hormigón

y ACERO

nº159

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)

APARTADO 19.002. COSTILLARES. CHAMARTIN.

28080 MADRID

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "**Miembro Protector**", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "**Miembros Protectores**" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).— P° de la Habana, 14. 28036 Madrid.

AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.— Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.

AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMEN".— Velázquez, 23. 28001 Madrid.

ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).— Orense, 10. 28020 Madrid.

AZMA, S.A.— P° de la Habana, 16. 28036 Madrid.

BIGUETES, S.L.— Partida Altabix, s/n. Elche (Alicante).

CAMARA, S.A.— Apartado 180. 36080 Pontevedra.

CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.— Grijalba, 9. 28006 Madrid.

CEMENTOS MOLINS, S.A.— C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Vicenç dels Horts (Barcelona).

CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS. Gabinete de Información y documentación.— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.

CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A., C.T.T., S.A.— Aribau, 185. 08021 Barcelona.

COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.— Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.

COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS DE MADRID.— Almagro, 42. 28010 Madrid.

COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.

COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.— Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.

CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.— Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.

CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.— Ayala, 42. 28001 Madrid.

DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Avda. de América, 24. 28028 Madrid.

EMESA-TREFILERIA, S.A.— Apartado 451. 15080 La Coruña.

EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento Obras Especiales.— Padilla, 46. 28006 Madrid.

ENAGA, S.A.— Hermanos Fernández Carvajal, 31. 28023 Pozuelo de Alarcón (Madrid).

ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.— Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).— Arapiles, 14. 28015 Madrid.

EUROCONSULT, S.A.— Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).

FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.

FORJADOS DOMO.— Hermosilla, 64. 28001 Madrid.

FREYSSINET, S.A.— General Perón, 24. 28020 Madrid.

GRACE, S.A.— Apartado 523. 08080 Barcelona.

HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.— Archs, 10. 08002 Barcelona.

HISPANO-ALEMANA DE CONSTRUCCIONES, S.A.— Capitán Haya, 51. 28020 Madrid.

HORMIGONES GERONA, S.A.— Lorenzana, 45. 17002 Gerona.

HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.— Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.

(Continúa en el int. de contraportada)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

HUARTE Y CIA, S.A. Departamento Técnico.— Profesor Waksman, 14. 28036 Madrid.
IBERDUERO, S.A. Centro Documentación.— Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
IBERDUERO, S.A. Centro de Documentación.— Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).— Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.— Plaza Gala Placidia, 5-7. 08006 Barcelona.
INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.— Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPSA).— General Díaz Porlier, 49-51. 28001 Madrid.
INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).— Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.— Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. P^{o} de la Castellana, 67. 28071 Madrid.
INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).— Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA).— Biblioteca.— Orense, 70. 28020 Madrid.
JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.— Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
MECANOGUMBA, S.A.— Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.— Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
OBRAS Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES, S.A. (OCISA).— Princesa, 3-7°. 28008 Madrid.
PACADAR, S.A.— Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
PRENSOLAND, S.A.— Calle Industria, s/n. 08529 Sant Marti de Centelles (Barcelona).
PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.— Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.— Avda. del Triunfo, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
SIKA, S.A.— Carretera Madrid-Irún, km. 14,500. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA BBR (S.A.E. BBR).— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SECEGSA).— Estébanez Calderón, 3 - 1° A. 28020 Madrid.
TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).— Velázquez, 105. 28006 Madrid.
TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.— Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).— Monturiol, 5. Santa María de Barbará (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente, su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO
DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

hormigón y acero

n.º 159

2.º trimestre 1986

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales)	4.500,– ptas.	40,– dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas)	7.000,– ptas.	100,– dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	12.000,– ptas.	200,– dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - 28080 MADRID

Depósito Legal: M-853-1958
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID
ISSN: 0439-5689

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Comité de Redacción
de la Revista
Hormigón y Acero

ARENAS, Juan José
BARREDO, Carlos
CUVILLO, Ramón del
CHUECA, Rafael
ELICES, Manuel
FERNANDEZ DE VILLALTA, Manuel
FISAC, Miguel
GONZALEZ VALLE, Enrique
JODAR, Juan
JULIA, Manuel
LLOMBART, José Antonio
MANTEROLA, Javier
MARIA TOME, Javier
MURCIA, Juan
PIÑEIRO, Rafael
POZO VINDEL, Florencio J. del
ROMERO, Rafael
SANCHEZ CASTRO, Carlos
SANCHEZ GALVEZ, Vicente
SIEGRIST, Carlos

hormigón y acero

N. 159

índice

Pág.

457-0-101 **Puentes en viga cajón. Estado tensional en el nudo pila-dintel** 9
Ponts en poutre à caisson. Etat de contraintes dans le nœud pile-linteau.
Box-girder bridges. State of stresses at the pier-lintel junction.
L. Carrillo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

457-0-102 **Análisis, mediante elementos finitos, de tableros nervados de hormigón armado. Estudio del ancho eficaz en secciones en T** 41
Analyse par la méthode des éléments finis, des tabliers nervurés de ponts en béton armé. Etude de la largeur efficace des sections en T.
Analysis by means of finite elements method, of the reinforced concrete ribbed bridge decks. Study of the effective width of T-beam sections.
J. Miquel y A.R. Marí.

457-1-5 **Obtención de funciones de forma analíticas para la lámina troncocónica con flexión axisimétrica y material ortótropo.** . 61
Obtention de fonctions de forme, analytiques, pour le voile troncoconique avec flexion axisymétrique et matériau orthotrope.
Determination of analytical form functions, for the trunk-conical shell with axisymmetrical bending and orthotropic material.
F.J. Bonet.

457-2-27 **Extensión de la fórmula de Merchant-Rankine para las estructuras metálicas planas, traslacionales, de retícula no ortogonal** 75
Application de la formule de Merchant-Rankine aux structures métalliques planes, translationnelles, de réticule non orthogonal.
Application of the Merchant-Rankine formula to the flat metallic structures, translationals, of non orthogonal frame.
J. Ortíz y A. Mas-Guindal.

457-2-28 **En torno del análisis lineal de estructuras de hormigón pretensado** 95
Analyse non linéal des structures de béton précontraint.
Non-lineal analysis of prestressed concrete structures.
J. Murcia

457-5-13 **Métodos numéricos de cálculo dinámico de autovalores y autovectores en las vibraciones mecánicas de elementos resistentes** 115
Méthodes numériques de calcul dynamique de autovaleurs et autovecteurs dans les vibrations mécaniques des éléments résistants.
Numerical methods for dynamic analysis of the autovalues and autovectors in the mechanical vibrations of the structural members.
M. Vieco

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

457-6-6 **Comparación de diversos sistemas de cálculo de las longitudes de anclaje de barras de acero corrugadas, en hormigón . . .** 125
Etude comparatif de divers méthods de calcul des longueurs d'ancrage des barres à haute adhérence, dans le béton.
Comparative study of different analysis methods of the anchorage lengths of high-bond bars in the concrete.
F. Rodríguez López y J. Fernández Gómez.

457-8-107 **Esfuerzo rasante en piezas compuestas** 141
Effort tangent le long de l'interface des pièces composées.
Shear at the interface of compound members.
J.J. Vallés

RECTIFICACION

En la página 19 del número 158 de "Hormigón y Acero", correspondiente al primer trimestre del año actual, dentro del "Informe resumido sobre las principales actividades desarrolladas por la A.T.E.P. durante 1985", y de acuerdo con la información entonces disponible, se dice que las "Jornadas de Ingeniería Estructural de Latinoamérica, España y Portugal", que habrán de celebrarse en Madrid, en el año 88, están organizadas y patrocinadas por el CEDEX.

Posteriormente, se nos ha comunicado que, en realidad, dichas Jornadas están organizadas y patrocinadas, conjuntamente, por el CEDEX y el Instituto Eduardo Torroja del C.S.I.C.

Por consiguiente, y lamentando el error involuntario padecido, rogamos a nuestros lectores tomen buena nota de esta rectificación, a los oportunos efectos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

ESPAÑA

ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.—Barcelona.
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT. S.A.".— La Coruña.
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Murcia.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Tarragona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE ARAGON. Biblioteca.— Zaragoza.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. Departamento de Laboratorios.— Santa Cruz de Tenerife.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.—Madrid.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.
COMERCIAL Y COLOCADORA DE TEXSA, S.A.— Barcelona.
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR. Biblioteca.—Sevilla.
CONTROLEX.—Alicante.
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.
DITECO, S.L.—Valencia.
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento de Construcción.—Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Biblioteca.—Córdoba.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.— León.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA OBRAS PUBLICAS.— Burgos.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE ALMADEN.—Almadén (Ciudad Real).
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.—Zumárraga (Guipúzcoa).
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.
EXCELENTISIMO AYUNTAMIENTO DE GRANADA. Area de Obras Públicas e Infraestructura.— Granada.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

FERROVIAL, S.A.– Madrid.
FORJADOS DOL.– Esquivias (Toledo).
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.– Madrid.
GIJON E HIJOS, S.A.–Motril (Granada).
HORMADISA, S.L.–Puentecesures-Cordeiro (Pontevedra).
HORMIGONES GERONA, S.A.–Gerona.
INBADELCA, S.A.–Baracaldo (Vizcaya).
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.–Tarrasa (Barcelona).
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.–Barcelona.
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).–Madrid.
J. CASTRO MATELO, S.A.–Sigueiro (La Coruña).
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.–Consejería de Obras Públicas y Ordenación Territorial. Servicio Tecnología e Información.–Valladolid.
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.–Santa Cruz de Tenerife.
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.–Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.–Madrid.
LIBRERIA RUBIÑOS.–Madrid.
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).–Castellón de la Plana.
MAHEMA, S.A.–Granollers (Barcelona).
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.–Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION. Sección de Normativa.–Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.–Madrid.
POSTENSA, S.A.–Bilbao.
PREBETONG CANARIAS, S.A.–Santa Cruz de Tenerife.
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).–Zaragoza.
PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).–Vitoria.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).–León.
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).–Valladolid.
PREFABRICADOS POUSA, S.A.–Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).–Valladolid.
REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A. (REISA).–Pinto (Madrid).
RUBIERA, S.A.–León.
SAINCE.–Madrid.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.–Barcelona.
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.–Gerona.
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.–Madrid.
SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.–Zamora.
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.–Barcelona.
SPANDECK CATALANA, S.A.–Barcelona.
TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).–Tarrasa (Barcelona).
TEJERIAS "LA COVADONGA".–Muriedas de Camargo (Cantabria).
TERRATEST, S.A.– Madrid.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).–Madrid.
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.–Valencia.
VIGUETAS MUBEMI.–Torrente (Valencia).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

EXTRANJERO

ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.—Monte - video (Uruguay).
ASSOCIAÇAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.—Santiago de Chile (Chile).
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.—Lima (Perú).
SARET P.P.B. Cadre Tecnique.—Le Pontet (France).
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.—Londres (Inglaterra).
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.—Facultad de Ingeniería. Biblioteca. Caracas (Venezuela).
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

* * *

AVISO IMPORTANTE

DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

ALVISA

PREFABRICADOS ALBAJAR

PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE





HUESCA:

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA
Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON
Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

MADRID

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10
Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4- 8 - TORREJON DE ARDOZ
Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

ZARAGOZA

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

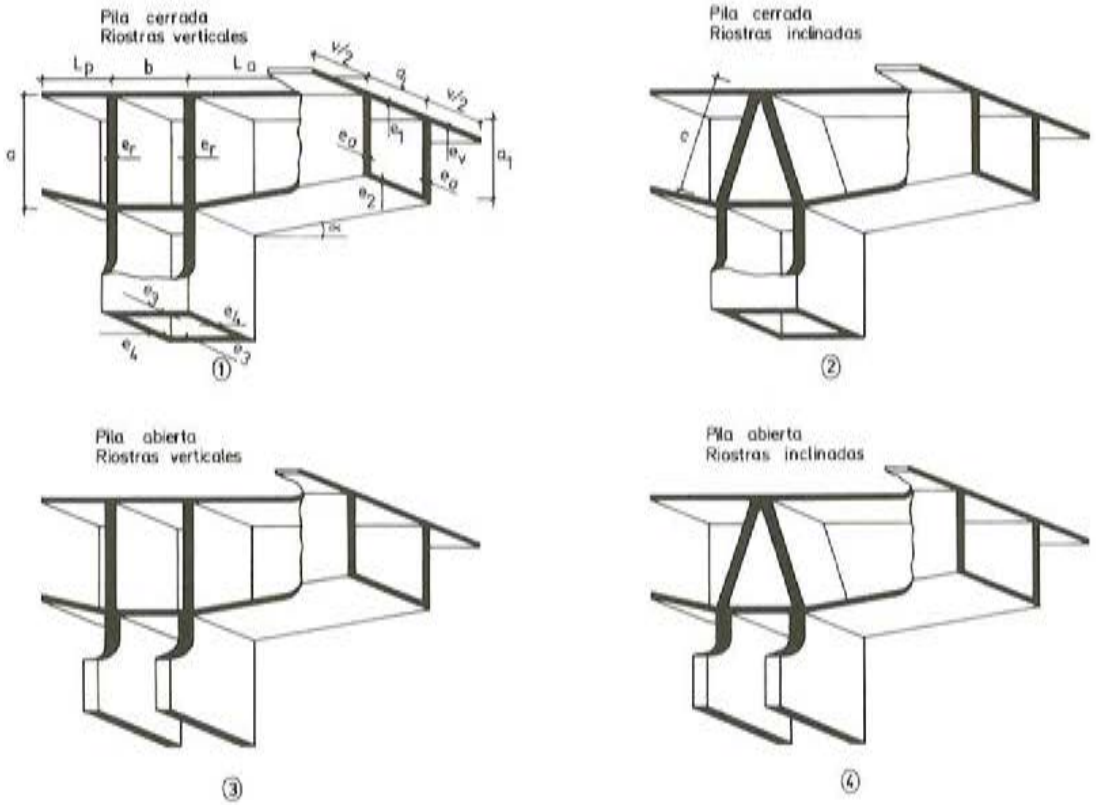
Puentes en viga cajón. Estado tensional en el nudo pila-dintel

Luis Carrillo
Dr. Ing. de Caminos

SINOPSIS

Se expone en este trabajo un análisis de los estados tensionales creados en las zonas próximas a los empotramientos del tablero en la pila, al estar sometido el dintel a solicitaciones de flexión, cortante o torsión, equilibradas mediante esfuerzos sobre la propia pila.

Se estudia el tablero en viga-cajón de canto variable, con almas verticales, empotrado en la pila y con dos planos de arriostramiento transversal (Fig. I).



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Se analizan los estados tensionales reales, obtenidos mediante programa de elementos finitos, comparándolos con los dados por la teoría elemental de la viga. Al mismo tiempo, se dan expresiones para calcular determinadas características del estado tensional que le definen en esta zona del encuentro, en función de las dimensiones geométricas que más le afectan.

1. INTRODUCCION

En los puentes de viga cajón, en las zonas próximas a los empotramientos en las pilas, al estar sometidos a cargas no simétricas respecto al eje de éstas y que han de equilibrarse mediante esfuerzos sobre ellas, el estado tensional que aparece sobre el conjunto se separa del comportamiento deducido por la teoría elemental de la viga.

Así, en el caso de solicitaciones de flexión (fig. II), en las secciones del tablero anteriores al encuentro, y suficientemente alejadas de él, las distribuciones son próximas a las deducidas partiendo de la hipótesis de deformación plana de dichas secciones transversales; pero al acercarse al empotramiento, como tanto los volúmenes de tracciones de la losa superior, como los de compresiones de la losa inferior, han de pasar a través de las almas para ser recogidas por la pila, las distribuciones comienzan a diferenciarse de las deducidas de la hipótesis de comportamiento lineal, llegando en la zona de empotramiento a ser imposible de predecir el estado tensional partiendo de esta hipótesis simplificadora.

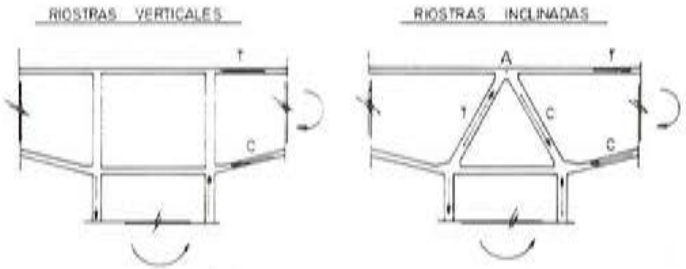


Fig. II.

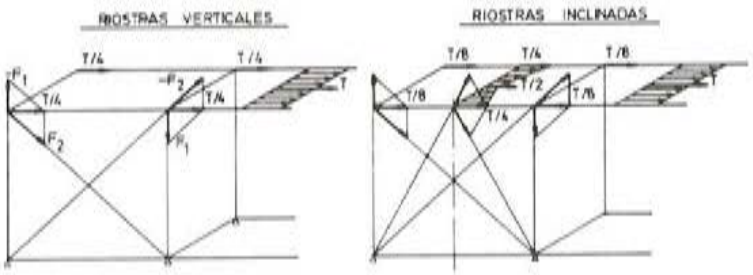


Fig. III. Esquema de cálculo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Este problema ha sido tratado en la referencia (1), en donde, tras un estudio de diferentes tipos de riostras y apoyos sobre pilas, para un tablero de canto constante, realizado mediante un programa de cálculo de elementos finitos, establece unas reglas de diseño para la resolución del problema en el caso de solicitación de flexión disimétrica (fig. III), que son válidas para el caso de tablero reposando sobre apoyos puntuales, desdoblados, situados bajo sus almas; pero cabe preguntarse el grado de aproximación que tendrán en el caso de empotramiento en la pila y cómo se realizará, para este nuevo tipo de nudo pila-dintel, el paso de los volúmenes de tensiones longitudinales de las losas superior e inferior del tablero, a través de sus almas y de las riostras, hasta llegar a las paredes anterior y posterior de la pila.

Por otro lado, al considerar la hipótesis de carga de un esfuerzo cortante sobre el dintel, que se ha de convertir en axil sobre el soporte, independientemente de las tensiones creadas por la flexión que acompaña al cortante, de forma intuitiva puede suponerse que, al estar este esfuerzo soportado en un gran porcentaje por las almas del dintel, pase parte directamente a las almas de la pila y parte, mediante esfuerzos rasantes, a las riostras, para a través de ellas llegar a las paredes transversales de la pila.

Sin embargo, aunque este sistema de equilibrio es claro en el caso de riostras verticales, cuando éstas están inclinadas es posible que se dificulte el paso a través de ellas, produciéndose un aumento en el porcentaje que pasa directamente a las almas de la pila; para que en la zona de ésta, inferior al nudo, pasen a sus paredes transversales, llegando en las secciones inferiores suficientemente alejadas del encuentro, a la tensión constante en todos sus puntos. Aparece, pues, la interrogante de la cuantía de ese incremento, si es que existe. Por el contrario, en el caso de pilas carentes de almas, es decir, formadas tan solo por los dos tabiques transversales, el equilibrio "cortante-axil" se ha de efectuar todo él a través de las riostras, y cuando, además, éstas son inclinadas, el mecanismo se complica, siendo difícil de predecir el estado tensional resultante.

Por otra parte, al considerar el dintel sometido a un esfuerzo torsor equilibrado mediante flexión transversal en el soporte, solicitación que puede aparecer bien por excentricidad de las sobrecargas respecto del eje del tablero o bien por curvatura de la planta del puente, el estado tensional que se supone es únicamente el tangencial deducido por la teoría clásica de torsión. Este tipo de estudio constituye la primera aproximación al estado tensional real.

Pero en la cercanía de los encuentros con la pila, la coacción que ésta representa frente al alabeo de la sección transversal del cajón, creado por el torsor, producirá un alabeo distinto en cada sección y, por tanto, la aparición de un estado de tensiones longitudinales. Al mismo tiempo, en el caso de riostra vertical, ésta impide la libre deformación en su plano de la sección del tablero que la contiene, es decir, coarta la distorsión libre de la sección. Por todo ello, es necesario considerar en estas zonas, tanto el alabeo torsional como la distorsión, con las distribuciones de tensiones que ellas crean y que constituyen una segunda aproximación al problema.

Los estados tensionales creados por estos mecanismos están completamente definidos en las referencias (2) y (3), para los casos teóricos de viga cajón sin ninguna coacción o con coacción completa al alabeo en sus extremos, y con ó sin diafragma de rigidez infinita a la distorsión en ellos. Pero sería interesante obtener la coacción real que representa la pila al

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

alabeo y distorsión del cajón, y analizar las distribuciones de tensiones creadas, consiguiendo una ampliación a las obtenidas bajo la hipótesis de coacción completa para ambos movimientos en la sección de encuentro; hipótesis que, si bien para distorsión es prácticamente cierta en el caso de la riostra vertical, no lo es tanto para riostras inclinadas, ni tampoco para el alabeo, en ninguna de estas dos disposiciones de diafragmas.

Para intentar contestar a todas estas interrogantes, se ha efectuado un trabajo consistente en el análisis de los estados tensionales creados, bajo los tres tipos de solicitaciones indicadas, sobre 52 estructuras diferentes.

1.1. Morfologías analizadas

Se ha estudiado el tablero en viga-cajón de canto variable, con almas verticales, empotrado en la pila y con dos planos de arriostramiento transversal (fig. I).

Dentro de esta tipología de tablero se consideran dos formas diferentes de pila: la de sección rectangular hueca con ancho igual al del tablero y canto igual a la separación entre diafragmas, y la de sección constituida por dos tabiques transversales rectangulares, aislados, en prolongación de los planos de riostra, con ancho igual al del cajón.

Por otro lado, se examinan los dos tipos de arriostramiento transversal fundamentales: en planos verticales, ó inclinados formando la celda triangular junto con la losa inferior, al incidir ambos diafragmas en la misma arista de unión con el ala superior.

Al mezclar estas dos formas de arriostramiento con las dos tipologías de pila consideradas, se obtienen los cuatro casos "modelo" que son analizados separadamente.

Para cada una de estas formas básicas se analiza la influencia sobre las características fundamentales del estado tensional de: las dimensiones generales que definen el conjunto pila-cajón, los espesores de todas las losas que lo forman, así como de los posibles aligeramientos de las riostras. Para ello, a partir del modelo base de cada morfología, se varían de una en una, las dimensiones geométricas (fig. I-1), creando los diferentes casos cuyos resultados, al pasarlos por el ordenador, sirven para obtener las fórmulas y diagramas que nos dan estas características tensionales.

1.2. Procedimiento de cálculo

El cálculo del estado tensional del conjunto pila-cajón, en las diferentes hipótesis de carga, se realiza con un programa de elementos finitos creado en especial para este trabajo. El elemento finito utilizado es el cuadrilátero de cuatro nodos, con seis grados de libertad por nodo, con su matriz de rigidez formada por los dos estados de deformación que caracterizan las losas que componen el conjunto; la rigidez de "membrana" para acciones en su plano y la de "flexión" para acciones normales a él. Todo ello suponiendo comportamiento elástico del material.

La malla de elementos utilizada en todos los casos es semejante a la que se muestra en las figuras 1 a 4, que corresponde a uno de los modelos considerados. Como puede verse, se estudia el tablero de canto variable linealmente, con todas las losas que forman el conjunto de espesor constante, considerándose unas zonas del tablero, a ambos lados de la unión, limitadas por secciones verticales, de longitud aproximadamente igual al doble de su canto, con lo cual, al estar los extremos suficientemente alejados, la influencia de las perturbaciones de borde no afectarán al estado tensional en la unión. Lo mismo se aplica a la pila, a la que se la considera limitada por una sección horizontal.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

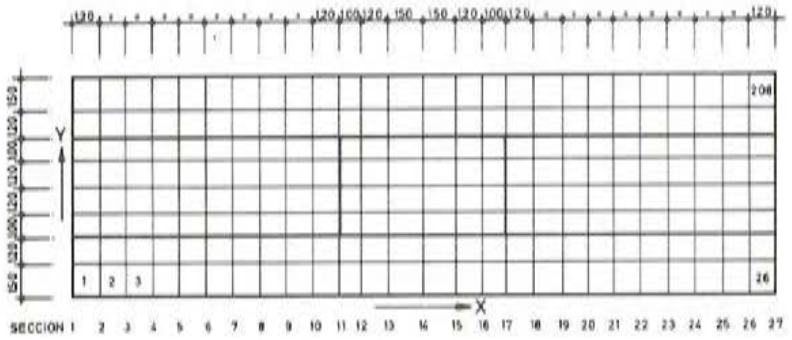


Fig. 1. División de la losa superior.

