos tridimensionales en los que la distancia de cualquiera de sus puntos a su superficie de referencia, normalmente la superficie media, es muy pequeña en comparación con las otras dimensiones y los radios de curvatura principales de esta superficie. Dado que se trata de elementos superficiales delgados, el estudio de la deformación de las láminas se puede simplificar reduciéndolo a un problema bidimensional. Las teorías clásicas de láminas hacen esta reducción admitiendo ciertas hipótesis simplificadoras, con las que se consigue definir el comportamiento de todos los puntos de la lámina en función de un conjunto de magnitudes que se refieren, como su propio nombre indica, a la superficie de referencia de la lámina.

Lógicamente, hay muchas maneras de hacer esta reducción, todo depende del tipo de simplificaciones que se postulen y de la forma en que éstas se introduzcan en el análisis, por lo que no debe extrañarnos que, desde el trabajo pionero de Love (1), en 1888, se hayan propuesto diversas teorías de láminas. Las más acreditadas, aunque formalmente distintas, conducen a resultados similares en la mayor parte de las aplicaciones, puesto que, realmente, difieren en términos de escasa importancia relativa. Todas estas teorías tienen de común que plantean tres grupos de ecuaciones básicas:

- Ecuaciones que relacionan las tres componentes del corrimiento de los puntos situados en la superficie de referencia de la lámina ( $u, v, w$ ) con las deformaciones de ésta ( $\epsilon_x, \epsilon_s, \nu_{xs}$ ).
- Ecuaciones que relacionan las deformaciones con los esfuerzos.
- Y, por último, ecuaciones que relacionan los esfuerzos ( $N_x, N_s, N_{xs}, N_{sx}, M_x, M_s, M_{xs}, M_{sx}$ ) con las cargas que solicitan a la lámina por unidad de superficie ( $p_x, p_y, p_z$ ).

Este conjunto de expresiones, por sustituciones sucesivas, puede reducirse a un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales que relaciona los corrimientos ( $u, v, w$ ) con las cargas ( $p_x, p_y, p_z$ ). Estas ecuaciones, unidas a las condiciones de contorno, son las que definen el comportamiento resistente de la lámina. Su integración nos permite determinar el corrimiento de los puntos de la lámina situados en su superficie de referencia ( $u, v, w$ ). El cálculo posterior del corrimiento de cualquier otro punto de la lámina, de su estado de deformación, de los esfuerzos o de las tensiones, resulta inmediato, puesto que todas estas magnitudes se pueden poner en función de los corrimientos de los puntos situados en la superficie de referencia.

Respecto a las láminas cilíndricas se puede adelantar que las ecuaciones que rigen su comportamiento constituyen un sistema de octavo orden, del que, por su complejidad, sólo se han obtenido soluciones analíticas en casos muy simples de sollicitación, geometría del contorno y condiciones de vinculación en el mismo.

En la actualidad, la aparición de los modernos computadores digitales y el desarrollo de las técnicas numéricas de análisis, especialmente el método de los elementos finitos, nos permite abordar con éxito el estudio del comportamiento resistente de cualquier lámina con contornos arbitrarios y condiciones de vinculación y carga genéricas. Sin embargo, este método de análisis, de indudable versatilidad y de extraordinaria potencia, presenta algunos inconvenientes, entre los que pueden citarse, en primer lugar, que se trata de un método numérico y, por consiguiente, aproximado, y, por otra parte, que su aplicación requiere el concurso de ordenadores potentes, puesto que hay que resolver sistemas de ecuaciones con muchas incógnitas y con un ancho de banda grande.

Refiriéndonos a las láminas cilíndricas, debemos indicar que las utilizadas normalmente como elementos de cubrición en edificios o naves se pueden estudiar directamente con las soluciones analíticas conocidas, sin necesidad de recurrir a las soluciones numéricas proporcionadas por el método de los elementos finitos. Esto es así siempre que se trate de láminas cilíndricas del tipo de las representadas en la figura 1. En estas estructuras, por mantener



Fig. 1. Láminas cilíndricas multilobulares.

constante la sección transversal en la dirección longitudinal y por tener condiciones de simple apoyo en los tímpanos extremos, se puede aplicar una técnica matricial de análisis armónico en rigidez, que tiene la virtud de transformar el análisis, en principio bidimensional, en un conjunto de  $n$  problemas unidimensionales, uno por cada uno de los  $n$  términos del desarrollo en serie de Fourier de las acciones sollicitantes. Esta simplificación permite abordar el análisis con la ayuda de pequeños ordenadores, ya que, como veremos, basta con resolver  $n$  sistemas de ecuaciones con pocas incógnitas y un ancho de banda reducido. Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre con el método de los elementos finitos, en este caso se obtiene la

solución analítica, es decir, la solución exacta del sistema de ecuaciones en derivadas parciales que rigen el comportamiento del sistema estructural, siempre que éste se encuentre solicitado por acciones de tipo armónico.

Esta técnica de análisis armónico en rigidez es la que aquí se va a describir. Sus directrices básicas se pueden consultar en el trabajo de Arnim De Fries-Skene y A.C. Scordelis (2) en el que se trata del análisis de láminas plegadas prismáticas constituidas por elementos superficiales planos. Nosotros hemos ampliado dicha técnica de análisis para que, junto a los elementos superficiales planos, se puedan considerar, además, elementos superficiales cilíndricos (3).

## 2. TEORIA LINEAL DE LA FLEXION DE LAMINAS CILINDRICAS DELGADAS

Esta teoría se basa en las siguientes hipótesis simplificadoras:

- Las deformaciones de la lámina son despreciables en comparación con la unidad, es decir, se trata de una teoría de pequeñas deformaciones.
- Los corrimientos de la lámina son despreciables en comparación con su espesor, es decir, se trata de una teoría de pequeños corrimientos.
- El material estructural se supone homogéneo, isótropo, elástico y lineal.
- Se admiten las hipótesis de Love-Kirchoff, es decir, se supone, primero, que las tensiones  $\sigma_z$  en la dirección de la normal a la superficie de referencia de la lámina son totalmente despreciables, y, segundo, que durante la deformación las normales a la superficie de referencia se mantienen rectas, inextensibles y normales a la superficie de referencia deformada. Esta última hipótesis equivale a despreciar las deformaciones inducidas por las tensiones tangenciales originadas por los esfuerzos cortantes, por lo que estos esfuerzos no podrán determinarse a partir de la deformación de la lámina, sino que surgirán al considerar las ecuaciones de equilibrio de la rebanada.
- Por último, en las teorías lineales de primer orden, se desprecia frente a la unidad el cociente entre el espesor de la lámina y los radios de curvatura principales de su superficie de referencia, aunque también son posibles otras teorías lineales de orden superior, en las que no se admita esta simplificación y sea, por ejemplo, este cociente al cuadrado o al cubo, etc., el que se omita al compararlo con la unidad.

Basados en estas simplificaciones, pasamos a deducir las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que rigen el comportamiento de las láminas cilíndricas. El proceso consta de las siguientes etapas:

### (a) Definición del corrimiento de un punto genérico de la lámina.

Admitiendo que en la deformación de la lámina las normales a su superficie de referencia permanecen rectas, inextensibles y normales a la superficie deformada, y que, además, el giro experimentado por la normal es muy pequeño (teoría de pequeños corrimientos), se puede poner, según la figura 2, que:

$$\begin{aligned} u_z(x, s) &= u(x, s) - z(w(x, s))^{10} \\ v_z(x, s) &= v(x, s) - z \left[ (w(x, s))^{01} + \frac{v(x, s)}{a} \right] \\ w_z(x, s) &= w(x, s) \end{aligned} \quad (1)$$

donde, para simplificar la notación, hemos introducido el simbolismo

$$(w(x, s))^{m n} = \frac{\partial^{m+n} w(x, s)}{\partial x^m \partial s^n}$$

y en lo sucesivo anotaremos directamente

$$(w(x, s))^{m n} = (w)^{m n}$$

(b) *Definición de la deformación de la lámina en función de los corrimientos de su superficie de referencia.*

El estado de deformación de la lámina, figura 3, está definido por tres parámetros:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_s$  y  $\nu_{xs}$ , que son, respectivamente, el alargamiento unitario de la fibra  $\overline{A'B}$ , el alargamiento unitario de la fibra  $\overline{A'D}$  y la distorsión del ángulo  $\widehat{BAD}$ .

Estos parámetros, en una teoría de pequeñas deformaciones y pequeños corrimientos, vienen dados (4) por:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= (\overline{A'B'} - \overline{AB}) / \overline{AB} \simeq (u)^{10} - z (w)^{20} \\ \epsilon_s &= (\overline{A'D'} - \overline{AD}) / \overline{AD} \simeq (v)^{01} + \frac{a}{a+z} [w/a - z (w)^{02}] \\ \gamma_{xs} &= \widehat{A'B'D'} - \widehat{ABD} \simeq [1 + \frac{z}{a}] (v)^{10} - z (w)^{11} + \frac{a}{a+z} [(u)^{01} - z (w)^{11}] \end{aligned} \quad (2)$$

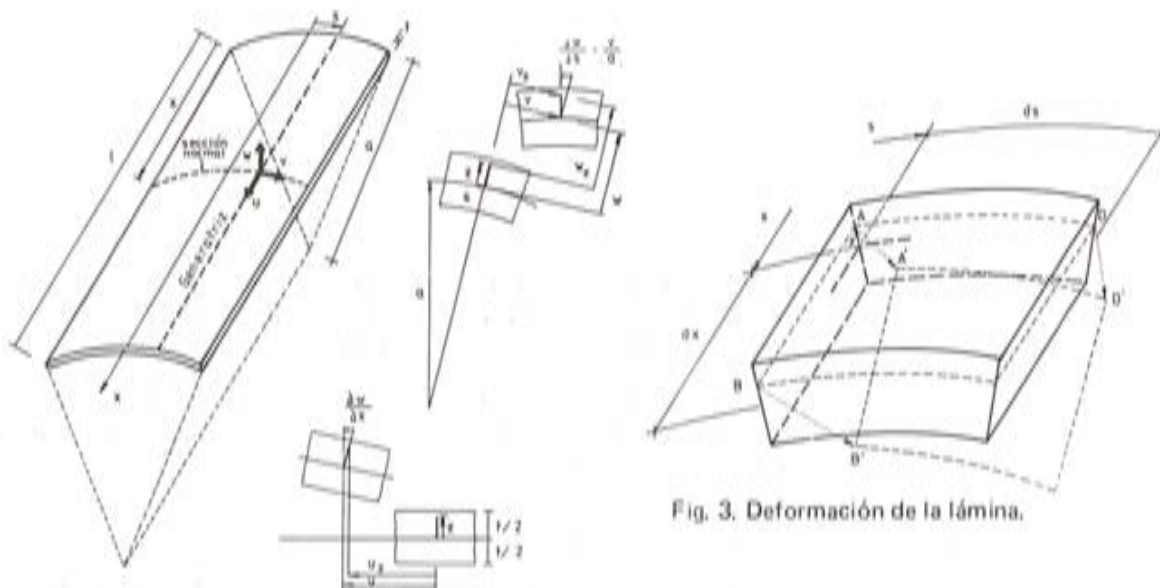


Fig. 2. Normales a la superficie de referencia antes y después de la deformación de la lámina.

recordando que

$$a/(a+z) = 1 - z/a + (z/a)^2 - (z/a)^3 + \dots$$

y despreciando frente a la unidad el cociente  $z/a$  y sus potencias, obtenemos las expresiones utilizadas en la teoría de láminas cilíndricas rebajadas

$$\begin{aligned} e_x &= (u)^{10} - z (w)^{20} \\ e_s &= (v)^{01} + w/a - z (w)^{02} \\ \nu_{xs} &= (v)^{10} + (u)^{01} - 2z (w)^{11} \end{aligned} \quad (3)$$

En este trabajo utilizaremos una formulación más completa (5) en la que se mantienen todos los términos hasta  $z^2$ .

$$\begin{aligned} e_x &= (u)^{10} - z (w)^{20} \\ e_s &= (v)^{01} + w/a - z [(w)^{02} + w/a^2] + z^2 [(w)^{02}/a + w/a^3] \\ \nu_{xs} &= (v)^{10} + (u)^{01} - z [2 (w)^{11} + (u)^{01}/a - (v)^{10}/a] + z^2 [(u)^{01}/a^2 + (w)^{11}/a] \end{aligned} \quad (4)$$

Los términos que acabamos de añadir tienen escasa importancia en la mayor parte de las aplicaciones. Este es el motivo por el que otras teorías de láminas cilíndricas (ver (6) ó (7)) los desprecian o los sustituyen por términos equivalentes. Sin embargo, nosotros hemos preferido la formulación correspondiente a las expresiones (4), ya que casi no nos complica el análisis posterior y, de este modo, evitamos la incoherencia de las otras teorías en las que no se cumple la última de las ecuaciones de equilibrio de la rebanada.

(c) *Definición de los esfuerzos que solicitan a la lámina en función de los corrimientos de su superficie de referencia.*

Al haber supuesto despreciables las tensiones  $\sigma_z$  en la dirección de la normal a la superficie de referencia, las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_s$  y  $\tau_{xs}$  (figura 4) se pueden deducir, a partir de las deformaciones  $e_x$ ,  $e_s$  y  $\nu_{xs}$ , mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_x + \nu e_s) \\ \sigma_s &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu e_x + e_s) \\ \tau_{xs} &= \tau_{sx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xs} \end{aligned} \quad (5)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material estructural y  $\nu$  su coeficiente de Poisson.

Los esfuerzos por unidad de longitud se obtienen por integración de las tensiones correspondientes (figura 5). Así pues:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \left[1 + \frac{z}{a}\right] dz = H [(u)^{10} + \nu (v)^{01} + \nu w/a] - R [(w)^{20}/a] \\ N_s &= \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_s dz = H [\nu (u)^{10} + (v)^{01} + w/a] + R [w/a^3 + (w)^{02}/a] \\ N_{xs} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xs} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz = F [(u)^{01} + (v)^{10}] + G [(v)^{10}/a^2 - (w)^{11}/a] \\ N_{sx} &= \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{sx} dz = F [(u)^{01} + (v)^{10}] + G [(u)^{01}/a^2 + (w)^{11}/a] \\ M_x &= - \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz = R [- (u)^{10}/a + (w)^{20} - \nu (v)^{01}/a + \nu (w)^{02}] \\ M_s &= - \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_s z dz = R [\nu (w)^{20} + (w)^{02} + w/a^2] \\ M_{xs} &= - \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xs} \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz = 2 G [- (v)^{10}/a + (w)^{11}] \\ M_{sx} &= - \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{sx} z dz = G [(u)^{01}/a - (v)^{10}/a + 2 (w)^{11}] \end{aligned} \quad (6)$$

Donde:

$$H = \frac{E t}{1 - \nu^2}, F = \frac{E t}{2(1 + \nu)}, R = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \text{ y}$$

$$G = \frac{E t^3}{24(1 + \nu)}$$

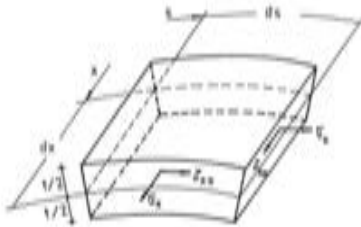


Fig. 4. Tensiones normales y tangenciales.

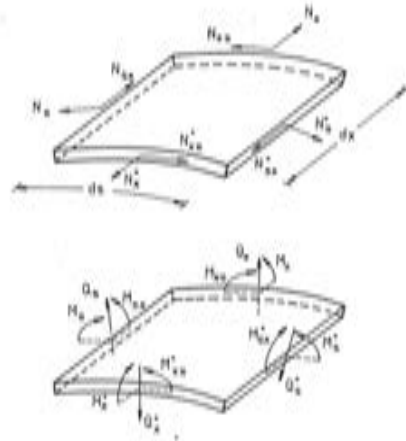


Fig. 5. Esfuerzos en una lámina cilíndrica.

(d) *Ecuaciones de equilibrio de una rebanada.*

Estableciendo el equilibrio de una rebanada en la geometría no deformada, figuras 5 y 6, se obtiene:

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0) \quad & (N_x)^{10} + (N_{sx})^{01} + p_x = 0 \\ (\Sigma F_y = 0) \quad & (N_y)^{01} + (N_{ys})^{10} - \frac{Q_s}{a} + p_y = 0 \\ (\Sigma F_z = 0) \quad & -\frac{N_x}{a} - (Q_x)^{10} - (Q_s)^{01} + p_z = 0 \\ (\Sigma M_x = 0) \quad & (M_s)^{01} + (M_{xs})^{10} - Q_s = 0 \\ (\Sigma M_y = 0) \quad & - (M_x)^{10} - (M_{sx})^{01} + Q_x = 0 \\ (\Sigma M_z = 0) \quad & -N_{sx} + N_{ys} + \frac{M_{sx}}{a} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

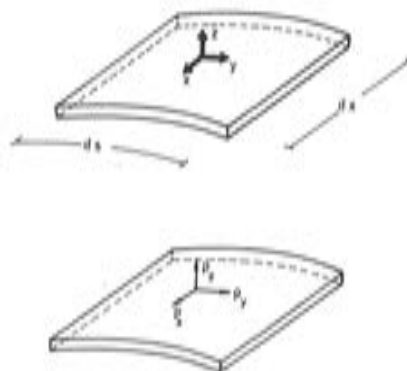


Fig. 6. Cargas que solicitan a la lámina por unidad de superficie.

Eliminando  $Q_s$  y  $Q_x$  en las ecuaciones (7), obtenemos las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} (N_x)^{10} + (N_{xx})^{01} + p_x &= 0 \\ (N_s)^{01} + (N_{xs})^{10} - (M_s)^{01}/a - (M_{xs})^{10}/a + p_y &= 0 \\ N_s/a + (M_x)^{20} + (M_{sx})^{11} + (M_{xs})^{11} + (M_s)^{02} - p_z &= 0 \\ N_{sx} - N_{xs} - M_{sx}/a &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituyendo (6) en (8) se observa que la última de las ecuaciones de equilibrio es una identidad. Las otras tres se transforman en

$$\begin{aligned} H \left( (u)^{20} + \frac{1-\nu}{2} (u)^{02} + \frac{1+\nu}{2} (v)^{11} + \nu (w)^{10}/a \right) + \\ + R \left( - (w)^{30}/a + \frac{1-\nu}{2} (u)^{02}/a^2 + \frac{1-\nu}{2} (w)^{12}/a \right) + p_x &= 0 \\ H \left( \frac{1+\nu}{2} (u)^{11} + (v)^{02} + \frac{1-\nu}{2} (v)^{20} + (w)^{01}/a \right) + \\ + R \left( \frac{3(1-\nu)}{2} (v)^{20}/a - \frac{3-\nu}{2} (w)^{21}/a \right) + p_y &= 0 \\ H \left( (v)^{01}/a + \nu (u)^{10}/a + w/a^2 \right) + \\ + R \left( - (u)^{30}/a + \frac{1-\nu}{2} (u)^{12}/a + \frac{\nu-3}{2} (v)^{21}/a + (w)^{40} + \right. \\ \left. + 2 (w)^{22} + (w)^{04} + 2 (w)^{02}/a^2 + w/a^4 \right) - p_z &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales, que constituyen un sistema de octavo orden, son las ecuaciones que rigen el comportamiento de las láminas cilíndricas.

Despreciando frente a la unidad el término  $z/a$  de las ecuaciones (6) y despreciando, también, el término  $Q_s/a$  en la segunda de las ecuaciones (7), el desarrollo anterior hubiera conducido a:

$$\begin{aligned} H \left( (u)^{20} + \nu (v)^{11} + \nu (w)^{10}/a \right) + F \left( (v)^{11} + (u)^{02} \right) + p_x &= 0 \\ H \left( \nu (u)^{11} + (v)^{02} + (w)^{01}/a \right) + F \left( (v)^{20} + (u)^{11} \right) + p_y &= 0 \\ H \left( \nu (u)^{10}/a + (v)^{01}/a + w/a^2 \right) + R \left( (w)^{40} + 2 \nu (w)^{22} + (w)^{04} \right) + 4 G (w)^{22} - p_z &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

que son las conocidas ecuaciones de la teoría de láminas cilíndricas rebajadas.

Por último, haciendo que el radio de la lámina tienda a infinito, se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento de los elementos superficiales planos

$$\begin{aligned} H \left( (u)^{20} + \frac{1-\nu}{2} (u)^{02} + \frac{1+\nu}{2} (v)^{11} \right) + p_x &= 0 \\ H \left( \frac{1+\nu}{2} (u)^{11} + \frac{1-\nu}{2} (v)^{20} + (v)^{02} \right) + p_y &= 0 \\ R \left( (w)^{40} + 2 (w)^{22} + (w)^{04} \right) - p_z &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

### 3. METODO MATRICIAL PARA EL ANALISIS ARMONICO EN RIGIDEZ DE LAMINAS CILINDRICAS MULTILOBULARES

Las condiciones en las que es aplicable esta técnica de análisis, son las siguientes:

- Estructuras constituidas por elementos superficiales planos o cilíndricos de sección transversal constante en la dirección longitudinal, (figura 1). Estos elementos se enlazan rígidamente entre sí por sus bordes longitudinales, admitiéndose que alguno de estos bordes tenga condiciones de vinculación genéricas, tales como, articulación, empotramiento o borde libre.
- La estructura tiene que estar apoyada en dos tímpanos situados en las secciones normales extremas. Se admite que los tímpanos son infinitamente rígidos en su plano medio y perfectamente flexibles en la dirección normal a éste. No se acepta la existencia de diafragmas de rigidización ni de tímpanos de apoyo en secciones intermedias. No obstante, estos efectos se pueden incluir fácilmente en el análisis con un planteamiento en flexibilidad similar al propuesto por Seordelis (8) para el análisis de puentes continuos de sección en cajón.
- En esta exposición sólo abordaremos el análisis de aquellos casos en que las cargas exteriores se aplican directamente en las líneas nodales en las que se ensamblan los elementos. Como es sabido, el tratamiento de cargas puntuales aplicadas sobre los elementos se puede hacer introduciendo líneas nodales adicionales que contengan los puntos de aplicación de estas cargas. Más complejo resulta el tratamiento de las cargas superficiales, ya que hay que proceder por superposición de estados siguiendo un proceso análogo al utilizado en el cálculo matricial en rigidez de entramados constituidos por barras prismáticas (figura 7). Es evidente que, en nuestro caso, el análisis del estado I requiere el cálculo de los elementos cilíndricos solicitados por las cargas superficiales suponiendo que su contorno tiene las condiciones de vinculación siguientes: articulación en las secciones normales extremas y empotramiento en los bordes longitudinales. Este tema lo dejamos para un trabajo posterior y, por el momento, sólo nos ocuparemos del cálculo del estado II.

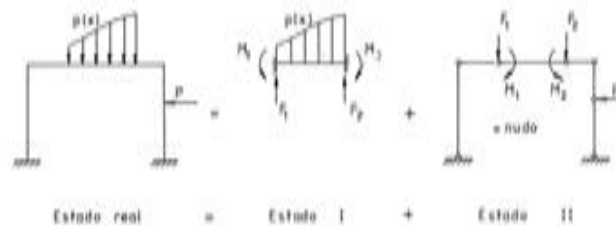


Fig. 7. Superposición de estados para el análisis matricial en rigidez de entramados solicitados por cargas aplicadas en sus barras.

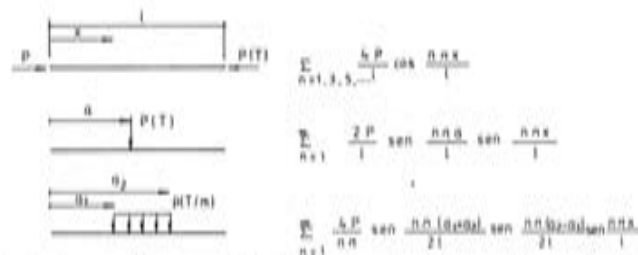


Fig. 8. Desarrollos en serie de Fourier de diversos tipos de cargas.

Este cálculo se realiza desarrollando las cargas en serie de Fourier en dirección longitudinal (figura 8) y analizando la estructura frente a cada uno de los  $n$  armónicos en que se ha descompuesto la carga. Obviamente, la respuesta global de ésta viene definida por la suma de las respuestas correspondientes a todos los armónicos analizados.

La utilidad de esta forma de proceder radica en que las generatrices de estos sistemas estructurales experimentan movimientos y esfuerzos armónicos siempre que las acciones solicitantes sean también armónicas. Por consiguiente, el comportamiento de toda la generatriz se puede definir mediante sus valores característicos, que son los coeficientes indicados con el superíndice ( $\Lambda$ ) en las expresiones senoidales de la figura 9. Esto se traduce en que, fijándonos en las generatrices que coinciden con las líneas nodales, si planteamos la compatibilidad de momentos y el equilibrio de fuerzas en su sección central, automáticamente queda establecida la compatibilidad y el equilibrio en toda la línea nodal. Por lo que podemos pasar a considerar las líneas nodales como puntos nodales en los que se puede trabajar directamente con los valores característicos de las cargas esfuerzos y corrimientos. Por lo demás, el análisis de estos sistemas estructurales, para cada uno de los  $n$  armónicos, sigue los mismos pasos del análisis matricial en rigidez de cualquier entramado plano constituido por barras prismáticas rectas o curvas.

Así pues, hay que empezar analizando cada uno de los elementos que componen la estructura, para deducir la expresión matricial que relaciona el sistema de cargas  $\bar{F}_n$  aplicado en sus bordes longitudinales con los movimientos  $\bar{d}_n$  que dichas cargas provocan (figura 9). Esta expresión es de la forma:

$$\bar{F}_n = \bar{k}_n \bar{d}_n \quad (12)$$

donde  $\bar{k}_n$  es la matriz de rigidez del elemento referida a su sistema de ejes local.

Antes de pasar a ensamblar los elementos en las líneas nodales con el fin de generar la estructura completa, es necesario referir las ecuaciones (12) a un único sistema de ejes asociado a todo el sistema estructural. Esto se consigue mediante la matriz de rotación  $\bar{R}$ , obteniéndose:

$$\bar{q}_n = \bar{k}_n^g \bar{\Delta}_n \quad \text{con} \quad \bar{k}_n^g = \bar{R}^t \bar{k}_n \bar{R} \quad (13)$$

donde  $\bar{k}_n^g$  es la matriz de rigidez del elemento referida al sistema de ejes global de la estructura.

A continuación, estableciendo de una forma ordenada en todas las líneas nodales, primero, las ecuaciones de compatibilidad de movimientos y, después, las ecuaciones de equilibrio, se obtiene la expresión matricial que relaciona el armónico  $n$  de las cargas aplicadas en las líneas nodales,  $\bar{F}_n$ , con los movimientos,  $\bar{D}_n$ , también del mismo armónico, que dichas cargas provocan. Esta expresión es de la forma:

$$\bar{F}_n = \bar{K}_n \bar{D}_n \quad (14)$$

donde  $\bar{K}_n$  es la matriz de rigidez de la estructura completa.

Resolviendo (14) se obtienen los movimientos incógnita de las líneas nodales. Una vez hecho esto se vuelve a los elementos y las expresiones

$$\begin{aligned} \bar{d}_n &= \bar{R} \bar{\Delta}_n \\ \bar{F}_n &= \bar{k}_n \bar{R} \bar{\Delta}_n \end{aligned} \quad (15)$$

nos sirven para determinar los movimientos y los esfuerzos en sus dos bordes longitudinales. Como se sabe, el cálculo posterior de corrimientos, esfuerzos o tensiones en cualquier otro punto del elemento es una operación inmediata.

Todo este proceso de análisis es bien conocido por los lectores familiarizados con los métodos matriciales de cálculo en rigidez de los sistemas estructurales, por lo que en esta exposición sólo vamos a considerar la parte que hace referencia a la deducción de la matriz de rigidez de los elementos superficiales que componen estas estructuras.

#### 4. DEDUCCION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS CILINDRICOS

La matriz de rigidez del elemento,  $\bar{k}_n$ , se obtiene integrando las ecuaciones diferenciales homogéneas que rigen su comportamiento e imponiendo las condiciones de contorno indicadas en la figura 9.

Para la integración de las ecuaciones (9) con  $p_x = p_y = p_z = 0$ , suponemos una solución en serie de Levy de la forma:

$$\begin{aligned} u(x, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m(s) \cos \frac{m\pi}{1} x \\ v(x, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m(s) \sin \frac{m\pi}{1} x \\ w(x, s) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m(s) \sin \frac{m\pi}{1} x \end{aligned} \quad (16)$$

con lo que conseguimos satisfacer automáticamente las condiciones de contorno en las secciones normales extremas del elemento ( $x = 0, 1$ ) en las que se supone que existen tímpanos de apoyo. Estas condiciones son:

$$\begin{aligned} v = w = 0 \\ (u)^{1,0} = (w)^{2,0} = 0 \text{ (pues } N_x = M_x = 0) \end{aligned}$$

sustituyendo (16) en (9) e introduciendo el operador derivada  $D$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} ((a_1 + a_2 D^2) U_m(s) + (a_3 D) V_m(s) + (a_4 + a_5 D^2) W_m(s)) \cos \frac{m\pi}{1} x = 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} ((a_3 D) U_m(s) + (a_6 + a_7 D^2) V_m(s) + (a_8 D) W_m(s)) \sin \frac{m\pi}{1} x = 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} ((a_4 + a_5 D^2) U_m(s) + (a_8 D) V_m(s) + (a_9 + a_{10} D^2 + a_{11} D^4) W_m(s)) \sin \frac{m\pi}{1} x = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= H \left( \frac{m\pi}{1} \right)^2 & a_7 &= H \\ a_2 &= -\frac{E t}{2(1+\nu)} \left( 1 + \frac{t^2}{12 a^2} \right) & a_8 &= \frac{H}{a} + \left( \nu R + \frac{E t^3}{8(1+\nu)} \right) \frac{1}{a} \left( \frac{m\pi}{1} \right)^2 \\ a_3 &= -\left( \nu H + \frac{E t}{2(1+\nu)} \right) \frac{m\pi}{1} & a_9 &= \frac{H}{a^2} + R \left[ \left( \frac{m\pi}{1} \right)^4 + \left( \frac{1}{a} \right)^4 \right] \\ a_4 &= -\frac{\nu H}{a} \frac{m\pi}{1} - \frac{R}{a} \left( \frac{m\pi}{1} \right)^3 & a_{10} &= \frac{2R}{a^2} - \left( 2\nu R + \frac{E t^3}{6(1+\nu)} \right) \left( \frac{m\pi}{1} \right)^2 \\ a_5 &= -\frac{E t^3}{24(1+\nu)a} \frac{m\pi}{1} & a_{11} &= R \\ a_6 &= -\frac{E t}{2(1+\nu)} \left( \frac{m\pi}{1} \right)^2 \left( 1 + \frac{t^2}{4 a^2} \right) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (17) se satisfacen, para todos los valores de  $x$ , sólo si las funciones  $U_m(s)$ ,  $V_m(s)$  y  $W_m(s)$  verifican el sistema:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 D^2) U_m(s) + (a_3 D) V_m(s) + (a_4 + a_5 D^2) W_m(s) &= 0 \\ (a_3 D) U_m(s) + (a_6 + a_7 D^2) V_m(s) + (a_8 D) W_m(s) &= 0 \\ (a_4 + a_5 D^2) U_m(s) + (a_8 D) V_m(s) + (a_9 + a_{10} D^2 + a_{11} D^4) W_m(s) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Eliminando  $V_m(s)$  y  $W_m(s)$ , se obtiene:

$$[\Delta(D)] U_m(s) = 0 \quad (19)$$

Las expresiones análogas en  $V_m(s)$  y  $W_m(s)$  son idénticas a la que acabamos de deducir, o sea:

$$\begin{aligned} [\Delta(D)] V_m(s) &= 0 \\ [\Delta(D)] W_m(s) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\Delta(D) = P_8 D^8 + P_6 D^6 + P_4 D^4 + P_2 D^2 + P_0$ , y

$$\begin{aligned} P_8 &= a_2 a_7 a_{11} \\ P_6 &= a_2 a_7 a_{10} + a_1 a_7 a_{11} + a_2 a_6 a_{11} - a_{11} a_3^2 - a_7 a_5^2 \\ P_4 &= a_2 a_7 a_9 + a_1 a_7 a_{10} + a_2 a_6 a_{10} + a_1 a_6 a_{11} + 2 a_3 a_5 a_8 - a_2 a^2 a_8^2 - a_{10} a_3^2 - \\ &\quad a_6 a_5^2 - 2 a_4 a_5 a_7 \\ P_2 &= a_1 a_7 a_9 + a_2 a_6 a_9 + a_1 a_6 a_{10} + 2 a_3 a_4 a_8 - a_1 a_8^2 - a_9 a_3^2 - a_7 a_4^2 - 2 a_4 a_5 a_6 \\ P_0 &= a_1 a_6 a_9 - a_6 a_4^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el polinomio característico asociado a la ecuación (19) será:

$$P_8 r^8 + P_6 r^6 + P_4 r^4 + P_2 r^2 + P_0 = 0 \quad (21)$$

que, por ser un polinomio de octavo orden con coeficientes reales, tendrá ocho raíces  $r_i$  ( $i = 1, 8$ ) que necesariamente han de ser reales o complejas conjugadas.

La integral general de la ecuación (19) se obtiene como combinación lineal de ocho soluciones particulares linealmente independientes, que son de la forma:

$Q_{K-1}(s) e^{r_i s}$ ; por cada raíz real de orden  $K$

$[T_{L-1}(s) \cos b s + Z_{L-1}(s) \sin b s] e^{a s}$ ; por cada par de raíces imaginarias conjugadas ( $r_i = a + bi$ ,  $r_j = a - bi$ ) de orden de multiplicidad  $L$

donde  $Q_{K-1}(s)$  es un polinomio de orden  $K-1$  con  $K$  constantes arbitrarias, y  $T_{L-1}(s)$ ,  $Z_{L-1}(s)$  son dos polinomios de orden  $L-1$  con  $L$  coeficientes arbitrarios.

Por consiguiente:

$$U_m(s) = \overline{R_m(s)}^T \overline{S_u} \overline{C_m} \quad (22)$$

donde  $\overline{R_m(s)}^T = \{ R_1(s), R_2(s), \dots, R_8(s) \}$  es el vector fila que contiene las ocho raíces de la ecuación característica,  $\overline{S_u}$  es una matriz unidad de ocho por ocho y  $\overline{C_m} = \{ C_1, C_2, \dots, C_8 \}$  es el vector columna de las ocho constantes de integración.

Teniendo en cuenta que las expresiones (20) son idénticas a la (19),  $V_m(s)$  y  $W_m(s)$  se pueden poner de la forma

$$\begin{aligned} V_m(s) &= \overline{R_m(s)}^t \overline{S_v} \overline{C_m} \\ W_m(s) &= \overline{R_m(s)}^t \overline{S_w} \overline{C_m} \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\overline{S_v}$  y  $\overline{S_w}$  son dos matrices de ocho por ocho cuyos coeficientes se pueden obtener sustituyendo (22) y (23) en las dos primeras de las ecuaciones (18).

Las relaciones entre los coeficientes indeterminados y los movimientos de los bordes longitudinales del elemento (figura 9) vienen dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} \hat{u}_d \cos \frac{n\pi x}{1} &= (u(x, s))_{s=-b/2} = \overline{R}_{nd}^t \overline{S_u} \overline{C}_n \cos \frac{n\pi x}{1} \\ \hat{v}_d \sin \frac{n\pi x}{1} &= (v(x, s))_{s=-b/2} = \overline{R}_{nd}^t \overline{S_v} \overline{C}_n \sin \frac{n\pi x}{1} \\ \hat{u}_f \cos \frac{n\pi x}{1} &= (u(x, s))_{s=b/2} = \overline{R}_{nf}^t \overline{S_u} \overline{C}_n \cos \frac{n\pi x}{1} \\ \hat{v}_f \sin \frac{n\pi x}{1} &= (v(x, s))_{s=b/2} = \overline{R}_{nf}^t \overline{S_v} \overline{C}_n \sin \frac{n\pi x}{1} \\ \hat{w}_d \sin \frac{n\pi x}{1} &= (w(x, s))_{s=-b/2} = \overline{R}_{nd}^t \overline{S_w} \overline{C}_n \sin \frac{n\pi x}{1} \\ \hat{\theta}_d \sin \frac{n\pi x}{1} &= ((w)^{01} - v/a)_{s=-b/2} = (\overline{R}_{nd}^t \overline{S_w} - \overline{R}_{nd}^t \overline{S_v}/a) \overline{C}_n \sin \frac{n\pi x}{1} \\ \hat{w}_f \sin \frac{n\pi x}{1} &= (w(x, s))_{s=b/2} = \overline{R}_{nf}^t \overline{S_w} \overline{C}_n \sin \frac{n\pi x}{1} \\ \hat{\theta}_f \sin \frac{n\pi x}{1} &= ((w)^{01} - v/a)_{s=b/2} = (\overline{R}_{nf}^t \overline{S_w} - \overline{R}_{nf}^t \overline{S_v}/a) \overline{C}_n \sin \frac{n\pi x}{1} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{nd}^t &= (\overline{R}_n(s)^t)_{s=-b/2} & \overline{R}_{nf}^t &= (\overline{R}_n(s)^t)_{s=b/2} \\ \overline{R}_{nd}^t &= \left( \frac{d}{ds} \overline{R}_n(s)^t \right)_{s=-b/2} & \overline{R}_{nf}^t &= \left( \frac{d}{ds} \overline{R}_n(s)^t \right)_{s=b/2} \end{aligned}$$

que puede escribirse matricialmente de la forma:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_d \\ \hat{v}_d \\ \hat{u}_f \\ \hat{v}_f \\ \hat{w}_d \\ \hat{\theta}_d \\ \hat{w}_f \\ \hat{\theta}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{R}_{nd} \overline{S_u} \\ \overline{R}_{nd} \overline{S_v} \\ \overline{R}_{nf} \overline{S_u} \\ \overline{R}_{nf} \overline{S_v} \\ \overline{R}_{nd} \overline{S_w} \\ \overline{R}_{nd} \overline{S_w} - \overline{R}_{nd} \overline{S_v}/a \\ \overline{R}_{nf} \overline{S_w} \\ \overline{R}_{nf} \overline{S_w} - \overline{R}_{nf} \overline{S_v}/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \\ C_{5n} \\ C_{6n} \\ C_{7n} \\ C_{8n} \end{pmatrix}$$

o más abreviadamente:

$$\bar{d}_n = \bar{z}_n \bar{C}_n \quad (24)$$

Análogamente, las relaciones entre los coeficientes indeterminados y las cargas aplicadas en los bordes longitudinales del elemento, figura 9, vienen dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} \hat{r}_d \cos \frac{n \pi x}{l} &= (-N_{sx})_{s=-b/2} \\ \hat{n}_d \sin \frac{n \pi x}{l} &= (-N_s)_{s=-b/2} \\ \hat{r}_f \cos \frac{n \pi x}{l} &= (N_{sx})_{s=b/2} \\ \hat{n}_f \sin \frac{n \pi x}{l} &= (N_s)_{s=b/2} \\ \hat{p}_d \sin \frac{n \pi x}{l} &= (Q_s + (M_{sx})^{10})_{s=-b/2} \\ \hat{m}_d \sin \frac{n \pi x}{l} &= (-M_s)_{s=-b/2} \\ \hat{p}_f \sin \frac{n \pi x}{l} &= (-Q_s + (M_{sx})^{10})_{s=b/2} \\ \hat{m}_f \sin \frac{n \pi x}{l} &= (M_s)_{s=b/2} \end{aligned} \quad (25)$$

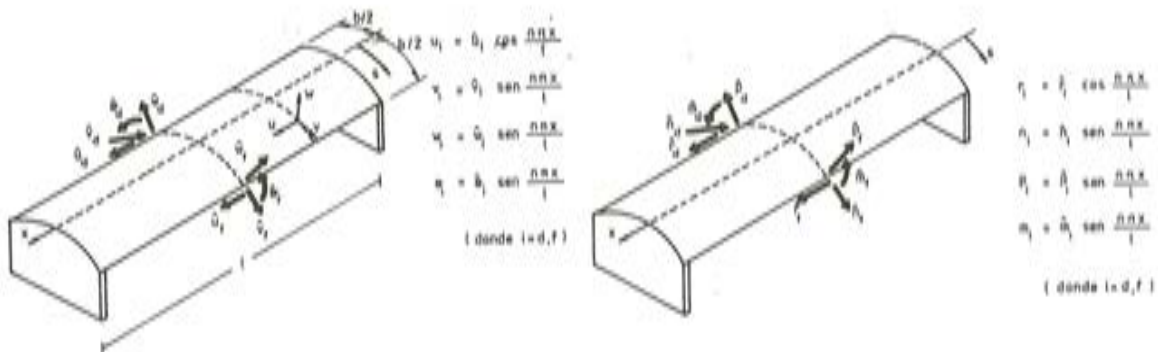


Fig. 9. Movimientos y fuerzas en los bordes longitudinales de un elemento cilíndrico.

Sustituyendo (6, 16, 22 y 23) en (25) y reagrupando matricialmente, también puede ponerse de la forma abreviada,

$$\bar{f}_n = \bar{g}_n \bar{C}_n \quad (26)$$

De las expresiones (24) y (26) es inmediata la deducción de

$$\bar{f}_n = \bar{k}_n \bar{d}_n \quad \text{con} \quad \bar{k}_n = \bar{g}_n \bar{z}_n^{-1} \quad (27)$$

donde  $\bar{k}_n$  es la matriz de rigidez del elemento cilíndrico referida a su sistema de ejes locales.

Para referirla al sistema de ejes global de toda la estructura es necesario definir la transformación (figura 10-A):

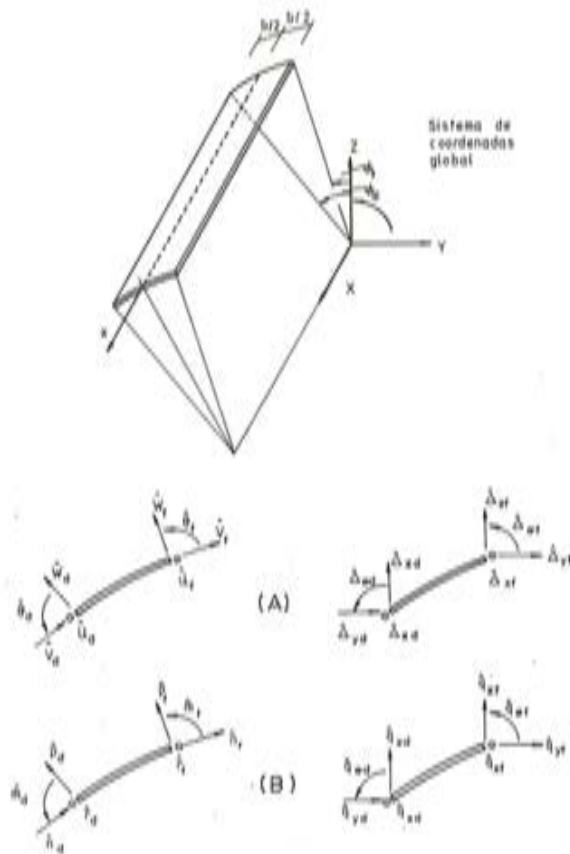


Fig. 10. Relación entre los sistemas de ejes locales y globales.

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_d \\ \hat{v}_d \\ \hat{u}_f \\ \hat{v}_f \\ \hat{w}_d \\ \hat{\theta}_d \\ \hat{w}_f \\ \hat{\theta}_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_d & \sin \phi_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi_f & \sin \phi_f & 0 \\ 0 & -\sin \phi_d & \cos \phi_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \phi_f & \cos \phi_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{\Delta}_{xd} \\ \hat{\Delta}_{yd} \\ \hat{\Delta}_{zd} \\ \hat{\Delta}_{ed} \\ \hat{\Delta}_{xf} \\ \hat{\Delta}_{yf} \\ \hat{\Delta}_{xf} \\ \hat{\Delta}_{yf} \end{vmatrix}$$

o más abreviadamente:

$$\bar{d}_n = \bar{R} \bar{\Delta}_n \quad (28)$$

Análogamente (figura 10-B) se deduce que

$$\bar{q}_n = \bar{R}^t \bar{f}_n \quad (29)$$

De las expresiones (27), (28) y (29) es inmediata la deducción de:

$$\bar{q}_n = \bar{k}_n^g \bar{\Delta}_n \quad \text{con} \quad \bar{k}_n^g = \bar{R}^t \bar{k}_n \bar{R} \quad (30)$$

donde  $\bar{k}_n^g$  es la matriz de rigidez del elemento cilíndrico referida al sistema de ejes global.

## 5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS ELEMENTOS PLANOS

Para deducir la matriz de rigidez de los elementos superficiales planos se puede seguir un proceso análogo al que acabamos de exponer. Sin embargo, en la práctica no suele hacerse así, pues, por ser éste un problema más sencillo, se pueden deducir expresiones explícitas de los términos no nulos de  $\bar{k}_n$ . Estas expresiones, referencia (9), son:

– Comportamiento laja

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{33} = 2 D' \beta (\beta - \lambda \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta) / (A' b) \\ k_{12} &= k_{21} = -k_{34} = -k_{43} = -2 D' \beta [\lambda \operatorname{sh}^2 \beta / A' + (1 + \nu) / 2] / b \\ k_{13} &= k_{31} = -2 D' \beta (\beta \operatorname{ch} \beta - \lambda \operatorname{sh} \beta) / (A' b) \\ k_{14} &= k_{41} = -k_{23} = -k_{32} = 2 D' \beta^2 \operatorname{sh} \beta / (A' b) \\ k_{22} &= k_{44} = -2 D' \beta (\beta + \lambda \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta) / (A' b) \\ k_{24} &= k_{42} = 2 D' \beta (\beta \operatorname{ch} \beta + \lambda \operatorname{sh} \beta) / (A' b) \end{aligned}$$

– Comportamiento placa

$$\begin{aligned} k_{55} &= k_{77} = 2 \beta^3 R (\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta) / A b^3 \\ k_{56} &= k_{65} = -k_{78} = -k_{87} = \beta^2 R [(\operatorname{sh}^2 \beta + \beta^2) A + \nu] / b^2 \\ k_{57} &= k_{75} = -2 R \beta^3 (\beta \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta) / (A b^3) \\ k_{58} &= k_{85} = -k_{67} = -k_{76} = 2 \beta^3 R \operatorname{sh} \beta / (A b^2) \\ k_{66} &= k_{88} = 2 \beta R (\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta) / (A b) \\ k_{68} &= k_{86} = 2 \beta R (\beta \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta) / (A b) \end{aligned} \quad (31)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{n \pi}{1} & \beta &= \frac{n \pi}{1} b & R &= \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)} \\ \lambda &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & D' &= \frac{E t}{(1 + \nu)^2} & A &= \operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2 \\ & & & & A' &= \beta^2 - \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \beta \end{aligned}$$

Lógicamente, la forma más razonable de proceder con los elementos planos es programar directamente los términos de  $\bar{k}_n$ . De este modo le ahorramos al ordenador todos los pasos intermedios que se necesitan para deducir dicha matriz y, además, evitamos los errores de redondeo que se producen en esta etapa del análisis.

En este sentido sería muy conveniente poder contar con expresiones análogas para los elementos superficiales cilíndricos. Estas expresiones se podrían obtener para los elementos cilíndricos rebajados, puesto que, en este caso, se conocen los valores analíticos de las raíces de la ecuación característica (10). Dado que no se ha podido obtener una solución analítica para las raíces de la ecuación característica de los elementos cilíndricos no rebajados, la deducción de su matriz de rigidez obliga a recurrir al proceso descrito en el apartado anterior. Obviamente, puesto que este proceso se basa en una teoría general de láminas cilíndricas, puede incluir, como casos particulares, a los elementos superficiales planos y a los elementos cilíndricos rebajados.

## 6. APLICACIONES

Empleando la técnica matricial de análisis armónico descrita en este artículo hemos desarrollado un programa de cálculo llamado LCC (Láminas Cilíndricas en Cascada), con el que se han procesado diversos sistemas estructurales. Los ejemplos recogidos a continuación dan una idea general de sus posibles aplicaciones.

### (a) *Tubo solicitado a aplastamiento por la acción de dos cargas puntuales.*

Este conocido problema ha sido tratado por Lindberg, Olsen y Cowper (11) que han obtenido, aparte de soluciones basadas en el método de los elementos finitos, una solución analítica en la que utilizan desarrollos en doble serie de Fourier con ochenta términos en la dirección longitudinal y ochenta términos en la dirección transversal.

En nuestro caso, programa LCC, el análisis se ha realizado discretizando la estructura en un elemento —medio tubo— y operando con desarrollos en serie de Fourier en la dirección longitudinal de uno, diez y veinte armónicos. En la figura 11 se pueden comparar los resultados. Se observa, como cabía esperar, que la solución del programa LCC va aproximándose a la solución exacta a medida que se va incrementando el número de términos considerados en el desarrollo en serie de las cargas.

### (b) *Lámina cilíndrica simplemente apoyada.*

Esta estructura, cuyos datos geométricos se pueden consultar en la figura 12, se ha seleccionado con el ánimo de hacer un estudio comparativo entre tres posibles situaciones:

- Que no existan vigas rigidizadoras en los dos bordes longitudinales.
- Que existan estas vigas de borde.
- Que las vigas de borde estén pretensadas con una carga de 50 toneladas.

El análisis con el programa LCC se ha realizado discretizando la lámina en varios elementos y suponiendo que la sollicitación, una carga gravitatoria de 400 kilogramos por metro cuadrado de lámina, se puede sustituir por unos cuchillos de carga equivalentes que están aplicados en las líneas nodales. Trabajando con los cinco primeros armónicos no nulos del desarrollo en serie de las cargas, hemos obtenido los movimientos de la lámina y los esfuerzos que la solicitan en las secciones  $x = 0, 1/8, 1/4, 3/8$  y  $1/2$ . Los resultados correspondientes a la sección central se han representado en la figura 12. Por otra parte, también hemos calculado los esfuerzos de membrana principales y sus direcciones:

$$\begin{aligned} N_1 &= (N_x + N_s)/2 + \sqrt{N_{sx}^2 + [(N_x - N_s)/2]^2} \\ N_2 &= (N_x + N_s)/2 - \sqrt{N_{sx}^2 + [(N_x - N_s)/2]^2} \\ \operatorname{tg} 2\theta &= -2 N_{sx} / (N_x - N_s) \end{aligned} \quad (32)$$

en los supuestos de carga gravitatoria en lámina cilíndrica con o sin viga de borde. Los resultados se han representado en la figura 13.

Todos estos resultados ponen de manifiesto que las vigas de borde rigidizan la lámina haciéndola prácticamente indeformable y, de este modo, reducen notablemente la magnitud de los esfuerzos de membrana y flexión que ésta debe soportar. Por otra parte, también debe indicarse que el pretensado de las vigas de borde, aparte de ser un excelente procedimiento para simplificar el descimbrado de la lámina, contribuye a incrementar el efecto rigidizador de dichas vigas, al impedir su microfisuración.

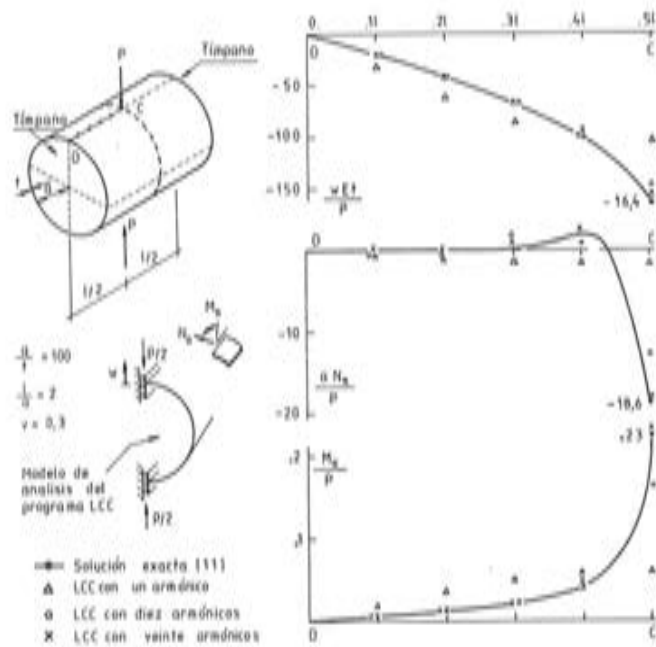


Fig. 11. Tubo solicitado a aplastamiento por la acción de dos cargas puntuales.

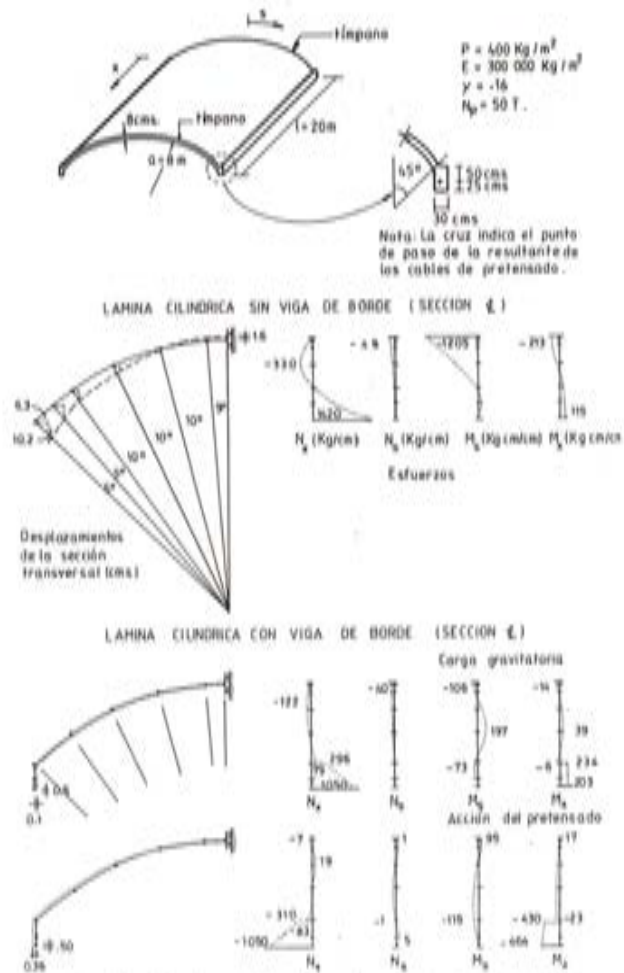


Fig. 12. Lámina cilíndrica simplemente apoyada.

P \ X	0			1/8			1/4			3/8			1/2		
	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	θ	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	θ	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	θ	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	θ	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	θ
0°	0	0	-X	-39	-47	90	-36	-84	90	-36	-109	90	-40	-118	90
	0	0	-XX	4	-39	0	7	-39	0	2	-43	0	-2	-48	0
5°	14	-14	45	-31	-55	55	-34	-87	80	-35	-110	84	-39	-119	90
	0	0	45	-6	-39	-1	-14	-60	4	-25	-66	6	-31	-68	0
15°	43	-43	45	-6	-82	51	-22	-102	69	-29	-117	81	-34	-122	90
	21	-21	45	-32	-89	66	-37	-116	80	-40	-129	85	-46	-136	90
25°	76	-76	45	22	-106	50	-9	-107	63	-18	-107	76	-26	-107	90
	93	-93	45	5	-201	62	-17	-278	75	-27	-320	83	-32	-332	90
35°	104	-104	45	57	-101	46	28	-79	51	1	-58	61	-15	-46	90
	172	-172	45	110	-157	45	80	-90	42	55	-35	32	39	-12	0
45°	101	-101	45	100	-99	37	92	-29	29	82	-9	17	79	-1	0
	0	0	-	750	0	0	1160	0	0	1369	0	0	1620	0	0
Viga	0	0	-	456	0	0	798	0	0	1007	0	0	1078	0	0
(Ext - inf)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

X Lámina cilíndrica con viga de borde  
 XX Lámina cilíndrica sin viga de borde  
 N<sub>1</sub> y N<sub>2</sub> en Kg/cm y θ en grados sexagesimales

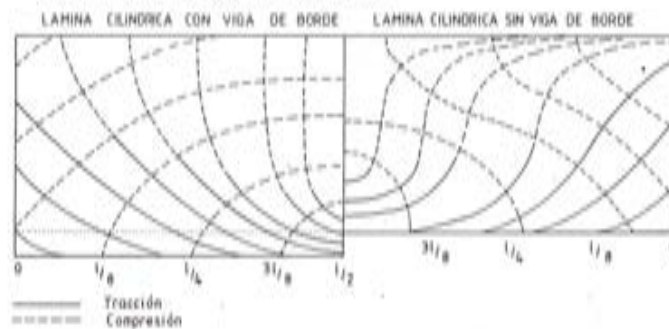


Fig. 13. Esfuerzos de membrana principales en una lámina cilíndrica con o sin viga de borde.

(c) *Puente de sección en cajón multicelular.*

El ejemplo seleccionado para verificar el funcionamiento del programa LCC con elementos superficiales planos es un puente biapoyado de sección en cajón multicelular. La geometría de la estructura, las propiedades del material estructural, las acciones solicitantes y la discretización seleccionada para su análisis, se pueden consultar en la figura 14.

Este puente ha sido analizado por Kuang-Han Chu y Elliott Dudnik (9) con un programa que genera la matriz de rigidez de los elementos planos aplicando directamente las expresiones (31). Sus resultados coinciden con los obtenidos por el programa LCC, pues, aunque este último programa opera según el método general, expuesto en el apartado 4, particularizado para elementos planos, es evidente, como ya hemos indicado, que ambas formas de operar son equivalentes.

En la figura 14 se han representado algunos de los resultados obtenidos por el programa LCC, que ha operado con 20 armónicos. Un punto a destacar es que el valor "promedio" de las tensiones normales longitudinales de las dos alas se aproxima mucho al valor que se obtiene aplicando directamente la fórmula de la flexión pura de las vigas. Este resultado se ha verificado en varias secciones transversales del puente ( $x = 0, 0.361, 0.501$ ). No es sorprendente, puesto que se trata de un puente de sección en cajón con cinco almas y cuya luz es quince veces superior a su canto, por lo que el fenómeno de "arrastre del cortante" tiene escasa importancia. En realidad, si se hubieran dispuesto tres diafragmas coincidiendo con las secciones transversales en las que se aplican las cargas, la fórmula de la flexión pura hu-

biera conducida prácticamente al mismo resultado que el análisis como lámina plegada prismática. Ahora bien, al no existir estos diafragmas, la flexión longitudinal del puente necesariamente está acompañada de la distorsión de sus secciones transversales, y esto se traduce en la existencia de tensiones normales longitudinales con una distribución no uniforme en sus alas, aunque, eso sí, su valor promedio es muy próximo al definido por la fórmula de la flexión pura de las vigas.

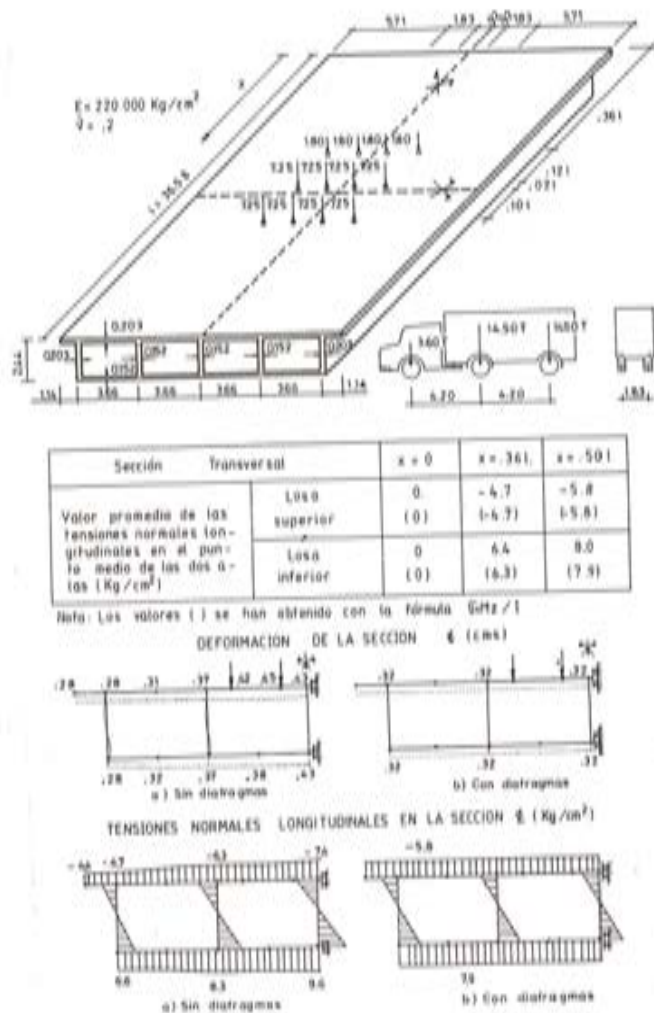


Fig. 14. Puente biapoyado de sección en cajón pluricelular.

## 7. CONCLUSIONES

En este artículo se ha expuesto un método matricial para el análisis armónico en rigidez de estructuras constituidas por segmentos de lámina cilíndrica y/o elementos planos ensamblados rígidamente por sus bordes longitudinales y soportados por tímpanos en sus secciones normales extremas. Aplicando este método de análisis se ha desarrollado un programa de ordenador con el que se han procesado diversos sistemas estructurales, lo que ha permitido comprobar la validez y exactitud del método propuesto.

La naturaleza unidimensional de este tipo de análisis y el tamaño reducido de la banda de las matrices de rigidez que resultan, hacen que se trate de una metodología de análisis especialmente adaptada para su incorporación a microcomputadores personales.

## 8. REFERENCIAS

1. Love, A.E.H.: "A treatise on the mathematical theory of elasticity", Dover, New York, 1927.
2. Arnim De Fries-Skene and A.C. Scordelis: "Direct stiffness solution for folded plates", Journal of the Structural Division (A.S.C.E.), August, 1964.
3. Jenkins, R.S.: "Theory and design of cylindrical shell structures". Partners, London, 1948.
4. Love, A.E.H.: "Theory of elasticity". Cambridge University Press.
5. J. Courbon: "Voiles minces", Eyrolles, París.
6. Stephen P. Timoshenko and S. Woinowsky – Krieger: "Theory of plates and shells", Mc Graw-Hill, 1959.
7. W.T. Koiter: "Theory of thin elastic shells", North-Holland Amsterdam, 1960.
8. A.C. Scordelis.: "Analysis of continuous box girder bridges", Universidad de California, Berkeley.
9. Kuang-Han Chu and Elliott Dudnik.: "Concrete box girder bridges analyzed as folded plates". Concrete Bridge Design, ACI Publication SP-23, Michigan.
10. David P. Billington.: "Thin shell concrete structures". Mc Graw-Hill, 1965.
11. G.M. Lindberg, M.D. Olsen and G.R. Cowper.: "New developments in the finite element analysis of shells". Nat. Research Council of Canada DM/NAE Quarterly Bulletin No. 1969 (4).

# Aplicación de la mecánica de fractura para predecir la resistencia a fatiga del acero de pretensado

Andrés Valiente Cancho  
Vicente Sánchez Gálvez  
Departamento de Física y Física de Materiales  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid

## RESUMEN:

La Mecánica de Fractura aborda el problema de la fatiga en materiales metálicos mediante el estudio de las leyes que gobiernan la iniciación y el crecimiento de las fisuras originadas por este fenómeno. Dichas leyes se formulan con carácter general, de modo que pueden obtenerse experimentalmente a partir de una situación particular y ser aplicadas seguidamente en situaciones distintas.

Este planteamiento resulta particularmente útil en el caso del acero de pretensado ya que permite obtener analíticamente los datos de fatiga que el proyectista precisa (curvas de Wöhler, diagramas de Goodman, diagramas de Smith, etc.) y evita una laboriosa y costosísima determinación experimental.

El presente trabajo contiene la investigación realizada por los autores para determinar las leyes que rigen la iniciación y el crecimiento de fisuras por fatiga en el acero de pretensado: se describen los ensayos realizados y la elaboración de los correspondientes resultados hasta llegar a la formulación final. A partir de estas leyes se lleva a cabo el desarrollo teórico que conduce a los datos de proyecto antes indicados. Los resultados teóricos se comparan con datos análogos de acero de pretensado obtenidos empíricamente por los autores.

## INTRODUCCION

Aunque tradicionalmente la fatiga no ha constituido un problema en el hormigón pretensado y ha podido ser ignorada, por diversos motivos surgidos durante los últimos años, se hace necesario reconsiderar ese punto de vista, sobre todo por el empleo creciente del hormi-

gón pretensado en estructuras que han de soportar repetidas oscilaciones de carga, como es el caso de las plataformas off-shore.

Las recomendaciones de proyecto de distintas organizaciones internacionales ya tienen en cuenta esta circunstancia (1-4). Se tiende a analizar por separado el comportamiento en fatiga de cada componente (hormigón, acero de armar y acero de pretensar), pero utilizando criterios de escaso fundamento teórico (regla de Miner), que a su vez se apoyan en datos experimentales (curvas de Wohler) de difícil interpretación. En el caso del acero de pretensar escasean incluso estos datos (5), habiéndose obtenido los primeros correspondientes a aceros españoles en época reciente (6).

La Mecánica de Fractura permite abordar el problema de la fatiga con mejores instrumentos teóricos. La vida de un componente sometido a fatiga se determina a través del tiempo que tarda una fisura en generarse y crecer hasta hacerse crítica, es decir, hasta alcanzar el tamaño que produce la rotura para la máxima sollicitación aplicada. Dichos instrumentos consisten en leyes fenomenológicas de iniciación y crecimiento de fisuras y criterios de fractura, formulados con carácter general. Las peculiaridades de cada material se contemplan en la formulación por medio de parámetros que se determinan empíricamente a partir de experimentos diseñados al efecto.

Siguiendo este planteamiento, los autores han abordado el estudio del comportamiento en fatiga del acero de pretensar y aunque la investigación aún no está concluida, quieren divulgar los resultados obtenidos con ánimo, ante todo, de dar a conocer las posibilidades que la Mecánica de Fractura ofrece al proyectista en el campo de la fatiga.

## PROPAGACION DE FISURAS POR FATIGA

En situaciones bidimensionales (sólidos planos con fisuras de borde recto, normal al plano del sólido) se observa que las fisuras crecen por efecto de una sollicitación cíclica de modo que el aumento de longitud por ciclo,  $da/dN$ , es función de la oscilación  $\Delta K$  experimentada por el factor de intensidad de tensiones en el ciclo, siempre que dicha oscilación no sea inferior a un valor umbral  $\Delta K_{th}$ , en cuyo caso la fisura no crece:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) \text{ si } \Delta K > \Delta K_{th} \quad (1)$$

En el caso de los alambres de acero de pretensado el problema es de carácter tridimensional, toda vez que las fisuras desarrolladas por fatiga son del tipo mostrado en la figura 1, es decir, lúnulas de forma elíptica que se inician en la superficie y progresan hacia el eje del alambre. Las dificultades que entraña la generalización de la relación (1) al caso de un alambre fisurado, han sido resueltas considerando como dimensión "a" característica de la fisura su profundidad (figura 1), en consonancia con la expresión del factor de intensidad de tensiones K utilizada (7):

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} M \left( \frac{a}{D} \right) \quad (2)$$

donde  $\sigma$  es la tensión nominal aplicada al alambre y M la función adimensional:

$$M = \left\{ 0,473 - 3,286 \left( \frac{a}{D} \right) + 14,797 \left( \frac{a}{D} \right)^2 \right\}^{1/2} \left\{ \frac{a}{D} - \left( \frac{a}{D} \right)^2 \right\}^{-1/4} \quad (3)$$

Esta expresión es válida para relaciones  $a/D > 0,15$ , y proporciona un valor medio del factor K a lo largo del borde de la fisura. Ha sido calculada a partir de las elongabilidades de alambres fisurados, determinadas numérica y experimentalmente. La excentricidad de la elipse influye poco en los resultados dentro del rango estudiado, y de ahí que el factor de intensidad de tensiones obtenido sólo sea función de la profundidad de fisura.

Interpretada la ecuación (1) en el sentido indicado, es posible comprobar experimentalmente su validez. En el ensayo concebido para ello, las probetas a emplear son muestras de alambre sobre cuya superficie se practica un pequeño corte (entalla), normal al eje. De este modo, al someter posteriormente la probeta a un esfuerzo de tracción oscilante, la fisura de fatiga se desarrolla como prolongación de la entalla y estando localizada, su evolución puede ser seguida. Los ensayos se realizaron en una máquina dinámica con control de carga en la cual es posible aplicar una fuerza de tracción que varíe en el tiempo según una ley periódica (sinusoidal, cuadrada, triangular, en diente de sierra, etc.) cuyas características (valor medio, amplitud y frecuencia) pueden ser prefijadas dentro de un amplio rango.

La técnica utilizada para determinar el crecimiento de la fisura a lo largo del ensayo permite conocer en cada instante su profundidad a través de la elongabilidad del alambre, que va aumentando a medida que crece la fisura. La elongabilidad se mide mediante un extensómetro dinámico de pequeña base de medida, 12,5 mm en este caso, que se coloca sobre el alambre frente a la entalla (figura 2). Las elongaciones extremas de esta base son leídas periódicamente y restadas, con lo cual se obtiene el alargamiento de la base para una fuerza de tracción igual a la oscilación de la carga aplicada. El cociente de las dos cantidades proporciona la elongabilidad de la probeta, que es función de la profundidad de fisura. La rela-

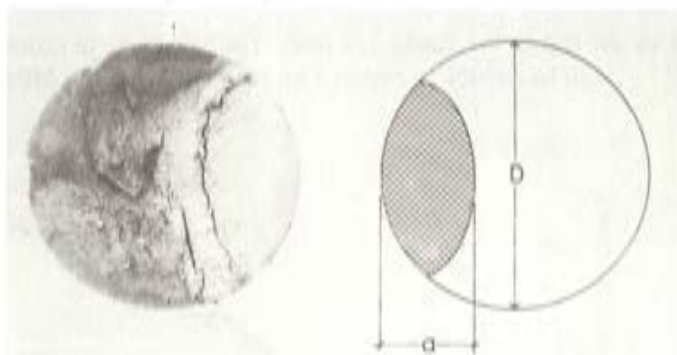


Fig. 1. Fisura de fatiga en un alambre.

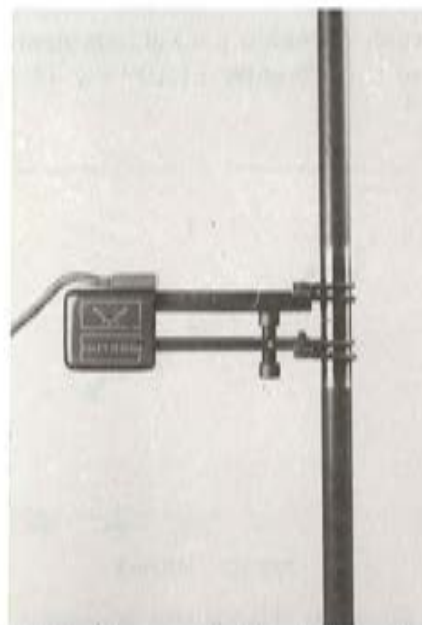


Fig. 2. Dispositivo para medida de fisuras de fatiga.

ción entre ambas magnitudes se ha determinado experimentalmente fisurando probetas por el procedimiento descrito hasta diferentes profundidades, y rompiéndolas a tracción posteriormente para medir la fisura de fatiga en un proyector de perfiles. La profundidad de cada fisura medida corresponde al último valor de la elongabilidad registrado en el ensayo previo, obteniéndose así los datos para construir el gráfico de la figura 3 que constituye la relación buscada.

La lectura periódica del extensómetro cada cierto número de ciclos, y el proceso posterior de los valores leídos, según las operaciones descritas, se han realizado mediante un sistema de adquisición de datos controlado por ordenador, de modo que el registro final obtenido en cada ensayo de fatiga es una representación gráfica de la profundidad de fisura "a" frente al número de ciclos N, tal como muestra la figura 4. La pendiente de estas curvas, es de-

cir, la velocidad de propagación de la fisura, se determina en distintos puntos por procedimientos numéricos, y asimismo la oscilación  $K$  del factor de intensidad de tensiones debida a la oscilación de carga en ese ciclo del ensayo:

$$K = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} M \left( \frac{a}{D} \right) \quad (4)$$

Los resultados obtenidos con uno de los aceros de pretensar empleados en la investigación, se recogen en la figura 5, que pone de manifiesto la validez de la ecuación (1). Como puede apreciarse la velocidad de propagación de las fisuras es función de la oscilación del factor de intensidad de tensiones, sin que influya la frecuencia, la forma de la onda o el valor medio sobre el cual se produce la oscilación. El valor umbral de  $\Delta K$ , por debajo del cual las fisuras no se propagan, no ha sido objeto de un estudio específico, pero de la figura 5 se deduce que está por debajo de los  $6 \text{ MPa m}^{1/2}$ .

La relación (1) es en este caso de tipo potencial, ya que los datos obtenidos se agrupan en torno a una recta al ser representados en escala logarítmica. Análogos resultados se han obtenido con otros dos aceros de pretensar, también trefilados. Por consiguiente se tiene:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^n \quad (5)$$

El valor obtenido para el exponente  $n$  es en todos los casos 2,3 mientras que el de la constante  $C$  varía entre  $11 \cdot 10^{-12}$  y  $16 \cdot 10^{-12}$ , cuando  $da/dN$  se expresa en  $\text{m/ciclo}$  y  $\Delta K$  en  $\text{MPa m}^{1/2}$ .

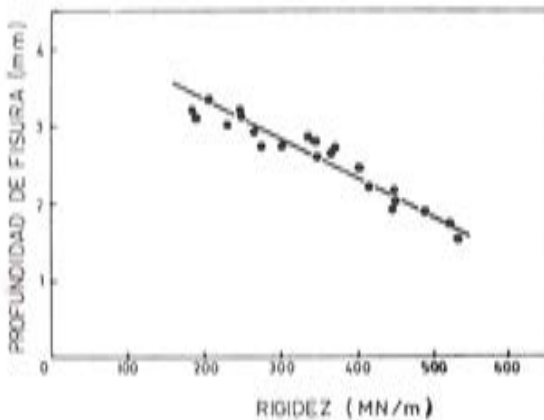


Fig. 3. Curvas de elongabilidad de alambres fisurados.

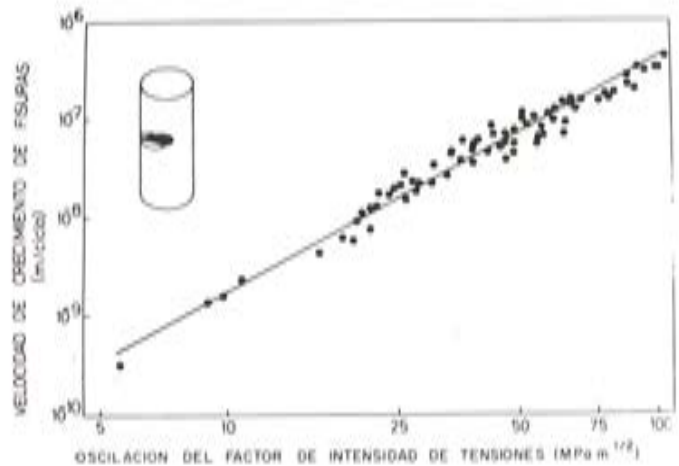
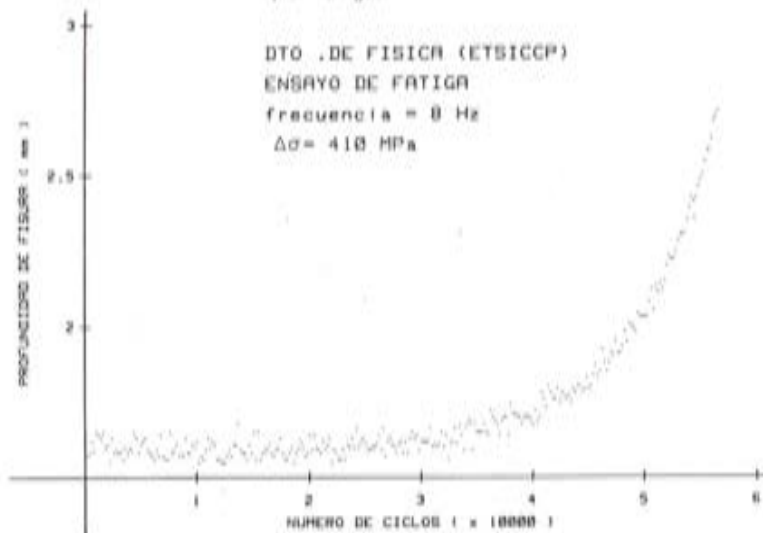


Fig. 5. Datos de propagación de fisuras por fatiga.

Fig. 4. Evolución de la fisura en un ensayo de fatiga.



## INICIACION DE FISURAS POR FATIGA

El estudio realizado sobre las condiciones de iniciación de una fisura por fatiga en acero de pretensar se apoya en dos hipótesis formuladas para otros materiales metálicos. La primera de ellas (8) establece que la fisura se genera sobre una zona cíclicamente plastificada, cuyo tamaño ha de superar un valor mínimo, del orden de  $100 \mu\text{m}$ . De acuerdo con la segunda hipótesis, el número de ciclos necesario para generar la fisura,  $N_i$ , es función de la oscilación  $\Delta K_0$  del factor de intensidad de tensiones correspondiente al tamaño de la fisura recién iniciada (9).

$$N_i = f(\Delta K_0) \quad (6)$$

Para comprobar la validez de esta relación y obtenerla de forma expresa, se han realizado ensayos de tracción oscilante sobre alambres de pretensar planificados y entallados (figura 6). Se ha elegido esta geometría por ser conocida la distribución de tensiones que se produce en las proximidades del fondo de la entalla al someter la probeta a un esfuerzo de tracción (10), así como el factor de intensidad de tensiones correspondiente a la fisura que se genera (11). Consecuentemente, si se aplica a la probeta una carga que varíe sinusoidalmente, es posible determinar tanto la extensión de la zona cíclicamente plastificada, como la oscilación  $\Delta K_0$ . Se han ensayado probetas con entallas de distinto radio, habiéndose variado de un ensayo a otro la amplitud y frecuencia de la ley de cargas aplicada. La iniciación de la fisura en cada probeta se detecta visualmente observando durante el ensayo el fondo de la entalla mediante una lupa estereoscópica de 20 aumentos. El registro correspondiente del contador de ciclos de la máquina proporciona el número de ciclos de iniciación  $N_i$ .



Fig. 6. Probeta para estudio de la iniciación de fisuras.