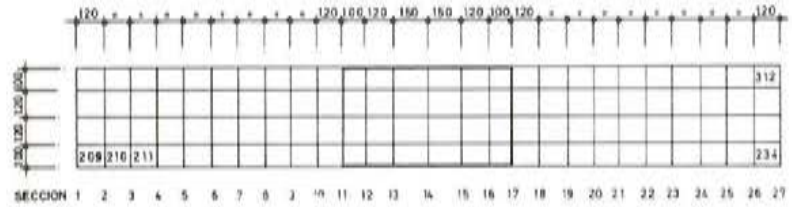


Fig. 2. Malla de la losa inferior.

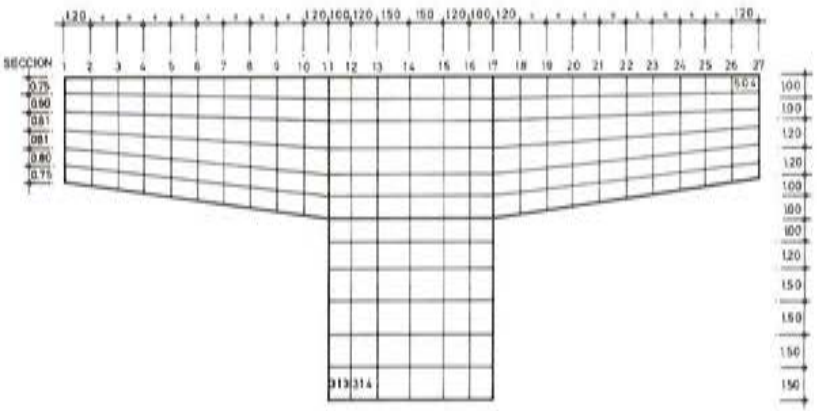


Fig. 3. Malla de las almas del cajón y la pila.



Fig. 4. Malla de los planos de riostra-pila.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Las hipótesis de carga supuestas son las tres siguientes:

1.– Un momento flector unitario actuando sobre una de las secciones extremas del cajón y el flector que lo equilibra sobre la sección inferior de la pila, creando así un estado de flexión constante sobre la pila y el voladizo del tablero cargado.

2.– Un cortante unitario en la misma sección extrema del cajón y el axil y flector sobre la sección inferior de la pila que lo equilibran; con lo que se obtiene un cortante constante, con el flector variable linealmente que le acompaña, sobre el voladizo del dintel cargado, y permaneciendo la pila bajo flexión compuesta constante.

3.– Un torsor puntual sobre el extremo del cajón y el flector transversal en la pila que lo anula, quedando así el tablero sometido a torsión constante.

Todos estos esfuerzos unitarios se introducen como cargas nodales sobre los nodos de las secciones extremas cargadas, obteniéndose el valor de la carga de cada nodo como integral de las tensiones actuantes sobre su área de influencia y suponiendo como leyes de tensiones sobre la sección, las dadas por la teoría clásica, es decir, ley plana de tensiones longitudinales para el momento flector, parabólica de tensiones tangenciales para el cortante, y las tangenciales correspondientes a la fórmula de Brent para el torsor.

Una vez mostrados, en rasgos generales, el procedimiento utilizado y el método seguido, a continuación se exponen los resultados más interesantes de este trabajo.

2. MODELO DE DIAFRAGMAS VERTICALES CON PILA CERRADA

2.1. Hipótesis I: Flexión constante

2.1.1. Losas superior e inferior de cajón

Se estudiará, primeramente, como se efectúan las transmisiones de los volúmenes de tensiones longitudinales, tanto de la losa superior como de la inferior, hacia las almas, en la hipótesis de carga de flexión constante.

Las tracciones de la losa superior se han representado en la figura 5. En ella se han dibujado, para cada sección transversal de la malla de elementos finitos de esta losa, las curvas de los valores que alcanzan estas tensiones en sus nodos, estando situadas desde la parte superior de la lámina hacia la inferior en orden creciente de acercamiento al extremo del tablero cargado, aunque están agrupadas de cinco en cinco con el mismo origen.

Se observa que las curvas correspondientes a las secciones próximas al extremo cargado, las de la parte inferior de la lámina, se separan de la línea recta de la hipótesis de deformación plana de Resistencia de Materiales, a causa de la perturbación de borde; pero a medida que el efecto local se pierde, las curvas tienden a la uniforme de la teoría elemental.

En las proximidades de la pila, las tensiones se empiezan a concentrar hacia las aristas de unión con las almas, por lo que las de los nodos de estas líneas aumentan, en tanto que en las del resto de cada sección transversal disminuyen y las curvas vuelven a separarse del comportamiento lineal.

A partir de la sección coincidente con el plano central de la pila, comienzan otra vez a ser menores las tracciones en los nodos de unión, llegando incluso a convertirse en pequeñas compresiones en las secciones posteriores a la pila.

En la figura 6 se han dibujado, a lo largo del eje de esta losa: los volúmenes de estas tracciones, según las leyes anteriores, y los valores dados por la Resistencia de Materiales, (son las curvas (1) y (2)); la integral de las tensiones tangenciales en la unión de las almas del ta-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

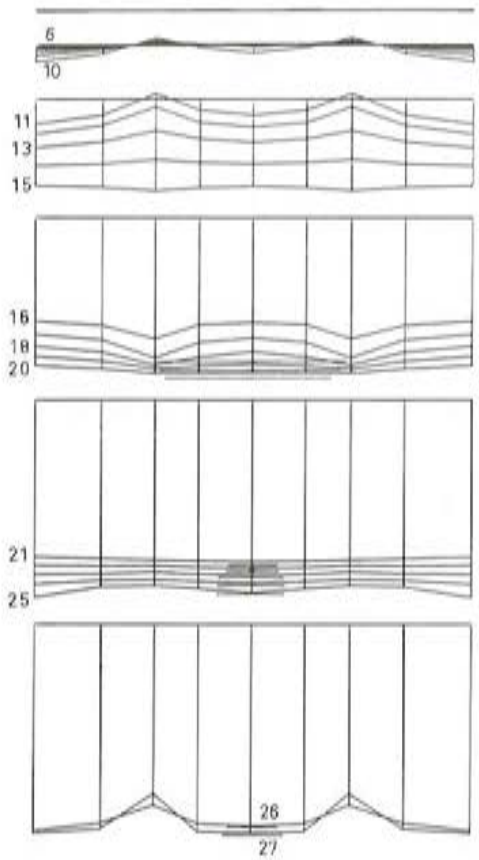


Fig. 5.

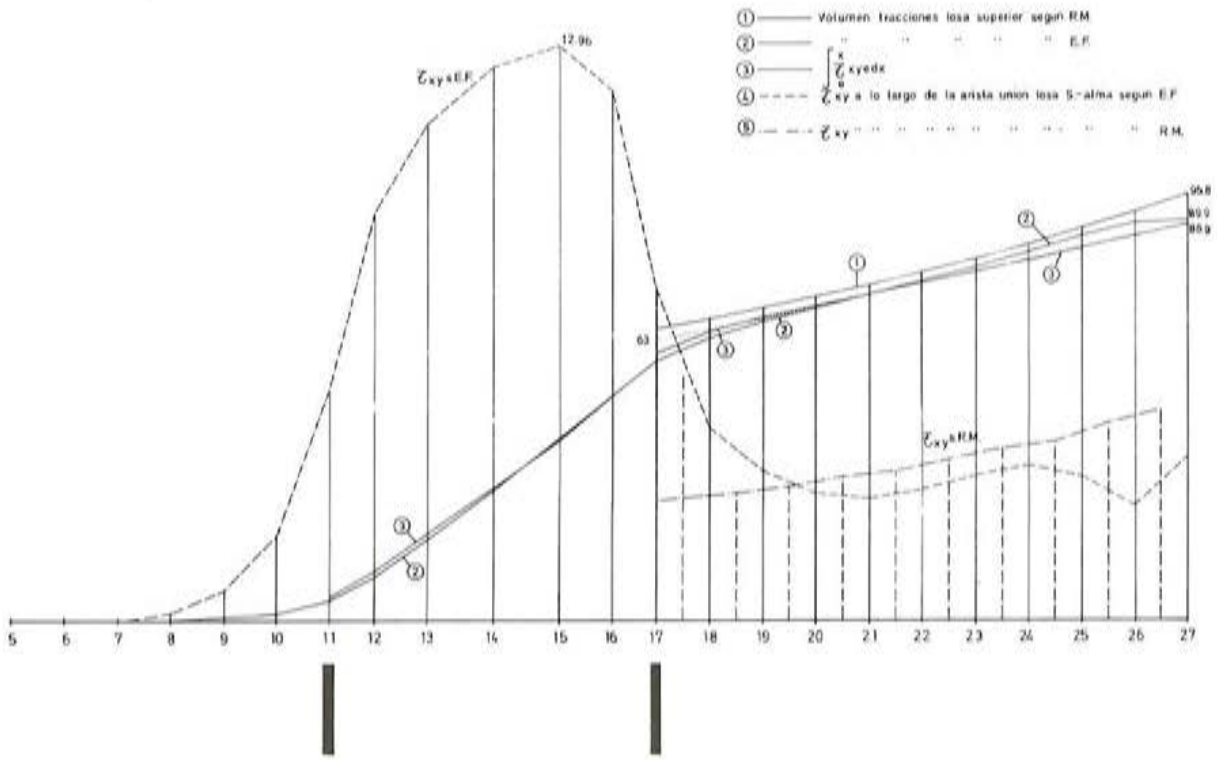


Fig. 6.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

blero, curva 3, así como las leyes de estas tensiones dadas por el ordenador y las obtenidas según la teoría elemental. En la figura, las secciones 11 y 17 corresponden a las de unión con los planos de arriostramiento y la 27 al extremo cargado del cajón, siendo la zona del voladizo del tablero, entre la 17 y la 27, en la única parte que es posible obtener valores con la teoría clásica.

Entre las curvas (1) y (2) se observa una igualdad completa en las secciones del voladizo del tablero. Pero a partir de la sección 20 y al aproximarse a la sección de encuentro, la curva real disminuye más rápidamente, a causa de la no consideración del paso de tensiones hacia las almas por la teoría clásica. Esta variación local en la zona anterior a la pila, aunque en principio puede parecer que dependerá de los espesores de las riostras y de la relación entre los cantos del tablero y la pila, sin embargo, se ha visto, al obtener los estados tensionales de los diferentes modelos en los que se han variado estas características geométricas, que en primera aproximación, es independiente de ellas, resultando prácticamente como un porcentaje fijo (7 por 100) del volúmen total que debía de llegar según la teoría elemental.

En la propia sección de encuentro, la curva experimenta un salto, producido por el esfuerzo absorbido por los cortantes de la riostra. Este salto se sitúa en torno al 2 por 100. En la zona posterior de la pila sucede casi lo mismo; la riostra se lleva por su rigidez a flexión menos del 2 por 100, y el volumen que permanece en la losa detrás de la pila es un 6 por 100 del total.

Como se ve, la curva, en la zona entre riostras, es aproximadamente una recta, lo que indica que el paso hacia la pila se realiza de forma uniforme; y es de resaltar también la escasa importancia del esfuerzo absorbido por los diafragmas, que resulta prácticamente independiente de su rigidez a flexión.

Por esta causa, existe un volumen de tracciones en la zona central de la losa superior que no es recogido por los diafragmas y que aún no ha pasado a las almas, el cual, unido al que perdura en los voladizos de la losa, produce las compresiones en las zonas de unión losa-almas, que aparecen en las secciones inmediatas posteriores al encuentro, a las que se ha aludido anteriormente.

Al igual que para la losa superior, en la figura 7 se han dibujado para la inferior: las curvas del volumen de compresiones, tanto según los resultados obtenidos del programa de elementos finitos (curva 2), como los valores dados por la Resistencia de Materiales (curva 1); las integrales de esfuerzos tangenciales en las aristas de unión con las almas (curvas 3 y 4), y las leyes de estas tensiones dadas por el programa y las obtenidas por la teoría clásica.

Observando las curvas 1 y 2 se aprecia que la igualdad entre ambas es total, salvo en las secciones últimas y en las cercanías de la pila. En esta última zona se produce un aumento del volumen en las curvas del programa, en lugar de seguir disminuyendo como resulta de la teoría clásica. Esto es consecuencia de las fuertes compresiones que se producen en los nodos de unión con el alma. Hay que tener en cuenta que la primera pared de la pila con la que se encuentra la losa inferior está en compresión como ella, y además, las isostáticas del plano de las almas del cajón y de la pila, se concentrarán en las proximidades de la esquina de unión de la losa inferior con la pila (como se aprecia en la figura 8, en donde aparecen representadas las tensiones principales en estos planos), produciendo un aumento de la tensión longitudinal en los nodos de la arista de unión losa-alma, que provoca el aumento del volumen de compresiones de la losa, al que se alude.

La desaparición del volumen de compresiones de esta losa, independientemente de la disminución por variación del canto del tablero, se efectúa de la forma siguiente:

Al aproximarse al encuentro con la pila, experimenta un aumento que llega a ser del 12 por 100 respecto del teórico en la sección de empotramiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

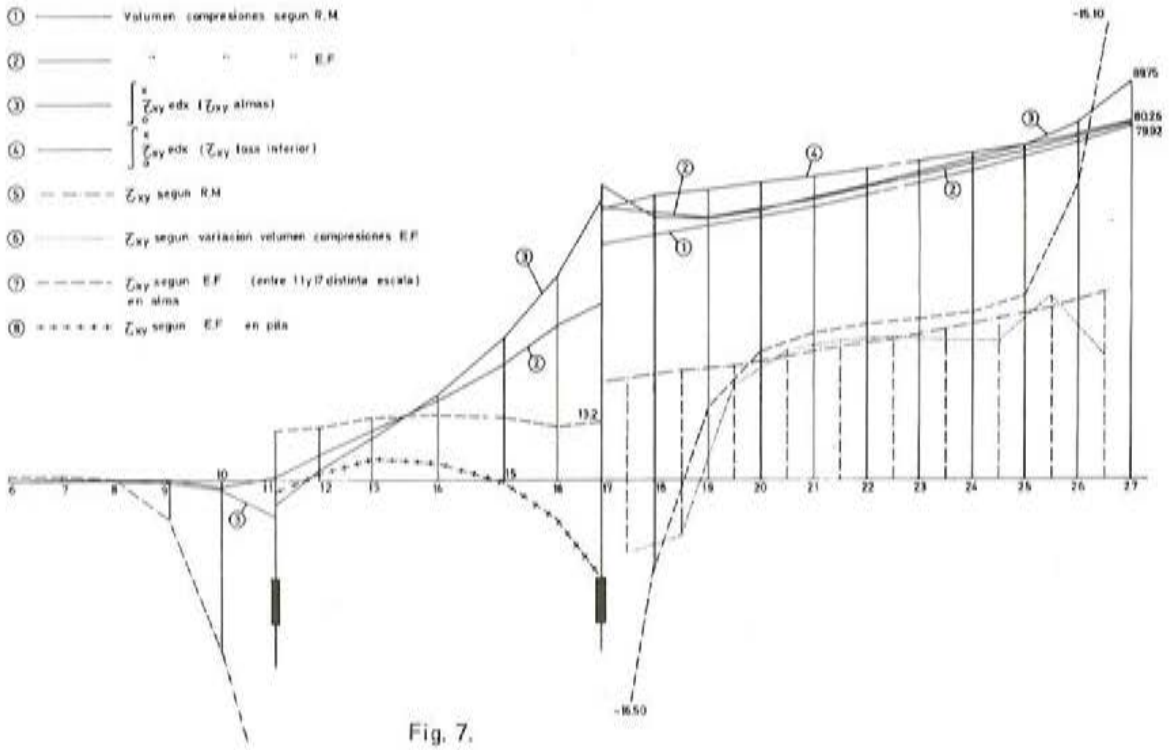


Fig. 7.

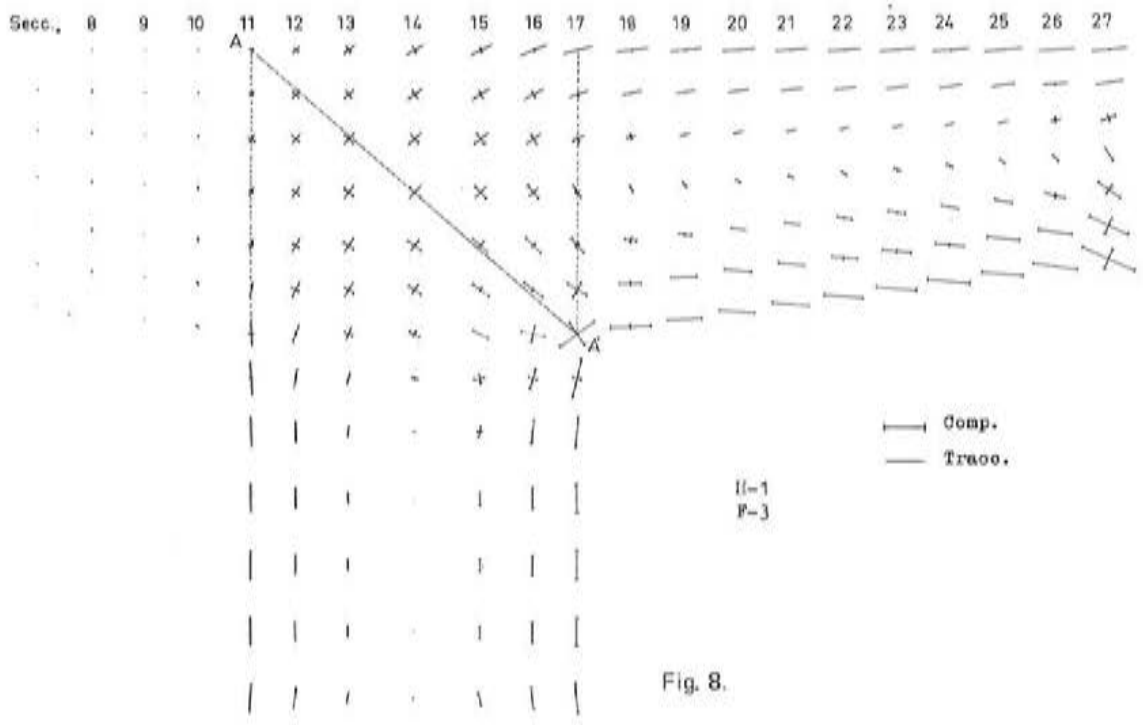


Fig. 8.

En la propia sección pierde, no sólo el aumento anterior sino también parte del que traía, permaneciendo detrás del plano de riostra el 70 por 100 de él. La pérdida se produce por varias razones: en primer lugar, porque el volumen que llega viene con la inclinación de la losa inferior y su proyección horizontal será la que perdure, mientras que la proyección vertical anulará parte de las compresiones verticales de la pared de la pila prolongación de la riostra; en segundo lugar, por el esfuerzo absorbido como cortante de flexión del trabajo

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

"placa" del diafragma y su prolongación en la pila; y en tercer lugar, por la parte que pasa directamente, en los nudos extremos de esta arista de intersección, a las almas de la pila como cargas concentradas, consecuencia del aumento brusco de secciones de las almas del cajón que representan su prolongación en las de la pila, en esta sección de encuentro, y que producen las tensiones normales horizontales de estos planos en las proximidades de estas esquinas y causan las fuertes tensiones tangenciales en esta zona, tanto en la propia losa inferior como en las almas de la pila. Las tres razones se han expuesto en orden creciente de importancia, pues así, mientras que el efecto de la primera no llega al 1 por 100, la segunda produce un 4 por 100 y la tercera el 37 por 100 restante.

Por último, el 70 por 100 que perdura detrás del primer diafragma, disminuye linealmente en la zona entre riostras, para llegar a anularse sobre la sección de intersección con el diafragma posterior.

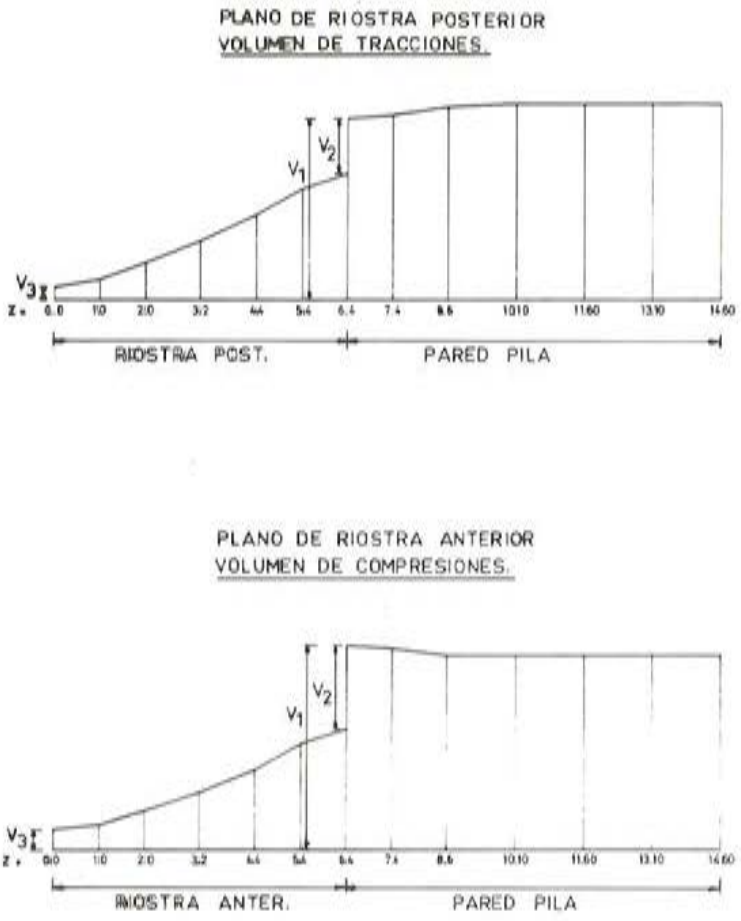


Fig. 9.

2.1.2. Tensiones de las riostras

Por otro lado, también es de resaltar, dentro de esta hipótesis de carga de flexión constante, el paso hacia las almas de la pila de las tensiones longitudinales de las paredes de la pila

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

situadas en prolongación de las riostras, para equilibrarse con las del tablero. Para ello, se obtiene la variación del volumen de estas tensiones de cada conjunto riostra-pared de pila, a lo largo de su eje.

En la figura 9 se han representado las dos leyes de esfuerzos correspondientes a estos dos planos, llamando riostra posterior a la más alejada del voladizo del tablero cargado y anterior a la más próxima. En ella se aprecia que el esfuerzo es constante prácticamente en toda la pila, efectuándose el paso hacia el cajón en la forma siguiente: en la unión con la losa inferior, pasa del orden de la tercera parte del volumen inicial, y el resto pasa en la propia riostra. De la tercera parte que pasa al cajón directamente, que es el salto que se aprecia en las curvas, una fracción pequeña lo hace a la losa inferior y el resto a las almas, como cargas concentradas, en tanto que del volumen que alcanza el diafragma se pierde, más del 80 por 100 mediante rasantes en las uniones con las almas, y el resto por cortante de la losa superior.

Hay que destacar que, en las dos curvas, la parte correspondiente a las zonas de riostra son idénticas; sin embargo, en la zona de pila próxima a la unión con la losa inferior, ambas curvas se separan de la recta; pero mientras que en la posterior toma valores inferiores a los de la recta, en la anterior aumenta, llegando a un máximo en la unión con la losa inferior. Ambos efectos son producidos por la inclinación de las isostáticas verticales de las almas de la pila hacia la zona delantera de unión con el voladizo del tablero cargado exteriormente; lo que induce a una disminución de estas tensiones en la zona posterior y a un aumento en la anterior, como ya se ha dicho.

Tanto este porcentaje como los anteriores del volumen que alcanza la riostra en su borde inferior y el que perdura en el superior, dependen de las características geométricas del conjunto y se les puede cuantificar en función de los datos geométricos que más les afectan.

Así, para la riostra posterior se tendrá, llamando:

V_p = volúmen de tracciones según la teoría clásica, que debía ascender por la pared posterior transversal de la pila.

V_1 = volúmen que realmente alcanza la sección de encuentro en dicha pared, con el que se caracteriza la disminución sufrida en la zona de la pila inmediatamente antes del nudo.

V_2 = salto producido en la sección de encuentro, que mide el esfuerzo absorbido por la losa inferior del tablero en su trabajo placa, así como la parte tomada directamente por las almas, como consecuencia del brusco ensanchamiento que sufren éstas en dicho encuentro al aparecer las almas del cajón en voladizo, esfuerzo que actúa sobre ellas como una carga puntual.

V_3 = volúmen que perdura en la unión con la losa superior del cajón y que da el esfuerzo absorbido por ella en su trabajo losa.

Con la diferencia $V_1 - V_2$, se puede calcular el esfuerzo que penetra en la riostra por su sección inferior; y con este valor y V_3, admitiendo variación lineal a lo largo de todo el diafragma, lo cual apenas se separa de la realidad (figura 9), se pueden obtener las tensiones rasantes existentes en los bordes verticales de unión con las almas del cajón, que producen la disminución de dichos volúmenes.

En cuanto al volúmen V_1, como era lógico suponer, aumenta con el espesor de la riostra, con el de la losa inferior del tablero y con la relación del canto del cajón al de la pila. Por el contrario, disminuye con los espesores de las almas y de las paredes de la pila.

La relación $Y = (V_p - V_1) / V_p$ puede calcularse con suficiente precisión a través del producto:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$Y = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 \cdot Y_4 \cdot Y_5$$

siendo Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 e Y_5 funciones de las relaciones $\frac{a}{b}$, $\frac{e_r}{e_a}$, $\frac{e_3}{e_4}$, $\frac{e_3}{e_a}$ y $\frac{e_2}{e_a}$ respectivamente, y que pueden obtenerse mediante las curvas de las figuras 10 y 11.

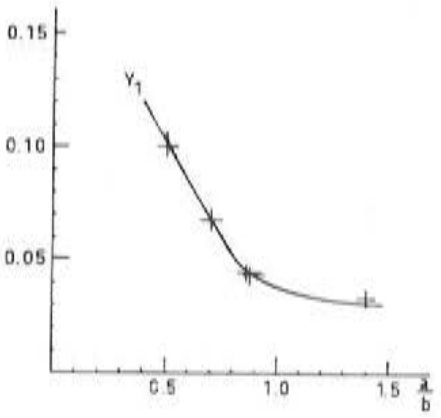


Fig. 10.

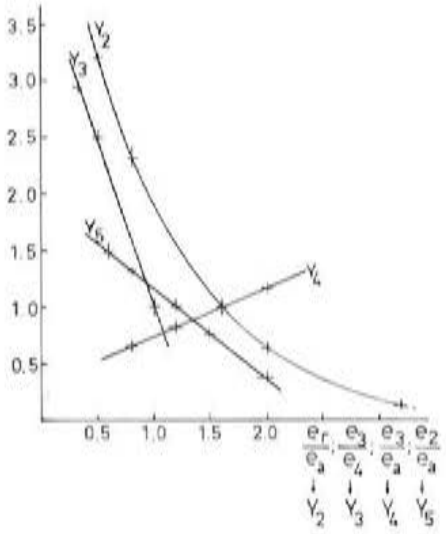


Fig. 11.

Para el valor correspondiente al salto V_2, que aumenta con la relación a/b, con los espesores de las paredes de la pila, y con los de las almas y de la losa inferior del cajón, y disminuye con el espesor de las riostras, puede utilizarse la función F que da la relación V_2/V_p como:

$$V_2 / V_p = F = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$$

siendo F_1, F_2 y F_3 dependientes de las relaciones $\frac{e_a}{e_r}$, $\frac{e_3}{e_4}$ y $\frac{e_2}{e_a}$, respectivamente, y que pueden calcularse mediante las curvas de las figuras 12 y 13.

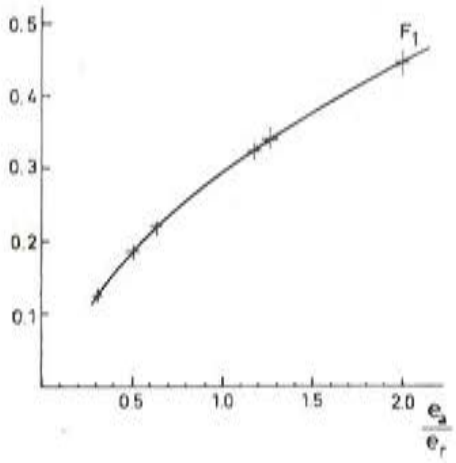


Fig. 12.

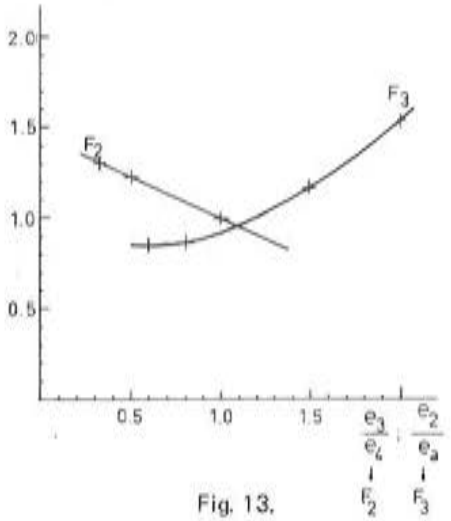


Fig. 13.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Por último, el valor V_3 aumenta muy ligeramente al crecer el espesor de la riostra y el de la losa superior, como era lógico esperar; pero la variación es muy pequeña, por lo que puede admitirse que V_3 es constante e igual al 5 por 100 de V_p.

Por otro lado, en la riostra anterior, si V_p , V_1 , V_2 y V_3 expresan los mismos conceptos que en la posterior sin más que cambiar tracciones por compresiones, se tendrá:

El volúmen V_1 que alcanza la unión con la losa inferior, aumenta con la relación b/a, con el espesor de las riostras y con el espesor de la losa inferior; disminuyendo por el contrario con el espesor del alma del cajón y el de las paredes de la pila. El valor de su relación con el esfuerzo dado por la teoría clásica, V_p, puede ser obtenido mediante la función R:

$$\frac{V_1}{V_p} = R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4$$

producto de las funciones R_1 , R_2 , R_3 y R_4 que dependen de las relaciones $\frac{a}{b}$, $\frac{e_4}{e_r}$, $\frac{e_3}{e_r}$ y $\frac{e_2}{e_a}$, respectivamente, y que pueden calcularse mediante las curvas de las figuras 14 y 15.

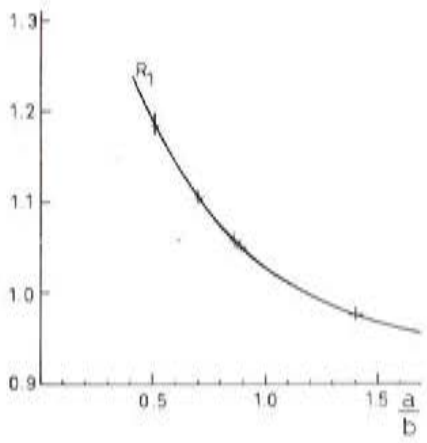


Fig. 14.

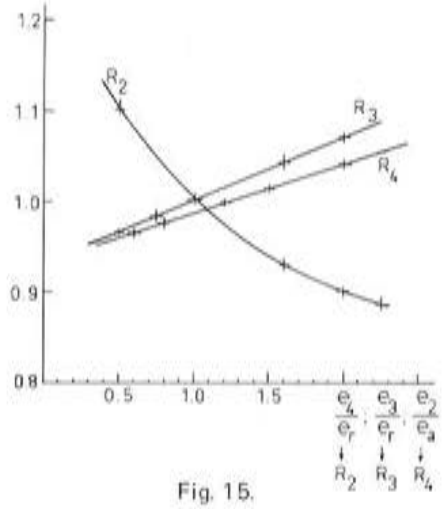


Fig. 15.

En cuanto al salto V_2, aumenta con $\frac{b}{a}$ y con los espesores de la losa inferior, de las paredes de la pila y del alma del cajón; disminuyendo, en cambio, al aumentar el espesor de la riostra, como era lógico esperar. El valor de su relación con V_p viene dado por:

$$\frac{V_2}{V_p} = \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}{1{,}32} \quad B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4$$

en donde α es el ángulo que forma con la horizontal la losa inferior, en la sección de encuentro, y B_1 , B_2, B_3 y B_4 son funciones de $\frac{a}{b}$, $\frac{e_a}{e_r}$, $\frac{e_3}{e_4}$,y $\frac{e_2}{e_a}$, respectivamente, y quedan definidas mediante las curvas de las figuras 16 y 17.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

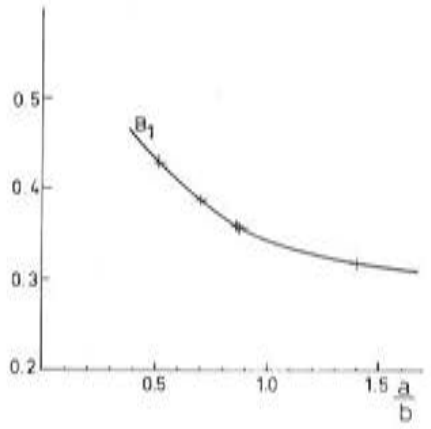


Fig. 16.

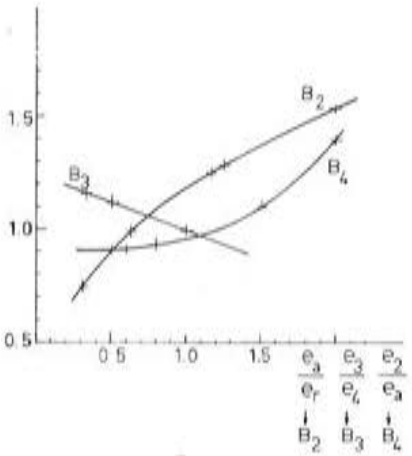


Fig. 17.

De la misma forma, el valor residual V_3 que alcanza la losa superior, se puede obtener mediante:

$$G = \frac{V_3}{V_p} = G_1 \cdot G_2$$

estando los valores $G_1 = G_1 \left(\frac{a}{b}\right)$ y $G_2 = G_2 \left(\frac{e_a}{e_r}\right)$ definidos en las figuras 18 y 19.

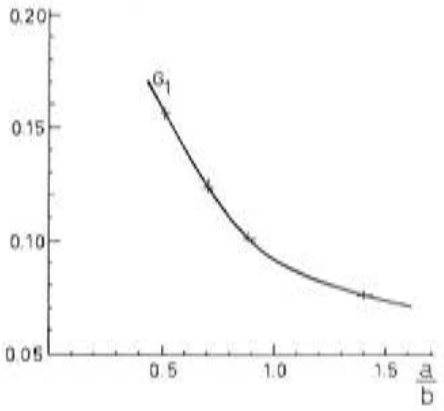


Fig. 18.

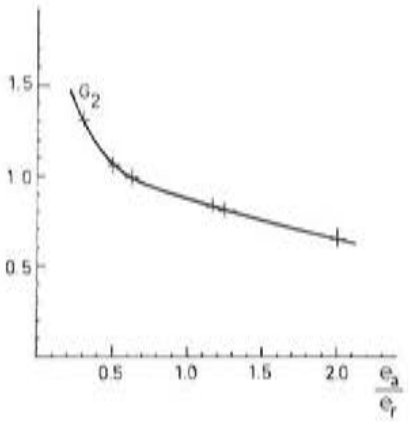


Fig. 19.

2.1.3. Tensiones en los planos de las almas

Sobre la figura 8 aparecían, representadas con el plotter, las tensiones principales en uno de los planos verticales que contiene una de las almas del tablero y de la pila. Hay que tener en cuenta que los valores de las tensiones correspondientes a los nodos de las líneas de unión con la riostra y con la losa inferior del cajón, en la zona común, al haber promediado el programa de dibujo los valores existentes a uno y a otro lado de dichas líneas, no son los correctos, pues no muestran la discontinuidad existente entre ellos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Pero prescindiendo de este detalle, se puede observar el entrecruzamiento de las isostáticas en el voladizo del tablero, debido a la variación del canto de éste, a pesar de estar sometido a flexión pura; y que en la pila, una de las familias de isostáticas se mantiene paralela a los bordes verticales, hasta las proximidades del encuentro con el cajón.

En la zona de pared común al cajón y a la pila, la curvatura de las familias correspondiente a las tracciones es tal, que la otra familia está constituida por curvas de gran radio; lo que hace que la tensión principal correspondiente a la primera familia sea prácticamente constante a lo largo de ellas.

Por coincidir prácticamente con una isostática, la diagonal A - A' del rectángulo común a la pila y el alma, se puede calcular el volúmen de tracciones que la atraviesan, con bastante exactitud, multiplicando la tensión principal normal de cada nodo de la diagonal, por la longitud correspondiente y el espesor de la pared.

Esta propiedad de las isostáticas es independiente de las características geométricas del conjunto pila-tablero; lo que permite obtener la influencia de dichas características geométricas sobre la relación entre ese volumen de tracciones y el que llega, en el cajón, a la sección de encuentro, según la teoría elemental de la viga, que será suma del correspondiente a la losa superior más el de las almas.

Llamando:

V_t = volumen de tracciones que atraviesa la diagonal A - A'.

V_R = $\frac{1}{2}$ del volúmen de la losa superior, más el volúmen de tracciones de una de las almas, ambos en la sección de encuentro del cajón y dados por la Resistencia de Materiales,

se puede expresar el cociente entre ambos mediante la función:

$$X = \frac{V_t}{V_R} = X_1 \cdot X_2$$

siendo X_1 y X_2 funciones de $\frac{a}{b}$ y $\frac{e_1}{e_a}$, respectivamente, calculables mediante las figuras 20 y 21.

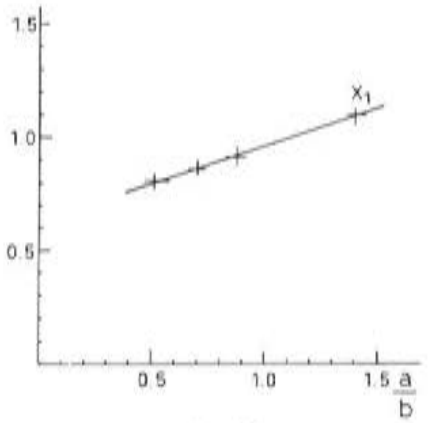


Fig. 20.

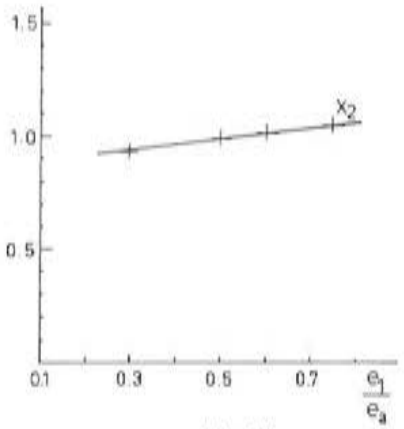


Fig. 21.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

En estas figuras se ve claramente que la dependencia supuesta, tanto con $\frac{a}{b}$ como con $\frac{e_1}{e_a}$, es lineal dentro del intervalo de valores de ambas relaciones estudiado.

2.2. Hipótesis II: Cortante constante

En cuanto al trabajo del conjunto tablero-pila frente a la solicitación que produce el cortante constante sobre el tablero, (hipótesis 2ª de carga), es de destacar que, mientras el mecanismo de paso hacia la pila de las tensiones creadas sobre el cajón, por el flector producido en la sección de empotramiento, es idéntico al visto para el caso de flexión constante, el esfuerzo cortante sobre el tablero, que caracteriza esta nueva hipótesis respecto a la primera, como intuitivamente se puede prever para esta morfología, al estar soportado en su mayor parte por las almas del cajón, pasa, parte directamente a las almas de la pila, y parte, mediante esfuerzos rasantes, a las riostras, a través de las cuales llegan a las paredes transversales de la pila, convirtiéndose así, de esfuerzo cortante sobre el tablero, en esfuerzo axil sobre ésta, de una forma continua y uniforme, sin que aparezcan saltos bruscos en ningún punto, como se observa en las figuras 22 y 23, en donde se han representado las tensiones principales en los planos de las almas y en los de la riostra posterior.

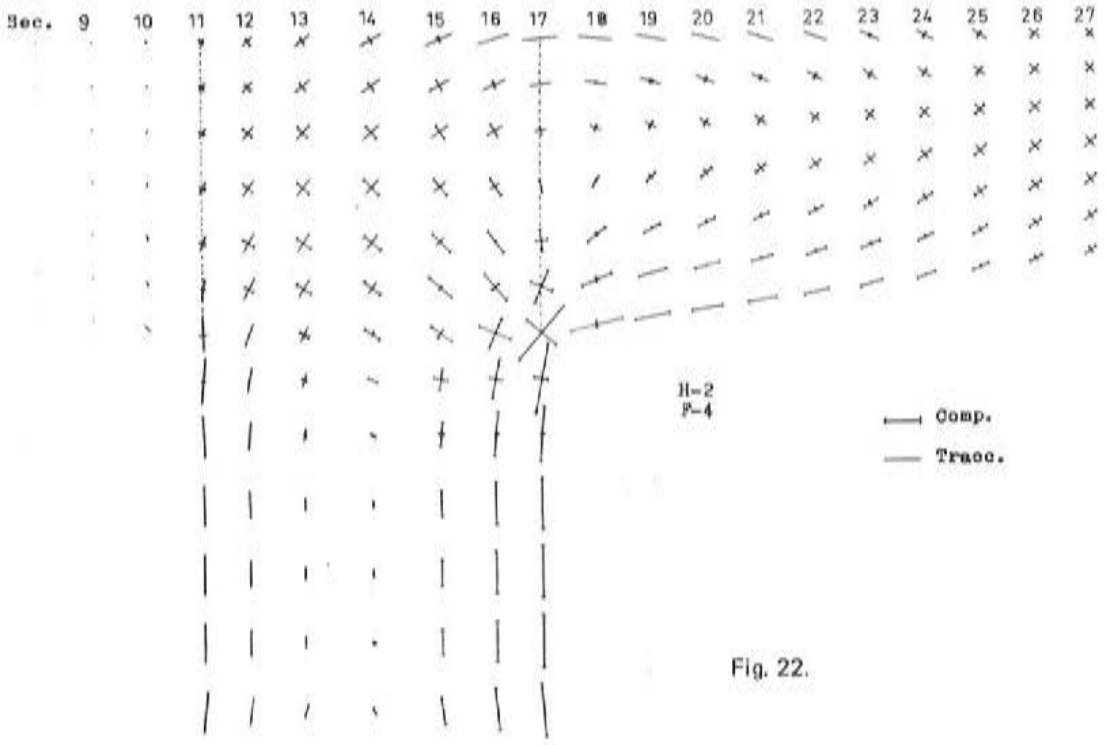


Fig. 22.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

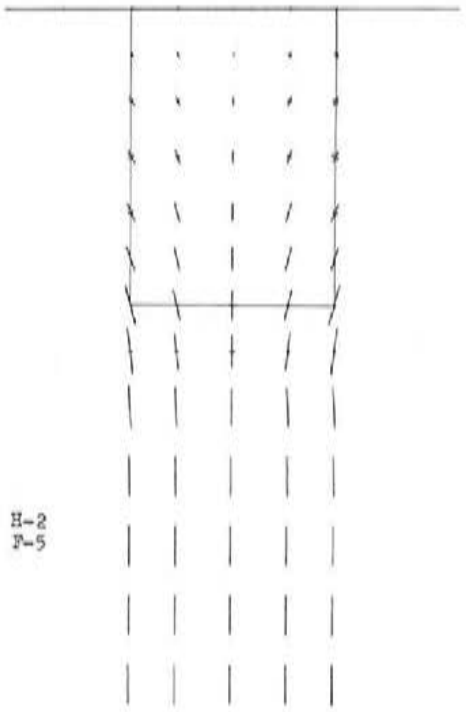


Fig. 23.

En cuanto a las expresiones y valores dados anteriormente, en la hipótesis 1ª, para el cálculo de las diversas variables tensionales, son válidas en esta hipótesis, a excepción de la correspondiente al salto V_2 de la riostra anterior:

$$V_2 = B \cdot V_p$$

Para poder aplicar ahora esta ecuación, hay que tener en cuenta que el volúmen de la losa inferior, cuya componente vertical causaba parte de este salto V_2, para esta 2ª hipótesis es menor, en comparación con el V_p, que en la 1ª. En efecto, por un lado, parte de este volúmen V_p corresponde a la compresión producida por el axil de la pila que equilibra el cortante del cajón. Esta parte, cuya expresión es: $V = Q \cdot (A_4) / (A_5)$, de haber sido producida por un flector: $M = 2Q \cdot I_p / b(A_5)$, habría creado sobre la losa inferior un volumen cuya componente vertical sería:

$$V' = \frac{2Q \cdot I_p \cdot Y_1 \cdot A_2}{b \cdot A_5 \cdot I_c} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

siendo:

Q = esfuerzo cortante sobre el cajón.

I_p = inercia de la pila.

I_c = inercia del cajón en la sección de empotramiento.

A_2 = área de la losa inferior = $a_1 \cdot e_2$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

A_5= área de la sección total de la pila.

A_4= área de la pared anterior de la pila = $a_1 \cdot e_4$.

Y_i= distancia de la fibra inferior al c. de g. de la sección del cajón, y

a, b y α = los valores definidos en la figura I.

Por otro lado, el momento de la pila respecto al del cajón, en la sección de empotramiento, se encuentra en la relación $(L_a + \frac{b}{2})/L_a = 1 + b/2\ L_a$. Por ello, el volumen que circula por la losa de la pila debido al momento será $(1 + b/2\ L_a)$ veces mayor que si el momento fuera debido a un flector constante; y en esta relación estarán las partes de los saltos correspondientes a la componente vertical del volumen de la losa inferior. En consecuencia, el salto que no aparece, debido a que el momento en el cajón es $Q \cdot L_a$ y no $Q\,(L_a + \frac{b}{2})$, será pues:

$$S_m = \left(\frac{Q(L_a + \frac{b}{2})}{I_c} \cdot Y_i \cdot A_2 - \frac{QL_a Y_i}{I_c} \cdot A_2 \right) \operatorname{tg} \alpha$$

es decir:

$$S_m = \frac{Q \cdot Y_i \cdot b}{2\ I_c} \cdot A_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Por tanto, se podrá obtener el valor del salto V_2 mediante las funciones B, en función de V_p, sin más que tener en cuenta estos esfuerzos correctores V' y S_m.

2.3. Hipótesis III: Torsor constante

Bajo esta solicitación, en la losa superior, las tensiones tangenciales son constantes en cada sección transversal en la zona central de la misma y nulas en los voladizos, como se ve en la figura 24, en la que se han dibujado las leyes de estas tensiones para cada sección de la malla de elementos finitos, agrupadas de cinco en cinco con el mismo origen, como se hizo en la hipótesis primera de carga para las tensiones longitudinales. En los nodos de unión con las almas se produce un salto de valores, pero en la figura no aparece al haberse promediado, por el programa de dibujo, los valores a uno y otro lado de estos nodos. Estas tensiones se reducen a la mitad detrás de la sección 17 de encuentro con el primer diafragma, llevándose este plano, por tanto, mediante tensiones rasantes, el 50 por 100 del esfuerzo de la losa. De la otra mitad, desaparece un 10 por 100 en la zona entre riostras, absorbida por los cortantes de la distorsión, y el resto directamente por rasante sobre la unión con el diafragma posterior, sección 11.

Sobre este ala superior del tablero aparecen tensiones longitudinales, creadas por el alabeo torsional y la distorsión, cuyos valores máximos, que aparecen en los bordes libres de los voladizos, llegan a ser del mismo órden de magnitud que las tangenciales, como se aprecia en la figura 25, en donde se han representado las tensiones principales en los nodos de esta losa.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

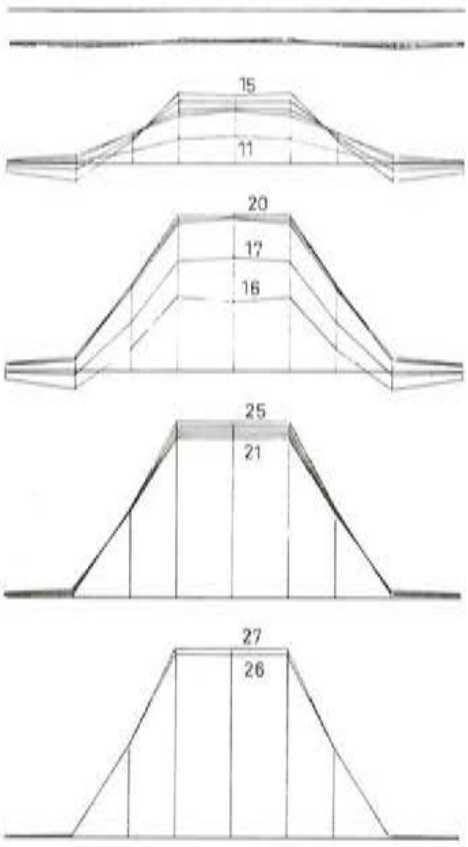


Fig. 24.