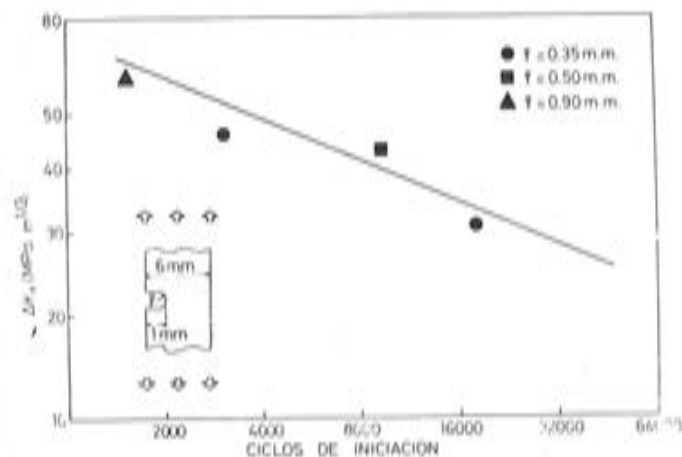


Fig. 7. Datos de iniciación de fisuras por fatiga.

Los resultados obtenidos pueden apreciarse en la figura 7. La relación (6) adopta una expresión de forma potencial, como en el caso de otros aceros (9, 12):

$$N_i = B (\Delta K_0)^m \quad (7)$$

donde  $m = -3,1$  y  $B = 5,9 \cdot 10^8$ , cuando  $\Delta K_0$  se expresa en  $\text{MPa m}^{1/2}$ .

## CRITERIO DE FRACTURA

El criterio de fractura más usado en la práctica se basa en igualar el factor de intensidad de tensiones  $K$  a un valor crítico característico de material  $K_c$ :

$$K = K_c \quad (8)$$

Este criterio, con la expresión del factor  $K$  dado por (2), ha demostrado ser una condición de rotura válida para alambres de acero de pretensar con fisuras de superficie en forma de lúnula (7). La figura 8 corrobora esta afirmación, mostrando cómo los resultados experimentales se ajustan a la curva teórica. Se ha representado la carga de rotura frente a la profundidad de fisura para alambres del acero estudiado, de 7 mm de diámetro. La magnitud característica  $K_c$  ha sido calculada por ajuste, a pesar de tener un significado preciso que, en principio, permite determinarla experimentalmente de forma independiente. Sin embargo, en alambres trefilados de pequeño diámetro no es posible, por falta de material, realizar los ensayos normalizados que conducen a su determinación, con lo cual el procedimiento expuesto constituye un modo original de resolver este otro problema.

El criterio de fractura permite determinar el tamaño crítico de fisura correspondiente a un proceso de carga cíclica, esto es, el que determina la rotura. Basta para ello resolver la ecuación en  $a$  que resulta de sustituir en la igualdad (8) la expresión (2) de  $K$  con el valor extremo de  $\sigma$ . Gráficamente equivaldría a obtener en la curva de la figura 8 la profundidad de fisura que produce la rotura para un valor de la carga igual al máximo del proceso.

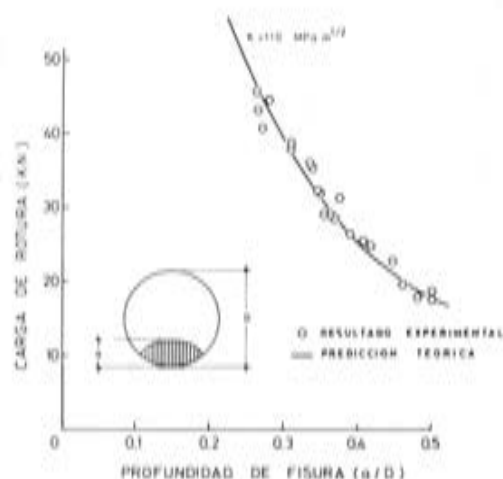


Fig. 8. Criterio de fractura de alambre de pretensar.

## PREDICCIÓN DE LA RESISTENCIA A FATIGA

La resistencia a fatiga de un alambre se caracteriza por medio de las curvas de fatiga o curvas de Wohler (13). Estas curvas se construyen representando en abscisas el número de ciclos  $N$  que soporta el alambre sometido a carga cíclica, y en ordenadas el intervalo de oscilación de la carga, expresada en términos de la tensión nominal. Para cada valor medio de esta última se obtiene una curva diferente, con la particularidad de que todas ellas suelen presentar una asíntota horizontal, es decir, un intervalo de oscilación por debajo del cual el

alambre tiene una duración ilimitada (límite de fatiga). La vida  $N$  se compone de dos sumandos que representan, respectivamente, el período de iniciación de la fisura,  $N_i$ , y el de propagación hasta alcanzar el tamaño crítico  $N_p$ :

$$N = N_i + N_p$$

La duración  $N_i$  de la etapa de iniciación puede obtenerse a partir de la ecuación (7), una vez comprobada la condición de iniciación, esto es, la existencia de una zona cíclicamente plastificada sobre la cual se genera la fisura. Para que se forme esta zona en algún punto de la sección transversal, la tensión ha de superar el límite elástico cíclico. La figura 9 muestra las curvas tensión-deformación monótona y cíclica del acero de pretensar con el que se ha llevado a cabo la parte experimental de la investigación. Como puede verse las dos curvas no coinciden y ello da lugar a que el límite elástico cíclico, 800 MPa, sea inferior al convencional, 1200 MPa. La tensión exterior aplicada no puede compararse directamente con los 800 MPa por la existencia en la superficie de los alambres de tensiones residuales (14) que se suman a dicha tensión exterior. Su valor medio puede estimarse en 200 MPa y afectan a una capa de material del orden de 250  $\mu\text{m}$ .

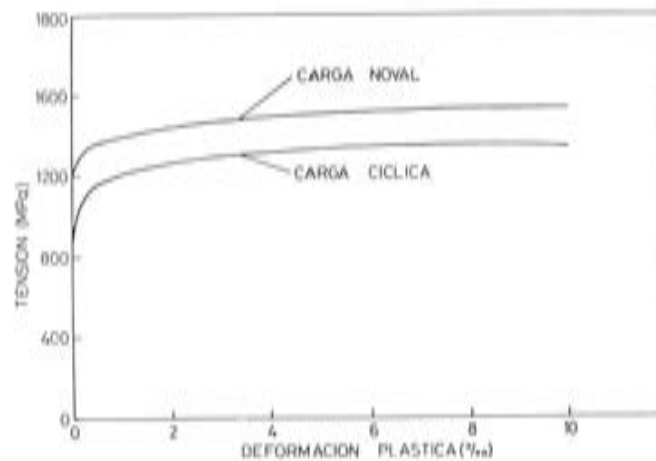


Fig. 9. Curvas tensión-deformación, noval y cíclica, de acero de pretensar.

En conclusión, se generará una fisura cuando el valor máximo, de la tensión aplicada sea superior a 600 MPa, condición que determina el límite de fatiga. La profundidad inicial  $a_0$  de esta fisura será de 250  $\mu\text{m}$ , y el número de ciclos necesarios para que se genere viene dado por la ecuación (7) con:

$$\Delta K_0 = 0,94 \Delta \sigma \sqrt{\pi a_0} \quad (9)$$

es decir:

$$N_i = B(0,94 \Delta \sigma \sqrt{\pi a_0})^m \quad (10)$$

donde  $\Delta \sigma$  es la oscilación de tensión en el alambre. Por ser la fisura inicial tal que  $a_0/D < 0,15$ , no puede emplearse, en la expresión (2) del factor de intensidad de tensiones, la función  $M$  dada por la ecuación (3). El valor 0,94 utilizado deriva de un estudio numérico que se recoge en la referencia (15).

La duración  $N_p$  del período de propagación se obtiene por integración de la ecuación (5) entre el tamaño inicial de la fisura  $a_0$ , igual a  $250 \mu$ , y el tamaño crítico  $a_c$  que se determina a partir del criterio de fractura como ya se ha indicado. Teniendo en cuenta las dos expresiones del factor  $K$  utilizadas, según los valores de  $a/D$ , resulta:

$$N_p = \frac{1}{C (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^n} \left\{ \int_{a_0}^{0,15D} \frac{da}{(0,94 \sqrt{a})^n} + \int_{0,15D}^{a_c} \frac{da}{(M \sqrt{a})^n} \right\} \quad (11)$$

Las relaciones (10) y (11) proporcionan los dos términos cuya suma constituye la vida del alambre. Ambos sumandos dependen de la oscilación de tensiones  $\Delta \sigma$ , a su vez debida únicamente a la tensión exterior ya que las tensiones residuales permanecen constantes. El resto de las magnitudes que determinan la vida del alambre son características del mismo  $a_0$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $m$ , si bien la tensión máxima aplicada afecta a dicha vida a través del tamaño crítico de fisura  $a_c$ , que se calcula aplicando el criterio de fractura. Dicha tensión máxima influye igualmente en el límite de fatiga tal como se ha indicado. Consecuentemente, sumando miembro a miembro las expresiones (10) y (11) se obtiene la ecuación general de las curvas de fatiga del acero de pretensar. En la figura 10 se ha representado gráficamente dicha ecuación para el acero estudiado y para un valor mínimo de la tensión aplicada igual a cero. También se han representado resultados experimentales correspondientes a ensayos realizados en las condiciones descritas, con este acero.

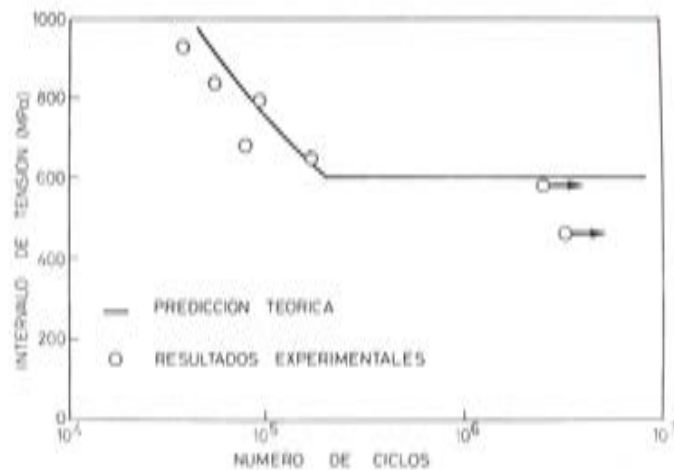


Fig. 10. Curvas de fatiga de alambre de pretensar.

### MATERIAL ENSAYADO

Toda la experimentación se ha realizado con un acero de pretensar comercial, trefilado y estabilizado, de 7 mm de diámetro. Su composición química y sus características mecánicas son:

<i>C</i>	<i>Mn</i>	<i>Si</i>	<i>S</i>	<i>P</i>
0,78%	0,67%	0,21%	0,012%	0,022%

Límite elástico al 0,2%	1.400 MPa
Resistencia a tracción	1.620 MPa
Módulo de elasticidad	197.000 MPa
Alargamiento bajo carga máxima	6,5%
Estricción	40%

## ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La coincidencia de resultados teóricos y experimentales que se aprecia en la figura 10 es una muestra de la utilidad de la Mecánica de Fractura como instrumento teórico para abordar problemas de fatiga relativos a estructuras de hormigón. Incluso la importante dispersión intrínseca de este tipo de experimentos, patente en la figura 10, está contemplada en el desarrollo teórico puesto que factores importantes del mismo, como el valor de las tensiones residuales y la extensión de la zona que afectan, varían con cierta aleatoriedad en un mismo alambre.

Puede afirmarse pues que el resultado de aplicar por primera vez la Mecánica de Fractura al estudio de la fatiga de armaduras activas en estructuras de hormigón, es prometedor. El tema está lejos de haberse agotado y son muchas e importantes las cuestiones pendientes de resolución tanto de tipo básico (influencia del valor medio de la sollicitación cíclica sobre la iniciación) como de aplicación (efecto de sollicitaciones cíclicas con oscilaciones variables). Por tales motivos, este tema constituye una línea de investigación prioritaria dentro del departamento de los autores, a la cual se está dedicando un notable esfuerzo. No obstante, hay muchos otros problemas de Ingeniería Civil no resueltos que pueden abordarse mediante Mecánica de Fractura, y es de esperar que la divulgación de los resultados aquí expuestos contribuya a fomentar la investigación en este campo.

## REFERENCIAS

- (1) Det Norske Veritas: "Rules for the Design, Construction and Inspection of Offshores Structures". Appendix D. *Concrete Structures*. Det Norske Veritas, 1977.
- (2) F.I.P. "Recommendations for the Design and Construction of Offshore Structures". F.I.P., 1977.
- (3) Norwegian Petroleum Directorate: "Regulations for the Structural Design of Fixed Structures on the Norwegian Continental Shelf". *Norwegian Petroleum Directorate*, 1977.
- (4) Ople, F.S. y Hulsbos, C.L. *ACI Journal No. 1 Vol. 63*, 59-81, 1966.
- (5) Waagard, K. "Veritas' Fatigue Design Recommendation for Offshore Concrete Structures-Background for special Requirements Offshore Structures". *9º Congreso Internacional de la F.I.P.*, Estocolmo, 1982.
- (6) Elices, M. y Sánchez-Gálvez, V. *Hormigón y Acero 125*, 85-99, 1977.
- (7) Valiente, A. *Tesis Doctoral*. Universidad Politécnica de Madrid, 1980.
- (8) Forsyth, P.J.E. *Proceedings del Symposium on Crack Propagation*, 76-82, Cranfield, U.K. 1971.
- (9) Salah el din, A.S. y Lovegrove, J.M. *Proceedings del IABSE Colloquium*, 247-254, Lausana, 1982.
- (10) Creager, M. y París, P.C. *International Journal of Fracture Mechanics*, 3, 247-252, 1967.
- (11) Rooke D.P. y Cartwright, D.J. "Compendium of Stress Intensity Factors". *Her Majesty's Stationary Office*, Londres, 1976.
- (12) Barnby J.T. y Holder, R. *International Journal of Fracture*, 12, 631-637, 1976.
- (13) *Norma UNE 7118*.
- (14) Elices, M., Maeder, G. y Sánchez-Gálvez, V. *British Corrosion Journal*, 18, 80-81, 1983.
- (15) Elices, M. "Fracture of Steels for Reinforcing and Prestressing Concrete" en "*Fracture of Concrete and Reinforced Concrete*", editor G.C. Sih, Martinus Nijhoff Publishers (pendiente de aparición).

## Noticias de la Asociación Internacional de Puentes y Estructuras (IABSE)

### **SIMPOSIO SOBRE "SEGURIDAD Y GARANTIA DE CALIDAD DE LAS ESTRUCTURAS". TOKYO, 4-6 SETIEMBRE 1986**

La mayor parte de los fallos de las obras de ingeniería se deben a la concurrencia de uno o varios errores o negligencias de los que intervienen en su planificación, proyecto, cálculo y ejecución. Tales fallos pueden evitarse, al menos parcialmente, mejorando la garantía de calidad de los proyectos, la ejecución y la utilización de las estructuras. Los aspectos humanos y de organización juegan también un importante papel.

Por todo ello, la mejora de la garantía de calidad es de primordial importancia en todos los campos de la ingeniería civil. Y éste es, precisamente, el objetivo que se persigue con la celebración de este Simposio que habrá de celebrarse, en Tokyo, del 4 al 6 de setiembre de 1986.

Los que deseen presentar alguna comunicación a dicho Simposio u obtener información adicional sobre los actos programados, deberán dirigirse a:

I A B S E Secretariat  
ETH-Hönggerberg  
CH-8093 Zurich, Switzerland

### **INFORME FINAL SOBRE EL CONGRESO DE LA IABSE EN VANCOUVER, EN 1984, SOBRE "PRESENTE Y FUTURO DE LA INGENIERIA ESTRUCTURAL"**

En este informe final se incluyen los textos de las 130 comunicaciones y 70 posters que fueron presentados, por destacados especialistas de los cinco continentes, durante el Congreso de la IABSE celebrado en Vancouver, en setiembre de 1984.

Esta publicación ofrece una amplia información sobre el estado actual de conocimientos y los posibles desarrollos futuros en el campo de la ingeniería estructural.

Con la ayuda de ejemplos prácticos, en estas comunicaciones se estudian los diversos aspectos relativos a:

- Proceso constructivo: Análisis, proyecto, construcción y conservación.
- Materiales: Estructuras metálicas, estructuras de hormigón en masa, armado y pretensado, estructuras de madera, estructuras compuestas.
- Aspectos particulares: Seguridad, aspectos funcionales, aplicación de los ordenadores.

También se incluye el Coloquio celebrado en la Sesión Plenaria, para discutir el tema "Responsabilidad profesional en las obras de ingeniería".

El precio de esta publicación es de 186,- francos suizos (124,- francos suizos para los Miembros de la IABSE).

Los pedidos deben dirigirse a:

I A B S E Secretariat  
ETH-Hönggerberg  
CH-8093 Zurich, Suiza

## Comportamiento del hormigón en fractura

J. Planas, H. Corres y M. Elices  
Departamento de Física y Física de Materiales  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid

### INTRODUCCION

La predicción de las sollicitaciones capaces de producir el colapso de una estructura debería, idealmente, poder realizarse a partir de las propiedades de los materiales y de sus uniones mutuas, pero todavía se está lejos de conseguirlo.

Cuando se hace la hipótesis muy general de que el comportamiento del material está completamente definido por relaciones entre tensiones y deformaciones unitarias, las fórmulas que se obtienen pertenecen al grupo que denominaremos de la Teoría Clásica de Agotamiento, caracterizada por predecir que dos estructuras geoméricamente semejantes colapsan para el mismo nivel de tensiones.

Todas las fórmulas de proyecto para estructuras de hormigón incluidas en las distintas normativas vigentes pertenecen a dicho grupo. Y, sin embargo, es bien sabido que en muchas situaciones la tensión de rotura depende del tamaño de la probeta o elemento ensayado. Baste citar aquí los ensayos de compresión y de flexotracción, en los que dicho efecto es bien conocido [1, 2]. Esto indica que, por lo menos en algunos casos, la descripción clásica del comportamiento del hormigón es insuficiente.

El hecho de que el colapso de los elementos de hormigón que se apartan de la Teoría Clásica de Agotamiento se produce con aparición de fisuras macroscópicas, sugiere la posibilidad de que su estudio tenga que hacerse en el marco de la Mecánica de la Fractura. Sin embargo, los intentos realizados en los últimos 25 años de explicar el comportamiento en fractura del hormigón mediante las Teorías de Fractura desarrolladas para otros materiales resultaron infructuosos, como pone de manifiesto la ausencia absoluta de normativa al respecto.

Solo recientemente se han desarrollado teorías del comportamiento en fractura del hormigón que parecen poder explicar gran parte de las observaciones experimentales [3, 4, 5, 6, 7]. Se trata en todos los casos de teorías específicamente desarrolladas para el hormigón ya que las Teorías de Fractura Elástica Lineal y de Fractura Elastoplástica, mucho más desarrolladas, no resultan ser aplicables al hormigón en la mayoría de los casos prácticos.

En este trabajo se presentan en forma sucinta algunos modelos de Fractura No Lineal (FNL) aplicables al hormigón, previa justificación de las limitaciones de las Teorías de Fractura Elástica Lineal (FEL) y de Fractura Elastoplástica (FEP).

Se describe seguidamente el método experimental seguido para determinar los parámetros básicos de fractura necesarios para proyecto y se presentan los resultados de la experimentación desarrollada por los autores. Finalmente, se discuten dichos resultados a la luz de las teorías previamente expuestas.

## LIMITACIONES DE LAS TEORIAS DE FRACTURA ELASTICA LINEAL Y DE FRACTURA ELASTOPLASTICA EN SU APLICACION AL HORMIGON

Tanto la FEL como la FEP suponen la existencia de una fisura ("defecto") inicial que puede crecer cuando el nivel de sollicitación alcance un valor crítico.

Es generalmente admitido que, en un proceso de carga monótono, el material alejado del frente de la fisura se mantiene en régimen elástico lineal, en tanto que en una cierta región en torno al borde de la grieta, que denominaremos zona no lineal (NL), las deformaciones son tan elevadas que el material ha dejado de comportarse linealmente. La zona no lineal (figura 1) se subdivide a su vez en una zona plástica (P) y en una zona de fractura (F) en la que las deformaciones son suficientes para que se inicien los procesos de fractura propiamente dichos, es decir, la pérdida de continuidad material.

### Fractura Elástica Lineal

La Teoría de Fractura Elástica Lineal es estrictamente válida cuando se anula el cociente  $r_{NL}/r$  entre el tamaño de la zona no lineal justo antes de iniciarse la propagación y la menor dimensión de la pieza medida desde el borde de la fisura. En la práctica, la FEL constituye una excelente aproximación cuando dicho cociente es *suficientemente* pequeño.

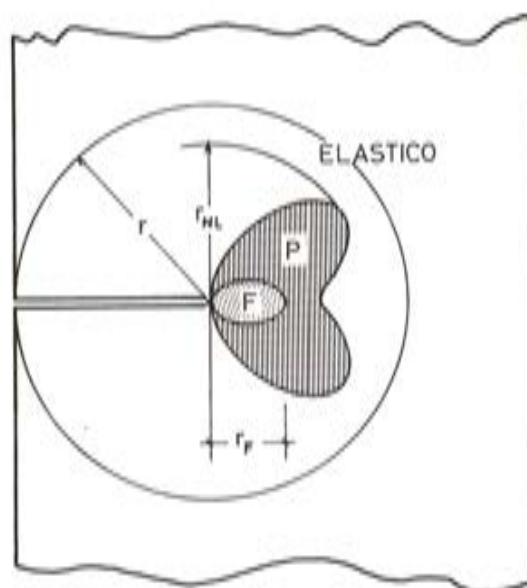


Fig. 1. Zonas de comportamiento elástico, plástico (P) y en fractura (F) en una pieza fisurada.

Aunque no existe un acuerdo universal sobre cual es el máximo valor aceptable para  $r_{NL}/r$ , en general se aceptan valores del orden de 0,04 [8, 9]. Esto significa que todas las dimensiones de la pieza, *incluida la fisura*, deben ser superiores a 25 veces el tamaño de la zona no lineal.

Aunque el tamaño de la zona no lineal depende mucho de la geometría de la pieza estudiada y de las características del hormigón, la experimentación realizada por diversos autores parece indicar que, en el mejor de los casos, es varias veces superior al tamaño máximo del árido. Se han medido valores de  $r_{NL}$  de 80 a 200 mm para hormigón [10, 11], y de 25 a 70 mm para mortero [12].

Tomando estos valores como base, resulta de lo anteriormente expuesto que las dimensiones mínimas de una estructura para poder aplicar la Teoría de Fractura Elástica Lineal es de unos 2 m para hormigones y de unos 70 cm para morteros. Obviamente, si se exceptúan las presas y los muros y pantallas continuas resulta que, prácticamente, ninguna estructura de hormigón puede analizarse con un cierto rigor mediante la FEL. Y en los casos exceptuados será aplicable solamente a partir del momento en que, por procesos que la teoría es incapaz de analizar, se haya producido una fisura de tamaño suficiente, es decir, de varios metros.

Conviene señalar la diferencia fundamental que esto supone con respecto a las estructuras metálicas. En efecto, en este último tipo de estructuras es posible que existan fisuras macroscópicas previas (inclusiones de escoria, defectos de laminación, defectos de soldadura) de tamaño suficiente para que su estabilidad pueda analizarse mediante la Teoría de Fractura Elástica Lineal. Por el contrario un elemento estructural de hormigón bien construido no contiene, recién fraguado, fisuras de más de un metro. Pero pueden aparecer fisuras macroscópicas, y en muchos casos así está previsto, debido a las solicitaciones impuestas (incluyendo en ellas, obviamente, las inducidas por retracción).

De todo lo dicho puede concluirse que la FEL es inaplicable a la mayoría de los casos prácticos de fisuración de elementos de hormigón, aunque puede resultar útil en el estudio de la evolución de situaciones patológicas en grandes estructuras.

### Fractura Elastoplástica

La FEP se ha desarrollado para aplicación a los casos en que, frente a la fisura, existe una zona plástica grande comparada con las dimensiones de la pieza, pero la zona de fractura es muy pequeña, de forma que la situación real se aproxima al caso límite en que  $r_F/r_{NL} = 0$  (Fig. 1). Esto supone que el material es capaz de sufrir grandes deformaciones plásticas antes de que se inicien los procesos de fractura, lo que no parece ser aplicable en el caso del hormigón.

En la figura 2a se han esquematizado los comportamientos en tracción simple de un acero al carbono y de un hormigón, pudiéndose apreciar la diferencia esencial de comportamiento entre ambos materiales. En tanto que el acero presenta una rama plástica con endurecimiento por deformación muy desarrollada, el hormigón presenta un comportamiento no lineal caracterizado por un ablandamiento por deformación, que es universalmente interpretado como el resultado de un proceso de microfisuración creciente, es decir, como un proceso de fractura. De acuerdo con esta interpretación, las zonas no lineales frente al borde de fisura tendrían el aspecto mostrado en la figura 2b, para un acero, y en la figura 2c, para un hormigón.

Puede concluirse, por tanto, que en un hormigón la relación  $r_F/r_{NL}$  es siempre del orden de la unidad, y que, en consecuencia, la FEP no puede ser una buena aproximación para el estudio de la fractura en tal material.

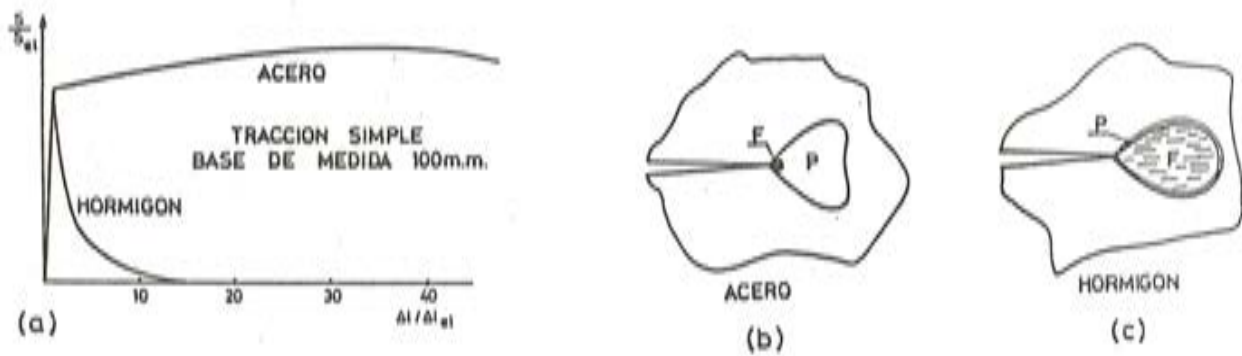


Fig. 2. Esquema del comportamiento en tracción simple de un acero al carbono y de un hormigón (a). Zonas No Lineales para un acero (b) y un hormigón (c).

### MODELOS NO LINEALES DE FRACTURA PARA EL HORMIGÓN

A la vista de las limitaciones de las teorías de fractura más desarrolladas, parece evidente la necesidad de crear otra u otras teorías específicas para el hormigón, cuyos requisitos básicos son: permitir la descripción del proceso de fisuración de piezas pequeñas de hormigón con o sin grietas previas, y converger hacia la FEL en el límite de grandes piezas con grandes fisuras iniciales.

Resulta pues necesario llevar a cabo la descripción (macroscópica, puesto que a ella limitamos el alcance de este trabajo) de los fenómenos que tienen lugar en la zona de fractura. Para ello, todos los modelos o teorías desarrollados hasta hoy se basan en el comportamiento en fractura de un elemento sometido a tracción simple, con, a lo sumo, una posterior extrapolación teórica a estados triaxiales de sollicitación, debido a que, hoy por hoy, no existen resultados experimentales de fractura estable de hormigón en estados de tracción multiaxial.

Como ya se ha indicado (véase la figura 2a), el ensayo de tracción simple de un hormigón, presenta una pequeña no linealidad antes de ser alcanzada la tensión máxima, seguida de una rama extensa con ablandamiento por deformación. Podría pensarse en describir el comportamiento del hormigón a través de la curva tensión-deformación obtenida en un ensayo, pero tal aproximación no es posible. En efecto, los ensayos realizados por Heilmann, Hilsdorf y Finsterwalder [13], muestran que a partir del inicio de la rama de ablandamiento,

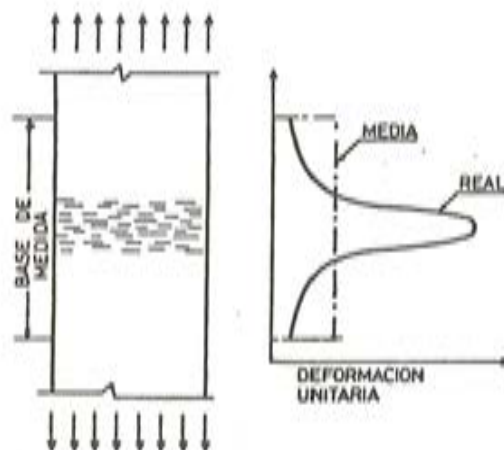


Fig. 3. Localización de deformaciones en la rama de ablandamiento.

las deformaciones tienden a concentrarse en torno a una sección de la probeta, de forma análoga a la localización de deformaciones que tiene lugar en el cuello de estricción de una probeta metálica ensayada en tracción simple. Por lo tanto, tal como se esquematiza en la figura 3, las deformaciones medidas son valores medios, no valores locales, y dependen de la longitud de la base de medida.

No existe, en conocimiento de los autores, una teoría capaz de tratar el problema de la localización de deformaciones en el hormigón sin la introducción de hipótesis simplificadas. A cada grupo de hipótesis básicas corresponde un modelo diferente, de los cuales se presentan a continuación dos de los mejor desarrollados: el Modelo de la Fisura Ficticia (Fictitious Crack Model) creado por Hillerborg [3] y el Modelo de Fisuración en Banda (Crack Band Model) desarrollado por Bazant [5].

### El modelo de la Fisura Ficticia

La hipótesis central del Modelo de la Fisura Ficticia es que la zona de localización de deformaciones en la rama de ablandamiento se reduce a un plano o, en términos matemáticos, que la función de distribución de deformaciones unitarias esquematizada en la figura 3, puede aproximarse por una función delta de Dirac. Supone, por tanto, una discontinuidad en corrimientos de magnitud  $w$  en el plano de fractura, y al mismo tiempo una continuidad material que capacita a la correspondiente "fisura ficticia" para transmitir carga (figura 4a). Supone también que la localización de deformaciones se produce a partir del pico de tensiones con descarga elástica del resto de la probeta. De acuerdo con esto, el alargamiento de la base de medida se descompone en un alargamiento uniformemente repartido más la apertura de fisura  $w$  (figura 4b), es decir:

$$\Delta L = L(e_r + s/E) + w \quad (1)$$

donde  $L$  es la base de medida,  $e_r$  la deformación remanente,  $s$  la tensión ingenieril y  $E$  el módulo elástico.

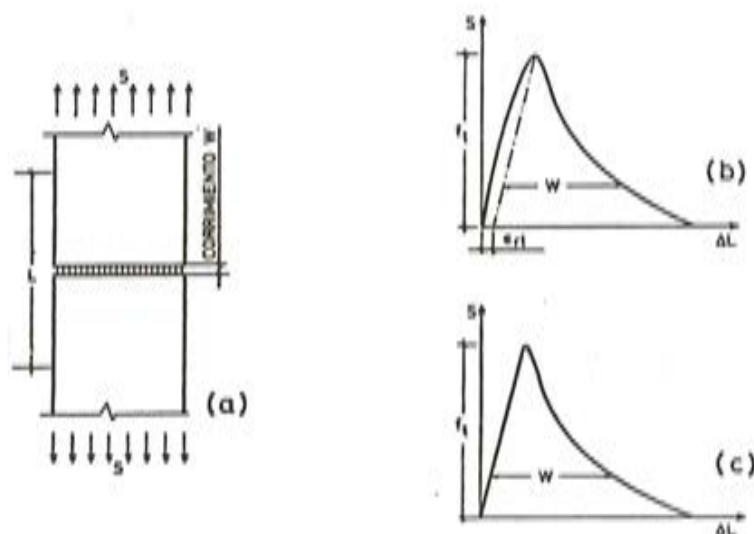


Fig. 4. El Modelo de la Fisura Ficticia: Idealización de la zona de fractura (a), curva tensión-alargamiento (b), curva tensión-alargamiento simplificada (c).

En la aplicación al cálculo, se simplifica la ecuación de comportamiento despreciando la no linealidad antes del pico (figura 4c), con lo que (1) se transforma en:

$$\Delta L = Ls/E + w \quad (2)$$

Resulta, pues, que el comportamiento completo puede definirse aproximadamente a través del módulo elástico  $E$ , la resistencia a tracción  $f_t$ , y la ecuación de la rama de ablandamiento expresada como:

$$s = s(w), \text{ con } s(0) = f_t \quad (3)$$

Con esta hipótesis simplificadora, es inmediato ver que el área encerrada bajo la curva  $s-\Delta L$  coincide con la encerrada bajo la curva  $s-w$  y que representa la energía necesaria para romper completamente una probeta de sección unidad, por lo que se denomina energía de fractura,  $G_F$ , y se adopta como parámetro básico del material junto a  $f_t$  y  $E$ .

La ecuación (3) debe ser, en principio, determinada experimentalmente. Sin embargo, Petersson [14] ha obtenido experimentalmente que hormigones con distinta dosificación tienen un comportamiento similar, definido esencialmente por  $f_t$  y  $G_F$  (figura 5), y que los resultados de los cálculos de cargas de rotura para diversos elementos dependen poco de la forma concreta de la curva  $s-w$ , siempre que se conserven la resistencia a tracción y la energía de fractura. Propone, por tanto, la sustitución de la curva real por un diagrama triangular para el estudio de tendencias y por el diagrama bilineal representado en la figura 5 cuando se requiera mayor precisión.

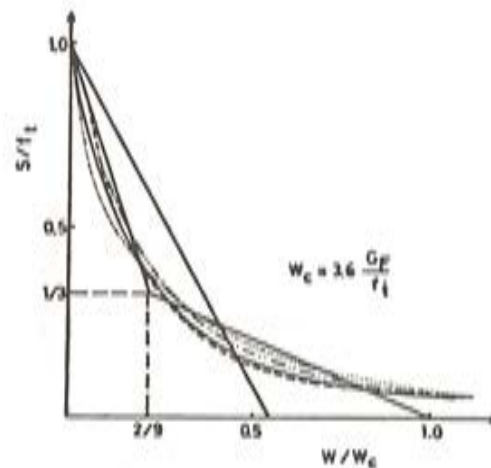


Fig. 5. Forma de las curvas tensión - apertura de fisura para diversos hormigones y aproximaciones triangular y bilineal de las mismas.

La hipótesis fundamental introducida a continuación por Hillerborg y colaboradores es que el modelo puede extrapolarse a cualquier proceso de creación de una fisura en modo de apertura. Aceptado este extremo, la forma de abordar el problema es conceptualmente simple, aunque requiere el uso de métodos numéricos relativamente complejos debido a la no linealidad del problema. En la figura 6 se ha representado la situación de una fisura en propagación descrita mediante este método, en la que puede observarse que la zona de fractura está simulada por la "fisura ficticia" sobre la que debe cumplirse la relación  $s=s(w)$  con la condición adicional de que las tensiones sean continuas a lo largo del eje  $X$ .

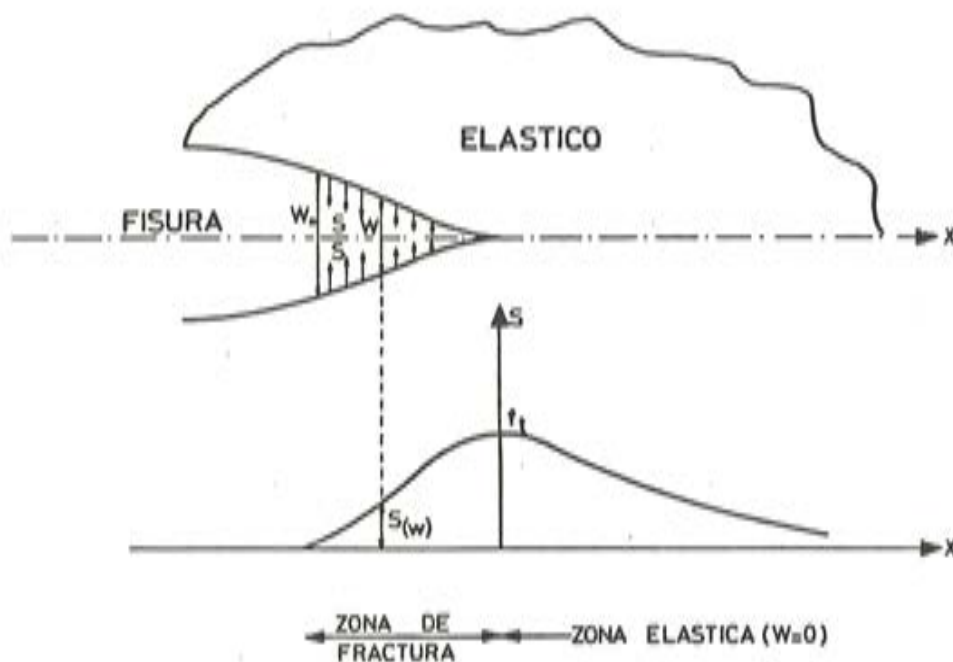


Fig. 6. Descripción de la propagación de una fisura mediante el Modelo de la Fisura Ficticia.

### El Modelo de Fisuración en Banda

En el modelo de Bazant la hipótesis básica es que en la rama de ablandamiento las deformaciones se concentran de manera uniforme en una banda de espesor  $d_c$  *característico del material*, en tanto que el resto de la probeta se descarga elásticamente (figura 7a). El comportamiento en fractura del hormigón queda, por tanto, definido por una curva tensión-deformación (figura 7b) y por  $d_c$ .

Aunque no existen limitaciones para la forma de la curva, hasta hoy sólo se ha utilizado en su forma más simplificada de diagrama triangular (figura 7c), por lo que el modelo está totalmente definido por cuatro parámetros: el módulo de elasticidad  $E$ , la resistencia a tracción  $f_t$ , la energía de fractura  $G_F$  y la anchura de banda  $d_c$ .

Una vez que se fija la anchura de banda, el modelo es prácticamente idéntico al de la fisura ficticia, como señala el propio Bazant. En efecto, reescribiendo la ecuación (2) en términos del presente modelo, donde nuevamente hemos despreciado la no linealidad antes del pico, resulta:

$$\Delta L = (L - d_c) s/E + e_b d_c \quad (5)$$

donde  $e_b$  es la deformación unitaria en la banda de fisuración. La similitud entre ambas ecuaciones es patente, siendo  $w$  el equivalente del término  $(e_b - s/E) d_c$ .

La ventaja fundamental de este modelo reside en su utilización mediante el Método de Elementos Finitos, ya que permite realizar todo el cálculo sin modificación de la topología de la malla. Sin embargo ello exige la definición del comportamiento en estados triaxiales. El análisis de la teoría triaxial desarrollada por Bazant en [5] haría excesivamente larga esta exposición, sin aportar nuevos conceptos de Mecánica de Fractura, por lo que no será desarrollado.

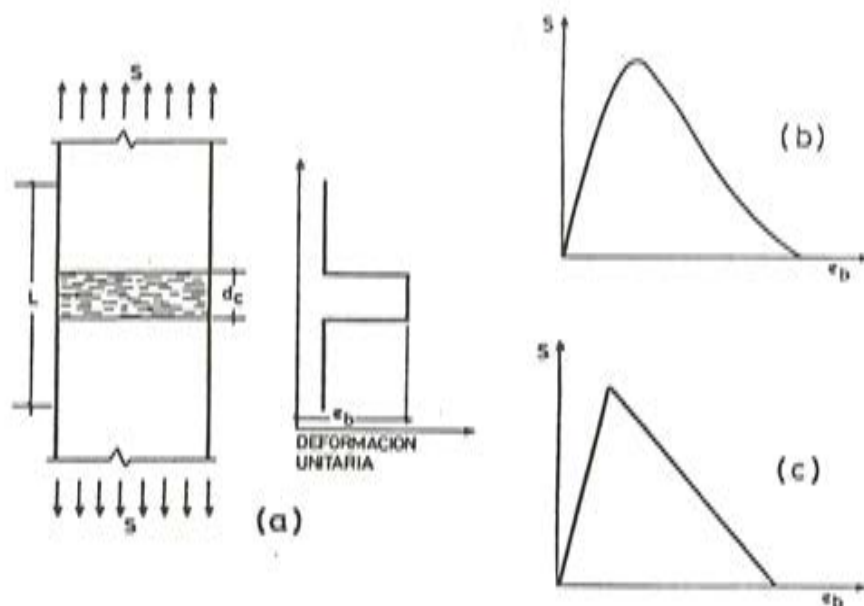


Fig. 7. Modelo de Fisuración en Banda: Localización de deformaciones (a), curva tensión-deformación en la banda de fisuración (b), diagrama simplificado para la curva anterior (c).

#### DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LOS PARAMETROS DE FRACTURA

Los modelos de fractura no lineal que acaban de describirse se basan en el comportamiento del hormigón en tracción. De acuerdo con ello, los únicos ensayos que suministran toda la información necesaria son los ensayos estables de tracción simple. Sin embargo, este tipo de ensayos son difíciles de llevar a cabo debido a las exigencias de rigidez del sistema de carga y de la propia probeta (para una discusión completa de las condiciones de estabilidad, véase [14]), por lo que no parecen adecuados como método rutinario de caracterización del material. Sin embargo, si se aceptan a priori los modelos simplificados antes expuestos, que quedan definidos por los parámetros  $f_t$ ,  $E$  y  $G_F$ , es posible desarrollar técnicas experimentales alternativas para su determinación.

La resistencia a tracción y el módulo de elasticidad pueden determinarse en un ensayo de tracción simple ordinario, aunque en general podría ser suficiente la determinación de  $E$  en compresión y la de  $f_t$  en el ensayo brasileño.

La determinación de la energía de fractura requiere, sin embargo, la definición de nuevos métodos. Como los modelos mencionados postulan que la energía necesaria para producir la rotura de una sección es independiente de la forma concreta en que se genere la fisura, resulta que para obtener  $G_F$  basta, en principio, con romper cualquier probeta por fisuración en modo de apertura (modo I) midiendo en el ensayo el trabajo  $W$  realizado en la producción de la ruptura. La energía de fractura vendrá entonces dada por:

$$G_F = W/A \quad (6)$$

donde  $A$  es el área nominal de la sección fisurada.

El problema fundamental del método consiste en la necesidad de garantizar que en  $W$  no se han incluido los términos de energías disipadas en otros procesos distintos del de fractura, como aplastamiento local en los puntos de carga, rozamientos, asientos irreversibles en dispositivos de apoyo, etc.

El comité de la RILEM TC 50—Fracture Mechanics of Concrete tiene en estudio un borrador de recomendaciones para la determinación de la energía de fractura mediante ensayos de flexión en tres puntos de vigas entalladas [15]. Prescindiendo de las especificaciones de detalle, el ensayo consiste en romper en forma estable una viga con una entalla central de profundidad igual a medio canto, registrando la curva carga-desplazamiento hasta rotura (figura 8). El área bajo esta curva es el trabajo  $W_0$  realizado por la carga central, al cual hay que añadir el trabajo realizado por el peso propio, lo que se lleva a cabo en la norma con la adición de un término de corrección  $W_p$ , introducido por Petersson en [14], y dado por:

$$W_p = mg \Delta_0 \quad (7)$$

donde  $mg$  es el peso de la probeta y  $\Delta_0$  la flecha de rotura (figura 8). Con ello, la energía de fractura se obtiene como :

$$G_F = (W_0 + mg \Delta_0)/b(d-a) \quad (8)$$

donde  $b$  es el ancho de la probeta,  $d$  su canto y  $a$  la profundidad de la entalla.

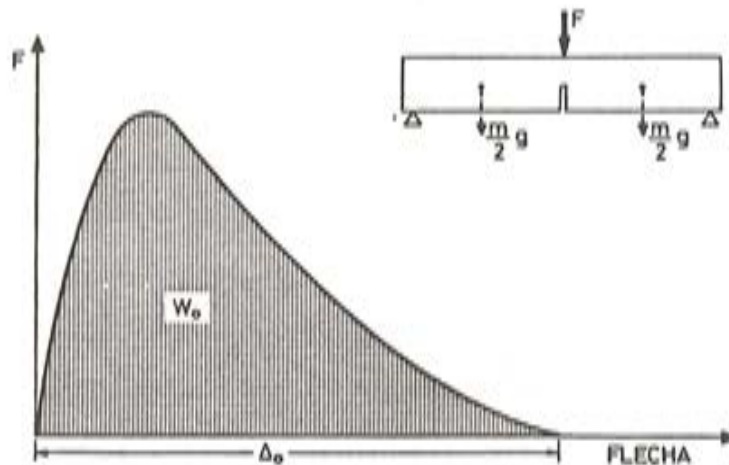


Fig. 8. Esquema del ensayo de determinación de la energía de fractura.

Aunque el borrador de recomendaciones no contempla esta posibilidad, en [14] se destaca la posibilidad de eliminar o disminuir el término de corrección mediante la introducción de contrapesos que disminuyan o anulen, respectivamente, el momento de las cargas permanentes en la sección de entalla.

## INVESTIGACION EXPERIMENTAL

### Material y probetas

El hormigón utilizado se dosificó según las especificaciones de la RILEM definidas en [17], con un tamaño máximo de árido de 20 mm. Las características mecánicas de las cuatro amasadas realizadas se recogen en la tabla 1.

**TABLA 1**  
Características mecánicas del hormigón

Amasada	Resistencia a compresión MPa	Resistencia a tracción MPa	Módulo de elasticidad MPa
1	37,3	3,1	24.270
2	32,8	2,8	21.460
3	37,8	3,1	23.420
4	36,8	3,2	26.650

Se hormigonaron tres tipos de probeta entallada, denominadas S1, S2 y S3, cuyas dimensiones se recogen en la tabla 2. En la fotografía 1 puede verse la proporción de tamaños, correspondiendo la de menor tamaño (S1) a la geometría contemplada en el borrador de recomendaciones RILEM.

**TABLA 2**  
Dimensiones de las probetas

Probeta	Longitud mm	Canto mm	Ancho mm	Profundidad entalla mm	Distancia entre apoyos mm
S1	840	100	100	50	800
S2	1.188	200	100	100	1.131
S3	1.455	300	100	150	1.386

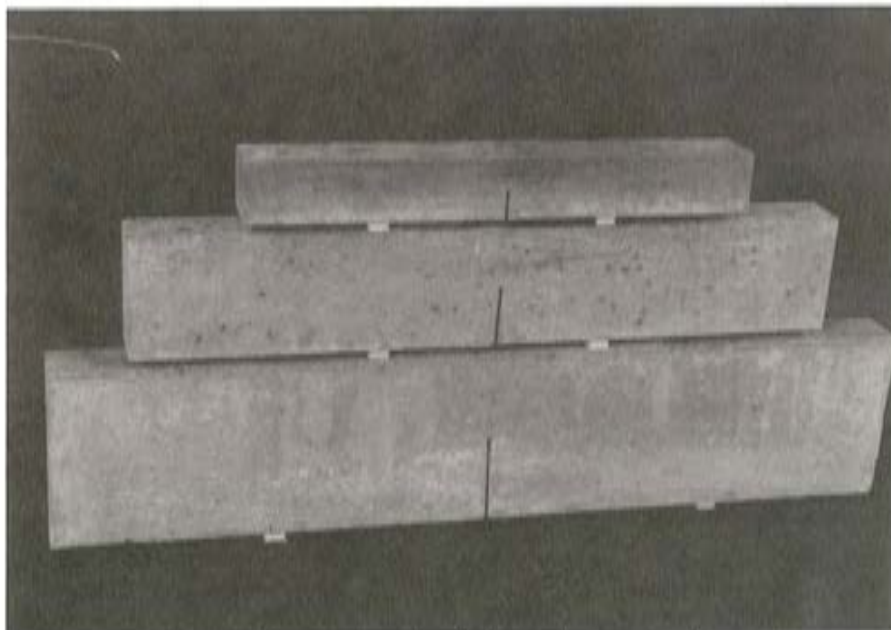


Foto 1. Vista comparativa de las probetas ensayadas.

Las probetas S1 se obtuvieron de la amasada 1, las S2 de la amasada 2 y las S3 de la tercera y cuarta amasadas. En todos los casos se utilizaron moldes de madera plastificada y las entallas se moldearon por inserción de una lámina de PVC rígido de 5 mm de espesor. Las probetas se curaron durante 24 horas en cámara a un 100 por 100 de HR y  $20 \pm 2^\circ\text{C}$ , siendo seguidamente almacenadas en balsa hasta el momento del ensayo.

Antes del ensayo se procedió a un esmerilado de las zonas de apoyo para asegurar un buen reparto de carga.

### Procedimiento experimental

Todos los ensayos se realizaron en una máquina servohidráulica INSTRON 1275 de 1 MN de capacidad, operada en control de desplazamientos, pero el montaje experimental fue ligeramente distinto para las probetas S1 y para las S2 y S3.

Para las S1, la carga se midió con una célula de carga de 5 kN con 0,1 N de resolución y una precisión del 0,25 por 100. La flecha respecto de los rodillos de apoyo se midió como media de las lecturas de dos transductores situados uno a cada lado de la probeta (fotografía 2). La precisión de los transductores utilizados es mejor de 0,005 mm. No se realizó compensación del peso propio.

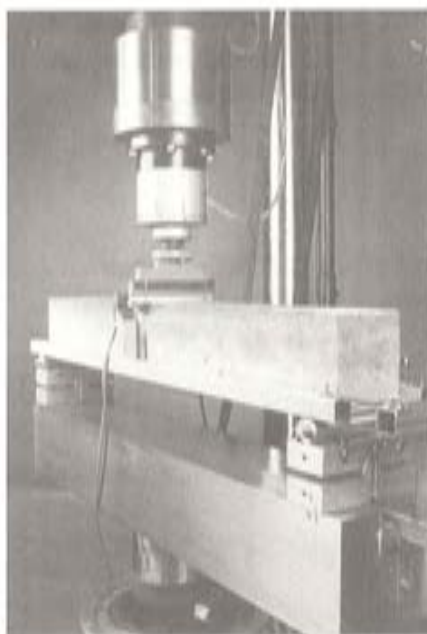


Foto 2. Sistema de medida de desplazamientos para las probetas S1.

Para las probetas S2 y S3 se utilizó una célula de carga de 100 kN, con una resolución de 2,5 N y una precisión del 0,25 por 100. La flecha se midió con un extensómetro de 5 mm de recorrido situado centralmente por debajo de la probeta, siéndole transmitido el corrimiento del rodillo de carga mediante un bastidor en U (figura 9). La precisión del extensómetro utilizado es superior a 0,0125 mm. Para evitar un término de corrección por peso propio excesivamente importante, se efectuó una compensación mediante contrapesos, esquematizada en la figura 9.

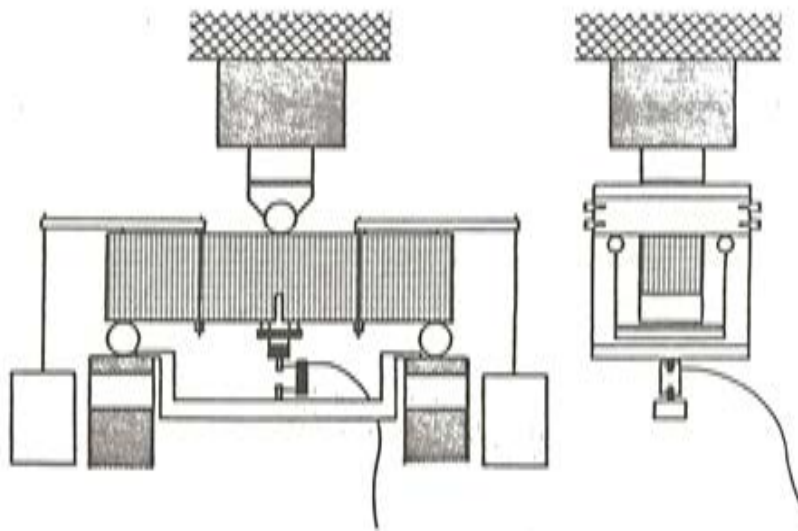


Fig. 9. Esquema del montaje experimental utilizado en los ensayos de las probetas S2 y S3.

En todos los ensayos las lecturas de carga y flecha se realizaron mediante un sistema de adquisición automática de datos, quedando la curva carga-desplazamiento almacenada en cinta digital como una matriz de  $800 \times 2$ . A partir de estos datos se calculó numéricamente la energía absorbida usando el método de Simpson.

### Resultados

En la tabla 3 se recogen los resultados fundamentales de la experimentación. Los valores entre paréntesis son las desviaciones estándar estimadas. La tensión neta de ruptura  $f_N$ , se define como:

$$f_N = M_{fR} / W_N \quad (10)$$

donde  $M_{fR}$  es el momento flector de rotura en la sección central y  $W_N$  es el módulo resistente de la sección neta.

TABLA 3  
Resultados experimentales

Tipo de probeta	Número de ensayos	Energía de fractura N/m	Tensión neta de rotura MPa
S1	13	123 (22)	4,73 (0,21)
S2	6	125 (30)	3,73 (0,34)
S3	7	118 (17)	3,60 (0,21)

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una de las hipótesis básicas de los modelos estudiados (incluida la FEL), es que la energía de fractura  $G_F$  es una propiedad del material y no depende, por tanto, del tamaño de la probeta utilizada en su determinación.

Los resultados de la tabla 3 parecen indicar que en el rango de tamaños estudiado la hipótesis es satisfactoria y un estudio estadístico más detallado, que no desarrollamos, indica que efectivamente las diferencias observadas en los valores medios de  $G_F$  no son significativas a un nivel de confianza del 10 por 100.

Analizado este extremo, pasamos a estudiar la capacidad de los modelos para predecir la tensión de rotura.

La Teoría de Fractura Elástica Lineal predice que la rotura se producirá, para la geometría estudiada, a una tensión neta dada por:

$$f_N = (G_F E/d)^{1/2} [g(a/d, d/l)]^{-1} \quad (11)$$

Los valores de la función de forma  $g$  (●) para  $a/d = 0,5$  y para  $d/l$  igual a  $1/4$ ,  $1/8$  y  $0$  (flexión pura), son, con un 1 por 100 de precisión, los siguientes [16]:

$$\begin{aligned} g(0,5; 1/4) &= 0,442 \\ g(0,5; 1/8) &= 0,461 \\ g(0,5; 0) &= 0,468 \end{aligned} \quad (12)$$

A partir de estos datos se han estimado los valores de la función de forma para las probetas ensayadas por interpolación lineal y parabólica, resultando las diferencias de ambos tipos de estimación inferiores al 0,25 por 100. Los valores obtenidos con interpolación parabólica para las distintas probetas son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{probetas S1} & g(0,5; 0,125) = 0,461 \\ \text{probetas S2} & g(0,5; 0,177) = 0,454 \\ \text{probetas S3} & g(0,5; 0,217) = 0,448 \end{array} \quad (13)$$

A la vista de las pequeñas diferencias existentes (en relación a las dispersiones experimentales), es posible adoptar un valor medio de  $g$  igual a 0,4545 para todas las probetas, con error inferior al 1,5 por 100. Con esta aproximación, la ecuación (11) se reduce a:

$$f_N = 2,20 (G_F E/d)^{1/2} \quad (14)$$

La ecuación (11) se adimensionaliza adecuadamente dividiendo por  $f_t$ , con lo que resulta

$$f_N/f_t = 2,20 (\ell_{ch}/d)^{1/2} \quad (15)$$

donde se ha definido la longitud característica  $\ell_{ch}$ , como:

$$\ell_{ch} = G_F E/f_t^2 \quad (16)$$

La ecuación 12 se ha representado en la figura 10 junto con los resultados experimentales, y las predicciones realizadas a través del Modelo de la Fisura Ficticia, para los diagramas s-w simplificados de la figura 5 (triangular y bilineal). Estas predicciones se han realizado con el programa descrito en [14], modificado para ser implementado en un HP-9826.

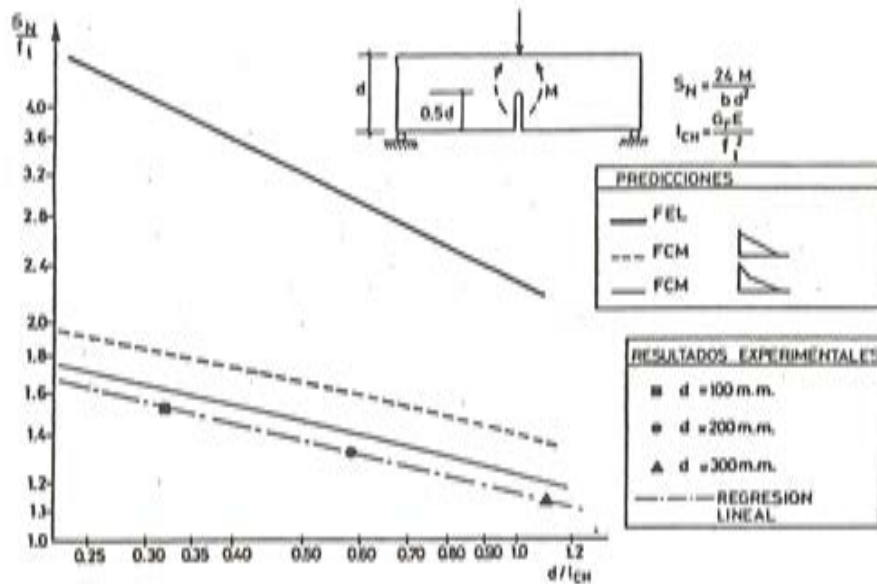


Fig. 10. Representación gráfica de los resultados experimentales junto con las predicciones teóricas de la FEL y del MFF.

Como puede observarse, la FEL predice tensiones de rotura de más del doble de las medidas, por lo que es completamente inadecuada para este rango de tamaños. Por el contrario, el modelo de la Fisura Ficticia reproduce bien la tendencia para los dos diagramas s-w, y el error en la predicción es inferior al 10 por 100 para la aproximación bilineal.

Debe notarse, finalmente, que la extrapolación de los resultados experimentales a través de la Teoría Clásica de Agotamiento da siempre resultados del lado de la inseguridad cuando se extrapola hacia mayores tamaños. Si, por ejemplo, se toman como base los resultados de los ensayos sobre las vigas de 100 mm de canto, las predicciones para vigas de 300 mm de canto están un 30 por 100 del lado de la inseguridad, porcentaje que se elevaría a un 60 por 100 para 600 mm de canto y a un 95 por 100 para 1 m de canto.

## CONCLUSIONES

1. La experimentación realizada confirma la idea de que la Teoría de Fractura Elástica Lineal no es aplicable a elementos de hormigón de tamaño reducido.
2. La Teoría Clásica de Agotamiento no parece aplicable a estructuras en que el colapso esté controlado por procesos de fractura.
3. No se han detectado diferencias en la energía de fractura para el rango de tamaños estudiado. Los resultados parecen apoyar la hipótesis básica de los modelos de la Fisura Ficticia y de la Fisuración en Banda.
4. El Modelo de la Fisura Ficticia predice bien la tendencia de evolución de la resistencia con el tamaño y en su versión de diagrama bilineal los errores de la predicción son inferiores al 10 por 100 para la geometría estudiada.

## REFERENCIAS

1. Blanks, R.F., "Mass concrete tests in large cylinders", *Proceedings ACI*, Vol. 31, 1935, pp. 280-303.
2. Wright, P.J.F., "The effect of the method of test on the flexural strength of concrete", *Mag. of Concr. Res.*, Vol. 4, 1952, pp. 67-76.
3. Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P.E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cem. and Concr. Res.*, Vol. 7, 1976, pp. 773-782.
4. Hillerborg, A. and Petersson, P.E., "Fracture mechanical calculations, test methods and results for concrete and similar materials", *Advances in Fracture Research*. 5th International Conference on Fracture, Cannes 29 March-2 April, 1981. pp. 1515-1522. Ed. D. François, Pergamon Press.
5. Bazant, Z.P., and Oh, B.H., "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", *Materials and Structures*, Vol. 16, N° 93, May-June, 1983, pp. 155-178.
6. Lorrain, M., and Loland, K.E., "Damage theory applied to concrete", en *Fracture Mechanics of Concrete*, Ed. F.H. Wittmann, 1983. Elsevier, Amsterdam, Netherlands. pp. 341-369.
7. Elices, M., "La influencia del tamaño en la fragilidad de un elemento estructural", *Tecnología 2000*, 1985, Universidad Politécnica de Madrid.
8. Knott, J.F., *Fundamentals of Fracture Mechanics*, Butterworths, London, England, 1973.
9. Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands, 1978.
10. Entov, V.M., and Yagust, V.I., "Experimental Investigation of the Regularities of Quasistatic Development of Macrocracks in Concrete", *Izvestiya Akademii Nauk SSR, Mekhanika Tverdogo Tela*, Vol. 4, 1975, pp. 93-103.
11. Chhuy, S., Benkirane, M.E., Baron, J., and François, D., "Crack Propagation in Prestressed Concrete. Interaction with Reinforcement", in *Advances in Fracture Research*, Vol. 4, proceedings of the 5th International Conference on Fracture, Cannes, 1981, Pergamon Press, 1981, pp. 1507-1514.
12. Wecharatana, M. and Shah, S.P., "Nonlinear Fracture Mechanics Parameters", en *Fracture Mechanics of Concrete*, Ed. F.H. Wittmann, 1983. Elsevier, Amsterdam, Netherlands. pp. 463-480.
13. Heilmann, H.G., Hilsdorf, H.H., and Finsterwalder, K., "Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugspannungen", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 203, 1969, W. Ernst & Sohn, Berlin.
14. Petersson, P.E., "Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials", thesis presented to the University of Lund, Sweden, in 1981, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
15. *Determination of Fracture Energy of Mortar and Concrete by means of Three-point bend Tests on notched Specimens*. Proposed RILEM recommendation, January 1982, revised June 1982. Lund Institute of Technology, Division of Building Materials.
16. Brown, W.F., and Srawley, J.E., *Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials*, ASTM-STP 410, 1967.
17. RILEM, *Materials and Structures*, Vol 7, N° 39, 1974, pp. 207-224.

## **Simposio RILEM-NCCL sobre "Utilización de plantas vegetales y sus fibras como materiales de construcción"**

Durante los días 7 al 9 de octubre de 1986 se celebrará en Bagdad (Irak), un Simposio organizado conjuntamente por la RILEM y el Centro Nacional de Laboratorios de la Construcción (NCCL), con el fin de estudiar y discutir el papel de las plantas vegetales tales como caña, bambú, cáscara de arroz, hojas de palmera, etc., como materiales para la construcción de viviendas de bajo coste.

Toda la información relativa a programas, impresos de inscripción, viajes, hoteles, etc., se enviará en fecha próxima a aquéllos que la soliciten.

Los interesados en presentar alguna Comunicación a este Simposio, deberán enviar a la Dirección que más adelante se indica, un resumen de no más de 300 palabras, en francés o inglés, antes del 15 de septiembre del presente año 1985. La fecha límite para la recepción del texto completo de la Comunicación es la del 15 de mayo de 1986.

Antes del Simposio, se entregará a los participantes un volumen con el texto de todas las Comunicaciones recibidas y que vayan a ser presentadas personalmente por los autores durante las Sesiones de Trabajo.

La correspondencia relacionada con este Simposio deberá dirigirse a:

Dr. Mufid Samarai  
National Centre for Construction Labs.  
Tell Mohammad/Mousa Bin Nesser Sq.  
Baghdad-Irak

## **Fallo del Trofeo Nacional de la Seguridad-Diploos 1984**

En el año 1969 las Mutuas Patronales de Accidentes de Trabajo, a través de su Asociación para la Prevención de Accidentes (APA), instituyeron el DIPLOOS-TROFEO NACIONAL DE LA SEGURIDAD, que desde entonces se otorga anualmente a la empresa que más se ha distinguido en su actuación en materia de Seguridad e Higiene Industrial, reflejada en la memoria de actividades de su Departamento de Prevención.

El fin perseguido no es otro que el de estimular la labor y dedicación de los Servicios de Prevención de las empresas, para hacer de los mismos un medio auténticamente eficaz en beneficio de sus trabajadores y de la economía de su gestión.

El fallo del Jurado Calificador de las memorias presentadas a concurso en esta decimo-sexta edición ha sido el siguiente:

**PRIMERO:** Conceder el DIPLOOS-TROFEO NACIONAL DE LA SEGURIDAD a la empresa: ASFALTOS ESPAÑOLES, S.A. (ASESA), de Tarragona.

**SEGUNDO:** Conceder tres Menciones Honoríficas a las memorias presentadas por las empresas:

- STARLUX, S.A. de Montmeló (Barcelona).
- ALTOS HORNOS DE VIZCAYA, S.A. de Ansio (Vizcaya).
- MOTOR IBERICA, S.A. de Barcelona.

## Comportamiento de sistemas de pretensado a temperaturas criogénicas

J. Planas\*, H. Corres\*, M. Elices\*, R. Chueca\*\*,  
\*Departamento de Física y Física de Materiales  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.  
Universidad Politécnica de Madrid  
\*\*Auxini, S.A. y Dragados y Construcciones, S.A.

### 1. INTRODUCCION

La utilización del hormigón pretensado en la construcción de tanques de almacenamiento de gas natural licuado y de fluidos criogénicos en general, se ha extendido ampliamente en las dos últimas décadas, impulsada por una creciente competitividad de este tipo de depósitos, frente a los tradicionales tanques metálicos.

Dicha competitividad se basa, por una parte, en una mayor facilidad para adaptarse a los crecientes requisitos de seguridad impuestos por Administraciones y Propietarios y, por otra, en la posibilidad de utilizar, en estructuras sometidas a condiciones criogénicas, las técnicas de pretensado desarrolladas para estructuras ordinarias, ya que el desarrollo de técnicas especiales para un mercado tan reducido no resultaría económicamente rentable.

La utilización a muy bajas temperaturas de sistemas de pretensado desarrollados y homologados para uso a temperaturas próximas a la ambiente presenta algunos problemas, muy particularmente el de la posibilidad de rotura frágil de las unidades de pretensado, entendiéndose por tal la rotura brusca con muy poca, o nula, deformación plástica.

Roturas frágiles a cargas inferiores a las del límite elástico convencional a baja temperatura, se han observado tanto en sistemas de anclaje mediante cuñas (1) como en sistemas de anclaje por botón en cabeza (6) y son atribuibles a la combinación de una disminución de la tenacidad con la temperatura (observable en todos los aceros con estructura cúbica centrada) y de una elevada triaxialidad generada por el sistema de anclaje.

Parece patente la necesidad de exigir que, para todo el rango de temperaturas de trabajo, los conjuntos tendón-anclaje presenten una ductilidad suficiente además de unas características resistentes mínimas. Para temperatura ambiente la FIP (2) estipula una resistencia mínima en ensayos estáticos a través de un factor de eficiencia y una deformación mínima en rotura del 2,3 por 100, además de las metodologías de ensayo a utilizar para su determinación. Tal tipo de recomendaciones internacionales no existen para situaciones de baja temperatura. En el congreso internacional de la FIP de 1982 se presentó una propuesta (3,4) en la que se consideraba como condición necesaria, para la utilización de un sistema, que la car-

ga de rotura del conjunto a  $-165^{\circ}\text{C}$  fuera superior al límite elástico convencional del acero a dicha temperatura. Además los autores de la propuesta sugirieron la conveniencia de fijar una deformación plástica superior al 0,2 por 100, para garantizar una cierta ductilidad, como se hace a temperatura ambiente, aunque no llegaron a establecer una cifra, entre otros motivos, por falta de suficientes datos experimentales.

Independientemente de la problemática de fijar requisitos mínimos a cumplir, existe el problema de la carencia de normativa de ensayos, necesaria para asegurar la representatividad de los resultados obtenidos.

En este trabajo se intenta contribuir a la clarificación del panorama descrito, de tres formas complementarias:

1. Presentando un programa mínimo de ensayos para la caracterización de sistemas de pretensado basado en un análisis previo de las formas típicas de colapso de un conjunto tendón anclaje.
2. Presentando resultados de un amplio programa experimental, encaminado a estudiar la influencia de la velocidad de sollicitación, de las cargas cíclicas y de las condiciones experimentales en el comportamiento de los sistemas de pretensado a  $-165^{\circ}\text{C}$ .
3. Presentando resultados del comportamiento de dos sistemas típicos de pretensado, analizándolos en relación con la propuesta de requisitos mínimos propuestos en el congreso de la FIP de 1982 (3, 4).

## **2. TIPOS DE COLAPSO DE UN CONJUNTO TENDON ANCLAJE, PARAMETROS QUE LOS GOBIERNAN Y PROPUESTA DE PROGRAMA DE ENSAYOS MINIMO**

Un conjunto tendón anclaje sometido a tensión uniforme puede romper básicamente en 5 formas distintas:

### **1. Agotamiento plástico del tendón (Fig. 1-e)**

Constituye la forma óptima de rotura. Se puede caracterizar mediante la curva tensión deformación completa o por una serie discreta de tensiones características ( $\sigma_{0,1}, \sigma_{0,2}, \sigma_1 \dots$ ) y por su deformación bajo carga máxima  $\epsilon_m$ . Todos estos parámetros son objetivos y, por tanto, utilizables en proyecto. La deformación después del pico depende de la base de medida, de la situación de la rotura dentro de ella, del diámetro, etc. y no es como es sabido, una propiedad material.

### **2. Rotura frágil de un alambre del tendón por existencia de fisuras o entallas, lejos del anclaje (Fig. 1-e)**

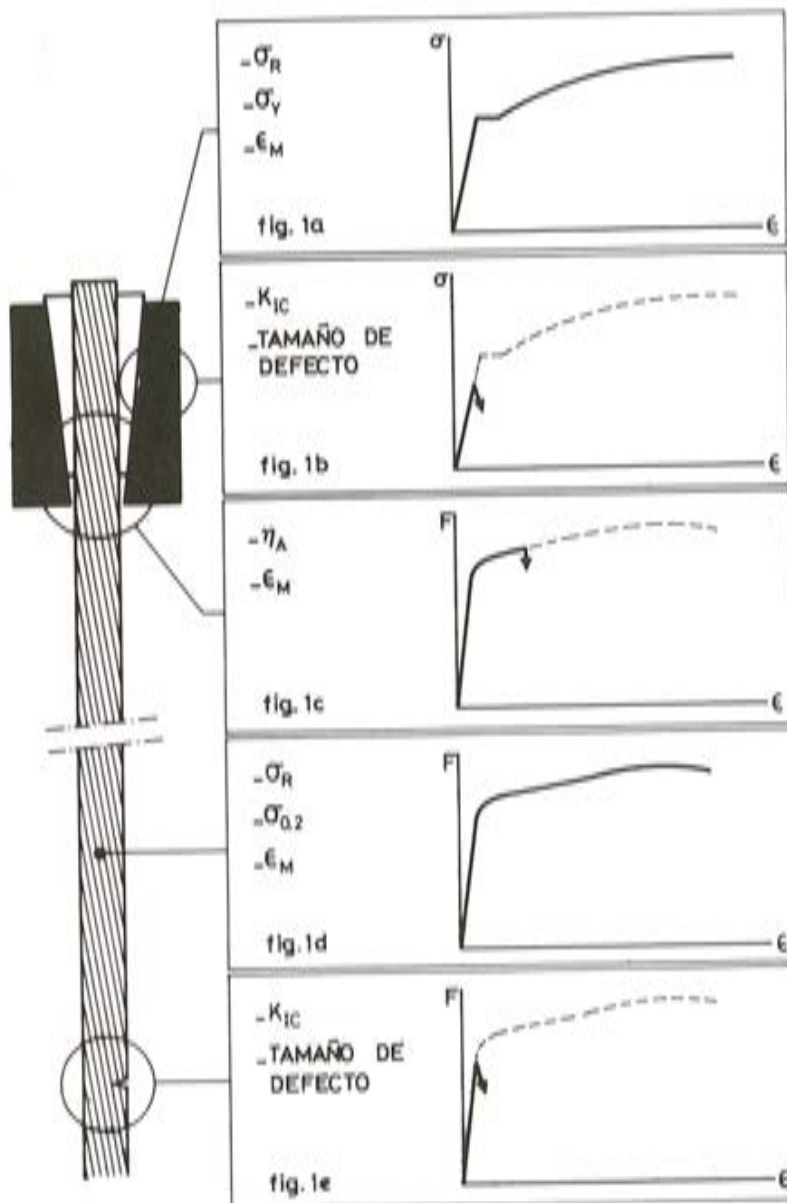
Este tipo de rotura puede predecirse a partir de la tenacidad a fractura del tendón y del tamaño de la fisura. Para entallas también existen procedimientos empíricos que permiten estimar la carga de rotura. Fisuras del tamaño necesario para producir este tipo de rotura no se presentan en los alambres en su recepción. Pueden producirse por fatiga, o en un ambiente agresivo. Estas fisuras se inician a partir de defectos preexistentes como picaduras o mellas.

### 3. Agotamiento plástico del anclaje (Fig. 1-a)

Corresponde a una rotura por deformación plástica con extrusión de cuñas o del botón. El comportamiento es predecible a partir de la curva tensión deformación del acero en cuestión y puede prevenirse, simplemente a partir de la tensión de cedencia,

### 4. Rotura frágil del anclaje debida a la presencia de fisuras (Fig. 1-b)

El comportamiento puede predecirse a partir del tamaño máximo esperado de fisuras y de la tenacidad de fractura ( $K_{IC}$ ) determinada en ensayos normalizados. A partir del valor de la tenacidad de fractura se puede estimar el tamaño de la máxima fisura tolerable y, en consecuencia, establecer un procedimiento de control para la recepción de los anclajes.



Figs. 1a-1b-1c-1d-1e.

En general, los defectos esperables en piezas mecanizadas son muy pequeños, no superiores a unas décimas de mm. En piezas moldeadas los huecos o inclusiones se comportan como pequeñas entallas, o fisuras, internas y por consiguiente es necesario establecer un procedimiento de control que asegure la ausencia de defectos superiores a un determinado tamaño.

### 5. Rotura en la interfase. Tendón anclaje (Fig. 1-c)

Contrariamente a los modos anteriores este puede abarcar un gran número de tipos distintos de fallos, entre los que cabe distinguir: deslizamiento del tendón entre cuñas (posible si hay acodamiento cuña-cono por congelación de líquido interfacial), rotura frágil del tendón por propagación de una fisura de fatiga y rotura más o menos frágil del tendón en la interfase con el anclaje sin propagación previa de fisura ni deslizamiento global.

Todos ellos se caracterizan por la imposibilidad, en el estado actual de conocimientos, de hacer una predicción a partir de propiedades de los materiales y de la geometría. En la práctica debe hacerse una caracterización empírica de este comportamiento, tradicionalmente a través de la eficiencia y de la deformación de rotura.

A  $-165^{\circ}\text{C}$  la resistencia supera con mucho la mínima garantizada a  $20^{\circ}\text{C}$  por lo que este aspecto es poco relevante. No así la deformación en rotura que, como se ha indicado anteriormente, puede ser tolerablemente baja.

El problema básico es que los dos parámetros de caracterización dependen de la historia previa de tensiones y temperaturas y también, como se verá, de la velocidad con que se efectúe la carga hasta rotura y de la situación ambiente concreta.

De acuerdo con lo anterior, se propone que un programa de ensayos mínimo debe incluir:

1. Ensayos de tracción simple sobre muestras de alambre del tendón.
2. Ensayos de tracción simple sobre muestras del acero constituyente del anclaje.
3. Ensayos de tenacidad de fractura del acero del anclaje.
4. Ensayos del conjunto con una historia de cargas y temperaturas, establecidas en función de las sollicitaciones previsibles.

Los dos primeros tipos de ensayo son relativamente sencillos de normalizar por comparación con las normativas para temperatura ambiente. Si no se buscan valores de deformaciones después de producido el máximo de carga, la geometría influye muy poco y sólo resta especificar el rango de velocidades de sollicitación, la precisión y uniformidad de temperaturas y en el caso de acero del anclaje, la orientación de las probetas. La posible influencia de la velocidad de sollicitación se estudia en este trabajo, y la influencia de la precisión y uniformidad de temperatura se analizó en (5).

El tercer tipo de ensayo está normalizado, siendo una de las normas utilizable la ASTM E399 y es fundamental para el adecuado proyecto de los anclajes frente a rotura frágil por existencia de defectos.

El cuarto grupo de ensayo es el más conflictivo porque al no medir propiedades materiales es difícil de definir. Como mínimo debe consistir en un ensayo monótono, similar al de las recomendaciones de la FIP (2), pero que tenga en cuenta que el pretensado se efectúa a temperatura ambiente. Podría consistir en una precarga a temperatura ambiente, seguido de enfriamiento a carga constante y posterior carga hasta rotura. Si además debe incluir algunos ciclos de carga a baja temperatura, tal como propone Rostasy (3), es una cuestión abier-

ta que, junto con la influencia de la velocidad de carga se ha estudiado en la investigación que se presenta.

### 3. PROGRAMA EXPERIMENTAL

Para los dos sistemas de pretensado estudiados, e independientemente de los ensayos de caracterización, a temperatura ambiente, se han desarrollado los siguientes tipos de ensayos:

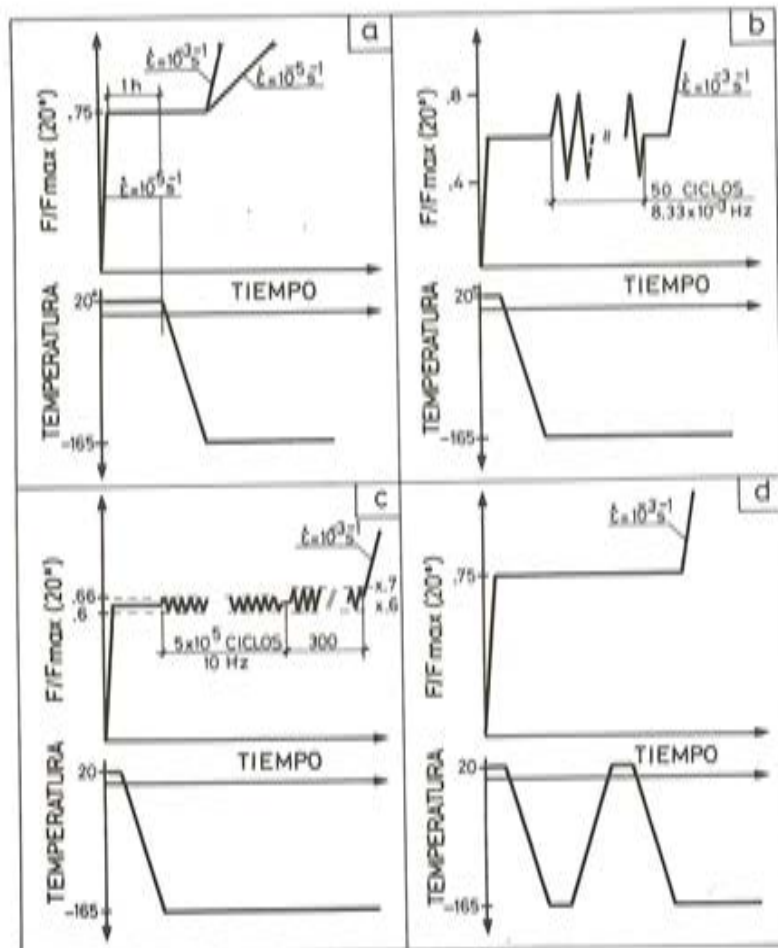


Fig. 2.

#### A: aceros del anclaje

- Tracción simple a  $-165^{\circ}\text{C}$  y velocidad de deformación  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
- Tracción simple a  $-165^{\circ}\text{C}$  y velocidad de deformación  $\dot{\epsilon} = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
- Tenacidad de fractura a  $-165^{\circ}\text{C}$ , según normas ASTM E399.

#### B: alambre del tendón

- Tracción simple a  $-165^{\circ}\text{C}$  y velocidad de deformación  $\dot{\epsilon} = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
- Tracción simple a  $-165^{\circ}\text{C}$  y velocidad de deformación  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

#### C: conjunto tendón anclaje

- Ensayos de carga monótona según la historia definida en la Fig. 2-a, con velocidades de rotura  $= 10^{-6}$  y  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

- Ensayos con carga cíclica a bajo número de ciclos, 50 ciclos, entre  $0,8 F_m$  y  $0,4 F_m$ , donde  $F_m$  es la carga máxima a temperatura ambiente, según la historia definida en la Fig. 2-b.
- Ensayos con carga cíclica a alto número de ciclos según la historia definida en la Fig. 2-c. 500.000 ciclos entre  $0,66 F_m$  y  $0,6 F_m$ , seguido de 300 ciclos entre  $0,7 F_m$  y  $0,6 F_m$ .
- Ensayos con ciclos térmicos según la historia definida en la Fig. 2-d.

**TABLA 1**  
**Propiedades mecánicas a 20°C de los aceros del SISTEMA 1**

SISTEMA 1 20°C	$\sigma_{y0,2}$ MPa (kg/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_R$ MPa (kg/mm <sup>2</sup> )	$\epsilon_M$ (%)
ALAMBRE (CENTRAL $\phi 5,2$ )	1.620 (165)	1.790 (183)	5,4
ACERO ANCLAJE	330* (34)	600 (61)	15,2

\* Escalón de cedencia.

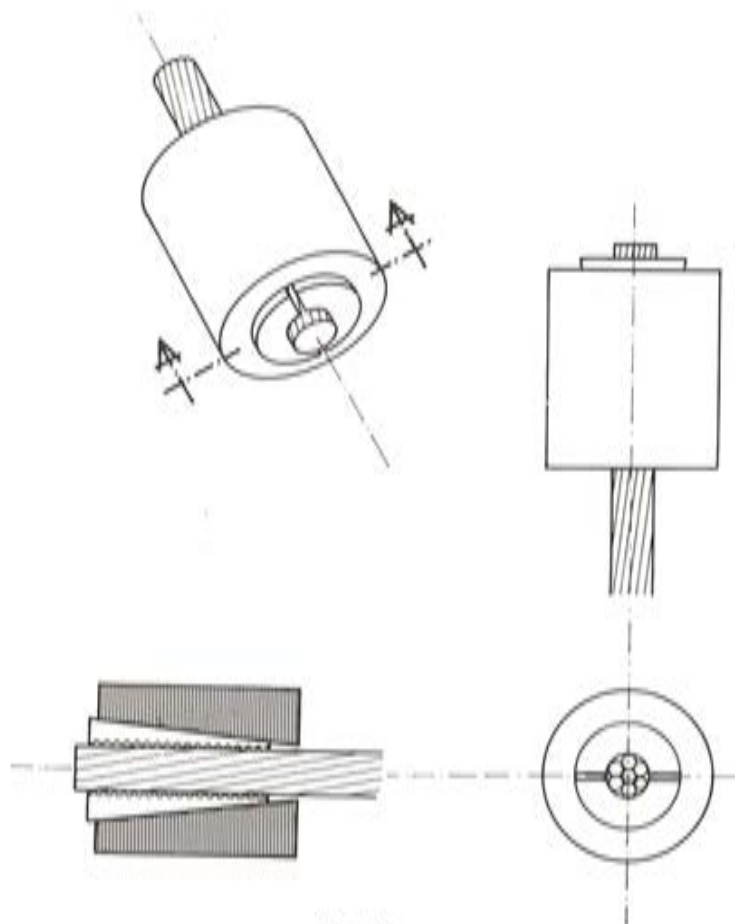


Fig. 3b.

**TABLA 2**  
**Propiedades mecánicas a 20°C de los aceros del SISTEMA 2**

SISTEMA 2 20°C	$\sigma_{y0,2}$ MPa (Kg/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_R$ MPa (Kg/mm <sup>2</sup> )	$\epsilon_M$ (%)
ALAMBRE	1.530 (156)	1.740 (178)	5,4
ACERO ANCLAJE	500 (51)	670 (68)	7,4

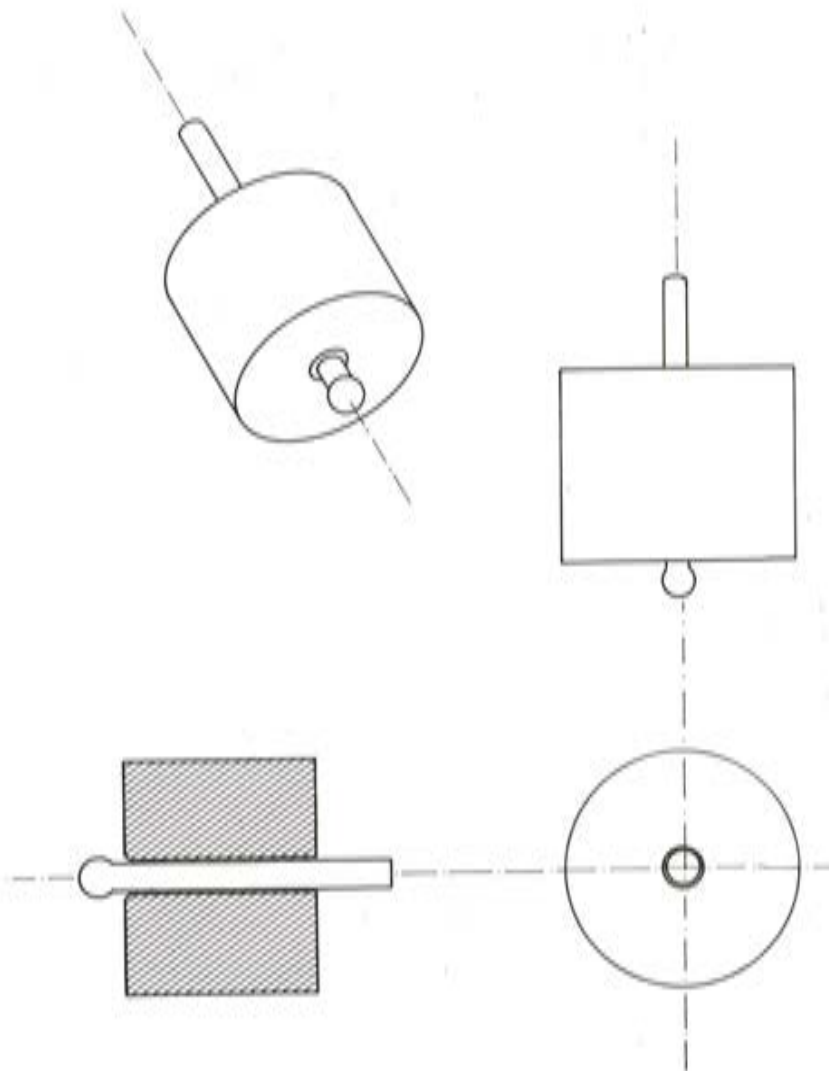


Fig. 3a.

#### 4. MATERIALES, PROBETAS Y EQUIPOS EXPERIMENTALES

Se han ensayado dos sistemas de pretensado con las características siguientes:

Sistema 1: Compuesto por cordones de 0,6" de 7 alambres trefilados estabilizados y

anclados con cuñas. Las características básicas, a temperatura ambiente, del cordón y del acero del anclaje, se resumen en la tabla 1 y en el esquema de la figura 3-a.

Sistema 2: Compuesto por alambres individuales botonados en cabeza, de acero eutectoide trefilado y estabilizado de 7 mm de diámetro. Las características básicas a temperatura ambiente del alambre y del acero del anclaje se resumen en la tabla 2, junto con el esquema de la figura 3-b.

Las probetas extraídas fueron las siguientes:

- Ensayos de tracción simple del material del anclaje: probetas cilíndricas  $\phi$  7 mm de 130 mm de longitud libre y 50 mm de base de medida.
- Ensayos de tenacidad del material del anclaje: probetas compactas (C.T.S.) de 25 mm de espesor mecanizadas según norma ASTM E399.
- Ensayos de tracción simple del alambre: probetas de alambre (central en el caso del cordón) botonadas en cabeza, con 250 mm de longitud libre y base de medida 50 mm.
- Ensayos de comportamiento del conjunto tendón anclaje. En ambos casos se ensayó sólo una unidad compuesta por un alambre o cordón con sus correspondientes anclajes. La longitud de las probetas era de 900 mm con base de medida de deformaciones de 50 mm para el alambre y de 500 mm para el cordón.

Los ensayos de tracción y de fractura se realizaron en una cámara ambiental INSTRON, modificada para trabajar a  $-165^{\circ}\text{C}$ . Los ensayos se realizaron a  $-165 \pm 1^{\circ}\text{C}$  con una diferencia de temperaturas entre puntos de la probeta inferior a  $1^{\circ}\text{C}$  y el centro de la probeta ligeramente más caliente que sus extremos de acuerdo con lo recomendado en (5).

Los ensayos de conjuntos tendón anclaje se realizaron en una cámara criogénica de tres módulos con control independiente para conseguir la máxima uniformidad posible, que fue  $\pm 2^{\circ}\text{C}$ , respecto de la nominal. Esta cámara fue diseñada y construida en el Departamento de la Escuela.

En todos los ensayos se utilizó una máquina servohidráulica Instron con control en desplazamiento, en la fase de rotura, o de carga, en precarga y carga cíclica. La precisión en la medida de cargas fue del 0,5 por 100, con una resolución de 5 kg.

La medida de deformaciones sobre una base de 50 mm se realizó con un extensómetro M.T.S. con precisión de  $\pm 0,25$  por 100 y la de deformaciones del cordón con un captador especialmente diseñado, basado en transductores inductivos, con una precisión del 1 por 100.

La evolución de cargas y deformaciones se tomaban simultáneamente en registro analógico y por puntos almacenados primero en un ordenador y seguidamente en cinta magnética.

En la Figura 4 puede verse un esquema de la disposición experimental en ensayos de conjuntos tendón anclaje.

## 5. RESULTADOS

### 5.1. Aceros de los anclajes

En la tabla 3 se resumen los resultados básicos de los ensayos de caracterización de los aceros de los anclajes, observándose que el efecto de la velocidad de sollicitación es pequeño.

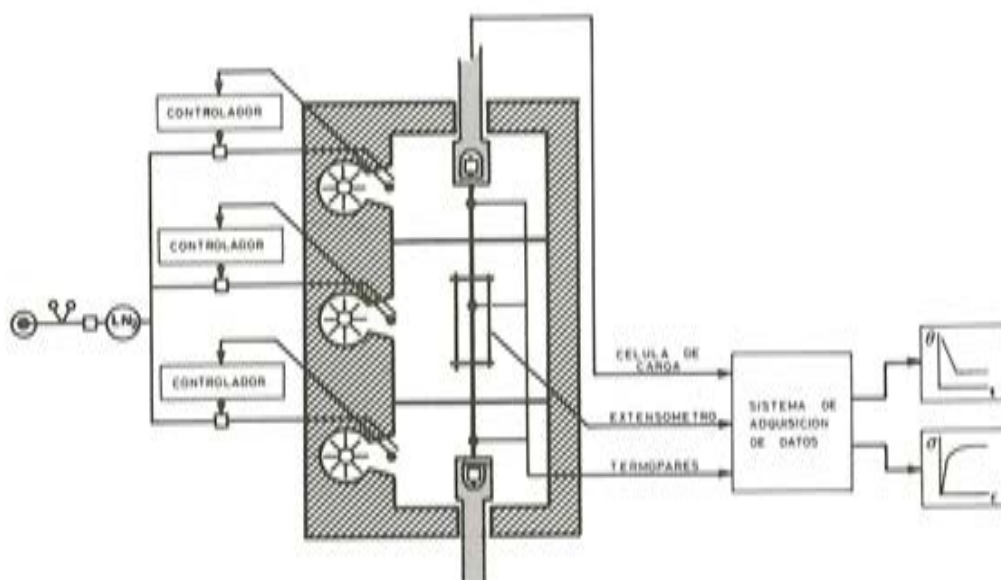


Fig. 4.

Comparándolo con los datos a temperatura ambiente, puede observarse un aumento espectacular de las resistencias, y deformaciones bajo carga máxima próximas a las obtenidas a temperatura ambiente, incluso superiores en el caso del anclaje 2. Los aumentos relativos de límites elásticos debidos al enfriamiento son aproximadamente del 125 y del 75 por 100 respectivamente para los anclajes 1 y 2. Puesto que el aumento de carga de rotura de los tendones es, como se verá, tan sólo del orden del 15 por 100, resulta evidente que si los anclajes no plastifican a temperatura ambiente, tampoco plastificarán a baja temperatura y el diseño a temperatura ambiente será suficiente para garantizar la seguridad frente a plastificación.

No obstante, conviene detenerse a considerar la influencia de posibles fisuras en la rotura frágil de los anclajes a bajas temperaturas. La tenacidad de fractura de estos materiales disminuye con la temperatura, los resultados obtenidos (tabla 3) indican que a  $-165^{\circ}\text{C}$ , la

TABLA 3

Resultados de los ensayos de caracterización de los materiales de los anclajes a  $-165^{\circ}\text{C}$ .  
 Todos los valores son media de dos ensayos

$-165^{\circ}\text{C}$	TRACCION SIMPLE				TENACIDAD
	$\dot{\epsilon}$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$\sigma_y^*$ MPa ( $\text{Kg}/\text{mm}^2$ )	$\sigma_R$ MPa ( $\text{Kg}/\text{mm}^2$ )	$\epsilon_M$ (%)	$K_{IC}$ MPa $\sqrt{\text{m}}$ ( $\text{Kg}/\text{mm}^{3/2}$ )
ANCLAJE 1	$10^{-5}$	730 (74)	830 (85)	12	39,0
(CUÑAS)	$10^{-3}$	750 (77)	850 (87)	12	(126)
ANCLAJE 2	$10^{-5}$	850 (87)	910 (93)	10	39,4
(BOTONES)	$10^{-5}$	850 (87)	910 (93)	10	(127)

\* Escalón de cedencia.

tenacidad de fractura es de  $40 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  ( $126 \text{ kg mm}^{-3/2}$ ) valor bastante inferior al de la temperatura ambiente, que suele ser alrededor de  $80 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Esta diferencia de valores indica que a bajas temperaturas las fisuras que será capaz de tolerar serán bastante más pequeñas que a temperatura ambiente.

Podemos estimar, de forma aproximada, el tamaño de estas fisuras de la siguiente manera:

El factor de intensidad de tensiones viene dado por:

$$K = \alpha \sigma \sqrt{a} \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente que depende de la geometría precisa del problema y, en general, varía entre 1 y 2 (véase, por ejemplo, la referencia 7).

Si suponemos que a bajas temperaturas es lícito aplicar la Mecánica de la Fractura en régimen elástico lineal, es decir que la fractura se inicia cuando

$$K = K_{IC} \quad (2)$$

resulta que el tamaño crítico de la fisura vendrá dado por:

$$a_{\text{crit}} = \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma} \right)^2 \quad (3)$$

donde  $\sigma$  es la máxima tensión a que puede estar sometido el anclaje. Este valor se puede estimar de la siguiente forma: Supongamos que el anclaje está diseñado para poder soportar localmente a temperatura ambiente, tensiones de (por ejemplo)  $0,9 \sigma_y$ , donde  $\sigma_y$  es la tensión de cedencia del material. Es decir:

$$\sigma_A \text{ (máxima a } 20^\circ\text{C)} = 0,9 \sigma_{Ay} = K \sigma_{RT}(20^\circ\text{C}) \quad (4)$$

donde  $K$  es una constante de proporcionalidad que depende de la forma de sujeción del tendón,  $\sigma_{RT}$  es la tensión de rotura del tendón y el subíndice A se refiere a tensiones en el anclaje. A bajas temperaturas podemos suponer que la máxima tensión que podrá soportar el anclaje será:

$$\sigma_A \text{ (máxima a } -165^\circ\text{C)} = K \sigma_{RT}(-165^\circ\text{C}) \quad (5)$$

El anclaje debe soportar estas tensiones porque su resistencia al disminuir la temperatura, aumenta más rápidamente que la del tendón. A partir de (4) y (5) podemos deducir que:

$$\sigma_A \text{ (máxima, } -165^\circ\text{C)} = 0,9 \sigma_{Ay} \frac{\sigma_{RT}(-165^\circ)}{\sigma_{RT}(20^\circ\text{C})} \quad (6)$$

Utilizando este valor en la expresión (3) que nos da la fisura crítica resultan, para los distintos anclajes, los siguientes valores, según se tome  $\alpha=1$ ,  $\alpha=2$ .

Anclaje 1:  $3 \text{ mm} < a_{\text{crítica}} < 12 \text{ mm}$   
 Anclaje 2:  $1,4 \text{ mm} < a_{\text{crítica}} < 5,6 \text{ mm}$

Siendo sumamente improbable que anclajes mecanizados presenten defectos de más de 1 mm de profundidad, puede aceptarse que los aceros en cuestión, con las hipótesis de diseño

**TABLA 4**

Resultados de los ensayos de caracterización del alambre de los tendones a  $-165^{\circ}\text{C}$ .  
 Todos los valores son media de dos ensayos

$-165^{\circ}\text{C}$	$\dot{\epsilon}$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$\sigma_{y0,2}$ MPa ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )	$\sigma_R$ MPa ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )	$\epsilon_M$ (%)
SISTEMA 1	$10^{-5}$	1910 (195)	2090 (213)	5,4
ALAMBRE CENTRAL	$10^{-3}$	1970 (201)	2100 (214)	4,9
SISTEMA 2	$10^{-5}$	1780 (182)	2020 (206)	6,4
	$10^{-3}$	1790 (183)	2000 (204)	6,3

**TABLA 5**

Ensayos de comportamiento tendón-anclaje a  $-165^{\circ}$ .  
 Cordón de 7 alambres, 0,6". Anclaje por cuñas

ENSAYOS	$\sigma_R$ MPa ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ )	$\epsilon_M$ (%)	TIPO DE ROTURA
MONOTONO $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$	2120 (216)	5,3	EN ANCLAJE. INICIADO EN IDENTACION CUÑA
MONOTONO $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	2090 (213)	5,5	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCIÓN
CICLICO bajo $n^{\circ}$ ciclos	2110 (215)	5,2	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCIÓN
CICLICO alto $n^{\circ}$ ciclos	2090 (213)	—	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCIÓN
CICLICO térmico	2110 (215)	4,9	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCIÓN

supuestas, son seguros frente a rotura frágil por existencia de defectos, siempre que no se prevea el crecimiento de las fisuras subcríticas por fatiga o por un ambiente agresivo.

## 5.2. Alambres

En la tabla 4 se resumen los resultados de los ensayos de caracterización de los alambres que constituyen los tendones de ambos sistemas. Se observa un aumento de resistencia

**TABLA 6**

**Ensayos de comportamiento tendón-anclaje a  $-165^{\circ}\text{C}$   
Alambre de 7 mm. Anclaje por botones**

ENSAYO	$\sigma_R$ MPa (kg/mm <sup>2</sup> )	$\epsilon_M$ (%)	TIPO DE ROTURA
MONOTONO $= 10^{-5} \text{ s}^{-1}$	2020 (206)	4,5	ADYACENTE AL BOTON CON ESTRICCION
MONOTONO $= 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	1970 (201)	5,0	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCION
CICLICO bajo $n^{\circ}$ ciclos	1980 (202)	5,1	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCION
CICLICO alto $n^{\circ}$ ciclos	1980 (202)	5,2	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCION
CICLICO térmico	1990 (203)	5,3	EN CENTRO TENDON CON ESTRICCION

del orden del 15 por 100 respecto a los valores obtenidos a temperatura ambiente, y valores de la deformación bajo carga máxima iguales o superiores a los obtenidos a temperatura ambiente, presentándose en todos los casos roturas con cuello de estriación. Este comportamiento coincide con el indicado en la referencia (4), para aceros similares.

Como en el caso de los aceros de los anclajes, la velocidad de sollicitación influye muy poco en los resultados,

### 5.3. Conjunto tendón anclaje

En las tablas 5 y 6 se resumen los resultados fundamentales de los ensayos realizados sobre los sistemas 1 (cordón anclado con cuñas) y 2 (alambre botonado) respectivamente.

Los distintos aspectos del comportamiento observado se analizan a continuación:

#### *a) Influencia de las sollicitaciones cíclicas*

Como puede observarse las diferencias en tensiones de rotura y deformación bajo carga máxima son mínimas. Además, el modo de rotura es idéntico en todos los ensayos con velocidad de deformación  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , rotura que en ninguno de los 21 ensayos realizados a dicha velocidad se ha producido en el anclaje.

Tomando como referencia los ensayos monótonos a  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  se ha realizado un contraste t de Student de diferencia de medias con nivel de significación del 5 por 100. El resultado es que para ninguno de los dos sistemas son significativas las diferencias observadas.

Puede por tanto concluirse que no hay efecto apreciable de las sollicitaciones cíclicas estudiadas.

#### *b) Influencia de la velocidad de deformación*

Realizado un contraste t de Student entre los ensayos monótonos con diferente velocidad de deformación, con nivel de significación 5 por 100 y 2 por 100, las diferencias resultaron significativas para ambos sistemas, pero, en cualquier caso la influencia es mínima a efectos ingenieriles ya que la diferencia es inferior al 2 por 100. Debe, sin embargo, recalarse que la resistencia es, en estos ensayos, menor para la velocidad de deformación más elevada y que esta reducción no depende solo del material y la velocidad, sino también del dispositivo experimental, como más adelante se justificará.

#### *c) Resistencia y ductilidad*

Las resistencias obtenidas en todos los ensayos son prácticamente iguales a las deducibles de los ensayos de caracterización del alambre (tabla 4).

Las deformaciones bajo carga máxima dan valores similares a las de los alambres ensayados tanto a  $-165^{\circ}\text{C}$  como a temperatura ambiente.

En todos los ensayos se han superado con creces los requisitos mínimos propuestos en (2), incluso el alargamiento bajo carga máxima exigido a temperatura ambiente (2,3 por 100), y el comportamiento de ambos sistemas puede calificarse de excelente.

#### *d) Tipos de rotura*

En todos los ensayos a alta velocidad de deformación la rotura se ha producido por agotamiento plástico del tendón, presentándose estricción lejos del anclaje (fotografías 1 y 2).

En los ensayos lentos, el sistema 1 ha presentado sistemáticamente rotura en el anclaje iniciado en una indentación provocada por la cuña. La fractura ha sido en todos los casos secuencial (alambre tras alambre) y se han presentado dos tipos distintos: rotura por cortante (fotografía 3) y rotura por propagación de fisuras normalmente al alambre (fotografía 4).

El sistema 2 ha presentado en los ensayos lentos rotura con estricción localizada en las proximidades del botón (a menos de 1-1,5 cm).

#### *e) Influencia de las condiciones experimentales*

Como complemento de las medidas estandar se realizó, en algunos de los ensayos, la medida de la evolución de la temperatura del tendón durante el proceso de carga. Los resultados fueron que en los ensayos lentos la variación de temperatura era despreciable, en tanto que en los ensayos rápidos se producían elevaciones de temperatura del orden de  $15^{\circ}\text{C}$ , debido a que la tasa de generación de calor por deformación plástica superaba la capacidad de refrigeración por convección con pequeña diferencia de temperatura. Obviamente el aumento de temperatura crecerá con la velocidad de deformación pero dependerá también, en forma fundamental, del dispositivo experimental usado, en particular del coeficiente de convección disponible.



Foto 2



Foto 4

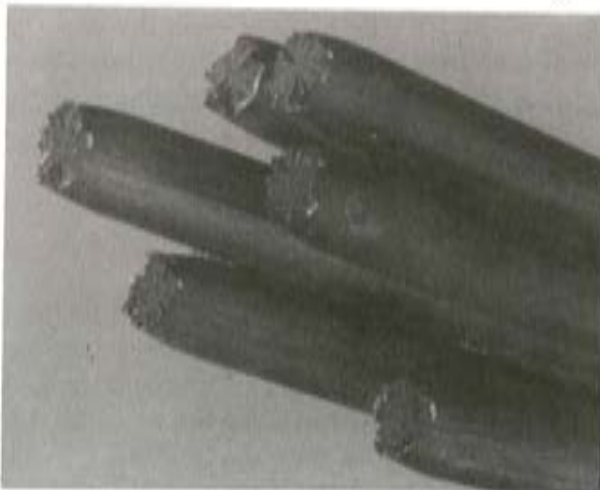


Foto 1



Foto 3

En el rango de velocidades no dinámicas, las posibles variaciones de resistencia de un tendón pueden agruparse como sigue:

1. Aumento de resistencia del acero por aumento de velocidad de deformación (a temperatura constante).
2. Disminución de resistencia del acero por aumento de temperatura.
3. Disminución *localizada* de resistencia debido al dañado producido por el anclaje.

Parece lógico aceptar que si la temperatura de la probeta es estrictamente constante, igual a  $T_N$ , la rotura se producirá en el anclaje a una tensión  $\sigma_{RA} = \eta \sigma_{RT}(T_N)$  donde  $\eta < 1$  incluye el efecto de dañado y  $\sigma_{RT}(T_N)$  indica la resistencia del tendón a temperatura  $T_N$ .

En un ensayo a alta velocidad de deformación el mecanismo 2 domina sobre el 1 (que es siempre muy débil a temperaturas criogénicas debido al consecuente debilitamiento de los mecanismos térmicamente activados), y si durante el ensayo se produce, un aumento  $\Delta T$ , la resistencia del tendón será:

$$\sigma_{RT}(T_N + \Delta T) < \sigma_{RT}(T_N).$$

Ahora bien, en un proceso como el indicado, el anclaje actúa como un sumidero térmico debido a su elevada capacidad calorífica y el aumento de temperatura en el anclaje será muy pequeño y como aproximación se puede seguir manteniendo que la resistencia por rotura en el anclaje no varía. Por tanto, al estar acoplados en serie se tiene:

- Rotura en el anclaje si  $\sigma_{RA} = \eta \sigma_{RT}(T_N) < \sigma_{RT}(T_N + \Delta T)$
- Rotura en el tendón si  $\sigma_{RA} = \eta \sigma_{RT}(T_N) > \sigma_{RT}(T_N + \Delta T)$

Para un acero de pretensar típico puede escribirse (5)

$$\sigma_{RT}(T_N + \Delta T) = \sigma_{RT}(T_N) (1 - \alpha \cdot 10^{-3} \Delta T)$$

con  $\alpha \simeq 1$ , por tanto, la rotura se transferirá del anclaje al tendón si durante el ensayo  $\Delta T$  es tal que  $\eta > 1 - \alpha \cdot 10^{-3} \Delta T$ .

Para el aumento de temperatura medida de  $15^\circ$ , cambiará la rotura si  $\eta > 0,985$  lo que efectivamente parece cumplirse en el caso estudiado (de hecho la comparación de resistencias da  $\eta > 1$ , debido a la dispersión experimental).

Este efecto, que parece adecuadamente explicado por este simplificado análisis, junto con el efecto de disminución de resistencia asociado al aumento de velocidad de deformación puesto ya de manifiesto, depende del sistema de enfriamiento utilizado y si se pretenden hacer estudios detallados del comportamiento de sistemas de alta eficiencia ( $\eta > 0,95$ ) es preciso tenerlo en cuenta en el diseño experimental.

## 6. CONCLUSIONES

De todo lo dicho anteriormente pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Para prevenir la posibilidad de un colapso por rotura frágil del anclaje, debería determinarse la tenacidad de fractura del material en condiciones criogénicas y utilizar la Mecánica de Fractura en el diseño de los anclajes.
- Los resultados de ensayos de tracción simple a  $-165^\circ\text{C}$  sobre los distintos tipos de acero estudiados dependen poco de la velocidad de deformación en el rango de

$10^{-3}$  a  $10^{-5}$   $s^{-1}$  por lo que parece aceptable el uso de cualquier velocidad intermedia.

- Las solicitaciones cíclicas estudiadas no tienen efecto significativo sobre el comportamiento último de los sistemas ensayados en condiciones criogénicas.
- La influencia de la velocidad de deformación en el comportamiento resistente último de los sistemas estudiados, aunque estadísticamente significativa, no supera el 2 por 100 en un cambio de velocidad de dos órdenes de magnitud. Esta influencia parece esencialmente debida al aumento de temperatura generado por las altas tasas de calor producidas por trabajo plástico.
- Cuando la eficiencia del sistema tendón-anclaje es muy grande, la rotura puede producirse en el tendón o dentro del anclaje, dependiendo de que se produzcan o no pequeños calentamientos locales. Este hecho debe tenerse en cuenta a la hora de valorar o diseñar un experimento y también debe tenerlo presente el proyectista.

Los dos sistemas estudiados cumplen con creces los requisitos mínimos propuestos en (2) presentando deformaciones en rotura del orden del 5 por 100, por lo que su comportamiento en condiciones criogénicas puede considerarse excelente.

## 7. REFERENCIAS

- (1) Rostásy, F.S. and Henning, W.: "Strength and ductility of posttensioning systems for cryogenic application". Second International Conference on Cryogenic Concrete. Amsterdam, Octubre 1983.
- (2) F.I.P. Recommendations for acceptance and application of posttensioning systems". FIP, Wexham Springs, Slough, 1981.
- (3) Rostásy, F.S.: "Behaviour of the tendon-anchorage assembly at low temperature, FIP, Int. Congress, Stockholm, 1982.
- (4) Elices, M., Rostásy, F.S., Faas, W.M. and Wiedemann, G., "Cryogenic behaviour of materials for prestressed concrete". FIP State of the Art Report, Wexham Spring, U.K., 1982.
- (5) Planas, J., Corres, H., Elices, M., Sánchez-Gálvez, V. "Tensile tests of steel at low temperatures. Problems due to non-uniformity in the temperature distribution along the specimen". Second International Conference on Cryogenic Concrete. Amsterdam, Octubre 1983.
- (6) Planas, J., Corres H., Elices, M., Ensayos no publicados realizados en el Departamento de Física y Física de Materiales de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.
- (7) Broek, D., "Elementary Engineering Fracture Mechanics". Sijthoff-Noordhoff. (1978).

# Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: Estudio comparativo de distintos modelos

H. Corres Peiretti, V. Sánchez-Gálvez, M. Elices Calafat  
Departamento de Física y Física de Materiales  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid

## 1. INTRODUCCION

En artículos precedentes (1), (7), se ha presentado un método de cálculo para el estudio de pérdidas diferidas en elementos de hormigón pretensado. Este método presenta ventajas de tipo formal y físico. Permite el tratamiento de la relajación del acero al mismo nivel conceptual que la fluencia y retracción del hormigón y conduce a predicciones teóricas que se ajustan adecuadamente a distintos resultados experimentales.

En este trabajo se presenta un estudio comparativo entre el método propuesto (1) y los distintos procedimientos recomendados por la Comisión Permanente del Hormigón (EP-80, 1980) (2), el CEB-FIP (Model Code 1978) (3) y el Instituto Americano del Hormigón Pretensado (PCI, 1975) (4). Se presenta un análisis cualitativo de los distintos modelos utilizados puntualizando sus diferencias más notables, y un análisis cualitativo en el que se comparan los resultados obtenidos utilizando los distintos métodos en cuatro ejemplos, correspondientes a ensayos realizados por Ghali y Demorieux (5) y Atallah (6).

## 2. COMENTARIOS GENERALES SOBRE LOS DISTINTOS METODOS UTILIZADOS

El problema del análisis de las pérdidas diferidas en elementos de hormigón pretensado constituye un problema no lineal en el que intervienen tres fenómenos, la fluencia y retracción del hormigón y la relajación del acero, fuertemente interrelacionados.

En general, los distintos métodos utilizan dos tipos diferentes de procedimientos para el tratamiento simplificado de este problema.

El primer procedimiento, de tipo incremental, consiste en descomponer el problema en intervalos y en cada intervalo, suponiendo que la tensión del hormigón y del acero permanecen constantes y que la interacción de los distintos fenómenos es pequeña, se trata el problema linealmente. La aproximación resulta tanto más correcta cuanto menores son los intervalos de tiempo adoptados.

Este procedimiento es el utilizado en el método propuesto y ha sido detalladamente explicado en la referencia (1).

El método propuesto por el Instituto Americano del Hormigón Pretensado (4) también utiliza este procedimiento aunque de forma más simplificada. En este caso, al final de cada intervalo, las pérdidas consideradas son la suma de las debidas a fluencia y retracción del hormigón y relajación del acero, sin que se satisfagan las condiciones de equilibrio y compatibilidad al final de cada intervalo, lo que permitiría tener en cuenta el efecto de la recuperación elástica del hormigón debido a las pérdidas calculadas.

El segundo procedimiento, adoptado por el CEP-FIP (3) y la Comisión Permanente del Hormigón (2), consiste en evaluar las pérdidas en un tiempo determinado, como suma de las debidas al hormigón y al acero de forma independiente más un término de interacción que intenta tener en cuenta la no linealidad del fenómeno. La bondad de la predicción de un método de este tipo depende fundamentalmente del término de interacción adoptado.

El Model Code (3) propone en el anexo e, la siguiente fórmula:

$$\Delta \sigma_{p, c+s+r} = \frac{\epsilon_s(t, t_0) E_s + \Delta \sigma_{pr} + \alpha \phi(t, t_0) \sigma_{co}}{1 - \alpha \frac{\sigma_{co}}{\sigma_{spo}} \left[ 1 + \frac{\phi(t, t_0)}{2} \right]} \quad (1)$$

Para la obtención de  $\Delta \sigma_{pr}$  debe considerarse una tensión inicial ficticia  $\sigma_p$

$$\sigma_p = \sigma_{pgo} = 0,3 \Delta \sigma_{p, c+s+r} \quad (2)$$

Esta fórmula para el cálculo de las pérdidas diferidas tiene un término de interacción implícito en la obtención de  $\Delta \sigma_r$ , pérdida debida a la relajación, ya que esta pérdida se calcula tomando la tensión inicial del acero definida en (2).

Este tipo de fórmula, presenta una dificultad importante desde el punto de vista de su utilización ya que debe resolverse de forma iterativa. Las pérdidas totales dependen del valor de  $\Delta \sigma_r$  y ésta del valor de las pérdidas totales  $\Delta \sigma_{p, c+s+r}$ .

La instrucción EP-80 propone una fórmula más simplificada, del mismo tipo que la indicada en el apartado 4.3.4, del Model Code. En este caso es posible explicitar el término de interacción y la expresión general puede escribirse como sigue:

$$\Delta \sigma_{p, c+s+r} = \Delta \sigma_c + \Delta \sigma_s + \Delta \sigma_r - K \quad (3)$$

donde:

$\Delta \sigma_{p, c+s+r}$ : pérdida total en el tiempo t

$\Delta \sigma_c = \phi(t, t_0) \sigma_{cgp}$   $\eta$ : pérdida debida a fluencia

$\Delta\sigma_s = \epsilon_f(t, t_0)$  Es: pérdida debida a retracción

$\Delta\sigma_r = \rho_f \sigma_i$ : pérdida debida a relajación a longitud constante.

$K = 2 \rho_f (\Delta\sigma_c + \Delta\sigma_s)$ : término de interacción.

Otra diferencia que presentan en los distintos métodos radica en el modelo adoptado para la evaluación de los distintos fenómenos que intervienen en el proceso.

En cuanto a los modelos utilizados para la evaluación de la fluencia y retracción del hormigón, no existen prácticamente diferencias.

Tanto el método propuesto, como los procedimientos empleados por el Model Code y EP-80, utilizan el mismo modelo. En este sentido es interesante tener en cuenta que este modelo está definido gráficamente y que, si se utiliza un ordenador para la evaluación de las pérdidas, es interesante disponer de una formulación analítica del mismo. En este trabajo se han utilizado las expresiones propuestas en la referencia (8).

En cuanto al PCI, las pérdidas debidas a fluencia y retracción del hormigón se obtienen de una propuesta simplificada y utilizando coeficientes que se presentan en tablas.

Tal como se indica en la referencia (1), los modelos adoptados para la evaluación de la relajación del acero son empíricos y no tratan la relajación del acero con el mismo rigor que la fluencia del hormigón. Mientras el método propuesto (1) utiliza un modelo de relajación con un soporte físico experimentado, los modelos empleados por el resto de los métodos estudiados son empíricos. Una presentación detallada del método propuesto puede encontrarse en las referencias (1) (9) y (10).

La fórmula de relajación recomendada por el Model Code, es función de un valor experimental de relajación, generalmente la relajación a 1.000 horas, obtenido en un ensayo de relajación a longitud constante y la tensión inicial que tiene la armadura activa después de descontadas las pérdidas instantáneas.

$$\frac{\Delta\sigma_t}{\Delta\sigma_{t_0}} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{0.2} \quad (4)$$

$\Delta\sigma_{t_0}$  es el valor experimental de relajación y  $t_0$  es el tiempo en horas correspondiente al valor experimental utilizado.

La instrucción EP-80, como bien es sabido, propone una función lineal en escala bilogárítmica en la que los coeficientes se obtienen a partir de resultados experimentales.

$$\log \rho = k_1 + k_2 \log. t \quad (5)$$

Desde el punto de vista de utilización estas dos propuestas presentan el inconveniente de necesitar valores experimentales que correspondan a valores de tensión inicial coincidentes con los de la armadura activa en el momento del cálculo de las pérdidas. Debido a la imposibilidad de disposición de datos experimentales, ya que el fabricante solo suele dar  $\Delta\sigma_{120 \text{ horas}}$  y  $\Delta\sigma_{1.000 \text{ horas}}$ , en un ensayo a tensión inicial igual a  $0,7 f_{pu}$ , el proyectista debe utilizar alguna ley para extrapolar estos resultados para otras tensiones iniciales (en general se suele adoptar una ley parabólica considerando que la relajación a  $0,5 f_{pu}$  es nula).

El PCI propone, para representar la pérdida de relajación a longitud constante, las siguientes expresiones:

$$\Delta\sigma = \sigma_s \frac{\log . 24t}{A} \times \left(\frac{\sigma_s}{B} - 0,55\right) \quad (6)$$

$\sigma_s$  es la tensión del acero y A y B son constantes que dependen del tipo de acero. En la propuesta del PCI,  $\Delta\sigma$  se presenta como la pérdida de tensión por relajación del acero en un intervalo de tiempo y por lo tanto la fórmula tiene una estructura ligeramente diferente.

Desde el punto de vista de su utilización, estas expresiones presentan la ventaja de no depender de resultados experimentales específicos.

Otro problema relacionado con las pérdidas debidas a relajación del acero de pretensar es el relativo a la forma de evaluar dichas pérdidas teniendo en cuenta la variación de longitud del tendón. Las fórmulas de relajación anteriormente indicadas corresponden a la predicción de las pérdidas de relajación del acero en un ensayo a longitud constante.

Asimismo, el tener en cuenta este fenómeno, solo tiene sentido cuando se trata de métodos de tipo incremental tales como el método propuesto y el recomendado por el PCI.

Este tema ha sido extensamente tratado en las referencias (1) y (7) con motivo de la exposición del método propuesto.

De forma muy resumida la solución de este problema comporta utilizar distintas curvas de relajación a longitud constante, correspondientes a diferentes valores de tensión inicial, y adoptar un procedimiento adecuado para pasar de una a otra en cada intervalo analizado.

Tal como se indicó en la referencia (1) existen distintos procedimientos para pasar a través de las distintas curvas de relajación a longitud constante: a) a tiempo constante, b) a pérdida de relajación constante y c) a tensión equivalente constante.

Los resultados experimentales existentes (7) y (11) muestran que los procedimientos b) y c) resultan adecuados mientras que el procedimiento a) conduce a una sobrevaloración de las pérdidas.

Tal como se ha indicado, el método propuesto utiliza el procedimiento c) (1) mientras que el método recomendado por el PCI utiliza el procedimiento a).

### 3. PRESENTACION Y DISCUSION DE RESULTADOS

A los efectos de evaluar los resultados obtenidos por los distintos métodos utilizados se han estudiado cuatro ejemplos, correspondientes a resultados experimentales realizados por Ghali y Demorieux (5) y Atallah (6).

En la referencia 7, en donde se presenta una comprobación experimental del método propuesto, se puede ver como los resultados teóricos del método propuesto ajustaron adecuadamente a estos distintos resultados experimentales. Sin embargo, en ese trabajo, la contrastación se ha realizado para tiempos muy cortos (193 días a partir de la puesta en carga del hormigón, en los ensayos de Ghali y Demorieux, y 125 días en los ensayos de Atallah), que son los tiempos máximos de cada experimentación.

En este trabajo se analiza la predicción de los distintos métodos hasta 10.000 días (27 años aproximadamente), a partir de la puesta en carga del hormigón, y lamentablemente no existen resultados experimentales que permitan contrastar los distintos valores teóricos. Por esta razón, las predicciones que en adelante se presentan deben interpretarse con las reservas debidas a la falta de resultados experimentales a largo plazo.

En la tabla 1 se muestra un resumen de los principales parámetros correspondientes a los distintos ejemplos estudiados.

El primer ejemplo, corresponde a un ensayo realizado por Ghali y Demorieux, se trata de un hormigón que es puesto en carga a muy temprana edad (2.75 días) con una tensión

TABLA 1

ENSAYO	Edad puesta en carga (días)	HR %	$\sigma_{co}$	$\frac{\sigma_{co}}{f_{cm}}$	$\sigma_{so}$	$\frac{\sigma_{so}}{f_{pu}}$
Ghali-Demorieux (A1)	2,75	50	4,98	0,15	1.277,5	0,75
Atallah (E2)	180	70	22,6	0,37	1.008,0	0,66
Atallah (E6)	180	70	25,7	0,42	1.144,0	0,75
Atallah (E8)	180	70	32,7	0,54	968,0	0,63

baja, aproximadamente el 15 por 100 de la tensión media de rotura, mientras el acero presenta una tensión inicial alta ( $0,75 f_{pu}$ ). En este caso, los efectos predominantes en las pérdidas corresponden a la retracción, debido a la edad de puesta en carga y las condiciones ambientales (50 por 100 HR), y a la relajación del acero, debido a la elevada tensión inicial. La fluencia tiene un papel secundario, a pesar de la corta edad de puesta en carga, debido a la baja tensión inicial del hormigón que irá disminuyendo con el tiempo.

En los otros tres ejemplos, correspondientes a ensayos realizados por Atallah, las condiciones son bien diferentes. En primer lugar se trata siempre de un hormigón que se pone en carga a 180 días y en unas condiciones ambientales propicias para minimizar el efecto de la retracción en las pérdidas diferidas. Estos ejemplos permiten valorar el efecto combinado de la fluencia del hormigón y la relajación del acero, ya que en todos los casos tanto la tensión inicial del hormigón como la tensión inicial del acero, son importantes.

En las figuras siguientes se muestra la evolución de las pérdidas ( $\Delta\sigma$ ) con el tiempo, para cada uno de los ejemplos estudiados y cada uno de los métodos utilizados (Método propuesto, CEB-FIP, EP-80 y PCI). A los efectos de poder valorar cuantitativamente las diferencias obtenidas, para cada ejemplo, se presenta una tabla que resume algunos resultados y cuantifica las diferencias. En cada tabla se dan los valores obtenidos para tres tiempos: 193 ó 125 días, que son los mayores tiempos de los distintos resultados experimentales utilizados, 5.000 días y 10.000 días. Asimismo se indican en tanto por ciento, las diferencias de los distintos métodos tomando como referencia los resultados del método propuesto.

Para la discusión de los resultados obtenidos en los ejemplos estudiados, se ha creído conveniente analizar separadamente las predicciones para tiempos cortos, que pueden ser contrastados experimentalmente, y las predicciones a largo plazo.

En cuanto al primer tema, se toma como método de base para la comparación de los resultados el método propuesto, cuya contrastación experimental con los ensayos utilizados en este trabajo ha sido presentada en la referencia (7).

Tal como puede verse, los distintos métodos utilizados conducen a una sobrestimación de las pérdidas de pretensado para tiempos cortos. Solamente el método del PCI, en el ejemplo de Ghali-Demorieux, da resultados menores que los del método propuesto para tiempos cortos.

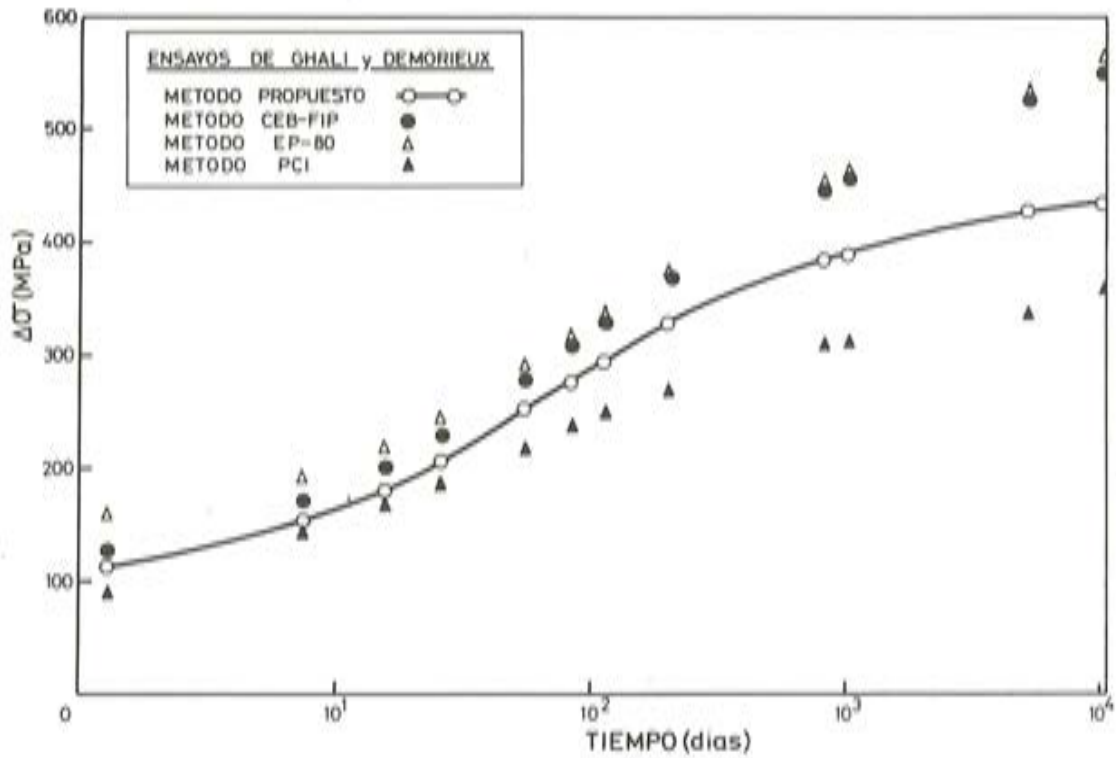


Fig. 1.

**TABLA 2**  
Ensayos de Ghali-Demorieux (Probeta A1)

METODOS	$\Delta\sigma$ (MPa) 196 días	$\Delta\sigma$ (MPa) 5.000 días	$\Delta\sigma$ (MPa) 10.000 días
Propuesto	322,3	421,7	428,9
CEB-FIP	368,1 (+ 14%)	526,0 (+ 25%)	549,7 (+ 28%)
EP-80	366,5 (+ 13%)	525,7 (+ 25%)	559,6 (+ 30%)
PCI	264,8 (- 18%)	333,3 (- 21%)	857,0 (- 17%)

En circunstancias especiales, tales como las del ejemplo correspondiente al Ensayo 8 de Atallah, las sobrestimaciones de las pérdidas para tiempos pequeños pueden resultar muy importantes, en particular las predicciones obtenidas, utilizando el método propuesto por la EP-80.

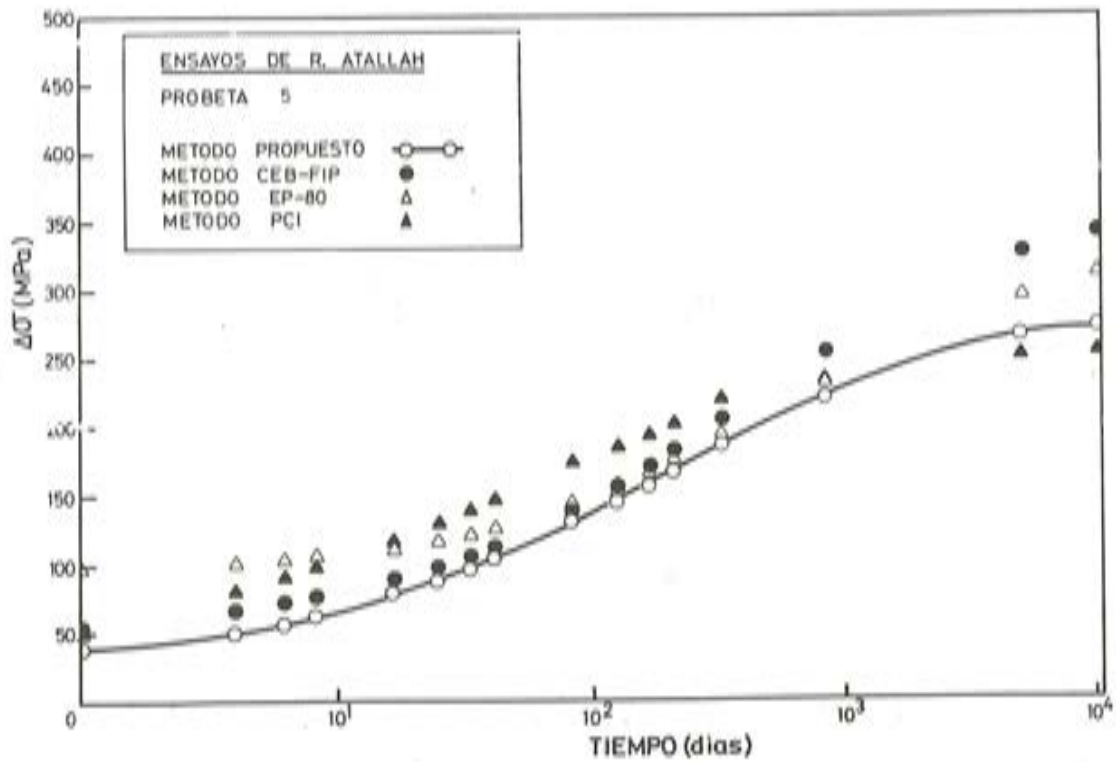


Fig. 2.

**TABLA 3**  
**Ensayos de Atallah (Probeta 5)**

METODOS	$\Delta \sigma$ (MPa) 125 días	$\Delta \sigma$ (MPa) 5.000 días	$\Delta \sigma$ (MPa) 10.000 días
Propuesto	144,5	266,8	272,6
CEB-FIP	156,9 (+ 8%)	328,5 (+ 23%)	344,2 (+ 26%)
EP-80	156,7 (+ 8%)	296,1 (+ 11%)	314,3 (+ 15%)
PCI	185,2 (+ 28%)	252 (- 3%)	274,3 (+ 1%)

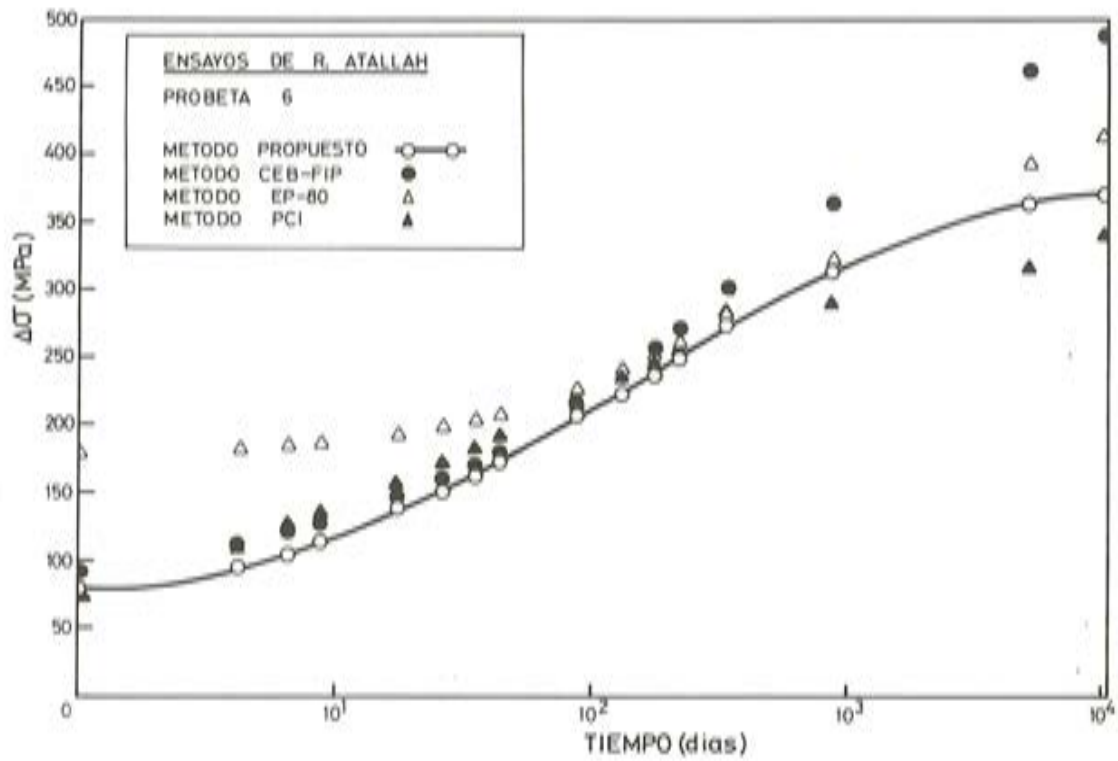


Fig. 3.

**TABLA 4**  
Ensayos de Atallah (Probeta 6)

METODOS	$\Delta \sigma$ (MPa) 125 días	$\Delta \sigma$ (MPa) 5.000 días	$\Delta \sigma$ (MPa) 10.000 días
Propuesto	221,3	361,7	368,2
CEB-FIP	236,8 (+ 7%)	460,1 (+ 27%)	485,5 (+ 32%)
EP-80	238,3 (+ 8%)	390,6 (+ 8%)	413,0 (+ 12%)
PCI	234,3 (+ 6%)	314,0 (- 13%)	338,8 (- 8%)

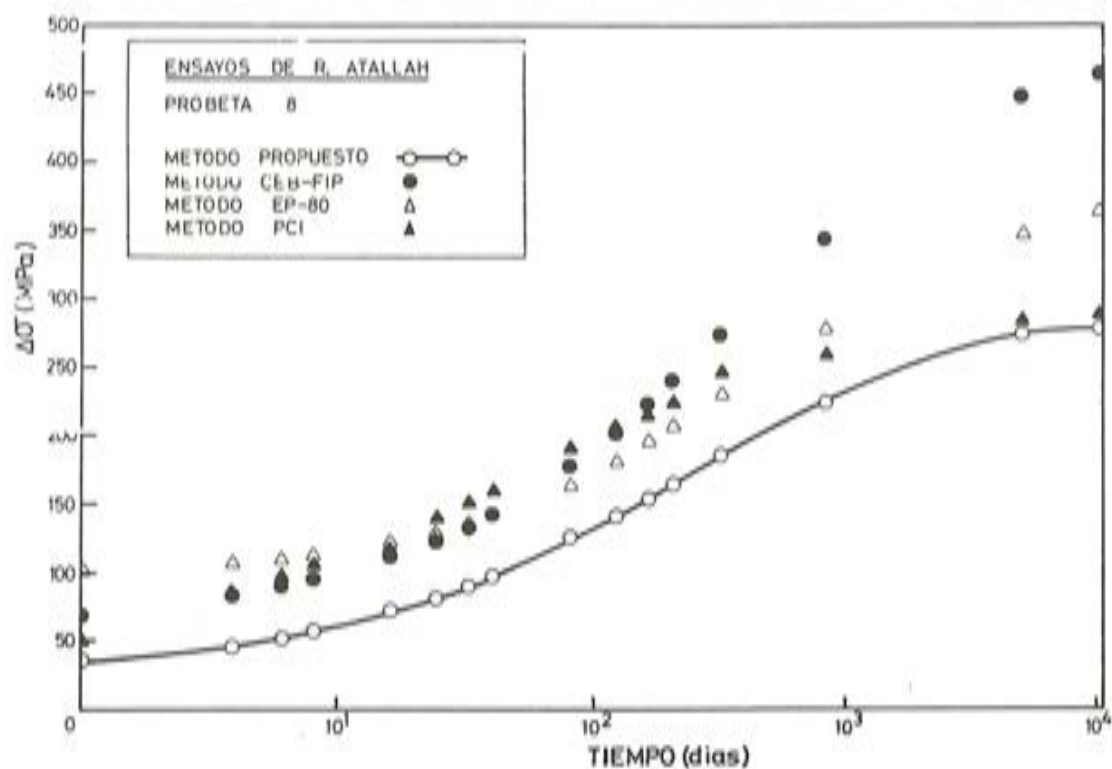


Fig. 4.

**TABLA 5**  
Ensayos de Atallah (Probeta 8)

METODO	$\Delta\sigma$ (MPa) 125 días	$\Delta\sigma$ (MPa) 5.000 días	$\Delta\sigma$ (MPa) 10.000 días
Propuesto	139,9	274,3	279,0
CEB-FIP	200,6 (+ 43%)	447,5 (+ 63%)	465,0 (+ 67%)
EP-80	180,3 (+ 29%)	348,6 (+ 27%)	365,1 (+ 30%)
PCI	203,9 (+ 46%)	238,6 (+ 3%)	311,2 (+ 12%)

A largo plazo, las diferencias aumentan considerablemente. Los resultados obtenidos utilizando los métodos propuestos por el Model Code y EP-80 siempre son valores mayores que los obtenidos utilizando el método propuesto.

Los resultados obtenidos utilizando el método del PCI son más dispersos. A 10.000 días,

los resultados correspondientes a los ensayos de Ghali y Demorieux y el ensayo 6 de Atallah, son menores que los calculados por el método propuesto. Contrariamente, en los ensayos 5 y 8 de Atallah, los resultados del PCI son muy semejantes a los obtenidos utilizando el método propuesto.

#### 4. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

1. El cálculo de las pérdidas diferidas en elementos de hormigón pretensado es un problema no lineal en el que intervienen distintos fenómenos, debidos al hormigón y al acero, fuertemente interrelacionados.

Para una evaluación adecuada es necesario no solo disponer de modelos adecuados para la evaluación de la fluencia y retracción del hormigón y la relajación del acero a longitud variable sino adoptar procedimientos que permitan estudiar con suficiente precisión la interacción de los distintos fenómenos.

2. El método propuesto en la referencia (1) plantea el estudio de las pérdidas diferidas utilizando un procedimiento incremental y proponiendo un método adecuado para la evaluación de la relajación del acero a longitud variable. Permite tener en cuenta, con el mismo nivel conceptual, los distintos fenómenos implicados.

El método propuesto por el PCI adopta asimismo un procedimiento de tipo incremental pero con simplificaciones importantes. No se tiene en cuenta la recuperación elástica del hormigón al final de cada intervalo. Los modelos para la evaluación de la fluencia y retracción del hormigón solo permiten evaluar algunas de las variables que intervienen en el fenómeno. La fórmula propuesta para la evaluación de la relajación a longitud constante es empírica y para la obtención de las pérdidas a longitud variable se utiliza una transferencia a tiempo constante que puede conducir a sobrevaloraciones importantes tal como se indica en las referencias (7) y (11).

Los métodos propuestos por el Model Code y la EP-80 adoptan el procedimiento del término de interacción. Las distintas propuestas de término de interacción presentan ventajas de utilización pero una falta de precisión que en algunos casos puede ser importante.

3. Para tiempos cortos, en los que es posible contrastar experimentalmente los resultados obtenidos, el método propuesto predice adecuadamente las pérdidas (7) mientras el resto de los métodos estudiados conducen a una sobrestimación de las mismas. En algunos casos, esta sobrestimación puede ser importante, como muestra el ejemplo del ensayo 8 de Atallah utilizando el método propuesto por la EP-80.

Para tiempos largos, los métodos que utilizan procedimientos incrementales (Método propuesto y PCI) conducen a pérdidas menores que las que se obtienen con métodos que utilizan término de interacción (Model Code y EP-80).

4. En este trabajo se pone de manifiesto la necesidad de realizar experimentación a largo plazo para poder contrastar experimentalmente los modelos utilizados.

#### REFERENCIAS

- (1) Sánchez-Gálvez, V., Elices Calafat, M. Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 1. Teoría. Hormigón y Acero n° 153, 4º Trimestre (1984).

- (2) Comisión Permanente del Hormigón. Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado EP-80 (1980).
- (3) CEB-FIP. Model Code for Concrete Structures (1978).
- (4) PCI Committee on Prestress Losses. Recommendations for Estimating Prestress Losses. PCI Journal V. 20, n° 4, July-August, 43-45 (1975).
- (5) Ghali, A., Demorieux, J. Une méthode de calcul de perte de précontrainte et sa vérification expérimentales. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. n° 286. Octobre (1971).
- (6) Atallah, R. Contribution a l'Etude de la perte de précontrainte par fluage -relaxation combinés dans les éléments en béton précontraint. Revue de l'Industrie Minérale, n° 15, Junio (1972).
- (7) Sánchez-Gálvez, V., Elices Calafat, M. Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 2. Comprobación experimental. Hormigón y Acero n° 153. 4º Trimestre (1984).
- (8) Del Pozo Vindel, F. Expresiones analíticas para evaluar la fluencia y retracción del acuerdo con la EH-80. Hormigón y Acero n° 144. 3º Trimestre (1982).
- (9) Sánchez-Gálvez, V., Elices, M., Astiz, M. A new formula for relaxation of stress-relieved Steels. Materials and Structures, V. 9, n° 54, 411-417 (1976).
- (10) Sánchez-Gálvez, V., Elices, M., Erdelyi, A., Kosiorek, M. Stress relaxation due to steam curing. Materials and Structures, V. 10, n° 60, 351-356 (1977).
- (11) Gerdowski, R., Holf, G. Stress relaxation of steel tendon used in prestressed concrete under conditions of changing applied stress. ASTM STP 676. A. Fox. Ed. 42-58 (1979).

## **Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: Teoría y comprobación experimental**

V. S. Gálvez y M. Elices  
Departamento de Física y Física de Materiales.  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.  
Universidad Politécnica de Madrid.

### **NOTA**

El Texto completo de esta interesante Comunicación ha sido ya publicado en el n.º 153 de "Hormigón y Acero", página 95, correspondiente al cuarto trimestre de 1984.

# Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: Estudio de distintos tipos de acero

H. Corres Peiretti, V. Sánchez-Galvez, M. Elices Calafat  
 Departamento de Física y Física de Materiales  
 E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
 Universidad Politécnica de Madrid

## 1. INTRODUCCION

Este artículo corresponde al último de una serie de cuatro (1) (2) (3), relativos a las pérdidas de pretensado por fluencia y relajación.

En este trabajo se estudia la influencia que tiene la utilización de aceros de pretensado de diferente calidad (R2, R5 y R8), en las pérdidas totales de elementos de hormigón pretensado a largo plazo.

Para calcular la evolución de las pérdidas en el tiempo se ha utilizado el procedimiento propuesto en la referencia (1). Este método presenta ventajas de tipo formal y físico. Permite el tratamiento de la relajación del acero al mismo nivel conceptual que la fluencia y retracción del hormigón y conduce a predicciones teóricas que se ajustan muy bien a varios resultados experimentales (2).

Para la presentación de los resultados se estudian tres ejemplos, correspondientes a tipologías estructurales de uso frecuente (viguetas de forjados y secciones de tableros de puente), en los que se muestra la influencia de distintas calidades de acero en las pérdidas de pretensado.

## 2. DESCRIPCION DE LOS DISTINTOS EJEMPLOS ANALIZADOS

Tal como se indica en la introducción, se han estudiado tres ejemplos cuyas características más importantes se resumen en la Tabla 1.

**TABLA 1**  
 Características de los ejemplos estudiados

Ejemplo	Edad de puesta en carga (días)	HR %	$\sigma_{co}$	$\frac{\sigma_{co}}{f_{cm}}$	$\sigma_{90}$	$\frac{\sigma_{90}}{f_{pu}}$
E1	3	50	18,2	0,50	1.277,5	0,71
E2	3	50	9,1	0,25	1.277,5	0,71
E3	180	50	3,6	0,10	1.277,5	0,71

El ejemplo E1 representa el caso de una vigueta de hormigón pretensado destinada a la construcción de forjados unidireccionales. En él se pretende poner de manifiesto la importancia de la fluencia y de la retracción del hormigón cuando se pretensa a edades tempranas y analizar su posible interrelación con la relajación de los distintos tipos de acero.

En este ejemplo, tal como sucede durante el proceso de fabricación de viguetas, el hormigón se pone en carga a muy temprana edad y con un nivel de tensiones importante (del orden de  $0.5 f_{cm}$ ). En este tipo de elementos se utiliza una misma sección transversal con distintas cuantías de armadura. Para cuantías altas, después del destesado de las piezas, y descontadas las pérdidas instantáneas, el hormigón puede presentar tensiones de compresión en la fibra más comprimida aún mayores que las indicadas en el ejemplo.

En la realidad, este estado tensional varía y las tensiones de compresión disminuyen, ya que cuando se construye el forjado, se suman a las tensiones debidas al pretensado y peso propio de la vigueta, las tensiones producidas por el peso propio del forjado y las cargas permanentes y sobrecargas que soporta. Esta disminución de tensiones dependerá de las cargas indicadas y de la luz del forjado.

En este ejemplo, y ya que se quiere mostrar una situación límite, se ha considerado que el estado tensional que se indica en la tabla solo cambia por efecto de las pérdidas de pretensado. Por lo tanto, el ejemplo analizado, puede representar el caso de una vigueta que se utiliza para construcción después de haber permanecido mucho tiempo almacenada o una vigueta en la que el estado de tensión resulta importante aún cuando se tengan en cuenta las tensiones debidas a las cargas exteriores.

El segundo ejemplo, en el que el hormigón se pone en carga a tres días y el valor de la tensión es moderado ( $0.25 f_{cm}$ ), puede representar el caso de tableros de puentes construidos por voladizos sucesivos. En este caso, para mantener un ritmo adecuado de construcción, el hormigón de las dovelas se pretensa lo más rápidamente posible y el estado de tensión del hormigón puede ser del tipo indicado en el ejemplo.

Como en el ejemplo 1, se considera que la variación de las tensiones del hormigón y del acero en el tiempo, sólo es debida a las pérdidas de pretensado. En este ejemplo se pretende buscar un equilibrio entre las pérdidas por fluencia y retracción del hormigón y las debidas a la relajación del acero. Aunque se pretensa a edades tempranas, con lo cual las pérdidas por fluencia y retracción podrían ser grandes, se hace con valores pequeños de la tensión en el hormigón (al contrario del ejemplo anterior) para disminuir estos fenómenos.

Por último, el ejemplo 3 representa un caso que puede presentarse poco en la realidad, pero constituye un caso límite, en relación con los anteriores, y permite poner de manifiesto fenómenos de interés a los efectos de este trabajo. Se estudia una situación opuesta al primer ejemplo. Se postensa al cabo de bastante tiempo, para minimizar las pérdidas debidas a la fluencia y retracción del hormigón y su interrelación con la relajación de los distintos tipos de acero.

En todos los casos, se ha considerado que la tensión del acero, después de descontadas las pérdidas instantáneas, es de  $0.71 f_{pm}$ .

Asimismo, para todos los ejemplos analizados se han considerado unas condiciones ambientales, definidas por 50 por 100 HR, idénticas.

Las características mecánicas y de relajación de los aceros de distintas calidades utilizados se resumen en la tabla 2. Los datos indicados corresponden a resultados experimentales descritos en las referencias (4), (5), (6).

**TABLA 2**  
Características mecánicas y de relajación de los aceros estudiados

Aceros	$\rho_{120}$ (%)	$\rho_{1000}$ (%)	$\frac{\sigma_1}{f_{pu}}$	$f_{pu}$ (MPa)
R2	1,2	1,9	0,75	1.800
R5	1,7	4,9	0,7	1.800
R8	4,6	7,8	0,7	1.800

### 3. PRESENTACION Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En las figuras 1, 2 y 3 se muestra la evolución de las pérdidas de pretensado correspondientes a los tres ejemplos estudiados. Asimismo, en la tabla 3, se presenta un resumen numérico de los resultados obtenidos a 10.000 días.

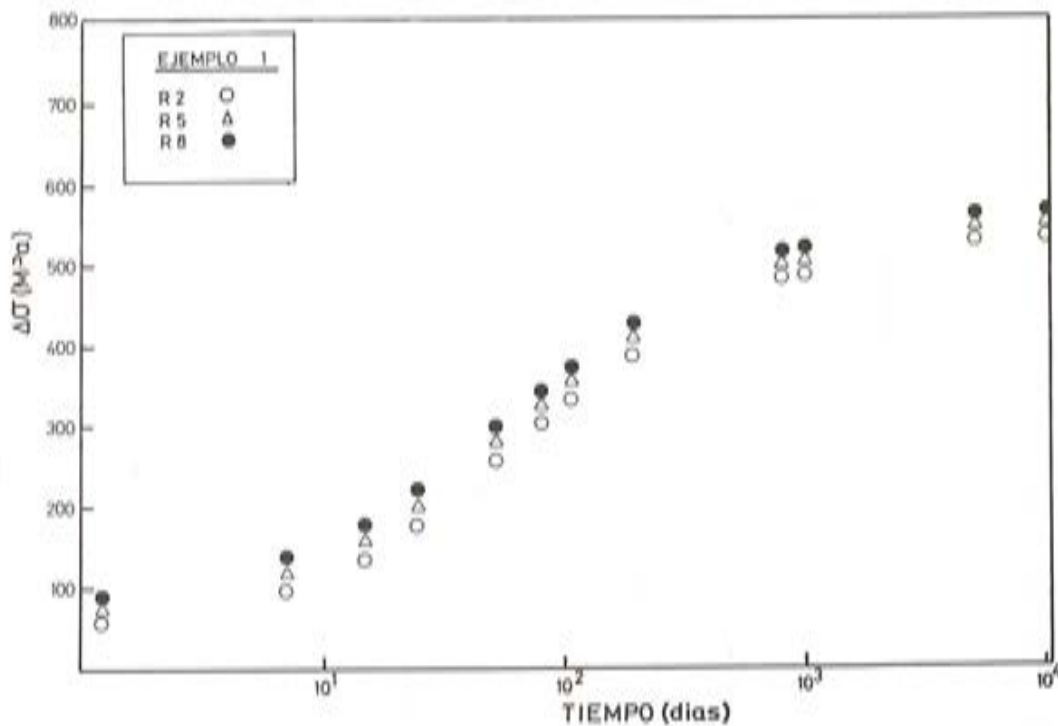


Fig. 1.

Los resultados obtenidos para el ejemplo 1, muestran que las pérdidas con los tres aceros utilizados resultan muy semejantes. En otras palabras, podría decirse que, para condiciones como las del ejemplo 1, la utilización de aceros con menor relajación no reduce significativamente las pérdidas diferidas.

Estos resultados, obtenidos utilizando el método propuesto en la referencia (1), pueden explicarse cualitativamente teniendo en cuenta dos aspectos.

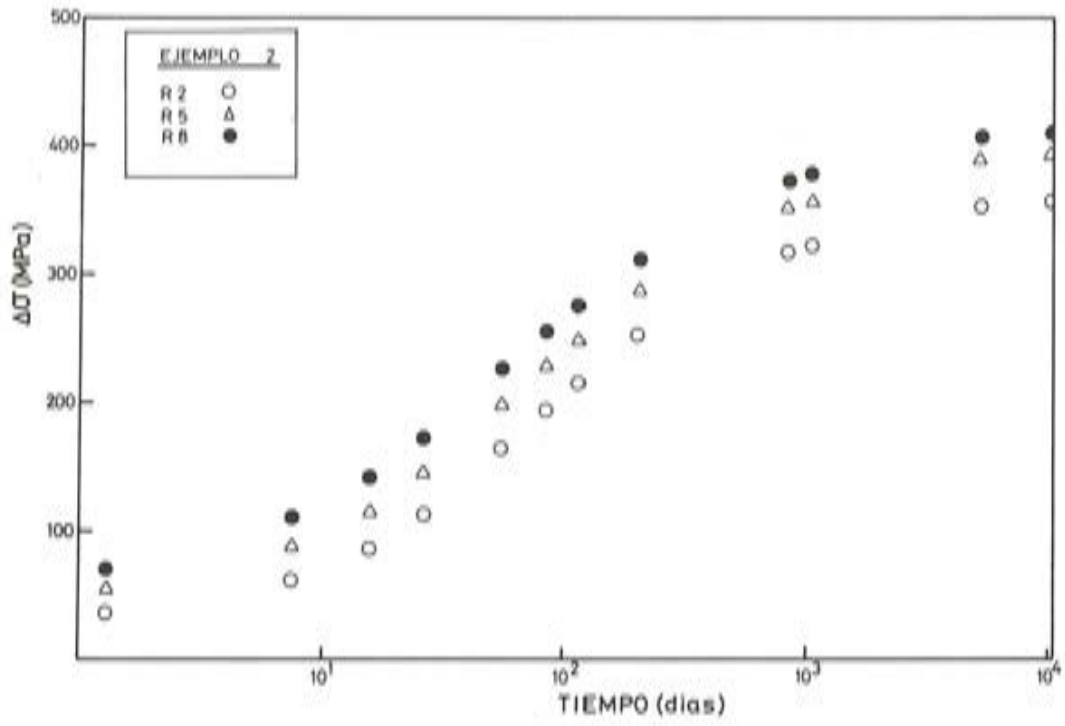


Fig. 2.

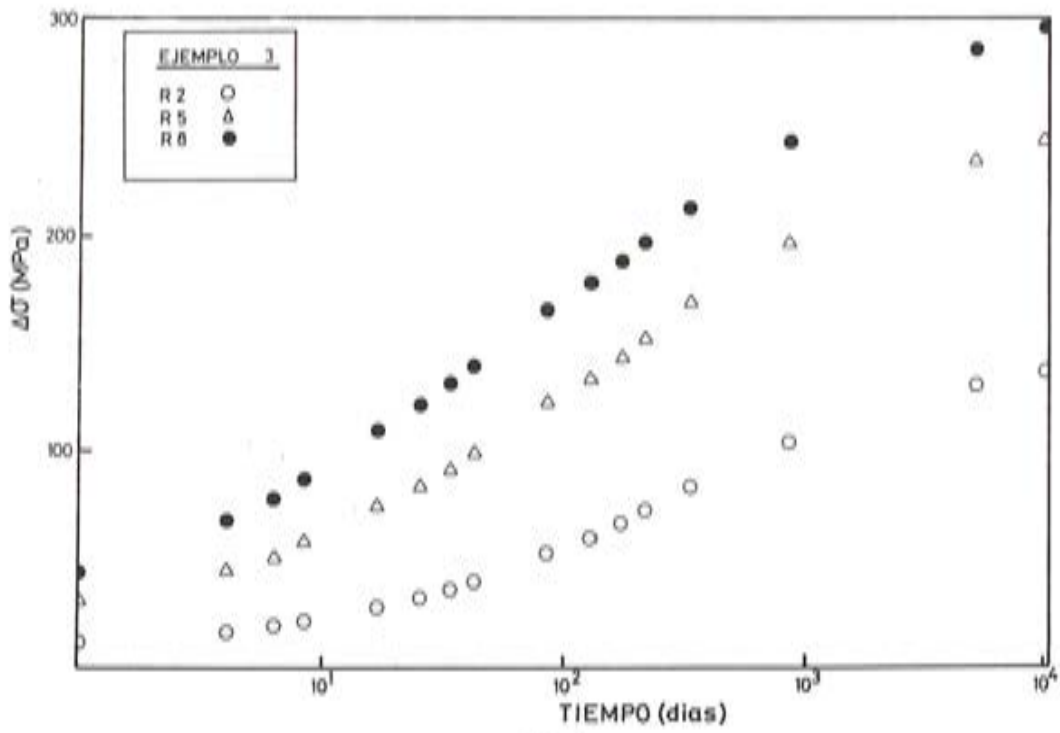


Fig. 3.

**TABLA 3**  
**Pérdidas totales a 10.000 días**

Ejemplo	$\Delta\sigma$ (MPa) 10.000 días		
	R2	R5	R8
E1	526,5 (41%)	544,5 (43%)	558,1 (44%)
E2	354,4 (28%)	390,8 (31%)	408,5 (32%)
E3	136,3 (11%)	243,7 (19%)	297,4 (23%)

En primer término, las condiciones relativas al hormigón y al acero del ejemplo. Debido a que el hormigón se carga a muy temprana edad y con un nivel de tensión importante y a que las condiciones de humedad ambiente son asimismo desfavorables las deformaciones por fluencia y retracción del hormigón son importantes y controlan el proceso de las pérdidas de tensión del acero.

En segundo lugar, tal como se ha comentado en la referencia (3) las pérdidas diferidas dependen de tres fenómenos, fluencia y retracción del hormigón y relajación del acero, fuertemente interrelacionados. Justamente debido a la interrelación de estos fenómenos y el protagonismo de las pérdidas debidas a fluencia y retracción, en el ejemplo 1 las pérdidas resultan muy semejantes independientemente del tipo de acero utilizado.

En el caso de un acero R8 debido a la relajación del acero disminuyen las tensiones en el hormigón y con ello se desaceleran las deformaciones de fluencia y por lo tanto las pérdidas correspondientes.

En el caso de un acero R2, la relajación del acero es menor y las tensiones del hormigón, que producen las pérdidas por fluencia, se mantienen altas pudiendo, como en el ejemplo mostrado, obtenerse valores de pérdidas totales del mismo orden de magnitud.

Este fenómeno, y en situaciones límites como las del ejemplo que se comenta, es difícilmente detectable con procedimientos simplificados que plantean la pérdida total como la suma de las componentes debidos a los distintos fenómenos más un término de interacción (EP-80 por ejemplo). En particular, si se utiliza el método propuesto por la EP-80 para resolver este caso, debido a los grandes valores de pérdidas de fluencia y retracción que se obtienen y a las características del término de interacción propuesto, se pueden obtener términos de interacción negativos, que conducen a que las pérdidas de pretensado disminuyen a partir de un determinado tiempo por lo que no responde al fenómeno físico estudiado.