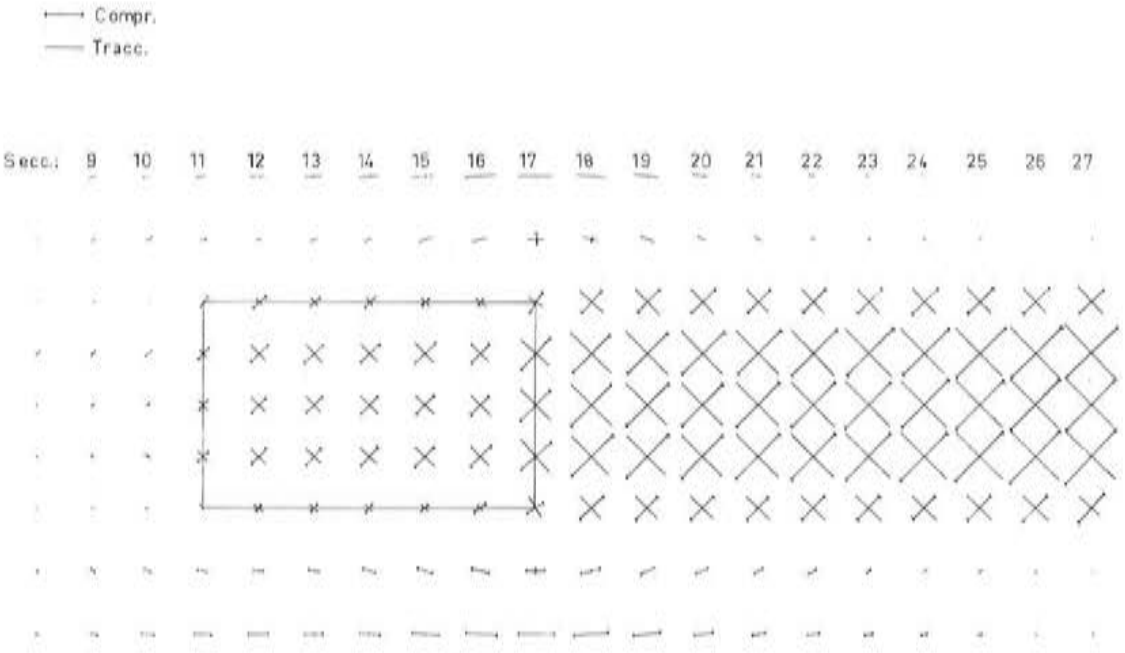


Fig. 25.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El comportamiento del ala inferior es semejante al de la superior, en tanto que, en los planos de las almas la variación de las tensiones tangenciales se realiza de manera distinta; las leyes rectas de cada sección no sufren el salto en la sección de encuentro, sino que van disminuyendo casi linealmente en la zona entre riostras, consecuencia del flujo de tensiones longitudinales verticales de las almas de la pila hacia las del tablero, como se ve en la figura 26, en donde se muestran las tensiones principales de estos planos. En ella también se observa la llamada de las isostáticas hacia los planos de riostra, que producen el aumento de las tensiones longitudinales verticales en las proximidades de las aristas de unión de las almas con las paredes transversales, tanto en la anterior como en la posterior, pero especialmente en la primera, consecuencia de su proximidad al voladizo del tablero cargado, como se observa en la figura 27, en donde se han representado los valores de estas tensiones en la sección de encuentro de la pila con el cajón.

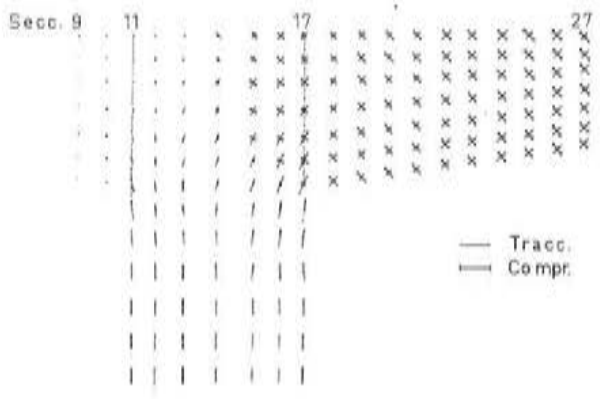


Fig. 26.

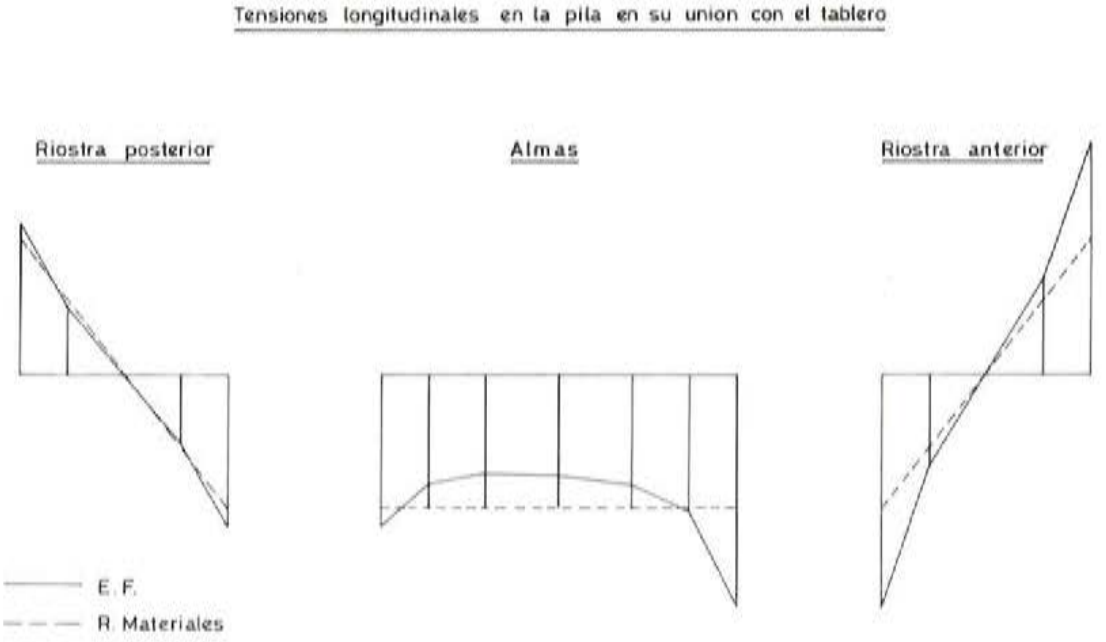


Fig. 27.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Por otro lado, el estado tensional sobre las dos riostras, como se aprecia en las figuras 28 y 29, en las que se han dibujado las tensiones principales de ambos diafragmas, es muy semejante a la de una pared vertical, con un esfuerzo cortante sobre su borde superior, procedente de los esfuerzos rasantes de la losa superior, y empotrada en su sección inferior, en donde aparecen: el cortante de la losa inferior que equilibra al anterior y el momento flector equivalente a las tensiones longitudinales verticales que penetran desde las paredes transversales de la pila; existiendo una escasa influencia en las aristas verticales de unión con las almas.

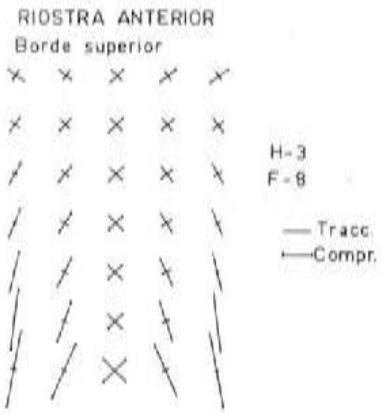


Fig. 28.

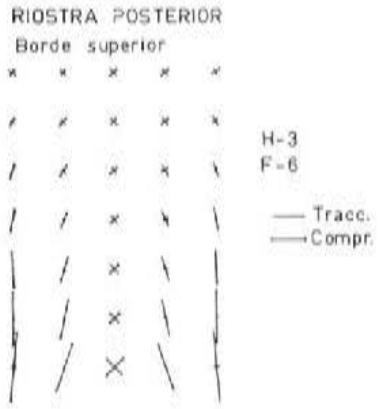


Fig. 29.

3. MODELO DE DIAFRAGMAS INCLINADOS CON PILA CERRADA

Al considerar los planos de arriostramiento transversal en prolongación de las dos paredes de la pila normales al eje del tablero, inclinados de tal manera que son concurrentes en la misma arista de unión con la losa superior (figura I.2), se forma entre las dos riostras y la losa inferior del cajón situada entre ellas, una triangulación que parece permitirá conducir los esfuerzos longitudinales del ala superior del tablero a la pila, de forma más eficaz que en el caso de riostras verticales.

3.1. Hipótesis I: Flexión constante

3.1.1. Losas superior e inferior del tablero

En la figura 30 se ha representado el volúmen de tracciones que circula por la losa superior, bajo la solicitación de flexión, tanto el dado por la teoría de Resistencia de Materiales (R.M.) como el obtenido a partir de los resultados del ordenador (E.F.).

Como sucedía en el caso de riostras verticales, existe una coincidencia total entre ambas curvas en el voladizo, pero al acercarse a la pila, el volúmen dado por el ordenador disminuye más rápidamente. La zona de despegue entre ambas curvas es la situada, aproximadamente, medio canto del cajón antes de ella, al igual que en el caso de riostras verticales. Sin embargo, la disipación del volúmen se realiza de forma distinta, pues si bien la disminución

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

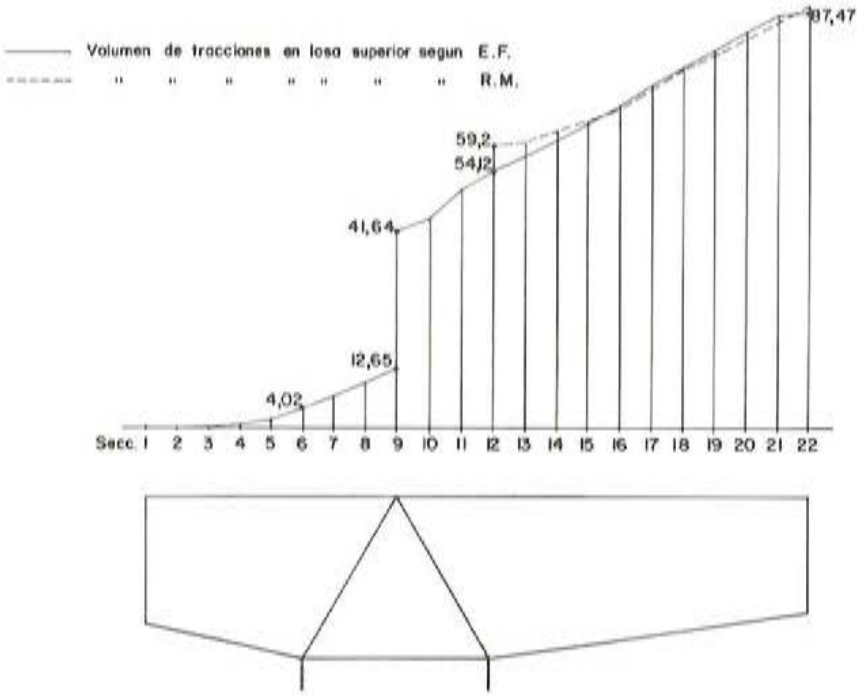


Fig. 30.

producida en la zona anterior a la pila, por el paso hacia las almas, es un 8 por 100, igual que entonces, ahora se produce un salto del 50 por 100, absorbido directamente por las riostras, gracias a su inclinación, en la sección 9 de unión. Por otro lado, un 20 por 100 se disipa en la zona de intersección con la pila, antes de la unión con las riostras (secciones 9 a 12), un 15 por 100 en esta zona, después de dicha unión (secciones 6 a 9), y el 7 por 100 restante en el voladizo posterior a la pila. Es decir, en este modelo, la desaparición del volúmen de tracciones de la losa en su paso hacia la pila se realiza: la mitad directamente a través de las riostras, y la otra mitad mediante las tensiones tangenciales en los nodos de unión con las almas que permiten la transmisión a través de ellas. Sin embargo, estos porcentajes varían con las características geométricas, habiendo encontrado variaciones desde un 25 a un 70 por 100, en los casos estudiados. Por ello se ha buscado una expresión que permita obtenerlos con suficiente precisión.

Es de resaltar también, el volúmen que perdura después de la unión con las riostras (sección 9), más del 20 por 100 del total, todo él producido prácticamente por las tracciones de los voladizos de la losa, puesto que en la zona central de ésta las tensiones se anulan después de dicha intersección, como se vé en la figura 31, en donde se han representado las leyes de estas tensiones en las diferentes secciones transversales de la losa, con el mismo sistema de representación utilizado en el modelo anterior.

El nuevo camino abierto al tránsito de las tracciones de este plano hacia la pila por la inclinación de los diafragmas, actúa como un aumento de la rigidez de la losa en su zona central, permitiendo que la tensión longitudinal en ella sea constante en cada sección transversal (secciones 19 a 14), e incluso que alcance su valor máximo en el eje de simetría (secciones 9 a 13), al contrario del modelo del capítulo anterior, donde el máximo se presentaba en los nodos de unión con las almas, y en el eje de simetría existía un mínimo.

Mientras que, en los vuelos de la losa el comportamiento es semejante en ambos casos, es decir, la tensión longitudinal toma valores inferiores y decrecientes hacia el borde en

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

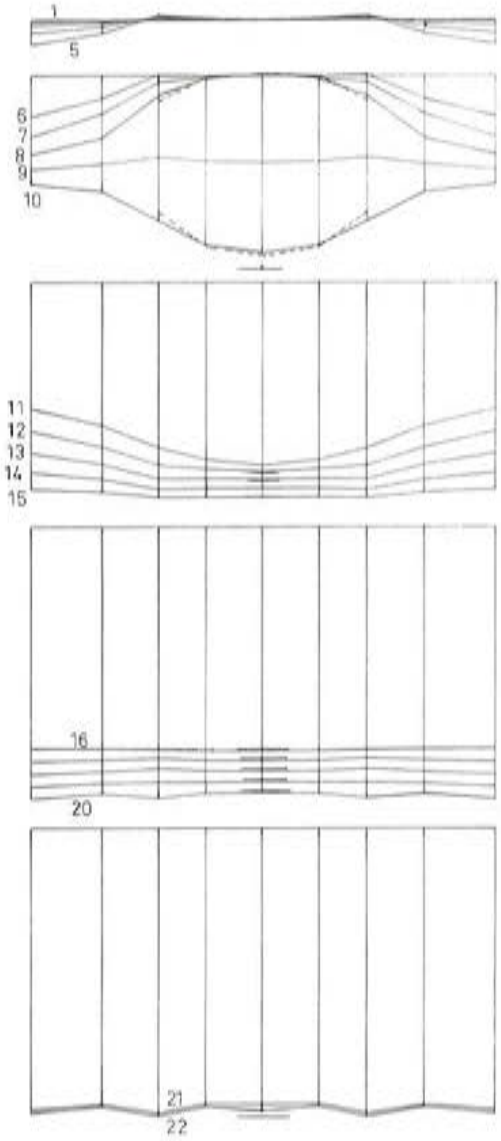


Fig. 31.

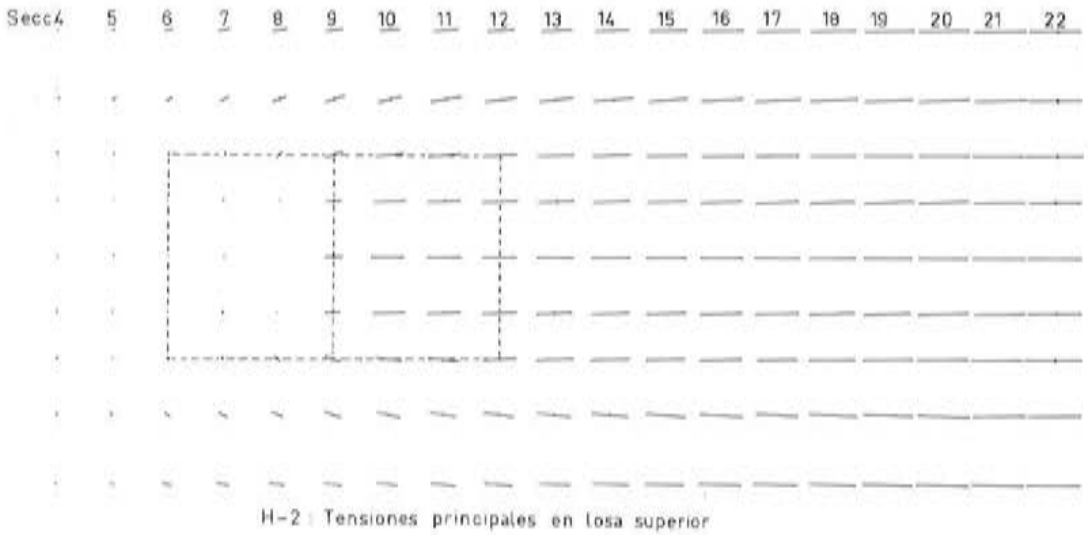
cada sección, y disminuye mucho más rápidamente que los del área central al acercarse a la sección 9, aunque perdure después de ella al no existir el salto de la zona central.

En cuanto a las tensiones transversales, si bien en los vuelos las leyes son semejantes en los dos ejemplos, consecuencia del comportamiento idéntico en dicha zona de las isostáticas, en la zona central, al no necesitar curvarse tanto las isostáticas para pasar a las almas (figura 32), los valores e incluso los signos son diferentes en uno y otro caso.

El valor máximo de esta tensión representa un 6 por 100 de la tracción longitudinal media de la sección de empotramiento con la pila, porcentaje mitad del que aparecía en el capítulo anterior; es decir, este mecanismo de paso de volúmenes, de la losa hacia la pila, lógicamente provoca menores tensiones transversales.

La inclinación de la riostra anterior produce un salto en el volumen de compresiones de la losa inferior del tablero, en la unión con dicho tabique transversal, del 60 por 100 del volúmen que llega por ella a dicha intersección; mientras que en el modelo anterior la disminución que se producía en esta sección de encuentro era sólo del 35 por 100. Como era de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



H-2 : Tensiones principales en losa superior

Fig. 32.

esperar, el paso de las compresiones desde esta losa a la pared de la pila se ve favorecido por la inclinación de la riostra.

Por otro lado, al igual que sucedía en el caso anterior, el aumento de la tensión en los planos de las almas, en los nudos de unión con la pared lateral de la pila y la losa, provoca un aumento del volúmen de compresiones en las secciones próximas al encuentro.

3.1.2. Tensiones en los diafragmas

En la figura 33 se han representado los volúmenes de tensiones longitudinales que circulan por las dos riostras. Como era de esperar, al descomponer el salto del volúmen de tracción de la losa superior, que se produce en la unión con los diafragmas, en la dirección de las dos riostras, se obtiene exactamente el volúmen de tensiones que se presentan en ellas, en dicha unión. Igual sucede en los dos bordes inferiores de las riostras, al establecer el equilibrio entre todas las fuerzas que concurren en las aristas de unión, existiendo pequeñas diferencias que son absorbidas por los cortantes de flexión de todas las losas que inciden allí.

El volúmen de tracciones de la losa superior del cajón ha de pasar a la pared posterior de la pila, y este paso se puede efectuar, bien a través de las almas del cajón, o bien directamente a través de las riostras. En primera aproximación, se podría repartir el volúmen de tracciones entre ambos mecanismos, igualando los corrimientos horizontales en el vértice A (figura 11). Así se tendría, para las riostras, suponiendo que no estuvieran unidas a las almas y sólo lo estuvieran a la pila y a la losa superior:

$$\text{Corrimiento horizontal de A en las riostras} = \frac{2P_r \cdot c^3}{b^2 \cdot E \cdot A_r}$$

con: A_r = área de la sección de la riostra = $e_r \cdot a_L$

E = módulo de elasticidad

P_r = esfuerzo horizontal suma de las componentes horizontales de los axiles de ambas riostras, y

c, b, e_r y a_L = características geométricas según figura I.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Sin embargo, para las almas no es tan fácil establecer dicho corrimiento, dado que su estado tensional no es asimilable a ninguno conocido. Pero sí se puede considerar que será de la forma:

$$\text{corrimiento horizontal de A en las almas} = \frac{P_a}{E \cdot b^2} \cdot Z$$

siendo: Z una función de las dimensiones a, b y e_a, y P_a el esfuerzo horizontal absorbido por estos planos.

En consecuencia, igualando la suma de los volúmenes que atraviesan ambos mecanismos, P_r y P_a, al volúmen P que llega por la losa superior del tablero a la sección de empotramiento, e igualando las flechas, se obtiene como valor de P_r:

$$P_r = \frac{Z}{(Z + c^3/A_r)} \cdot P$$

Y de acuerdo con los resultados obtenidos en los diferentes casos, la función Z viene dada, con suficiente aproximación, por la expresión:

$$Z = \left(\frac{2\,a\,b}{3\,e_a} + 6a \right) \left(\frac{a_1}{v} \right)^{1/4}$$

En resúmen, se puede calcular el volúmen de tensiones, N, en el borde superior de ambas riostras, tracciones para la posterior y compresiones para la anterior, mediante:

$$N = + \frac{c}{b} \cdot \frac{\left(\frac{2\,a\,b}{3\,e_a} + 6\,a \right) \left(\frac{a_1}{v} \right)^{1/4}}{\left(\frac{2\,a\,b}{3\,e_a} + 6a \right) \left(\frac{a_1}{v} \right)^{1/4} + \frac{c^3}{A_r}}$$

Hay que tener en cuenta que para los casos de diafragmas con aligeramientos, el término correspondiente a la flexibilidad de las riostras, $\frac{c^3}{A_r}$, debe calcularse teniendo en cuenta las dimensiones reales de estos elementos.

Debido a la curvatura de las isostáticas que suben por la pila, en los planos de las almas, para pasar hacia el cajón, se produce un aumento del volumen de compresiones en la pared frontal anterior de la pila y una disminución en las tracciones de la posterior; por ello, los volúmenes en una y otra riostra, en su borde inferior, son diferentes, mayor para la anterior, (figura 33), mientras que en el borde superior son idénticas, debido al equilibrio vertical de fuerzas que debe producirse entre ellas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

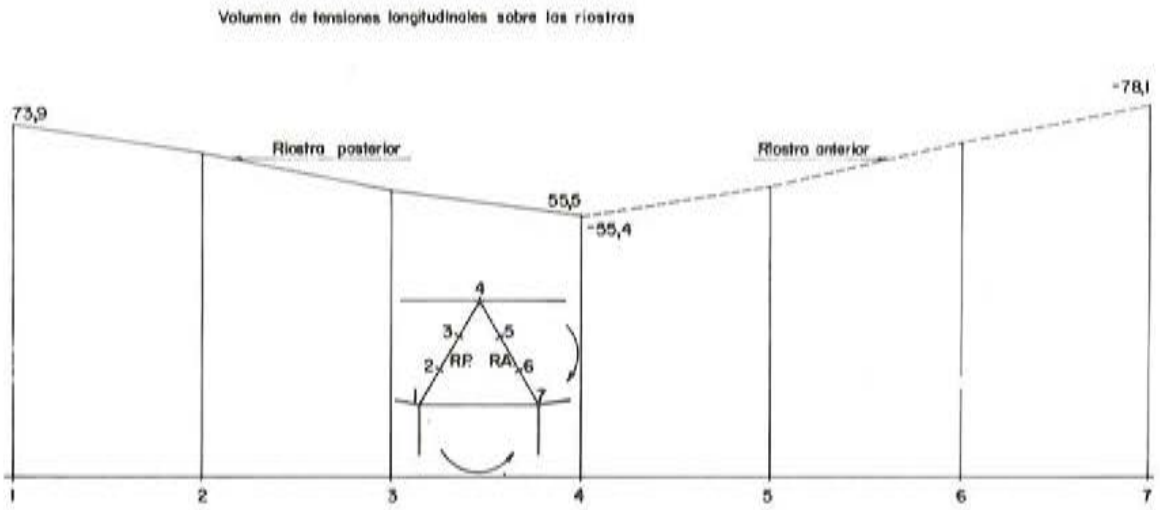


Fig. 33.

Sin embargo, también es posible definir estos volúmenes de tensiones que penetran en ambas riostras por su borde inferior, en función del volúmen de tensiones, V_p, de la pared transversal de la pila, mediante las expresiones siguientes. Para el diafragma posterior:

$$V_1^p = V_p \left[0.42 \left(\frac{e_r^f}{e_a} \right)^{1/2} + 0.15 \frac{e_3}{e_4} \right]$$

siendo e_r^f el espesor de la riostra ficticia maciza que tuviera la misma flexibilidad que la real aligerada (si no existen aligeramientos, $e_r^f = e_r$).