Por otra parte, tal como puede verse en la tabla 3, los valores de pérdidas totales a 10.000 días son importantes (43 por 100) de acuerdo con la predicción del método utilizado. En este caso, y en total concordancia con los resultados presentados en la referencia 3, si se utiliza el método propuesto por la EP-80 se obtienen valores máximos de pérdidas del orden del (65 por 100) que resultan inaceptables.

En el ejemplo 2, y debido a que la tensión del hormigón es menor ( $0.25 f_{cm}$ ), el efecto favorable de la utilización de distintas calidades de aceros se manifiesta sin llegar a ser tampoco muy significativo. A 10.000 días, de acuerdo con los resultados de la tabla 3, la diferencia de pérdidas de pretensado utilizando un acero R2 o un acero R8 es de un 4 por 100.

En el ejemplo 3, en el que el hormigón se supone cargado a 180 días del momento del hormigonado y sometido a una tensión pequeña ( $0.1 f_{cm}$ ), el efecto de la utilización de aceros de distinta calidad es verdaderamente importante. En este caso, a 10.000 días, las pérdidas que se producen cuando se utiliza un acero R8 son el doble de las que se obtienen cuando se utiliza un acero R2.

En este ejemplo, las deformaciones de fluencia y retracción del hormigón son pequeñas mientras que la relajación del acero que tiene la misma tensión inicial que en los ejemplos anteriores, constituye la componente principal de la pérdida diferida total.

#### 4. CONCLUSIONES

1. El efecto positivo, en cuanto a reducción de pérdidas de pretensado que puede esperarse utilizando aceros de baja relajación, depende fundamentalmente de la importancia relativa de las pérdidas por fluencia y retracción del hormigón en relación con las pérdidas por relajación del acero.
2. Para elementos estructurales en los que las deformaciones de fluencia y retracción pueden ser importantes (ejemplo 1 y 2) el efecto debido a la utilización de aceros de distintas calidades (R2, R5 y R8) puede ser irrelevante.
3. Para elementos estructurales en los que las deformaciones de fluencia y retracción son pequeñas (ejemplo 3), el efecto debido a la utilización de aceros de distintas calidades puede ser importante.
4. Los métodos que adoptan el procedimiento del término de interacción (3), por ejemplo la EP-80, no resultan adecuados para la valoración de este tipo de fenómenos.
5. Para adoptar la decisión de utilizar un determinado tipo de acero resulta necesario una valoración cualitativa de la importancia relativa de las pérdidas debidas al hormigón o un estudio de las pérdidas diferidas utilizando el procedimiento descrito en la referencia 1, que justifique la utilización de aceros de mayor calidad.

#### REFERENCIAS

- (1) Sánchez-Gálvez, V.; Elices Calafat, M. Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 1. Teoría. Hormigón y Acero n° 153. 4º Trimestre. (1984).
- (2) Sánchez-Gálvez, V.; Elices Calafat, M. Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 2. Comprobación Experimental. Hormigón y Acero n° 153. 4º Trimestre (1984).
- (3) Corres Peiretti, H.; Sánchez-Gálvez, V; Elices Calafat, M. Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: 3. Estudio comparativo de distintos modelos. Hormigón y Acero n° 155. 2º Trimestre (1985).
- (4) Sánchez-Gálvez, V.; Elices Calafat, M. Astiz Suarez, M.A. A new formula for relaxation of stress-relieved steels. Materials and Structures. n° 54. Nov.-Dic. (1976).
- (5) Brachet, M.; Jacques, P.; Atallah, R. Méthodes de mesure et d'estimation de la valeur a long terme de la relaxation des armatures de précontrainte. Bull. Liaison Lab. P. et. Ch. Jul.-Ago. (1973).
- (6) Kosiorek, M. Comunicación Privada.

**IV Sesión de Trabajo.**  
**Tema III: Investigaciones y Estudios (Continuación)**

## **Programa de I + D de depósitos criogénicos de hormigón pretensado**

**Rafael Chueca Edo**  
**Ingeniero de Caminos**  
**AUXINI - DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES**

### **1. INTRODUCCION**

AUXINI y DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES acaban de terminar un programa de Investigación y Desarrollo de depósitos criogénicos de hormigón pretensado del que se presentan aquí resumidos los aspectos más destacados. En esta misma Asamblea figuran varias Comunicaciones en las que se tratan con mayor detalle algunos de los temas objeto de esta Investigación.

AUXINI vió la necesidad de la realización de este programa de I+D cuando estaba construyendo un tanque de hormigón pretensado de 80.000 m<sup>3</sup> de capacidad de GNL en la planta de ENAGAS, en Barcelona. El proyecto se basó en el diseño básico de Preload Technology y era, por tanto, necesario adquirir una tecnología propia si se deseaba proyectar nuevos tanques sin una dependencia del exterior. Durante dicha obra se puso en marcha la Fase 0 de Investigación, en la que se analizaron todos los aspectos susceptibles de mejora y se definió el contenido que debía tener la siguiente Fase de la misma.

La Fase 1 del programa de I+D, ahora terminada, se inició en enero de 1981. A principios de 1982 se firmó un Convenio de Colaboración entre AUXINI y DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES para la promoción y construcción de tanques criogénicos, por lo que la Investigación se desarrollo conjuntamente por ambas Empresas a partir de ese momento.

### **2. NORMATIVA**

La peligrosidad potencial de un almacenamiento criogénico se debe a dos hechos: Por una parte el gas licuado ocupa un volumen mucho más reducido que en estado gaseoso (la relación es de 1:600 para el gas natural) y por otra su baja temperatura (-165 grados para el gas natural) hace que se produzca una rápida evaporación en caso de fuga del líquido. El gas que se origina se dispersa en la atmósfera; la zona con una concentración de gas por encima del límite de inflamabilidad forma una "nube inflamable" que se propaga sobre el terreno, por ser más densa que el aire, hasta que encuentra un foco de ignición. En este momento arde toda la nube, propagando el incendio hasta el punto de origen de la fuga. Para hacerse una idea de lo que podría ocurrir en caso de producirse un derrame total del líquido (gas natural, propano, butano, etc.) almacenado en un tanque de dimensión usual (50.000 a 80.000 m<sup>3</sup> de líquido) basta recordar el accidente de Los Alfaques, provocado por una cisterna de unos 15 m<sup>3</sup>.

Así pues, hay que ser enormemente exigente en los temas de seguridad y para ello hay que hacer los proyectos de acuerdo con una normativa adecuada. Existen pocas normas extranjeras y ninguna todavía en España; los tanques aquí existentes se han proyectado siguiendo normas extranjeras. Para cubrir este vacío se ha realizado dentro de la Investigación una "Norma general de seguridad para almacenamiento de GNL", basada en la normativa extranjera más reciente y que se adapta a las normas españolas, tales como la Instrucción EP-80. La norma se ha hecho para el gas natural licuado ya que las condiciones de estos almacenamientos son las más estrictas, por la menor temperatura del líquido, que en los restantes casos.

La seguridad, en un sentido amplio, se entiende como la predicción de posibles fallos que supongan un riesgo para las vidas humanas, los bienes materiales y el entorno, así como la adopción de los medios para mitigar los efectos en caso de que el fallo llegue a producirse; De acuerdo con esto, un almacenamiento criogénico debe proyectarse con una seguridad suficiente (ya que no puede ser infinita) de forma que garantice razonablemente que no se van a producir fugas al exterior del líquido almacenado. Por otra parte, es preciso suponer que se ha llegado a producir un derrame o un incendio del líquido almacenado, y hay que satisfacer en este caso unos requisitos de seguridad que determinan unas "zonas de exclusión" en torno del almacenamiento, en las que no puede haber edificaciones o circulación de personas, excepto las de la propia planta.

Así pues, es preciso poder predecir la evolución de la nube inflamable bajo distintas hipótesis de derrame del líquido (por rotura de una tubería de circulación o por fuga o rotura del tanque) y de condiciones atmosféricas. Esto se puede hacer mediante programas de ordenador basados en modelos matemáticos de dispersión, como el del TNO. La zona de exclusión viene definida por la extensión máxima de la nube. Es posible reducir esta extensión disponiendo en torno del tanque un cubeto de seguridad de menor superficie o aislando su fondo, de forma que se reduzca el aporte calorífico del terreno y se aminore el ritmo de evaporación del líquido derramado.

Por otra parte hay que contar con que se produzca un incendio, bien del depósito (como podría ser en caso de rotura por un impacto de la cúpula), o del líquido previamente derramado en el cubeto. En función de la superficie de líquido ardiendo, características del viento, etc., y basándose también en modelos matemáticos reconocidos (AGA) es posible calcular la radiación térmica incidente sobre objetos situados en el entorno; al limitar esta radiación a unos valores admisibles queda definida una segunda zona de exclusión. Esta radiación también puede disminuirse reduciendo el tamaño del cubeto.

Por lo que se refiere al depósito en sí, la norma fija en primer lugar las acciones de cálculo, cuya combinación se establece en dos niveles de severidad: para el primero basta con garantizar la protección del entorno, pudiendo aceptarse daños en el depósito que lo lleguen a dejar fuera de servicio; en el segundo es preciso que la instalación pueda seguir funcionando sin interrupción. De acuerdo con esto, se puede aceptar que para el nivel más severo se produzcan fisuras en un tanque de hormigón, siempre que su profundidad no ponga en peligro la estanqueidad frente al líquido almacenado. Para el nivel menos severo es necesario que las tensiones de los materiales queden dentro del campo elástico (Clase I, en caso del hormigón pretensado). Además de las acciones de servicio se definen otros dos grupos:

#### Accidentales:

- Sobrellenado.
- Sismo de diseño (equivalente al OBE empleado en centrales nucleares).
- Pruebas de aptitud, llenando el depósito de agua hasta la altura máxima del líquido a almacenar.

Extraordinarias:

- Sismo excepcional (SSE).
- Derrame externo de GNL, bien por rotura de una tubería o por fuga de un tanque vecino. El tanque externo debe resistir el descenso de temperatura repentino.
- Derrame del GNL del tanque interno. El tanque externo debe resistir tanto a la acción mecánica del líquido como al choque térmico.
- Sobrepresión exterior debida a una explosión en la planta.
- Impacto exterior que, como mínimo, será el debido al de un trozo de tubería lanzado por una explosión.
- Radiación térmica exterior debida al incendio de un depósito vecino.
- Sobrepresión debida a una inestabilidad por inversión en la estratificación del líquido, que puede ocurrir si el llenado del tanque se hace con líquido a temperatura diferente de la del almacenado, quedando una capa de líquido denso sobre otra menos denso. Esta situación inestable puede alterarse de repente, con lo que se produce una mezcla rápida de las dos masas de líquido acompañada de una rápida vaporización.

La norma fija también los requisitos de los materiales, las especificaciones de construcción, el desarrollo de las pruebas de aptitud, los criterios de operación y mantenimiento y los equipos de protección.

### 3. ESTUDIOS ESTRUCTURALES

Se ha preparado un programa de ordenador que permite realizar rápidamente el cálculo completo de un tanque, sometido a solicitaciones axilsimétricas, dentro del dominio elástico. Este programa resulta muy útil para un prediseño, ya que pueden estudiarse cómodamente diferentes alternativas. Se ha utilizado para estudiar las diferencias en cantidad de prensado entre la solución de hacer deslizante la base de la pared y la de su empotramiento en la solera, con distintas situaciones de espesor de pared, coeficiente de rozamiento de la base, coeficiente de contracción del hormigón, ritmo de construcción y humedad ambiente. La unión entre la pared y el fondo de un tanque constituye un punto crítico de diseño, por la concentración que se da de esfuerzos máximos (caso de empotramiento) o por la aparición de grandes desplazamientos relativos (caso de unión deslizante) difíciles de conjugar con la permeabilidad necesaria. La unión empotrada es la mejor solución para la transmisión de esfuerzos dinámicos importantes y con respecto a la estanqueidad; los inconvenientes de la concentración de esfuerzos pueden reducirse si se acepta una fisuración limitada en la base de la pared. En la solución de base deslizante se puede conseguir una impermeabilidad con garantía si se utiliza un fondo de acero al níquel, soldado a la base de la pared; esta solución es típica de la tecnología de Estados Unidos, mientras que en Europa se prefiere la unión empotrada.

Para poder hacer un cálculo riguroso de un tanque sometido a solicitaciones excepcionales se han preparado diversos programas de ordenador, basados en el método de los elementos finitos y que han sido desarrollados conjuntamente por ESPES y la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona. La característica común de estos programas es que están específicamente adaptados para las tipologías usuales de tanques de almacenamiento, por lo que la entrada de datos se ha simplificado al máximo y la salida de resultados es de interpretación simple. Describimos seguidamente algunos de estos programas:

- Cálculo estático, no elástico, de tanques sometidos a cargas axilsimétricas:

Un programa permite efectuar el análisis en régimen transitorio de la transmisión de calor. Se utiliza un elemento "Serendípito" de nueve nodos con funciones de forma cuadráticas. Se considera que las propiedades físicas del material (conductividad y calor específico) son independientes de la temperatura. Las condiciones de contorno se establecen prefijando la temperatura o el flujo de calor. La resolución de la ecuación diferencial de la transmisión del calor se hace por aproximaciones sucesivas, mediante el método de Galerkin. El programa produce una salida impresa y graba un archivo en disco que sirve como parte de la entrada de datos del programa de cálculo de esfuerzos.

Este segundo programa utiliza un elemento finito isoparamétrico de tres nodos en el que el hormigón, armaduras activas y pasivas y la chapa de revestimiento se modelizan por división del espesor del elemento en varias capas paralelas con las características correspondientes al material que representan. El comportamiento del hormigón se asimila al de un material elastoplástico a compresión y elástico-fisurado a tracción. Para las armaduras y chapa de revestimiento se considera una ley elastoplástica. Las integrales que aparecen sobre el volumen del elemento se resuelve mediante un esquema de integración reducida de Gauss-Legendre aplicado a las distintas capas que discretizan su espesor. El sistema de ecuaciones no lineales correspondientes a la ecuación de equilibrio del sólido discretizado se resuelve iterativamente por el método de Newton-Raphson combinado con un proceso incremental de variación del vector de cargas exteriores. Dentro de cada incremento de carga se considera que el proceso iterativo converge si en una cierta iteración el valor de las fuerzas residuales es cero salvo una tolerancia dada. Las cargas pueden aplicarse de forma simultánea o secuencial, lo que resulta fundamental a la vista de la no linealidad de la estructura. En concreto, resulta posible obtener la respuesta de la estructura frente a una secuencia de cargas térmicas, correspondientes a estados transitorios de distribución de temperatura; se puede así seguir la evolución de la fisuración a lo largo de toda la historia de aplicación de las cargas.

— Cálculo estático, no elástico, de tanques sometidos a cargas no simétricas:

Estos programas constituyen una generalización de los anteriores. Se ha preferido disponer de dos grupos de programas ya que el esfuerzo de cálculo es mucho mayor en el caso general que en el axilimétrico, por lo que es preferible aplicar los programas generales únicamente al caso de solicitaciones no simétricas. Al igual que antes, se tienen dos programas: Uno que calcula las distribuciones transitorias de temperatura y otro que hace el cálculo no lineal de esfuerzos. El análisis transitorio de la transmisión de calor se hace mediante un elemento "Serendípito" de 20 nodos, siendo el proceso de resolución similar al del caso simétrico. El programa de cálculo de esfuerzos emplea un elemento finito isoparamétrico de ocho nodos, en el que el hormigón, armaduras y chapa de revestimiento se modelizan por división en capas a través del espesor, como en el programa axilimétrico. Las leyes de comportamiento de los materiales y los métodos iterativos de resolución son también iguales a los empleados en dicho programa, por lo que es posible seguir la evolución de la fisuración a lo largo de la historia de aplicación de cargas no simétricas.

— Cálculo sísmico:

El programa considera la triple interacción terreno-estructura-fluido. El método de los elementos finitos la resuelve mediante una formulación por subestructuras: Una es el terreno junto con el tanque y otra es el líquido almacenado. En la primera se utilizan elementos troncocónicos de lámina de revolución para el hormigón y elementos sólidos de revolución para el terreno. El líquido se considera incomprensible, homogéneo y no viscoso, por lo que obedece a la ecuación de Laplace. Se hace la simplificación de prescindir de su sobreelevación por oleaje, con lo que el efecto se reduce a la modificación de la matriz de masas del tanque por suma de otra de "masas añadidas" del líquido almacenado, que representa el efecto de la subestructura fluido sobre la estructura-terreno; de esta forma no hay diferencia entre el proceso de cálculo para tanque vacío o tanque lleno.

El problema tridimensional se transforma en bidimensional gracias a la simetría de revolución, lo que permite el desarrollo de presiones y corrimientos nodales en series de Fourier. Por otra parte, el carácter antimétrico de la deformación permite una representación correcta sin más que considerar el primer armónico. El cálculo se puede hacer por dos procedimientos diferentes: En el método de superposición modal se calculan las frecuencias propias naturales de las oscilaciones libres y se expresa la solución como una suma en la que cada término representa la contribución de un modo. En el procedimiento de los espectros sísmicos de respuesta se obtiene la respuesta máxima para cada modo de vibración y se utiliza una norma adecuada para obtener la respuesta total mediante la suma de los máximos modales, lo cual supone una aproximación puesto que dichos máximos no se dan al mismo tiempo.

— Cálculo dinámico:

El programa considera la triple interacción terreno-estructura-fluido, como para el cálculo sísmico. La excitación puede ser un sistema de velocidades iniciales en determinados puntos (impacto de proyectiles duros), un sistema de fuerzas dinámicas (impacto blando) o una zona sometida a presiones dinámicas (explosiones exteriores). Tanto las funciones de forma que definen la variación de los desplazamientos como los términos de carga se expresan mediante series de Fourier; cada armónico afecta sólo a su sistema de ecuaciones correspondientes, por lo que el problema tridimensional se reduce a la suma de varios bidimensionales.

Los elementos finitos empleados son iguales que para el programa de cálculo sísmico. Se sigue también el mismo procedimiento para introducir el efecto del líquido a través de una matriz de "masa añadida". Se puede optar entre dos métodos de resolución: En el primero se resuelve la ecuación de movimiento por integración paso a paso, obteniéndose valores numéricos de la solución para sucesivos incrementos de tiempo. El segundo utiliza la superposición modal, desacoplando el sistema de ecuaciones simultáneas para su resolución independiente; la solución se expresa como suma de la contribución de los diversos modos.

#### 4. ESTUDIOS MATERIALES

Se han realizado tres grupos de ensayos para aumentar el conocimiento sobre los materiales estructurales de los tanques criogénicos de hormigón pretensado. Todos ellos se han hecho por el Laboratorio del Departamento de Física de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid.

Fig. 1. Vista general del laboratorio. A la izquierda se observa una cámara criogénica colocada en la máquina de ensayo. A la derecha están las bombonas de nitrógeno licuado.



#### – Contracción del hormigón:

El conocimiento de la ley de contracción térmica del hormigón es de importancia fundamental para el proyecto de una estructura criogénica ya que las diferencias de contracción entre el hormigón y las armaduras generan importantes tensiones en dichos materiales. Las armaduras, tanto activas como pasivas, presentan un comportamiento casi lineal durante su enfriamiento desde temperatura ambiente a  $-165$  grados, pero el hormigón saturado tiene un comportamiento marcadamente no lineal, debido a que la congelación del agua intersticial provoca una importante expansión. Los ensayos tenían por finalidad el conocimiento de la ley de contracción para probetas de hormigón, tanto descargadas como bajo compresión longitudinal, y la medición de esfuerzos en la armadura activa de un elemento estructural pretensado para contrastarlos con las predicciones de un modelo matemático basado en los resultados de probetas.

Se emplearon probetas cilíndricas de hormigón de  $15 \times 7,5$  cm, enfriadas mediante introducción de nitrógeno líquido en una cámara criogénica modular desarrollada específicamente para estos ensayos. Las contracciones de las probetas se midieron mediante dilatómetros de sílice que trasladaban el movimiento a unos extensómetros externos a la cámara. Para los ensayos se utilizó un equipo de adquisición de datos controlado por ordenador. El descenso de temperatura y la carga en los gatos se controlaron también automáticamente.

Los ensayos de probetas no cargadas proporcionaron valores similares a los ya descritos por otros autores, con un comportamiento no lineal en la zona de transición y deformaciones irreversibles, pero los de probetas cargadas a  $15$  MPa presentaron un comportamiento casi lineal, con deformaciones remanentes de signo contrario a las de las probetas sin cargar. Este resultado es una primicia mundial y resulta muy ventajoso para una estructura de hormigón pretensado, puesto que se reducen fuertemente las importantes tensiones que aparecerían en otro caso como consecuencia de las contracciones muy diferentes del hormigón y las armaduras. Este comportamiento puede explicarse porque las tensiones longitudinales de compresión impiden la microfisuración transversal a la carga cuando se produce la expansión por congelación del agua intersticial.

Se ensayaron también dos elementos estructurales consistentes en un prisma de hormigón de  $150 \times 25 \times 25$  cm pretensado mediante un tendón  $19 \phi 7$ . Se midieron tanto las deformaciones del hormigón como los esfuerzos en el tendón, utilizando para esto último una celda de carga especialmente diseñada para funcionar dentro de la cámara criogénica. La contracción del elemento estructural fue muy similar a la de una probeta cargada, lo que permite predecir el comportamiento de una estructura pretensada mediante el ensayo de probetas sometidas a compresión longitudinal.

#### – Comportamiento de conjuntos tendón-anclaje:

Es un hecho generalmente aceptado que los tanques criogénicos de hormigón pretensado ofrecen una mayor seguridad a lo largo de su vida útil que los metálicos, pero no existían datos en la bibliografía que permitiesen juzgar acerca del adecuado comportamiento dinámico y de aspectos particulares tales como, por ejemplo, del deslizamiento del alambre central de un cordón, alegado por ciertos autores en contra del uso de tales armaduras. Se decidió, por tanto, hacer unos ensayos de comportamiento de conjuntos tendón anclaje de dos sistemas de pretensado comercializados en España: Uno con cordones anclados mediante cuñas individuales y otro en el que se emplean alambres anclados por recalado en frío de su extremo.

Los ensayos han cubierto dos aspectos: La caracterización de los materiales constituyentes (armaduras activas y anclajes) y la medición de la eficiencia del tendón-anclaje. Den-



Fig. 2. Elemento estructural para el estudio de la contracción del hormigón situado dentro de la cámara criogénica. Se observan el anclaje superior del pretensado y los dilatómetros de sílice,

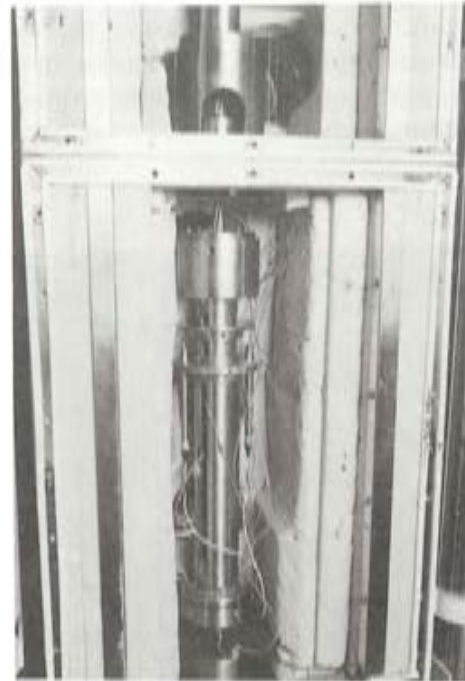


Fig. 3. Extensómetro para cordón de pretensado.

tro del primer aspecto resulta muy importante la determinación de la tenacidad del cono hembra en el sistema de cuñas, ya que en dicha pieza aparecen elevadas tensiones de tracción que la hacen susceptible de rotura frágil en caso de tener defectos accidentales; esta tenacidad es también necesaria para el caso de alambres recalados, si bien es menos crítica que en el otro. Para la caracterización en fractura se han empleado probetas **COMPACT** normalizadas, mecanizadas a partir del material base de fabricación del anclaje. Los ensayos a temperatura criogénica permiten estimar que no se producirá rotura frágil siempre que no existan defectos de profundidad superior a una dada, fácilmente detectable por simple inspección visual.

Para los ensayos de eficiencia se ha utilizado una cámara criogénica de tres módulos; en los dos extremos se disponen los anclajes, con lo que es posible un control muy riguroso de la temperatura en todas las partes de la probeta. Este control es muy importante, ya que la gran masa de los anclajes extremos del tendón y de las mordazas de sujeción a la máquina de ensayo hace que en una cámara de un solo cuerpo se enfríen más lentamente estas partes que en el centro del tendón, con lo que se tienen roturas por los anclajes al haberse elevado

su resistencia por enfriamiento menos que la del centro. Se han realizado ensayos con sollicitación monótona y con sollicitación cíclica; en los segundos se ha estudiado la fatiga mecánica, tanto para variaciones fuertes de carga con pequeño número de ciclos como para gran número de ciclos y pequeña variación de carga, así como la fatiga térmica originada por ciclos de calentamiento y enfriamiento del tendón cargado. En ambos sistemas se ha encontrado una eficiencia excelente a temperatura de  $-165^{\circ}\text{C}$ , no existiendo diferencia entre la carga de rotura de los ensayos estáticos y la de tendones sometidos a fatiga previa. En ningún caso se han detectado deslizamientos del alambre central de los cordones anclados mediante cuñas.

– Comportamiento del acero de armar:

La escasez de datos experimentales sistemáticos sobre el comportamiento a baja temperatura de los aceros de armar de calidad normal hacía aventurado su empleo en almacenamientos criogénicos. En algunos ensayos se había detectado una gran sensibilidad a la entalla, por lo que ciertos autores propugnaban incluso el empleo de acero de pretensar como armadura pasiva.



Fig. 4. Cámara criogénica de tres cuerpos utilizada para los ensayos de sistemas de pretensado y de acero de armar.

En un depósito criogénico pretensado se necesita una importante cantidad de armadura pasiva para controlar la fisuración en situaciones excepcionales (derrame del tanque interno sobre el externo, incendio, etc.), por lo que el empleo de armaduras de pretensado ocasionaría grandes dificultades constructivas. Se decidió, por tanto, realizar una serie de ensayos meticulosos sobre dos tipos de barras comerciales, unas de acero de dureza natural y otras endurecidas por deformación en frío, a fin de poder juzgar sobre la posibilidad de su empleo a temperaturas entre  $-80$  y  $-165^{\circ}\text{C}$ .

Para cada tipo de acero se hicieron ensayos de tres clases: Tracción simple en barras corrugadas, a fin de conocer la evolución de resistencia y ductilidad con la temperatura, influencia de la corruga y estudio de la influencia de los defectos superficiales. La corruga su-

pone una importante singularidad geométrica de la barra, que puede ser el origen de rotura frágiles; para medir su influencia se realizaron ensayos de tracción en probetas rectificadas, libres de corrugas. Para estudiar la influencia de defectos superficiales se realizaron entallas en las barras corrugadas mediante la indentación con una cuña de acero duro bajo carga controlada. Los ensayos se realizaron utilizando la misma cámara criogénica de tres cuerpos que en los ensayos de tendones de pretensado. Mediante un sobreenfriamiento en las dos cámaras externas se conseguía una elevación de la resistencia del acero de la barra, con lo que la rotura se producía en su zona central.

Las barras de acero de dureza natural presentaron un comportamiento adecuado, en cuanto a resistencia y capacidad de deformación, a baja temperatura; no es apreciable la influencia de la corruga en dicho comportamiento. En cambio se observa una gran sensibilidad en las entallas para temperaturas de  $-165^{\circ}\text{C}$  que, sin que suponga imposibilitar su empleo, obliga a una cuidadosa ejecución para evitar daños superficiales en las barras durante su manipulación.

El comportamiento de las barras endurecidas por deformación en frío no resulta adecuado a temperatura de  $-165^{\circ}\text{C}$  porque aparecen roturas frágiles sin estricción. En consecuencia no parece aconsejable su empleo para temperaturas inferiores a  $-80^{\circ}\text{C}$ .

---

ENVIAR A:

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DE PRETENSADO

Apartado 19002

28080 MADRID

## Manual H.P. 6-83 de la A.T.E.P.

Continuando con la serie de Manuales que esta Asociación viene publicando con las recomendaciones que se consideran idóneas para conseguir una adecuada realización de las construcciones pretensadas y su buen comportamiento a lo largo de su vida de servicio, se ha editado ahora el H.P. 6-83 en el que, bajo el título "Recomendaciones para la conservación de obras pretensadas", se recogen las directrices que deben seguirse para mantener en buen estado las estructuras pretensadas, salvando así las lagunas hasta ahora existentes en la normativa oficial en relación con este problema tan de actualidad y que tanto preocupa en todos los países.

Por otra parte, se ha estimado también interesante incluir en este Manual las oportunas recomendaciones para la mejor aplicación de la técnica del pretensado en la realización de reparaciones y refuerzos de estructuras.

Debe subrayarse que, en realidad, el título de esta publicación resulta algo restrictivo, puesto que los principios sobre conservación que en ella se establecen para las obras pretensadas son de aplicación mucho más amplia; casi podría asegurarse que son de aplicación general a todo tipo de construcciones.

Si está Vd. interesado en adquirir esta nueva publicación de la ATEP le ruego que, a la mayor brevedad posible, devuelva cumplimentada la hoja de pedido que a continuación se incluye a: ATEP, Apartado 19002 - 28080-MADRID.

Como siempre, las peticiones serán atendidas por riguroso orden de recepción.

---

### HOJA DE PEDIDO

D. ....  
con domicilio en: .....  
desea recibir:

- Ejemplares del Manual H.P. 6-83 "Recomendaciones para la conservación de obras pretensadas", de la ATEP, de 110 páginas, con numerosas fotografías, figuras y tablas, al precio especial de 400,- ptas. cada ejemplar (5,- dólares USA para el extranjero).

A tal efecto, se adjunta: (1)

- Cheque o talón bancario, extendido a nombre de la Asociación Técnica Española del Pretensado,
- Copia de la correspondiente orden de transferencia efectuada a la cuenta abierta, a nombre de la ATEP, en la Sucursal de Potosí, calle Bolivia 11, 28016 Madrid, del Banco Español de Crédito, con el nº 1560/271.

por la cantidad de ....., importe total correspondiente a los ejemplares solicitados.

..... de ..... de 1985

---

(1) Táchese lo que no proceda.

NOTA IMPORTANTE

Por favor, indique en el recuadro el número de ejemplares que desea recibir.

## Análisis no lineal de tanques criogénicos bajo cargas térmicas

J. Oliver\*, E. Oñate\*, J. Peraire\* y R. Chueca\*\*

\* E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona

\*\* Auxini-Dragados y Construcciones, S.A.

### 1. INTRODUCCION

El uso de hormigones criogénicos en estructuras que deben soportar muy bajas temperaturas se ha incrementado notablemente en los últimos años. Un ejemplo típico de dichas estructuras son los tanques para almacenamiento de gas licuado en los que el gas permanece a una temperatura media de  $-160^{\circ}\text{C}$ . Por otra parte, bajo circunstancias especiales, como es el caso de accidentes, la temperatura dentro del tanque puede alcanzar valores de hasta  $1.300^{\circ}\text{C}$  en pocos segundos. Es, por tanto, evidente que el análisis de dichas estructuras debe tener en cuenta los severos gradientes de temperatura a los que la pared del tanque puede estar sometida, y que provocan desplazamientos, tensiones y deformaciones sobre la misma que deben ser evaluados con precisión.

Adicionalmente, en muchas situaciones reales dichos gradientes térmicos dan lugar a zonas de la estructura donde el comportamiento del material se aparta del elástico, originándose fisuras en las zonas traccionadas del hormigón, o bien plastificación de las barras de acero (o incluso del hormigón) en las zonas comprimidas.

En este artículo se presenta un modelo numérico para el análisis no lineal de estructuras laminares sometidas a gradientes térmicos por el método de los elementos finitos. La formulación utiliza elementos de sólido tridimensional para calcular la distribución de la temperatura en el tiempo a través del espesor de la lámina, y elementos de lámina para analizar la respuesta no lineal de la estructura a cada nivel de temperatura.

El artículo se ha estructurado en tres partes. En la primera se presenta el algoritmo numérico para evaluar la distribución de temperaturas en el tiempo dentro de la lámina. Tras ello se dan detalles sobre el modelo de análisis tensional que incorpora el comportamiento no lineal del hormigón y del acero. Finalmente, se presentan ejemplos de aplicación de la metodología desarrollada al estudio de una estructura tipo placa y al análisis completo de un depósito de hormigón criogénico para almacenamiento de gas natural licuado.

## 2. ESTUDIO DE LA DISTRIBUCION TRANSITORIA DE TEMPERATURAS

### 2.1. Ecuaciones básicas del problema tridimensional

El estudio de la distribución de temperaturas en sólidos por el método de los elementos finitos es un problema clásico sobre el que puede encontrarse información en numerosas referencias [1]–[6]. No obstante, existe todavía una actividad constante en la búsqueda de algoritmos de solución de las ecuaciones en el tiempo que optimicen las propiedades de estabilidad, convergencia y precisión, y sean al mismo tiempo relativamente simples de aplicar en la gama de problemas más amplia posible.

Para este trabajo se han seguido los estudios de Damjanic y Owen [2, 3] que recientemente han presentado una interesante contribución sobre el tema. Resumiremos seguidamente los puntos fundamentales de la formulación térmica de dichos autores.

La ecuación de balance térmico (o de Fourier) en un medio no homogéneo tridimensional puede escribirse en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

donde  $T(x,y,z,t)$  es la temperatura,  $x$  y  $z$  son las coordenadas cartesianas de referencia,  $t$  el tiempo,  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_z$  las conductividades térmicas en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente (para un material térmicamente isótropo  $K_x = K_y = K_z = K$ ),  $Q$  el calor generado por unidad de volumen,  $\rho$  la densidad y  $c$  el calor específico.

La ecuación (1) debe resolverse juntamente con las condiciones de contorno

$$T = T_A(x,y,z,t) \quad (2)$$

en el contorno de temperatura prescrita  $\Gamma_A$ , y

$$K_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y + K_z \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q + \alpha_C (T - T_a) = 0 \quad (3)$$

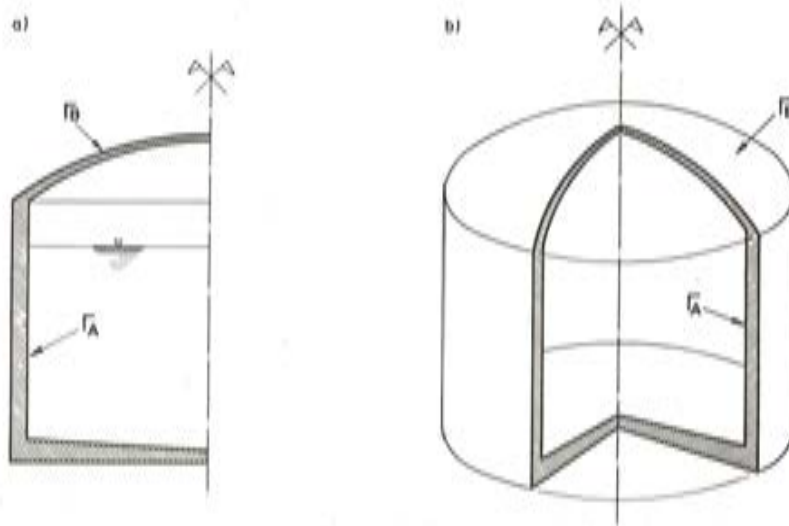


Fig. 1. Tanque de hormigón criogénico. a) Simetría de revolución. b) Análisis tridimensional.

en el contorno de radiación prescrita  $\Gamma_B$ . Ejemplos típicos de dichos contornos pueden verse en la Fig. 1.

En la ecuación (3)  $I_x, I_y, I_z$  son los cosenos de la normal al contorno  $\Gamma_B$ ,  $q$  el flujo de calor por unidad de área,  $T_a$  la temperatura y  $\alpha_c$  es el coeficiente de radiación. Para  $q = \alpha_c = 0$  se tiene el caso de una superficie aislante.

Adicionalmente, la temperatura debe satisfacer en todos los puntos la siguiente condición inicial

$$T_0 = T_0^*(x_i, y_i, z_i, 0) \quad x_i, y_i, z_i \in V \quad (4)$$

donde  $T_0^*$  es la temperatura inicial prescrita para el tiempo cero, y  $V$  el volumen de la estructura.

## 2.2. Solución por elementos finitos

Para la discretización del campo de temperaturas seguimos el procedimiento usual de utilización de funciones de formas espaciales y variables temporales. Así pues, una vez seleccionada la malla de elementos finitos  $\{\Omega\}$  se tiene

$$T(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^p N_j(x, y, z) T_j(t) = \underline{N} \underline{T} \quad (5)$$

donde  $N_j$  es la función de forma del nodo  $j$  de una malla de elementos finitos de  $p$  nodos, y  $T_j$  el valor de la temperatura en dicho nodo.

La forma integral de las ecuaciones de equilibrio térmico se obtiene a partir de la expresión de residuos ponderados de las ecuaciones del problema (1) y (3). Así

$$\int_V \bar{W} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV + \int_{\Gamma_B} W [K_x \frac{\partial T}{\partial x} I_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} I_y + K_z \frac{\partial T}{\partial z} I_z + q + \alpha_c (T - T_a)] d\Gamma = 0 \quad (6)$$

Integrando por partes los términos en derivadas parciales de la primera integral, haciendo  $\bar{W} = -W$ , sustituyendo la ec.(5), y, finalmente, escogiendo la expresión de Galerkin en que  $W_i = N_i$ , se encuentra el sistema final de ecuaciones en la forma

$$\underline{C} \dot{\underline{T}} + \underline{K} \underline{T} + \underline{f} = 0 \quad (7)$$

donde:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V^e} \left( K_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + K_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} \alpha_c N_i N_j d\Gamma \quad (8)$$

son los coeficientes de rigidez térmica que se ensamblan para formar la matriz  $\underline{K}$  global a partir de cada uno de los elementos de la estructura y de los  $\Gamma_e$  elementos que pertenecen al contorno  $\Gamma_B$ .

Similarmente, los componentes de la matriz global de capacidad calorífica  $\underline{C}$ , vienen dados por

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V^e} \rho C N_i N_j dV \quad (9)$$

y los componentes del vector de fuerzas global son

$$f_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V^e} Q N_i dV + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} (q - \alpha_c T_A) N_i d\Gamma \quad (10)$$

Más detalles sobre la obtención de las expresiones anteriores pueden encontrarse en las referencias [1] - [6].

### 2.2.1. Particularización para el caso de simetría de revolución

En muchas situaciones prácticas puede ser de gran interés realizar un análisis de la estructura bajo la hipótesis de simetría completa de revolución de geometría y acciones. En dichos casos el problema se simplifica pues basta con estudiar el comportamiento térmico de una sección meridional como la de la Fig. 1a. Por otra parte, las ecuaciones de comportamiento del problema (1) - (5) se simplifican debido a la simetría para dar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_y \frac{\partial T}{\partial z}) + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

$$T = T_A(r, z, t) \quad \text{en } \Gamma_A \quad (12)$$

$$K_r \frac{\partial T}{\partial r} l_r + K_y \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q + \alpha_\alpha (T - T_A) = 0 \quad \text{en } \Gamma_B$$

donde  $r$  y  $z$  son las coordenadas cartesianas de referencia en la sección meridional.

Siguiendo un proceso análogo al seguido para el caso tridimensional se obtiene un sistema final de ecuaciones idéntico al (7) donde ahora

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Lambda^e} (K_r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + K_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z}) r d\Lambda + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} \alpha_c N_i N_j r d\Gamma \quad (13)$$

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Lambda^e} \rho C N_i N_j r d\Lambda \quad (14)$$

y

$$f_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Lambda^e} Q N_i r d\Lambda + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} (q - \alpha_c T_A) N_i r d\Gamma \quad (15)$$

Obsérvese la similitud de las expresiones anteriores con las ecs. (8)-(10) obtenidas para el caso tridimensional. Dicha similitud permite, de hecho, tratar los dos problemas de una forma unificada en un solo programa de ordenador, sin más que tener en cuenta las analogías siguientes:

*Problema tridimensional*

x  
z  
y  
dV  
dΓ

*Problema de revolucion*

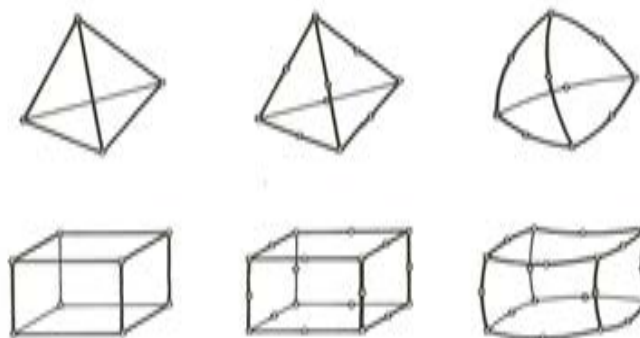
r  
z  
inexistente  
r dA  
r dΓ

Si se desea mayor información sobre el cálculo numérico de las expresiones integrales anteriores puede consultarse la referencia [6].

**2.3. Tipos de elemento finito utilizados en el análisis**

La formulación térmica presentada exige la utilización de diferentes tipos de elementos según que el análisis sea tridimensional o con simetría de revolución.

a) Elementos tridimensionales.



b) Elementos bidimensionales.

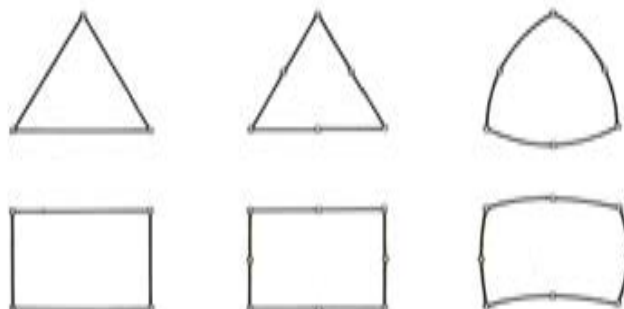


Fig. 2. Algunos elementos bi y tridimensionales para aplicación en el problema térmico.

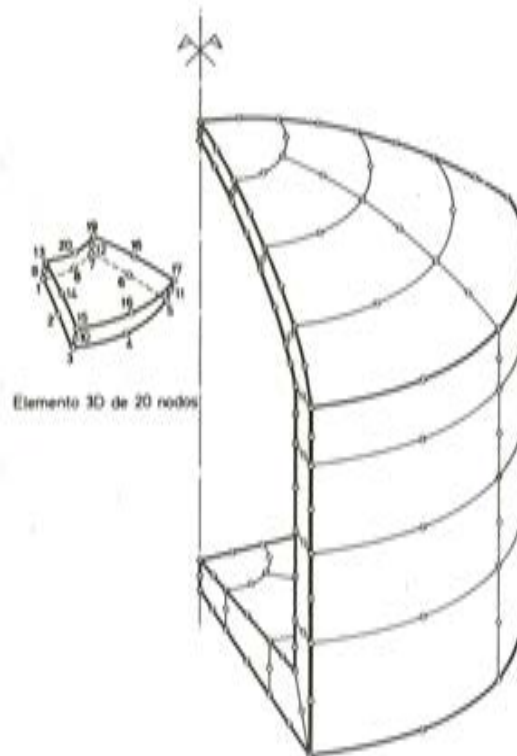


Fig. 3. Tanque de hormigón criogénico. Análisis térmico tridimensional de 1/4 de la estructura (por simetría) con elementos de 20 nodos.

Así, en el caso en tres dimensiones puede hacerse uso de cualquiera de los elementos tridimensionales clásicos (tetraedros, prismas, etc.) de lados rectos o curvos. Algunos de los más populares se han representado en la Fig. 2a. Los detalles sobre la formulación particular de cada elemento pueden encontrarse en la referencia [6]. En la Fig. 3 se muestra la discretización de un cuarto de tanque con elementos prismáticos curvos (isoparamétricos) de veinte nodos, que es un elemento bastante utilizado para este tipo de análisis.

El estudio de revolución precisa elementos bidimensionales más sencillos que en el caso general de tres dimensiones. La gama de elementos a utilizar en este caso es amplia e incluye a prácticamente todos los elementos de las familias del triángulo y cuadrilátero de lados rectos o curvos. En la Fig. 2b se han representado algunos de los elementos más usuales. Para más detalles al respecto consultar de nuevo la referencia [6]. En la Fig. 4 se presenta la discretización de la sección meridional de un tanque en elementos cuadrangulares curvos (isoparamétricos) de nueve nodos. Este elemento es, en la actualidad, uno de los más recomendables para este tipo de análisis y geometría habiéndose utilizado en este trabajo para obtener los resultados numéricos que se muestran en el ejemplo del apartado 4.2.

#### 2.4. Solución de las ecuaciones en el tiempo

Para resolver el sistema de ecuaciones (7) en el tiempo utilizamos el procedimiento sugerido por Damjanic y Owen [3]. Así, se supone una variación lineal de las temperaturas en el intervalo de tiempo  $t_n$  a  $t_{n+1}$  de forma que

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (16)$$

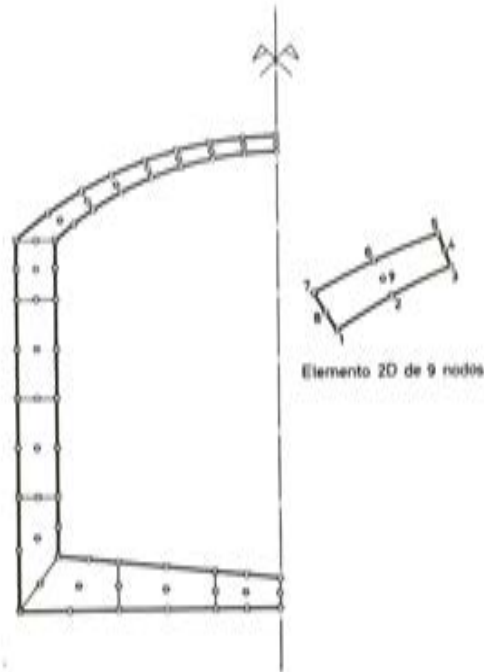


Fig. 4. Tanque de hormigón criogénico. Análisis térmico de revolución con elementos de 9 nodos.

donde  $\Delta t$  es el incremento de tiempo prescrito.

Por otra parte, se establece el cumplimiento de la ecuación (8) para un tiempo  $t_{n+\alpha}$  perteneciente al intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  de forma que

$$\mathcal{C}_{t_{n+\alpha}} \cdot \dot{\mathcal{T}}_{t_{n+\alpha}} + \mathcal{K}_{t_{n+\alpha}} \cdot \mathcal{T}_{t_{n+\alpha}} = t_{n+\alpha} \quad (17)$$

siendo:

$$t_{n+\alpha} = t_n + \alpha \Delta t$$

De la hipótesis de distribución lineal de temperaturas se deduce que

$$\dot{\mathcal{T}}_{t_{n+\alpha}} = \frac{\mathcal{T}_{t_{n+\alpha}} - \mathcal{T}_{t_n}}{\alpha \Delta t} \quad (18)$$

y sustituyendo (18) en (17) se obtiene:

$$\hat{\mathcal{K}}_{t_{n+\alpha}} \mathcal{T}_{t_{n+\alpha}} = \hat{\mathcal{L}}_{t_{n+\alpha}} \quad (19)$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_{t_{n+\alpha}} &= \mathcal{K}_{t_{n+\alpha}} + \frac{1}{(\alpha \Delta t)} \mathcal{C}_{t_{n+\alpha}} \\ \hat{\mathcal{L}}_{t_{n+\alpha}} &= \mathcal{L}_{t_{n+\alpha}} + \frac{1}{(\alpha \Delta t)} \mathcal{C}_{t_{n+\alpha}} \mathcal{T}_{t_n} \end{aligned} \quad (20)$$

La ecuación (19) se resuelve para obtener  $T_{t_n+\alpha}$  como

$$\underline{T}_{t_n+\alpha} = \hat{K}_{t_n+\alpha}^{-1} \hat{f}_{t_n+\alpha} \quad (21)$$

de donde puede calcularse el valor de la temperatura al final del intervalo de tiempo  $t_{n+1}$ , como

$$\underline{T}_{t_n+\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \underline{T}_{t_n+\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \underline{T}_{t_n} \quad (22)$$

Está demostrado que el método anterior es incondicionalmente estable para  $\alpha > 1/2$  [1]–[3]. Un valor recomendable en la práctica es el  $\alpha = 2/3$  (método de Galerkin) que es el que ha sido utilizado en nuestro análisis.

### 3. ANALISIS TENSIONAL

#### 3.1. Teoría de la deformación

Para modelizar la deformación del tanque se ha acudido a una teoría de láminas gruesas con geometría de revolución. Como hipótesis fundamentales establecidas en dicha teoría indicaremos las siguientes:

- a) “La normal a la superficie media de la lámina antes de la deformación, permanece recta durante la misma, pero no necesariamente normal a la deformada de dicha superficie media”.

Esta hipótesis, establecida inicialmente para placas [7] (hipótesis de Reissner-Mindlin) y extendida posteriormente a láminas permite la inclusión de la energía de la deformación por cortante, cuya influencia en la deformación de la lámina se acrecienta con el espesor de la misma. Resulta pues especialmente interesante para estructuras del tipo “lámina gruesa” como son los tanques de hormigón armado.

- b) “Los radios de curvatura principales de la lámina son grandes comparados con el espesor de la misma”.

Esta simplificación resulta aceptable para las tipologías más usuales en tanques de hormigón en los que la relación espesor/radio de curvatura se sitúa por debajo del 2 por ciento.

- c) “Los desplazamientos se suponen pequeños”, en el sentido de la consideración de linealidad geométrica en la deformación.

#### 3.2. Relaciones tensión-deformación

Como es bien sabido, el comportamiento real de las estructuras de hormigón armado y pretensado es complejo y puede ser altamente no-lineal. Fenómenos como la fisuración, fluencia, retracción, plasticidad, etc. se presentan en los materiales que constituyen el hormigón armado haciendo complicados y costosos, en tiempo de ordenador, aquellos modelos numéricos que pretenden simular su comportamiento estructural. Por otra parte, la severidad de las cargas térmicas que intervienen en el diseño de tanques criogénicos hace obligatorio incluir dichos efectos no lineales en el análisis. En consecuencia, en el modelo numérico presentado en este trabajo se han considerado las que, a nuestro juicio, son las principales características no lineales del hormigón y del acero, es decir:

- El fenómeno de la fisuración en el hormigón.
- La posibilidad de plastificación tanto en las armaduras como en el hormigón.

En los últimos años han sido propuestos distintos modelos que incluyen la consideración de dichos fenómenos. El presentado aquí está basado en los desarrollados por Lin [8] y Rahman [9] para estructuras laminares y será descrito brevemente a continuación.

Para representar los distintos materiales que componen la sección del depósito (hormigón, acero de armaduras, e incluso chapas de acero de recubrimiento interior o exterior, (véase Fig. 5) se realiza una división del espesor de la lámina en capas paralelas a la superficie media de la misma (véase Fig. 6). Estas capas pueden ser de hormigón, de acero de armaduras (con un espesor equivalente al área de la armadura que representan), o de acero de chapa de recubrimiento.

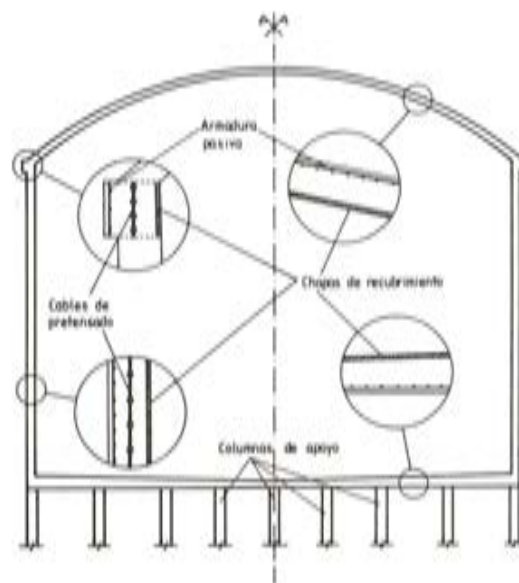


Fig. 5. Estructura resistente de un tanque para G.N.L.

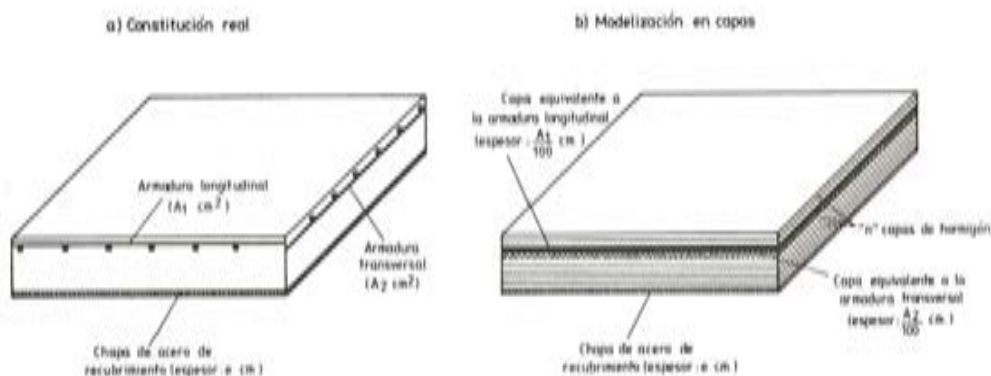


Fig. 6. Modelización de la lámina en capas de los distintos materiales.

Cada capa puede tener relaciones tensión - deformación diferentes, incluso tener comportamientos uniaxiales desacoplados en dos direcciones tal como ocurre en las capas de armaduras.

Tanto el hormigón como el acero, se caracterizan en el modelo mediante un diagrama uniaxial tensión - deformación. En el caso del hormigón este diagrama (véase Fig. 7a) considera la fisuración a tracción a partir de una tensión máxima  $f_t^*$  y una relajación parabólica de la misma (hasta anularse para una deformación  $\epsilon_u$ ) circunstancia que permite la consideración del fenómeno de "tensión stiffening". En la zona de compresión se considera un diagrama bilineal con inclusión de la plastificación sin endurecimiento a partir del límite elástico  $f_c^*$ . En lo que se refiere al acero, se considera un diagrama bilineal simétrico a tracción y compresión, produciéndose la plastificación con endurecimiento  $H'$  a partir del límite elástico  $f_y$  (Véase Fig. 7b).

Consideremos ahora las cinco tensiones que actúan en un punto de una capa (véase Fig. 8). Las tensiones cortantes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ , en la dirección del espesor, no intervienen en el comportamiento tensión-deformación no lineal adaptado y por ello serán olvidadas momentáneamente.

Las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\tau_{xy}$ , contenidas en el plano de la capa y por tanto paralelas a la superficie media de la lámina, determinan un estado de tensión plana para el que es posible calcular las correspondientes direcciones y tensiones principales. A partir de este punto, las capas de hormigón, de acero y de chapa de recubrimiento reciben un tratamiento distinto:

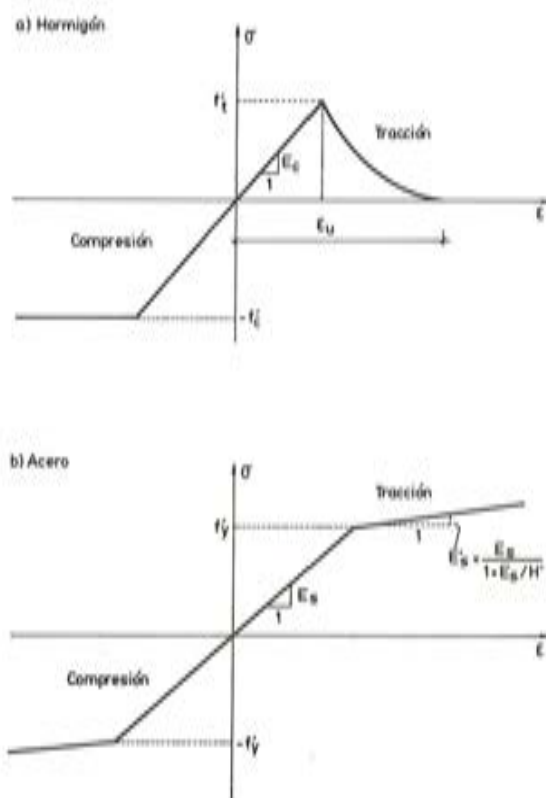


Fig. 7. Diagramas uniaxiales tensión-deformación para el hormigón y el acero.

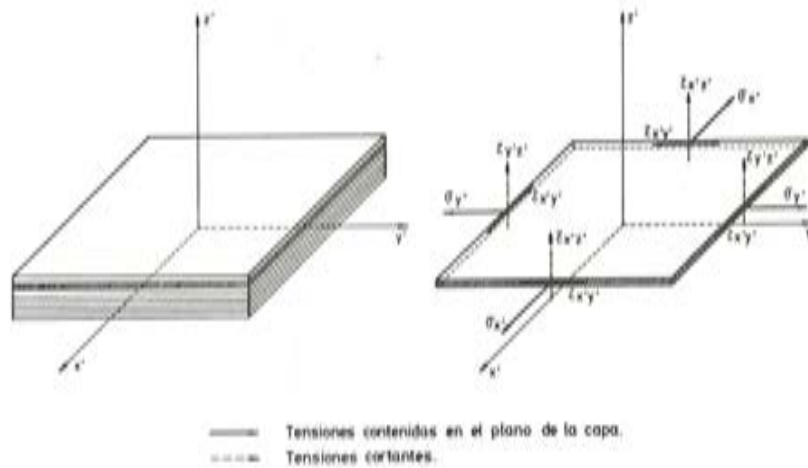


Fig. 8. Tensiones sobre una capa.

### 3.2.1. Capas de hormigón

En función de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  en cada punto de la capa, la zona rayada del diagrama biaxial de la Fig. 9 corresponde, en el modelo adoptado, al comportamiento elástico. En estas circunstancias es posible establecer una relación tensión-deformación de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \nu_c}{2\bar{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \nu_c}{2\bar{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} \quad (23)$$

siendo  $E_c$  el módulo de elasticidad del hormigón y  $\nu_c$  el coeficiente de Poisson. Para el coeficiente  $\bar{\alpha}$ , que ajusta la energía de deformación por cortante, se ha tomado un valor  $\bar{\alpha} = 1,2$ .

Cuando el estado tensional es tal que el punto  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , en el diagrama de la Fig. 9, está sobre la frontera de la zona rayada, el comportamiento deja de ser elástico y por consiguiente pasa a ser no-lineal. Distinguiremos en principio tres zonas:

- La zona II caracterizada por un estado de compresión biaxial. Cuando se alcanza el límite de dicha zona se produce la plastificación del hormigón. El criterio de plastificación adaptado es el de Von Mises, cuya superficie de fluencia viene definida por

$$F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} - f_c = 0 \quad (24)$$

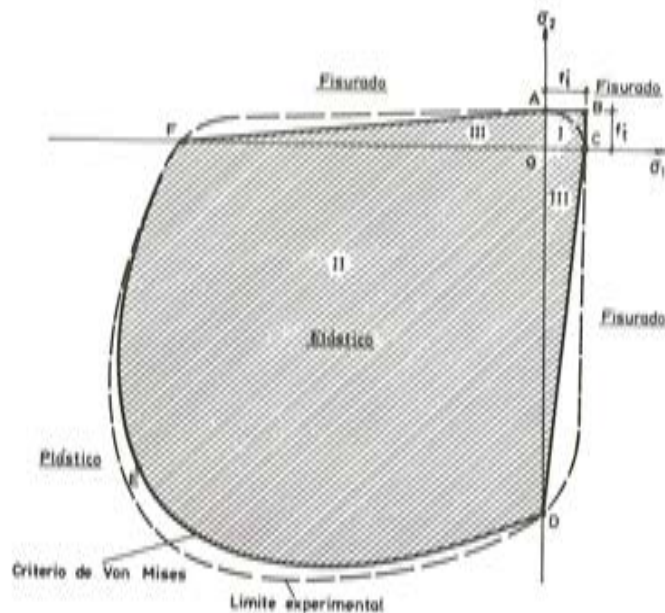


Fig. 9. Diagrama biaxial en función de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  en el plano de la capa.

en tensiones principales o bien por

$$F = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2} - f_c = 0 \quad (25)$$

en tensiones locales.

- Las zonas I y III cuyo límite caracteriza la aparición de fisuras. En el caso de tracción biaxial (zona I) la fisuración se inicia cuando alguna de las dos tensiones principales alcanza el límite de tracción  $f_t$ . En el caso de tracción-compresión (zona III) el valor de la tensión de fisuración varía con el de la tensión en la dirección comprimida desde  $f_t$  (puntos A y C) hasta cero (puntos D y F).

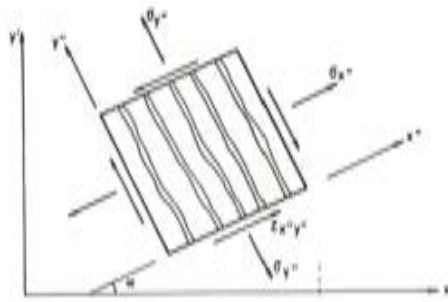
Una vez el estado tensional es tal que se ha alcanzado la frontera FABCD, se produce fisuración en una o dos direcciones según una o ambas tensiones principales alcancen el valor de fisuración. Las direcciones de fisuración son ortogonales a las tensiones principales que las producen, y el proceso operativo para determinar el estado tensional en el hormigón fisurado es como sigue:

#### a) Fisuración en una dirección

En el caso de que exista una fisura perpendicular a la dirección  $\alpha$ , el proceso para hallar el estado tensional a partir de las deformaciones es el siguiente:

1. Se efectúa un cambio de coordenadas locales mediante un giro de valor  $\alpha$  de tal forma que el eje  $x''$  del nuevo sistema de coordenadas sea perpendicular a la fisura existente (véase Fig. 10a).

a) Fisuración en una dirección



b) Fisuración en dos direcciones

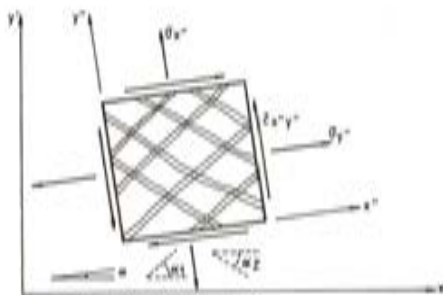


Fig. 10. Esquema de fisuración en una capa de hormigón.

La matriz de cambio es entonces la siguiente:

$$T^* = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2\sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (26)$$

y con ello:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}'' &= T^* \underline{\epsilon}' \\ \underline{\sigma}'' &= (T^{t*})^{-1} \cdot \underline{\sigma}' \\ \underline{\sigma}' &= T^{t*} \cdot \underline{\sigma}'' \end{aligned} \quad (27)$$

Siendo:

$$\underline{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma}'' = \begin{bmatrix} \sigma_{x''} \\ \sigma_{y''} \\ \tau_{x''y''} \end{bmatrix} \quad \underline{\epsilon}' = \begin{bmatrix} \epsilon_x' \\ \epsilon_y' \\ \gamma_{x'y'} \end{bmatrix} \quad \underline{\epsilon}'' = \begin{bmatrix} \epsilon_{x''} \\ \epsilon_{y''} \\ \gamma_{x''y''} \end{bmatrix} \quad (28)$$

2. Se halla la tensión perpendicular a la dirección de fisuración a partir de la deformación  $\epsilon_{x''}$  y del correspondiente diagrama uniaxial (Fig. 7a) teniendo en cuenta los eventuales procesos de descarga que se describen en el apartado 3.2.5.
3. Se determinan las tensiones  $\sigma_{y''}$  y  $\tau_{x''y''}$  como:

$$\begin{aligned} \sigma_{y''} &= E \cdot \epsilon_{y''} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \tau_{x''y''} &= 0,5 \cdot G \cdot \gamma_{x''y''} \end{aligned} \quad (29)$$

4. Con el valor de las tensiones  $\sigma_{x''}$ ,  $\sigma_{y''}$  y  $\tau_{x''y''}$  se determinan las tensiones principales y se comprueba si se ha producido una nueva dirección de fisuración. Si es así, se sigue el proceso indicado en el apartado siguiente para hormigón doblemente fisurado. Para evitar el excesivo e irreal desarrollo de fisuras se ha impuesto que el ángulo mínimo que debe existir entre una fisura ya existente y una nueva sea mayor de  $30^\circ$  [9].
5. En el caso en que no se haya formado una nueva fisura se comprueba si se ha producido plastificación en la dirección de la tensión paralela a la misma. De ser así ( $\sigma_{y''} > f'_c$ ) se adopta  $\sigma_{y''} = f'_c$ .
6. Se deshace el cambio de coordenadas y se obtienen las nuevas tensiones  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$ ,  $\tau_{x'y}'$ .

#### b) Fisuración en dos direcciones

En el caso de que existan dos direcciones de fisuración  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (véase Fig. 10b) el proceso que se sigue para hallar el estado tensional a partir del de las deformaciones es el siguiente:

1. Se efectúa un cambio de coordenadas locales mediante un giro  $\alpha$  que en este caso toma el valor:

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \quad (30)$$

de este modo se consigue que los ejes  $x''$  e  $y''$  sean bisectrices de los ángulos que forman las dos direcciones de fisuración. Con ello se pretende que la tensión tangencial calculada tenga el mismo valor en las dos direcciones fisuradas, y conseguir un modelo consistente de retención del cortante [9].

2. Se determinan las tensiones  $\sigma_{x''}$  y  $\sigma_{y''}$  a partir de las deformaciones  $\epsilon_{x''}$  y  $\epsilon_{y''}$  y del diagrama tensión-deformación uniaxial Fig. 7a), teniendo en cuenta además los eventuales procesos de descarga.
3. Se determina la tensión  $\tau_{x''y''}$  como:

$$\tau_{x''y''} = 0,5 \cdot G \cdot \gamma_{x''y''}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (31)$$

4. Se deshace el cambio y se obtienen las tensiones  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$ ,  $\tau_{x'y'}$ .

En lo que se refiere a las tensiones cortantes ( $\tau_{x'z'}$  y  $\tau_{y'z'}$ ) su cálculo se realiza directamente a partir de la expresión (23) salvo en los casos de rotura total en el plano  $x'y'$  (caracterizada por la superación de la deformación última  $\epsilon_u$  en dos direcciones) en los que el valor de dichas tensiones cortantes se anula.

### 3.2.2. Capas de armadura (activa o pasiva)

El material constitutivo es el acero con un típico comportamiento unidimensional. Las ecuaciones constitutivas se deducen del diagrama tensión-deformación uniaxial de la Fig. 7b. La relación tensión-deformación en régimen elástico será en este caso:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\underline{\sigma}}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\underline{D}}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\underline{\epsilon}}}$

con  $\alpha = 1$   $\beta = 0$  para armadura en la dirección meridional  
 $\alpha = 0$   $\beta = 1$  para armadura en la dirección circunferencial.

En régimen elastoplástico las correspondientes relaciones se obtienen similarmente sin más que considerar la variación del módulo de elasticidad que introduce la rama elastoplástica de la Fig. 7b.

### 3.2.3. Capas de chapa de recubrimiento

El material constitutivo es, como en el caso anterior, acero cuyo diagrama uniaxial tensión-deformación viene definido en la Fig. 7b. En consecuencia las relaciones (23) serán aplicables en régimen elástico mientras que en régimen elastoplástico, tanto a tracción como a compresión, se considera de nuevo la superficie de fluencia plástica de Von Mises definida por (24) y (25).

### 3.2.4. "Tension stiffening"

Como es bien conocido [8,9] el efecto de "tension stiffening" para las capas traccionadas de hormigón es de singular importancia en las cercanías de las armaduras, mientras que decrece sensiblemente en las capas más alejadas de las mismas. Por consiguiente en la modelización del material se han considerado dos tipos de comportamiento a tracción del hormigón:

- Tension stiffening parabólico en el que la rama descendente es una parábola de segundo grado (definida por los puntos A, B y C de la Fig. 11a) que permite simular el comportamiento del hormigón en las cercanías de las armaduras traccionadas.
- Tension stiffening lineal con una rama descendente recta. En este caso un valor suficientemente pequeño de la deformación última  $\epsilon_u$  (Fig. 11b) permite simular una caída rápida de la tensión apta para las capas de hormigón más alejadas de las armaduras.

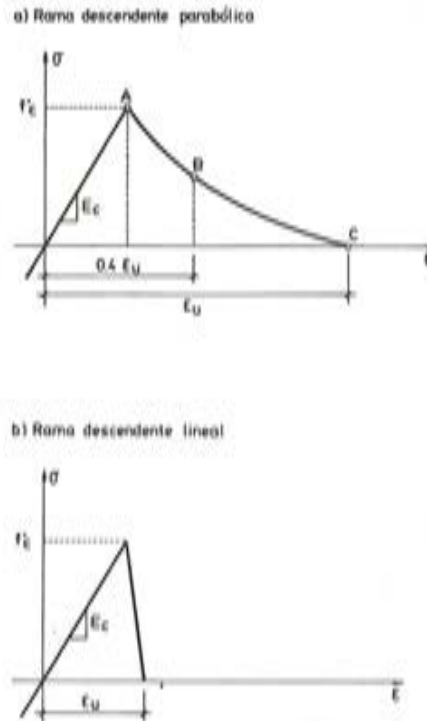


Fig. 11. Diagramas para evaluación del efecto de "tensión stiffening".

### 3.2.5. Descargas eventuales

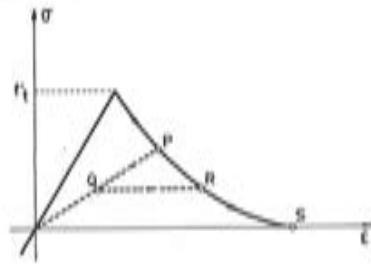
Aunque no es un objetivo de la presente formulación el contemplar descargas importantes o ciclos completos "carga-descarga", se ha considerado la posibilidad de existencia de pequeñas descargas producidas por la actuación sucesiva de acciones de distinto signo que no supongan una modificación sustancial del estado tensional de la estructura.

En las Figs. 12a y 12b se esquematizan las hipótesis establecidas en la simulación de un proceso de descarga-carga (trayectoria PQRS) en las situaciones límites de fisuración y plasticificación. Se contempla por consiguiente la posibilidad de "cierre de fisuras" aunque recordando la mínima tensión alcanzada (punto Q en la Fig. 12a) como límite que no puede ser sobrepasado ante una eventual "nueva apertura" de la fisura.

### 3.3. Solución por elementos finitos

Siguiendo el procedimiento usual [6] en el análisis de láminas por el método de los ele-

a) Hormigón a tracción



b) Acero y hormigón a compresión

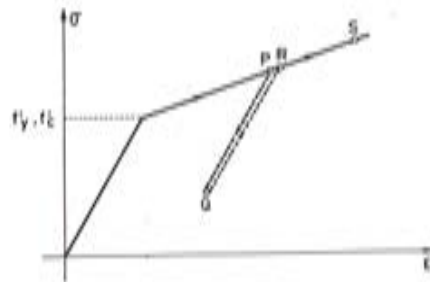


Fig. 12. Procesos carga descarga para el hormigón y el acero.

a) Analisis de revolución



b) Analisis tridimensional

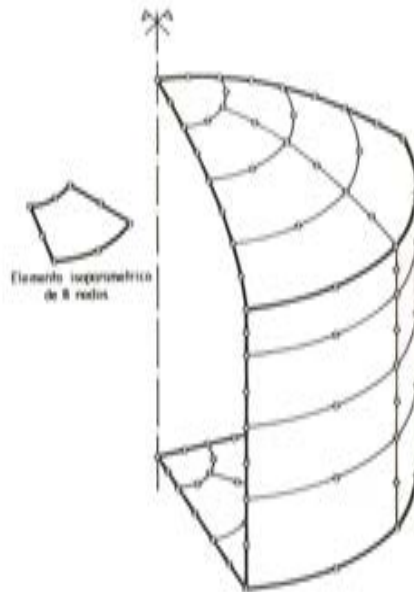


Fig. 13. Tanque de hormigón criogénico. Discretización en elementos finitos para el análisis tensional.

mentos finitos, se discretiza la superficie media del depósito en elementos finitos (véase Fig. 13). Como consecuencia de esta discretización los vectores de desplazamientos,  $\underline{u}$ , y de deformaciones,  $\underline{\epsilon}$ , en cada punto de un elemento pueden ponerse en función del vector de incógnitas nodales  $\underline{a}$  de la forma

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad \underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (33)$$

donde  $\underline{N}$  es la matriz de funciones de interpolación y  $\underline{B}$  la matriz de deformación de la estructura. La forma concreta de los componentes de estas matrices depende de la teoría de láminas adoptada y pueden encontrarse en la literatura específica del tema [6,10,11]. En este trabajo en particular, se han utilizado una teoría de láminas en el espacio para el estudio del caso general, y una de láminas de revolución cuando la geometría y las cargas presentan simetría de revolución alrededor de un eje.

### 3.3.1. Ecuación de equilibrio. Resolución del problema no-lineal

La aplicación a la estructura discretizada de un principio que manifieste el equilibrio de la misma (Principio de los Trabajos Virtuales, Minimización de la Energía Potencial, etc.), conduce a la ecuación de equilibrio del sólido discretizado:

$$\Psi(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dV - \underline{R} = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dx' dy' dz' - \underline{R} \quad (34)$$

donde

- $\Psi(\underline{a})$  es el vector de fuerzas residuales
- $\int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dV$  es la contribución de las fuerzas interiores a la formación del vector de fuerzas residuales
- $\underline{R}$  es la contribución al vector de fuerzas residuales de las fuerzas exteriores a la estructura.

El sistema de ecuaciones no lineales (34), en las incógnitas nodales  $\underline{a}$ , ha sido resuelto iterativamente por el método de Newton-Raphson combinado con un proceso incremental de variación del vector de cargas exteriores  $\underline{R}$ . Así, para la iteración "i" del incremento "m", el sistema a resolver es:

$$\underline{K}_T(\underline{a}_{i-1}^m) \cdot \Delta \underline{a}_i^m = \Psi(\underline{a}_i^m) \quad (35)$$

siendo:

$$\Psi(\underline{a}_i^m) = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma}_i^m dx' dy' dz' - \lambda^m \underline{R} \quad (36)$$

donde la matriz tangente

$$\underline{K}_T(\underline{a}) = \frac{\partial \Psi(\underline{a})}{\partial \underline{a}}$$

se obtiene mediante el ensamblaje de las matrices correspondientes a cada elemento. Una típica submatriz, correspondiente a los nodos "i" y "j" del elemento "e", será:

$$\underline{K}_{ij}^{(e)} = \int_{(e)} \underline{B}_i^T \underline{D}^* \underline{B}_j dx' dy' dz' \quad (37)$$

La matriz  $\underline{D}^*$  de la expresión (37) relaciona las variaciones de tensión y deformación

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}^* d\underline{\epsilon} \quad (38)$$

y puede obtenerse inmediatamente a partir de las relaciones tensión-deformación dadas en el apartado 3.2. Únicamente en el estado elastoplástico tal operación reviste un poco más de complejidad llegándose a la expresión [6]:

$$\underline{D}_{ep}^* = \underline{D} - \frac{\underline{D} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{\partial F^T}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{D}^T}{[H' + \frac{\partial F^T}{\partial \underline{\sigma}} \underline{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}]} \quad (39)$$

siendo  $\underline{D}$  la matriz de constantes elásticas de las expresiones (23) ó (32),  $F$  la función de fluencia plástica (25) y  $H'$  el parámetro de endurecimiento. Más detalles sobre la obtención de la matriz tangente y vector de fuerzas residuales pueden encontrarse en las referencias [6,11,12].

### 3.3.2. Criterio de convergencia

Dentro de cada incremento de carga (definido por un cierto valor de  $\lambda^m$  en (36) el proceso iterativo se dice que "converge" si para una cierta iteración "i" el valor de las fuerzas residuales es igual a cero salvo una cierta tolerancia. En la práctica el criterio de convergencia utilizado establece que la "norma" del vector de fuerzas residuales se reduzca a un cierto tanto por ciento del valor que tiene en la primera iteración del incremento correspondiente:

$$\frac{[\underline{\Psi}(\underline{a}_i^m)^T \cdot \underline{\Psi}(\underline{a}_i^m)]^{1/2}}{[\underline{\Psi}(\underline{a}_0^m)^T \cdot \underline{\Psi}(\underline{a}_0^m)]^{1/2}} \times 100 < \Sigma^m \quad (40)$$

### 3.4. Acciones térmicas

Como ya se ha comentado anteriormente, las acciones térmicas constituyen un capítulo fundamental en el diseño de tanques de hormigón criogénico. Por otra parte, el tratamien-

to de dichas acciones en el modelo que se presenta reúne especiales características que serán presentadas brevemente a continuación.

El análisis térmico transitorio abordado en el apartado 2, proporciona información de los valores de las temperaturas nodales en cualquier instante, que a su vez pueden ser interpoladas a los demás puntos del interior del elemento.

Sea  $\Delta T(x,y,z)$  el incremento de temperatura producido entre dos tiempos consecutivos del análisis. A este incremento de temperatura le corresponde una deformación térmica inicial o "libre" de valor

$$\epsilon_0(x,y,z) = \alpha \Delta T(x,y,z) \quad (41)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica del material que constituye cada capa. La acción de la anterior carga térmica, se incorpora al vector de fuerzas residuales (34) mediante un desplazamiento de valor  $\epsilon_0$ , en el sentido de las deformaciones, de la curva tensión deformación uniaxial (véase Fig. 14). Este desplazamiento provoca que a las deformaciones producidas en el estado de equilibrio previo a la aplicación de la carga térmica le correspondan nuevos valores de las tensiones, lo que conduce a un desequilibrio del vector de fuerzas residuales de la expresión (34) y al consiguiente proceso iterativo hasta la consecución de un nuevo estado de equilibrio.

### 3.5. Elemento finito utilizado. Integración numérica

El elemento finito utilizado ha sido el isoparamétrico de ocho nodos para el análisis de lámina espacial y el isoparamétrico de tres nodos para el análisis de lámina de revolución (véase Fig. 13).

En ambos casos, las integrales que aparecen extendidas sobre el volumen de los elementos tales como los de la expresión (34) se resuelven mediante un esquema de integración numérica reducida de Gauss-Legendre [6] sobre la superficie, y mediante la regla del trapecio (aplicada sobre las distintas capas) a través del espesor.

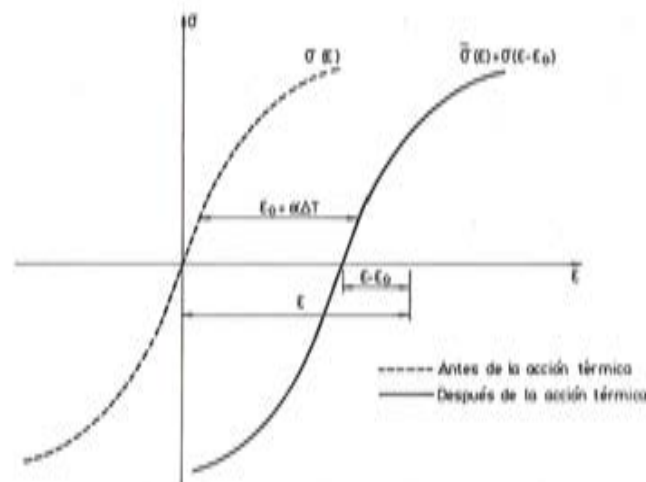


Fig. 14. Desplazamiento de la curva tensión-deformación producida por la temperatura.