El del diafragma anterior, se puede calcular en función del posterior, V_1^p, con la fórmula aproximada:

$$V_1^a = V_1^p \left[-0.65 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1.7 \frac{a}{b} - 0.06 \right] \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

La diferencia de volúmenes de tensiones longitudinales en los extremos superior e inferior de ambas riostras, provoca las tensiones tangenciales que se presentan a lo largo de los bordes de unión con las almas, y que mantienen el equilibrio. Estas tensiones son prácticamente constantes a lo largo de dichos bordes, aunque se presentan valores máximos en sus extremos, como consecuencia de los esfuerzos rasantes que aparecen en las intersecciones con las otras losas, para que exista igualdad de deformaciones transversales en todas ellas. Prescindiendo de estos valores extremos, una vez conocidos los volúmenes de tracción o compresión de los diafragmas en sus uniones con las losas superior e inferior, por diferencia entre ambos, es posible obtener los esfuerzos rasantes totales actuantes en las dos aristas de contacto con las almas, y a partir de éstos, calcular los valores de la tensión tangencial media a lo largo de ellas, equivalente al valor constante de la ley de esta tensión.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3.1.3. Tensiones en las almas

Por la inclinación que toman las isostáticas de las almas al atravesar la diagonal A-A' del rectángulo de alma común al tablero y a la pila (figura 34), coincidiendo, para todos los casos, prácticamente con dicha diagonal, se puede calcular el volúmen de tracciones que la

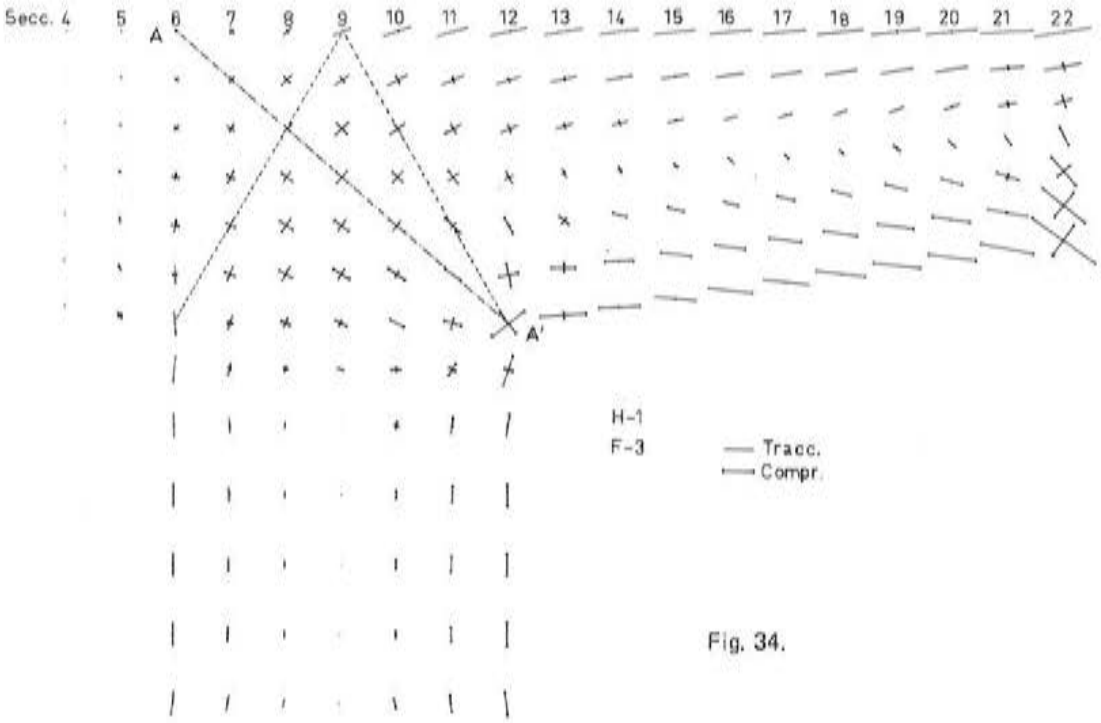


Fig. 34.

atraviesan, $V_{trac.}$. Este esfuerzo puede determinarse, en función del volúmen de tracción de la losa superior, sumándole el que llega por las almas del tablero a la sección de encuentro, $V_{alm.}$, restándole la proyección horizontal de la suma de los volúmenes superiores que se llevan las dos riostras, P_r, y proyectando este resultado sobre la dirección media de las isostáticas para lo que se tomará el valor $\frac{a}{c}$. Es decir, se tendrá:

Por alma: $$V_{trac.} = \frac{a}{2c} \quad (P - P_r + V_{alm.})$$

siendo: $$V_{alm} = 2 . \frac{1}{2} . X_s . \sigma_s . e_a$$

con:

X_s = distancia de la fibra superior al c. de g. del cajón.

σ_s = tensión en la fibra superior del cajón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3.2. Hipótesis III: Torsor constante

La inclinación de los diafragmas también provoca, respecto al caso de riostras verticales, diferencias sobre el estado tensional originado por un momento torsor actuante sobre el cajón, equilibrado mediante el flector correspondiente sobre la pila. Así, en la zona entre riostras (figura 35), las tensiones tangenciales de la losa superior disminuían gradualmente entonces, mientras que ahora los valores permanecen casi constantes hasta la sección central, 9, de unión con los diafragmas. Lo mismo sucede también con estas tensiones en las almas, en su borde superior y proximidades de él.

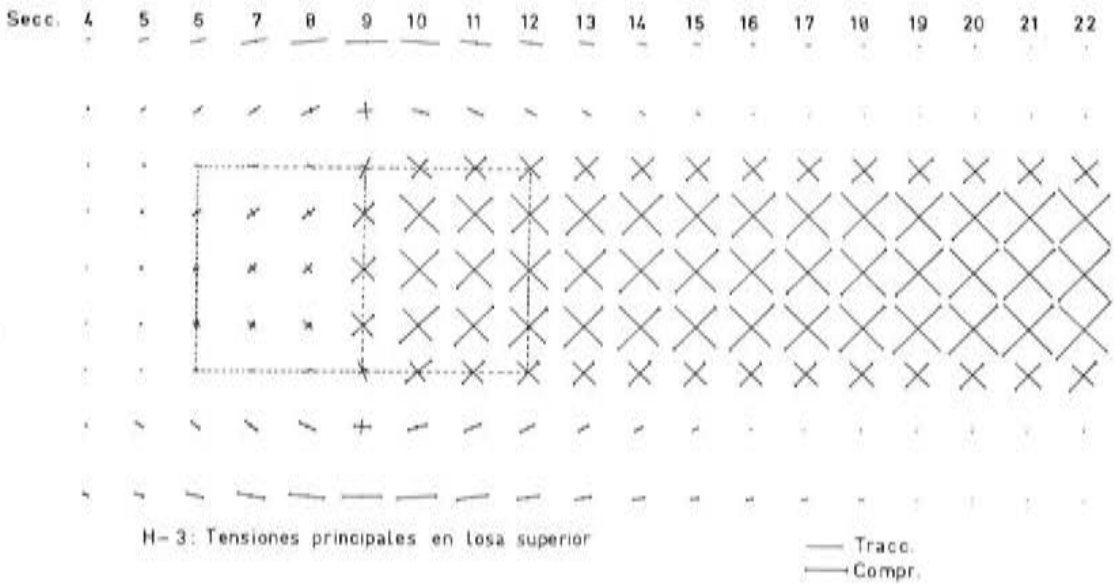


Fig. 35.

Por otro lado, los valores máximos de las tensiones longitudinales, σ_s, en cada sección transversal, que aparecen a lo largo de los bordes libres de los voladizos de la losa superior, representan para este nuevo caso, mayor porcentaje en comparación con las tangenciales dadas por la fórmula de Brent, como se ve en la figura 36, donde se han representado estas tensiones para los dos casos.

La causa de estas divergencias hay que buscarla en el diferente comportamiento frente al mecanismo de torsión-flexión que presentan uno y otro empotramiento del cajón en la pila, debido a que, si bien la losa inferior queda empotrada en la sección 12, la superior no lo hace hasta la sección 9, existiendo por tanto un retraso en el comportamiento de ella. También, la rigidización que suponía la riostra anterior a la deformación en su plano de la sección transversal del cajón que la contenía, ha perdido eficacia al inclinarse, mientras que aumen-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

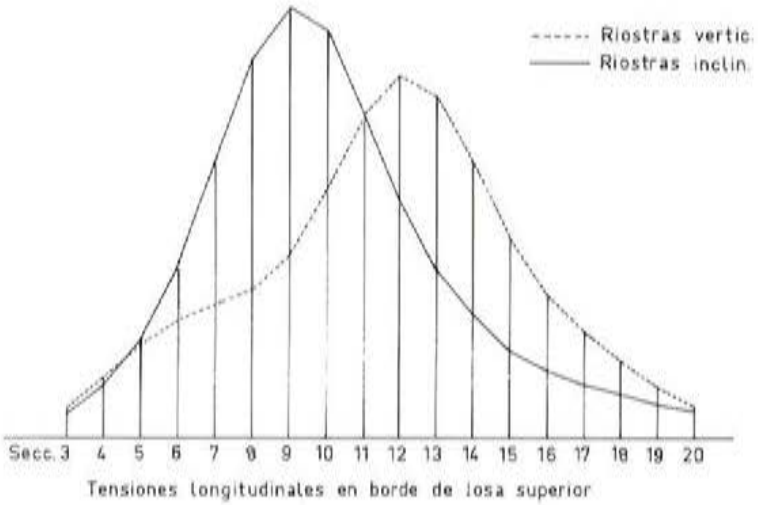


Fig. 36.

ta la coacción al alabeo del tablero, que antes sólo estaba impedido por la rigidez a flexión del diafragma como losa, y ahora lo está, además, por la rigidez de membrana en su propio plano.

4. MODELOS DE PILA ABIERTA

Se considera el caso de pila constituída por dos soportes verticales (figuras I.3 y I.4), de sección rectangular maciza, de ancho igual al del tablero en su parte inferior, y coincidentes con la losa inferior del cajón en la línea de encuentro de ésta con las riostras. Esta tipología, muy empleada en los casos en que se desea rigidez a flexión en el nudo, pero flexibilidad frente a movimientos horizontales, al no tener las paredes laterales en prolongación de las almas del tablero, determina una distribución tensional sobre el conjunto, bastante diferente de la creada por la pila cajón cerrada, y que se sitúa como caso intermedio entre ésta y la que aparece en el caso de apoyos aislados desdoblados.

La falta de paredes laterales impide el fácil tránsito, a través de ellas, de las tensiones de los tabiques anterior y posterior a las almas, produciendo fuertes concentraciones de tensiones en la unión inferior con los soportes, como se observa en las figuras 37 y 38, en donde aparecen representadas las tensiones principales en los nodos de la malla de las almas, para los modelos de riostras verticales e inclinadas, respectivamente, bajo la solicitación de cortante constante. Se aprecia en ellas el comportamiento diferente de estos planos en la zona entre riostras, respecto a la morfología anterior. Al no existir el paso de las isostáticas hacia las almas de la pila, ahora la pared posterior de la pila actúa sobre estos planos produciendo el efecto de una carga vertical.

Por otro lado, al comparar entre sí ambas figuras, se aprecia claramente la ventaja del modelo de diafragmas inclinados para conducir los esfuerzos de flexión, al ser menores en él las tensiones principales en todos los puntos del rectángulo de alma situado entre riostras, debido a que la mayor parte de las tensiones longitudinales de las losas superior e inferior se equilibran a través de los diafragmas.

Sin embargo, el paso del axil de la pila a cortante del tablero, es evidente que las riostras verticales lo efectúan mejor, sin producir tan fuertes concentraciones de tensiones en las zonas de unión de las almas con los tabiques de la pila.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

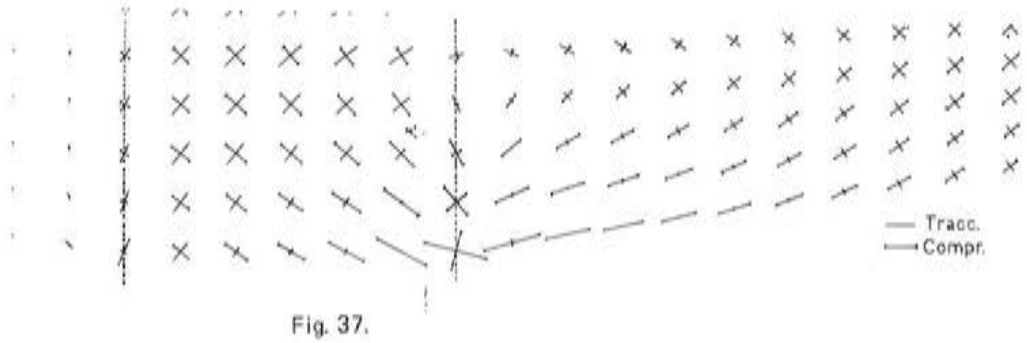


Fig. 37.

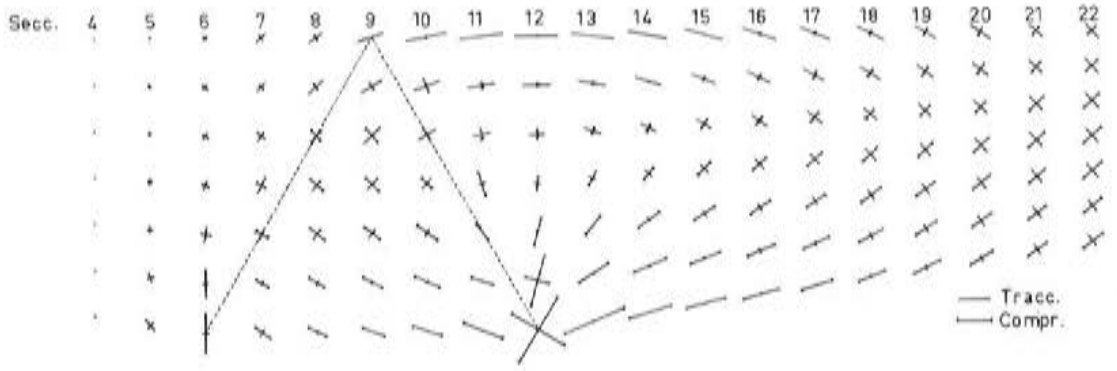


Fig. 38.

Por ello, la elección riostra vertical-riostra inclinada ha de estar regida por el predominio de uno u otro esfuerzo, axil ó flector, sobre la pila.

5. CONCLUSIONES

El análisis de la escasa bibliografía existente hasta el presente sobre el tema tratado, muestra que, para resolver el problema, es necesario recurrir al auxilio de ensayos sobre modelo, o bien, a estudios mediante programa de elementos finitos.

Debe hacerse notar que si bien en la referencia (1) se da un artificio de cálculo para el caso de solicitación de flexión sobre el tablero soportado por apoyos desdoblados puntuales, que puede resultar aproximado para este tipo de enlace, no lo es tanto para los casos de empotramiento en la pila, tanto cuando ésta es de sección cajón, como si está constituída por dos tabiques transversales, independientes, prolongación de las riostras. El admitir este sistema de cálculo conduce a esfuerzos menores que los reales, en algunos casos, como se ha visto en la referencia 4 para las morfologías consideradas.

Por ello, y utilizando el más flexible de los procedimientos de estudio posibles, es decir, mediante el programa de elementos finitos, se analizaron los comportamientos frente a solicitaciones, no sólo de flexión del tablero sino también de cortante y torsión sobre el mismo, para los dos tipos de pila, cerrada y abierta, y para los dos más frecuentes de riostras, verticales e inclinadas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

La primera consecuencia notable que se deriva de todo el estudio realizado, es la validez de los resultados obtenidos aplicando la teoría elemental de la viga, tanto en el tablero como en la pila, hasta zonas muy próximas a su encuentro. El efecto de éste sobre el estado tensional influye en un entorno, próximo a él, muy reducido; así, para el tablero, la zona de influencia no llega, en ningún caso de los considerados, a la mitad de su canto; y lo mismo puede decirse para la pila.

También es de resaltar la mínima influencia de la morfología de la pila sobre el estado tensional de la losa superior, para las tres diferentes solicitaciones elementales supuestas; siendo en la hipótesis de flexión y de cortante prácticamente idénticas las distribuciones de tensiones que se producen en este plano con pila cerrada y abierta. Las diferencias se aprecian en la losa inferior y en las zonas bajas de las almas; pero son escasas, en éstas, en las proximidades a la losa superior.

Dentro de los modelos de riostras verticales, bajo solicitaciones de flexión, el mecanismo de traspaso de las tracciones longitudinales de la losa superior a la pared posterior de la pila, se efectúa mediante el paso de ellas hacia las almas del cajón, para, a través de éstas, entrar en la riostra posterior y llegar así al plano en que se equilibran. Una pequeña parte de estos traspasos hacia las almas, se efectúa en la región anterior al encuentro. Por ello, los volúmenes, tanto de la losa superior como de la pared posterior de la pila, disminuyen ligeramente al llegar al empotramiento; al contrario de lo que sucede en el ala inferior del cajón y en el tabique anterior, en los que se produce un aumento del volúmen de compresiones.

La entrada en las riostras, de las tensiones longitudinales procedentes de las almas del tablero, se realiza de forma gradual en sus aristas comunes, mediante esfuerzos rasantes prácticamente constantes; por lo que el aumento del volúmen de tensiones es casi lineal.

Al colocar los diafragmas inclinados, formando una triangulación con la losa inferior, se abre un nuevo camino para el paso de las tracciones del ala superior hacia la pila, al estar el tablero sometido a esfuerzos de flexión; pero este camino sólo es utilizado por parte de las tracciones de la zona central, pasando el resto de las de esta región y las de los voladizos, por las almas, de idéntica manera a como ocurría en el caso de riostras verticales; por lo que no resulta tan eficaz, como podría esperarse, este nuevo mecanismo de paso, llegando para los modelos más favorables de almas delgadas con diafragmas de gran espesor, a circular por éstos tan sólo el 70 por 100 del volúmen total de las tracciones de la losa superior; es decir, el mecanismo de las almas es suficientemente rígido para necesitar de un gran espesor en las riostras para que el trabajo de éstas sea eficaz.

Las tracciones en el alma, dentro de la diagonal del rectángulo común a la pila y al tablero, bajo este tipo de solicitación, pueden obtenerse como la proyección en esa dirección de la diferencia entre las tracciones del tablero y las que se van por los diafragmas.

También, en estas hipótesis de carga, como los volúmenes de tensiones que penetran por el borde inferior de la riostra provinientes de la pila, son diferentes a los que lo hacen por el borde superior procedentes de este ala, puesto que parte de las tracciones de ésta pasan a través de las almas, el equilibrio de los diafragmas se mantiene mediante esfuerzos rasantes a lo largo de sus aristas de unión con las almas; esfuerzos que son prácticamente constantes en todo el borde.

Por otro lado, esta morfología de riostras inclinadas presenta una mayor rigidez frente al alabeo torsional del cajón, dando por ello, en general, mayores tensiones longitudinales sobre éste, bajo la solicitación de torsión, que en el caso de diafragmas verticales.

En resumen, para cualquiera de las dos formas de pila consideradas, el comportamiento de uno u otro tipo de arriostramiento transversal es adecuado, siendo más favorables los diafragmas inclinados para la transmisión de esfuerzos de flexión hacia la pila, en tanto que los

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

verticales son más satisfactorios frente a los cortantes, que suelen ser los esfuerzos dominantes en estas zonas. Esto, unido a la mayor facilidad constructiva de este último tipo de arriostramiento, puede decidir su elección en la mayoría de los casos.

BIBLIOGRAFIA

(1) J. Mathivat "Construction par encorbellement des ponts en béton précontraint". Editions Eyrolles.

(2) J. Manterola "Estudio sobre tableros de puente: Sección Cajón". Hormigón y Acero, n.º 139.

(3) J. Manterola "La sección abierta y cerrada bajo solicitación excéntrica". Monografía n.º 15 de la Agrupación de Fabricantes de Cemento.

(4) L. Carrillo "Puentes en viga cajón: Estado tensional en el nudo pila-dintel". Tesis Doctoral. Escuela T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos. Madrid, 1982.

* * *

Cursos en la "Ecole Nationale des Ponts et Chaussees" para postgraduados

En la "Ecole Nationale des Ponts et Chaussées", de Francia, se van a celebrar, a partir, de la segunda quincena del mes de septiembre del presente año, unos Cursos de formación y especialización para postgraduados de las Escuelas Técnicas Superiores, tanto nacionales como extranjeros, bajo el título general de "Mastères Spécialisés".

La duración de estos Cursos es de cinco trimestres, de los cuales tres se dedican a enseñanzas teóricas y cinco meses a estadías en Empresas especializadas.

Durante dos de estos cinco meses se realizarán trabajos a pie de obra para la adquisición de la práctica necesaria en la resolución de los problemas que plantea la ejecución; y durante los tres restantes se trabajará en la redacción de un proyecto en una oficina técnica.

El número de participantes en cada Curso está limitado a quince. Los aspirantes, que deberán poseer un buen conocimiento del francés, serán sometidos a una selección en dos etapas. En la primera se calificarán sus expedientes profesionales y en la segunda se someterán, previa convocatoria, a un examen oral.

Para el año actual se han convocado tres Cursos de este tipo. El primero va dedicado a la "Ingeniería de la edificación"; el segundo a "Urbanismo", y el tercero a "Ingeniería civil".

El plazo para la presentación de solicitudes finaliza el 31 del próximo agosto.

Para todo lo relacionado con estos Cursos, los interesados deberán dirigirse a:

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES
Direction de l'Enseignement
Sous-Direction des Formations Spécialisées
28, rue des Saints-Pères
75007 PARIS - Francia
Tfno.: 19 6 16 (1) 42 60 34 13 poste 1150

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Análisis, mediante elementos finitos, de tableros nervados de hormigón armado. Estudio del ancho eficaz en secciones en T

Juan Miquel
Antonio R. Marí
Profesores titulares.
Departamento de Estructuras.
E.T.S. Ingenieros de Caminos, de Barcelona

RESUMEN

En el presente trabajo, se realiza un estudio del ancho eficaz de distintos tipos de secciónes. El método de análisis utilizado es el de los elementos finitos, usando elementos lámina y viga, para modelizar las cabezas y almas, respectivamente. El estudio, pretende identificar los parámetros básicos que influyen, de forma relevante, en la determinación de dicho ancho eficaz. Para ello, se ha realizado un estudio paramétrico en régimen lineal elástico, como consecuencia del cual se proponen unas expresiones sencillas. También se realiza una incursión en el campo del comportamiento no lineal, a fin de definir la dirección de futuros estudios. Los resultados obtenidos, se han comparado con otros procedentes de soluciones analíticas (para algunos casos particulares) y experimentales.

1. INTRODUCCION

Conforme a la teoría elemental de Resistencia de Materiales, las tensiones normales en una pieza trabajando a flexión, se distribuyen proporcionalmente a la distancia a la fibra neutra de la sección; por lo que las tensiones en las alas de una viga, por ejemplo en "T", se distribuirán uniformemente. Sin embargo, si este ancho es muy grande, las partes del ala más alejadas del alma o nervio de la viga, contribuirán en menor medida a resistir el momento flector; por lo que la viga será menos resistente de lo que la teoría predice.

El hecho de que la distribución de tensiones longitudinales en las alas no sea uniforme, se debe a la aparición de unas tensiones rasantes alma-ala de la viga (fig. 1). Dichas tensiones rasantes serán tales que compatibilicen los desplazamientos de las alas y del alma. Considerando el ala como un elemento laja, aislado, sometido a esta distribución de tensiones rasantes, aplicando la teoría de la Elasticidad podemos inferir que, efectivamente, la distribución de tensiones normales longitudinales no será uniforme en el ancho de la pieza.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Una manera de abordar este problema de forma práctica es suponer una anchura eficaz de ala, menor que la real, de tal forma que al aplicar la teoría elemental de la flexión de vigas a la nueva sección ficticia, se obtenga un valor correcto de la resistencia (fig. 2).

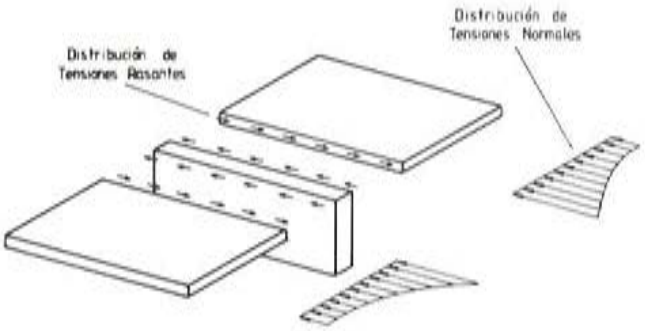


Fig. 1. Tensiones rasantes en la unión ala-alma de la viga.