## 4. EJEMPLOS DE APLICACION

### 4.1. Ejemplo de comprobación. Placa circular simplemente apoyada

En la Fig. 15 a) puede observarse la geometría, propiedades mecánicas y cuantías de armadura de una placa de hormigón armado que se halla simplemente apoyada en su contorno y sometida a la acción de un momento uniformemente distribuido en el mismo. En las Fig. 15 b), c) y d), se detallan respectivamente la subdivisión en capas, mallas de elementos finitos y curva de "tension-stiffening" adoptada para el hormigón.

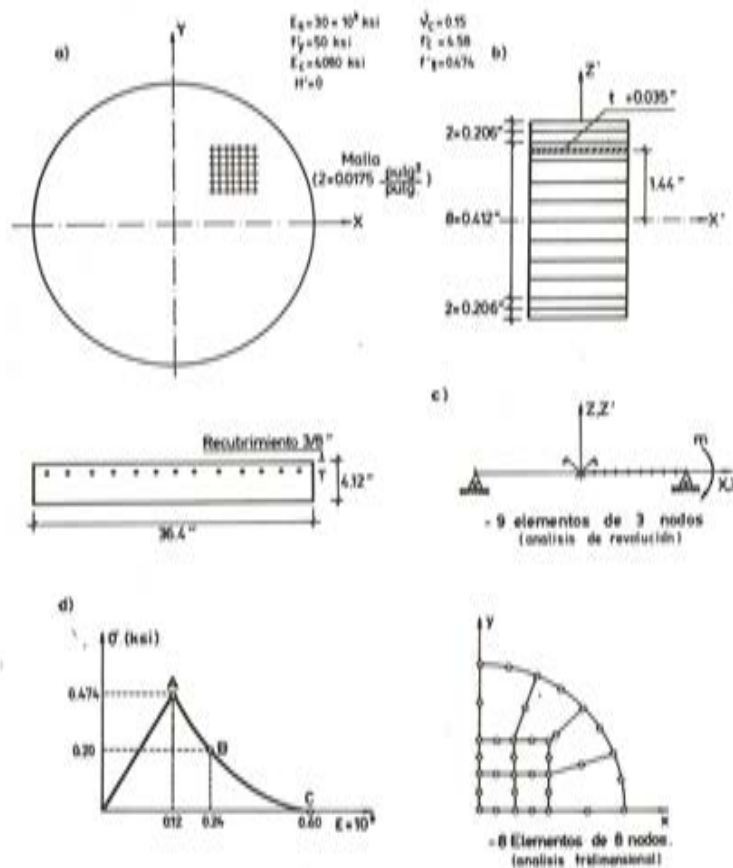


Fig. 15. Placa de revolución. Geometría, propiedades y malla.

La simetría de revolución de geometría y acciones conduce, para esta estructura, a un estado de deformación esférica en el que en todos los puntos y en todas las direcciones se produce la misma deformación, estando la cara superior traccionada y la inferior comprimida.

En la Fig. 16 se muestran los resultados obtenidos para la curvatura de la deformada frente a diversos valores del momento aplicado en el contorno. En ella puede observarse el buen acuerdo de dichos resultados (utilizando tanto el modelo de revolución como el de lámina en el espacio) con los valores experimentales y los obtenidos por Lin [8] con otro modelo numérico, pudiéndose predecir con precisión la carga de rotura de la placa.

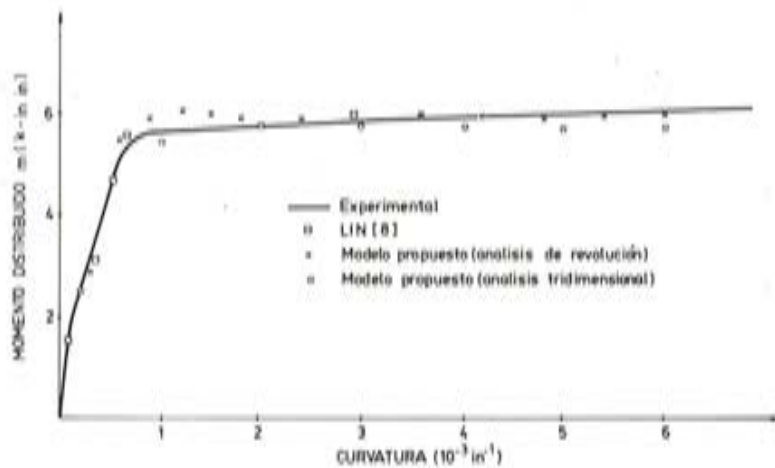


Fig. 16. Placa circular. Resultados del análisis tensional.

#### 4.2. Tanque de hormigón criogénico para gas natural licuado bajo hipótesis de derrame interno del líquido

Se trata en este caso de la utilización del modelo numérico de revolución descrito previamente, en el diseño un tanque de hormigón criogénico para almacenamiento de gas natural licuado (G.N.L.).

Las características geométricas, armadura y leyes de pretensado en el tanque se detallan en la figura 17, mientras que las mallas de elementos finitos utilizados en el análisis pueden verse en la Fig. 18.

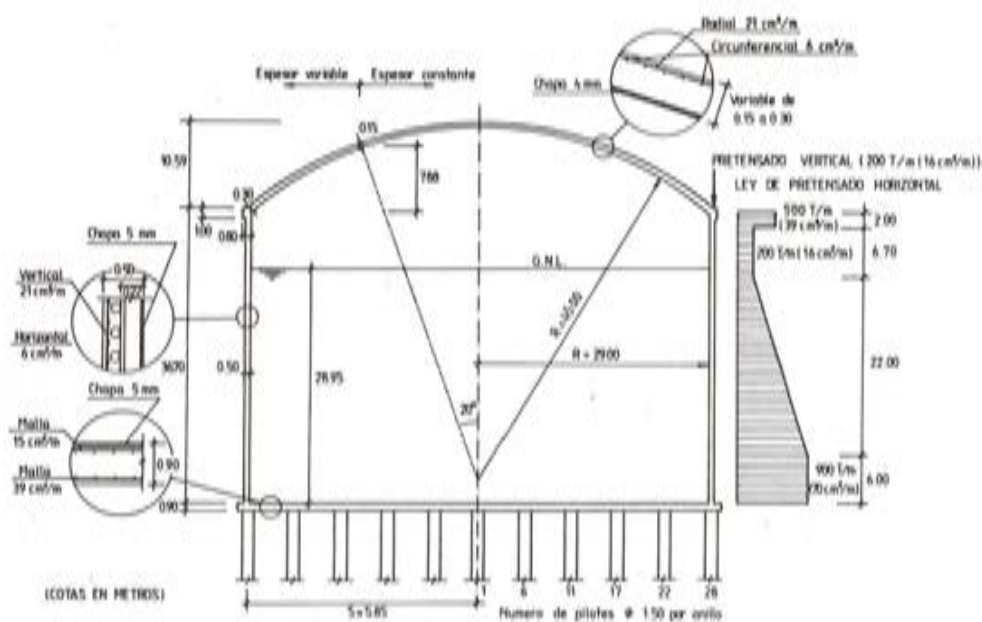


Fig. 17. Características geométricas del tanque para G.N.L.

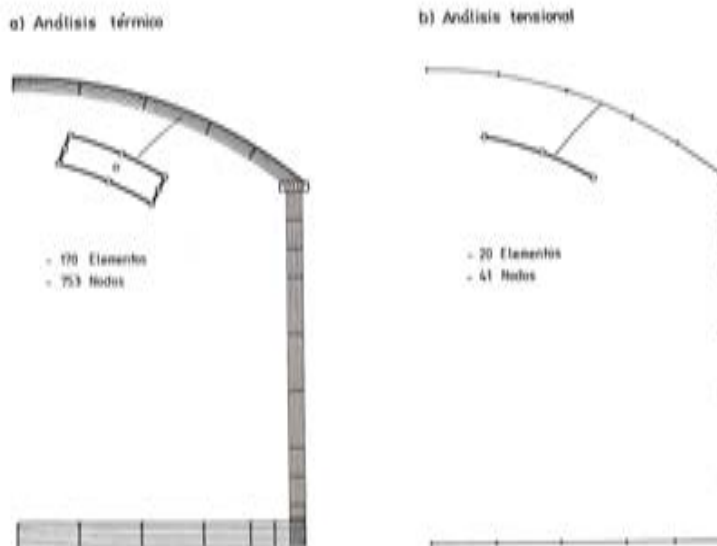


Fig. 18. Tanque de hormigón criogénico para G.N.L. Mallas utilizadas en el análisis.

Las características de los materiales que constituyen el depósito son las siguientes:

*a) Hormigón*

– Módulo de Elasticidad	320.000 kgs/cm <sup>2</sup>
– Coeficiente de Poisson	0.2
– Tensión de rotura a tracción	25 kgs/cm <sup>2</sup>
– Deformación última a tracción	0.0035
– Tensión de fluencia a compresión	350 kgs/cm <sup>2</sup>
– Constante de dilatación térmica	0.00007 °C <sup>-1</sup>

*b) Acero de armaduras pasivas*

– Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm <sup>2</sup>
– Tensión de fluencia	4.200 kgs/cm <sup>2</sup>
– Coeficiente de dilatación térmica	0.00009 °C <sup>-1</sup>

*c) Acero de armaduras activas*

– Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm <sup>2</sup>
– Tensión de fluencia	17.000 kgs/cm <sup>2</sup>
– Coeficiente de dilatación térmica	0.00009 °C <sup>-1</sup>

*d) Chapa de acero de recubrimiento*

– Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm <sup>2</sup>
– Coeficiente de Poisson	0.1
– Tensión de fluencia	2.100 kgs/cm <sup>2</sup>
– Coeficiente de dilatación térmica	0.000009 °C <sup>-1</sup>

*4.2.1. Casos de carga analizados*

Se consideran los siguientes casos de carga actuando secuencialmente:

- I Peso propio y acción del pretensado.
- II Presión hidrostática del líquido interior y sobrepresión interna uniforme de 0.12 atmósferas.
- III, IV
- V, VI Derrame del líquido a través del aislamiento interior hasta entrar en contacto con la pared exterior del depósito. Se considera una temperatura del líquido de  $-160^{\circ}\text{C}$  y una temperatura ambiente de  $25^{\circ}\text{C}$ . Se consideran los efectos térmicos en cuatro instantes a partir del derrame:
  - $t = 11 \text{ min}$ ,  $28 \text{ min}$ ,  $78 \text{ min}$ , y  $t = \infty$ (situación estacionaria).

Cada uno de estos estados de carga se aplica sobre el estado tensional resultado del estado de carga anterior.

#### 4.2.2. Resultados

En la Fig. 19 se presentan las líneas isotermas obtenidas en el análisis térmico para distintos instantes después de producirse el derrame del líquido.

Finalmente en la Fig. 20, pueden observarse las deformadas de las paredes del tanque para los distintos estados de carga considerados en el análisis tensional, así como el estado de fisuración y plastificación que se produce después de finalizado todo el proceso de carga.

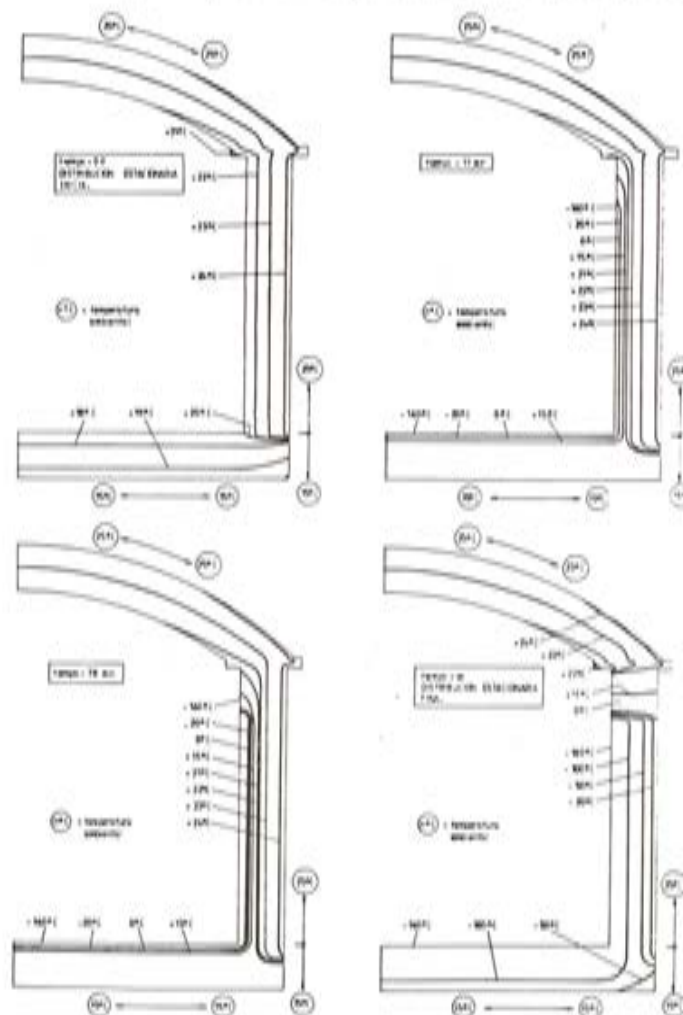


Fig. 19. Tanque de hormigón criogénico. Hipótesis de derrame interno del G.N.L. Líneas isotermas para distintos tiempos de análisis.

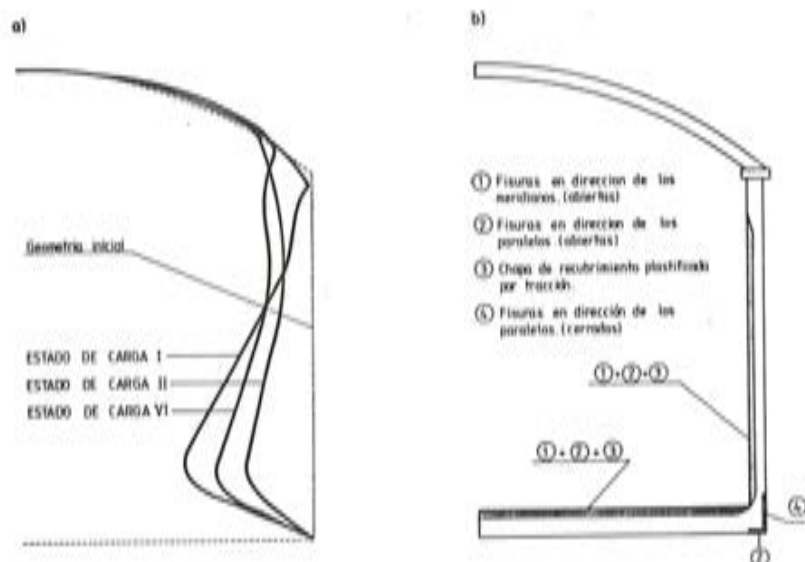


Fig. 20. a) Deformadas de la superficie media del tanque para diversos estados de carga (Desplazamientos aumentados 1.000 veces). b) Zonas fisuradas y plastificadas al final del análisis.

## REFERENCIAS

1. Hughes, T.J.R. Unconditionally stable algorithms for non linear heat conductions. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* 10, pp. 135-139, (1977).
2. Owen, D.R.J. y Damjanic, F. The stability of numerical time integration techniques for transient thermal problems with special reference to reduced integration effects. *Num. Meth. in Thermal Problems*, Vol. 2, pp. 487-505. Pineridge Press, U.K. (1981).
3. Owen, D.R.J. y Damjanic, F. Practical considerations for the thermal transient finite element analysis using isoparametric elements. *Nuc. Engng. and Design*, n. 69, pp. 109-126 (1982).
4. Wilson, E.L. y Nickell, R.E. Application of finite element method to heat conductions analysis. *Nuc. Engng. and Design*, 4, pp. 1-11, (1966).
5. Wood, W.L. y Lewis, R.H. A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation. *Int. Jour. Num. Meth. Engng.* 9, pp. 679-689 (1975).
6. Zienkiewicz, O.C. *El método de los elementos finitos*. Ed. Reverté, Barcelona, (1980).
7. Mindlin, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *Jour. of Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 31-38, (1951).
8. Lin, C.S. Non linear analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells. SE SM Report n° 73 - I, University of California, Berkeley, (Abril 1973).
9. Rahman, H.H.A. Computational models for the non linear analysis of reinforced concrete flexural slab systems. Ph. D. Thesis, Dept. Civil Engng, University College of Swansea, C/Ph/66/82, Gran Bretaña, (1982).
10. Ahmad, S., Irons, B.M. y Zienkiewicz, O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* Vol. 2, pp. 419-451, (1970).
11. Bathe, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall Inc., (1982).
12. Owen, D.R.J. y Hinton, G. *Finite elements in plasticity*. Pineridge Press Limited, Swansea, Gran Bretaña, (1980).



**JORNADAS  
sobre  
TECNICAS  
DEL  
HORMIGON  
ARMADO  
Y  
PRETENSADO  
EN  
CENTRALES  
NUCLEARES**

**EDITADO POR:**



**asociación técnica  
española del pretensado**

**Precio del ejemplar: 3.000 ptas.**

# Determinación de la adherencia de armaduras de pequeño diámetro. Nuevo método RILEM de Ensayo de Arrancamiento: Pull Out Test

Adolfo Delibes Liniers (Ingeniero de Caminos)  
Germán González Isabel (I.T. de Obras Públicas)  
de INTEMAC, S.A.

## 1. INTRODUCCION

La resistencia de un anclaje real depende de las condiciones adherentes de la armadura y también de las tracciones transversales inducidas en el hormigón cuando ésta intenta deslizar. A su vez, la resistencia del anclaje frente a esta tracción transversal depende de las características del corrugado de la barra y, aún más fundamentalmente, de la resistencia del hormigón, del espesor de recubrimiento y de la presencia o no de armaduras y tensiones transversales.

El estudio experimental de la adherencia de armaduras debe tender a separar ambos fenómenos que producen gran dispersión y dificultades de interpretación de los resultados de ensayo. Están en fase de investigación métodos de ensayo específicamente dirigidos al estudio de la tendencia al hendimiento de los anclajes (LOSBERG Y OLSON, 1979). Estos ensayos incluyen un apoyo modificado del bloque de anclaje que reduce la aparición de sollicitaciones transversales y es similar al ensayado en nuestra Serie II.

La Comisión VII "Reinforcement: Technology and Quality Control" del CEB, de acuerdo con RILEM (Reunion International des Laboratoires d'Essais de Matériaux) ha revisado recientemente las normas de ensayo de aceros para armaduras.

Entre ellas, ha sufrido una modificación importante la RC-6.2 "Bond Test for Reinforcing Steel. Pull Out Test", que junto al ensayo de adherencia en viga (Beam Test) constituyen los métodos experimentales de comprobación de la adherencia de las armaduras que contempla el CEB.

La antigua versión de la norma, de 1978, utiliza probetas formadas por una barra anclada a un cubo de hormigón de arista 10 veces el diámetro de la barra. La nueva versión (1983) establece un mínimo a tal definición geométrica: 200 mm. La condición de mínimo afecta, por tanto, a las barras de diámetros iguales o inferiores a 16 mm.

Las razones de esta modificación son de dos tipos. En primer lugar aprovechar el conocimiento experimental de algunos países en que se ha aplicado un método de ensayo análogo (p. e. Alemania). En segundo lugar reducir la tendencia a la rotura por hendimiento (splitting) de las probetas de ensayo, al emplear cubos de anclaje de mayores dimensiones con las barras que alcanzan mayores tensiones de adherencia.

El Grupo de Trabajo VII/3 propuso un plan de ensayos comparativo de ambos métodos de ensayo, a realizar por cuatro laboratorios europeos en Hungría, Alemania, España y Suecia. En este trabajo se exponen los resultados del laboratorio español (INTEMAC). Las muestras fueron seleccionadas en Alemania y repartidas a los distintos laboratorios.

Adicionalmente, en el laboratorio de INTEMAC, se complementó la investigación con ensayos realizados sobre probetas "pequeñas" (arista =  $10 \phi$ ) con un acero diferente, deformado en frío, y empleando un sistema de apoyo del dado de anclaje modificado, para favorecer la rotura por deslizamientos de la armadura (pull out) en lugar de por hendimiento (splitting).

Nota: La Comisión VII del CEB está presidida por José Calavera y el GT VII/3 por Adolfo Delibes.

## 2. PLAN DE ENSAYOS

Los ensayos realizados se agrupan en dos series, que analizan las variables siguientes (figuras 1, 2 y 3).

### *Serie I (CEB)*

Diámetros:  $\phi = 8, 12$  y  $16$  mm  
Probetas: (A)  $L = 200$  mm  
(B)  $L = 10 \phi$   
Acero: AEH 500 N (Alemania)

### *Serie II (INTEMAC)*

Diámetros:  $\phi = 8, 12$  y  $16$  mm  
Probetas: (A)  $L = 200$  mm  
(B)  $L = 10 \phi$   
(B')  $L = 10 \phi$ , apoyo modificado  
Acero: AEH 500 F (España, Tetracero).

En todos los casos las características del hormigón, la longitud adherente ( $5 \phi$ ) y el proceso de ensayo son análogos, realizándose cinco determinaciones en cada caso.

## 3. MATERIALES

### 3.1. Hormigón

El hormigón de referencia se define en RILEM RC-6 (tanto para el Pull Out como para el Beam Test) en base a las especificaciones siguientes:

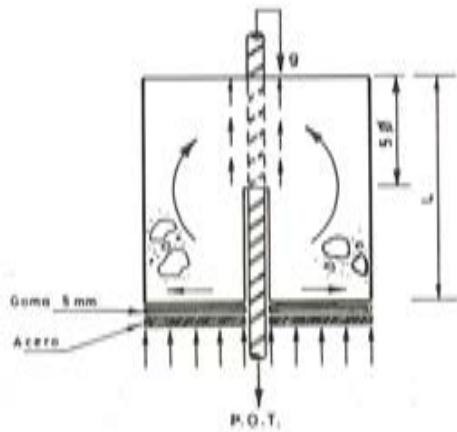


Fig. 1. Ensayo tipo (A)  $L = 200 \text{ mm}$ ;  $(B) L = 10 \phi$ .

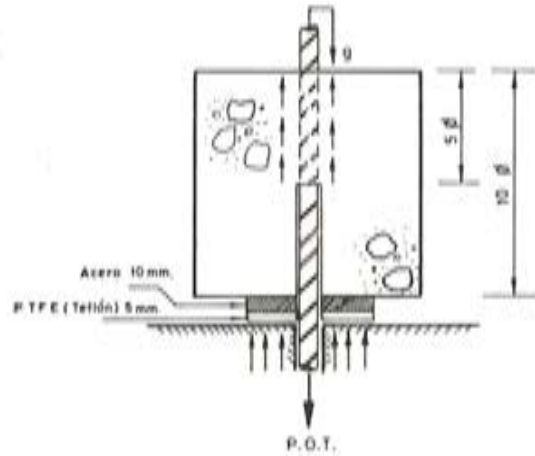


Fig. 2. Ensayo tipo (B')

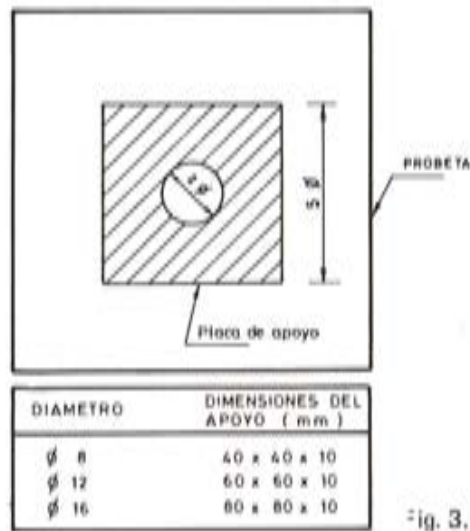


Fig. 3. Apoyo modificado.



Foto 1. Molde tipo A y B.

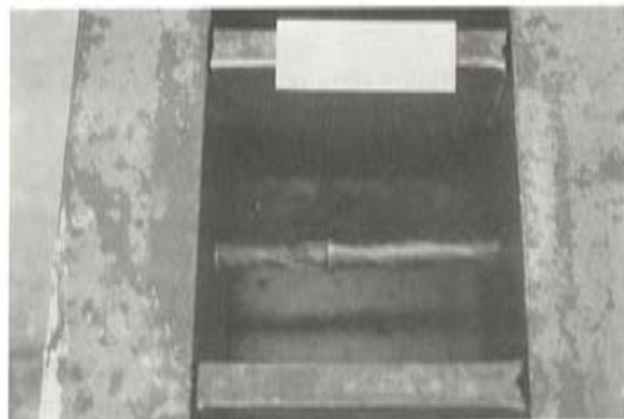


Foto 2. Detalle de probeta con extremo adherente, tipo A (200 mm)

### Dosificación

Grava rodada 4-16 . . . . .	1.300 kg/m <sup>3</sup>
Arena de río . . . . .	660 kg/m <sup>3</sup>
Cemento (RILEM 40 N/mm <sup>2</sup> ) . . . . .	250 kg/m <sup>3</sup> (P-450 ARI)
Agua, aproximada . . . . .	165 kg/m <sup>3</sup>

Asiento de Cono = 5 ± 1 cm.

Compactación: vibrador de aguja de 25 mm.

Curado: 3 días aislado y hasta 28, al aire a 20°C y 60 por 100 HR.

Resistencia: se corrigen linealmente los resultados para una resistencia media de 25,5 N/mm<sup>2</sup>.

### 3.2. Acero

Las características mecánicas de los aceros empleados se ajustan a las especificaciones que corresponden a su designación. La geometría del corrugado responde a los parámetros expuestos en las Tablas 1 y 2. El corrugado es más importante en los diámetros mayores.

## 4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos se resumen en los cuadros n° 3 para la Serie I y n° 4 para la Serie II, designándose:

- $\tau_{0,01}, \tau_{0,1}, \tau_{1,0}$  = Tensiones tangenciales correspondientes a deslizamientos de 0,01; 0,1 y 1,0 mm o al deslizamiento último si es inferior.
- $\tau_u$  = tensión tangencial última.
- $g_u$  = deslizamiento correspondiente a  $\tau_u$ .
- U = forma de rotura, S = splitting, G = deslizamiento.
- $a_1$  = altura de resaltos transversales.
- c = separación de resaltos transversales.

En el cuadro n° 5 se resumen los resultados según los distintos tipos de ensayo.

## 5. INTERPRETACION DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos se representan en las figuras 4, 5 y 6. Véase también la documentación fotográfica.

1°) Forma de rotura.

La rotura es por splitting en la mayor parte de los casos analizados, cuando se emplean probetas de arista "pequeña" (10  $\phi$ ). Solamente con  $\phi$  12 mm AEH 400N se producen roturas por deslizamiento. Cabe observar que, en este caso, las tensiones de rotura ( $\tau_u$ ) son apreciablemente inferiores a las restantes en este tipo de acero.

En probeta pequeña, con apoyo modificado, se obtienen más roturas por deslizamiento, si bien la diferencia con las de apoyo normalizado no es grande.

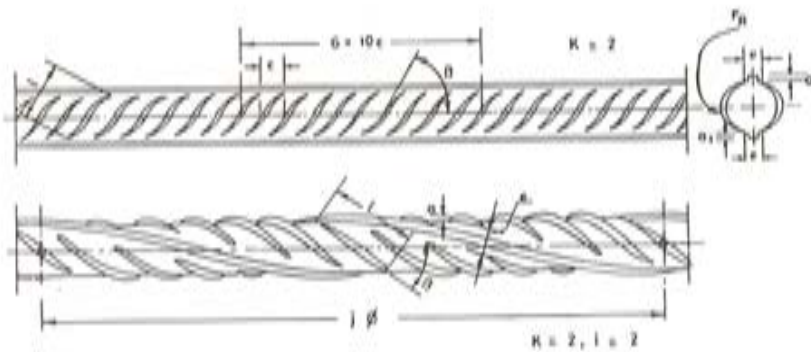
2°) Tensiones de adherencia.

TABLE 1. RIB GEOMETRY. SUMMARY (mm)

SERIES	DIAMETER $\phi$ (mm)	HEIGHT = $a_1$			DISTANCE = C			ANGLE = $\beta$		
		A	B	B'	A	B	B'	A	B	B'
I	8	0,65	0,65	—	5,68	5,66	—	53°	53°	—
	12	1,12	1,09	—	7,42	7,42	—	51,6°	49,4°	—
	16	1,37	1,36	—	9,06	9,04	—	56,4°	56,4°	—
II	8	0,40	0,40	0,40	6,07	6,05	6,15	54,8°	54,2°	54,6°
	12	0,79	0,77	0,77	11,71	11,59	11,59	49,0°	49,4°	49,8°
	16	1,24	1,23	1,25	10,53	10,37	10,43	50,2°	52,2°	50,6°

TABLE 2. RELATIVE RIB AREA ( $\alpha$ )

$$\alpha = \frac{K F_R \sin \beta}{\pi \phi c} + \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{j} \frac{a_1}{\phi} + 0,022$$



$\phi$	Series	a	l	sen $\beta$	c	$a_1$	j $\phi$	$\alpha$
8	I	0,65	14,8	0,80	5,67	—	—	0,072
	II	0,40	19,0	0,81	6,06	0,47	61	0,054
12	I	1,10	21,1	0,77	7,42	—	—	0,085
	II	0,78	27,8	0,76	11,63	1,22	150	0,066
16	I	1,36	28,2	0,83	9,05	—	—	0,093
	II	1,24	40,7	0,78	10,44	2,00	129	0,122

TABLE 3. SERIES - I

TYPE OF TEST	DIAMETER CONCRETE SLUMP			P.O.T Results (N/mm <sup>2</sup> ,mm)						
	$\phi$ (mm)	$f_c$ (N/mm <sup>2</sup> )	(mm)	$\tau_{0,01}$	$\tau_{0,1}$	$\tau_{1,0}$	$\tau_u$	$\theta_u$	$\mu^*$	
A	8	27,0	50	M	2,97	5,74	—	18,25	0,45	G
				V	0,11	0,15	—	0,18	0,26	100
	12			M	3,50	10,54	—	16,40	0,90	G
				V	0,16	0,12	—	0,02	0,11	100
	16			M	4,02	11,70	18,76	18,76	1,16	G
				V	0,13	0,15	—	0,07	0,22	80
B	8	27,0	50	M	3,92	11,32	—	16,69	0,32	S
				V	0,18	0,12	—	0,09	0,16	100
	12			M	2,59	5,82	—	12,87	0,97	G
				V	0,59	0,34	—	0,08	0,25	100
	16			M	4,44	11,65	—	16,46	0,38	S
				V	0,21	0,13	—	0,16	0,72	100

(\* ) S = splitting, G = pulling out.

The percentage of stated modes of rupture is indicated in each case

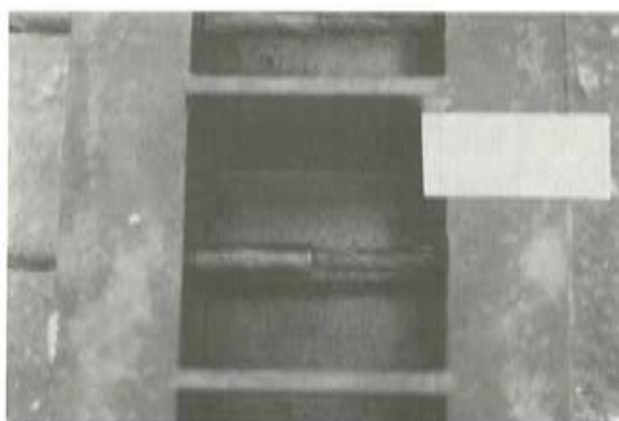


Foto 3. Detalle de probeta con extremo adherente, tipo B (10  $\phi$ ).

TABLE 4. SERIES - II

TYPE OF TEST	DIAMETER CONCRETE			P. O. T. Results (N/mm <sup>2</sup> , mm)						
	$\phi$ (mm)	$f_c$ (N/mm <sup>2</sup> )	SLUMP (n.m)	$\tau_{0,01}$	$\tau_{0,1}$	$\tau_{1,0}$	$\tau_u$	$\sigma_u$	$\mu$ %	
A (L = 200 mm)	8	21,9	50	M	3,93	8,86	20,08	22,21	1,82	G
				V	0,53	0,24	0,11	0,11	0,16	100
	12			M	3,53	7,30	14,79	16,52	2,40	G
				V	0,15	0,10	0,07	0,05	0,21	100
	16			M	3,83	8,11	15,55	17,53	2,27	G
				V	0,20	0,30	0,08	0,08	0,13	80
B (L = 10 $\phi$ )	8	20,9	55	M	2,03	4,71	14,59	16,12	1,54	S
				V	0,35	0,14	0,10	0,08	0,26	80
	12			M	1,97	3,86	11,65	13,55	1,93	S
				V	0,38	0,12	0,06	0,08	0,25	80
	16			M	2,46	7,35	17,47	18,33	1,24	S
				V	0,36	0,18	0,08	0,06	0,10	100
B' (L = 10 $\phi$ )	8	19,6	60	M	3,00	4,67	10,18	10,38	1,10	S
				V	0,33	0,27	0,10	0,10	0,22	100
	12			M	1,89	4,89	13,51	14,59	1,88	G
				V	0,75	0,43	0,12	0,11	0,41	60
	16			M	4,03	8,48	16,35	17,27	1,79	S
				V	0,23	0,19	0,04	0,02	0,31	80

(\*) S = splitting ; G = pulling out.

The percentage of stated modes of rupture is indicated in each case



Foto 4. Vertido y compactación del hormigón.



Foto 5. Probeta  $\phi$  16, tipos A (200 mm) y B (10  $\phi$ ).

TABLE 5. SUMMARY OF RESULTS

SERIES	TYPE OF TEST		RESULTS: Average, N/mm <sup>2</sup> , mm					
			$\bar{\tau}_{0,01}$	$\bar{\tau}_{0,1}$	$\bar{\tau}_{1,0}$	$\bar{\tau}_u$	$g_u$	$\mu$
I	A	M	3,50	9,33	17,54	17,54	0,84	G
		V	0,13	0,14	0,11	0,11	0,21	93 %
	B	M	3,65	9,60	15,17	15,17	0,56	S
		V	0,38	0,22	0,12	0,12	0,45	67 %
II	A	M	3,76	8,09	16,81	18,75	2,16	G
		V	0,34	0,23	0,09	0,08	0,17	93 %
	B	M	2,16	5,31	14,57	16,00	1,57	S
		V	0,36	0,15	0,08	0,07	0,22	87 %
	B'	M	2,97	6,01	13,35	14,08	1,59	S
		V	0,49	0,31	0,09	0,09	0,32	73 %

METHOD A : L = 200 mm

METHOD B, B' L = 10  $\phi$

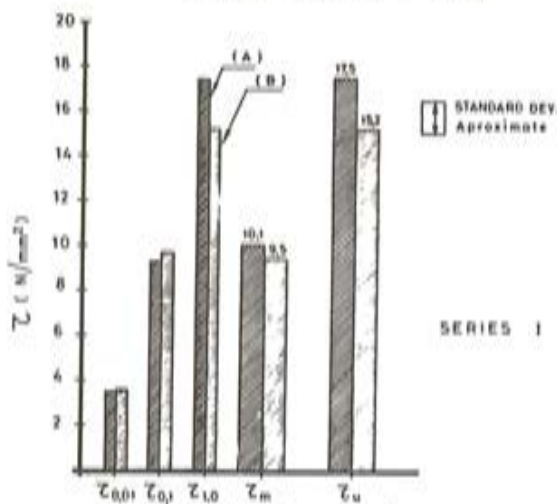


Fig. 4. Results, series I.

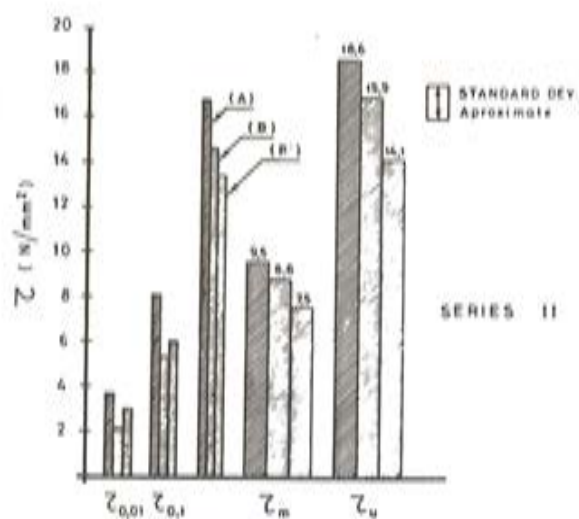


Fig. 5. Results, series II.



Foto 6. Disposición de probetas para ensayo P.O.T.

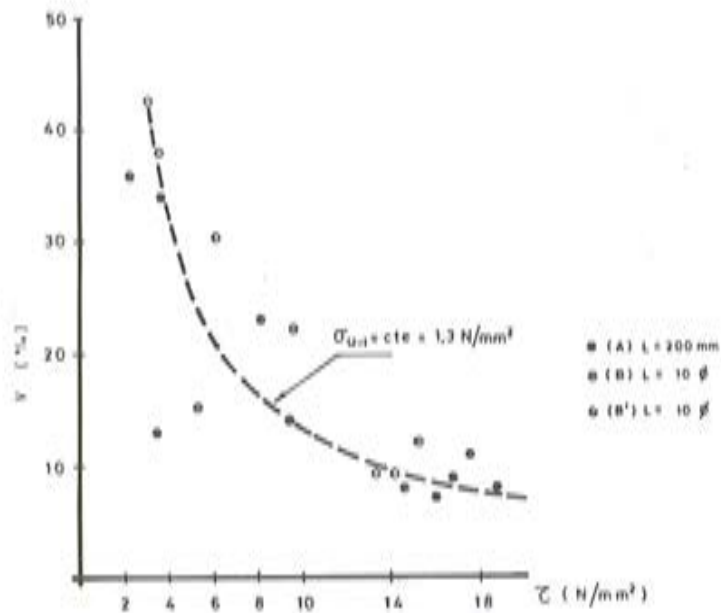


Fig. 6. Scatter of results.

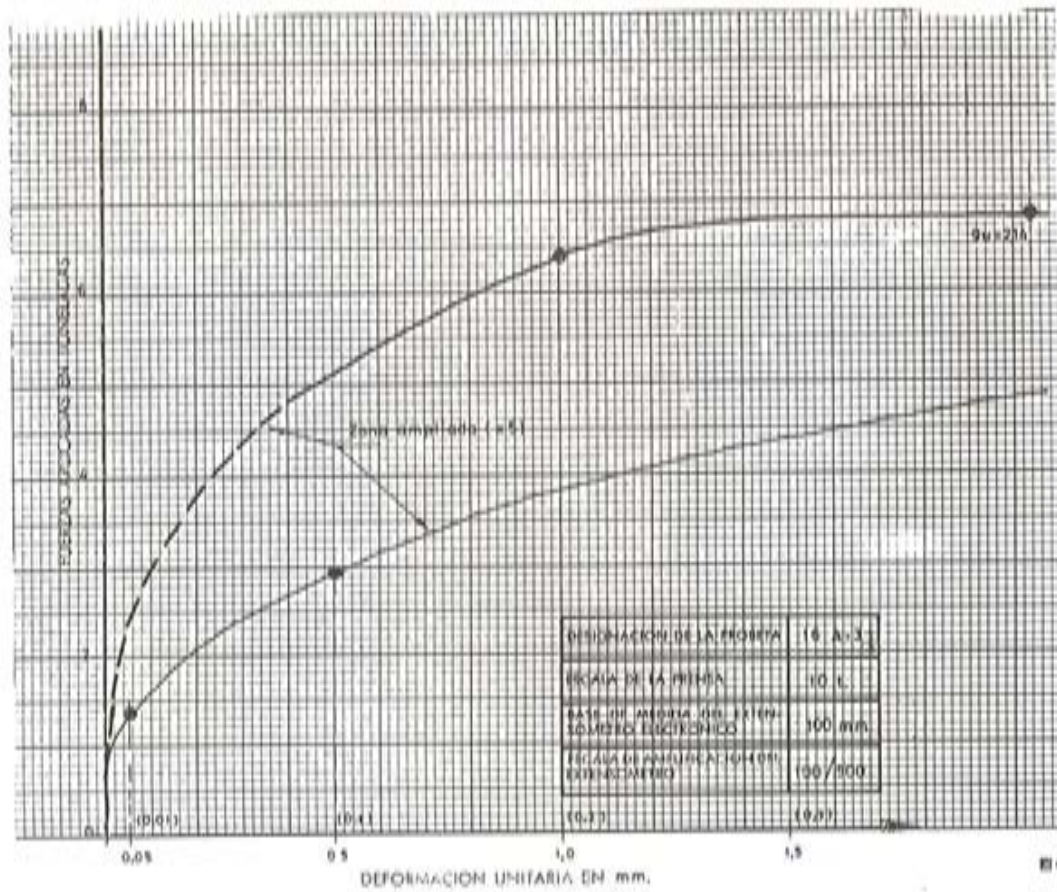


Fig. 7.

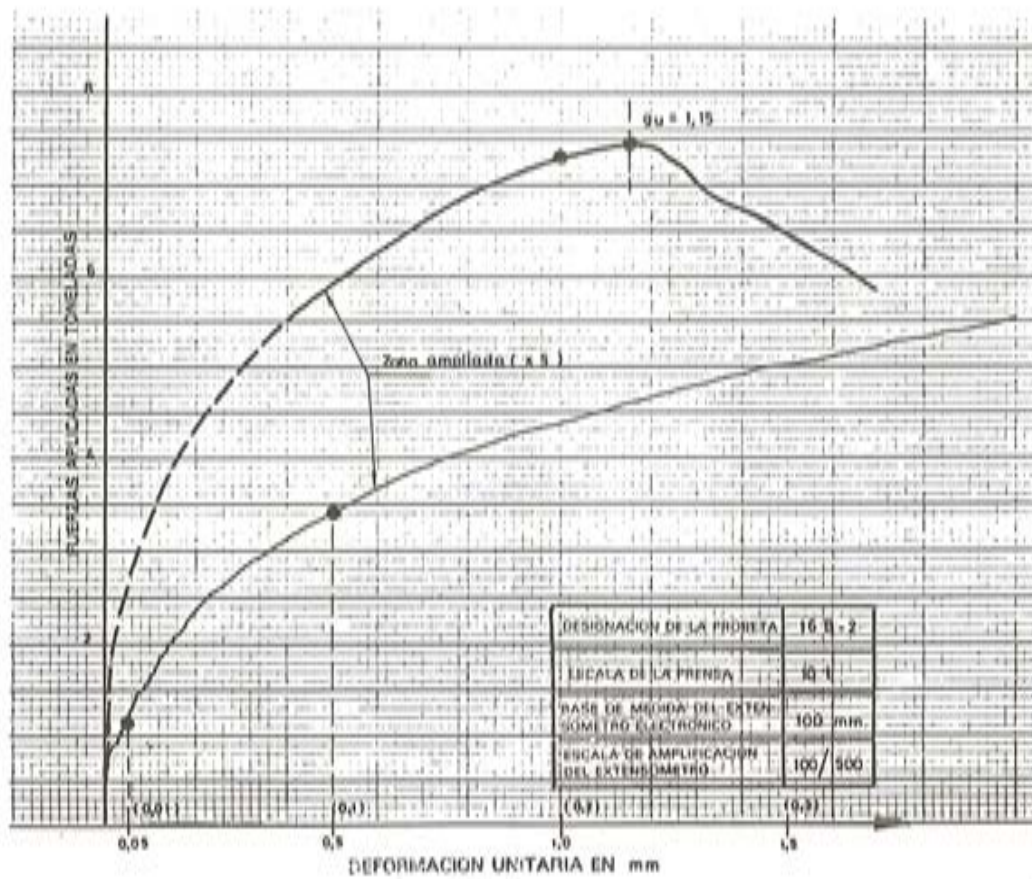


Fig. 8.

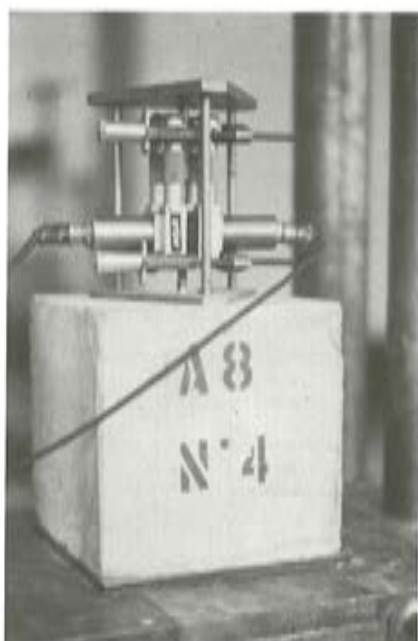


Foto 7. Montaje probeta  $\phi$  8 (A). Método normalizado.



Foto 8. Montaje probeta  $\phi$  16 (B'). Método modificado.

En la Serie I las tensiones medias de adherencia

$$\tau_m = \frac{\tau_{0,01} + \tau_{0,1} + \tau_1}{3}$$

varían de forma poco significativa al modificarse la probeta de ensayo, obteniéndose un valor medio del 6,7 por 100 inferior con probeta "pequeña".

Las tensiones correspondientes a deslizamientos pequeños aumentan, en cambio, ligeramente: 3,6 por 100.

La tensión de rotura de adherencia ( $\tau_u$ ) varía de forma más significativa, siendo un 13,8 por 100 inferior en la Serie B.

En la Serie II las diferencias son significativas tanto para la tensión media de adherencia ( $\tau_m$ ) como para la de rotura ( $\tau_u$ ). Sin embargo, en ésta las diferencias son mayores, tanto porcentualmente como, naturalmente, en valor absoluto, alcanzando un 14,8 por 100 (2,76 N/mm<sup>2</sup>) frente al 7,5 por 100 (1,39 N/mm<sup>2</sup>) en la tensión media.

La modificación del apoyo produce nuevas aunque ligeras disminuciones, tanto de  $\tau_m$  como de  $\tau_u$ .

### 3°) Deslizamiento en rotura.

Los deslizamientos en rotura son siempre apreciablemente superiores cuando se obtienen roturas por deslizamiento. Excepto en un caso ( $\phi$  8, AEH 500N) el deslizamiento último alcanza, al menos, un valor del orden de 1,0 mm.

Con el acero AEH 500F de la Serie II se obtienen deslizamientos últimos superiores, especialmente en el caso de roturas por "splitting" y para los diámetros pequeños.

### 4°) Dispersión de resultados.

Los coeficientes de variación en cada grupo de cinco ensayos análogos disminuyen con la tensión de adherencia aplicada. Ello confirma otras investigaciones que concluían que el valor absoluto de la desviación típica es constante aproximadamente, y con un valor del orden de 1,3 N/mm<sup>2</sup> (BONY, CLAUDE, SORETZ, 1975), lo que supone un coeficiente de variación del orden del 8 por 100 para  $\tau_u$  y del 15 por 100 para  $\tau_m$ . Este valor aproximado de la dispersión coincide con el detectado en estos ensayos.

No se registran diferencias significativas en la dispersión entre los distintos métodos de ensayo, relativas a las tensiones de adherencia.

La dispersión en los deslizamientos bajo carga máxima oscila entre el 11 por 100 y el 72 por 100 en la Serie I y entre el 10 por 100 y el 41 por 100 en la Serie II. Sin embargo, osciló entre el 11 y el 26 por 100 para roturas por deslizamiento. Se observa, además, que las mayores dispersiones corresponden a menores deslizamientos y especialmente al caso de roturas diversas, por "splitting" y deslizamiento. En valor absoluto la desviación típica no supera, en los casos restantes, los 0,5 mm no apreciándose diferencias entre unos y otros métodos de ensayo.

## 6. CONCLUSIONES

La determinación de las propiedades de adherencia de las armaduras debe basarse en métodos de ensayo que reduzcan la importante dispersión de estas determinaciones, aislando los factores que condicionan el comportamiento de un anclaje.

La PC-VII del CEB ha propuesto la modificación del ensayo por arrancamiento (RI-LEM RC-6 Pull Out Test) para diámetros inferiores a 20 mm, limitando la arista del cubo de anclaje a 200 mm como mínimo, en lugar de los 10 diámetros del método anterior.

Se han expuesto resultados de ensayos comparativos de ambos métodos que conducen, en principio, a las siguientes conclusiones.

- 1º) Para tensiones de adherencia bajas (correspondientes a deslizamientos inferiores a 1,0 mm) se obtienen resultados con diferencias no significativas, pues no superan el orden de magnitud de la dispersión habitual de estos ensayos (1,3 N/mm<sup>2</sup>).
- 2º) Para tensiones elevadas, en rotura, se obtienen mejores resultados con el nuevo método (probeta grande). La mejora es del orden del 14 por 100, unos 2,5 N/mm<sup>2</sup>, en los casos analizados.
- 3º) La forma de rotura de las probetas, con el nuevo método, es por deslizamiento de la barra, no así con el método antiguo, en que el ensayo se interrumpía por rotura a tracción del bloque de anclaje (splitting). Los deslizamientos bajo carga máxima obtenidos con rotura son splitting son superiores, generalmente, a 1,0 mm.
- 4º) La dispersión de resultados solamente se reduce en tanto en cuanto el modo de rotura es homogéneo y de forma poco importante. Se confirman anteriores experiencias en este aspecto.

Las conclusiones anteriores deben ser revisadas cuando se disponga de los resultados de ensayo de otros laboratorios europeos que participan en la investigación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. BOND ACTION AND BOND BEHAVIOUR OF REINFORCEMENT. CEB Bull. 151. Munich 1982.
2. ENSAYOS P.O.T. para la ATEP. INTEMAC E/LC-84672/HA (Documento interno).
3. PRELIMINARY REPORT ON THE RESULTS OBTAINED BY INSTITUTE INTEMAC IN THE COMMON INVESTIGATION ON BOND OF 8 TO 16 MM BARS IN P.O.T. CEB-PC VII. Documento no publicado (INTEMAC TI/LC-82002, 1984).

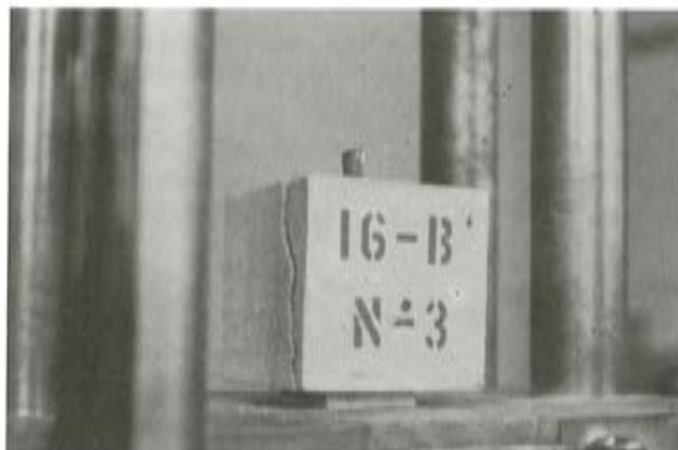


Foto 9. Rotura probeta  $\phi$  16 (B') con "SPLITTING".

## Estudio de la influencia de las condiciones iniciales de curado en la resistencia de las probetas de hormigón

E. González Valle  
A. Delibes Liniers  
G. González Isabel  
INTEMAC, S.A.

### 1. INTRODUCCION

Los ensayos habituales para el control de la resistencia del hormigón implican la toma de muestras y fabricación de probetas en obra, su conservación inicial en la misma, el transporte al Laboratorio, desmoldeo, curado en cámara normalizada y ensayo a compresión.

Las condiciones de curado normalizadas son: 20°C y H.R. superior al 95 por 100. Esto no se aplica al curado inicial en obra, pues requiere una instalación relativamente compleja. Este curado inicial ha de tener una duración mínima de 24 horas, protegiendo las probetas de la desecación y de temperaturas extremas (UNE 7240).

Existe un proyecto UNE 83301 (pendiente de edición por el IRANOR en el momento de redactar este documento) que especifica un rango de temperaturas de curado inicial de 16–27°C y una duración máxima del mismo de 48 horas, o 72 horas, en casos excepcionales.

El rango de temperaturas anterior coincide con el de ASTM C-31-83, que añade que la regulación puede realizarse mediante ventilación o evaporación de agua de arena o arpillera humedecidas o empleando aparatos calefactores. La duración del curado inicial será de 24 horas. Sin embargo, el transporte, si es anterior a una edad de 48 horas, debe realizarse con las probetas sin desmoldear. (En este caso, puede procederse al desmoldeo en obra, manteniendo las condiciones de curado anteriores). Se ha previsto una modificación de la norma que permite, a efectos de control de recepción, un plazo máximo de curado en obra de 48 horas.

Otras normas (RILEM CPC-3 y BS-1812) contemplan condiciones de curado especiales en climas tropicales.

Durante el año 1984 se ha desarrollado en el Laboratorio Central de INTEMAC un plan de ensayos orientado a estudiar la influencia que en la resistencia de una probeta de hormigón puede tener la prolongación del tiempo de curado inicial, en unas condiciones diferentes a las habitualmente establecidas por las normas de ensayo.

La experiencia de muchos años de dedicación al control de obra nos enseña que si bien habitualmente se cumplen las condiciones de la norma en lo relativo al tiempo de permanencia de las probetas en obra, no ocurre lo mismo con las exigencias de temperaturas las cuales, por el contrario, son frecuentemente incumplidas. Ello nos ha llevado a desarrollar el plan de ensayos cuyas características presentamos a continuación.

## VARIABLES EN ESTUDIO

Consideramos las variables objeto de estudio bajo tres aspectos claramente diferenciados.

### 1. Relativas al tiempo de curado inicial

Una vez confeccionadas, las probetas han sido mantenidas en su lugar de fabricación durante:

- a) 24 horas.
- b) 48 horas
- c) 72 horas.

### 2. Relativas a la temperatura ambiente

Durante el tiempo de curado inicial la temperatura ambiente alrededor de las probetas fué:

- a) 0°C (Mínima permitida por la Instrucción Española).
- b) 20°C (Patrón).
- c) Entre 42 y 28°C.

El intervalo de temperatura correspondiente a la variable c), obedeció al interés en reproducir unas condiciones reales de obra en época de máximo calor. Por ello, las probetas fueron fabricadas y curadas a la intemperie, siendo protegidas del sol mediante una tabla colocada sobre los moldes. Se eligieron las 15,00 horas como momento para el comienzo de la fabricación. De esa forma, la máxima temperatura ambiente coincidía con la más temprana edad del hormigón.

### 3. Relativas a la temperatura del hormigón en estado de suministro

- a) 8°C (Próxima al mínimo admitido por I.EH-82).
- b) 20°C (Patrón).
- c) 40°C (Máxima admitida por I.EH-82).

## FABRICACION DEL HORMIGON

El hormigón ha sido fabricado en el Laboratorio Central de INTEMAC en una amasa-

dora centrífuga planetaria TEKA, con arreglo a la siguiente dosificación, expresada en peso de los componentes y referida a 1 m<sup>3</sup> de hormigón.

Grava 5/18 mm . . . . .	995 kg.
Arena 0/5 mm . . . . .	815 kg.
Cemento PA-350 . . . . .	360 kg.
Agua . . . . .	195 l.

## FABRICACION DE LAS PROBETAS

Se efectuaron tres amasadas idénticas\* de 175 litros de hormigón, procediéndose, por amasada, a la fabricación de 27 probetas cilíndricas, 15 x 30 cm. Nueve de ellas fueron enmoldadas en cámara frigorífica dispuesta previamente a 0°C. Otras nueve lo fueron en cámara standard a 20°C, y las nueve restantes a la intemperie en la forma descrita con anterioridad.

Cabe destacar que los moldes empleados en la fabricación de las correspondientes probetas fueron dispuestos en sus lugares respectivos seis horas antes del momento de su utilización.

El llenado de los moldes se ha realizado en dos tongadas de 15 cm cada una, compactándose mediante un vibrador con diámetro de aguja de 20 mm y frecuencia de 9.000 r.p.m.

## CURADO Y CONSERVACION DE LAS PROBETAS

Una vez fabricadas, las probetas fueron mantenidas en sus posiciones iniciales durante 24, 48 y/o 72 horas, según el caso. En su momento fueron desmoldeadas e introducidas en cámara standard (20° ± 2°C y H.R. ≥ 95 por 100).

## METODO DE ENSAYO

Cada grupo de tres probetas resultante para cada una de las variables en estudio fué ensayado a 7 días (1 probeta) y 28 días de edad (2 probetas), siguiendo el método operatorio de la normativa UNE correspondiente.

Se utilizó una PRENSA AMSLER de compresión, con capacidad de 100 t provista de un cadenciómetro para regular la velocidad de aplicación de la carga. Esta se mantuvo constante hasta la rotura, con un valor medio de 6 kp/cm<sup>2</sup>/seg.

## RESULTADOS DE LOS ENSAYOS

Se indican, en los cuadros núms. 1 a 4 siguientes, los resultados de ensayo de las distintas probetas. En las figuras 1 a 3 se representan dichos resultados, para cada una de las variables en ensayo, en porcentaje del más elevado de ellos. Finalmente en la figura n° 4 se indican en conjunto los valores obtenidos, expresados también en porcentaje del resultado mayor.

(\*) A excepción, lógicamente, de la temperatura del hormigón fresco.

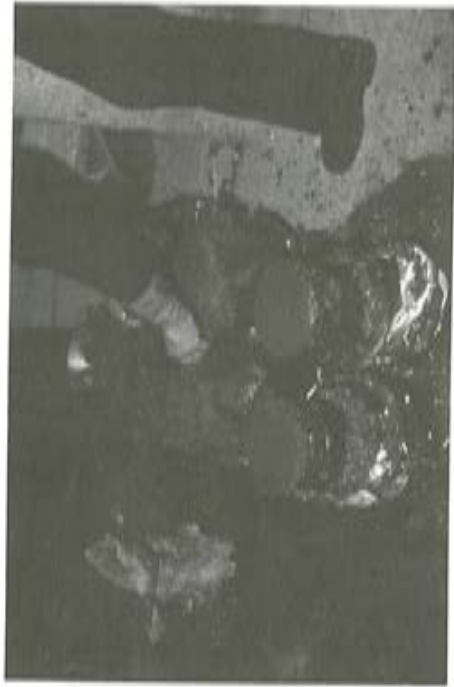


Foto 2



Foto 4



Foto 1



Foto 3

**CUADRO 1**  
Resultados de Ensayo  
(TENSIONES DE ROTURA -  $R_{28}$  [MPa])

TEMPERATURA DE CURADO INICIAL	TIEMPOS DE CURADO INICIAL					
	24 Horas		48 Horas		72 Horas	
	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días
$t = 0^{\circ}\text{C}$	175	261	175	262	162	268
	266		255		264	
	VALOR MEDIO	264	VALOR MEDIO	258	VALOR MEDIO	276
$t = 20^{\circ}\text{C}$	216	290	208	286	213	300
	291		285		291	
	VALOR MEDIO	290	VALOR MEDIO	286	VALOR MEDIO	296
$t = 40^{\circ}\text{C}$	212	276	210	278	202	259
	255		276		251	
	VALOR MEDIO	270	VALOR MEDIO	277	VALOR MEDIO	255

**CUADRO 3**  
Resultado de Ensayo  
(TENSIONES DE ROTURA -  $R_{28}$  [MPa])

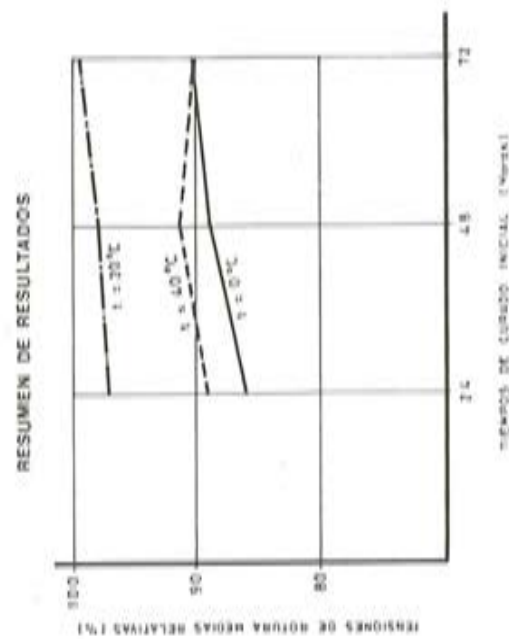
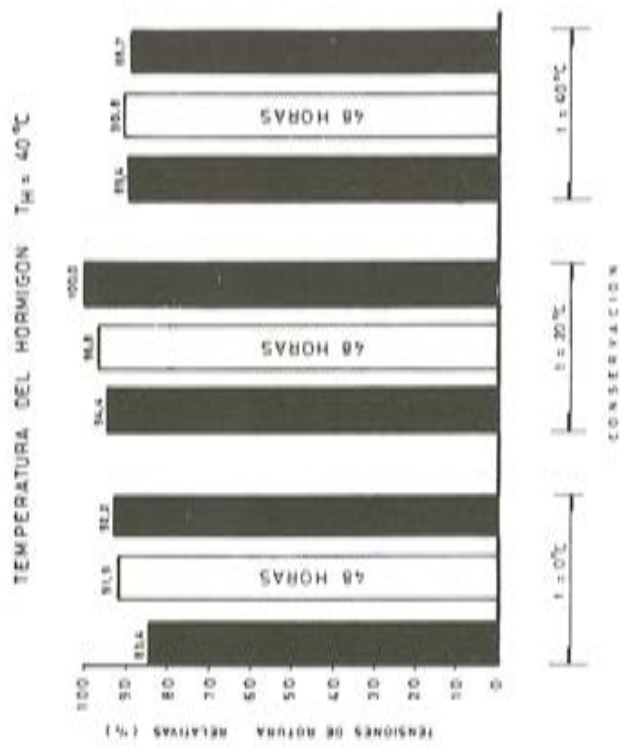
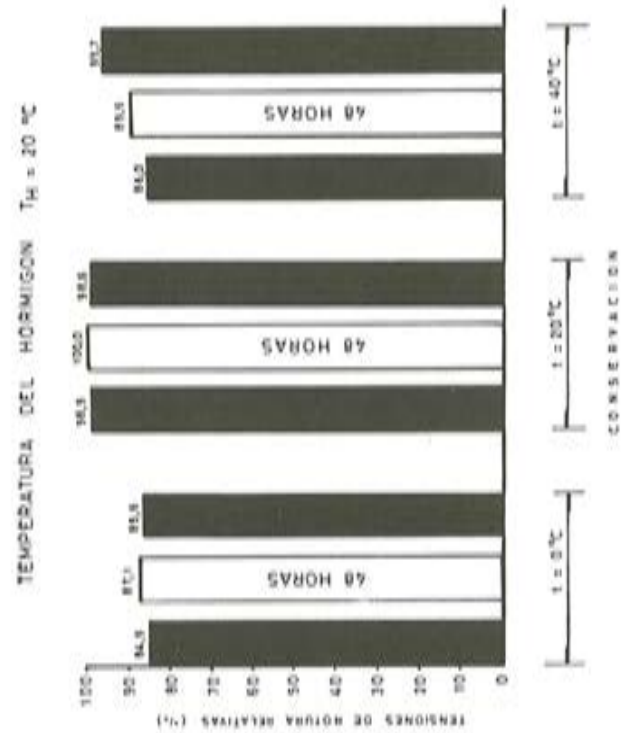
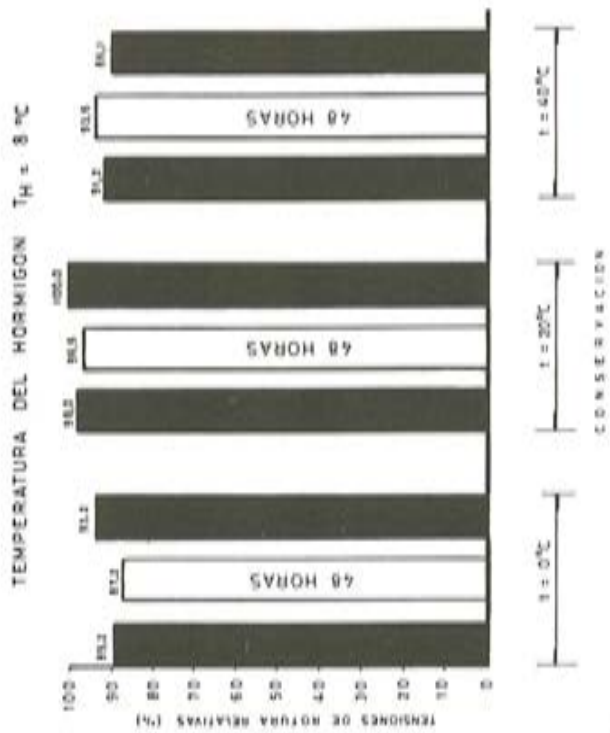
TEMPERATURA DE CURADO INICIAL	TIEMPOS DE CURADO INICIAL					
	24 Horas		48 Horas		72 Horas	
	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días
$t = 0^{\circ}\text{C}$	196	236	186	261	204	265
	238		261		260	
	VALOR MEDIO	237	VALOR MEDIO	261	VALOR MEDIO	262
$t = 20^{\circ}\text{C}$	203	268	205	276	215	282
	269		274		287	
	VALOR MEDIO	268	VALOR MEDIO	275	VALOR MEDIO	284
$t = 40^{\circ}\text{C}$	183	251	206	257	185	252
	258		259		252	
	VALOR MEDIO	254	VALOR MEDIO	258	VALOR MEDIO	252

**CUADRO 2**  
Resultados de Ensayo  
(TENSIONES DE ROTURA -  $R_{28}$  [MPa])

TEMPERATURA DE CURADO INICIAL	TIEMPOS DE CURADO INICIAL					
	24 Horas		48 Horas		72 Horas	
	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días
$t = 0^{\circ}\text{C}$	172	238	186	241	173	232
	235		242		245	
	VALOR MEDIO	235	VALOR MEDIO	242	VALOR MEDIO	238
$t = 20^{\circ}\text{C}$	199	272	194	278	196	278
	278		277		271	
	VALOR MEDIO	275	VALOR MEDIO	278	VALOR MEDIO	274
$t = 40^{\circ}\text{C}$	184	249	171	254	195	267
	229		244		266	
	VALOR MEDIO	239	VALOR MEDIO	249	VALOR MEDIO	266

**CUADRO 4**  
Resumen de Resultados

TEMPERATURA DE CURADO INICIAL	TIEMPOS DE CURADO INICIAL					
	24 Horas		48 Horas		72 Horas	
	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días	7 Días	28 Días
$t = 0^{\circ}\text{C}$	175	261	175	262	162	268
	266		255		264	
	VALOR MEDIO	264	VALOR MEDIO	258	VALOR MEDIO	276
$t = 20^{\circ}\text{C}$	216	290	208	286	213	300
	291		285		291	
	VALOR MEDIO	290	VALOR MEDIO	286	VALOR MEDIO	296
$t = 40^{\circ}\text{C}$	212	276	210	278	202	259
	255		276		251	
	VALOR MEDIO	270	VALOR MEDIO	277	VALOR MEDIO	255



## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE ENSAYO

Del análisis de los resultados anteriores merecen destacarse, desde el punto de vista de la resistencia del hormigón, y dentro del límite de las variables estudiadas, las consideraciones siguientes:

- 1°) El curado en obra durante plazos de 48 horas y 72 horas no produce disminución de resistencias a 28 días. En algunos casos parece detectarse, incluso, una mejora del hormigón, especialmente con temperaturas bajas.
- 2°) El curado inicial del hormigón a temperaturas extremas da lugar a bajas de resistencia a 28 días apreciables, aunque ligeramente inferiores al 10 por 100 de la resistencia en condiciones patrón (20°C, durante 24 horas).
- 3°) Las resistencias a 7 días, con curado a bajas temperaturas, son ligeramente menores, en términos relativos, a las obtenidas a mayor edad. En cambio, con temperaturas elevadas se obtienen a 7 días resultados algo optimistas. En grandes líneas, sin embargo, los efectos a 7 días son análogos a los expuestos para 28 días de edad.

## COMENTARIOS

MEININGER (1983), con motivo de la revisión de ASTM C 31, ha ensayado probetas sometidas durante 24 ó 48 horas a los siguientes curados iniciales:

- Al aire, protegidas por plástico y arpillera húmeda.
- En agua, en moldes estancos,
- En ambos casos a temperaturas de:

16°C

27°C

Obtiene las siguientes conclusiones:

- 1°. Parece existir poco daño en ampliar el curado en obra a 2 días si se mantiene la temperatura de 16 a 27°C y se minimiza la evaporación.
- 2°. El curado inicial por inmersión de los moldes es perfectamente realizable. Produce resistencias en el experimento de un 4 a un 9 por 100 superiores al curado en aire.
- 3°. Las propiedades del cemento pueden tener un efecto significativo en la sensibilidad del hormigón joven a la temperatura.
- 4°. El curado inicial a 16°C produce mayor resistencia que a 27°C, tanto para curado al aire como sumergido en agua. Se obtuvo un aumento entre el 8 y el 11 por 100 según el tipo de cemento empleado.

Las diferencias, respecto al curado-patrón, determinadas en los ensayos de INTEMAC, son iguales o ligeramente superiores a las detectadas por MEININGER, para curado inicial a la temperatura máxima admisible.

El límite máximo ensayado (35°C) no ha producido defectos de resistencia superiores a los detectados por MEININGER a 27°C.

El límite mínimo ensayado (0°C) produce bajas de resistencia ligeramente superiores a las aceptadas por MEININGER, que, en su caso corresponden a las temperaturas máximas. Parece posible rebajar este límite a una temperatura comprendida entre 0°C y 16°C, cuya definición requiere un mayor número de ensayos.

## CONCLUSIONES

Partiendo de la base de que somos conscientes que el establecimiento de unas conclusiones definitivas al respecto, implicaría la necesidad de ensayos complementarios a los que han sido expuestos con anterioridad, y que posiblemente deberían incluir: diferentes tipos de cemento, incorporación de aditivos, mayor número de probetas, etc., entendemos, en principio, como conclusiones del presente estudio las siguientes:

- 1º) El tiempo habitual de permanencia en obra de las probetas fabricadas en fines de semana o víspera de día festivo (48 ó 72 horas) no representa, de acuerdo con los resultados de nuestro trabajo una merma de la resistencia del hormigón.
- 2º) Los resultados informativos que habitualmente son realizados a la edad de 7 días, tampoco sufren variaciones por una prolongación de curado en obra dentro de los límites analizados en nuestro estudio.
- 3º) Resulta especialmente importante disponer de medios necesarios para conseguir una temperatura adecuada en el entorno de las probetas recién fabricadas. De acuerdo con los datos de este trabajo, temperaturas ambientales de 0°C conducen, con respecto a una temperatura ideal de 20°C, a un decremento medio de resistencia próximo al 10 por 100, habiéndose alcanzado en este estudio, para temperaturas bajas y/o edades inferiores a 28 días, hasta un 13 por 100.
- 4º) Temperaturas ambientales muy elevadas (próximas a los 40°C) conducen igualmente, con respecto a unas supuestas condiciones ideales de conservación, a una baja media de resistencia del 8 por 100 a los 28 días y del 5 por 100 a los 7 días.

## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Independientemente de la ampliación de los datos expuestos seguidamente, que constituye uno de los objetivos del trabajo, se han contemplado los documentos siguientes:

- 1) IRANOR – UNE 7240. Fabricación y conservación de probetas de hormigón.
- 2) IRANOR – UNE 83301. Ensayo de rotura de probetas de hormigón. Fabricación y conservación de probetas.
- 3) ASTM C-31-83. Standard Method of Making and Curing Concrete Test Specimens in the Field.
- 4) ASTM. Committee C-9. Revised 1983. Manual of Aggregate and Concrete Testing.
- 5) BS 1881. Part 3. Methods of Making and Curing Test Specimens (1970).
- 6) BS 1881. Part 1. Methods of Sampling Fresh Concrete (1970). (En revisión, 1984).
- 7) RILEM CPC-3 (1975). Making and Curing of Concrete Specimens.
- 8) DIN 1048 (1973). Ensayos de hormigón.
- 9) Richard Meininger. "Effects of Initial Field Curing on Standard 28 Day Cylinder Strengths". Cement, Concrete and Aggregates, CCAGDP, Vol. 5, N° 2, Winter 1983, pp. 137-141.

# Análisis del comportamiento hasta cargas últimas, de estructuras de hormigón, por el método de los elementos finitos

Por: F.J. del Pozo Vindel  
Dr. Ing. de Caminos  
J. M. Arrieta Torrealba  
Ing. de Caminos e Ing. Industrial

## RESUMEN

El método que se propone tiene como objeto el cálculo por elementos finitos de estructuras de hormigón armado o pretensado, asimilables a lajas de espesor variable que trabajan en un estado de tensión plana. El comportamiento no lineal del hormigón, su resistencia a la tracción, la fisuración y el carácter bidimensional del estado tensodeformacional son características contempladas en él. En cuanto al desarrollo de los cálculos, se trata de un método incremental-iterativo, en el que se fracciona la carga total en escalones, resolviéndose cada uno de ellos en varias iteraciones hasta conseguir la precisión deseada. Tras la exposición del método se incluyen varios ejemplos, comentándose los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

## INDICE

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
2. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO
  - 2.1. Elemento de 3 nodos (triángulo)
  - 2.2. Elemento de 4 nodos (cuadrilátero)
3. CARACTERISTICAS DE LOS MATERIALES
  - 3.1. Hormigón
    - 3.1.1. Estado uniaxial
    - 3.1.2. Estado biaxial
  - 3.2. Acero
4. MATRICES DE RIGIDEZ DE LOS MATERIALES
  - 4.1. Cambio de sistema de referencia
  - 4.2. Matriz de rigidez del hormigón
  - 4.3. Matriz de rigidez del acero

## 5. SISTEMÁTICA DEL CÁLCULO

## 6. CONVENIO DE SIGNOS

## 7. NOMENCLATURA

## 8. EJEMPLOS

### 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El objetivo del presente artículo es la descripción de un método de cálculo por elementos finitos, aplicable a estructuras de hormigón armado o pretensado sometidas a un estado de tensión plana (fig. 1), y apto para ser implantado en pequeños ordenadores.

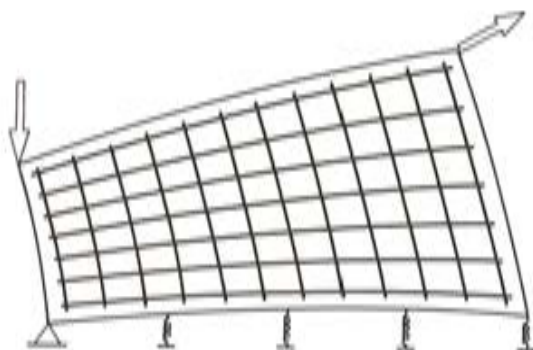


Fig. 1. Estructura tipo.

La estructura a calcular se asimila a una laja de espesor variable, que se divide en elementos de 3 ó 4 lados. Las armaduras, aunque en principio pudieran ser cualesquiera, en el programa desarrollado deben constituir una malla ortogonal, es decir, deben ser ortogonales en todos los puntos, pudiendo variar su dirección de unos a otros.

En cuanto al comportamiento de los materiales, se ha tenido en cuenta el comportamiento no lineal del hormigón, su resistencia a tracción, y la fisuración que se produce cuando se supera ésta. Los aceros utilizados son los de dureza natural.

Las solicitaciones actuantes son cargas en nudos y movimientos impuestos, y las condiciones de apoyo pueden ser rígidas o elásticas.

En la primera parte del trabajo, se realiza la exposición y fundamentación teórica del método; a continuación, se incluyen varios ejemplos, así como comentarios y conclusiones, sobre los resultados obtenidos.

Las unidades fundamentales utilizadas a lo largo de toda la exposición, y a las que ya no se hará mención, son las siguientes:

Longitud - Metro (m)  
 Fuerza - Megapondio (Mp)

El resto de las unidades secundarias serán las que se deriven de éstas.

En los últimos apartados del trabajo (apdos. 6 y 7) incluimos un resumen de la nomenclatura utilizada, y definimos los convenios de signos adoptados.

## 2. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO

La discretización del continuo se realizará mediante su descomposición en elementos poligonales de 3 ó 4 lados (triángulos o cuadriláteros). Sin embargo, bajo el punto de vista del cálculo de su matriz de rigidez, consideraremos los cuadriláteros formados por 4 elementos triangulares de deformación constante y espesor mitad, según se indica en la fig. 2.

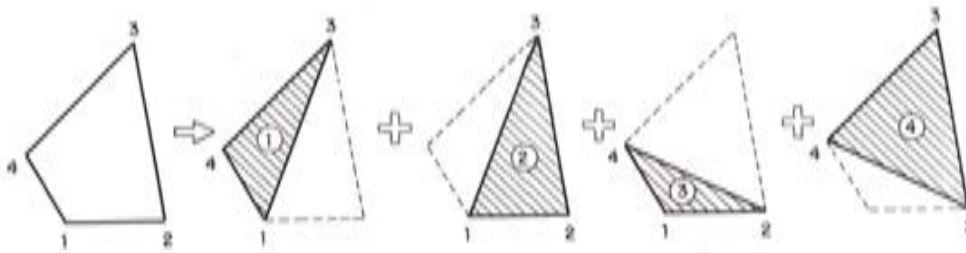


Fig. 2. Descomposición de un elemento de 4 nodos.