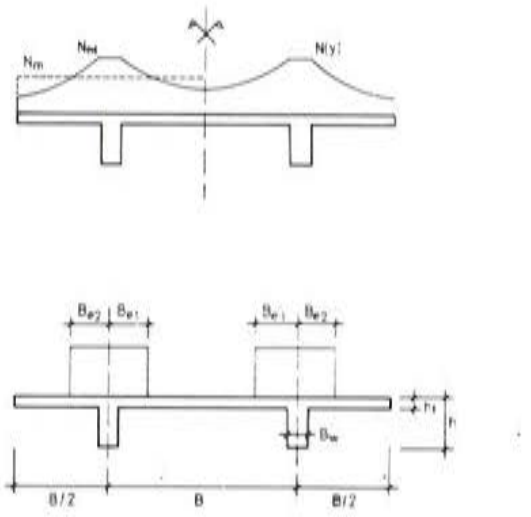


Fig. 2. Anchura eficaz de una sección.

La solución de este problema, fue tratada primeramente por Th. von Karman [1] y, posteriormente, por Shnadel [2], Reissner [3], Chwalla [4], y Beschkine [5] en vigas en "T". Se supuso una viga continua, apoyada sobre un número infinito de apoyos equidistantes. El ancho del ala se suponía infinito y su espesor muy pequeño con respecto a la altura del nervio, de tal forma que se la consideraba como una laja y, por tanto, se la estudiaba en Elasticidad bidimensional.

Recientemente, Qi-Gen Song (6), en un interesante trabajo, ha estudiado el problema del ancho eficaz, utilizando la teoría de las láminas plegadas, realizando asimismo un análisis de la convergencia de las series de Fourier utilizadas en dicha teoría.

En el presente trabajo, se ha intentado una aproximación al estudio de este fenómeno, mediante elementos finitos, que ha permitido sacar unas primeras conclusiones cuantitativas, en régimen elástico, en secciones "T", "PI", cajón y "U" invertida, así como unas conclusiones de tipo cualitativo para el régimen no lineal.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

2. PROCEDIMIENTO DE CALCULO UTILIZADO EN ESTE TRABAJO

La solución del problema del ancho eficaz, puede actualmente, con la ayuda de las técnicas numéricas, resolverse fundamentalmente de tres formas:

- Teoría de las láminas plegadas.
- Método de la banda finita.
- Método de los elementos finitos.

Se ha escogido la tercera alternativa, mediante un programa general de láminas, por varias razones: En primer lugar, permite también el estudio en régimen no lineal. Asímismo, permite tener en cuenta la existencia de nervios, con los cuales, como se verá más adelante, se han modelado las almas. Además, es posible también tener en cuenta la existencia de armaduras en el hormigón, las cuales, si apenas modifican la respuesta en el cálculo elástico lineal, sí es de fundamental importancia el considerarlas en la alternativa no elástica.

2.1. Modelización de la estructura

En la modelización de la estructura mediante elementos finitos, se han utilizado dos tipos de elementos distintos: para la lámina, se ha escogido el elemento isoparamétrico degenerado de nueve nodos de la familia de Ahmad [7], con un campo de desplazamientos que se aproxima mediante funciones de interpolación lagrangianas (fig. 3).

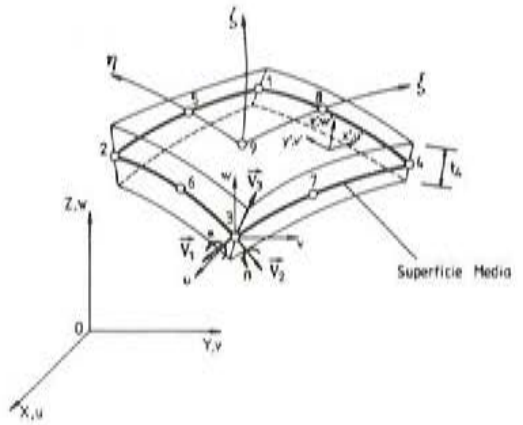


Fig. 3. Geometría del elemento lámina.

Cada uno de los nodos está situado en la superficie media, y tiene cinco grados de libertad, tres corrimientos y dos giros, considerados en sus coordenadas locales; mientras que en coordenadas globales tiene seis, lo cual permite el análisis de láminas de forma general, incluso con discontinuidades angulares. Las coordenadas de un punto cualquiera de la lámina pueden expresarse como interpolación de las coordenadas nodales:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_i N_i(\xi,\eta)\frac{1+\zeta}{2}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{sup.} + \sum_i N_i(\xi,\eta)\frac{1-\zeta}{2}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{inf.}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

con lo cual:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_i N_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{med.} + \sum_i N_i \frac{\zeta}{2} \vec{V}_{3i}$$

$$\vec{V}_{3i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{sup.} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{inf.}$$

siendo N (i = 1, ..., 9) las funciones de interpolación del elemento.

El campo de desplazamientos puede expresarse, asimismo, por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_i N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum_i N_i \zeta \frac{t_i}{2} (\vec{V}_{1i} - \vec{V}_{2i}) \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

Se admite la hipótesis de que las rectas, normales a la superficie media antes de la deformación, siguen rectas después de producirse ésta, pero no necesariamente normales a la superficie media deformada; lo cual permite considerar, de una forma bastante aproximada, la contribución del esfuerzo cortante a la energía de deformación. Con ello, es posible el estudio de láminas gruesas. Asimismo se hace la hipótesis habitual de que las tensiones normales a la superficie media de la lámina son despreciables.

La relación entre deformaciones y desplazamientos, vendrá dada por la expresión:

$$\epsilon'_{k\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x'_\ell} + \frac{\partial u'_\ell}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x'_\ell} \right)$$

Transversalmente, el espesor se divide en una serie de capas, a fin de poder tener en cuenta la variación del estado tenso-deformacional en dicho espesor, en régimen no lineal. Cada capa se supone sometida a un estado biaxial de tensiones. Asimismo, esta disposición en capas permite introducir el armado de forma muy cómoda.

La integración numérica se realiza mediante un esquema muy parecido al de Gauss-Legendre.

En cuanto a las vigas, se discretizan mediante elementos rectos, unidimensionales, con dos nodos en los extremos, cada uno de ellos con seis grados de libertad. La sección transversal se divide en filamentos, en cada uno de los cuales se supone un estado tensional uniforme. De esta forma, es posible tener en cuenta la solicitación de flexión esviada sobre la viga (fig. 4).

En cuanto a la respuesta a torsión de la viga en régimen no lineal, se ha modelizado mediante la utilización de una rigidez torsional variable en función de la solicitación de torsión. A tal fin se han supuesto válidas las hipótesis habituales de torsión uniforme de Saint-Venant.

Para el régimen no lineal, se admite en el hormigón un comportamiento hipoelástico

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

[8] a compresión, y elástico hasta la tensión de rotura, a tracción, considerando la colaboración del hormigón entre fisuras. El criterio de rotura utilizado es el basado en las experiencias de Kupfer (fig. 5). Por lo que hace referencia al acero, éste se ha tratado de acuerdo con el modelo distribuído, para los elementos lámina, y embebido, para los elementos viga [9]. Su ley de comportamiento tenso-deformacional se supone elastoplástica.

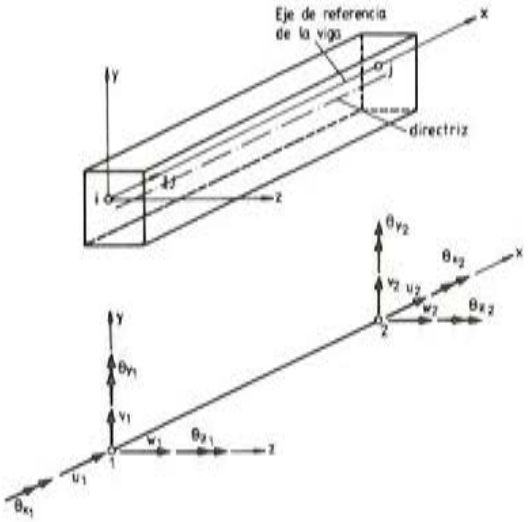


Fig. 4. Elemento viga.

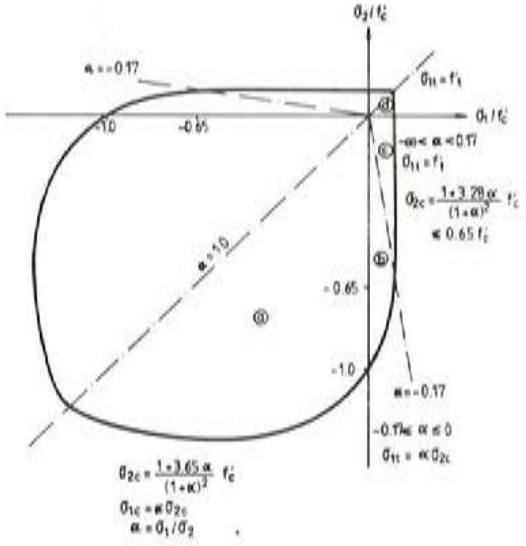


Fig. 5. Criterio de rotura para el hormigón.

2.2. Formulación por elementos finitos

Para el análisis general de la estructura, se ha utilizado el método de rigidez, que consiste en resolver unos desplazamientos incógnitas a partir de unas acciones dadas, y de las propiedades mecánicas y geométricas de la estructura.

La aplicación, sobre el elemento, del principio de los trabajos virtuales, conduce a la ecuación de equilibrio del sólido deformable:

$$\int_{B_1} ({}^1_1\tau_{ij}\ \delta\ \Delta_1\eta_{ij} +_1 C_{ijk\ell}\ \Delta_1 e_{k\ell}\ \delta\ \Delta_1 e_{ij})\ dV =$$

$$\int_{\partial B_1} {}^2_1 t_i\ \delta^2_1\ u_i\ dA - \int_{B_1} {}^1_1\tau_{ij}\ \delta\ \Delta_1 e_{ij}\ dV$$

siendo:

$$\Delta_1 S_{ij} = {}_1 C_{ijk\ell}\ \Delta_1 e_{k\ell}$$

$$\Delta_1 E_{k\ell} = \Delta_1 e_{k\ell} + \Delta_1\eta_{k\ell}$$

$$2\ \Delta_1 e_{k\ell} = \frac{\partial u_k}{\partial' z_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial' z_k}$$

$$2\ \Delta_1\eta_{k\ell} = \frac{\partial u_n}{\partial' z_k}\ \frac{\partial u_n}{\partial' z_\ell}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El subíndice a la izquierda, indica la base a la que está referido (coordenadas), y el superíndice a la izquierda, la configuración de referencia (inicial o deformada).

La ecuación de equilibrio, para cada elemento, se reduce a la expresión:

$$\underset{\sim}{K}^e_E \, \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{K}^e_G \, \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{R}^e_E - \underset{\sim}{R}^e_I$$

en donde:

$$\underset{\sim}{K}^e_E = \int_{B_1} {}_1C_{ijk\ell} \; \Delta_1 e_{k\ell} \; \delta \; \Delta_1 e_{ij} \; dV \qquad \text{Rigidez Elástica}$$

$$\underset{\sim}{K}^e_G = \int_{B_1} {}_1\tau_{ij} \; \delta \, \Delta_1 \eta_{ij} \; dV \qquad \text{Rigidez Geométrica}$$

$$\underset{\sim}{R}^e_E = \int_{\delta B_1} {}^2_1t_j \; \delta^2_1 \, u_i \; dA \qquad \text{Fuerzas Exteriores}$$

$$\underset{\sim}{R}^e_I = \int_{B_1} {}_1\tau_{ij} \; \delta \; \Delta_1 e_{ij} \; dV \qquad \text{Fuerzas Internas}$$

$\underset{\sim}{r}$ = Vector de incógnitas nodales

Con ello, para la estructura total discretizada, el sistema de ecuaciones queda:

$$\sum_e \underset{\sim}{K}^e \, \underset{\sim}{r} = \sum_e \underset{\sim}{R}^e$$

El símbolo de sumatorio, en este caso, indica ensamblaje de elementos.

El efecto de no linealidad del material, se introduce en la matríz de rigidez, para un nivel de cargas determinado, gracias a la discretización en capas, o filamentos para las vigas, considerando en cada una de ellas el módulo correspondiente al estado del material.

En general, la expresión del sistema de ecuaciones siempre puede reducirse a la forma:

$$\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{r}) \, \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{r})$$

en donde $\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{r})$ será una constante en el caso de elasticidad lineal.

3. ESTUDIO DEL ANCHO EFICAZ

En este apartado se entra propiamente en el análisis del fenómeno, empleando los procedimientos de cálculo que se han descrito en los anteriores.

El objetivo primordial es identificar los parámetros más signitivativos y definir su influencia en la determinación del ancho eficaz. En función de los resultados obtenidos, se proponen unas fórmulas aproximadas para su uso en dimensionamiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3.1. Secciones analizadas

El primer caso que se analiza es el correspondiente a un puente recto, biapoyado y de sección en "PI" (fig. 6). El armado que se le ha dispuesto (fig. 7), es el necesario para resistir, sin tener en cuenta el reparto transversal, las acciones que señala la vigente Instrucción Española de Puentes, para una luz de 20 metros.

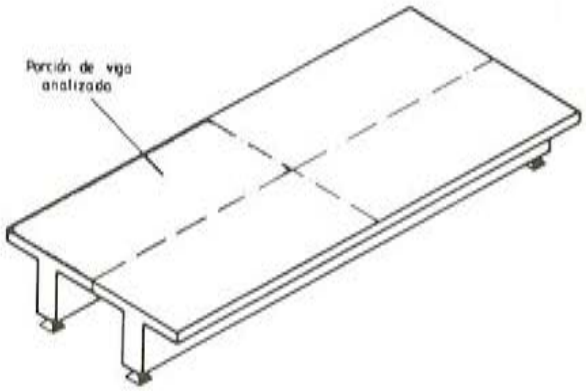


Fig. 6. Puente con sección en PI analizado.

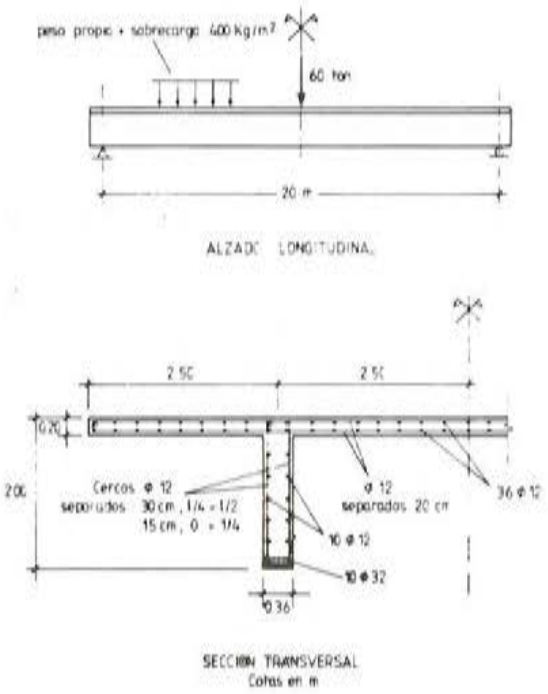


Fig. 7. Definición del puente en PI analizado

Debido a la doble simetría, se ha estudiado únicamente un cuarto de pieza. La discretización por elementos finitos utilizada es la que muestra la figura 8. Como puede verse, el alma se ha modelizado como una viga, ya que en los tanteos previos que se realizaron, pudo observarse la similitud de resultados entre el tratamiento como viga y como lámina.

El segundo tipo de viga analizado es una sección en "T". Se han estudiado dos casos diferentes. El primero parte del esquema de viga biapoyada, con sección en "PI", simplemente variando las condiciones de vinculación del borde simétrico de la "PI" y dejándolo libre. La discretización, por lo tanto, así como las propiedades de los materiales, son idénticas.

El segundo caso, también corresponde a un esquema estático biapoyado. El tipo de viga es similar a la tratada por Razaqpur y Ghali [10], los cuales ensayaron hasta rotura y midieron las tensiones en los diferentes puntos.

La definición geométrica, así como la disposición de armaduras en la sección, y el esquema de cargas, puede verse en la figura 9.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

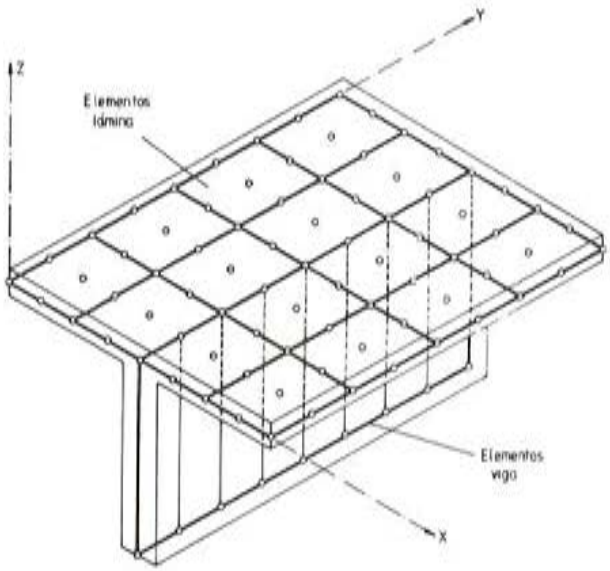


Fig. 8. Discretización por elementos finitos.

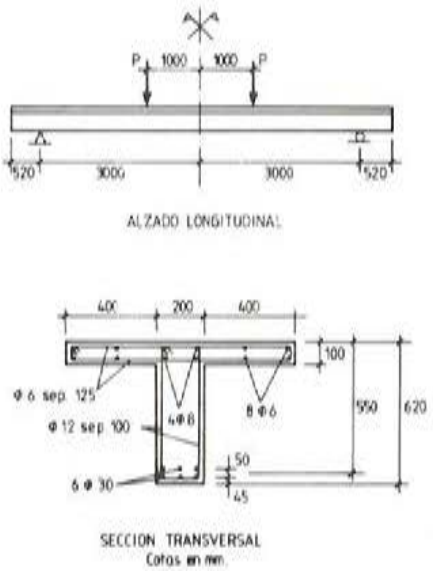


Fig. 9. Viga de Razaqpur y Ghali.

La sección cajón analizada, parte del esquema de sección en "PI" anterior, simplemente situando los nervios en los extremos del tablero y añadiendo un elemento losa inferior que cierre la sección.

Asimismo, se ha estudiado una sección en "U" invertida, idéntica a la cajón sin el tablero inferior.

3.2. Propiedades de los materiales

Las propiedades de los materiales son las que se indican a continuación:

Hormigón:

– Resistencia a compresión, a los 28 días	300 kp/cm^2
– Resistencia a tracción:	50 kp/cm^2
– Módulo de Elasticidad:	350.000 kp/cm^2
– Módulo de Poisson:	0,15
– Peso específico:	2,5 t/m^3
– Deformación para la máxima resistencia:	0,002

Acero:

– Módulo de Elasticidad	2.100.000 kp/cm^2
– Módulo de endurecimiento:	0 kp/cm^2
– Tensión de fluencia:	6.000 kp/cm^2
– Deformación última:	0,1

La serie de resultados obtenidos con base a este esquema, provienen de variar las pro - porciones geométricas de la estructura, y de las distintas hipótesis de carga, a fin de determinar la influencia de los distintos parámetros que intervienen en el fenómeno.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3.3. Parámetros estudiados

Existen una serie de parámetros que caracterizan el ancho eficaz, los cuales son fundamentalmente de tres tipos: En primer lugar, los parámetros geométricos; en segundo lugar, el tipo de cargas, y, por último, las propiedades elásticas de los materiales.

De entre los parámetros geométricos, se han estudiado:

- Relación canto de la losa/canto total.
- Relación ancho/luz.
- Anchura de los nervios/anchura de la sección.

Por lo que hace referencia a las cargas, se ha estudiado el efecto, en el ancho eficaz, de la carga repartida y de la carga puntual.

Por último, se ha analizado también la influencia del módulo de Poisson en el ancho eficaz.

4. RESULTADOS OBTENIDOS

4.1. Sección en "PI"

4.1.1. Parámetros "h_f/h" y "B/B_ω"

"h_f/h":

Manteniendo constante el valor "B/B_ω", igual a 10/0,36 = 13,8889, se varió el espesor de la losa: $h_f = 0,2$; $h_f = 0,3$; $h_f = 0,4$; $h_f = 0,6$. Estos valores dan, respectivamente, unas relaciones $h_f / h = 0,1$; $h_f/h = 0,15$; $h_f/h = 0,2$ y $h_f/h = 0,3$.

"B/B_ω":

Manteniendo constante h_f/h e igual a 0,20/2 = 0,1, se varió el ancho del nervio de tal manera que se obtuvieron, para B/B_ω, los valores $B/B_\omega = 10$; $B/B_\omega = 5$ y $B/B_\omega = 2,5$

Cada una de estas relaciones de h_f/h y B/B_ω se estudió para tres relaciones B/L distintas, correspondientes a luces de L = 20 m; L = 15 m y L = 10 m. Los resultados obtenidos en

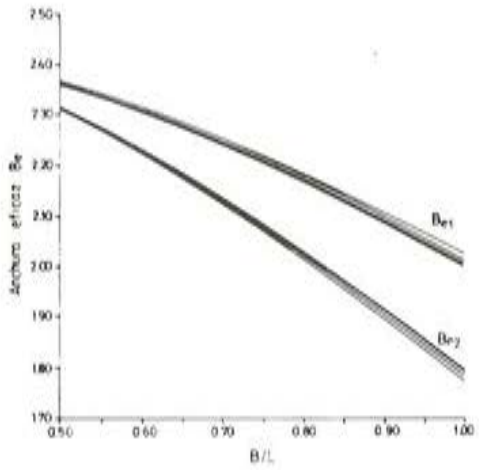


Fig. 10. Ancho eficaz para distintos valores h_f/h.

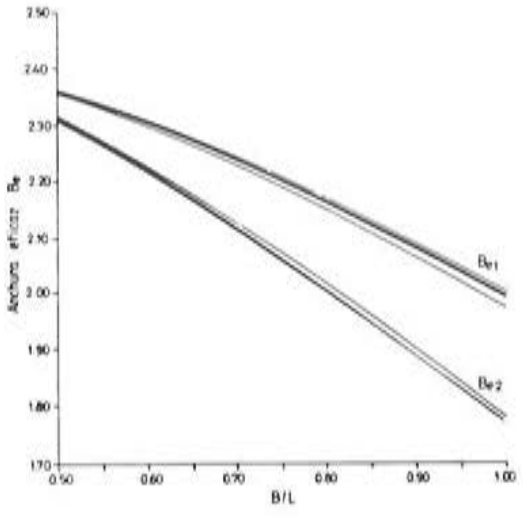


Fig. 11. Ancho eficaz para distintos valores B/B_ω

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

el centro de la luz, para una carga uniformemente repartida, a lo largo de la pieza, de 12,24 tm, pueden verse en las figuras 10 y 11. Como se observa en ellas, los valores del ancho eficaz son prácticamente independientes de las relaciones h_f/h y B/B_ω, dentro de los intervalos de variación considerados.

4.1.2. Relación "B/L". Carga uniformemente repartida (ν = 0,15)

Este es el parámetro geométrico más importante en el estudio del ancho eficaz, según se desprende de los resultados obtenidos.

Para analizar su influencia, se han estudiado diecisiete casos distintos, partiendo de la sección en "PI" descrita en el apartado 3.1, variando la distancia entre los apoyos de la viga: L = 40 m; L = 24 m; L = 20 m; L = 17,5 m; L = 15 m; L = 12,5 m y L = 10 m.; y el ancho de la losa superior: 2B = 10 m; 2B = 15 m y 2B = 20 m.

Los resultados obtenidos pueden verse en la figura 12.

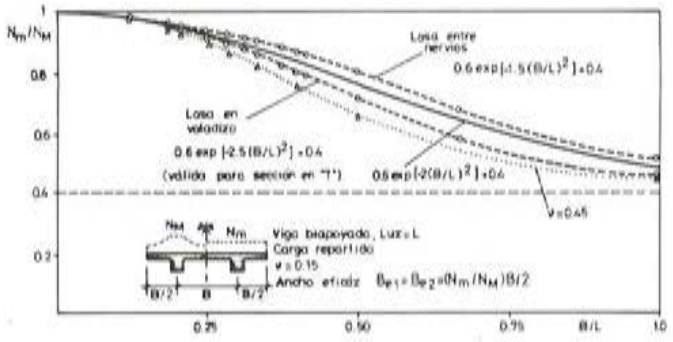


Fig. 12. Variación del ancho eficaz con B/L.