### 2.1. Elementos de 3 nodos (triángulo)

Sea un elemento triangular (fig. 3) sometido a un estado de tensión plana, y supongamos que  $\underline{D}_0$ ,  $\underline{D}_{s1}$  y  $\underline{D}_{s2}$  son las matrices de rigidez de los materiales que lo componen, hormigón y armaduras 1 y 2 respectivamente, de forma que se cumple:

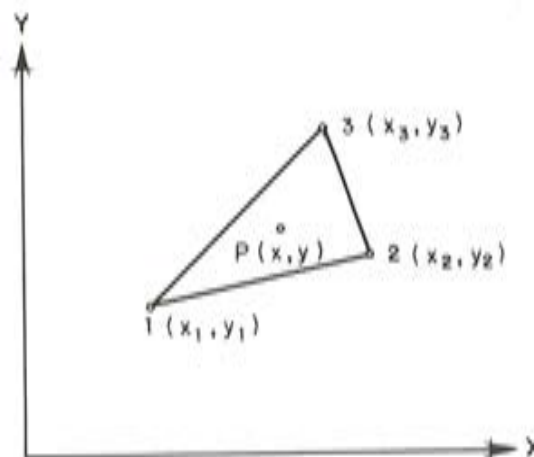


Fig. 3. Elemento finito triangular.

$$\begin{aligned}\underline{g}_c &= \underline{D}_c \underline{\epsilon}_c \\ \underline{g}_{s1} &= \underline{D}_{s1} \underline{\epsilon}_{s1} \\ \underline{g}_{s2} &= \underline{D}_{s2} \underline{\epsilon}_{s2}\end{aligned}\quad [2-1]$$

siendo  $\underline{g}_c$ ,  $\underline{g}_{s1}$  y  $\underline{g}_{s2}$  los vectores de tensiones y  $\underline{\epsilon}_c$ ,  $\underline{\epsilon}_{s1}$  y  $\underline{\epsilon}_{s2}$  los vectores de deformaciones, es decir:

$$\underline{g}_{c, s1, s2} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{c, s1, s2} \quad \underline{\epsilon}_{c, s1, s2} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{c, s1, s2}$$

Pero debido a la hipótesis de adherencia perfecta entre el hormigón y el acero, los movimientos y deformaciones son iguales en ambos materiales, y por tanto:

$$\underline{\epsilon}_c = \underline{\epsilon}_{s1} = \underline{\epsilon}_{s2} = \underline{\epsilon} \quad [2-2]$$

La deformación  $\underline{\epsilon}$  del elemento está relacionada con los movimientos de los nodos  $\underline{u}^n$  a través de la matriz  $\underline{B}$ , que depende de las funciones de interpolación de movimientos adoptadas, según:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{u}^n \quad [2-3]$$

donde:

$$\underline{u}^n = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{aligned} u_i &: \text{Movimiento según OX del nodo } i \\ v_i &: \text{Movimiento según OY del nodo } i \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3$$

Si adoptamos como funciones de interpolación de movimientos polinomios de primer grado, la deformación es constante y obtenemos:

$$\underline{B} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} Y_2 - Y_3 & 0 & Y_3 - Y_1 & 0 & Y_1 - Y_2 & 0 \\ 0 & X_3 - X_2 & 0 & X_1 - X_3 & 0 & X_2 - X_1 \\ X_3 - X_2 & Y_2 - Y_3 & X_1 - X_3 & Y_3 - Y_1 & X_2 - X_1 & Y_1 - Y_2 \end{bmatrix} \quad [2-4]$$

siendo  $\Delta$  el área del elemento:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

La energía de deformación de cada elemento  $U_{e\epsilon}$  será la suma de las originadas por cada material:

$$U_{e\ell} = U_c + U_{s1} + U_{s2} \quad [2-5]$$

donde:

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2} \iiint_{V_{OL_c}} \underline{\underline{\epsilon}}^T \cdot \underline{\underline{g}}_c \cdot dV \\ U_{s1} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_{OL_{s1}}} \underline{\underline{\epsilon}}^T \cdot \underline{\underline{g}}_{s1} \cdot dV \\ U_{s2} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_{OL_{s2}}} \underline{\underline{\epsilon}}^T \cdot \underline{\underline{g}}_{s2} \cdot dV \end{aligned} \quad [2-6]$$

y sustituyendo las tensiones en función de las deformaciones (fórmulas 2-1) y éstas en función de los movimientos nodales (fórmulas 2-3) obtenemos:

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \left[ \iiint_{V_{OL_c}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_c \underline{\underline{B}} dV \right] \underline{\underline{u}}^n \\ U_{s1} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \left[ \iiint_{V_{OL_{s1}}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_{s1} \underline{\underline{B}} dV \right] \underline{\underline{u}}^n \\ U_{s2} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \left[ \iiint_{V_{OL_{s2}}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_{s2} \underline{\underline{B}} dV \right] \underline{\underline{u}}^n \end{aligned} \quad [2-7]$$

Resolviendo las integrales y teniendo en cuenta que las matrices  $\underline{\underline{B}}$  y  $\underline{\underline{D}}$  son constantes, resulta:

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_c \Delta \cdot e \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^n \\ U_{s1} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_{s1} \Delta \cdot A_{s1} \cdot \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^n \\ U_{s2} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_{s2} \Delta \cdot A_{s2} \cdot \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^n \end{aligned}$$

donde:

$\Delta$ : Área del elemento.

$e$ : Espesor del elemento.

$A_{s1}$ : Área de la armadura 1 por unidad de longitud perpendicular a ella.

$A_{s2}$ : Área de la armadura 2 por unidad de longitud perpendicular a ella.

La energía de deformación del elemento será por tanto:

$$U_{e\ell} = \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \underline{\underline{B}}^T [\underline{\underline{D}}_c \cdot e + \underline{\underline{D}}_{s1} \cdot A_{s1} + \underline{\underline{D}}_{s2} \cdot A_{s2}] \Delta \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^n \quad [2-9]$$

o bien:

$$U_{e\ell} = \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}^n T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \Delta \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}^n \quad [2-10]$$

siendo  $\underline{\underline{D}}$  la matriz de rigidez conjunta del material:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_c \cdot e + \underline{\underline{D}}_{s1} \cdot A_{s1} + \underline{\underline{D}}_{s2} \cdot A_{s2} \quad [2-11]$$

Por otro lado, la energía de deformación de un elemento tiene la siguiente expresión:

$$U_{e\ell} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^{nT} \cdot \mathbf{p}_{e\ell} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{nT} \mathbf{K}_{e\ell} \mathbf{u}^n \quad [2-12]$$

siendo  $\mathbf{K}_{e\ell}$  la matriz de rigidez y  $\mathbf{p}_{e\ell}$  el vector de cargas consistente del elemento.

Identificando las fórmulas (2-10) y (2-12) obtenemos la expresión de la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{K}_{e\ell} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \cdot \Delta \quad [2-13]$$

## 2.2. Elemento de 4 nodos (cuadrilátero)

Sea un elemento de 4 nodos, descompuesto en 4 elementos triangulares de espesor mitad, según fig. 2, y sean  $\mathbf{K}_{e\ell_1}^*$ ,  $\mathbf{K}_{e\ell_2}^*$ ,  $\mathbf{K}_{e\ell_3}^*$ ,  $\mathbf{K}_{e\ell_4}^*$  las matrices de rigidez de los cuatro triángulos, orladas con dos filas y dos columnas de ceros correspondientes a los 2 grados de libertad del cuarto nodo inexistente. La matriz de rigidez del elemento de 4 nodos será:

$$\mathbf{K}_{e\ell} = \mathbf{K}_{e\ell_1}^* + \mathbf{K}_{e\ell_2}^* + \mathbf{K}_{e\ell_3}^* + \mathbf{K}_{e\ell_4}^* \quad [2-14]$$

Conocida dicha matriz, se realizan las operaciones propias de la técnica de los elementos finitos, como son el montaje de la matriz de rigidez de la estructura, el montaje del vector de cargas consistentes, y la resolución del sistema de ecuaciones.

Obtenidos los movimientos de los nodos, calculamos el vector de deformaciones de cada elemento  $\boldsymbol{\epsilon}$ , como media de los vectores de deformación de los cuatro triángulos:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{4} [\boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_3 + \boldsymbol{\epsilon}_4] \quad [2-15]$$

## 3. CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES

### 3.1. Hormigón

#### 3.1.1. Estado uniaxial

Para caracterizar las relaciones tensodeformacionales en el hormigón, utilizaremos el diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  hiperbólico, recomendado por la Instrucción EH-82 en su artículo 43 (fig. 4). Dicho diagrama, en general, se ajusta mejor a la realidad que el parábola-rectángulo, y en particular, el módulo de deformación que proporciona para estados de carga medios y bajos, concuerda mucho mejor con los resultados experimentales. Por estos motivos, y dado el carácter irreversible de fenómenos como la fisuración, hemos optado por utilizar este tipo de diagrama a fin de representar lo más fielmente posible los estados tensodeformacionales en la distintas fases del cálculo.

Las ecuaciones que relacionan  $\sigma$  (tensión) con  $\epsilon$  (deformación) son:

$$\left. \begin{aligned} \text{Si } \epsilon \geq 0 \rightarrow \sigma &= \frac{\epsilon^2}{\epsilon_{uto}} \left( \frac{\sigma_{uto}}{\epsilon_{uto}} - 1,1 \cdot E_{cmo} \right) + 1,1 \cdot E_{cmo} \cdot \epsilon \\ \text{Si } \epsilon < 0 \rightarrow \sigma &= -\sigma_{uco} \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_{c10}} \cdot K_0 - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c10}} \right)^2}{1 + (K_0 - 2) \frac{\epsilon}{\epsilon_{c10}}} \end{aligned} \right\} \quad [3-1]$$

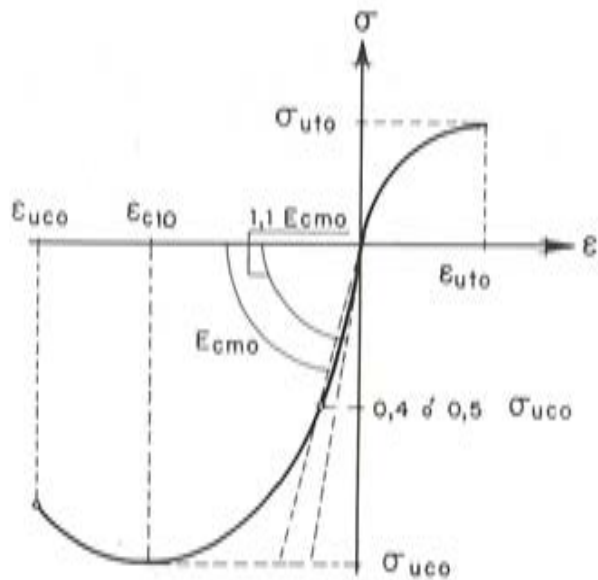


Fig. 4. Diagrama  $\sigma - \epsilon$  del hormigón. Estado uniaxial.

donde:

$\sigma_{uto}$ : Tensión última a tracción (estado uniaxial).

$\sigma_{uco}$ : Tensión última a compresión (estado uniaxial).

$\epsilon_{uto}$ : Deformación última a tracción (estado uniaxial).

$\epsilon_{uco}$ : Deformación última a compresión (estado uniaxial).

$\epsilon_{c10}$ : Deformación correspondiente a  $\sigma_{uco}$  (estado uniaxial).

$E_{cm0}$ : Módulo de deformación longitudinal medio (estado uniaxial).

$K_o$ : Constante

Dichos parámetros básicos vienen definidos por las siguientes expresiones:

$$\sigma_{uto} = 6,4 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3}$$

$$\sigma_{uco} = f_{ck}$$

$$\epsilon_{uto} = 0,00014$$

$$\epsilon_{uco} = \frac{f_{ck} - 2000}{5 \cdot 10^6} - 0,0036$$

$$\epsilon_{c1} = -0,0022$$

$$E_{cm0} = 2,9 \cdot 10^6 + 300 (f_{ck} - 2000)$$

$$K_o = -1,1 \frac{\epsilon_{c10} \cdot E_{cm0}}{\sigma_{uco}}$$

siendo:

$f_{ck}$ : Resistencia característica del hormigón.

### 3.1.2. Estado biaxial

Cuando un hormigón es sometido a sollicitaciones biaxiales, su comportamiento difiere sensiblemente del observado en estado uniaxial de carga. Utilizando los resultados experimentales obtenidos por KUPFER (1969), STEGBAUER y LINSE (1972), NELISSEN (1972), LIU, NILSON y SLATE (1972), BUYUKOZTURK y NILSON (1971) y TASUJI, NILSON y SLATE (1978), y realizando diversos ajustes, hemos obtenido las variaciones de los distintos parámetros básicos respecto a sus valores para estados uniaxiales de carga, es decir:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ut} &= C_1 \sigma_{uto} \\
 \sigma_{uc} &= C_2 \sigma_{uco} \\
 \epsilon_{ut} &= C_3 \epsilon_{uto} \\
 \epsilon_{uc} &= C_4 \epsilon_{uco} \\
 \epsilon_{c1} &= C_5 \epsilon_{c10} \\
 E_{cm} &= C_6 E_{cm0}
 \end{aligned}
 \tag{3-3}$$

Los parámetros  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  y  $C_6$  son funciones lineales de  $\gamma$  (deformación transversal relativa):

$$\gamma = \frac{\epsilon_{transversal}}{\epsilon_{c10}}
 \tag{3-4}$$

y su representación gráfica se encuentra en figs. 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

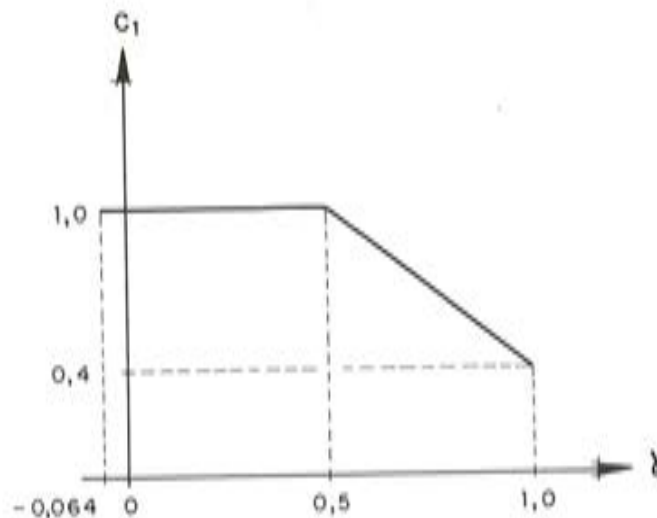


Fig. 5. Coeficiente corrector de  $\sigma_{uto}$ .

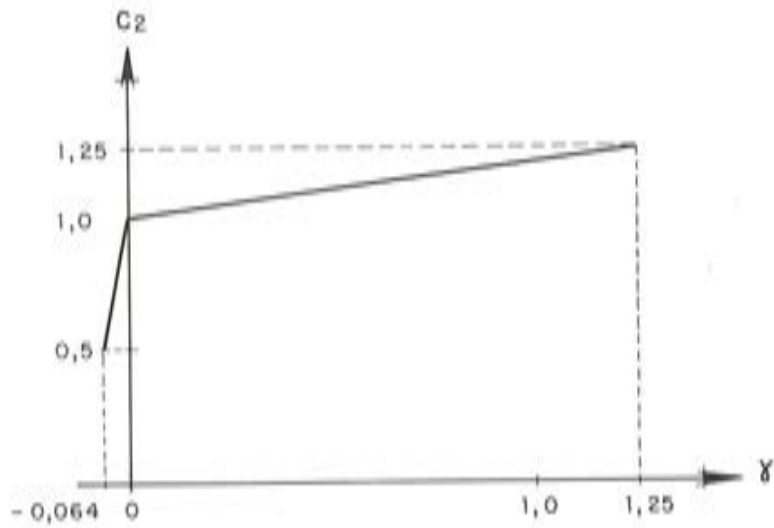


Fig. 6. Coeficiente corrector de  $\sigma_{ucc}$ .

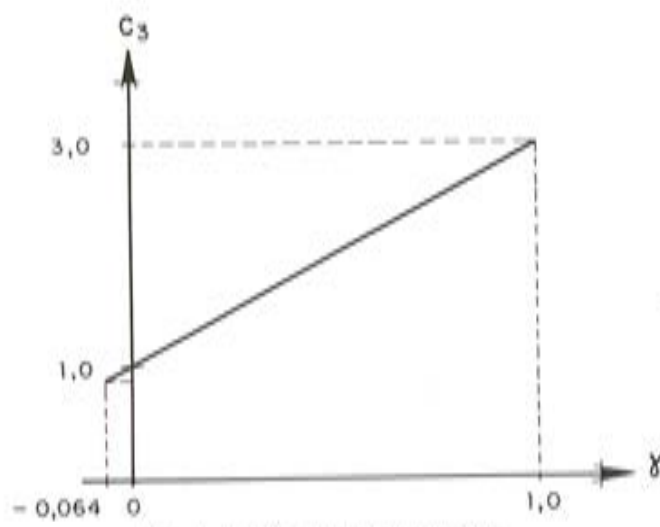


Fig. 7. Coeficiente corrector de  $\epsilon_{uto}$ .

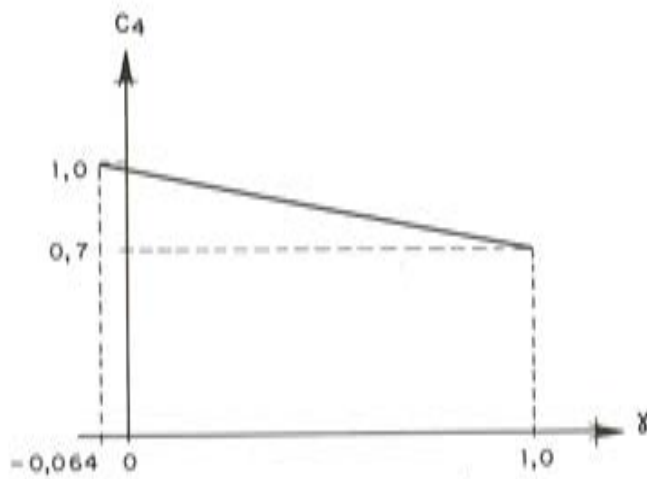


Fig. 8. Coeficiente corrector de  $\epsilon_{ucc}$ .

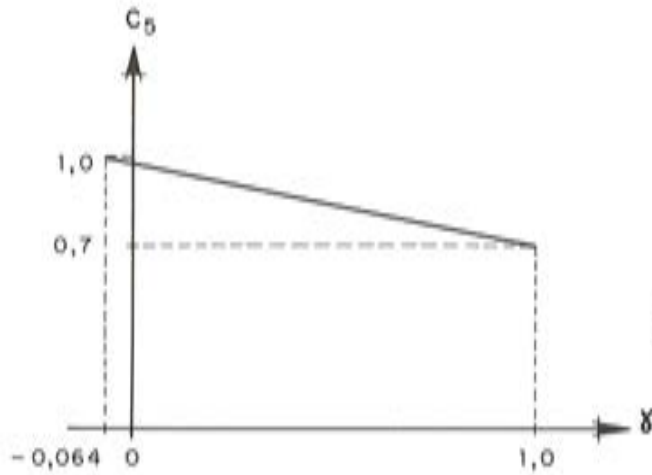


Fig. 9. Coeficiente corrector de  $\epsilon_{c10}$

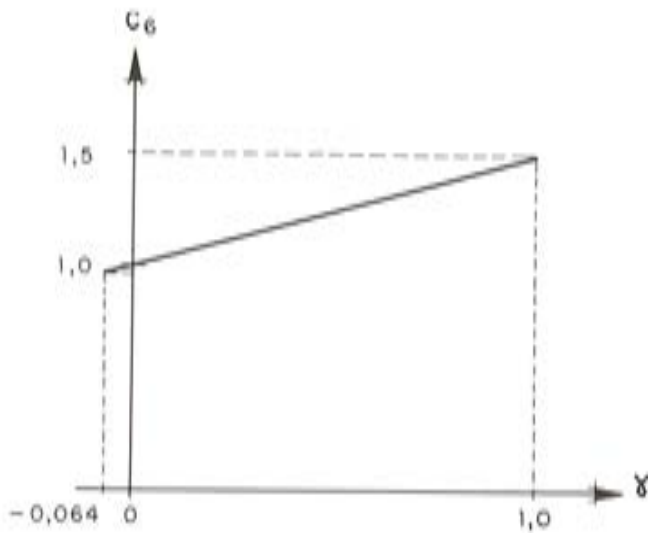


Fig. 10. Coeficiente corrector de  $E_{cm0}$

Sustituyendo su expresión analítica en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\sigma_{ut} = \begin{cases} 6,4 \left(\frac{f_{ck}}{10}\right)^{2/3} & \text{si } \gamma \leq 0,5 \\ 6,4 (1,6 - 1,2 \gamma) \left(\frac{f_{ck}}{10}\right)^{2/3} & \text{, si } \gamma > 0,5 \end{cases}$$

$$\sigma_{uc} = \begin{cases} (1 + 0,3 \gamma) f_{ck} & \text{, si } \gamma \geq 0 \\ (1 + 7,81 \gamma) f_{ck} & \text{, si } \gamma < 0 \end{cases} \quad [3-5]$$

$$\epsilon_{ut} = (1 + 2 \gamma) 0,00014$$

$$\epsilon_{uc} = (1 - 0,3 \gamma) \left(\frac{f_{ck}}{5 \cdot 10^6} - 0,004\right)$$

$$\epsilon_{c1} = -0,0022 (1 - 0,3 \gamma)$$

$$E_{cm} = (1 + 0,5 \gamma)(2,3 \cdot 10^6 + 300 \cdot f_{ck})$$

En función de los parámetros anteriores, el diagrama tensión-deformación viene definido por:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Si } e \geq 0 \rightarrow \sigma = \frac{e^2}{e_{ut}} \left( \frac{\sigma_{ut}}{e_{ut}} - 1,1 E_{cm} \right) + 1,1 E_{cm} \cdot e \\ \text{Si } e < 0 \rightarrow \sigma = -\sigma_{uc} \frac{\frac{e}{e_{c1}} \cdot K - \left(\frac{e}{e_{c1}}\right)^2}{1 + (K-2) \frac{e}{e_{c1}}} \end{array} \right. \quad [3-6]$$

siendo:

$$K = -1,1 \frac{e_{c1} \cdot e_{cm}}{\sigma_{uc}}$$

De acuerdo con la relación tensodeformacional anteriormente definida, el módulo de deformación secante en una dirección dada  $E_c(e, \gamma)$  es función de los parámetros básicos, de la deformación ( $e$ ) y del parámetro de deformación transversal ( $\gamma$ ), y viene dado por las siguientes expresiones:

$$E_c(e, \gamma) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } e > e_{ut} \text{ rotura por tracción} \\ \frac{e}{e_{ut}} \left( \frac{\sigma_{ut}}{e_{ut}} - 1,1 \cdot E_{cm} \right) + 1,1 E_{cm} & , \text{ si } 0 < e \leq e_{ut} \\ -\sigma_{uc} \frac{K \cdot e_{c1} - e}{e_{c1}^2 + (K-2) e \cdot e_{c1}} & , \text{ si } e_{uc} \leq e < 0 \\ 0 & , \text{ si } e < e_{uc} \text{ rotura por compresión} \end{cases} \quad [3-7]$$

### 3.2. Acero

A lo largo de todo el desarrollo del proceso de cálculo, así como en los ejemplos expuestos, hemos utilizado acero de dureza natural, cuyo diagrama (fig. 11) queda definido analíticamente por:

$$\text{Si } |e| \leq \frac{f_{yk}}{2,1 \cdot 10^7} \rightarrow \sigma = 2,1 \cdot 10^7 \cdot e \quad [3-8]$$

$$\text{Si } |e| > \frac{f_{yk}}{2,1 \cdot 10^7} \rightarrow \sigma = \frac{e}{|e|} \cdot f_{yk}$$

donde:

$f_{yk}$ : Resistencia característica del acero.

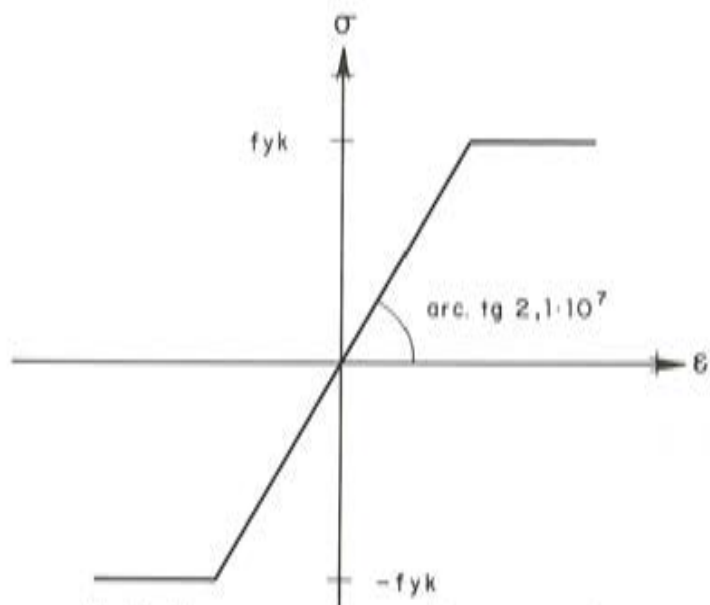


Fig. 11. Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  del acero (dureza natural).

De acuerdo con el anterior diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$ , el módulo de deformación secante del acero tiene la siguiente expresión:

$$E_s(\epsilon) = \begin{cases} 2,1 \cdot 10^7, & \text{si } |\epsilon| \leq \frac{f_{yk}}{2,1 \cdot 10^7} \\ \frac{f_{yk}}{|\epsilon|}, & \text{si } |\epsilon| > \frac{f_{yk}}{2,1 \cdot 10^7} \end{cases}$$

De la misma forma que se ha utilizado acero de dureza natural, podría adoptarse acero deformado en frío, sin más que sustituir las expresiones analíticas anteriormente expuestas por las correspondientes a dicho tipo de acero.

#### 4. MATRIZ DE RIGIDEZ DE LOS MATERIALES

Dado que la estructura es heterogénea, en el sentido de que está compuesta por dos materiales (hormigón y acero), formularemos dos matrices de rigidez, una para cada material, que los caractericen tensodeformacionalmente.

El hormigón puede fisurarse, y existe además una influencia transversal en los esfuerzos y deformaciones en una dirección dada, conocida exclusivamente en las direcciones principales. El acero, por otra parte, está constituido por una malla ortogonal de dirección variable. Dichas consideraciones nos llevan a tratar ambos materiales como ortótropos con unas determinadas direcciones de ortotropía.

Un material ortótropo según las direcciones 1 y 2 viene definido por los siguientes parámetros:

- $E_1$  : Módulo de deformación longitudinal según dirección 1.
- $E_2$  : Módulo de deformación longitudinal según dirección 2.
- $\nu_1$  : Módulo de Poisson según dirección 1.
- $\nu_2$  : Módulo de Poisson según dirección 2.
- $G$  : Módulo de deformación transversal

que cumplen la siguiente relación:

$$E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1 \quad [4-1]$$

La ecuación que rige el comportamiento de dicho material es:

$$\underline{g} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon} \quad [4-2]$$

siendo  $\underline{D}$  la matriz de rigidez del material, que tiene la siguiente expresión en función de los parámetros definitorios de éste:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{E_1 \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ \frac{E_2 \nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad [4-3]$$

#### 4.1. Cambio de sistema de referencia

En el desarrollo de la formulación de las matrices de rigidez de los materiales, utilizaremos dos sistemas de referencia distintos, necesitando, por tanto, conocer las relaciones existentes entre tensiones, deformaciones y matrices de rigidez en ambos sistemas; por ello vamos, a continuación, a obtener dichas relaciones.

Sea el sistema de ejes globales  $XY$  y dos sistemas de ejes  $X_\alpha Y_\alpha$  y  $X_\beta Y_\beta$ , que forman con el global sendos ángulos  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  (fig. 12). Sean  $\underline{g}_\alpha$  y  $\underline{\epsilon}_\alpha$  los vectores de tensiones y deformaciones de un punto según el sistema  $X_\alpha Y_\alpha$ , y  $\underline{g}_\beta$  y  $\underline{\epsilon}_\beta$  los vectores de tensiones y deformaciones del mismo punto, pero referidos al sistema  $X_\beta Y_\beta$ . Por la teoría de la Elasticidad sabemos que:

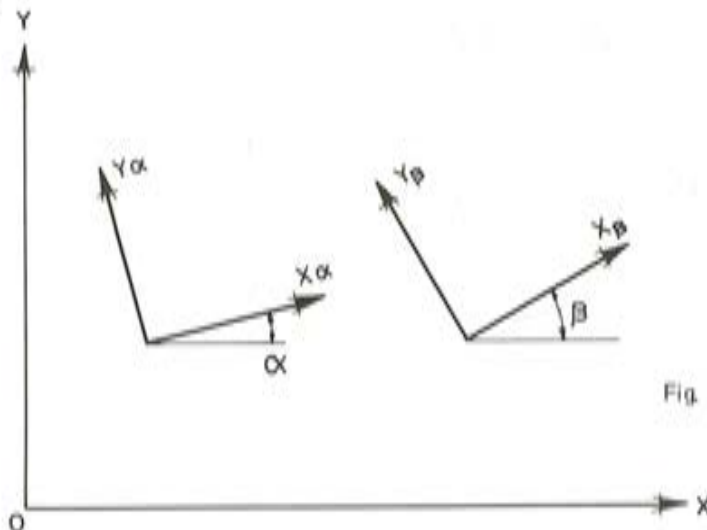


Fig. 12. Sistemas de referencia.

$$\underline{\varepsilon}_\alpha = \underline{T}_\varepsilon^{\beta, \alpha} \underline{\varepsilon}_\beta \quad [4-4]$$

$$\underline{\sigma}_\alpha = \underline{T}_\sigma^{\beta, \alpha} \underline{\sigma}_\beta \quad [4-5]$$

teniendo las matrices de cambio de sistema  $\underline{T}_\varepsilon^{\beta, \alpha}$  y  $\underline{T}_\sigma^{\beta, \alpha}$  la siguiente expresión:

$$\underline{T}_\varepsilon^{\beta, \alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha - \beta) & \sin^2(\alpha - \beta) & \frac{1}{2} \sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin^2(\alpha - \beta) & \cos^2(\alpha - \beta) & -\frac{1}{2} \sin 2(\alpha - \beta) \\ -\sin 2(\alpha - \beta) & \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{bmatrix} \quad [4-6]$$

$$\underline{T}_\sigma^{\beta, \alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha - \beta) & \sin^2(\alpha - \beta) & \sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin^2(\alpha - \beta) & \cos^2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ -\frac{1}{2} \sin 2(\alpha - \beta) & \frac{1}{2} \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{bmatrix} \quad [4-7]$$

Las relaciones entre tensiones y deformaciones en cada sistema de ejes son:

$$\underline{\sigma}_\alpha = \underline{D}_\alpha \cdot \underline{\varepsilon}_\alpha \quad [4-8]$$

$$\underline{\sigma}_\beta = \underline{D}_\beta \cdot \underline{\varepsilon}_\beta \quad [4-9]$$

Si premultiplicamos ambos miembros de la igualdad 4-8 por  $\underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta}$  obtenemos:

$$\underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} \cdot \underline{\sigma}_\alpha = \underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} \underline{D}_\alpha \underline{\varepsilon}_\alpha \quad [4-10]$$

y dado que:

$$\underline{\sigma}_\beta = \underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} \cdot \underline{\sigma}_\alpha \quad [4-11]$$

resulta:

$$\underline{\sigma}_\beta = \underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} \underline{D}_\alpha \underline{\varepsilon}_\alpha \quad [4-12]$$

Sustituyendo 4-9 en 4-12 tenemos:

$$\underline{D}_\beta \underline{\varepsilon}_\beta = \underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} \underline{D}_\alpha \underline{\varepsilon}_\alpha \quad [4-13]$$

y aplicando 4-4 resulta:

$$\underline{D}_\beta \underline{\varepsilon}_\beta = \underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} \underline{D}_\alpha \underline{T}_\varepsilon^{\beta, \alpha} \underline{\varepsilon}_\beta \quad [4-14]$$

Por lo tanto:

$$\underline{D}_\beta = \underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} \underline{D}_\alpha \underline{T}_\varepsilon^{\beta, \alpha} \quad [4-15]$$

pero como se cumple:

$$\underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta} = [\underline{T}_\varepsilon^{\beta, \alpha}]^T \quad [4-16]$$

obtenemos finalmente la relación entre  $\mathcal{D}_\beta$  y  $\mathcal{D}_\alpha$ :

$$\mathcal{D}_\beta = [\mathcal{T}_e^{\beta, \alpha}]^T \cdot \mathcal{D}_\alpha \cdot \mathcal{T}_e^{\beta, \alpha} \quad [4-17]$$

En el caso particular en que  $\beta = 0^\circ$  obtendremos:

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} = [\mathcal{T}_e^{0, \alpha}]^T \cdot \mathcal{D}_\alpha \cdot [\mathcal{T}_e^{0, \alpha}] \quad [4-18]$$

y haciendo  $\mathcal{T}_\alpha = [\mathcal{T}_e^{0, \alpha}]^T$

$$\mathcal{D} = \mathcal{T}_\alpha \mathcal{D}_\alpha \cdot \mathcal{T}_\alpha^T \quad [4-19]$$

siendo:

$$\mathcal{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

#### 4.2. Matriz de rigidez del hormigón

Sea un estado de deformaciones del hormigón definido en ejes globales por el vector de

deformaciones  $\underline{\epsilon}$ :

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

La dirección de las tensiones principales  $\alpha$ , y las deformaciones principales  $\epsilon_{c1}$  y  $\epsilon_{c2}$  serán:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right) \quad [4-20]$$

$$\epsilon_{c1} = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\epsilon_{c2} = \epsilon_x \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha - \gamma_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Caracterizaremos al hormigón como un material ortótropo, con direcciones de ortotropía coincidentes con las direcciones principales  $\alpha$  y  $\alpha + 90^\circ$ .

Las deformaciones transversales relativas en cada una de las direcciones serán:

$$\gamma_1 = \frac{\epsilon_{c2}}{0,0022} \quad \gamma_2 = \frac{\epsilon_{c1}}{0,0022} \quad [4-21]$$

Por tanto, los módulos de deformación secantes en ambas direcciones, según las expresiones 3-7 serán:

$$\begin{aligned} E_{c_1} &= E_c (e_{c_1}, \gamma_1) \\ E_{c_2} &= E_c (e_{c_2}, \gamma_2) \end{aligned} \quad [4-22]$$

En lo referente a los coeficientes de Poisson  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , adoptaremos un valor básico  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_c = 0,20$  para el hormigón descargado, y un valor nulo en rotura, siendo sus expresiones:

$$\nu_1 = \nu_c \frac{E_{c_1}}{E_{c_0}} \quad \nu_2 = \nu_c \frac{E_{c_2}}{E_{c_0}} \quad [4-23]$$

donde  $E_{c_0}$  es el módulo de deformación en el origen:

$$E_{c_0} = 1,1 E_{cm0} = 2,53 \cdot 10^6 + 330 f_{ck} \quad [4-24]$$

Dichas expresiones de los coeficientes de Poisson  $\nu_1$  y  $\nu_2$  cumplen la relación 4-1:

$$E_{c_1} \nu_2 = E_{c_2} \nu_1 \quad [4-25]$$

Cuando se produce fisuración en una de las direcciones principales, su módulo de deformación se hace nulo:

$$\text{Si } e_{c_1} > e_{ut} \rightarrow E_{c_1} = 0$$

$$\text{Si } e_{c_2} > e_{ut} \rightarrow E_{c_2} = 0$$

En el caso de producirse rotura por compresión en una de las direcciones principales, y dado que en esta situación el hormigón queda fragmentado, consideraremos nulo no sólo el módulo de deformación de la dirección de la máxima compresión, sino también el de la otra dirección principal:

$$\text{Si } e_{c_1} \text{ ó } e_{c_2} < e_{uc} \rightarrow E_{c_1} = E_{c_2} = 0$$

Por otra parte, diversos autores, como fruto de sus investigaciones, han llegado a la conclusión de que en el caso de producirse fisuración en una dirección principal, y para tener en cuenta la transmisión de esfuerzos por rozamiento en las fisuras, debe considerarse un módulo de deformación transversal del orden de la mitad del correspondiente al hormigón sin fisurar. En base a estas consideraciones, hemos adoptado el siguiente módulo de deformación transversal:

$$G_c = \frac{E_{c_1} + E_{c_2} - 2\sqrt{\nu_1 \nu_2 E_{c_1} E_{c_2}}}{4(1 - \nu_1 \nu_2)} \quad [4-26]$$

De acuerdo con todo lo anterior, y teniendo en cuenta lo expuesto en el apdo. 4 respecto a los materiales ortótropos, la matriz de rigidez del hormigón en ejes globales  $\mathcal{D}_c$  tiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{D}_c = \frac{E_0}{1 - 0,04 K_1 K_2} \cdot \mathcal{T}_\alpha \cdot \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \mathcal{T}_\alpha^T \quad [4-27]$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= s(e_{c_2}) \frac{E_{c_1}}{E_{c_0}} \\
 K_2 &= s(e_{c_1}) \frac{E_{c_2}}{E_{c_0}} \\
 d_{11} &= K_1 \\
 d_{22} &= K_2 \\
 d_{33} &= \frac{1}{4} (K_1 + K_2 - 0,40 K_1 \cdot K_2) \\
 d_{12} &= d_{21} = 0,20 \cdot K_1 \cdot K_2 \\
 d_{13} &= d_{31} = d_{23} = d_{32} = 0 \\
 s(e) &= \begin{cases} 1, & \text{si } e \geq e_{uc} \\ 0, & \text{si } e < e_{uc} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4-28}$$

$E_{c_0}$  : Módulo de deformación en el origen.

$\underline{T}_\alpha$  : Matriz de cambio de sistema de ejes.

#### 4.3. Matriz de rigidez del acero

Sea una armadura que forma un ángulo  $\beta$  con los ejes globales, y un estado de deformaciones, definido en ejes globales por el vector de deformaciones  $\underline{e}$ . La deformación  $e_s$  en la dirección de la armadura ( $\beta$ ) será:

$$e_s = e_x \cos^2 \beta + e_y \sin^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \tag{4-29}$$

En función de dicha deformación, y aplicando las expresiones 3-9 se calcula el módulo de deformación  $E_s$ :

$$E_s = E_s(e_s) \tag{4-30}$$

Cuando se produce una rotura por compresión en el hormigón, éste se fragmenta, por lo que si existe en esa zona alguna armadura en compresión, entrará en inestabilidad. Por este motivo, cuando concurren dichas circunstancias, consideraremos nulo el módulo de deformación de dicha armadura.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, la matriz de rigidez del acero en ejes globales  $\underline{Q}_s$  tiene la siguiente expresión:

$$\underline{Q}_s = 2,1 \cdot 10^7 \cdot \underline{T}_\beta \cdot \begin{bmatrix} K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{T}_\beta^T \tag{4-31}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 K_3 &= t(e_s) \frac{E_s}{2,1 \cdot 10^7} \\
 t(e_s) &= \begin{cases} 1 & , \text{ si } e_s > 0 \\ s(e_{c_1}) * s(e_{c_2}) & , \text{ si } e_s \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde  $s(\epsilon)$  es la función definida en 4-28.

$T_{\beta}$ : Matriz de cambio de sistema de ejes.

## 5. SISTEMÁTICA DEL CÁLCULO

El método de cálculo desarrollado en el presente trabajo es un método de cálculo incremental-iterativo, y ello debido fundamentalmente a que el fenómeno de la fisuración es irreversible. Por tanto, no puede pretenderse, al menos teóricamente, encontrar la solución final mediante un solo escalón de carga, pues existen infinitos estados fisurados equilibrados y compatibles, de los cuales uno sólo de ellos es la verdadera solución: aquél que es consecuencia del incremento gradual de las cargas hasta alcanzar su valor final.

Al discretizar el continuo en elementos y considerar los valores de ciertas variables (tensión, deformación) en cada uno de ellos, estamos reflejando el comportamiento medio del elemento. De la misma forma, este hecho tiene lugar en el fenómeno de la fisuración, e incluso se ve acentuado por la aleatoriedad propia de la generación de las fisuras. La aparición de una fisura en un elemento no debe interpretarse al pie de la letra, sino pensando que dicha fisura y su inclinación representan el estado medio de fisuración del elemento.

El desarrollo de cada iteración es el siguiente:

- 1) Los datos de partida, además de los datos generales son:
  - Ángulo de las direcciones principales ( $\alpha$ ).
  - Módulos de deformación del hormigón según las direcciones principales ( $E_{c_1}$  y  $E_{c_2}$ ).
  - Módulos de deformación del acero ( $E_{s_1}$  y  $E_{s_2}$ ).
  - Cargas de la estructura.
- 2) Montaje de la matriz de rigidez de la estructura, a partir de la matriz de rigidez de cada elemento (formulación apdo. 2).
- 3) Montaje del vector de cargas consistente.
- 4) Resolución del sistema de ecuaciones  $\underline{p} = \underline{K} \cdot \underline{u}$  y determinación del vector de movimientos  $\underline{u}$ .
- 5) Cálculo del vector de deformaciones de cada elemento, a partir del vector de movimientos, a través de la matriz de interpolación de deformaciones  $\underline{B}$ .
- 6) Conocido el estado de deformaciones, calculamos los nuevos módulos de deformación de los materiales.
  - Cálculo del nuevo ángulo de las direcciones principales ( $\alpha$ ) si el elemento no está fisurado. En caso contrario mantendremos el valor de la iteración anterior.
  - Cálculo de las deformaciones principales  $\epsilon_{c_1}$  y  $\epsilon_{c_2}$  y de los módulos de deformación  $E_{c_1}$  y  $E_{c_2}$ .
  - Cálculo de las deformaciones de los aceros  $\epsilon_{s_1}$  y  $\epsilon_{s_2}$  y de los módulos de deformación  $E_{s_1}$  y  $E_{s_2}$ .
- 7) Por fin, realizamos el control de iteraciones, analizando las variaciones de los módulos de deformación de ambos materiales respecto a la anterior iteración, y comparándolas con una cota máxima de variación preestablecida. Si alguna de las variaciones supera dicha cota, comenzaremos otra nueva iteración.

El proceso general del cálculo consiste en dividir la carga total en una serie de escalones (cálculo incremental), y realizar, para cada uno de ellos, los cálculos necesarios (cálculo iterativo) hasta conseguir entre dos cálculos consecutivos unas variaciones de módulos de deformación inferiores a la máxima admisible. No obstante, y dado que utilizamos módulos de deformación secantes, en los cálculos correspondientes a un escalón dado se incluyen las cargas de todos los escalones anteriores.

En el ordinograma de la figura 13 se describe la organización del programa de cálculo.

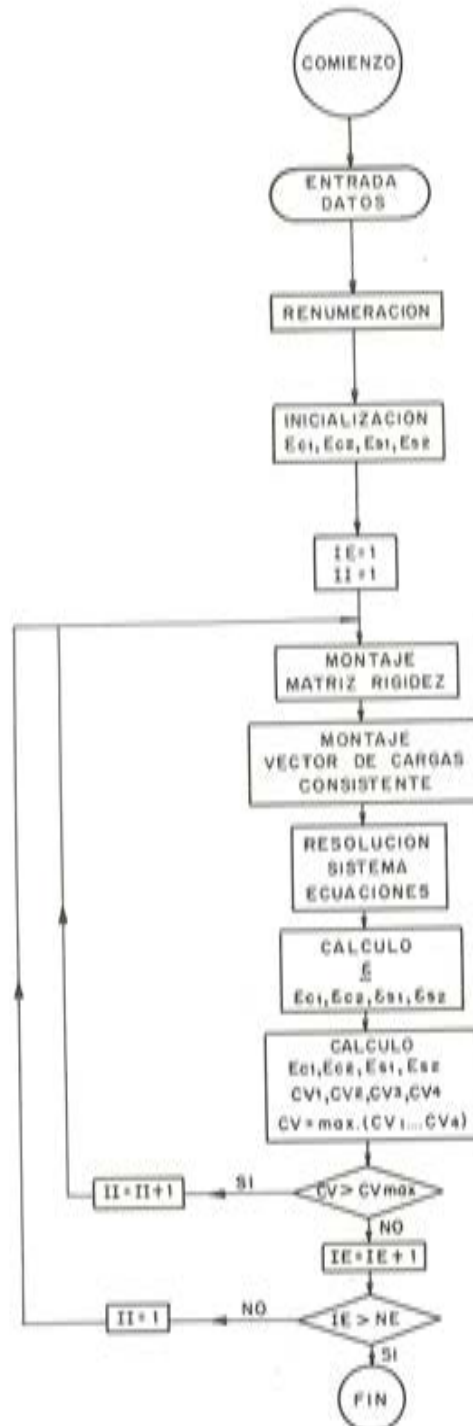


Fig. 13. Ordinograma.

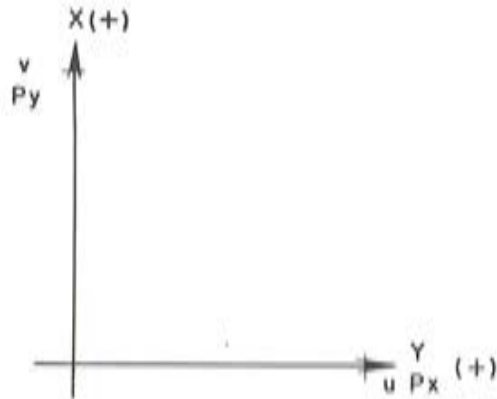


Fig. 14. Convenio de signos de acciones y movimientos.

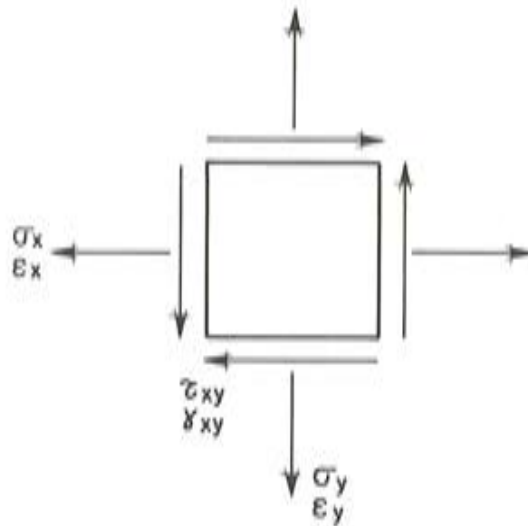


Fig. 15. Convenio de signos de tensiones y deformaciones.

## 6. CONVENIO DE SIGNOS

El criterio de signos utilizados para coordenadas  $(x, y)$ , movimientos  $(u, v)$  y acciones en nudos  $(P_x, P_y, \delta_x, \delta_y)$  es el correspondiente al sistema de ejes globales (fig. 14).

Los signos positivos de las deformaciones  $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$  y las tensiones  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  corresponden a los sentidos indicados en la figura 15.

## 7. NOMENCLATURA

Los caracteres alfabéticos que representan vectores o matrices llevan en su parte inferior el símbolo ( $\sim$ ); los vectores vienen representados por letras minúsculas, mientras para las matrices se utilizan las mayúsculas. El superíndice (T) en vectores o matrices indica trasposición.

### Minúsculas romanas

$d_{11}, d_{12}, \dots$  : Elementos de  $\underline{D}$

$e$  : Espesor

$f_{ck}$  : Resistencia característica del hormigón

$f_{yk}$  : Resistencia característica del acero

$\underline{p}_e$  : Vector de cargas consistente de un elemento

$s$  : Indicador de rotura por compresión del hormigón

$t$  : Indicador de pandeo de armadura comprimida

$u$  : Movimiento en dirección OX

$\underline{u}$  : Vector de movimientos de un punto

$\underline{u}^n$  : Vector de movimientos nodales

$v$  : Movimiento en dirección OY

$x$  : Abscisa

$y$  : Ordenada

### Mayúsculas romanas

$A_{s1}$  : Area de la armadura 1 por unidad de longitud

$A_{s2}$  : Area de la armadura 2 por unidad de longitud

$\underline{B}$  : Matriz de interpolación de deformaciones

$C_1$  : Coeficiente corrector de  $\sigma_{uto}$

$C_2$  : Coeficiente corrector de  $\sigma_{uco}$

$C_3$  : Coeficiente corrector de  $\epsilon_{uto}$

$C_4$  : Coeficiente corrector de  $\epsilon_{uco}$

$C_5$  : Coeficiente corrector de  $\epsilon_{c10}$

$C_6$  : Coeficiente corrector de  $E_{cm0}$

$\underline{D}$  : Matriz de rigidez del material

$\underline{D}_c$  : Matriz de rigidez del hormigón

$\underline{D}_{s1}$  : Matriz de rigidez de la armadura 1

$\underline{D}_{s2}$  : Matriz de rigidez de la armadura 2

$\underline{D}_\alpha$  : Matriz de rigidez del material en el sistema  $X_\alpha Y_\alpha$

$\underline{D}_\beta$  : Matriz de rigidez del material en el sistema  $X_\beta Y_\beta$

$E_c$  : Módulo de deformación longitudinal del hormigón

$E_{cm}$  : Módulo de deformación longitudinal medio del hormigón. Estado biaxial

$E_{cm0}$  : Módulo de deformación longitudinal medio del hormigón. Estado uniaxial

$E_{co}$  : Módulo de deformación longitudinal del hormigón en el origen

$E_{c1}$  : Módulo de deformación longitudinal del hormigón en la dirección principal  $\alpha$

$E_{c2}$  : Módulo de deformación longitudinal del hormigón en la dirección principal ( $\alpha + 90$ )

$E_s$  : Módulo de deformación longitudinal del acero

$E_1$	: Módulo de deformación longitudinal en la dirección 1
$E_2$	: Módulo de deformación longitudinal en la dirección 2
$G$	: Módulo de deformación transversal
$G_c$	: Módulo de deformación transversal del hormigón
$K$	: Constante del hormigón, Estado biaxial
$K_0$	: Constante del hormigón, Estado uniaxial
$K_1$	: Módulo de deformación longitudinal adimensional del hormigón en la dirección principal $\alpha$
$K_2$	: Módulo de deformación longitudinal adimensional del hormigón en la dirección principal ( $\alpha + 90$ )
$K_3$	: Módulo de deformación longitudinal adimensional del acero
$\underline{K}_{el}$	: Matriz de rigidez de un elemento
$\underline{K}_{el}^*$	: Matriz de rigidez orlada de un elemento triangular
$P_x$	: Fuerza según el eje OX
$P_y$	: Fuerza según el eje OY
$\underline{T}_\alpha$	: Matriz de cambio del sistema $X_\alpha Y_\alpha$ al $X Y$ (para matriz de rigidez)
$\underline{T}_e^{\alpha, \beta}$	: Matriz de cambio del sistema $X_\alpha Y_\alpha$ al $X_\beta Y_\beta$ (para vector de deformaciones)
$\underline{T}_\sigma^{\alpha, \beta}$	: Matriz de cambio del sistema $X_\alpha Y_\alpha$ al $X_\beta Y_\beta$ (para vector de tensiones)
$U_c$	: Energía de deformación del hormigón
$U_{el}$	: Energía de deformación de un elemento
$U_{s1}$	: Energía de deformación del acero 1
$U_{s2}$	: Energía de deformación del acero 2
$V$	: Volumen

### Minúsculas griegas

$\alpha$	: Angulo genérico o ángulo de las direcciones principales
$\beta$	: Angulo genérico o ángulo de la armadura
$\gamma$	: Deformación transversal relativa
$\gamma_{xy}$	: Deformación angular
$\gamma_1$	: Deformación transversal relativa para la dirección principal $\alpha$
$\gamma_2$	: Deformación transversal relativa para la dirección principal ( $\alpha + 90$ )
$\delta_x$	: Movimiento impuesto según OX
$\delta_y$	: Movimiento impuesto según OY
$e_{c1}$	: Deformación principal del hormigón según $\alpha$ o deformación correspondiente a $\sigma_{uc}$ en estado biaxial
$e_{c10}$	: Deformación del hormigón correspondiente a $\sigma_{uco}$ en estado uniaxial
$e_{c2}$	: Deformación principal del hormigón según ( $\alpha + 90$ )
$e_s$	: Deformación del acero
$e_{uc}$	: Deformación última a compresión del hormigón (estado biaxial)
$e_{uco}$	: Deformación última a compresión del hormigón (estado uniaxial)

$e_{ut}$	: Deformación última a tracción del hormigón (estado biaxial)
$e_{uto}$	: Deformación última a tracción del hormigón (estado uniaxial)
$e_x$	: Deformación en dirección OX
$e_y$	: Deformación en dirección OY
$\underline{e}$	: Vector de deformaciones
$\underline{e}_c$	: Vector de deformaciones del hormigón
$\underline{e}_{s_1}$	: Vector de deformaciones de la armadura 1
$\underline{e}_{s_2}$	: Vector de deformaciones de la armadura 2
$\underline{e}_\alpha$	: Vector de deformaciones en el sistema $X_\alpha Y_\alpha$
$\underline{e}_\beta$	: Vector de deformaciones en el sistema $X_\beta Y_\beta$
$\nu_c$	: Coeficiente de Poisson del hormigón
$\nu_1$	: Coeficiente de Poisson en dirección 1
$\nu_2$	: Coeficiente de Poisson en dirección 2
$\sigma_{uc}$	: Tensión última a compresión del hormigón (estado biaxial)
$\sigma_{uco}$	: Tensión última a compresión del hormigón (estado uniaxial)
$\sigma_{ut}$	: Tensión última a tracción del hormigón (estado biaxial)
$\sigma_{uto}$	: Tensión última a tracción del hormigón (estado uniaxial)
$\sigma_x$	: Tensión normal en dirección OX
$\sigma_y$	: Tensión normal en dirección OY
$\underline{\sigma}$	: Vector de tensiones
$\underline{\sigma}_c$	: Vector de tensiones del hormigón
$\underline{\sigma}_{s_1}$	: Vector de tensiones de la armadura 1
$\underline{\sigma}_{s_2}$	: Vector de tensiones de la armadura 2
$\underline{\sigma}_\alpha$	: Vector de tensiones en el sistema $X_\alpha Y_\alpha$
$\underline{\sigma}_\beta$	: Vector de tensiones en el sistema $X_\beta Y_\beta$
$\tau_{xy}$	: Tensión cortante

#### Mayúsculas griegas

$\Delta$  : Area del elemento triangular

### 8. EJEMPLOS

A fin de comprobar las prestaciones del programa, se han realizado varios cálculos sobre una misma viga con distintas armaduras, acciones y condiciones de cimentación.

Se trata de una viga de hormigón armado, sección rectangular de 1,00 m x 0,30 m y 6 m de luz libre (fig. 16). En todos los cálculos se ha discretizado en 60 elementos rectangulares de 0,50 m x 0,20 m, según se observa en la figura 17.

Se han realizado 3 series de cálculos, variando en cada una de ellas alguna de las características del problema.

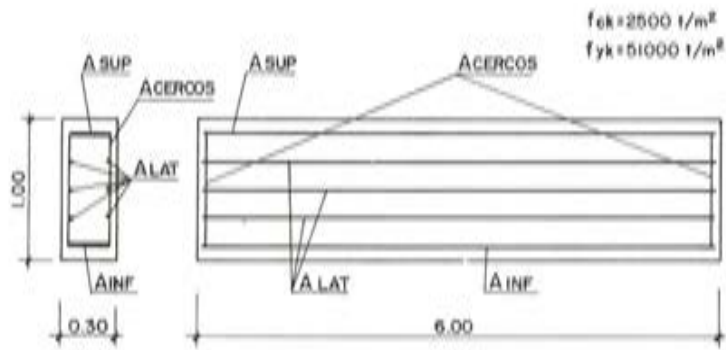


Fig. 16. Definición de la viga.

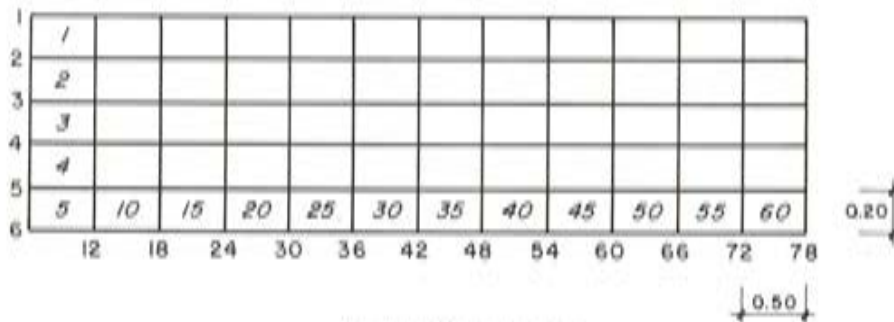


Fig. 17. Discretización.

### Serie 1

Consta de 2 cálculos (1a y 1b) de la viga biempotrada sometida a 2 cargas puntuales de 100 t. (fig. 18). Esta serie tiene como objeto analizar la influencia del número de escalones utilizados. En la figura 20 se comparan los resultados para 5 escalones y 1 escalón, observándose la gran similitud entre ellos. La figura 19 nos muestra la evolución de la fisuración al aumentar la carga; obsérvese como al acercarnos a la rotura aumenta el número de iteraciones necesarias.

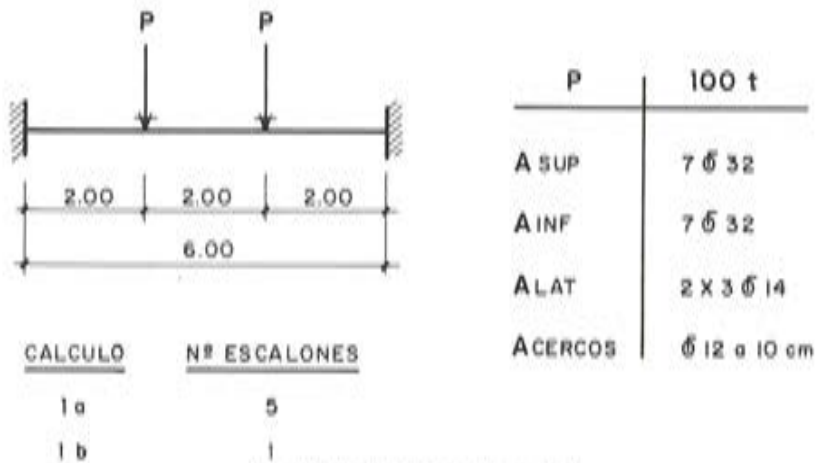


Fig. 18. Definición de la serie 1.

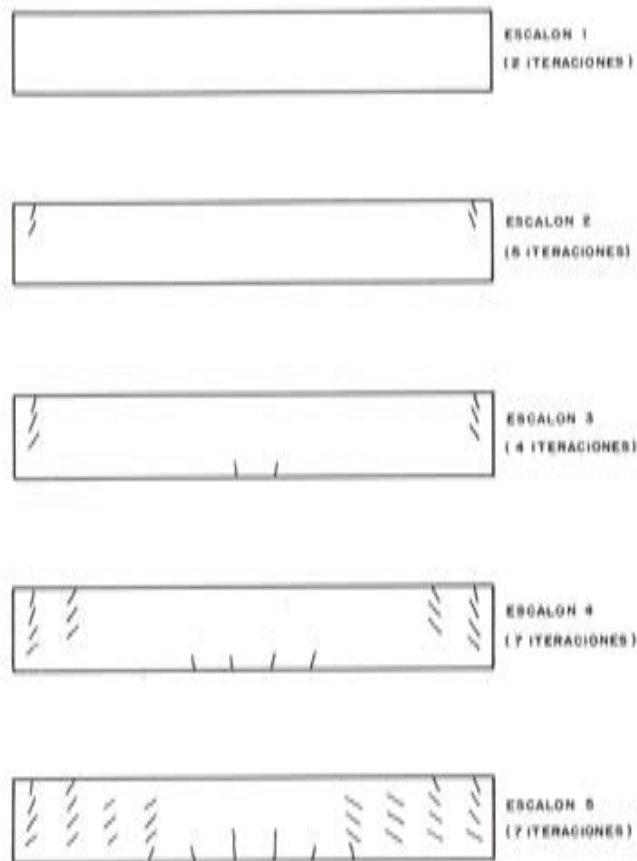
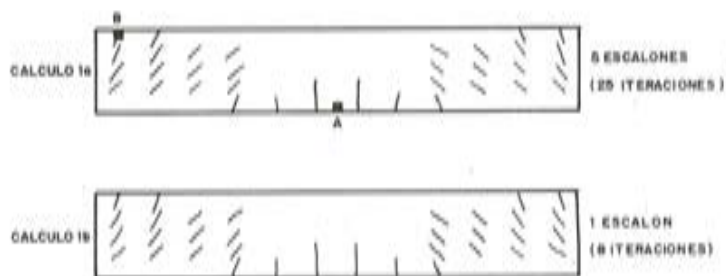


Fig. 19. Desarrollo del cálculo 1a.

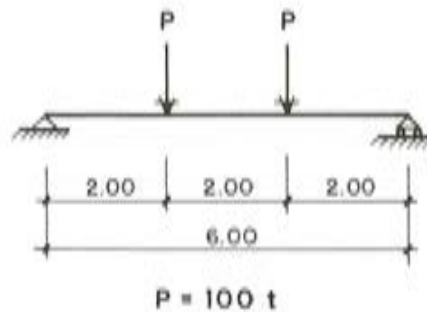


CALCULO	(mm) FLECHA	$\times 10^{-4}$	
		$\sigma_{9A}$	$\sigma_{9B}$
1a	4.22	3.48	7.28
1b	4.20	3.48	7.31

Fig. 20. Resultados de la serie 1.

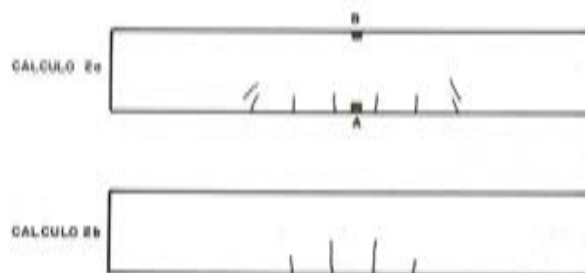
## Serie 2

Se han realizado 2 cálculos de la viga simplemente apoyada sometida a 2 cargas puntuales de 100 t (fig. 21). En esta serie hemos variado la armadura longitudinal inferior obteniendo los resultados de la figura 22.



CÁLCULO	A SUP	A INF	A LAT	ACERCOS
2 a	3 $\phi$ 14	7 $\phi$ 32	2 X 3 $\phi$ 14	$\phi$ 12 a 10 cm
2 b	3 $\phi$ 14	7 $\phi$ 16	2 X 3 $\phi$ 14	$\phi$ 12 a 10 cm

Fig. 21. Definición de la serie 2.

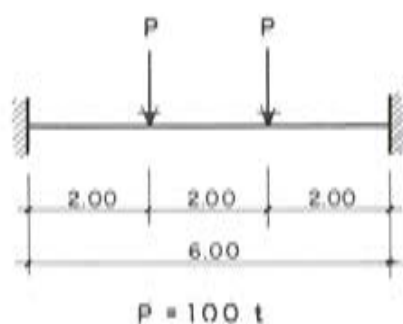


CÁLCULO	FLECHA (mm)	$\times 10^{-4}$	
		$\delta_{SA}$	$\delta_{SB}$
2 a	4.57	3.12	-6.00
2 b	5.51	6.25	-7.91

Fig. 22. Resultados de la serie 2.

### Serie 3

En esta serie se han ejecutado 3 cálculos sobre la viga biempotrada (fig. 23) variando diversas características del hormigón. En el primero de ellos se ha considerado resistencia a tracción nula, en el segundo se han utilizado las características del hormigón correspondientes a estado uniaxial, y en el tercero se ha representado el comportamiento del hormigón a través del diagrama parábola rectángulo. En la figura 24 se comparan los resultados con los obtenidos en el cálculo 1.



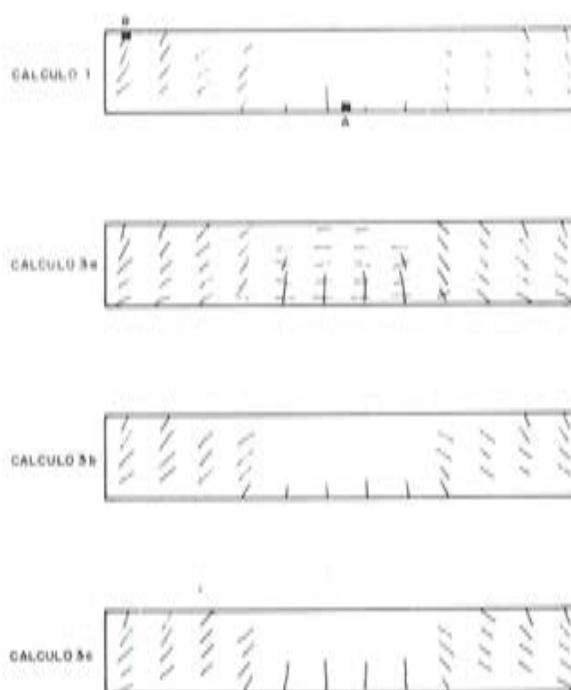
Armadura como cálculos 1

Cálculo 3a =  $f_{tk} = 0$

Cálculo 3b = Estado uniaxial

Cálculo 3c = Diagrama parábola-rectángulo

Fig. 23. Definición de la serie 3.



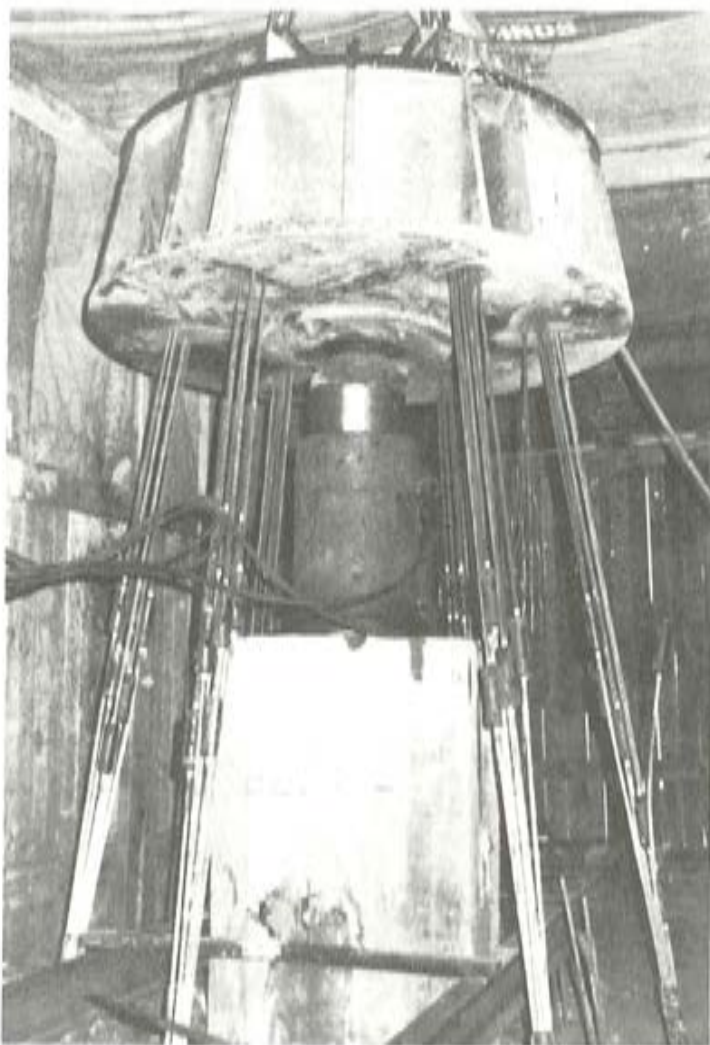
CALCULO	FLECHA (mm)	$\times 10^{-4}$	
		$\delta_{9A}$	$\delta_{9B}$
1	4.22	3.48	7.28
3a	4.93	3.98	8.01
3b	3.26	2.24	6.11
3c	4.92	3.48	7.98

Fig. 24. Resultados de la serie 3.

# INTEMAC



INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Prueba de carga  
de un pilote.

## MADRID

### Oficinas:

Monte Esquinza, 30 - 4º D  
MADRID-4  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

### Laboratorio:

Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. (91) 675 31 00/04/08

## BARCELONA

Pasaje Busquets, 37  
CORNELLA DE LLOBREGAT  
Tels. (93) 377 43 58/62

## Efectos dinámicos en puentes de ferrocarril

E. Alarcón, R. Alvarez, M. Doblaré y J. Molina  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Cátedra de Estructuras

### INTRODUCCION

El comportamiento dinámico de los puentes constituye uno de los problemas clásicos de la Ingeniería Civil.

Efectivamente su origen se puede situar en el conocido accidente de Broughton en 1831, cuando un puente de hierro cedió al paso de una formación militar.

Desde entonces, han sido innumerables los trabajos a que el tema dió lugar, conducentes en su mayoría a la definición de un coeficiente de mayoración sobre las cargas estáticas.

Uno de los organismos más activos en este terreno ha sido la U.I.C. (Unión Internationale des Chemins de Fer), a través de la comisión O.R.E. (Office de Recherches et d'Essais).

Ya en la actualidad, este organismo ha lanzado la Question D-160, referente al estudio de la flecha máxima admisible en relación a la comodidad del pasajero.

En una primera etapa se trataba de la obtención de un programa de ordenador que contemplase el problema en su conjunto, lo cual permitiría posteriormente la realización de estudios paramétricos y consecuentemente la eventual mejora de criterios de diseño.

Se invitó pues a una serie de centros de Investigación Europeos, entre los cuales se encontraba el equipo de la cátedra de Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.

Este artículo pretende dar una visión general del programa realizado, así como de algunos de los resultados obtenidos al pasar uno de los casos de prueba solicitados por la ORE, el puente de Platting, en la República Federal de Alemania.

## DESCRIPCION DEL MODELO

Se relacionan en este apartado las ideas básicas que configuraron el modelo adoptado.

Para una más amplia información nos remitimos al artículo que los mismos autores han publicado en la revista "Anales de Ingeniería Mecánica" (véanse referencias).

Una de las directrices fundamentales del estudio fue la necesidad de considerar los efectos locales que las ruedas producen sobre la vía. Esta se considera como viga infinita sobre apoyo elástico (balasto) que, a su vez, actúa sobre las vigas.

Admitiendo esto, la consideración de los efectos locales implicaba, caso de seguir los métodos tradicionales, la aparición de un muy elevado número de grados de libertad.

Para obviar esta dificultad se recurrió al uso de funciones de formas móviles que representan la deformación local y que acompañan a la rueda en su movimiento.

Los coches se modelizan según la técnica usual en los métodos matriciales de cálculo estructural. La masa se supone concentrada en los nodos (centro de gravedad de cada coche) y los elementos pueden ser elegidos en una biblioteca que en la actualidad se está ampliando.

Los grados de libertad considerados son el desplazamiento vertical y el giro.

En cuanto a la estructura, se ha procurado sea una modelización lo más minuciosa posible, considerando posibilidades tales que el pretensado, la no linealidad de los neoprenos, el comportamiento de la orientación, la variación de las características mecánicas de las vigas y las pilas, etc.

## TRATAMIENTO NUMERICO

Está condicionado fundamentalmente por dos aspectos del modelo: la variación de las funciones de forma con el tiempo y las posibles no linealidades de los elementos.

Efectivamente, ambas condicionan la forma de integración a seguir, eliminando de partida el uso de cualquier técnica de descomposición modal a favor de los de integración directa.

Se ha recurrido pues a un método de integración directa y ello en base a su sencillez y probada eficacia.

Dentro de estos se está utilizando en la actualidad la regla trapezoidal, y ello por sus características de estabilidad y convergencia en sistemas lineales.

En cada paso de integración el sistema de equilibrio se resuelve por un método iterativo, concretamente el de predicción-corrección.

Estos métodos se adaptan muy bien a los problemas no lineales, dado que permiten variar las características de cada elemento en cada iteración, evitando simplificaciones del tipo rigidez tangente y similares. (Naturalmente ello implica también un mayor tiempo de ordenador).

La obtención de las condiciones iniciales del sistema constituyen también un problema que por su extensión no será tratado aquí. Piénsese no obstante que, la mera obtención del punto de trabajo de cada elemento no lineal hace necesario resolver de forma iterativa un problema de equilibrio (en el que además se exige que la vía permanezca horizontal, para lo cual, una vez obtenido el equilibrio, hay que reajustar los parámetros hasta anular la flecha, llegando así a otra iteración).

Citaremos por último que, aún en el caso de linealidad del sistema, todas las matrices han de ser cambiadas en cada paso de integración, dada la variación de las funciones de forma.

## DESCRIPCION DE LOS PROGRAMAS REALIZADOS

Aunque en un principio se pensó en un único programa de características muy definidas y en el que la relación con el usuario se ciñese a la entrada de datos, la experiencia acumulada ha aconsejado la formación de un banco de subrutinas cuya arquitectura permite confeccionar programas a medida del problema con muy poco esfuerzo.

En la actualidad dicho banco consta de más de 200 subrutinas, con un total de aproximadamente 20.000 sentencias.

Ello ha supuesto un esfuerzo importante en lo que se refiere a la estructuración de programas y de datos, pero a cambio permite un mayor aprovechamiento de las características de cada problema (esto es, reducción del tiempo de U.C.).

El lenguaje utilizado ha sido el FORTRAN, dada su mayor difusión y el ordenador en que se ha implementado, un UNIVAC 1100.

## DESCRIPCION DEL PROBLEMA

El puente de Platting, en la R.F.A. está compuesto por un total de 10 vanos idénticos, cuyas características se aprecian en la figura 1.

Se trata de un ejemplo típico de viga cajón pretensada, respondiendo al esquema genérico de este tipo de construcciones.

La longitud total de cada viga es de 31,71 m, y la distancia entre el extremo de cada viga y su apoyo correspondiente, de 0,7 m.

Las características mecánicas de la viga fueron obtenidas en primera estancia tomando dimensiones sobre los planos disponibles. Estas características fueron supuestas constantes a lo largo de toda la viga, despreciando el cambio de sección sobre los apoyos.

Al comprobar los valores así obtenidos con los deducidos de las pruebas estáticas efectuadas sobre el propio puente, resultaron diferencias importantes entre los valores teórico y experimental de la rigidez  $EI$ . Ello pone de relieve la dificultad en la determinación del módulo de elasticidad del hormigón. Naturalmente, se adoptaron como definitivos los valores experimentales.

La masa por metro lineal de la viga hubo de ser obtenida asimismo por medición sobre planos, utilizando las densidades y cuantías usuales.

El amortiguamiento nos fue dado como tanto por ciento sobre el crítico. Dado que nuestro modelo se consideraba en la forma " $\alpha m + \beta k$ " fue necesario hacer nulo uno de los coeficientes, determinando el otro una vez conocidas la masa y rigidez equivalentes. (La deformada de la viga se aproximó mediante desarrollo en serie de senos).

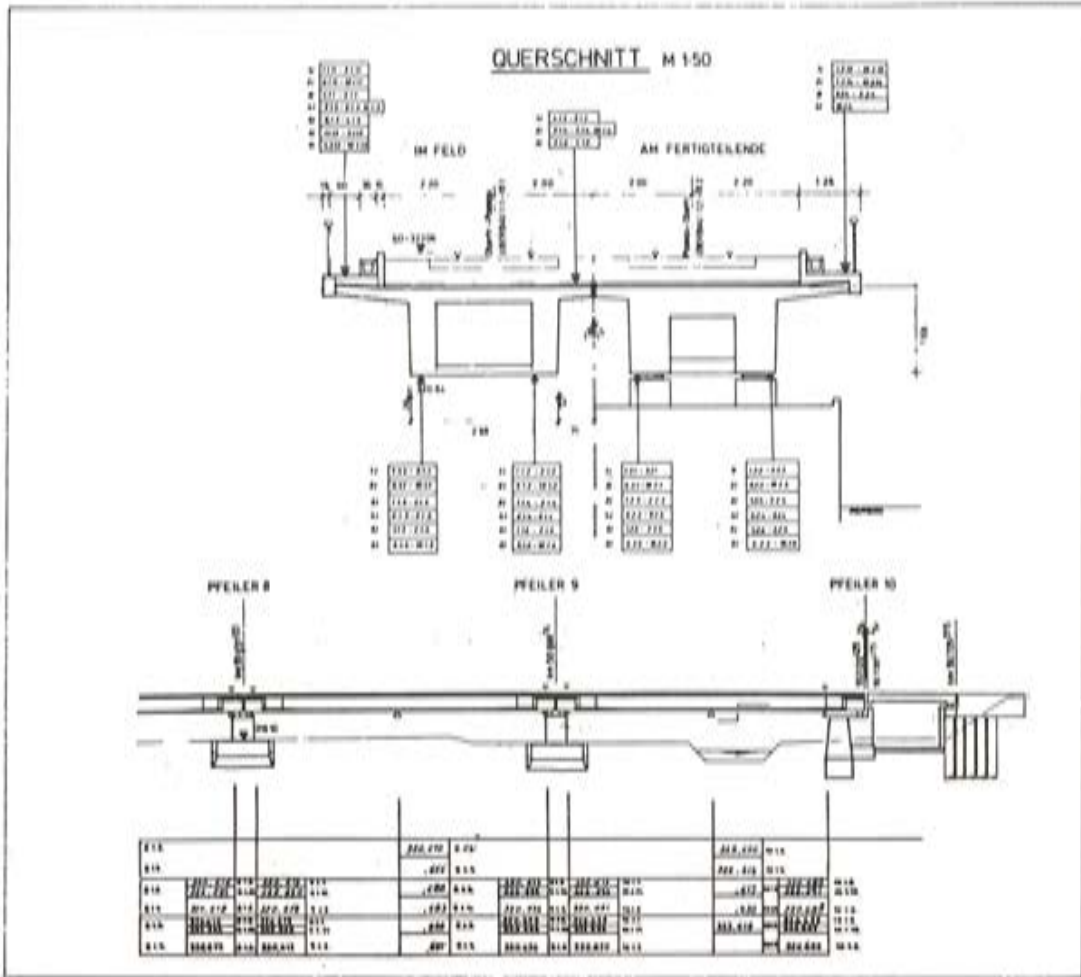
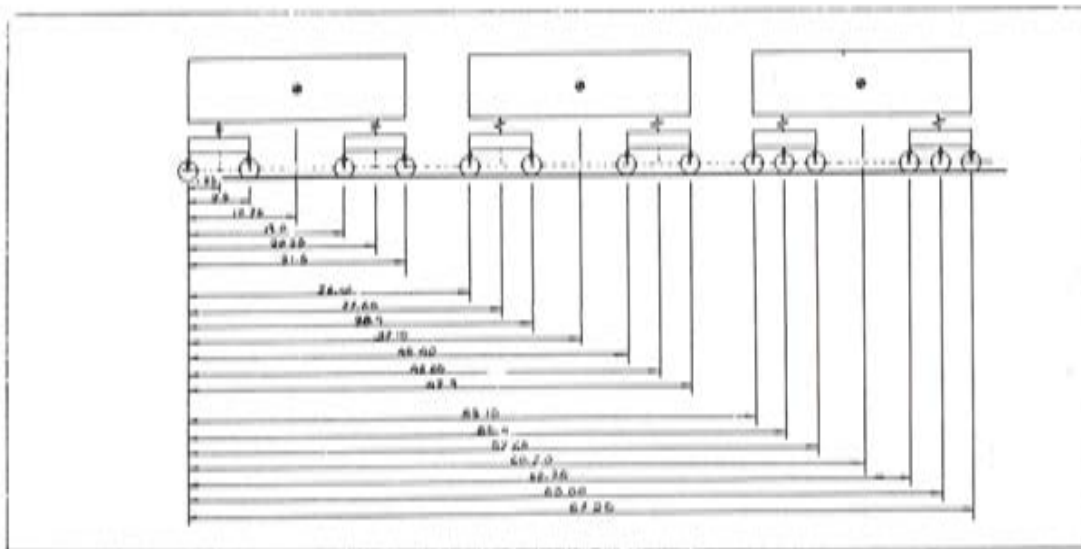


Fig. 1.



Para el balasto, se siguió un proceso similar en la determinación de características, partiendo como dato base de las medidas de rigidez estática del conjunto vía-balasto sobre apoyo rígido.