Como puede observarse, existen dos curvas, una para la losa entre nervios y otra para la losa en voladizo. Dichas curvas pueden ajustarse mediante las siguientes expresiones exponenciales:

$$\sigma_m/\sigma_M = 0{,}6 \exp[-2{,}5\,(B/L)^2] + 0{,}4, \text{ losa en voladizo;}$$

$$\sigma_m/\sigma_M = 0{,}6 \exp[-1{,}5\,(B/L)^2] + 0{,}4, \text{ losa entre nervios;}$$

por lo que el ancho eficaz vale:

$$B_e = \frac{\sigma_m}{\sigma_M} B/2$$

Estos resultados son válidos para carga uniformemente repartida y para secciones en "PI", con los nervios equidistantes del borde de la sección y del eje de simetría. No obstante, se ha comprobado que el resultado para la losa en voladizo es aplicable a secciones en "T"; por lo que para este tipo de secciones se tendrá:

$$\sigma_m/\sigma_M = 0{,}6 \exp[-2{,}5\,(B/L)^2] + 0{,}4, \text{ Sec. "T"}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

4.1.3. Módulo de Poisson en relación con B/L

La influencia del módulo de Poisson se estudió para distintas relaciones "B/L", dando a dicho módulo los valores: $\nu = 0{,}0$; $\nu = 0{,}15$; $\nu = 0{,}3$; $\nu = 0{,}45$, sobre el esquema de la viga en "PI". Los resultados pueden verse en la figura 13.

Como puede observarse, su influencia es mayor conforme aumenta la relación "B/L"; siendo muy significativa su importancia en las alas de la "PI"; mientras que para la losa entre nervios dicha influencia es bastante menor. Cuando "B/L" tiende a infinito, todas las curvas tienden asintóticamente a un mismo valor.

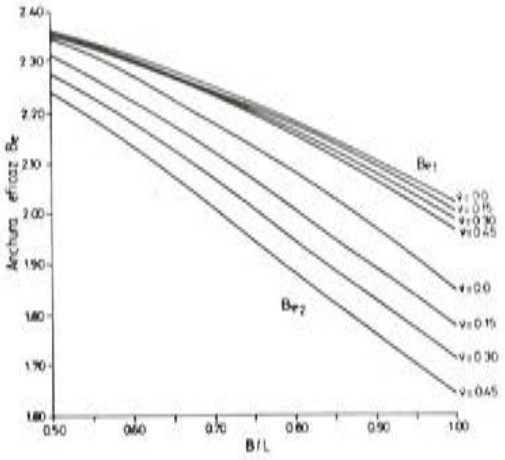


Fig. 13. Influencia del módulo de Poisson en el ancho eficaz.

4.1.4. Influencia del tipo de carga

A fin de estudiar cómo influye, sobre el valor del ancho eficaz, el tipo de acción aplicada sobre la estructura, se analizó también la sección en "PI" bajo las siguientes hipótesis de carga:

a) Carga uniformemente repartida sobre toda la extensión del tablero, correspondiente al peso propio más la sobrecarga que especifica la Instrucción, y una carga puntual de 60 toneladas centrada transversalmente y actuando en la sección centro luz de la pieza.

b) Actuando únicamente la carga uniformente repartida de la hipótesis a).

c) Carga puntual de 60 toneladas.

d) Carga puntual de 120 toneladas en el centro de la pieza, de tal forma que el nivel de tensiones en la sección centro-luz sea muy parecido al que se consigue para la hipótesis de carga b).

Como puede verse en las figuras 14 y 15, el ancho eficaz depende en gran medida del tipo de acción sobre la estructura. Para carga uniformemente repartida, este ancho es mayor que para el caso de carga concentrada; es decir, el ancho eficaz, depende de la existencia e intensidad de discontinuidades en la ley de cortantes de la viga y de la proximidad o lejanía a la sección en la cual existe tal discontinuidad. Folic [11] mostró, de forma empírica, que tales diferencias son más acusadas para vigas con mayor cuantía de armadura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

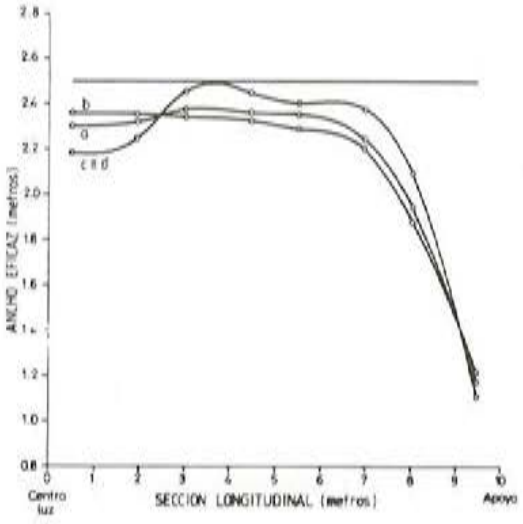


Fig. 14. Ancho eficaz Be_1, Losa entre nervios.

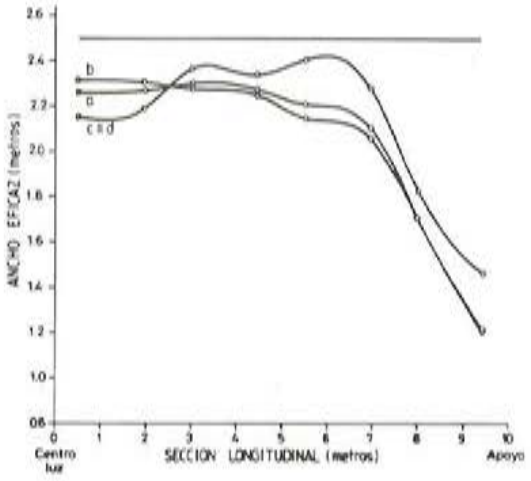


Fig. 15. Ancho eficaz Be_2. Losa en voladizo.

No se da en este trabajo ninguna expresión que cuantifique el efecto de la carga concentrada. Se ha constatado, simplemente, que los casos analizados se ajustan satisfactoria - mente a la tabla recomendada por la Instrucción Española del Hormigón, para corregir los valores del ancho eficaz correspondientes a una carga uniformemente repartida, cuando actúa una carga concentrada

4.1.5. Comparación con los valores recomendados por la Instrucción Española del Hormigón. Carga repartida

A fin de hallar la posible correlación de los valores obtenidos, con los recomendados por la Instrucción Española del Hormigón, se representaron dichos valores sobre las curvas obtenidas para el ancho eficaz, en función del parámetro B/L, obteniéndose como resultado el que se representa en la figura 16.

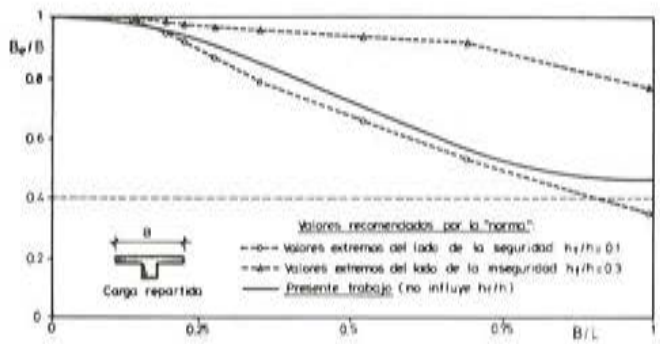


Fig. 16. Comparación de los valores obtenidos, con los recomendados por la Instrucción Española del Hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Varios comentarios pueden hacerse al respecto. En primer lugar, la IEH-82 considera un parámetro, h_f /h, que tal y como se observó en el apartado correspondiente, no tiene una influencia significativa; mientras que para la Norma dicho valor tiene gran importancia, sobre todo al crecer el parámetro B/L.

En segundo lugar, como puede apreciarse, la Norma proporciona, en muchos casos, valores del ancho eficaz superiores a los obtenidos en el presente estudio, sobre todo los que tienen una relación h_f /h alta y para relaciones B/L pequeñas. Análogas conclusiones pueden extraerse para el caso de secciones en "T" múltiples.

4.2. El ancho eficaz para secciones en "T", cajón y "U" invertida, en relación con la sección en "PI"

4.2.1. Ancho eficaz en vigas con sección en "T"

Se considerarán en este apartado, únicamente, los resultados correspondientes al primer tipo de viga, con sección en "T", dejando la viga de Razaqpur y Ghali para el estudio en régimen no lineal. Los resultados, que pueden verse en la figura 17, se adaptan muy bien a las curvas obtenidas en el apartado 4.1 para el caso de sección en "PI". Por ello, pueden utilizarse, para el cálculo del ancho eficaz, las fórmulas exponenciales dadas en dicho apartado.

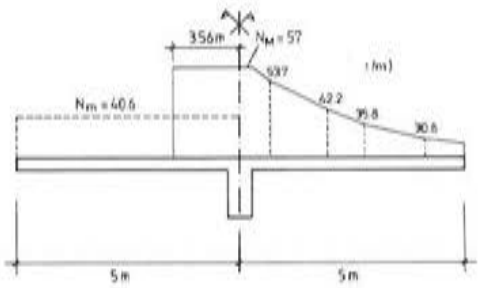


Fig. 17. Ancho eficaz de una sección en T.

El interés en ensayar una sección de estas características, radica en la posibilidad de comparar el distinto comportamiento de las secciones en "T" y en "U" invertida, que se realiza en el apartado siguiente.

4.2.2. Ancho eficaz en secciones cajón y "U" invertida

En este apartado, se estudia el ancho eficaz de un tipo de sección de uso muy frecuente en puentes: la sección cajón.

Dos propósitos se persiguen: el primero de ellos es analizar si existen diferencias significativas respecto al ancho eficaz de la losa superior, en el caso de la sección cajón (sección cerrada), y de la sección abierta con iguales características geométricas, mecánicas y de carga, pero que no disponga de la losa inferior, esto es, una sección en "U" invertida.

Para ello, se han calculado dos ejemplos: por una parte, un cajón rectangular y, por otra, una "U" invertida con idénticas características que la sección "PI" del apartado 4.1, pero sin la losa inferior.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Los resultados que se obtienen, no presentan diferencias significativas. La distribución de tensiones en la viga con sección en "U" invertida es más alta, lógicamente, por ser su inercia menor; pero la tensión máxima, aumenta en la misma medida que la tensión media y el ancho eficaz es sensiblemente igual en ambos casos. Basta comparar los resultados de la viga cajón de la figura 18 con los correspondientes de la figura 19.

El segundo propósito es comparar los resultados obtenidos en este análisis, con los correspondientes a otros autores.

Reissner [12], usando el principio de mínimo para la energía potencial, obtuvo unas expresiones considerando el efecto del ancho eficaz para una serie de vigas cajón rectangulares. Dichas expresiones, que parten de suponer una distribución de tensiones normales en la sección de tipo parabólico, son válidas para carga uniformemente repartida aplicada sobre las almas del cajón. Se supone, asimismo, que no existe distorsión de la sección.

Si se comparan los resultados obtenidos en el presente análisis con el correspondiente a las fórmulas de Reissner, se observa que son bastante coincidentes (fig. 18), y que el suponer que la distribución de tensiones sigue una ley parabólica, puede dar lugar a resultados muy aceptables.

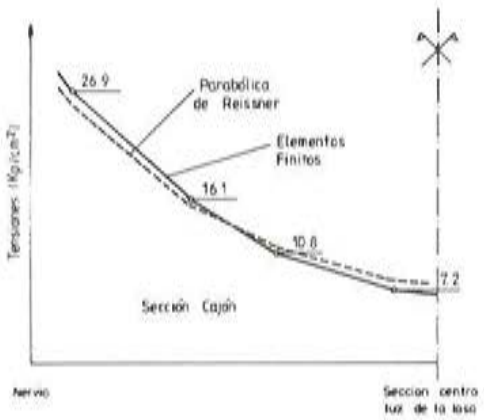


Fig. 18. Tensiones en una sección cajón.

5. VARIACION DEL ANCHO EFICAZ, EN FUNCION DE LOS ANCHOS DE LA LOSA INTERMEDIA Y LA LOSA EN VOLADIZO

En este apartado, se estudian los cinco casos que se muestran en las figuras 17, 19, 20, 21 y 22, representándose, asimismo, los resultados de la distribución de tensiones en cada uno de ellos. Como puede verse, para luz constante, a medida que aumenta el ancho de cada una de las partes de la losa, disminuye el ancho eficaz, tal como era de prever. Sin embargo, no lo hace de acuerdo con las curvas exponenciales obtenidas en 4.1.3, alejándose de dicha curva conforme nos acercamos a la sección en "U" invertida; mientras, que para secciones en "T" o secciones en "PI", con los nervios más o menos centrados, estas leyes suponen una aproximación suficiente.

Se hace hincapié en la necesidad de estudiar de una forma más exhaustiva, cómo varía el ancho eficaz cuando cambiamos la situación de los nervios, desde los casos límites de la viga en "T" y de la viga en "U" invertida.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

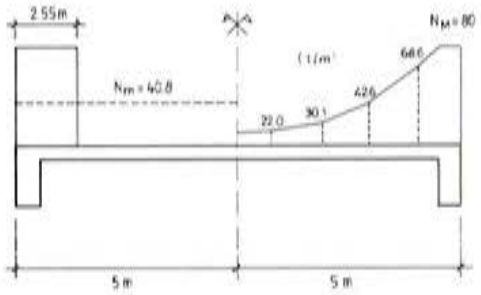


Fig. 19. Tensionaes en una U invertida.

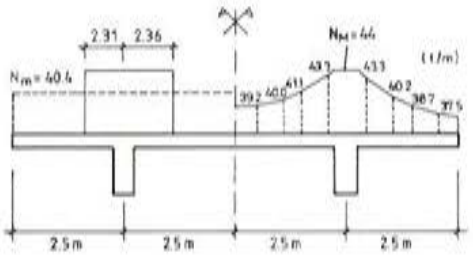


Fig. 20.

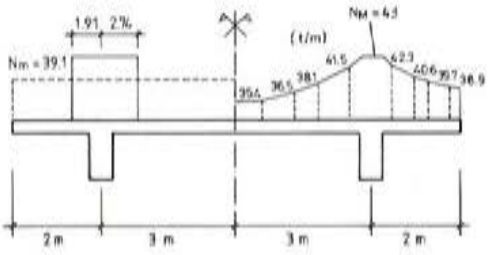


Fig. 21.

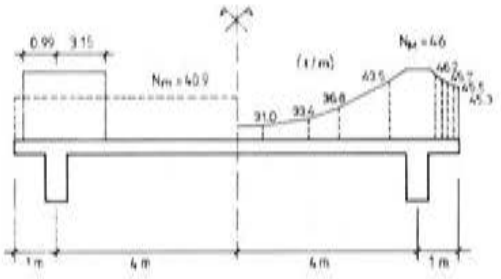


Fig. 22.

6. INTRODUCCION AL ESTUDIO NO LINEAL

Para efectuar el análisis no lineal, se ha adoptado la viga de Razaqpur y Ghali de la figura 9. Los resultdos obtenidos pueden verse en las figuras 23, 24 y 25. En ellas, se observa , en primer lugar, la bondad del ajuste numérico realizado. En segundo lugar, y como era de esperar, el ancho eficaz aumenta a medida que lo hace el nivel de carga, como consecuencia de una distribución más uniforme de las tensiones normales en la cabeza de compresión.

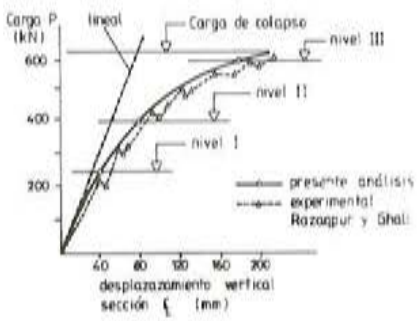


Fig. 23. Curva carga/desplazamiento en la viga de Razaqpur y Ghali (análisis no lineal)

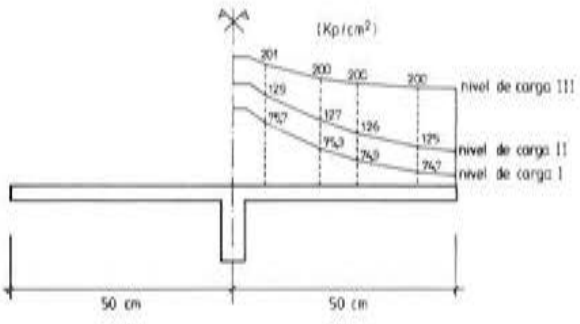


Fig. 24. Distribución de tensiones para varios niveles de carga, en la viga de Razaqpur y Ghali (Análisis no lineal.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

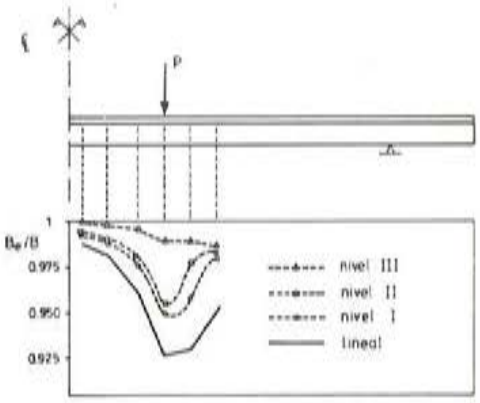


Fig. 25. Anchos eficaces de la viga de Razaqpur y Ghali (Análisis no lineal).

7. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos y de su comparación con los de otros autores, se puede concluir:

– El ancho eficaz, depende de una serie de parámetros, de los cuales los más importantes pueden clasificarse en tres tipos: Geométricos, cargas sobre la estructura y módulos elásticos.

– Entre los parámetros geométricos, aparte de los referentes a la tipología considerada, el que se manifiesta como más significativo es la relación entre el ancho y la luz de la viga. El ancho eficaz disminuye a medida que aumenta el cociente "B/L", tendiendo asintóticamente a un determinado límite.

– Otros parámetros geométricos, tales como la relación entre el espesor de la cabeza de compresión y el canto total (y por tanto de la inercia de la viga), así como la relación entre el ancho del nervio o alma y el ancho de la losa, no se han manifestado significativos en los rangos de variación normales en este tipo de estructuras.

– El tipo de cargas influye notablemente en el fenómeno, siendo esta influencia más acusada para cargas concentradas que para cargas repartidas. Asimismo, el ancho eficaz en la sección considerada, depende de la distancia de dicha sección al punto de aplicación de las cargas. La distribución transversal de dichas cargas, tal como ha demostrado Folic [11], no influye.

– El módulo de Poisson es también un parámetro importante.

– Los resultados obtenidos, difieren en algunos casos de los valores recomendados por la Instrucción Española del Hormigón. Las discrepancias más significativas son las siguientes: Los resultados de la Norma, varían con el parámetro "h_f/h", cuando en el presente trabajo se muestra que el ancho eficaz no depende de dicho parámetro. En segundo lugar, muchos de los valores dados por la Norma dan, bajo las hipótesis lineales, anchos eficaces mayores que los obtenidos en este trabajo.

APENDICE

NOTACION

L : Luz de la viga biapoyada.
h : Canto de la sección (fig. 2).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

h_f: Espesor de la cabeza de compresión o losa superior (fig. 2)
B : Ancho de la sección (fig. 2).
B_ω: Ancho del alma o nervio (fig. 2).
B_e : Ancho eficaz (fig. 2).
B_{e1} : Ancho eficaz correspondiente a la losa entre nervios (fig. 2).
B_{e2}: Ancho eficaz correspondiente a la losa en voladizo (fig. 2).
N_M: Esfuerzo axil máximo, por unidad de longitud, en la cabeza de compresión.
N_m: Esfuerzo axil medio, por unidad de longitud, en la cabeza de compresión.

REFERENCIAS

1. Th. Von Karman: "Festschrift August Foppls". Pág. 114, 1923.
2. G. Shnadel: "Werft und Rederef". Vol. 9, pág. 92, 1928.
3. E. Reissner: "Der Stahlbau". Pág. 206, 1934.
4. E. Chwalla: "Der Stahlbau". 1936.
5. L. Beschkine: "Publs. Int. Assoc. Bridge and Structural Engineering". Vol. 5, pág. 65, 1938.
6. Qi-Gen Song: "Shear lag analysis of simple and continuous T, I and box beams". Report No. UCB/SESM-84/10. Department of Civil Engineering. University of California. Berkeley, California.
7. S. Ahmad: "Curved Finite Element in the Analysis of Solid, Shell and plates Structures". Ph. D. Thesis. University of Wales, Swansea, 1969.
8. W.F. Chen: Plasticity in Reinforced Concrete. McGraw Hill, 1982.
9. "State of the Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete". ASCE, Special Publication, 1982.
10. A.G. Razaqpur, A. Ghali: "Shear Lag Analysis in Reinforced Concrete". Avanced Mechanics of Reinforced Concrete. IABSE Colloquium Delft, 1981.
11. J. Folic: "Analysis of the Effective Slab Width in Reinforced and Prestressed Concrete Elements". Proceedings of the International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures. Pineridge Press, Swansea, 1984.
12. E. Reissner: "Analysis of the Shear Lag in Box Beams by the Principle of Minimum potential Energy". Quarterly of Applied Mathematics, October, 1946.

* * *

Convocado el XIV Premio García Cabrerizo a la invención española

Al igual que años anteriores ha sido convocado el **XIV Premio García Cabrerizo a la Invención Española** que fue creado con el fin de exaltar los valores humanos y científicos de cuantos españoles promueven y realizan innovaciones Tecnológicas o de Investigación aplicada que en alguna manera favorezcan el desarrollo del País, la Industria o la Economía.

Motivo especial del **Premio** es despertar en la conciencia de nuestra sociedad el interés por la invención como fuente de desarrollo y como fomento de la industria mediante la divulgación de las Patentes de Invención españolas susceptibles de representar un perfeccionamiento capaz de mejorar, en cualquier medida, el nivel de vida o el progreso social.

El Tema es completamente libre y únicamente podrán ser presentadas al **Premio** las invenciones industrializables por medios técnicos.

La dotación del Premio García Cabrerizo a la Invención Española es de 500.000 pts. y podrán concurrir cuantos investigadores, inventores, Centros de Investigación, Empresas industriales, equipos Técnicos, etc..., de nacionalidad española, sean autores de una invención o propietarios de una patente cuyas características cumplan los requisitos citados anteriormente.

Cuantas personas estén interesadas en esta convocatoria pueden solicitar las Bases en la sede de la Fundación García Cabrerizo C/ Vitruvio, 23, 28006 Madrid. **El plazo de presentación de los trabajos finalizará el próximo día 31 de Julio de 1986.**

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Simposio sobre "Estructuras de Hormigón para el Futuro"

Organizado por la Asociación Francesa para la Construcción (A.F.P.C.) y bajo el patrocinio de la Asociación Internacional del Puentes y Estructuras (I.A.B.S.E.), el Comité Euro-Internacional del Hormigón (C.E.B.) y la Federación Internacional del Pretensado (F.I.P.), se va a celebrar en París-Versalles, durante los días 2 al 4 de setiembre del próximo año 1987, un Simposio Internacional sobre el tema "Estructuras de hormigón para el futuro".

El objetivo de este Simposio es contribuir al desarrollo de las grandes estructuras de hormigón y mejorar su estética. Se trata de llamar la atención de los técnicos sobre la permanente necesidad de conseguir la mejor calidad compatible con la imprescindible economía de todo proyecto. Se intenta ofrecer a los participantes una panorámica general de los últimos avances conseguidos en este campo de la construcción y darles a conocer lo que las actuales tendencias hacen prever para el futuro. Se desea llamar especialmente la atención sobre la calidad de las actuales estructuras y las posibilidades que existen para mejorar esta calidad.

El Simposio durará dos días y medio y estará dividido en cinco Sesiones. Tres de ellas serán Plenarias y las otras dos se celebrarán coincidiendo con dos Seminarios sobre temas específicos, en salas separadas.

El detalle del programa previsto es el siguiente:

Miércoles 2 de setiembre de 1987

14,30 – 15,00 *Sesión de Apertura*

15,00 – 17,30 *Calidad y economía de las estructuras*

Coordinación entre el proyecto y los métodos constructivos.

– Conferenciantes invitados.

– Comunicaciones libres.

Jueves 3 de septiembre

9,00 – 12,30 *Utilización de las estructuras*

Criterios para el dimensionamiento y normas de cálculo para conseguir la mejor utilización y durabilidad.

– Conferenciantes invitados.

– Comunicaciones libres.

Seminarios que se celebrarán simultáneamente:

9,00 – 10,30 *Control de la geometría de las estructuras*

– Comunicaciones libres.

11,00 – 12,30 *Calidad superficial de las estructuras de hormigón*

– Comunicaciones libres.

14,00 – 17,30 *Proyecto y conservación*

Detalles constructivos que pueden facilitar la conservación de las estructuras (Inspección, mantenimiento, protección de armaduras, reparaciones).