La vía es del tipo UIC. 60, de características bien conocidas.

Por último, en lo que a la estructura se refiere, los propios promotores aconsejaron la consideración del conjunto pilas-terreno como de rigidez infinita.

A la vista de ello, parecía aconsejable desprestigiar también la influencia de los neoprenos extremos. Ello permitía la confección de un programa que considerase un número de grados de libertad francamente reducido, ya que no sólo se eliminan los asociados a las pilas sino también la translación y giro de cada viga, así como las deformadas de la vía a ellos debidos.

El tren responde al esquema indicado en la figura 2.

Está constituido por la locomotora y dos coches.

En el apéndice se da un listado de las principales características del problema.

## RESULTADOS

Se muestran a continuación, en forma de gráficos, algunos de los resultados obtenidos.

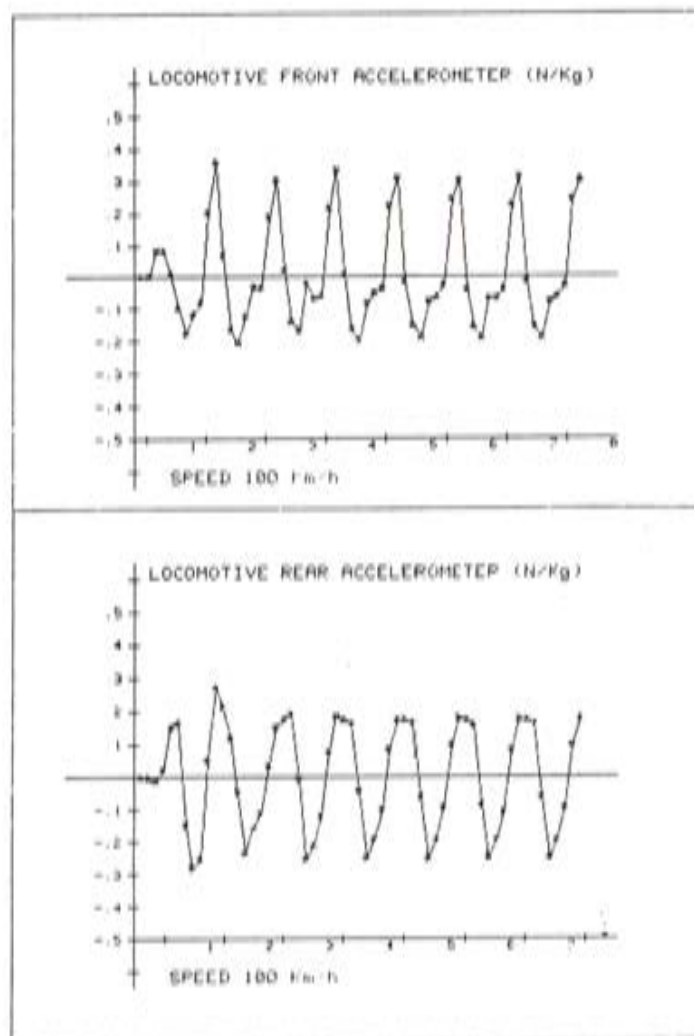


Fig. 3.

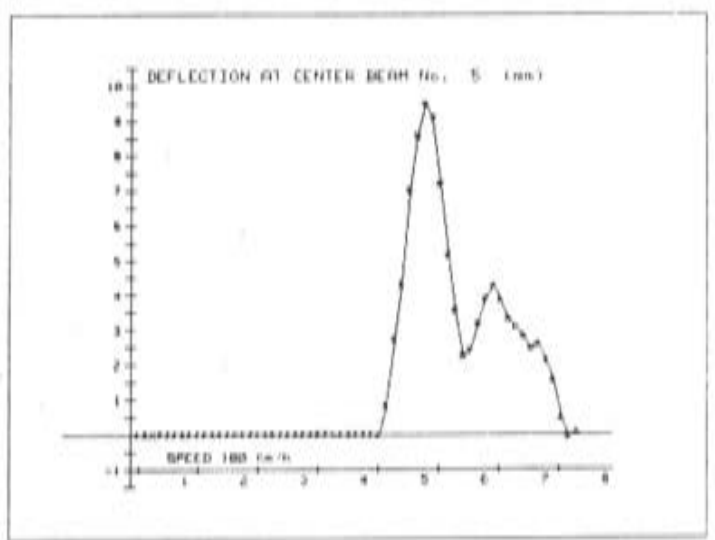
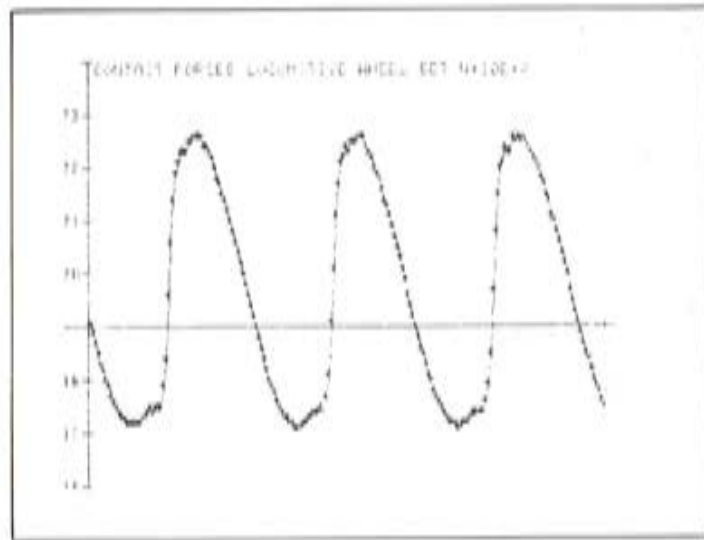
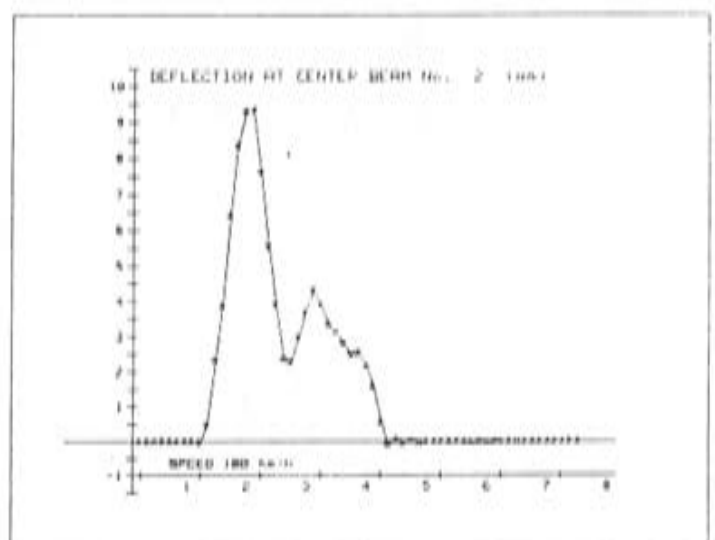
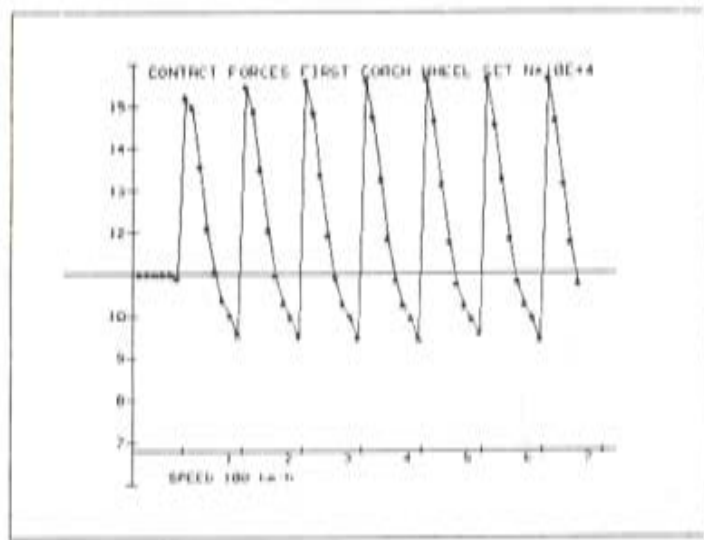
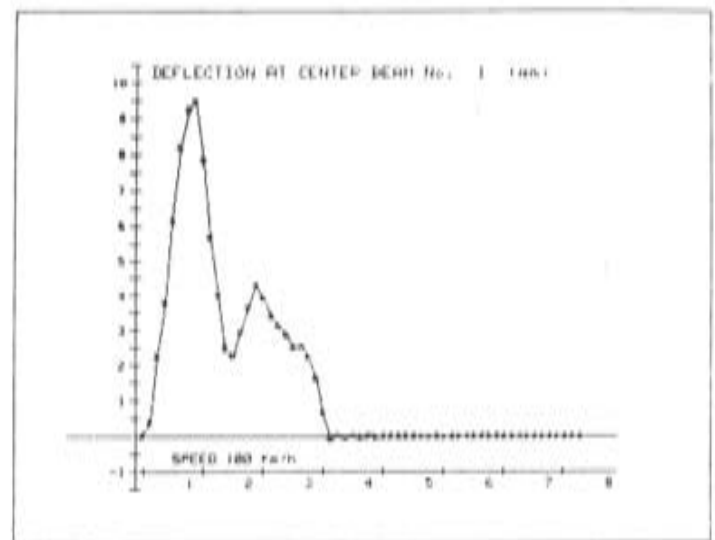
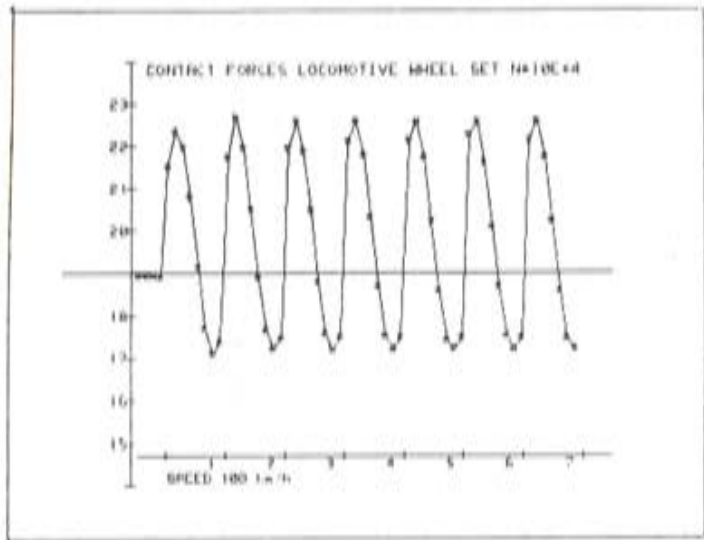


Fig. 4.

Fig. 5.

Como se observará, no se ha cubierto toda la longitud del puente (10 vigas). Ello se debe a que, dada la clara periodicidad de la respuesta, la reducción de la longitud permite, para el mismo volumen de datos una mayor densidad de puntos.

La figura 3 muestra las aceleraciones en la locomotora para puntos situados justo encima del centro de gravedad del primer y último bogie.

En la figura 4 se observan las fuerzas de contacto entre las ruedas y la vía para el último eje de la locomotora y el primero del primer coche.

La última gráfica es una ampliación obtenida aumentando el número de puntos.

En la figura 5 se observa la variación de la flecha en el centro de algunas de las vigas conforme avanza el tren. Es claramente visible el paso de las tres unidades (en los máximos de las curvas).

Por último la figura 6 muestra la variación del momento flector en un punto de la vía situado justo encima del inicio de la tercera viga.

Se observa claramente la superposición de los dos efectos; por un lado la deformación inducida por la deflexión de las vigas anterior y posterior, y por el otro, y con signo contrario, la inducida por el paso de cada una de las ruedas.

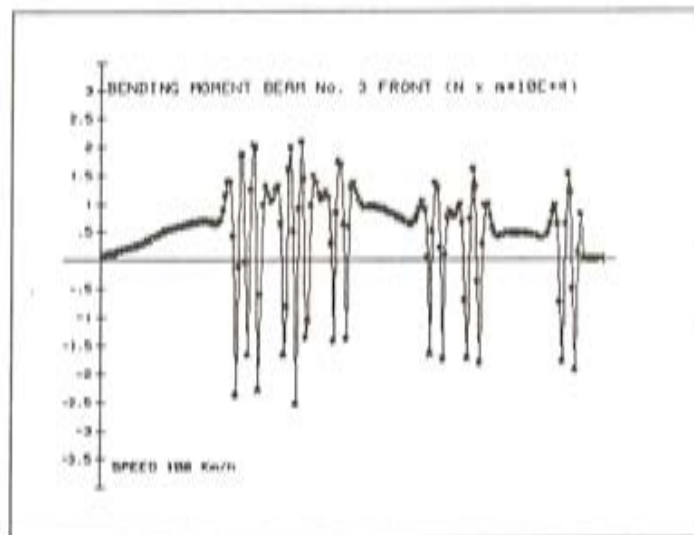


Fig. 6.

## BIBLIOGRAFIA

- Anónimo, Revista de obras públicas N. 2. (1853).
- Alarcón, E. "Efectos Dinámicos en los Puentes". Tesis Doctoral. E.T.S.I. Caminos. (U.P.M.). (1970).
- Alvarez, R. "Interacción Dinámica Vehículo-Vía-Estructura en Puentes de ferrocarril". Tesis doctoral. E.T.S.I.I. (U.P.M.) (1984).
- Argyris, J.H., Dunne, P.C. and Angelopoulos T. "Dynamic Response by Large Step Integration". Earthq. Engng. Struct. Dyn. Vol. 1, pp. 283-291 (1973).
- Bathe, K. J. and Wilson, E.L. "Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods". Earthq. Engng Struct. Dyn. Vol. 1, pp. 283-291 (1973).

- Biggs, Suer and Low. "The Vibration of Simple Span Highway Bridges. "Proc. A.S.C.E. Structural Division. (March 1957).
- Bleich. "Theorie und Berechnung der Eisernen Brucken". Springer (1924).
- Chiu, W.S., Smith, R.G. and Wormley, D.W. "Influence of Vehicle and Distributed Guideway Parameters on High Speed Vehicle-Guideway Dynamic Interactions". ASME. J. of Dynam. Syst. Meas. and Control. March. pp. 25-34 (1971).
- Department of Transport "Proceeding of the Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges". TRRL. Supplementary Report SR 275 Crowthorne. England (1977).
- Fleming and Romualdi. "Dynamic Response of Highway Bridges". Proc. ASCE. J. Structural Division (Oct. 1961).
- Fryba, L. "Vibrations of Solids and Structures under Moving Loads". Noordhoff Int. (1972).
- Hunley, J.B. "Impact in Steel Railway Bridges of Simple Span". American Railway engineering Association (1935).
- Inglis, C.E. "A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges". Cambridge Univ. Press. (1934).
- Kortum, W. and Richter, R. "Simulation of Multibody Vehicles Moving over Elastic Guideways". Vehicle System Dynamics Vol. 6, pp. 21-35 (1977).
- Kortum, W. and Wormley, D.N. "Dynamic Interactions Between Travelling Vehicles and Guideway Systems". Vehicle System Dynamics Vol. 10, pp. 285-317 (1981).
- Machida, F. and Matsuura. "Dynamic Response of Concrete Railway Bridges". IABSE Periódica (2/1983).
- Ministry of Transport. "Test on Railway bridges in Respects of Impact Effect". Advisory Committee for the revision of the board of trade requirements 1914 in regard to the opening of railways. H.M. Stationery Office, London (1921).
- O.R.E.-U.I.C. "Fleche admissible des ponts". Question D-160. Rapport N. 1 (1983).
- O.R.E.-U.I.C. "Fleche admissible des ponts". Question D-160, Rapport N. 2, Enero: "Analyse des Programmes de Calcul Existents". (1984).
- Tilly, G.P., Cullington, D.W., Eyre, R. "Dynamic behavior of footbridges". IABSE Periodica, Vol. 2. (1984).
- Alarcón, E., Alvarez, R., Doblard, M., Molina, J. "Interacción dinámica Vehículo-Vía-Estructura-Cimiento en Puentes de Ferrocarril". Anales de Ingeniería Mecánica, Año 1/Número 1/Diciembre 1983. pp, 451-460.

# APENDICE

\*\*\*\*\*  
PROGRAM BRIDGE FOR THE DYNAMIC STUDY OF VEHICLES PASSING ON BRIDGES  
\*\*\*\*\*

```

NUMBER OF CARS..... 3
NUMBER OF DFMS..... 7
NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM... 74
NUMBER OF TIME INCREMENT..... 4000
VELOCITY OF THE VEHICLE... .3611+02
TIME INCREMENT..... .2769-02
LENGTH OF THE LEFT END... .6703+02
TOTAL LENGTH..... .4000+03
GRAVITY ACCELERATION..... .9806+01
NUMBER OF SUBDIVISION INTERVALS. 10
NUMBER OF ITERATIONS..... 50
NUMBER OF ITERATIONS BETWEEN
IMPRESSIONS..... 1
    
```

THE BALAST HAS UNIFORM PROPERTIES ALONG THE X AXIS

THERE IS NO TRACK IRREGULARITIES

### SPRUNG MASS PROPERTIES INSIDE EACH CAR

\*\*\*\*\*

CAR NUMBER= 1

MASS NUMBER	MASS VALUE	ROTATIONAL INERTIA
1	.547000+05	.067200+06
2	.216000+05	.730400+05
3	.216000+05	.730400+05

MASS NUMBER	X COOR	Y COOR	DISP	ROTATION	D-VEL	R-VEL	D-ACC	R-ACC	D-JERK	R-JERK
1	.60200+02	.23050+01	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.65000+02	.10700+01	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000

CAR NUMBER= 2

MASS NUMBER	MASS VALUE	ROTATIONAL INERTIA
1	.340000+05	.106000+07
2	.219000+04	.157000+04
3	.219000+04	.157000+04

MASS NUMBER	X COOR	Y COOR	DISP	ROTATION	D-VEL	R-VEL	D-ACC	R-ACC	D-JERK	R-JERK
1	.37150+02	.10000+01	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.46650+02	.07000+00	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
3	.20900+02	.17000+00	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000

CAR NUMBER= 3

MASS NUMBER	MASS VALUE	ROTATIONAL INERTIA
1	.490000+05	.260000+07
2	.219000+04	.157000+04
3	.219000+04	.157000+04

MASS NUMBER	X COOR	Y COOR	DISP	ROTATION	D-VEL	R-VEL	D-ACC	R-ACC	D-JERK	R-JERK
1	.16750+02	.10000+01	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.20250+02	.57000+00	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
3	.12500+01	.57000+00	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000

UNSPRUNG MASS PROPERTIES INSIDE EACH CAR  
\*\*\*\*\*

CAR NUMBER= 4

MASS NUMBER	MASS VALUE	N-STOP
1	.302200+04	1.
2	.302200+04	2.
3	.302200+04	3.
4	.302200+04	4.
5	.302200+04	5.
6	.302200+04	6.

MASS NUMBER	X-COOR	DISPLACEMENT	VELOCITY	ACCELERATION	JERK
1	.67250+02	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.65000+02	.00000	.00000	.00000	.00000
3	.62750+02	.00000	.00000	.00000	.00000
4	.57650+02	.00000	.00000	.00000	.00000
5	.55400+02	.00000	.00000	.00000	.00000
6	.53150+02	.00000	.00000	.00000	.00000

CAR NUMBER= 2

MASS NUMBER	MASS VALUE	N-STOP
1	.160000+04	1.
2	.160000+04	2.
3	.160000+04	3.
4	.160000+04	4.

MASS NUMBER	X-COOR	DISPLACEMENT	VELOCITY	ACCELERATION	JERK
1	.47900+02	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.45400+02	.00000	.00000	.00000	.00000
3	.20900+02	.00000	.00000	.00000	.00000
4	.26400+02	.00000	.00000	.00000	.00000

CAR NUMBER= 3

1	.160000+04	1.
2	.160000+04	2.
3	.160000+04	3.
4	.160000+04	4.

MASS NUMBER	X-COOR	DISPLACEMENT	VELOCITY	ACCELERATION	JERK
1	.21500+02	.00000	.00000	.00000	.00000
2	.19000+02	.00000	.00000	.00000	.00000
3	.25000+01	.00000	.00000	.00000	.00000
4	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000

LINEAR SPRING PROPERTIES INSIDE EACH CAR  
 =====

CAR NUMBER= 1

N-SPR	M-I TYPE	M-I NUM	M-J TYPE	M-J NUM	M-I DIST	M-J DIST	M-I TCOUPL	M-J TCOUPL	M-I RCOUPL	M-J RCOUPL
1	1.	1.	1.	2.	.4000+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
2	1.	1.	1.	3.	-.4000+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
3	1.	2.	2.	1.	.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
4	1.	2.	2.	2.	.0000	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
5	1.	2.	2.	3.	-.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
6	1.	3.	2.	4.	.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
7	1.	3.	2.	5.	.0000	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
8	1.	3.	2.	6.	-.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01

N-SPR	IRADIATIONAL STIFFNESS	ROTATIONAL STIFFNESS
1	.3040+07	.0000
2	.3040+07	.0000
3	.2400+07	.0000
4	.2400+07	.0000
5	.2400+07	.0000
7	.2400+07	.0000
8	.2400+07	.0000

4	1.	2.	2.	2.	.0000	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
5	1.	2.	2.	3.	-.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
6	1.	3.	2.	4.	.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
7	1.	3.	2.	5.	.0000	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
8	1.	3.	2.	6.	-.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01

N-DAM	TRANSLATIONAL DAMPING C	ROTATIONAL DAMPING C
1	.0000+05	.0000
2	.0000+05	.0000
3	.4000+05	.0000
4	.4000+05	.0000
5	.4000+05	.0000
6	.4000+05	.0000
7	.4000+05	.0000
8	.4000+05	.0000

CAR NUMBER= 2

N-DAM	M-I TYPE	M-I NUM	M-J TYPE	M-J NUM	M-I DIST	M-J DIST	M-I TCOUPL	M-J TCOUPL	M-I RCOUPL	M-J RCOUPL
1	1.	1.	1.	2.	.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
2	1.	1.	1.	3.	-.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
3	1.	2.	2.	1.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
4	1.	2.	2.	2.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
5	1.	3.	2.	3.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
6	1.	3.	2.	4.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01

N-DAM	TRANSLATIONAL DAMPING C	ROTATIONAL DAMPING C
1	.7000+05	.0000
2	.7000+05	.0000
3	.4000+05	.0000
4	.4000+05	.0000
5	.4000+05	.0000
6	.4000+05	.0000

N-DAM	M-I TYPE	M-I NUM	M-J TYPE	M-J NUM	M-I DIST	M-J DIST	M-I TCOUPL	M-J TCOUPL	M-I RCOUPL	M-J RCOUPL
1	1.	1.	1.	2.	.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
2	1.	1.	1.	3.	-.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
3	1.	2.	2.	1.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
4	1.	2.	2.	2.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
5	1.	3.	2.	3.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
6	1.	3.	2.	4.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01

N-DAM	TRANSLATIONAL DAMPING C	ROTATIONAL DAMPING C
1	.7000+05	.0000
2	.7000+05	.0000
3	.4000+05	.0000
4	.4000+05	.0000
5	.4000+05	.0000
6	.4000+05	.0000

CAR NUMBER= 2

N-SPR	M-I	TYPE	M-I NUM	M-J	TYPE	M-J NUM	M-I DIST	M-J DIST	M-I TCOUPL	M-J TCOUPL	M-I RCOUPL	M-J RCOUPL
1	1.	1.	1.	1.	2.	1.	.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
2	1.	1.	1.	1.	3.	1.	-.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
3	1.	2.	2.	1.	1.	1.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
4	1.	2.	2.	2.	2.	1.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
5	1.	3.	2.	3.	1.	1.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
6	1.	3.	2.	4.	1.	1.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01

N-SPR	TRASLATIONAL STIFFNESS	ROTATIONAL STIFFNESS
1	.1200+07	.0000
2	.1200+07	.0000
3	.1000+07	.0000
4	.1000+07	.0000
5	.1000+07	.0000
6	.1000+07	.0000

CAR NUMBER= 3

N-SPR	M-I	TYPE	M-I NUM	M-J	TYPE	M-J NUM	M-I DIST	M-J DIST	M-I TCOUPL	M-J TCOUPL	M-I RCOUPL	M-J RCOUPL
1	1.	1.	1.	1.	2.	1.	.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
2	1.	1.	1.	1.	3.	1.	-.9500+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
3	1.	2.	2.	1.	1.	1.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
4	1.	2.	2.	2.	2.	1.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
5	1.	3.	2.	3.	1.	1.	.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
6	1.	3.	2.	4.	1.	1.	-.1250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01

N-SPR	TRASLATIONAL STIFFNESS	ROTATIONAL STIFFNESS
1	.1200+07	.0000
2	.1200+07	.0000
3	.1000+07	.0000
4	.1000+07	.0000
5	.1000+07	.0000
6	.1000+07	.0000

LINEAR DAMPING PROPERTIES INSIDE EACH CAR  
 =====

CAR NUMBER= 4

N-SPR	M-I	TYPE	M-I NUM	M-J	TYPE	M-J NUM	M-I DIST	M-J DIST	M-I TCOUPL	M-J TCOUPL	M-I RCOUPL	M-J RCOUPL
1	1.	1.	1.	1.	2.	1.	.4000+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
2	1.	1.	1.	1.	3.	1.	-.4000+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01
3	1.	2.	2.	1.	1.	1.	.2250+01	.0000	-.1000+01	.1000+01	-.1000+01	.1000+01

## Feria Internacional de Bilbao

La Feria Internacional de Muestras de Bilbao organiza del 1 al 5 de octubre los certámenes: TRASMET<sup>85</sup>, Feria Monográfica de los sectores de Fundición, Forja, Laminación, Tratamiento de Superficies y Soldadura; SIDEROMETALURGICA, Feria Internacional Monográfica de la Industria Siderometalúrgica, y SUBCONTRATACION.

Para una más amplia información sobre estos certámenes, tanto en lo que se refiere a servicios a los asistentes, como a los expositores, organización de Jornadas Técnicas, Conferencias, etc. pueden dirigirse a las Oficinas de la Feria Internacional de Bilbao o a las Delegaciones al efecto existentes:

Feria Internacional de Bilbao.

Apdo. 468,

Telex 32617 - FIMB-E

48013, Bilbao,

Telf.: (94) 441 54 00.

Delegación Zona Cataluña:

D. Alfredo Vila

Avda. de las Cortes Catalanas, 753 - 2<sup>o</sup> - 1<sup>a</sup>

08013 Barcelona

Telf.: (93) 231 45 15

Delegación Zona Centro:

D. Alberto Insula

Ayala, 128 - 6<sup>o</sup>

28006 Madrid

Telf.: (91) 276 84 01.

La reserva de hoteles se puede hacer a través de las oficinas de la Agencia Oficial de la Feria -Viajes Ecuador- o llamando directamente al teléfono (94) 441 24 42 (España). Desde el extranjero 34-4- 441- 24 42.

## Reunión Internacional de la DIRR

El Sistema de Documentación Internacional de Investigación sobre Carreteras, DIC (DIRR) de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) celebrará una reunión sobre "Necesidades de Información de los Usuarios de la "DIRR en Bergisch Gladbach (Alemania Federal), del 8 al 10 de Octubre de 1985.

A esta Reunión asistirán representantes de 38 Instituciones de 20 países que participan activamente en el Sistema, así como las organizaciones internacionales asociadas. Los usuarios actuales del mundo entero quedan invitados para informar de sus experiencias y de sus necesidades de información. Se prevén 15 comunicaciones presentadas por especialistas.

Para una mayor información dirigirse a la siguiente dirección:

O E C D

Road Transport Research Programme

2, rue André-Pascal

75775 PARIS CEDEX 16 (Francia)

## **Análisis dinámico frente a acciones sísmicas del futuro puente atirantado sobre el río Barxell en Alcoy (Alicante)**

**J. Francisco Millanes Mato**  
Dr. Ingeniero de Caminos

### **1. RESUMEN**

Se presenta un estudio del comportamiento dinámico frente a acciones sísmicas de un puente atirantado, realizado con motivo del proyecto del futuro Puente sobre el río Barxell. Su ubicación en Alcoy (zona sísmica de grado VII, según la PDS-74), así como el informe geotécnico encargado al respecto, que aconsejaba el control de la seguridad de la obra frente a posibles sismos de grado VIII, han exigido un exhaustivo análisis de la respuesta de la misma frente a acciones sísmicas.

Si bien el trabajo se ciñe al análisis de un puente atirantado concreto, sin tener por ello pretensiones de generalidad, existen a nuestro juicio razones que justifican sobradamente su interés:

- a) Se trata del primer caso en nuestro país de un puente atirantado ubicado en zona sísmica de grado apreciable.
- b) Existe una gran escasez de información precisa sobre el tema en libros y artículos de revista especializados, sea en puentes atirantados, sea en análisis dinámico de estructuras.
- c) La totalidad de las Normas Sísmicas consultadas, incluida la española, se limitan a establecer criterios precisos para el diseño y análisis de estructuras de edificación. En algunas, como la antigua PG, S-1 (68), se aborda sucintamente el caso de los puentes, pero sin tratar específicamente el de los atirantados, cuya particular tipología y elevada esbeltez, no permiten la aplicación automática de los criterios establecidos en ellas.
- d) A través del trabajo quedan patentes de forma explícita los principales problemas que se le plantean al proyectista a la hora de realizar el control sísmico de un puente atirantado. Concretamente, como consecuencia de la ya comentada no aplicabilidad de forma mecánica de los criterios expuestos en las Normas Sísmicas y, lo que constituye la otra cara del problema, los problemas que surgen en el momento de utilizar los espectros de diseño de las Normas junto a los métodos generales de cálculo dinámico de estructuras complejas.

(\*) Proyecto de los Ingenieros de Caminos: D.J.A. Fernández Ordoñez, D. J. Martínez Calzón, D.M. Burón Maestro y D.A. Ortiz Bonet.

- e) El comportamiento dinámico de una estructura de este estilo difiere mucho del bien conocido y estudiado para los edificios: ménsula vertical solicitada transversalmente en su base, no siendo posible transponer apriorísticamente muchos de los criterios y controles de diseño a los que estamos generalmente habituados, y surgiendo, por otro lado, nuevos problemas que normalmente no se tienen en cuenta.

El artículo se estructura como sigue:

En el apartado 2 se describe el método de cálculo utilizado. Se trata de un análisis modal espectral, en el que la respuesta final de la estructura se obtiene por combinación de las respuestas elementales de cada uno de sus modos principales de vibración, las cuales a su vez se asimilan a las de un oscilador lineal simple recurriendo a los espectros de respuesta del mismo (desplazamientos, velocidades y aceleraciones). Concretamente, se presenta la aplicación explícita de dicho método —que es el preconizado por la mayoría de las Normas Sísmicas— al caso concreto de puentes atirantados, y se discuten los problemas en la adopción del espectro de diseño a utilizar.

En el apartado 3 se presenta el análisis de la estructura del Puente sobre el río Barxell que consta de los siguientes pasos:

- a) Obtención de los modos propios de vibración.
- b) Adopción de un espectro de diseño.
- c) Evaluación de las fuerzas sísmicas equivalentes.
- d) Obtención de la respuesta sísmica final de la estructura.

Se realiza asimismo la discusión de las respuestas sísmicas de los distintos modos de vibración, que consideramos de gran interés para “visualizar” las diferencias existentes con respecto al caso habitual de la ménsula libre (edificios). En particular sobre la importancia de los modos superiores de vibración, que aquí no pueden ser olvidados ya que frecuentemente son más activos que los primeros.

Se presenta también la confrontación de los valores finales de la respuesta sísmica con los de las demás hipótesis de cálculo. Consideramos que, si bien no puede generalizarse a otros puentes en otras zonas sísmicas, sí puede servir para “acotar” la importancia relativa de los esfuerzos sísmicos frente a los demás del proyecto, para resaltar aquellos aspectos en los que, por ser condicionantes del diseño, deben tenerse en cuenta desde las primeras fases del proyecto y predimensionamiento y no dejarse para una verificación final del mismo, y para ilustrar sobre el margen de seguridad que el proyecto dispone frente a las simplificaciones o hipótesis adoptadas en el control sísmico del mismo, y que pueden no justificar en muchos casos excesivas sutilezas en el análisis sísmico cuando existen otras hipótesis de carga claramente dimensionantes.

En el apartado 4 se comenta sucintamente la obtención de los modos y períodos propios de torsión de la estructura, necesarios para el estudio de la estabilidad aerodinámica de la misma, así como para el control de los posibles acoplamientos flexión transversal-torsión como consecuencia de la acción sísmica.

Finalmente, en el apartado 5, se resumen las principales conclusiones extraídas de nuestro estudio.

## 2. DESCRIPCION DEL METODO DE ANALISIS SISMICO REALIZADO

### 2.1. Aspectos previos

Supondremos la estructura del puente discretizada en una serie de barras y nudos tal y

como se indica en el apartado 3.2. Cada uno de los nudos tiene en principio seis grados de libertad (tres translaciones según los ejes principales y tres rotaciones). Desde el punto de vista de un análisis dinámico podemos perfectamente prescindir de las rotaciones y considerar únicamente como grados de libertad dinámica las tres translaciones, ya que los movimientos correspondientes a las rotaciones del tablero en su plano ( $\theta_z$ ) y en el vertical ( $\theta_y$ ) no ponen en juego fuerzas de inercia apreciables en relación a las generadas por los desplazamientos. En cuanto a la rotación  $\theta_x$  (torsión), si suponemos, como luego se indica, que la excitación del terreno se limita a aceleraciones de translación de los apoyos según los tres ejes, su efecto será muy reducido ya que la aparición de excitación dinámica por acoplamiento de los movimientos laterales del tablero con los de torsión como consecuencia de la

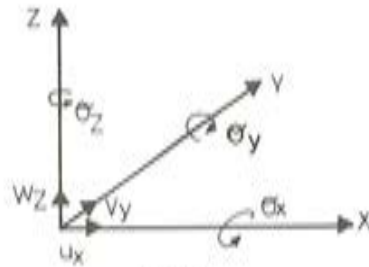


Fig. 1.

excentricidad de los centros de masa y de torsión del mismo, no puede ser importante dada la diferencia de períodos propios de flexión transversal y torsión que se han obtenido ( $T_y = 3,56$  seg. (ap. 3.3);  $T_t = 0,80$  (ap. 4)). Por otra parte, la no vinculación a torsión entre pila y tablero reduce asimismo la importancia de este fenómeno.

En cuanto a la excitación sísmica del terreno, su definición completa consta asimismo de seis componentes independientes por cada zona rígida de apoyo. No obstante y como es usual, dada su poca relevancia y la ausencia de medidas fiables relativas a los movimientos rotatorios del terreno durante los terremotos, podemos limitarnos a estudiar la respuesta de la estructura frente a tres posibles translaciones del terreno.

Queda por establecer cuáles son las direcciones principales de dichas translaciones. Se ha demostrado que una de ellas es prácticamente vertical, siendo en cambio muy difícil establecer con precisión cuáles son las dos direcciones horizontales principales en la zona de ubicación de la obra. Por ello la mayoría de las Normas Sísmicas (la española entre ellas), permiten realizar un doble cálculo de la respuesta de la estructura frente a un movimiento horizontal del terreno en las direcciones del puente y normal al mismo.

Tampoco se considera la posibilidad de diferentes excitaciones en los distintos apoyos del puente ya que la ausencia de datos fiables haría ilusoria cualquier aproximación. No obstante, la relativa desvinculación existente entre pila y tablero así como la relativa distancia entre apoyos fijos transversales de éste, permite asegurar la ausencia de problemas de fuertes distorsiones en la estructura.

Queda pues reducido el problema al estudio de la respuesta del puente frente a tres posibles aceleraciones del terreno: dos horizontales y una vertical. A diferencia de las estructuras tradicionales, en nuestro caso la vinculación entre pila y tablero a través de los tirantes establece un fuerte acoplamiento entre los movimientos longitudinales de uno de ellos (pila principalmente) y los verticales del otro (tablero), lo que impide un análisis desacoplado frente a las excitaciones y movimientos longitudinales y verticales. Así pues, el análisis sísmico se descompone en los tres siguientes:

- I. Análisis transversal de la estructura constituida por pila y tablero (los tirantes no

confieren rigidez apreciable a la misma), trabajando como emparrillado, y sometida a una excitación sísmica transversal. La no vinculación de pila y tablero salvo a efectos de desplazamientos transversales (sin contar la libre rotación entre ambos), así como lo ya comentado anteriormente sobre el bajo nivel de acoplamiento de la flexión transversal y la torsión del tablero, permiten reducir a 1 el número de grados de libertad dinámica por nudo ( $V_y$ ).

- II. Análisis plano tipo pórtico, del conjunto de pila, tablero y cables (en realidad sólo se estudia la mitad de la estructura: semipila, semitablero y 1 plano de cables), sometida a una excitación sísmica longitudinal en apoyos. En este caso será preciso, como ya se ha explicado, el considerar dos grados de libertad por nudo ( $U_x, W_z$ ).
- III. Idéntico al anterior pero con una excitación sísmica vertical en apoyos.

## 2.2. Ecuaciones dinámicas de la excitación sísmica de un sistema de múltiples grados de libertad dinámica. Análisis modal.

Las ecuaciones del movimiento que describen la vibración del modelo se obtienen planteando matricialmente el equilibrio dinámico en cada nudo y para cada grado de libertad dinámica según el principio de d'Alembert y en la hipótesis de amortiguamiento viscoso (Voigt). El proceso descrito a continuación puede seguirse con detalle en las referencias [ 5] y [6].

$$[M] \{ \ddot{v}_t \} + [C] \{ \dot{v} \} + [K] \{ v \} = \{ \phi \} \quad (1)$$

siendo:

[M] = *Matriz de Masas de la estructura*. Matriz diagonal cuyos términos no nulos son las masas asociadas en cada nudo a cada grado de libertad dinámica:  $m_{in} = m_{jn} = m_n$  (masa concentrada en el nudo).

[C] = *Matriz de Amortiguamiento de la estructura*, de imposible definición explícita, y que por analogía al oscilador simple suele suponerse de la forma:  $[C] = 2 [\beta] [M]$ , siendo  $[\beta]$  los factores de amortiguamiento de cada nudo.

[K] = *Matriz de Rigidez dinámica o lateral de la estructura*, obtenida de la matriz de rigidez estática por condensación de los grados de libertad no dinámicos de la misma.

{v} = Vector de *desplazamientos relativos* (respecto a unos ejes supuestos móviles con el terreno) de los distintos grados de libertad dinámica, que en nuestro caso son:

$$\left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ \text{"} \\ \text{"} \\ \text{"} \\ \text{"} \\ \text{"} \\ V_n \end{array} \right\} \text{ para el análisis I y } \left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ W_1 \\ \text{"} \\ \text{"} \\ \text{"} \\ \text{"} \\ U_n \\ W_n \end{array} \right\} \text{ para los análisis II y III}$$

n = número del nudo.

{ $\ddot{v}_t$ } = Vector de las *aceleraciones absolutas* de los distintos grados de libertad dinámica, suma de las relativas respecto a la base firme, más las de excitación del terreno:

$$\{ \ddot{v}_t \} = \{ \ddot{v} \} + \{ r \} \ddot{v}_g,$$

siendo  $\ddot{v}_g$  la aceleración del terreno y  $\{r\}$  un vector de influencia, función del tipo de excitación del terreno:

$$\{r\} = \{1\} \text{ en el análisis I}$$

$$\{r\}^I = \{1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0\} \text{ en el análisis II}$$

$$\{r\}^I = \{0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1\} \text{ en el análisis III}$$

La ecuación del movimiento puede expresarse por tanto de la forma:

$$[M] \{\ddot{v}\} + [C] \{\dot{v}\} + [K] \{v\} = - [M] \{r\} \ddot{v}_g(t) \quad (2)$$

donde todos los términos del primer miembro son movimientos relativos. Sistema de 'n' ecuaciones diferenciales, siendo 'n' el número de grados de libertad dinámica de la estructura.

El análisis modal realiza una transformación de coordenadas en la que las coordenadas geométricas  $\{v\}$  se ponen en función de un sistema de 'm' coordenadas generalizadas  $\{y\}$ , que son precisamente las amplitudes de 'm' formas o modos de deformación que coinciden con los modos o vectores de vibración propios de la estructura, correspondientes a los 'm' períodos y frecuencias propias o fundamentales de la misma, las cuales se obtienen como solución del problema de la oscilación libre y no amortiguada:

$$[M] \{\ddot{v}\} + [K] \{v\} = 0 \rightarrow | [K] - \omega^2 [M] | = 0 \text{ (ec. características)} \quad (3)$$

Si  $\{\omega\}$  es el vector de frecuencias propias  $\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \dots \\ \omega_m \end{Bmatrix}$  y  $[\phi]$  la matriz modal o de vectores

propios  $[\phi] = [\phi_1 \dots \phi_m]$ , obtenidas mediante el STRUDL DINAMICO, siendo:

$$\{\phi_j\} = \begin{Bmatrix} \phi_{vj} \\ \dots \\ \phi_{vnj} \end{Bmatrix} \text{ en el análisis I y } \{\phi_j\} = \begin{Bmatrix} \phi_{uj} \\ \phi_{wj} \\ \dots \\ \phi_{unj} \\ \phi_{wnj} \end{Bmatrix} \text{ en los análisis II y III.}$$

dicha transformación toma la forma:  $\{v\} = [\phi] \{y\}$ , siendo  $\{y\}$  el vector de las coordenadas generalizadas correspondientes a las amplitudes de los distintos modos propios de vibración.

Puede demostrarse que las formas naturales de vibración constituyen un conjunto ortogonal completo respecto a las matrices de masa  $[M]$  y rigidez  $[K]$ , así como de amortiguamiento, si este se supone de la forma  $[C] = 2 [\beta] [M]$ , es decir, que las matrices  $[\phi]^T [M] [\phi]$ ,  $[\phi]^T [K] [\phi]$  y  $[\phi]^T [C] [\phi]$  son diagonales.

En virtud de estas propiedades, la aplicación de la transformación antes definida sobre el sistema de ecuaciones del movimiento permite, después de ciertas transformaciones (ref. 5 y 6), ponerlo de la forma:

$$[. // ] \{\ddot{y}\} + [ \backslash ] \{\dot{y}\} + [ . \backslash ] \{y\} = - [\phi]^T [M] \{r\} \ddot{v}_g = [ \backslash ] \ddot{v}_g \quad (4)$$

siendo:

$$\{v\} = [\phi] \{y\} \quad (5.1)$$

$$[M] = \text{Matriz generalizada de las masas} = [\phi]^T [M] [\phi] \quad (5.2)$$

$$[C] = \text{Matriz generalizada amortiguamiento} = [\phi]^T [C] [\phi] = 2[\beta][M] \quad (5.3)$$

$$[K] = \text{Matriz generalizada de rigidez} = [\phi]^T [K] [\phi], \text{ todas ellas diagonales.} \quad (5.4)$$

$$[L] = [\phi]^T [M] \{r\}, \text{ representa el factor o grado de excitación o de la respuesta sísmica de cada modo de vibración al movimiento del terreno.}$$

Por tanto, el sistema anterior de ecuaciones diferenciales (en  $\{v\}$ ), se ha *desacoplado*, es decir convertido en un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales independientes correspondientes a cada modo propio de vibración:

$$\begin{aligned} M_m \ddot{y}_m(t) + C_m \dot{y}_m(t) + K_m y_m(t) &= P_m(t) = \\ &= -\{\phi_m\}^T [M] \{r\} \ddot{v}_g(t) = L_m \ddot{v}_g(t) \end{aligned} \quad (6)$$

ecuación análoga a la del oscilador simple de un solo grado de libertad, sometido a una oscilación forzada  $p_m(t) = L_m \ddot{v}_g$ :

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = p(t) = -m \ddot{v}_g(t) \quad (7)$$

Así pues, el análisis modelo permite estudiar la respuesta dinámica de estructuras complejas, en rango elástico, como superposición de las respuestas de cada uno de sus modos propios de vibración, las cuales a su vez son análogas a las de un oscilador lineal simple de un solo grado de libertad, cuyas características de masa, amortiguamiento y rigidez sean  $M_m$ ,  $C_m$ ,  $K_m$ , bajo la acción de una oscilación forzada de valor  $(L_m \ddot{v}_g)$ .

### 2.3. Análisis espectral

Se ha remitido pues el análisis de la respuesta total dinámica de la estructura al de 'm' análisis independientes para cada modo propio de vibración, equivalentes al de un oscilador simple.

La solución a la ecuación diferencial (7) para el oscilador lineal simple, es la conocida integral de convolución o integral de Duhamel:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \times e^{-\nu \omega(t-\tau)} \sin \omega_a(t-\tau) d\tau = \frac{I_d}{\omega_a} \text{ (desplazamientos relativos)} \quad (8.1)$$

$$\omega_a = \text{Frecuencia movimiento amortiguado} = \omega \sqrt{1-\nu^2} \simeq \omega$$

$$\nu = \text{Coef. amortiguamiento crítico} = \frac{c}{m\omega} = \frac{2\beta}{\omega}$$

y derivando:

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) e^{-\nu \omega (t-\tau)} \cos \omega_n (t-\tau) d\tau - \nu \omega_n x(t) \text{ (velocidades relativas)} \quad (8-2)$$

$$\ddot{x}(t) + \ddot{v}_g(t) = \omega_n^2 I_d - 2\nu \omega_n \dot{x}(t) \text{ (aceleraciones absolutas)} \quad (8-3)$$

Las ecuaciones (8) permiten, supuesto conocido el acelerograma  $\ddot{v}_g(t)$  del terremoto, el obtener la historia de la respuesta dinámica en el tiempo de la estructura, por integración de las mismas paso a paso o por procedimientos de cálculo numérico. No obstante, la incertidumbre sobre la forma real de los acelerogramas  $\ddot{v}_g(t)$  ocurridos en el pasado y, especialmente, previsibles en el futuro, no justifica a nivel de diseño el efectuar dicho análisis. Por otro lado, generalmente no interesa conocer la evolución de los esfuerzos en el tiempo, sino sólo sus valores p $\acute{e}$ simos.

En la pr $\acute{a}$ ctica, y as $\acute{i}$  es recogido en las Normas S $\acute{m}$ sicas de la mayor $\acute{a}$  de los pa $\acute{i}$ ses, basta con limitarse a los valores m $\acute{a}$ ximos de las variables  $|x(t)|$ ,  $|\dot{x}(t)|$  y  $|\ddot{x}(t) + \ddot{v}_g(t)|$  de las ecuaciones (8), llamados espectros s $\acute{m}$ sicos de respuesta de desplazamiento ( $S_d$ ), velocidades ( $S_v$ ) y aceleraciones absolutas ( $S_a$ ).

Dichos valores son obtenidos de forma simplificada suponiendo en las ecuaciones (8):

$\omega_n \simeq \omega$ ;  $\nu \omega_n x(t) \simeq 0$  y  $\cos \omega_n (t-\tau) \simeq \sin \omega_n (t-\tau)$ , que seg $\acute{u}$ n demuestra Hudson no altera los  $|\dot{x}(t)|$  m $\acute{a}$ ximos dada la aleatoriedad de la variaci $\acute{o}$ n de  $\ddot{v}_g(t)$ .

Con dichas simplificaciones, los espectros (seg $\acute{u}$ n algunos autores pseudoespectros) de respuesta se relacionan seg $\acute{u}$ n:

$$S_a = S_v \cdot \omega = S_d \cdot \omega^2 \quad (9)$$

Dichos espectros son funci $\acute{o}$ n del acelerograma del terremoto ( $\ddot{v}_g(t)$ ), del per $\acute{i}$ odo propio de oscilaci $\acute{o}$ n ( $\omega$ ) y del grado de amortiguamiento cr $\acute{i$ tico ( $\nu$ ). Para un terremoto dado ( $\ddot{v}_g(t)$ ), se presentan en forma de curvas (v $\acute{e}$ ase fig. 4) funci $\acute{o}$ n de  $\omega$  para diferentes grados

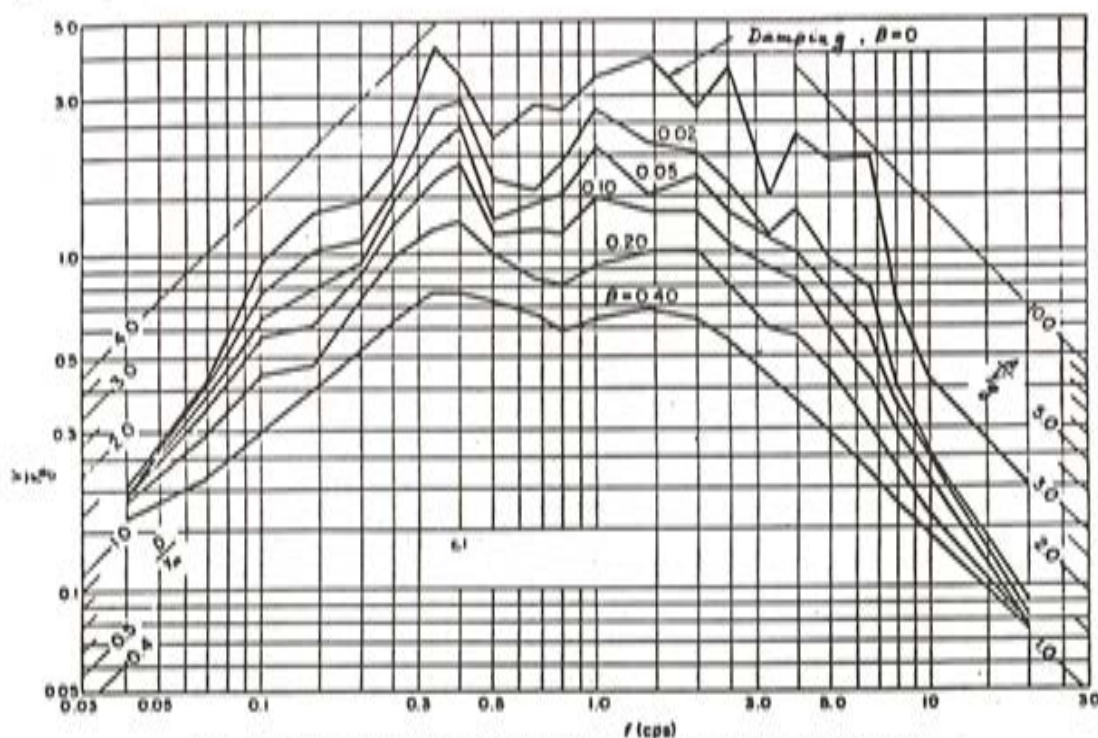


Fig. 4. Espectro no dimensional Terremoto El Centro (1940) (ref. 8).

de amortiguamiento ( $\nu$ ), por lo que permiten obtener la respuesta, frente a dicho terremoto, de cualquier estructura como superposición de las respuestas de sus modos principales de vibración, definidos por sus características dinámicas ( $\omega_m$ ) y de amortiguación ( $\nu_m$ ). La única limitación es la hipótesis de conducta lineal elástica, inherente a la integral de Duhamel.

Aplicando pues el estudio espectral (ecuaciones (8) y (9)) al análisis modal antes definido (ecuaciones (4) a (7)), se obtiene:

$$|Y_m(t)|_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{I}_m}{\mathcal{M}_m} S_d(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t)) \quad (10.1)$$

$$|V_m(t)|_{\text{máx}} = \phi_m \frac{\mathcal{I}_m}{\mathcal{M}_m} S_d(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t)) \quad (10.2)$$

Las fuerzas elásticas producidas por los movimientos sísmicos podrían evaluarse a partir de los desplazamientos máximos de cada nudo de la estructura (dados por la ecuación (10-2)), y de las rigideces de las barras que los unen. Dicha obtención dependen pues de las diferencias (derivadas) de los desplazamientos de cada nudo en los diferentes modos de vibración. Siendo menos aproximado el trabajar con diferencias (derivadas) de desplazamientos que con los desplazamientos mismos, es mejor una formulación alternativa a partir de las fuerzas de inercia:

$|f_m(t)|_{\text{max}} = [M] |\ddot{V}_m(t) + \ddot{v}_g(t)|_{\text{max}} \simeq [M] \omega_m^2 |V_m(t)|_{\text{máx}}$ , aproximación que se obtiene despreciando el término del amortiguamiento en (8-3) y (8-1).

Así pues:

$$|f_m(t)|_{\text{máx}} = [M] \{\phi_m\} \frac{\mathcal{I}_m}{\mathcal{M}_m} \omega_m^2 S_d(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t)) = [M] \{\phi_m\} \frac{\mathcal{I}_m}{\mathcal{M}_m} S_a(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t)) \quad (10-3)$$

La ecuación (10-3) permite obtener las fuerzas estáticas equivalentes a la respuesta dinámica de la estructura para cada modo principal de vibración, en función del espectro de aceleraciones del terremoto considerado y de las matrices  $[M]$ ,  $[\phi]$  y  $[\mathcal{I}]$ .

En nuestro caso, la ecuación (10-3) toma la forma siguiente (véanse ecuaciones (5)):

$$\mathcal{M}_m = \begin{cases} \sum_{i=1, n} m_i \phi_{vim}^2 & \text{en el análisis I} \\ \sum_{i=1, n} m_i (\phi_{uim}^2 + \phi_{wim}^2) & \text{en los análisis II y III} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_m = \begin{cases} \sum_{i=1, n} m_i \phi_{vim} & \text{en el análisis I} \\ \sum_{i=1, n} m_i \phi_{uim} & \text{en el análisis II} \\ \sum_{i=1, n} m_i \phi_{wim} & \text{en el análisis III} \end{cases}$$

Luego:

Análisis I:

$$f_{yim} (\text{máx}) = p_i n_{im}^I \frac{S_a(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t))}{g}; n_{im}^I = \phi_{vim} \frac{\sum_{i=1,n} p_i \phi_{vij}}{\sum_{i=1,n} p_i \phi_{vij}^2} \quad (11-1)$$

Análisis II:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix}_{im} (\text{máx}) &= p_i \begin{Bmatrix} n_{xim}^{II} \\ n_{zim}^{II} \end{Bmatrix} \frac{S_a(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t))}{g}; \\ n_{xim}^{II} &= \phi_{uim} \bar{n}_{im}^{II}; n_{zim}^{II} = \phi_{wim} \bar{n}_{im}^{II} \\ \bar{n}_{im}^{II} &= \frac{\sum_{i=1,n} p_i \phi_{uim}}{\sum_{i=1,n} p_i (\phi_{uim}^2 + \phi_{wim}^2)} \end{aligned} \quad (11-2)$$

Análisis III:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix}_{im} (\text{máx}) &= p_i \begin{Bmatrix} n_{xim}^{III} \\ n_{zim}^{III} \end{Bmatrix} \frac{S_a(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t))}{g}; \\ n_{xim}^{III} &= \phi_{uim} \bar{n}_{im}^{III}; n_{zim}^{III} = \phi_{wim} \bar{n}_{im}^{III} \\ \bar{n}_{im}^{III} &= \frac{\sum_{i=1,n} p_i \phi_{wim}}{\sum_{i=1,n} p_i (\phi_{uim}^2 + \phi_{wim}^2)} \end{aligned} \quad (11-3)$$

Siendo:

$$p_i = m_i \cdot g$$

Los coeficientes ' $\bar{n}$ ' son equivalentes a los coeficientes de distribución de las Normas Sísmicas.

Se constata como en el análisis I, donde sólo se considera un grado de libertad y la aceleración del terreno coincide con la dirección de dicho grado de libertad (vector de influencia  $\{r\} = \{1\}$ ), su expresión coincide exactamente con la de la PDS-74.

A partir de las fuerzas sísmicas aplicadas en cada nudo para cada modo de vibración (ecuación 11) pueden obtenerse por los métodos clásicos de resistencia de materiales los esfuerzos y deformaciones en cualquier punto de la estructura. Los movimientos pueden obtenerse de la misma forma o, mejor aun, a partir de la ecuación (10-2), en función del espectro de desplazamientos máximos.

#### 2.4. Aplicación del principio de superposición de respuestas modales

Si llamamos  $R_{im}$  la respuesta sísmica (esfuerzo, deformación, movimiento) en el punto  $i$  para el modo de vibración  $m$ , obtenidas a partir del espectro de respuesta del terremoto para el período  $\omega_m$  y el factor de amortiguación  $\nu_m$ , la superposición directa de las respuestas de los diferentes modos suministrará el límite máximo de la respuesta sísmica global:

$$R_i \leq \sum_m |R_{im}| \quad (12)$$

Ahora bien, el análisis espectral suministra sólo los valores máximos para cada modo de vibración con independencia del tiempo en el que aparecen, no permitiendo obtener determinísticamente el valor pésimo de las respuestas. En cualquier caso, los máximos de los diferentes modos no se producen simultáneamente por lo que la superposición directa queda excesivamente del lado de la seguridad.

Varios autores han proporcionado expresiones aproximadas mediante un análisis estocástico de la correlación entre las respuestas de los diferentes modos (referencias [1], [2], [3]). Cuando las frecuencias de los diferentes períodos propios están suficientemente separadas entre sí (en la ref. [3] se da como criterio un 10 por 100 de diferencia entre ellas), puede suponerse sin error apreciable el no acoplamiento entre las respuestas, que pueden tratarse como variables aleatorias independientes, estimándose la respuesta total como media cuadrática de las de cada modo:

$$\bar{R}_i = \sqrt{\sum R_{im}^2} \quad (13)$$

Esta aproximación coincide con la recogida por las diferentes Normas Sísmicas, entre ellas la española, y a ella nos atendremos, pues como se observa en el apartado 3.3, las frecuencias de los primeros modos fundamentales de pila y tablero están suficientemente alejadas.

Conviene señalar que la respuesta total debe obtenerse de la expresión (13) a partir de las respuestas elementales de cada modo de vibración. No siendo válido operar a la inversa, es decir aplicar (13) a las fuerzas estáticas equivalentes y luego obtener la respuesta frente al sistema de fuerzas equivalentes, ya que la media cuadrática oculta los signos de las fuerzas.

## 2.5. Consideración de la sollicitación sísmica en tres direcciones

Como ya se ha visto en 2-1, el puente se halla durante un terremoto sometido simultáneamente a una triple aceleración según tres direcciones ortogonales (dos horizontales y una vertical). La respuesta de la estructura frente a ellas se ha obtenido en los análisis I (aceleración transversal), II (aceleración longitudinal) y III (aceleración vertical).

Si bien algunos esfuerzos principales se hallan unívocamente provocados por uno solo de los tres análisis, como es el caso de la flexión transversal de la pila y tablero (análisis I), la especial tipología de este tipo de estructura produce acoplamientos de las flexiones longitudinales de pila y tablero debido a los análisis II y III, situación no contemplada en la Norma Sísmica española, especialmente concebida para edificaciones asimilables a una ménsula vertical sometida a una oscilación forzada horizontal en su base.

En principio puede suponerse que ambos análisis son aleatoriamente independientes y que por tanto sus efectos pésimos no se producen simultáneamente, por lo que las respuestas pésimas pueden estimarse por la expresión:

$$\bar{R}_i = \sqrt{R_{II}^2 + R_{III}^2} \quad (14)$$

análoga a la anteriormente vista (ap. 2.4) para la combinación de respuestas modales.

Otras formulaciones alternativas basadas en consideraciones estadísticas, pueden encontrarse en las ref. [2] y [3].

Para la obtención de las respuestas frente a ambas aceleraciones horizontales (análisis I y II) debe usarse el mismo espectro de respuesta.

En cambio, es conocido que la amplitud de los movimientos verticales del terreno durante los sismos es inferior a la de los horizontales, por lo que suele estimarse (ref. [2] y [3]) la respuesta al sismo vertical (análisis III), aplicando un factor de escala de 2/3 al espectro utilizado para el sismo horizontal. La Norma española no indica el valor a tomar en el caso de un cálculo general dinámico, por lo que utilizaremos dicho coeficiente.

## 2.6. Espectros de diseño. Espectros reglamentarios de las Normas Sísmicas

Las fuerzas sísmicas equivalentes al análisis dinámico de la estructura tienen la forma general indicada en las fórmulas (11):

$$f_{im} = p_i \cdot \frac{S_a(\omega_m, \nu_m, \ddot{V}_g(t))}{g}, n_{im} \quad (15)$$

La evaluación exige previamente establecer el espectro de respuesta de las aceleraciones, función del acelerograma  $\ddot{V}_g(t)$  del terremoto considerado.

El diseño sísmico necesita pues fijar las características del acelerograma del terremoto de diseño, para lo cual se precisa un profundo estudio sismológico, que a partir de los datos de las sacudidas sísmicas ocurridas en la zona, o en zonas de características similares, de sus características geológicas, así como del terreno donde se cimenta la estructura, y considerando asimismo la probabilidad de frecuencia del mismo (período de retorno) y el riesgo sísmico asumible (función de los daños que pueden ser tolerados y del coste de su reparación), permita fijar un acelerograma que proporcione el espectro de diseño ( $S_a$ ) de la estructura.

En la práctica, no resulta operativo intentar actuar sobre el acelerograma tipo ya que:

- Es muy difícil encontrar registros suficientes de movimientos sísmicos fuertes de las distintas zonas sísmicas, y en cualquier caso la extrapolación de unas zonas a otras es siempre discutible.
- La respuesta espectral es muy sensible a la distancia y características del terreno entre el epicentro y la ubicación de la obra, como se aprecia en la fig. 2, tomada de la referencia [6], que corresponde a medidas tomadas a diferentes distancias epicentrales para terremotos de análoga intensidad.

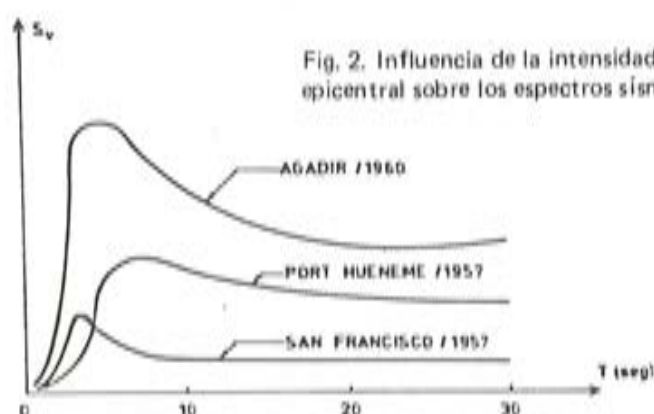


Fig. 2. Influencia de la intensidad sísmica y de la distancia epicentral sobre los espectros sísmicos (Ref. 6).

- Incluso para iguales intensidades y distancias epicentrales, los espectros de respuesta pueden diferir enormemente según sean las características del terreno de cimentación. En efecto, dichas características suelen afectar a la duración del terremoto y forma del acelerograma  $\ddot{V}_g(t)$  y por tanto a los espectros de respuesta. Los suelos poco rígidos solicitan más a las estructuras de largos periodos, presentando además una amplia zona de periodos solicitados con valores máximos. Los suelos rígidos, en

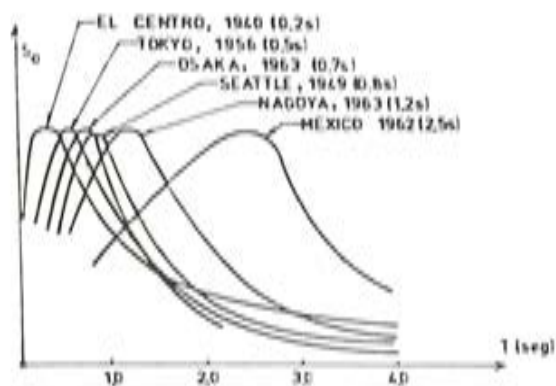


Fig. 3.a. Influencia del período predominante del terreno —entre paréntesis— sobre la configuración de los espectros sísmicos de respuesta (Ref. 6).

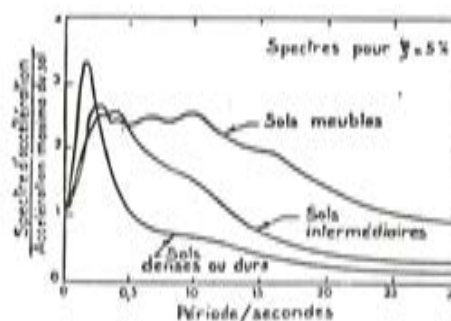


Fig. 3.b. Influencia del tipo de terreno sobre la forma de los espectros sísmicos de respuesta (ref. 3).

cambio, afectan principalmente a las construcciones rígidas, de períodos cortos comprendidos en una estrecha banda y mucho menos a los restantes. En las fig. 3-a (ref. 6) y 3-b (ref. 3) se aprecia todo ello claramente.

Conviene señalar que la estructura que nos ocupa (relativamente flexible, con períodos propios del orden de 3.56, 1.85 y 1.85 seg. (análisis I, II y III), presenta según lo expuesto unas condiciones favorables de respuesta al estar asentada en suelo compacto.

De todo lo que antecede, resulta ilusorio en la mayoría de los casos el intentar definir un acelerograma de diseño, siendo por tanto preciso acudir a los espectros reglamentarios que fijan las diferentes Normas Sísmicas.

Dichos espectros se obtienen como envolventes de un conjunto de espectros obtenidos a partir de acelerogramas registrados en sitios comparables, tras un proceso de "decregado" para eliminar las puntas ocasionadas por bruscas distorsiones en los acelerogramas reales, y de "normalización", generalmente en base a la aceleración máxima del suelo. En la fig. 4-a se

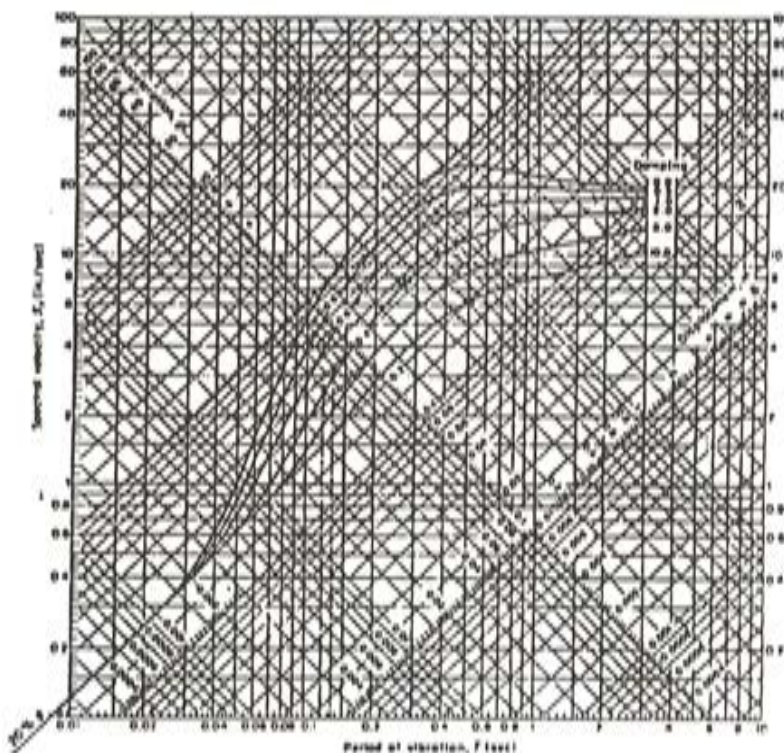


Fig. 4b. Espectro combinado de respuesta (Clough) (Ref. 5)

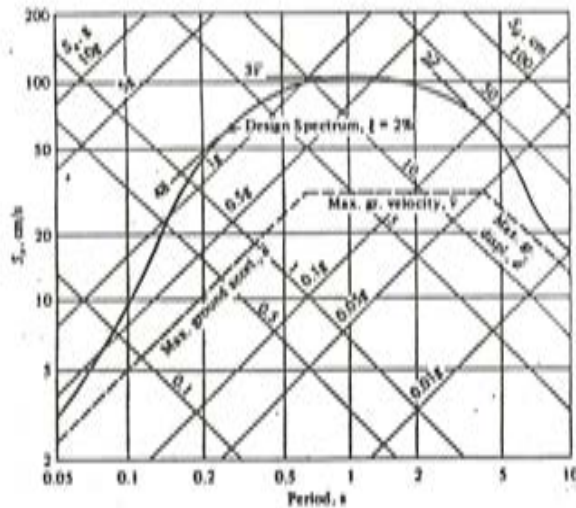


Fig. 4c. Espectro de diseño obtenido a partir de los valores máximos de los movimientos del terreno —según Newmark y Rosenblueth— para terremotos tipo El Centro. (Ref. 5).

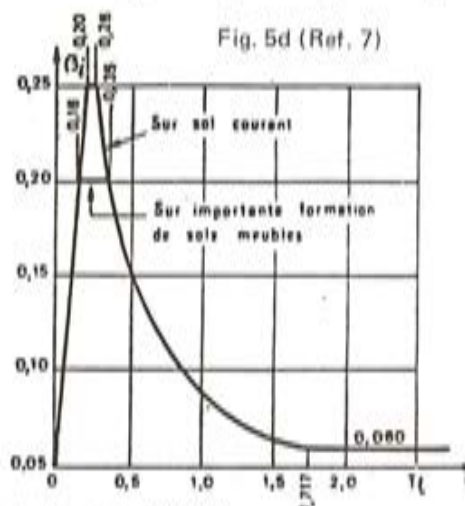
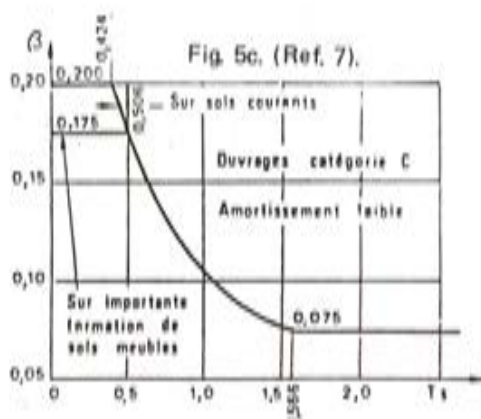
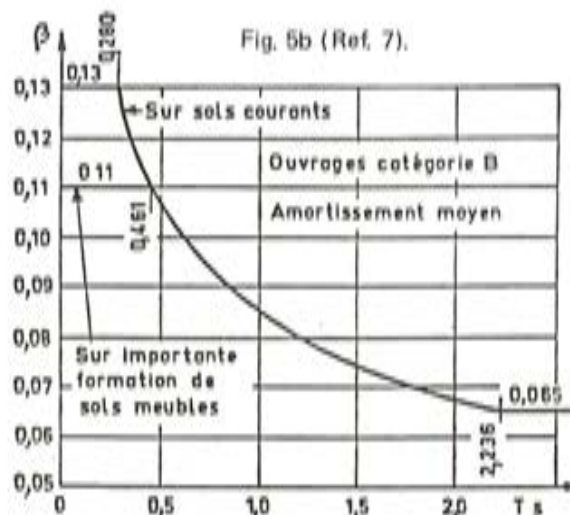
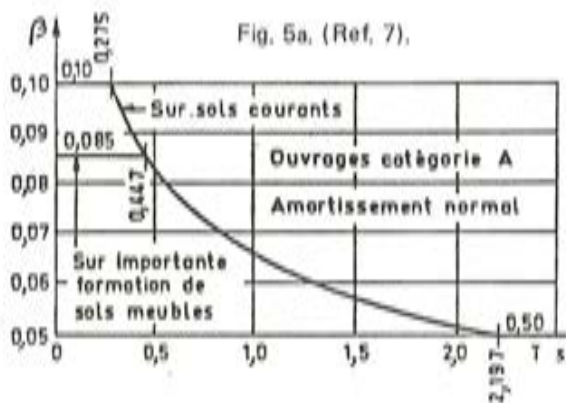
incluye el espectro elástico correspondiente al terremoto de El Centro (grado IX; 1940) y en las figs. 4-b y 4-c algunos espectros de diseño propuestos por diferentes autores (ref. [2]). Se observa en ellos cómo  $S_d$  tiende a la aceleración del suelo ( $\dot{V}_g(t), \max$ ), cuando  $T$  tiende a cero, es decir en estructuras rígidas y como  $S_d$  tiende al desplazamiento máximo del suelo y  $S_a$  a cero cuando  $T$  tiende a infinito, es decir en estructuras muy flexibles que tienden a “flotar”, independientemente de la excitación de su base. Para una franja de  $T$  medios, la amplificación dinámica es máxima.

Los criterios de las Normas Sismorresistentes suministran generalmente unos espectros de aceleraciones normalizados afectados por unos coeficientes correctores, cuya misión es tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Máxima aceleración del terreno (coeficiente sísmico básico  $C$  de la PDS).
- Riesgo Sísmico, en función de la importancia de la obra y zona sísmica (coeficiente  $R$  de la PDS).
- Influencia del terreno de cimentación en la aceleración en la base de la estructura (coeficiente  $\delta$  de la PDS).
- Influencia del amortiguamiento (coeficiente  $B$  de la PDS).
- En algunos países, un coeficiente de ductilidad para tener en cuenta el efecto (favorable a nivel de esfuerzos y amortiguamiento) de la posible entrada en régimen no lineal de la estructura bajo fuertes terremotos (véase ref. [2] a [6]). La Norma española no lo incluye explícitamente.

Asimismo, los espectros normalizados de las Normas Sísmicas (coeficiente  $\beta$  de la PDS), difieren sensiblemente de los presentados en la fig. 4, en algunos aspectos:

- En la zona de los períodos largos, para tener en cuenta algunas posibles inexactitudes con respecto a la superposición de modos, valor calculado de los períodos, interacción suelo estructura, posibilidad de suelos que alteren la forma y duración prevista de los acelerogramas, etc., el descenso del valor espectral de las aceleraciones se hace más lentamente (fig. 6).
- En la zona de períodos cortos, para cubrir el posible efecto de los modos inferiores no considerados, así como de errores en la evaluación de los períodos en una zona muy sensible a ellos (véase fig. 5-d), suele actuarse del lado de la seguridad bien sea aumentando el valor de la pendiente de subida de  $S_d(T)$ , bien acotando el valor mínimo de  $T$ , como hace la Norma española, muy conservativamente.



Espectros de diseño de la Norma Francesa (PS-69).

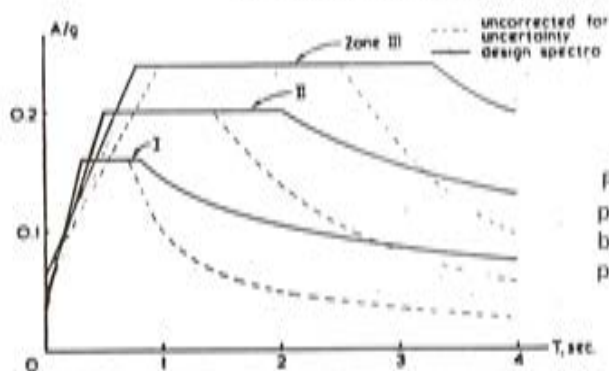


Fig. 6. Espectros de diseño corregidos para tener en cuenta las incertidumbres en el valor de los períodos propios (Ref. 2)

- Dado la precisión del cálculo realizado, y lo comentado en el apartado anterior, hemos creído conveniente controlar los valores del espectro de respuesta de la Norma francesa PS-69, cuyas curvas se presentan en la fig. 5. Dicha Norma matiza mucho más la obtención del coeficiente  $\beta$ , según que la estructura sea rígida ( $T \leq 0.5$  seg.), en cuyo caso permite trabajar con un sólo modo, incluyéndose internamente en las curvas (fig. 5-a, b, c) los efectos de los demás modos, o sea esbelta ( $T > 0.5$  seg.), siendo entonces obligatorio trabajar con tres períodos pero sobre una curva más realista en la zona de los períodos cortos (fig. 5-d). Por otro lado, la influencia del amortiguamiento y del tipo de terreno (fig. 3) queda reflejada asimismo en la forma de la curva  $\beta(T)$ .

### 3.1. Estructura del puente Fernando Reig, sobre el río Barxell (Alcoy)

Se trata de un puente atirantado con una sola pila central y dos vanos de 108 y 132 m, cuyo alzado longitudinal y sección transversal se indican en la fig. 7.

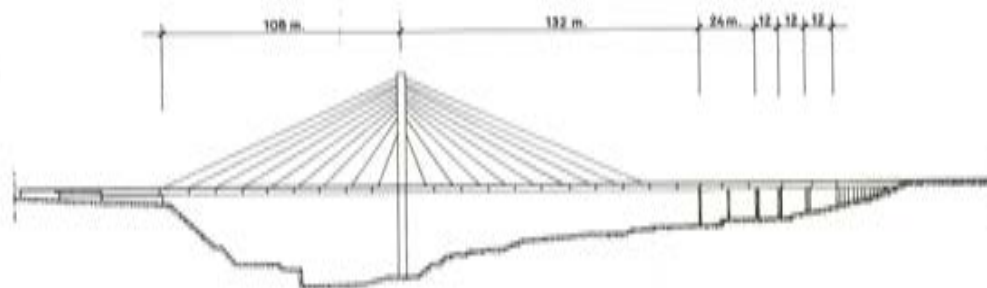


Fig. 7a. Puente Fernando Reig sobre el río Barxell. Alzado general

El apoyo derecho del vano mayor se vincula a un vano lateral de compensación de 24 m —la pila intermedia del mismo es formal— con objeto de aliviar la flexión positiva de aquél. Finalmente, tres vanos de acompañamiento de 12 m permiten alcanzar el estribo derecho. Entre éstos y el resto de la estructura se dispone una junta que permite desvincular ambos a todos los efectos salvo para el cortante transversal que se transmite hasta el estribo donde se dispone un empotramiento a flexión transversal.

Longitudinalmente, por tanto, puede prescindirse de los tres vanos de acompañamiento. Frente a acciones transversales de viento y sismo, es preciso en cambio considerar la estructura completa, con el tablero empotrado en los estribos y una rótula intermedia a 36 m del estribo derecho.

El tablero no apoya en la pila central sino que pasa libremente por ella, colgándose de un par de tirantes verticales.

Transversalmente, la estructura consta de dos vigas cajón laterales prefabricadas —coincidentes con los dos planos de cables— y una losa superior hormigonada in situ, junto con un sistema de diafragmas y vigas prefabricadas que permiten transmitir las cargas del centro del tablero a los nervios laterales rígidos, aliviando el trabajo de la losa.

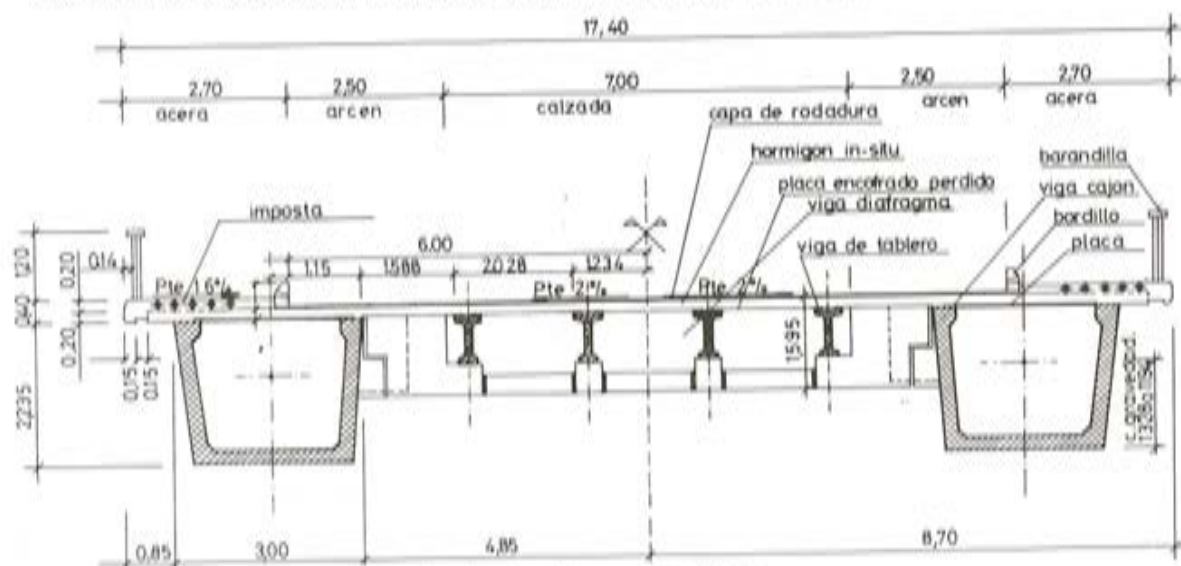


Fig. 7b. Sección transversal tipo.

### 3.2. Discretización de la estructura y asignación de masas y rigideces

Según el método expuesto en el apartado 2, se procedió primeramente a obtener los modos y frecuencias propias de vibración de la estructura en los análisis I (flexión transversal, trabajo como emparrillado) y II/III (flexión longitudinal, trabajo como marco). En las figuras 8a y 8b se muestra el esquema de la discretización utilizada.

Para el análisis I se ha realizado un análisis como emparrillado plano, del conjunto de tablero y pilas, sin considerar los tirantes que no trabajan en dicha dirección.

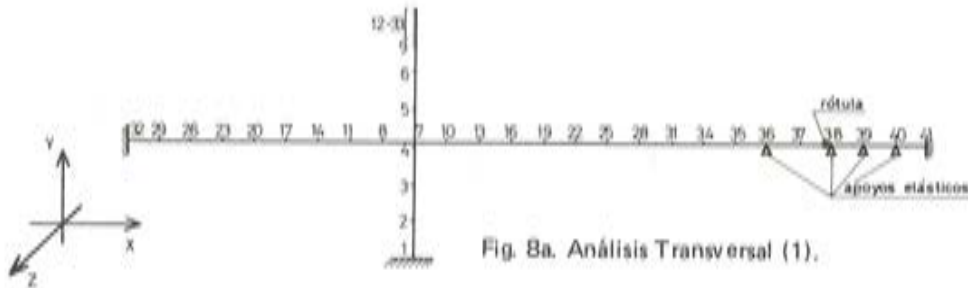


Fig. 8a. Análisis Transversal (1).

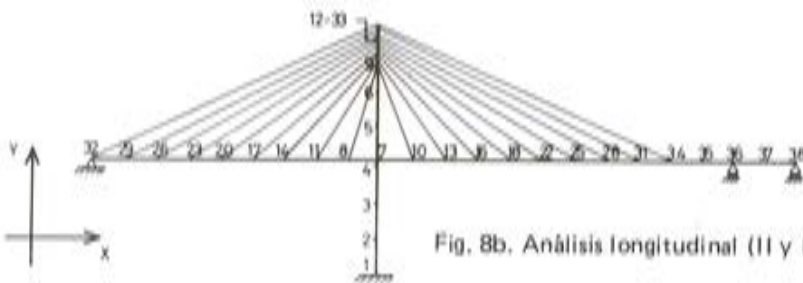


Fig. 8b. Análisis longitudinal (II y III).

La vinculación entre pila y tablero se ha supuesto únicamente a efectos de los desplazamientos transversales, ya que el tipo de tope dispuesto en el proyecto puede considerarse que permite la libertad de giros relativos entre ambos, no existiendo pues acoplamiento entre flectores y torsores de pila y tablero. Tal y como se ha explicado en el apartado 2.1, este hecho unido a la no consideración de movimientos de rotación sísmicos en el terreno y a la separación de frecuencias propias de torsión y flexión transversal del tablero, permiten limitar a 1 el número de grados de libertad dinámica.

La coacción que proporcionan las parejas de pilares de la zona lateral derecha del puente se ha reflejado mediante unas constantes de muelle obtenidas según se muestra en la fig. 9.

La pila principal, cuyo trabajo transversal como marco en forma de A no puede ser reflejado explícitamente en el análisis del emparrillado plano, está afectada de dos resortes elásticos a la altura de los dinteles, cuyas constantes reflejan la rigidez a flexión de los mismos, y se obtienen de manera que la deformabilidad de la pila real y del modelo sean idénticos frente a la sollicitación dominante (carga transversal transmitida por el tablero). La obtención de dichas constantes se esquematiza en la Fig. 10.

Para los análisis II y III se ha realizado un análisis como marco plano, del conjunto de tablero, pila y tirantes. Dado el carácter simétrico transversalmente del análisis, las constan-

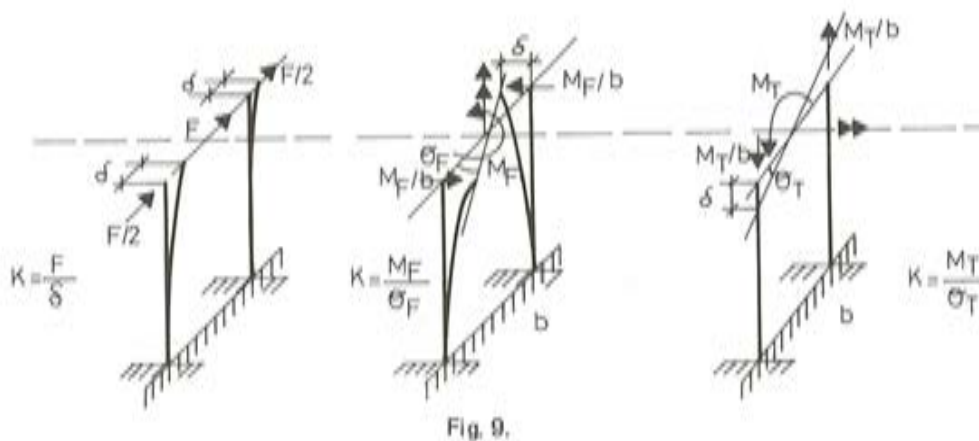


Fig. 9.

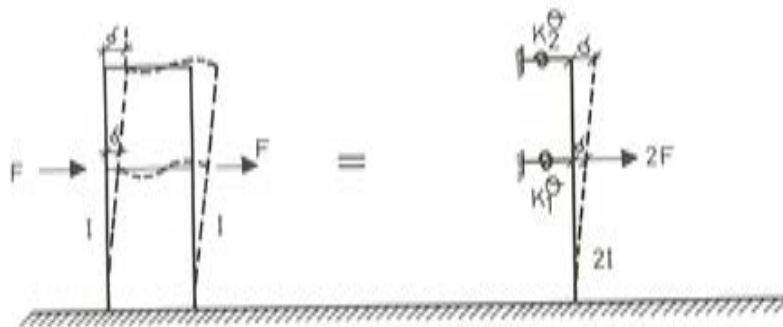


Fig. 10.

tes introducidas corresponden únicamente a la mitad de la estructura, y tomando sólo el ancho eficaz de losa colaborante con la viga cajón.

### 3.3. Obtención de modos y períodos propios de vibración

Para la obtención de los modos y frecuencias propias se ha utilizado el programa STRUDL DINAMICO.

En las figuras 11 y 12 se presentan los esquemas de los diferentes modos propios de vibración, donde se puede apreciar claramente el acoplamiento e interacción de las respuestas de pila y tablero.

Los períodos principales obtenidos se resumen a continuación.

Modo	$T(\omega)$ transversal (seg.)	$T(\omega)$ longitudinal (seg.)
1	3,562 (1,76)	1,848 (3,40)
2	1,576 (3,99)	1,049 (5,99)
3	0,640 (9,82)	0,717 (8,76)
4	0,291 (21,59)	0,656 (9,58)
5	0,281 (22,36)	0,599 (10,49)
6	0,209 (30,06)	0,467 (13,45)
7	0,164 (38,31)	0,442 (14,22)
8	0,142 (44,25)	0,360 (17,45)
9	0,103 (61,00)	0,337 (18,64)
10	0,085 (73,92)	0,276 (22,77)

Fig. 11. Modos propios frente a sismo transversal.

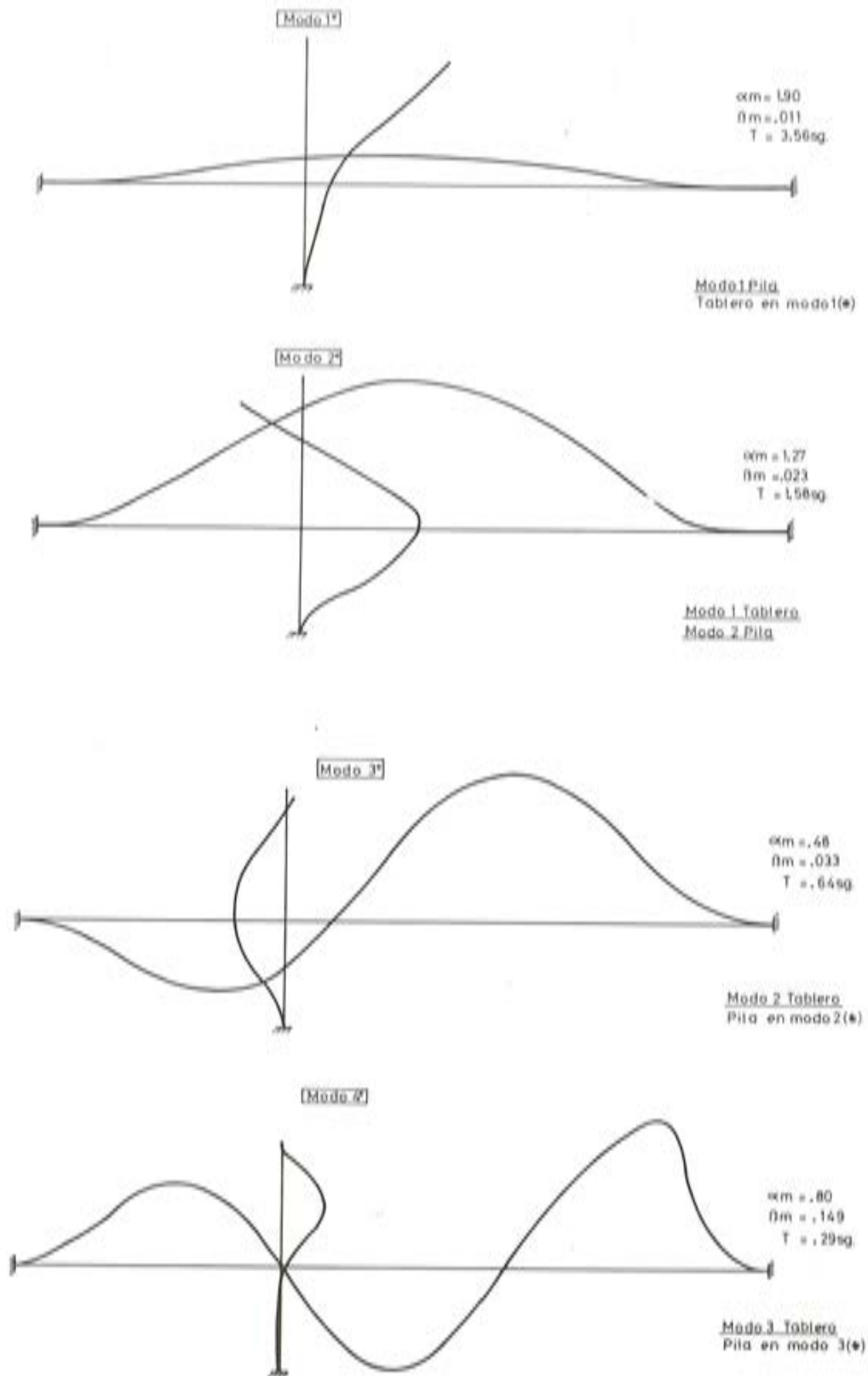


Fig. 11. (Continuación)

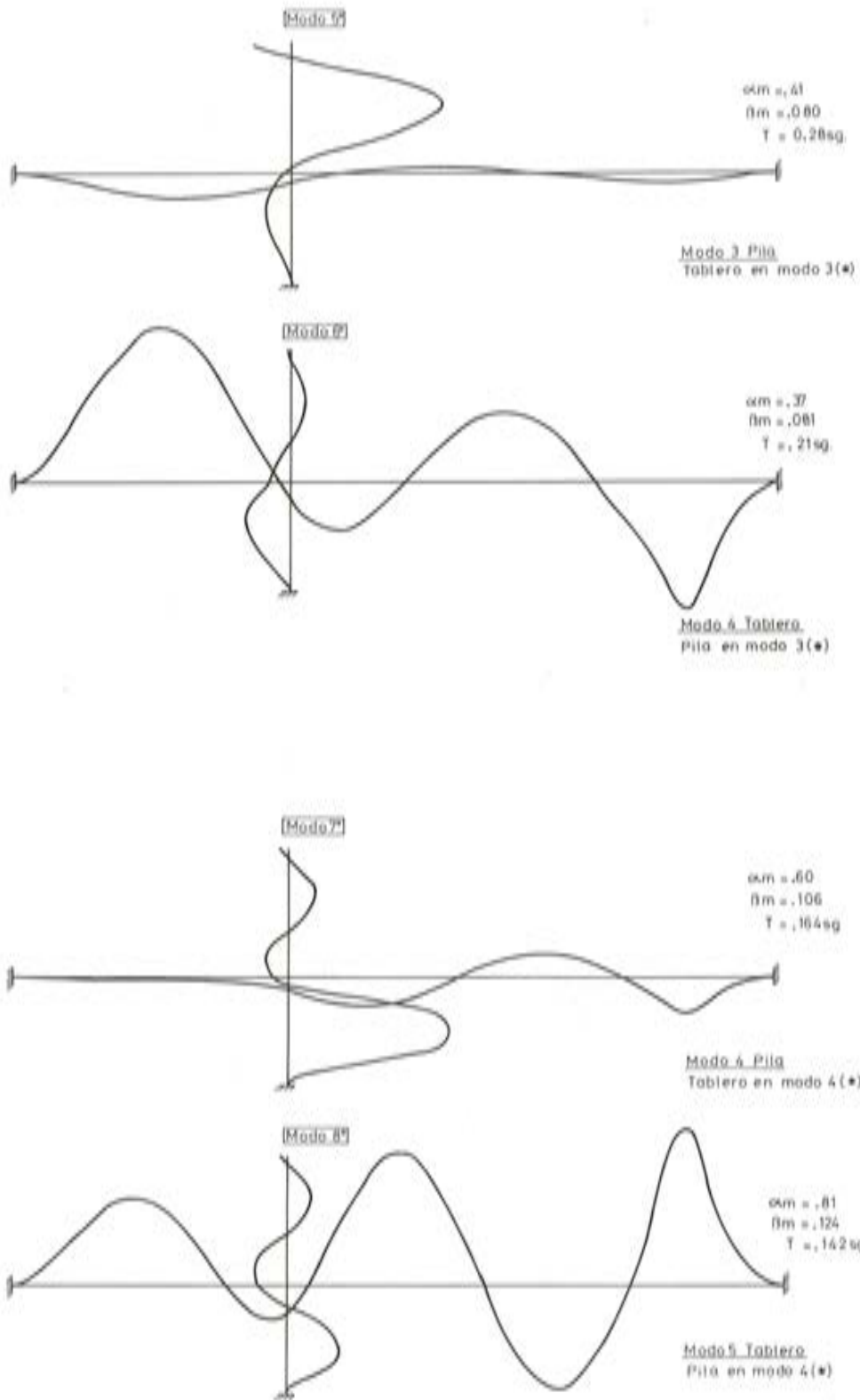


Fig. 11. (Continuación)

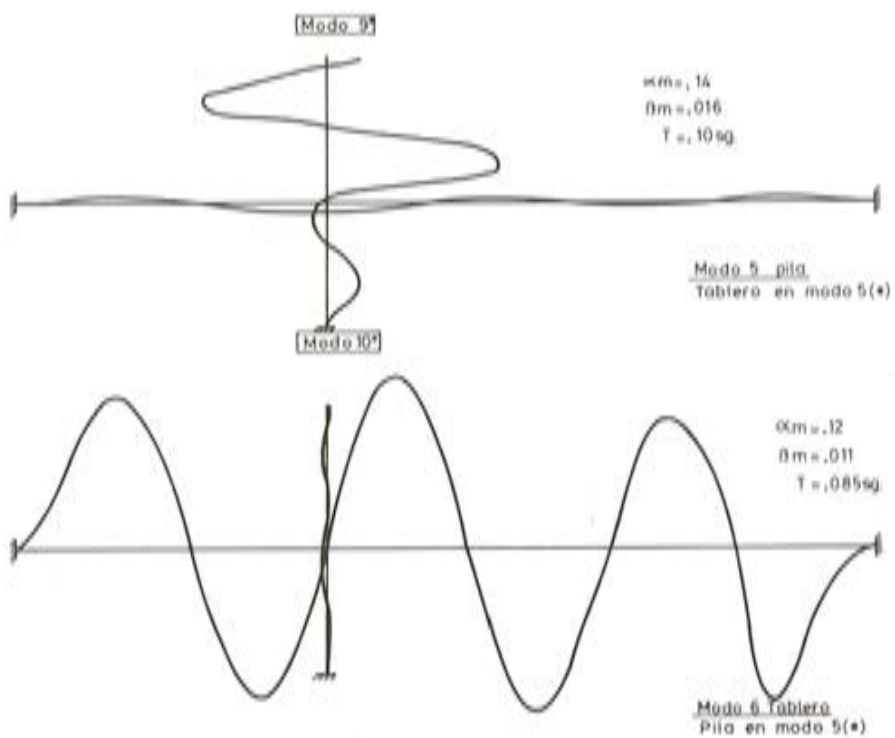


Fig. 12. Modos propios frente a sismo longitudinal.

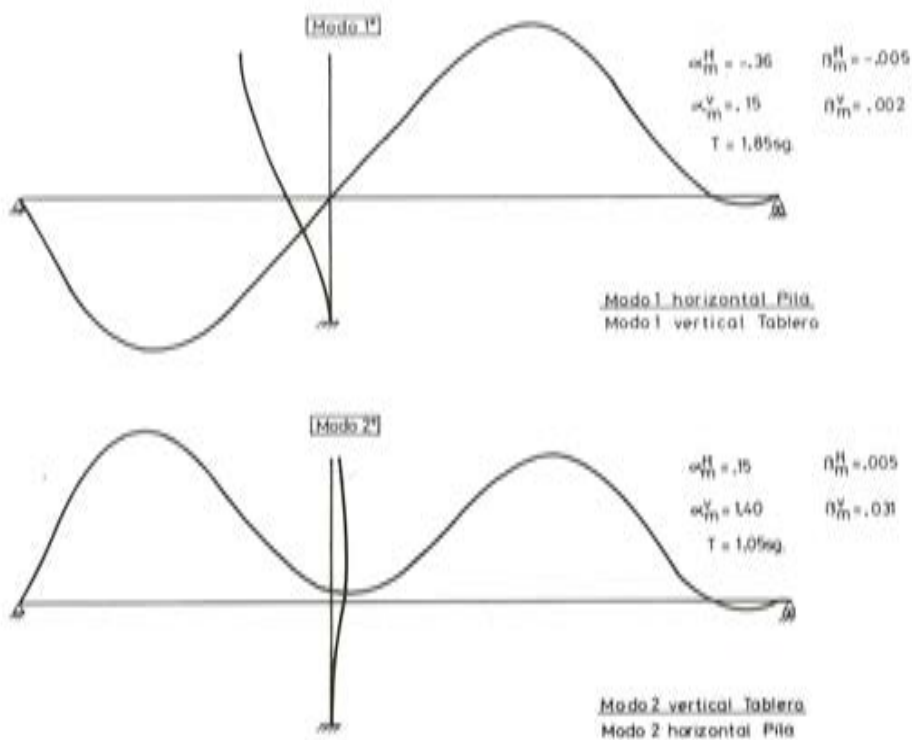


Fig. 12. (Continuación)

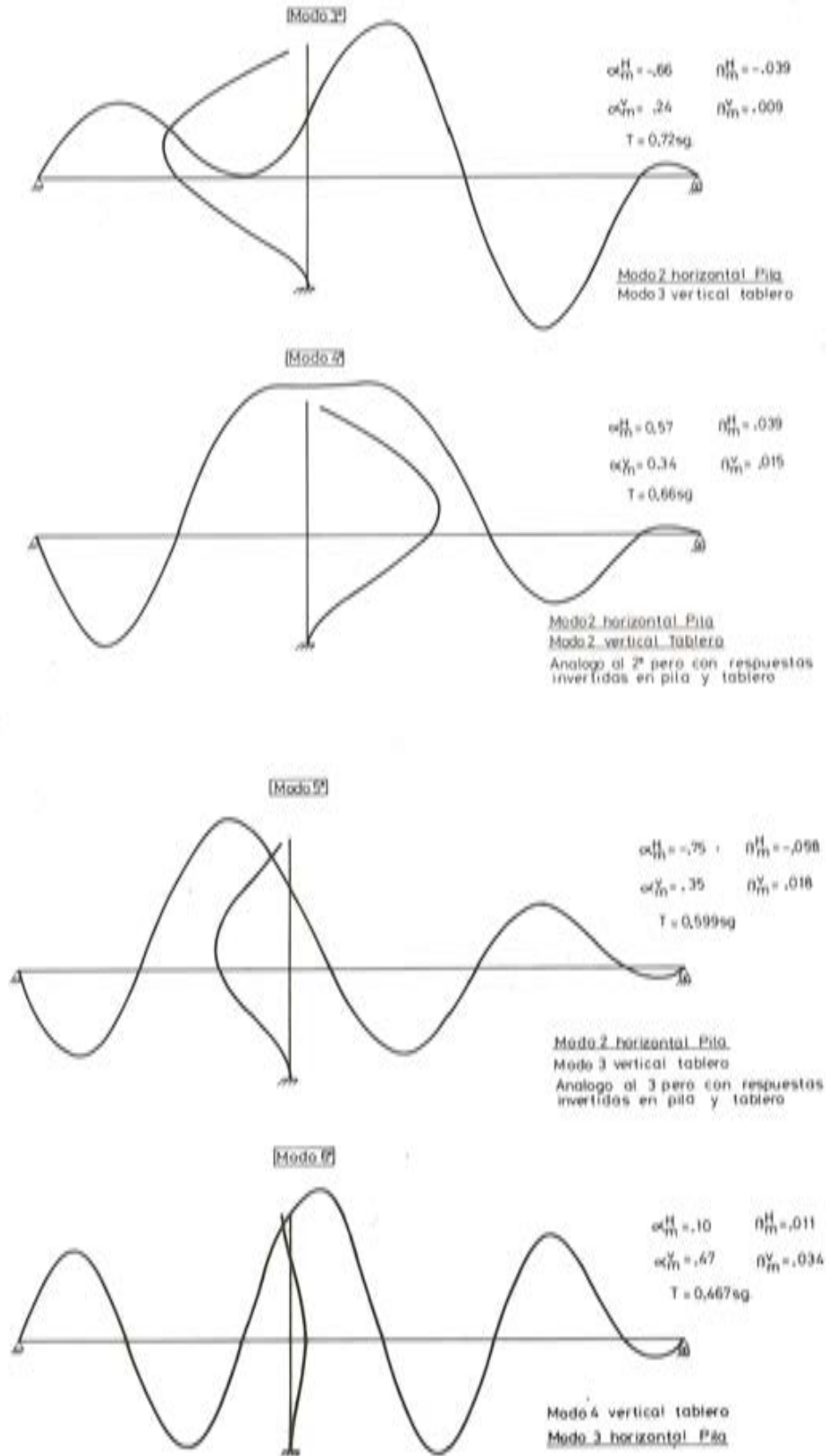
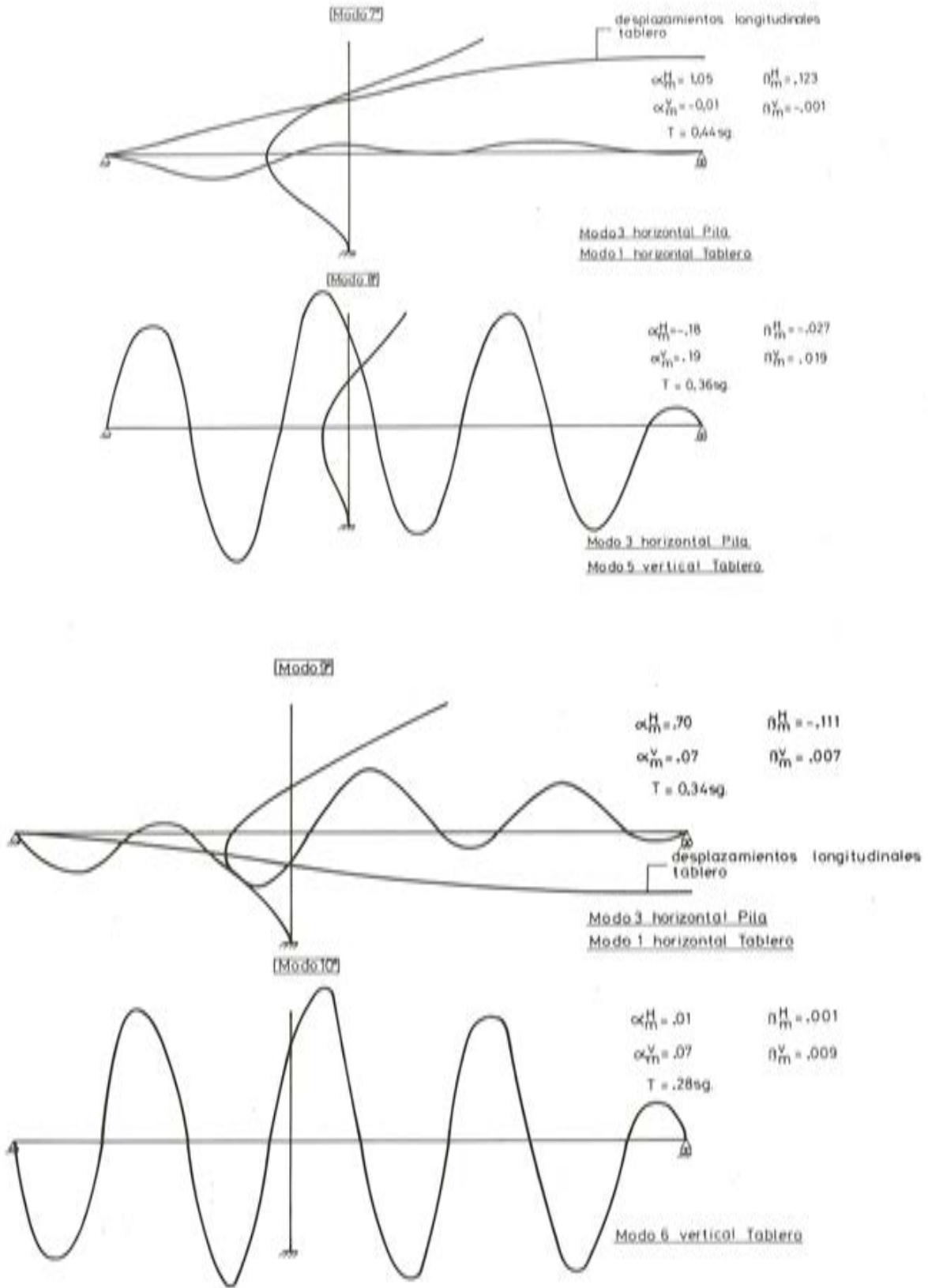


Fig. 12. (Continuación)



Puede constatar que, salvo en algunos casos, la separación entre períodos (o frecuencias) propias es apreciable pudiéndose, según se comentó en el apartado 2.4, aplicarse el principio de superposición modal mediante la media cuadrática, por ser pequeña la correlación entre  $\omega_m$ . Los modos cuyas frecuencias aparecen próximas son:

Modo 6 (vertical tablero)  $(\omega = 13,45)$  y Modo 7 (horizontal tablero)  $(\omega = 14,22)$

Modo 8 (vertical tablero)  $(\omega = 17,45)$  y Modo 9 (horizontal tablero)  $(\omega = 18,64)$

Se trata pues de modos que producen efectos muy diferentes y por lo tanto su ligera correlación no es importante.

Análisis transversal:

Modo 4 (3° tablero y pila en modo 3) y Modo 5 (3° pila y tablero en modo 3).  
 $(\omega = 21,59)$   $(\omega = 22,36)$

En este caso el modo 4 solicita fuertemente el tablero y poco la pila, al contrario de lo que produce el modo 5, no siendo pues importante la correlación existente.

### 3.4. Obtención de las fuerzas sísmicas

Comparando la expresión (15) del apartado 2.6 con la que suministran las Normas Sísmicas:

$F_i = \alpha \beta \delta n_i p_i$  (16), se obtiene la equivalencia entre el espectro de respuesta de la estructura  $S_a/g$  y el producto  $\alpha \beta \delta$ .

El coeficiente  $\alpha$  es a su vez igual a:  $\alpha = CR$ , siendo R el Coeficiente de Riesgo Sísmico y C el coeficiente sísmico básico igual a  $\dot{V}_g/g$ , siendo  $\dot{V}_g$  la aceleración del terreno. Así pues,  $\alpha = \dot{V}_g/g$ , siendo  $\dot{V}_g$  una aceleración máxima prevista en función del riesgo sísmico asumido.

Se tiene por tanto:

$$\alpha \beta \delta = \frac{\dot{V}_g}{g} \beta \delta = \frac{S_a}{g}, \text{ luego } \beta \delta = \frac{S_a}{\dot{V}_g}$$

El coeficiente  $\beta$  representa pues la amplificación dinámica de la respuesta máxima de la estructura frente a la excitación del terreno, función del espectro de respuesta propuesto por las normas. El coeficiente  $\delta$  viene a ser un simple factor de corrección de dicha respuesta en función de las características del terreno de cimentación, para prever asimismo posibles desplazamientos relativos o de conjunto, así como efectos de interacción suelo-estructura en suelos poco rígidos.

#### 3.4.1. Aplicación del espectro de respuesta de la Norma Sísmica Española (PDS-74)

Utilizaremos los datos correspondientes a Alcoy (Zona VII). La aceleración máxima del terreno ( $\dot{V}_g$ ), tomada de la curva propuesta por Murphy-O'Brien (1979) (fig. 13), es:  $\dot{V}_g \text{ máx} \cong 100 \text{ cm}^2/\text{seg}$ .

La PDS-74 establece para la zona VII, un coeficiente sísmico de:

$C = 0,08$ , lo que equivale a una aceleración de  $V_g = 0,08 g = 78,5 \text{ cm}/\text{seg}^2$ , algo inferior al valor anterior.

El coeficiente de riesgo sísmico para zona VII y una duración de vida de la obra de 150 años es:  $R = 1$  (tabla 4.10.2. PDS. I 1974).

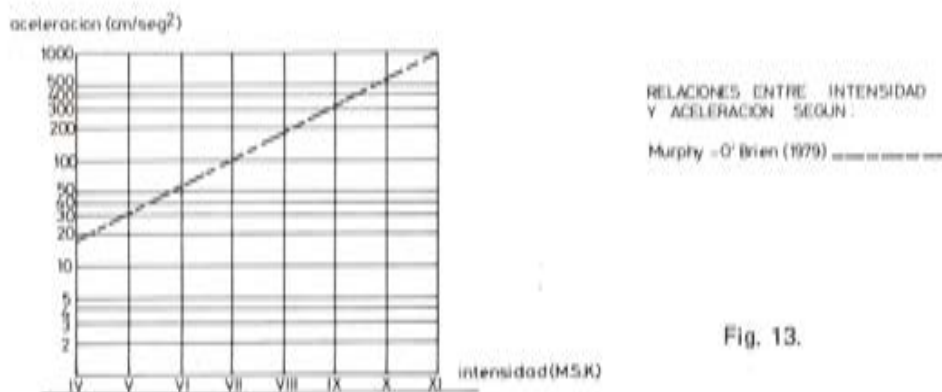


Fig. 13.

Queda pues :  $\alpha = C R = 0,08$ .

Dado que el informe sísmico aconseja la consideración de posibles sismos de intensidad algo superior al VII, tomaremos la aceleración de la curva de Murphy-O'Brien, que corresponde a un sismo medio de grado VIII, según se desprende de la tabla I-bis, del ap. 2.7 de la PGS-68, coincidente en este aspecto con la PDS.

Así pues tomamos:  $\alpha = 100/981 = 0,102$

El coeficiente  $\delta$  de fundación es  $\delta = 0.8$

El coeficiente de respuesta toma la forma:  $\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{T_m}} \leq 0.5$  (es decir, para  $T_m < 8$  seg.), siendo  $T_m$  el período propio de cada modo. Se ha tomado, conservadoramente, un coeficiente de amortiguamiento nulo, ya que los  $\nu$  de amortiguamiento crítico para este tipo de obras ( $\approx 2$  por 100) son poco fiables.

La PDS-1/74 no separa los efectos de aceleración del terreno y de amplificación dinámica de la respuesta en los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , sino que incluye de forma aproximada parte del espectro de respuestas en el coeficiente sísmico básico C (véanse comentarios al ap. 2.4 de la PDS-1/74).

El coeficiente C aparece en la PDS-1/74 como función del período, tomando la forma para la zona VII:

$$C = \frac{\ddot{V}_g}{g} = \frac{4 (e^{-\pi T} (\text{sen } \pi T - \text{cos } \pi T) + 1,3)}{g} \cdot \frac{2 \pi}{T} = \tilde{c} \beta' = 0,08 \beta'$$

El coeficiente  $\beta^*$  que debemos tomar en conformidad con todo lo expuesto para reflejar la amplificación dinámica de la estructura será:

$$\beta^* (T) = \beta \beta' = \frac{4 (e^{-\pi T} (\text{sen } \pi T - \text{cos } \pi T) + 1,3) \cdot 2 \pi}{78,48} \cdot \frac{1}{T^{4/3}}, \text{ tomando como límite } T \leq 0,25 \text{ seg.}$$

Queda pues:  $F_{im} = p_i \cdot n_{im} \cdot s$  (m), siendo  $s$  (m) = 0.102 · 0.8 ·  $\beta^*$  = 0.082  $\beta^*$  (T), cuyos valores para los diferentes modos de vibración se adjuntan en la siguiente tabla:

Modo	$s$ (transversal)	$s$ (horizontal)	$s$ (vertical) = 2/3 $s$ (hor.)
1	0,006	0,015	0,010
2	0,018	0,033	0,022
3	0,070	0,059	0,039
4	0,187	0,068	0,045
5	0,194	0,078	0,052
6	0,217	0,109	0,073
7	0,217	0,117	0,078
8	0,217	0,149	0,099
9	0,217	0,160	0,107
10	0,217	0,197	0,131

### 3.4.2. Aplicación del espectro de respuesta de la Norma Sísmica Francesa (PS-69)

Para contrastar los valores anteriores, se han controlado asimismo las especificaciones de otras normas extranjeras.

Así la francesa establece:

$\alpha = 0,75$  (zona sísmica grado VII, construcción tipo B).

$\delta = 1,15$  para suelo de consistencia media.

$$\beta_m = \begin{cases} 1,25 T_m < 0,06 \text{ para } 0 < T_m \leq 0,2 \text{ seg.} \\ 0,25 T_m \text{ para } 0,2 < T_m \leq 0,26 \text{ (curvas fig. 5.d)} \\ \frac{0,09}{T_m^{3/4}} \leq 0,06 \text{ para } T_m > 0,26 \end{cases}$$

Para  $T = 0$  seg. se obtiene  $S = 0.052 = \ddot{V}_{g \text{ m } \hat{u}_x} / g$ , o sea  $\ddot{V}_{g \text{ m } \hat{u}_x} = 50,8$  cm/seg. (coincidente con los valores medios de la aceleración del terreno dados para zona VII en la PDS-74 y PGS-68).

Modo	$s$ (transv.)	$s$ (horiz.)	$s$ (vert.)
1	0,030	0,049	0,032
2	0,055	0,075	0,050
3	0,109	0,100	0,066
4	0,196	0,106	0,071
5	0,201	0,114	0,076
6	0,216	0,138	0,092
7	0,177	0,143	0,095
8	0,153	0,167	0,111
9	0,111	0,176	0,117
10	0,092	0,204	0,136

### 3.4.3. Aplicación de otros espectros de diseño

A efectos de contrastar los valores de las Normas anteriores, previstas para aplicar a casos sencillos de edificación con modo fundamental preponderante, con los espectros típicos de terremotos, se acompaña la obtención de los coeficientes 's' a partir del espectro típico de El Centro (fig. 4a) una vez descrestado, y del de diseño propuesto por Clough (fig. 4b). Se trata de espectros normalizados (la aceleración máxima del terremoto de El Centro fué de  $0,32 \text{ g} \approx 310 \text{ cm/seg}^2$  lo que corresponde a un grado IX) cuyos valores deberán multiplicarse por la aceleración máxima del terreno dada por PDS-1/74 (zona VII).

$$\frac{\ddot{V}_{g \text{ m áx}}}{g} = 0,077$$

Se obtiene así el siguiente cuadro:

Modo	Espectro A (El Centro) ( $\beta = 2\%$ )			Espectro B (fig. 4-b) ( $\beta = 0,5\%$ )		
	S trans.	S horiz.	S vert.	S trans.	S horiz.	S vert.
1	0,029	0,082	0,054	0,033	0,069	0,046
2	0,102	0,145	0,097	0,075	0,112	0,074
3	0,224	0,208	0,139	0,193	0,162	0,108
4	0,304	0,216	0,144	0,347	0,193	0,128
5	0,304	0,228	0,152	0,347	0,200	0,133
6	0,299	0,278	0,185	0,335	0,251	0,167
7	0,258	0,299	0,199	0,308	0,270	0,180
8	0,208	0,304	0,203	0,297	0,308	0,205
9	0,145	0,304	0,203	0,270	0,347	0,239
10	0,102	0,299	0,199	0,231	0,347	0,231

### 3.4.4. Discusión de los diferentes espectros

En la fig. 14 se adjunta la representación gráfica de los espectros de respuesta de las aceleraciones absolutas propuestos por las Normas Sísmicas, española (PDS-74) y francesa (PS-69), así como los ya comentados en el apartado anterior, correspondientes a terremotos tipo El Centro, con diferentes grados de amortiguamiento.

De la observación de dicha figura se constata lo siguiente:

- El espectro francés reproduce fielmente la forma de los espectros típicos de terremotos reales sobre suelos rígidos. Presenta un máximo de amplificación dinámica para estructuras de períodos comprendidos entre 0,20 y 0,25 seg., y un descenso progresivo de dicha amplificación a medida que el período se aleja de dichos valores. El descenso es algo más rápido hacia la zona de períodos cortos, tendiendo hacia la aceleración del terremoto (amplificación dinámica nula) cuando T se acerca a cero (estructuras muy rígidas). En la zona de períodos largos (estructuras muy esbeltas), congela el valor mínimo del espectro por encima de  $T \approx 2,7 \text{ seg.}$ , lo que se corresponde a las observaciones hechas por ciertos autores sobre la necesidad de adoptar valores algo conservadores en la zona de grandes períodos (véase ap. 2.6 y ref. [2]).

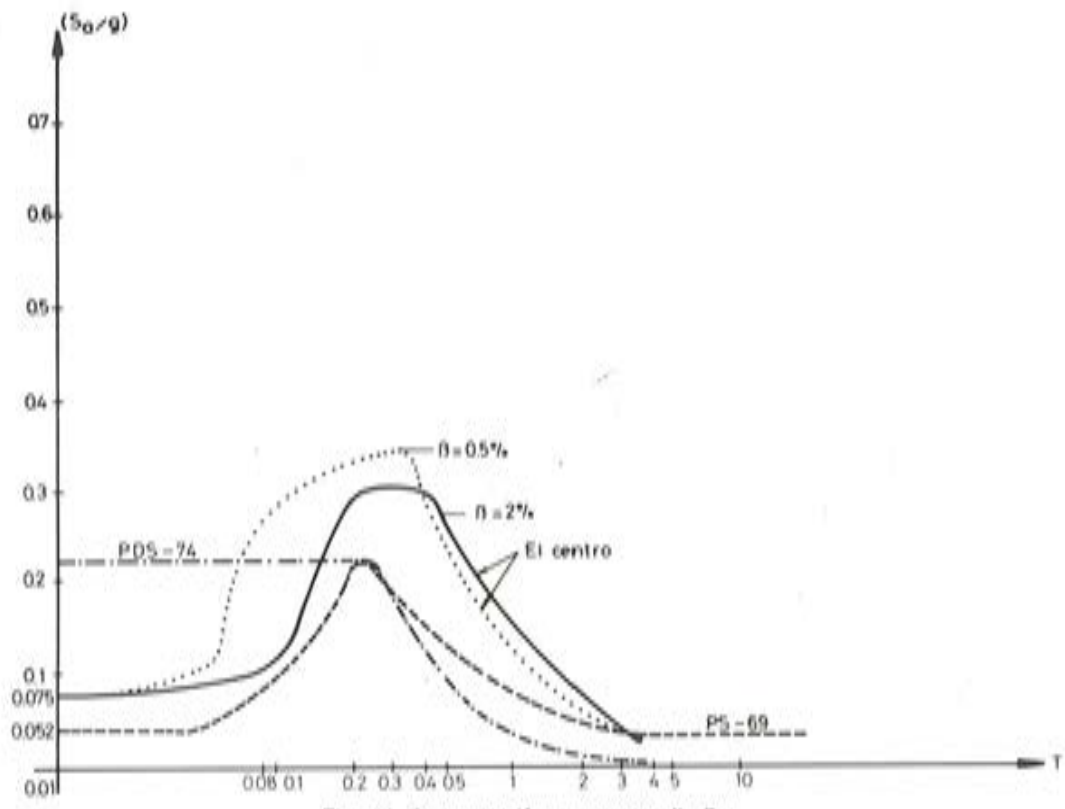


Fig. 14. Comparación espectros diseño.

b) Las curvas normalizadas del espectro elástico correspondiente al terremoto de El Centro (grado IX), presentan una mayor amplificación dinámica que la de los espectros de las Normas. Se observa en cualquier caso la alta sensibilidad de la respuesta al grado de amortiguamiento. Ya Newmark (ref. [1] ) comenta el hecho de que la mayoría de las Normas son menos severas que el espectro del citado terremoto.

Por otra parte, tal y como se estudia con detalle en las referencias [1] a [6] y se muestra en la fig. 15, la hipótesis de respuesta lineal de la estructura es extremadamente desfavorable. En efecto, los espectros de respuesta elastoplásticos muestran el efecto favorable de la pérdida de rigidez por entrada en regimen no lineal, con la consiguiente reducción de las aceleraciones en la zona de largos períodos sin afectar apenas a los desplazamientos. Por el contrario, en las estructuras muy rígi-

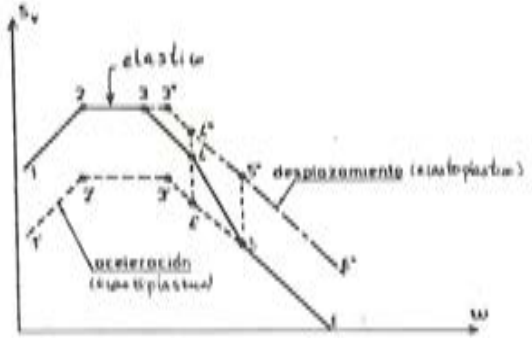


Fig. 15. Cálculo de los espectros sísmicos de respuesta elastoplástica a partir de los espectros sísmicos de respuesta para sistemas lineales. (Ref. 6)

das, la respuesta no lineal amplifica apreciablemente los movimientos sin reducir las aceleraciones. Parece pues lógico el poder contar en cierto grado con el margen

adicional de seguridad que proporciona la no linealidad en la zona de períodos largos y medios, si bien de forma precavida ya que dicha reducción es función del grado de ductilidad ( $\mu$ ) del conjunto de la estructura, difícil de evaluar, así como por la necesidad de evitar riesgos de fatiga, plastificaciones alternadas, acumulación de deformaciones plásticas, roturas frágiles, etc. Parece en cualquier caso, y así lo reflejan algunos autores (ref. [1], [8] ) que la Norma española incluye implícitamente, como la mayoría de ellas, un cierto grado de ductilidad en su espectro de respuesta.

- c) El espectro de la Norma española presenta en cambio diferencias sensibles frente a los anteriores:
- c.1) En la zona de períodos altos, la PDS reduce más rápidamente el espectro de aceleraciones –función de  $(1/T^{4/3})$ –, que la Norma francesa –función de  $(1/T^{3/4})$ – y los criterios propuestos por otros autores (ref. [2] ) –función de  $(1/T^{2/3})$ –. Dicha reducción podría explicarse por lo anteriormente expuesto.
  - c.2) La aceleración máxima, así como el período para el que se produce ( $\approx 0.25$  seg.) coinciden con los establecidos por la Norma francesa.
  - c.3) En cambio, en la zona de períodos cortos (estructuras muy rígidas), la PDS congela el espectro en su valor máximo (correspondiente a  $T = 0.25$  seg.), sin reflejar la reducción que se produce en la realidad hasta alcanzar la amplificación dinámica nula (aceleración estructura igual a la del terreno) cuando  $T$  tiende a cero.

Dicha actuación debe interpretarse en base a ciertas consideraciones:

- Por un lado, cubrir la posible acumulación de los efectos de modos superiores de vibración no considerados, susceptible de alcanzar niveles apreciables especialmente si la amortiguación, difícil de evaluar, es débil. Conviene señalar que en estos casos es posible que la situación pésima se produzca coincidiendo con el máximo del segundo o tercer períodos (todavía poco amortiguados), cuando el primero se halla próximo a su cota máxima.
- Por otra parte, no hay que olvidar que la PDS está orientada principalmente al análisis de edificaciones, cuyos períodos fundamentales de vibración sólo pueden estimarse de forma aproximada, al no poderse evaluar con precisión la influencia de la rigidez de los cerramientos, elementos no estructurales, etc. Si se une el hecho de que los períodos normales de edificios se hallan próximos a la zona del espectro de máxima amplificación, y que dicha zona es muy sensible (véanse ap. 2 y figs. 2 y 3) a las características del terremoto, distancia epicentral, tipo del terreno de la base, etc., difíciles de predecir para cada caso concreto, se extiende el criterio conservador preconizado por la PDS.

Existe otro hecho fundamental que actúa en igual sentido, consecuencia de la forma de los espectros de respuesta. Al contrario que en estructuras esbeltas, en la zona de períodos cortos ( $T < 0.2$  seg.), los efectos de la pérdida de rigidez de la estructura, producto de eventuales fisuraciones o plastificaciones en cerramientos o elementos infradimensionados, actúan desfavorablemente aumentando las aceleraciones y, por tanto, los esfuerzos sísmicos (sistemas de “falla insegura”, según Newmark [1] ).

Si el suelo no es rígido, la interacción suelo estructura, difícil y raramente controlable, aumenta asimismo el período fundamental de la respuesta frente al que se obtiene sobre suelo rígido, por lo que puede aplicarse lo expuesto en el apartado anterior.

### 3.4.5. Evaluación de las fuerzas sísmicas para los diferentes modos de vibración

De lo dicho en el apartado c) precedente, se infiere que la aplicación de la PDS en la zona de períodos cortos ( $T < 0.2$  seg.), no resulta justificada por extremadamente conservadora en aquellos casos, como el que nos ocupa, de estructuras esbeltas sobre suelos rígidos, en las que se estudia un elevado número de respuestas modales y donde la ausencia de cerramientos y elementos no estructurales garantiza la relativa fiabilidad de los valores de los períodos obtenidos.

Dada la similitud de respuestas máximas en las Normas PDS y PS, se han tomado los valores de ésta última en su rama descendente hacia  $T = 0$  seg.

Las fuerzas sísmicas toman finalmente la expresión:

$$F_{im} = p_i \cdot \eta_{im} \cdot s_m \quad (i, \text{nudo}; m, \text{modo de vibración})$$

El factor de distribución  $\eta_{im}$  es a su vez (ec. 10.3):

$$\eta_{im} = \phi_{im} \cdot \frac{Z_m}{\sum Z_m}$$

Si llamamos  $\alpha_m = \frac{Z_m}{\sum Z_m}$  y  $\beta_m = s_m \cdot \alpha_m$ , ambos coeficientes permiten "valorar" y "seleccionar" la importancia de las respuestas de los diferentes modos:

$\alpha_m$ , Como ya se señaló en el apartado 2.2, refleja el nivel de excitación o respuesta sísmica de cada modo de vibración frente a una determinada aceleración del terreno.

$\beta_m$ , Incorpora además, a través de  $s_m$ , el efecto de la amplificación de la respuesta dinámica de la estructura, función del período de vibración de cada modo. Representa el coeficiente sísmico final en el nudo más solicitado de cada modo.

Ambos coeficientes, indicados asimismo en las figs. 11 y 12, se resumen en la tabla siguiente:

Análisis Modo	$\alpha_m$			$\beta_m$		
	I	II	III	I	II	III
1	1,90	-0,36	0,15	0,011	-0,005	0,002
2	1,27	0,15	1,40	0,023	0,005	0,031
3	0,48	-0,66	0,24	0,033	-0,039	0,009
4	0,80	0,57	0,34	0,149	0,039	0,015
5	0,41	-0,75	0,35	0,080	-0,058	0,018
6	0,37	0,10	0,47	0,081	0,011	0,034
7	0,60	1,05	-0,01	0,106	0,123	-0,001
8	0,81	-0,18	0,19	0,124	-0,027	0,019
9	0,14	-0,70	0,07	0,016	-0,111	0,007
10	0,12	0,01	0,07	0,011	0,001	0,009

### *Análisis I (transversal)*

A partir de los coeficientes  $\alpha_m$  y  $\beta_m$ , así como de los esquemas de los modos de vibración (fig. 11), puede constatarse que a partir del 8º modo, las respuestas dinámicas son despreciables. Si bien las formas de los dos primeros modos (fundamentales en pila y tablero respectivamente) son más activas ( $\alpha_m$ ), sus elevados períodos reducen mucho la respuesta en relación a los modos 4,5, 6,7 y 8 (especialmente el 4 y 8), cuyos períodos comprendidos entre 0,15 y 0,25 seg. amplifican mucho la respuesta.

La pila se verá afectada principalmente por los modos 1, 2, 5, 7 y 8. El tablero por los modos 2, 3, 4, 6 y 8. Los subrayados corresponden a los fundamentales de cada uno (véase fig. 11).

### *Análisis II y III (longitudinal)*

Los coeficientes  $\alpha_m$  y  $\beta_m$  se incluyen en la tabla anterior. En la fig. 12, se presentan los esquemas de los diferentes modos de vibración.

Se constata como la respuesta de la estructura frente al sismo longitudinal es mucho menos activa que frente al transversal. En este caso sí existe concordancia entre la aceleración forzada del terreno y la dirección de las fuerzas de inercia (el vector de influencia ( $r$ ) del apartado 2.2 es igual a (1)). En cambio, frente al sismo longitudinal, los coeficientes de excitación modal  $L_m$  y  $\alpha_m$  son mucho más reducidos. En efecto, la aceleración horizontal del terreno concuerda con las fuerzas de inercia de la pila pero es normal a las del tablero. Por el contrario, la aceleración vertical del terreno actúa en sentido inverso.

Los coeficientes  $\alpha_m$  reflejan perfectamente esta situación:

Frente a signo vertical (análisis III) responden principalmente los modos 2, 4, 6, 8 y 10. Entre ellos, el 2 y 6 son los más activos. La mejor respuesta del 2 frente al 6 queda contrastada por la mayor rigidez de éste (T más corto).

Frente al sismo horizontal (análisis II), los modos más excitados son el 1, 3, 4, 5, 7, 8 y 9. El 4 y 8 corresponden a formas excitadas análogamente en sentido horizontal y vertical. Incluyendo los efectos de la rigidez (períodos), las respuestas pésimas se obtienen para los modos 3,4 y 5.

Mención aparte merecen los modos 7 y 9, con mucho los más activos ya que resultan del acoplamiento entre las respuestas horizontales de pila y tablero, cuyo tratamiento se abordará más adelante.

### *3.4.6. Análisis de la envolvente de esfuerzos sísmicos*

#### *Análisis I (Sismo transversal)*

A partir de las fuerzas sísmicas obtenidas según se indicó en 3.4.5., se ha analizado la estructura transversalmente como emparrillado (equivalente al usado para obtener los modos de vibración) y posteriormente la pila como marco en forma de A a partir de sus fuerzas de inercia y de la acción concentrada del tablero suministrada por el emparrillado. Las leyes de flectores transversales del tablero para los distintos modos se indican en la fig. 16.

La superposición de respuestas modales se hace según el criterio de Newmark según se indicaba en el apartado 2.4:

$$q_i = \sqrt{\sum_j q_{ij}^2}$$

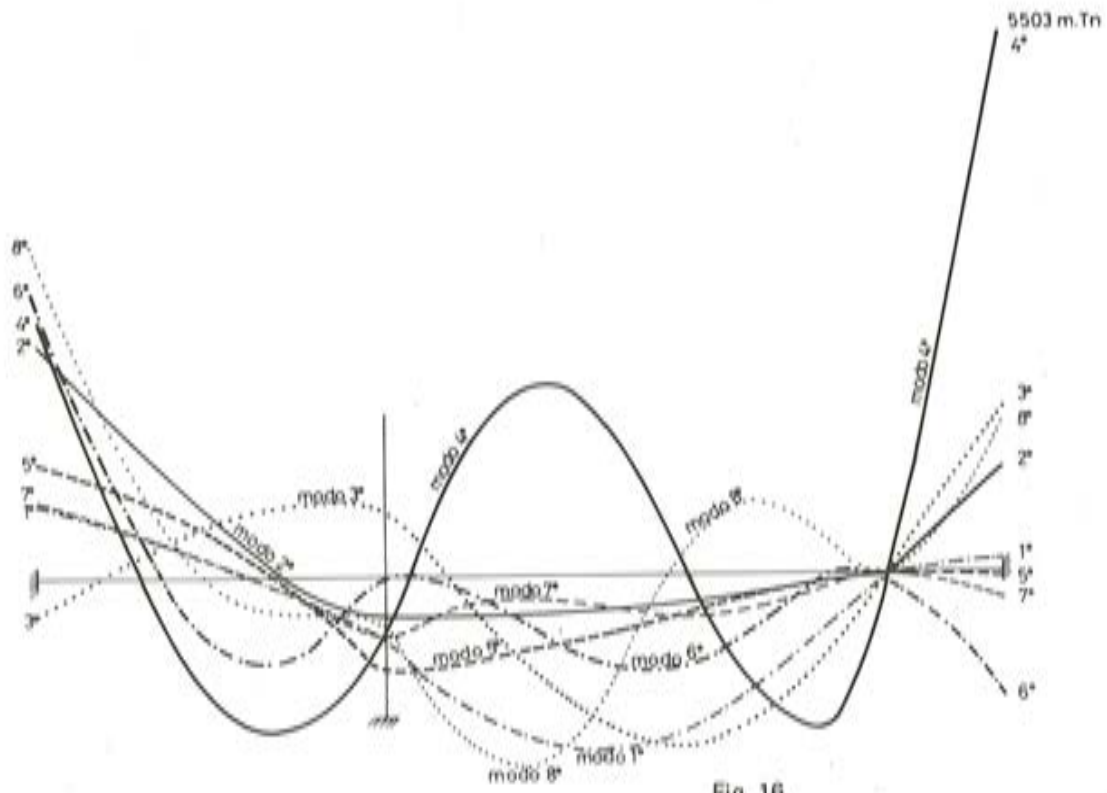


Fig. 16.

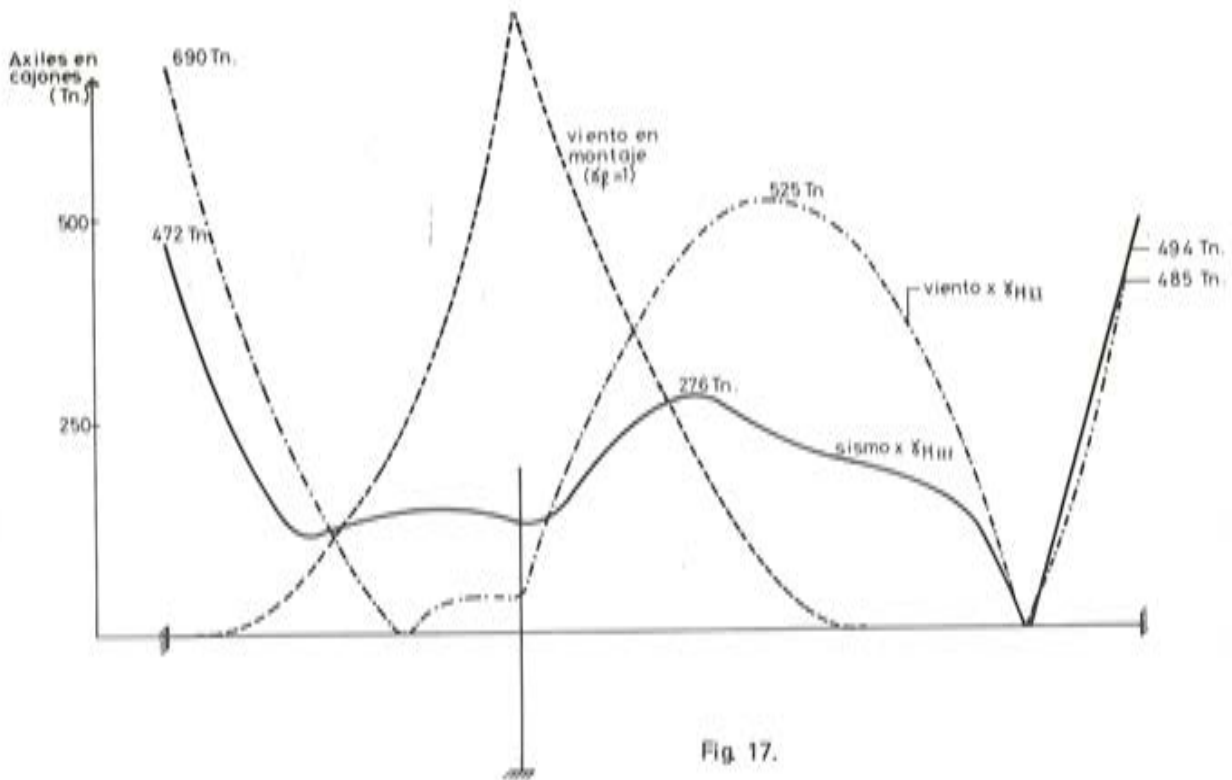
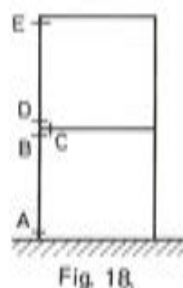


Fig. 17.

En la fig. 17 se reflejan las leyes de flectores transversales pésimos debidos al sismo, junto con las producidas por el viento transversal sobre estructura terminada ( $\gamma_f = 0,9 \times 1,5 = 1,35$ ) y sobre estructura en fase final del montaje en voladizo ( $\gamma_f = 0,9 \times 1,35 \approx 1,2$ ).

Se observa como la hipótesis de viento transversal aparece siempre como condicionante frente al sismo, salvo en la zona del vano corto próximo a la pila (punto de inflexión del efecto de viento), donde la respuesta de los modos 3,4 y 6 es más desfavorable. Se trata en cualquier caso de una zona poco solicitada en la obra terminada, cuyo dimensionamiento queda condicionado por la actuación del viento transversal en la fase de montaje en voladizo.

La respuesta transversal de la pila frente a sismo queda reflejada en el cuadro adjunto, donde se incluyen los flectores en diferentes secciones de la misma (véase esquema fig. 18) para los diferentes modos, así como el resultado de la superposición modal según el criterio de Newmark. Se constata como los esfuerzos sísmicos pésimos aparecen en la pila para los modos 5 y 7.



En dicho cuadro se incluyen asimismo los valores del proyecto, para las hipótesis de viento sobre estructura terminada y en fase de montaje, que resultan ser claramente dimensionantes.

<i>Sismo</i>	<i>Momentos flectores</i>					
	<i>Modo</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
	1	-160,7	120,7	259,9	-139,2	118,2
	2	-97,1	53,4	38,3	15,1	-47,7
	3	115,3	-79,3	-121,5	42,2	-13,8
	4	-372,5	303,0	561,0	-258,1	117,8
	5	-554,2	473,4	918,8	-445,4	208,8
	6	102,0	-29,7	2,3	-32,0	16,0
	7	-719,6	278,8	334,8	-55,9	57,0
	8	-215,9	62,1	97,9	-35,8	44,3
Envolvente Newmark		1.034	650	1.168	540	282
Viento estructura terminada				3.255,7		476,3
Viento Montaje		5.131,7	4.852,0	7.494,7	3.530,5	1.086,2

#### *Análisis II/III (Sismo longitudinal)*

Los resultados obtenidos pueden resumirse en los siguientes puntos:

a) Las fuerzas sísmicas verticales en el tablero no son de gran relevancia. Las respuestas pésimas corresponden a los modos 3, 4 y 5 frente a sismo horizontal y a los 2 y 6 frente a un sismo vertical. El nivel moderado de las fuerzas sísmicas, así como la amortiguación de esfuerzos que se produce como consecuencia del elevado número de ondas de los modos más activos mantiene dichos esfuerzos netamente por debajo de los debidos a las sobrecargas móviles en todo el tablero.

b) El momento máximo en base de pila aparece en el modo 3 – ligeramente superior al obtenido en los modos 4 y 5—. Las fuerzas horizontales máximas son algo superiores a las del viento, pero su distribución no uniforme en la altura de la pila (los máximos aparecen a mitad del fuste y las fuerzas en cabeza de pila son casi nulas), así como la reducción de coeficientes de ponderación en la hipótesis sísmica frente a la de viento, hacen que el flector ponderado de ésta última sea algo superior.

Sóloamente, en la zona alta del fuste, con los modos 7 y 9 como preponderantes, los esfuerzos sísmicos (corte principalmente) superan a los de viento. Se trata, no obstante, de una zona débilmente solicitada.

En cualquier caso, la hipótesis claramente dimensionante a flexión transversal del fuste, la constituye el desequilibrio máximo de cargas verticales en fase de montaje.

c) Los modos 7 y 9, correspondientes a la oscilación longitudinal del tablero y pila son muy activos, como consecuencia de su alta rigidez y bajos períodos, dando lugar a importantes fuerzas longitudinales en el tablero que solicitan el apoyo fijo del extremo izquierdo del puente, así como su estribo correspondiente.

En el dimensionamiento de ambos frente a acciones longitudinales debe pues considerarse dicha acción sísmica horizontal, así como el momento flector transversal de la hipótesis de viento antes citada (fig. 17).

En el proyecto se materializó el apoyo fijo entre tablero y estribo a través de unos topes entre los que se intercalaron gruesos neoprenos de manera que se aumenta el amortiguamiento y se reduce la rigidez de la transmisión del efecto sísmico al tablero.

#### 4. OBTENCION MODOS PROPIOS DE TORSION

Se ha realizado asimismo un análisis dinámico con el programa STRUDL DINAMICO con objeto de obtener los períodos y modos propios de vibración a torsión del tablero, necesario bajo un doble punto de vista:

- a) Obtener la frecuencia del modo fundamental de torsión del tablero, necesaria para el control de la estabilidad aerodinámica del mismo.
- b) Contrastar la validez de la simplificación realizada en el análisis sísmico transversal, donde se ha considerado un único grado de libertad dinámica y despreciado por tanto los efectos del acoplamiento entre flexión transversal y torsión del tablero (véase ap. 2 y 3 y análisis I).

El mecanismo de oscilación por torsión en un tablero de este estilo puede asimilarse a un doble mecanismo de flexión en cada uno de los dos planos de rigidez de la estructura (viga cajón, cables, fuste de la pila), antimétrico respecto al eje central de la misma. La masa total del tablero se asimila a una masa equivalente situada en los dos planos de flexión, cuya magnitud se estima de manera que se mantenga el mismo momento de inercia másico respec-

to al eje del tablero:

$$m^* = \frac{\sum m_i \cdot y_i^2}{2 b^2}$$

A diferencia de lo que ocurriría si las dos vigas laterales fueran muy poco rígidas a torsión, o la unión entre ellas no tuviera rigidez a flexión, en nuestro caso el juego conjunto de los mecanismos de torsión del cajón y de flexión transversal del conjunto de losa y riostras, se opone a la libre flexión asimétrica de los dos planos de flexión. En el modelo procesado por el STRUDL se ha simulado esta situación mediante unos resortes aplicados en los puntos de unión riostras-cajón, cuya rigidez se ha estimado mediante un análisis del emparrillado del tablero sometido a un estado asimétrico de carga que simula la deformación del primer modo de torsión (fig. 19). La coacción que la rigidez a flexión transversal y torsión del dintel y travesaño de la pila, confiere a la libre deformación de los fustes, se ha estimado igualmente mediante un doble resorte al giro y desplazamiento longitudinal.

Los esquemas de los primeros modos a torsión se incluyen en la fig. 20. Las deformadas son similares a las de flexión longitudinal, aunque los períodos resultan ser más cortos.

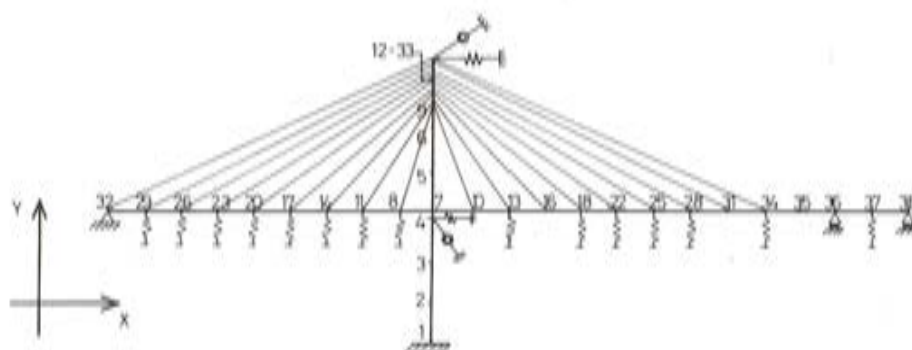


Fig. 19.

Los períodos fundamentales de vibración de la estructura resultan ser:

Torsión :  $T_t = 0,799$  seg.

Flexión en el plano de la estructura :  $T_{f1} = 1,848$  seg.

Flexión en el plano transversal a la estructura :  $T_{f1} = 3,562$  seg.

La gran diferencia entre  $T_t$  y  $T_{f1}$  permite aceptar sin reservas la simplificación comentada en el párrafo b) precedente.

La relación entre los períodos propios a flexión longitudinal y torsión es :  $\delta = 1,848 / 0,729 = 2,31$ .

Como constatación de la bondad de dicho coeficiente adjuntamos los valores que toma en algunos otros puentes:

- S. Nazaire: 4,25
- Severn: 3,97
- Brotonne: 3,22
- Golden Gate (reforzado): 1,96
- Leverkusen: 1,58
- Rande: 1,53
- Kniebruke: 1,42

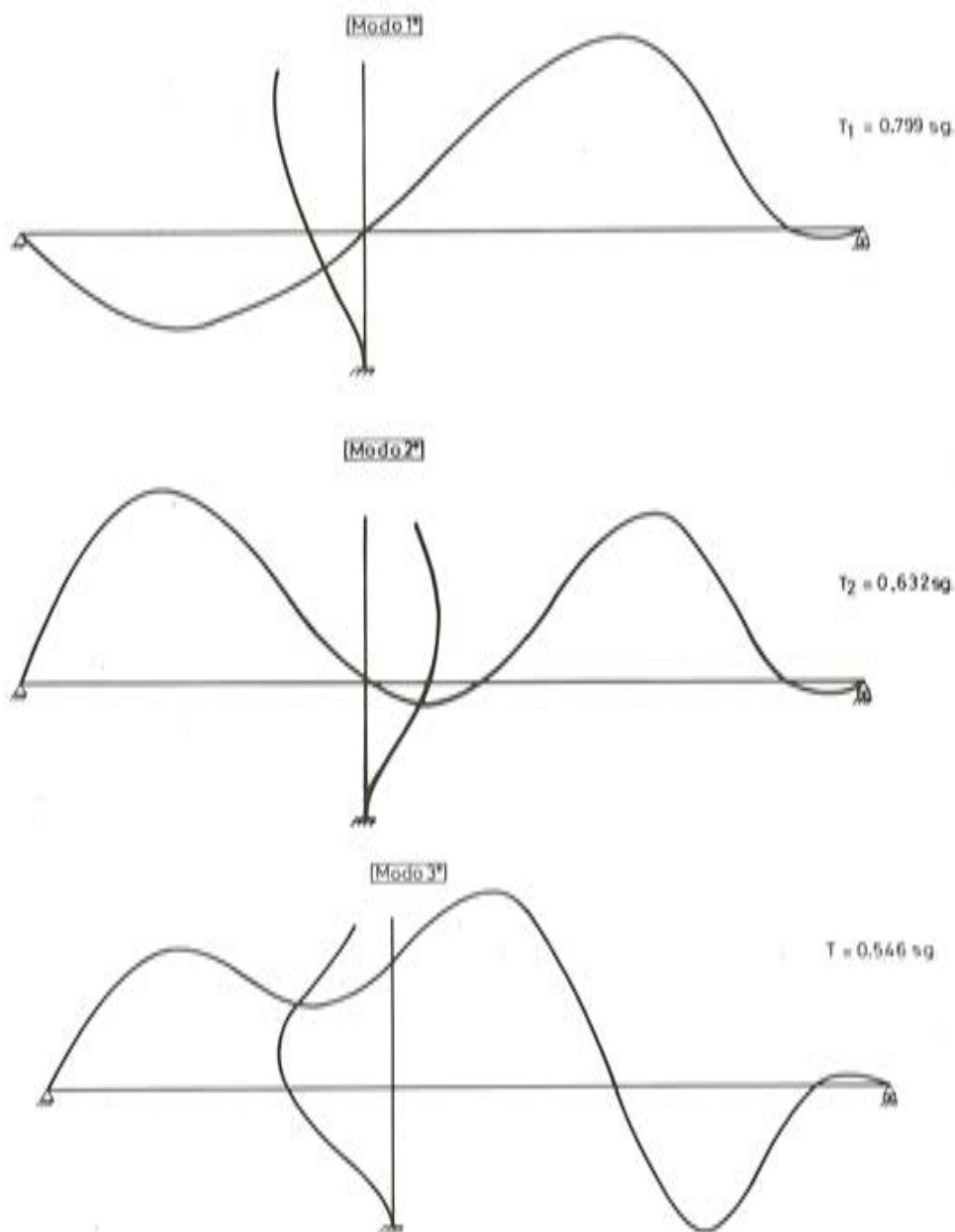


Fig. 20. Modos propios de torsión.

Vemos como el valor del proyecto queda encajado, siendo sólo superado por puentes como Severn, S. Nazaire y Brotonne que, al ser de gran longitud y estar situados en estuarios sometidos a fuertes vientos, fueron proyectados con formas especialmente aerodinámicas, constituyendo dicho problema uno de los criterios fundamentales de diseño.

Se han obtenido asimismo los períodos fundamentales eliminando los resortes antes comentados. La mayor flexibilidad de la estructura aumenta mucho el período fundamental:  $T'_1 = 1.713$  seg., que se acerca apreciablemente al de flexión longitudinal:  $\delta' = 1.848/1.713 = 1.08$ . Al haberse prescindido del arriostramiento suministrado por el dintel y travesaño y de la rigidez a torsión del tablero, que equivale así a una sección abierta con doble viga de alma llena, el comportamiento aerodinámico del sistema empeora apreciablemente, como es bien sabido.

## 5. CONCLUSIONES

Resumimos a continuación las principales conclusiones que se extraen del presente estudio:

1. La generalidad de las Normas Sísmicas, incluida la española, establecen criterios para el control sísmico de edificios y estructuras asimilables a ménsulas verticales solicitadas por una aceleración horizontal en su base. La transposición automática de dichos criterios no es válida para el caso de puentes atirantados.
2. El análisis modal de un puente atirantado debe adaptarse para tener en cuenta:
  - a) Longitudinalmente, la interacción pila-tablero a través de los cables obliga a considerar dos grados de libertad dinámica por nudo (horizontal y vertical).
  - b) Las componentes horizontal y vertical del sismo, sólo coinciden con uno de los grados de libertad de los nudos. La formulación modal precisa incorporar un vector de influencia (véase ap. 2) para tener en cuenta este hecho.
  - c) Transversalmente, es necesario controlar el posible acoplamiento entre la flexión transversal y torsión del tablero, si los centros de masa y torsión están alejados y sus períodos fundamentales son parecidos.

Si hay peligro de acoplamiento es preciso considerar dos grados de libertad por nudo (giro a torsión y desplazamiento transversal) y operar análogamente el caso longitudinal, utilizando un vector de influencia.

En caso contrario puede prescindirse de la torsión y considerar un sólo grado de libertad dinámica. En este caso la expresión del factor de distribución coincide con el de la PDS-74. Los esfuerzos de torsión pueden estimarse posteriormente "estáticamente", a partir de las fuerzas sísmicas transversales y las excentricidades entre centros de masa y torsión.

3. La aplicación del espectro de la Norma Sísmica española en la zona de períodos cortos queda excesivamente del lado de la seguridad para estructuras esbeltas en las que se considera la superposición de un elevado número de respuestas modales. Dicho espectro está especialmente concebido para su uso en edificación (véase ap. 3.4.4.).
4. La mayor parte de las Normas Sísmicas utilizan espectros de respuesta en los que la amplificación dinámica máxima se produce para obras cuyos períodos oscilan entre 0.20 y 0.25 seg. Dicha situación corresponde a suelos rígidos y epicentros próximos. Si el epicentro se aleja, la respuesta máxima suele producirse para períodos algo superiores ( $T \approx 0.30$  a  $0.50$  seg.), aunque las intensidades disminuyen. Los espectros de las normas dejan de ser claramente válidos cuando la obra yace sobre suelos formados por mantos gruesos y blandos (Méjico, por ejemplo) donde las respuestas máximas pueden afectar a estructuras esbeltas con períodos de hasta 2.5 seg. En este caso es preciso utilizar espectros de diseño más realistas.
5. Cuando el período fundamental de la estructura es menor que aquél para el que se produce la máxima amplificación dinámica (caso estructuras rígidas o de suelos blandos), existe el peligro de "falla insegura" por lo que conviene, como hace la PDS, congelar el espectro de respuesta en su valor máximo para la zona de períodos cortos.
6. En caso contrario, como es el de los puentes atirantados sobre suelo firme, cuando se realiza un análisis modal considerando un elevado número de respuestas modales, es preciso adoptar una rama descendente del espectro de respuesta en la zona de período-

dos cortos. Con ello se evita la sobreestimación excesiva de las respuestas de los modos superiores.

7. En el análisis sísmico de puentes atirantados, dadas su gran esbeltez y especial tipología estructural, es preciso obtener la respuesta de un elevado número de modos propios, y aplicar el principio de superposición cuadrática. La consideración de tres modos es insuficiente pues en muchos casos los modos superiores son más activos. Es preciso asimismo acotar los diferentes mecanismos de vibración, así como los modos más activos frente a cada una de las respuestas a obtener, pues no son los mismos.

En el análisis transversal, la discretización debe reflejar adecuadamente la vinculación transversal entre pila y tablero, ya que se produce una fuerte interacción entre ambos y entre sus formas propias de vibración. El análisis separado de pilas y tablero no es correcto.

8. Como consecuencia de la elevada esbeltez, los modos superiores son los más activos, por lo que el elevado número de ondas que se contrarrestan reduce el nivel de los esfuerzos en la estructura. Por otra parte, la reducción de los coeficientes de ponderación en la hipótesis sísmica que establecen las Normas frente a las restantes hipótesis, hace que, incluso en zonas de intensidad sísmica apreciable, raramente ésta sea dimensionante.
9. Las hipótesis condicionantes del proyecto, en general claramente más desfavorables que la sísmica, son las siguientes:

- Viento transversal en montaje, con el tablero en ménsula, para los esfuerzos pésimos de flexión transversal en la pila, dinteles y travesaños (trabajando como marco) y en la zona del tablero próxima a ella.
- Viento transversal sobre estructura terminada en la flexión transversal del tablero en las zonas de estribos y centro vanos, así como en el dimensionamiento de estribos y puntos fijos de apoyo frente a acciones horizontales.
- Desequilibrio máximo de cargas verticales durante la fase de montaje en voladizo, para la flexión longitudinal en base de pila.
- Sobrecargas máximas en estructura terminada para la flexión longitudinal del tablero.

Es preciso, en cambio, controlar desde la primera fase del proyecto la transmisión de esfuerzos longitudinales a través de los posibles puntos fijos del tablero, pudiendo incluso preverse la eliminación o flexibilización de dichos puntos fijos.

10. Lo dicho en los apartados 8 y 9 no elimina la importancia del control y diseño frente a acciones sísmicas, principalmente a nivel de detalles constructivos, con el fin de asegurar la validez del análisis efectuado: evitar posibles vuelcos, deslizamientos de tramos, reptación de aparatos de apoyo, movimientos de la cimentación y estribos, fallos de estabilidad de laderas, coacciones no previstas en juntas, etc.

## REFERENCIAS

- (1) N. M. NEWMARK, E. ROSENBLUETH.— "Fundamentos de Ingeniería Sísmica". Editorial: Dianan 1976.
- (2) E. ROSENBLUETH.— "Design of Earthquake Resistant Structures". Editorial: Pentech Press, 1980.

- (3) A. CAPRA y V. DAVIDOVICI.— "Calcul Dynamique des Structures en zone sismique". Editorial: Eyrolles 1980.
- (4) P. L. GOULD, S.H. ABU-SITTA.— "Dynamic Response of Structures to Wind and Earthquake Loading". Editorial: Pentech Press. 1980.
- (5) R. W. CLOUGH, J. PENZIEN.— "Dynamics of Structures". Editorial: Mc Graw-Hill. 1975.
- (6) A.H. BARBAT.— "Cálculo Sísmico de las Estructuras". Editorial: Técnicos Asociados. 1982.
- (7) "Regles Parasismiques 69 et Annexes". Editorial: Eyrolles. 1976.
- (8) M.A. HACAR, E. ALARCON.— "Elementos de Dinámica Aplicada a las Estructuras". 1972.
- (9) Norma Sismoresistente PGS — 1. 1968.
- (10) Norma Sismoresistente PDS — 1. 1974.



**asociación técnica  
española del pretensado**