– Conferenciantes invitados.

– Comunicaciones libres.

Seminarios que se celebrarán simultáneamente:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

14,00 – 15,30 *Arquitectura actual de las estructuras de hormigón.*

– Comunicaciones libres.

16,00 – 17,30 *Mesa Redonda* sobre la influencia en la calidad de las estructuras, de los contratos para su proyecto y construcción.

Viernes, 4 de septiembre

9,00 – 12,30 *Novedades en el campo de las estructuras de hormigón.* Materiales, técnicas y tecnologías, conceptos estructurales, campos de aplicación de las estructuras de hormigón.

– Conferenciantes invitados.

– Comunicaciones libres.

14,00 – 15,30 *Novedades en el campo de las estructuras de hormigón* (Continuación).

– Comunicaciones libres.

16,30 – 17,15 *Conferencias finales*

– París en el Siglo XXI.

– Estructuras de hormigón para el año 2000.

17,15 – 17,30 *Sesión de Clausura.*

Los participantes que deseen presentar alguna Comunicación en este Simposio, deberán enviar en ejemplar triplicado, un resumen de 300-400 palabras junto con las correspondientes ilustraciones, a la Secretaría en Zurich de la I.A.B.S.E., antes del 30 de junio de 1986. Deberán hacer constar su nombre, dirección y la Sesión en la que desean que se incluya su trabajo.

El Presidente del Comité Científico del Simposio, comunicará a los Autores, en octubre del 86, si su trabajo ha sido o no aceptado. En caso afirmativo, el texto completo de la Comunicación deberá ser enviado, a la Secretaría de la I.A.B.S.E., antes del 28 de febrero de 1987, ajustándose exactamente a las normas que al efecto serán dictadas.

Habrá también una Sesión dedicada a la presentación de "Posters".

Al inicio del Simposio, se entregará a los participantes una publicación en la que se reproducirán los textos de todas las Comunicaciones libres presentadas así como las de los conferenciantes invitados. También se incluirá una fotografía y una página con comentarios, de cada uno de los "Posters" exhibidos.

Las Comunicaciones podrán presentarse en inglés, francés o alemán. Su presentación oral deberá hacerse en inglés o francés.

Para las Sesiones Plenarias se dispondrá un servicio de traducción simultánea inglés-francés y francés-inglés.

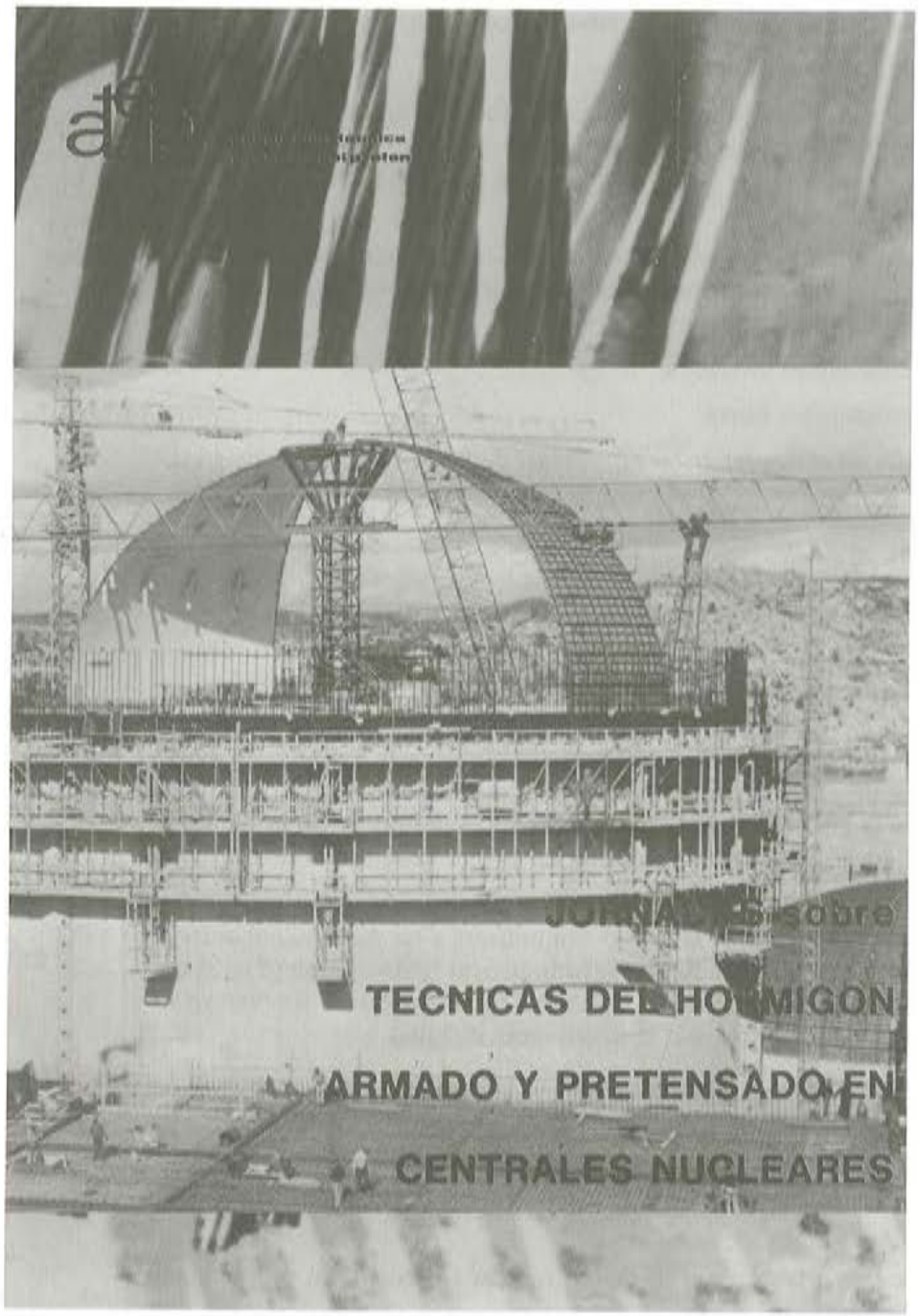
Se tiene previsto un programa de excursiones técnicas post-Simposio y otro de actos sociales para las tardes de los días miércoles y jueves y para los acompañantes.

Para mayor información, los interesados deberán dirigirse a:

IABSE Secretariat
ETH-Hönggerberg
CH – 8093 Zurich, Suiza
Tel. Int. + 41 1 377 26 47
Telex: 822 186 IABS CH

Secretariat AFPC
(Asociación Francesa para la Construcción)
46, Avenue Aristide Briand
92223 Bagneux, Francia
Tel. Int. + (33) 1 42 31 32 90
Telex: 260 763 SETRA BAGNX F.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



JORNADAS sobre TECNICAS DEL HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO EN CENTRALES NUCLEARES

EDITADO POR:

asociación técnica española del pretensado

Precio del ejemplar: 3.000 ptas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Obtención de funciones de forma analíticas para la lámina troncocónica con flexión axisimétrica y material ortótropo

Federico J. Bonet
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor de Cálculo de Estructuras en la E.T.S.I.C.C.P. de Valencia

SUMARIO

En este artículo se presenta la solución analítica de las ecuaciones diferenciales que rigen el problema homogéneo de la deformación axisimétrica de una lámina de revolución, de generatriz recta, constituída por un material elástico, homogéneo, ortótropo y con comportamiento geométrico lineal.

Dicha solución se orienta a la generación de un elemento finito de las características enunciadas, que puede ser implementado en un programa general de análisis lineal de estructuras laminares axisimétricas. Se presentan ejemplos que muestran la potencia del elemento. Se comenta la aplicación de la solución obtenida, a problemas de asimilación de bandas de malla a continuos laminares.

1. INTRODUCCION

El desarrollo alcanzado por los métodos numéricos ha desplazado en gran medida el empleo de soluciones analíticas. Estas, en general, tienen un campo de aplicación más restringido; pero allí donde sean aplicables, ofrecerán un resultado, si no más aproximado, sí más económico en cuanto a su obtención. Por ello consideramos que se deben agotar las posibilidades de las soluciones analíticas hasta donde sea posible, y tratar de enlazar con los métodos numéricos a partir de ese punto.

Siguiendo esta idea presentamos la solución analítica para una lámina cónica, con simetría de revolución, con comportamiento geométrico lineal y material elástico y ortótropo.

Esta solución, que para el caso isótropo ya se obtuvo en 1917, se formula con una nomenclatura orientada a la generación de un elemento finito de lámina de revolución, con las restricciones indicadas. Dicho elemento se puede implementar en la resolución de láminas de revolución de generatriz cualquiera.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

La aplicación del Método de los Elementos Finitos a las láminas de revolución, se inició con la publicación en la revista del A.I.A.A., en 1963, de un artículo de Grafton y Strome (1). En él se discretizaba la lámina en elementos troncocónicos, con funciones de forma impuestas para los desplazamientos. Posteriormente, y siguiendo diversas vías, se ha tratado de afinar el elemento mediante funciones de forma más elaboradas.

Con la solución analítica que aportamos para la lámina cónica, el elemento es exacto, siendo el único error introducido el debido a la discretización geométrica en elementos rectos.

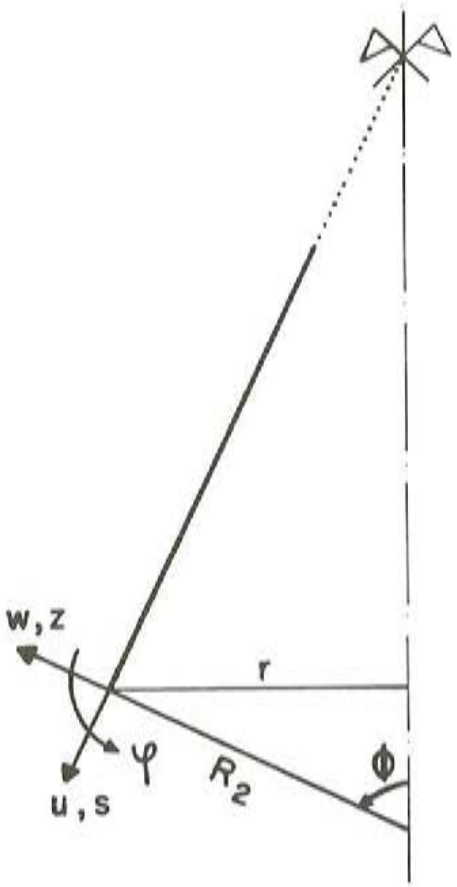
A la vista de los ejemplos analizados la precisión mejora considerablemente, pudiendo utilizar elementos de mayores dimensiones, que denominamos "macroelementos".

Otra aplicación de la solución presentada es en procesos de asimilación de bandas de malla reticulada, a continuos troncocónicos, donde no hay posibilidad de aplicar una subdivisión en elementos finitos convencionales, por los problemas numéricos que genera (4).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. Ecuaciones cinemáticas

Las ecuaciones cinemáticas adoptadas son las correspondientes a la hipótesis de Love-Kirchoff. Dadas las condiciones de simetría axial, los únicos desplazamientos que consideraremos serán u y w, según las direcciones s(meridiano) y z(normal), respectivamente. (Figura 1).



$$r = R_2 . \operatorname{sen}\phi = s . \cos\phi$$

$$s = R_2 . \operatorname{tg}\phi = \frac{r}{\cos\phi}$$

$$R_2 = \frac{r}{\operatorname{sen}\phi} = s \operatorname{cotg}\phi$$

Fig. 1

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Las ecuaciones correspondientes son:

$$\{\varepsilon\} = [C]\,\{d\} \tag{1}$$

$$\{\varepsilon\}^t = \{\varepsilon_s\ \varepsilon_\theta\ \chi_s\ \chi_\theta\};\quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ds} & 0 \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s}\,.\,\mathrm{tg}\,\phi \\ 0 & -\dfrac{d^2}{ds^2} \\ 0 & -\dfrac{1}{s}\,.\,\dfrac{s}{ds} \end{bmatrix}$$

2.2. Ecuaciones de equilibrio interno

Dada la simetría axial, los esfuerzos no nulos son los siguientes, (Figura 2):

$$N_s = \int_{h_i}^{h_s} \sigma_s\,.\,dz \quad ;\quad N_\theta = \int_{h_i}^{h_s} \sigma_\theta\,.\,dz$$

$$M_s = \int_{h_i}^{h_s} \sigma_s\,.\,z\,.\,dz; \quad ;\quad M_\theta = \int_{h_i}^{h_s} \sigma_\theta\,.\,z\,.\,dz$$

$$Q = \int_{h_i}^{h_s} \tau_{sz}\,.\,dz$$

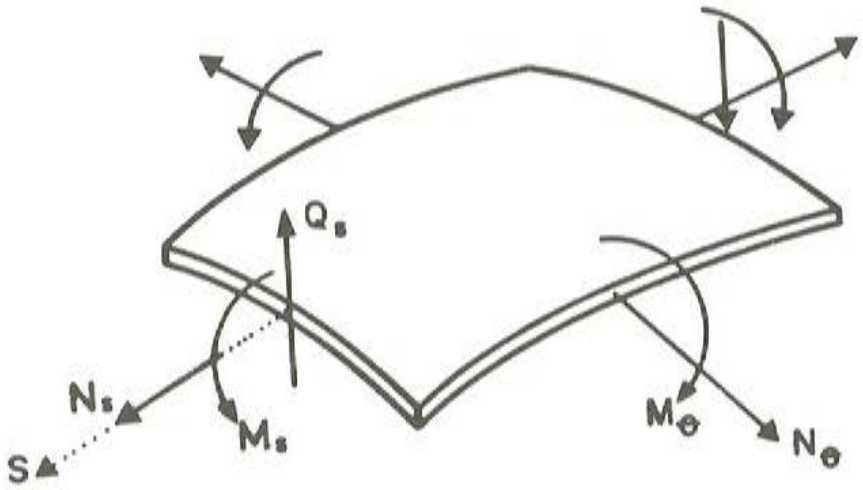


Fig. 2

El esfuerzo cortante Q es un factor puramente estático que no interviene en la energía de deformación (hipótesis de Love-Kirchoff).

Las ecuaciones de equilibrio correspondientes para el estado homogéneo (con acciones únicamente en el contorno) son:

$$[E]\,\{\sigma\} = \{o\} \tag{2}$$

$$\{\sigma\}^t = \{N_s\ N_\theta\ M_s\ M_\theta\};$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$[E] = \begin{bmatrix} \cos\phi\,(1 + s\,\frac{d}{ds}) & -\cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\phi & \cos\phi\,(2\,\frac{d}{ds} + s\,\frac{d^2}{ds^2}) & \cos\phi\,\frac{d}{ds} \end{bmatrix}$$

2.3. Ecuaciones constitutivas

Las relaciones constitutivas entre los esfuerzos y deformaciones definidos, y a partir de las correspondientes a un material elástico linealmente y homogéneo, con ortotropía cilíndrica, adoptan la forma:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 \\ \nu C & rC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & \nu D \\ 0 & 0 & \nu D & rD \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

con las constantes elásticas:

$$C = \frac{E_s \,.\, h}{1 - \nu_s \,.\, \nu_\theta}$$

$$D = C \,.\, \frac{h^2}{12}$$

$$\nu = \nu_\theta$$

$$r = \frac{E_\theta}{E_s} = \frac{\nu_\theta}{\nu_s}$$

3. SOLUCION

Para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias planteado en el apartado anterior, haremos uso de las variables de Meissner: (2)

$$\begin{cases} \varphi = -\dfrac{dw}{ds} \\ \psi = Q \,.\, s \,.\, \operatorname{cotg}\phi \end{cases} \qquad (4)$$

Si expresamos las diversas incógnitas en función de éstas, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} E \,.\, h \,.\, \varphi + F_1\,(s) = -\,L_1\,(\psi) \\ \dfrac{\psi}{D} = L_1\,(\varphi) \end{cases} \qquad (5)$$

siendo:

$$F_1\,(s) = -\,r \,.\, E.h \,.\, \operatorname{cotg}\phi \,.\, \frac{C_6}{s}$$

$$L_1\,(\;) = \operatorname{cotg}\phi \left[s\,\frac{d^2\,(\;)}{ds^2} + \frac{d\,(\;)}{ds} - r\,\frac{(\;)}{s} \right]$$

C_6 es una constante relacionada directamente con la resultante de esfuerzos según el eje de simetría (constante por equilibrio). Despejando las incógnitas:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\begin{cases} L_1^2\,(\psi) + \dfrac{Eh}{D}\,\psi = \operatorname{cotg}^2\phi \,.\, r \,.\, E \,.\, h \,.\, C_6\,\dfrac{(r-1)}{s^2} \\ L_1^2\,(\varphi) + \dfrac{Eh}{D}\,\varphi = r\,\dfrac{Eh}{D}\operatorname{cotg}\phi\,\dfrac{C_6}{s} \end{cases} \tag{6}$$

Resolveremos la primera ecuación. Al ser L_1 un operador lineal, la solución general para ψ será la suma de la solución completa de la ecuación homogénea, más una solución particular. La ecuación homogénea es:

$$L_1^2\,(\psi) + \mu^4 \,.\, \psi = 0 \quad ; \quad \mu^4 = \frac{Eh}{D} = \frac{12\,(r-\nu^2)}{h^2} \tag{7}$$

que, extendida al campo complejo, se puede expresar como:

$$(L_1 + i\,\mu^2)\,(L_1 - i\,\mu^2)\,\psi = 0$$

Las soluciones de $(L_1 + i\,\mu^2)\,\psi = 0$ son conjugadas de las de $(L_1 - i\,\mu^2)\,\psi = 0$. Bastará pues resolver una de ellas, y las partes real e imaginaria de dos soluciones linealmente independientes serán las cuatro funciones reales, linealmente independientes, que forman la solución completa para ψ.

Resolvamos:

$$(L_1 + i\,\mu^2)\,\psi = 0 \tag{8}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} \eta = 2\,\lambda\sqrt{is} = \xi\sqrt{i} \\ \lambda^2 = \mu^2\,\operatorname{tg}\phi \end{cases}$$

la ecuación resulta:

$$\frac{d^2\,\psi}{d\,\eta^2} + \frac{1}{\eta}\,\frac{d\,\psi}{d\,\eta} + \left(1 - \frac{4\,r}{\eta^2}\right)\psi = 0 \tag{9}$$

Esta ecuación es de tipo Bessel, de orden $p = 2\sqrt{r}$. La solución puede ser cualquiera de las funciones de Bessel, de orden $\pm\,p$, y de primera, segunda o tercera especie (6). Para asegurar la independencia lineal con cualquier valor de p, adoptaremos como solución las funciones de Bessel de tercera especie, o funciones de Hankel, de orden p:

$$\psi = C'_1 \,.\, H_p^1\,(\eta) + C'_2 \,.\, H_p^2\,(\eta) \tag{10}$$

siendo C'_1 y C'_2 constantes complejas, arbitrarias, que tomaremos igual a:

$$\begin{cases} C'_1 = E.\,h.\,(C_1 - i.\,C_2) \\ C'_2 = E.\,h.\,(C_3 - i.\,C_4) \end{cases}$$

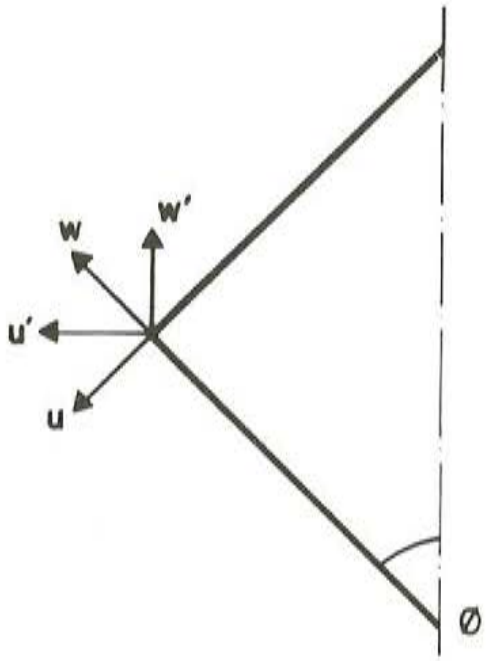
Como solución particular adoptaremos la solución de membrana, que corresponde a momentos flectores y esfuerzo cortante nulo, es decir, $\psi_p = 0$. Esta solución es aproximada, salvo para material isótropo ($r = 1$) o para fuerza nula según el eje ($C_6 = 0$); en ambos casos el término independiente de la ecuación se anula y la solución particular supuesta es exacta.

En otros casos, la aproximación será tanto mayor cuanto mayor sea la esbeltez, debido a la presencia del factor h/s^2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3.1. Desplazamientos

Integrado el sistema diferencial en la variable ψ, vamos a obtener el campo de desplazamientos referidos a unos ejes generales. (Figura 3).



$$\begin{Bmatrix} u' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

Fig. 3

Empleando las relaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio, se obtienen las expresiones:

$$u' = \frac{\cos\phi}{Eh}\left(\frac{\eta}{2}\frac{d\psi}{d\eta} - \nu\psi - \nu C_6 Eh\right)$$

$$w' = \frac{\operatorname{sen}\phi}{Eh}\nu\psi - \frac{p^2 \operatorname{sen}\phi}{2Eh}\int\frac{\psi}{\eta}d\eta - \frac{\cos^2\phi}{2Eh\operatorname{sen}\phi}\int\psi\eta\,d\eta\,\frac{C_6 P^2}{2\operatorname{sen}\phi}\ln\xi + C_5$$

$$\varphi = -\frac{L_1(\psi)}{Eh} + \frac{r\cot g\,\phi}{s}\cdot C_6$$

En la obtención de w' aparece una nueva constante, C_5, que representa un movimiento de conjunto según el eje.

Con ayuda de fórmulas recurrentes para la obtención de las derivadas e integrales de las funciones de Hankel, se obtiene la expresión:

$$u' = \{\mathrm{Re}[A_1(\eta)]\ \ I_m[A_1(\eta)]\ \ \mathrm{Re}[B_1(\eta)]\ \ I_m[B_1(\eta)]\ \ 0\ \ \ -\nu\cdot\cos\phi\}\ .\ \{C\}$$

$$w' = \{\mathrm{Re}[A_2(\eta)]\ \ I_m[A_2(\eta)]\ \ \mathrm{Re}[B_2(\eta)]\ \ I_m[B_2(\eta)]\ \ 1\ \ -\frac{p^2}{2\operatorname{sen}\phi}\ln\xi\}\ .\ \{C\} \quad (11)$$

$$\varphi = \{-I_m[A_3(\eta)]\ \ \mathrm{Re}[A_3(\eta)]\ \ -I_m[B_3(\eta)]\ \ \mathrm{Re}[B_3(\eta)]\ \ 0\ \ \ \frac{\mu^2 p^2}{\xi^2}\}\ .\ \{C\}$$

$$A_1(\eta) = \cos\phi\left[\frac{\eta}{2}H^1_{p-1}(\eta) - \left(\frac{p}{2}+\nu\right)H^1_p(\eta)\right]$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$A_2(\eta) = \operatorname{sen}\phi \cdot \nu \cdot H^1_p(\eta) + \frac{p^2 \operatorname{sen}\phi}{2}\left[\frac{H^1_{p-1}(\eta)}{\eta} + \frac{p-2}{\eta^2} \cdot H^1_{p-2}(\eta) - (p-2)(p-4)\int \eta^{-3} H^1_{p-2}(\eta)\, d\eta\right] +$$

$$+\frac{\cos^2\phi}{2 \operatorname{sen}\phi}\left[\eta H^1_{p-1}(\eta) + p H^1_{p-2}(\eta) + p(p-2)\frac{H^1_{p-3}(\eta)}{\eta} + p(p-2)(p-4)\int \eta^{-2} H^1_{p-3}(\eta)\, d\eta\right]$$

$$A_3(\eta) = \mu^2 H^1_p(\eta)$$

Las funciones $B_i(\eta)$ son similares a las $A_i(\eta)$ sustituyendo las funciones de Hankel H^1 por las H^2.

El vector $\{C\}$ engloba las seis constantes de integración.

3.2. Esfuerzos y fuerzas generalizadas

Siguiendo un proceso similar al anterior, se obtienen las fuerzas generalizadas aplicadas en una sección, definidas por, (Figura 4):

$$\begin{Bmatrix} X' \\ Z' \\ M \end{Bmatrix} = 2\pi s \cdot \cos\phi \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_s \\ Q \\ M_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} X' = 2\pi Eh\,\{\mathrm{Re}[H^1_p(\eta)]\ I_m[H^1_p(\eta)]\ \mathrm{Re}[H^2_p(\eta)]\ I_m[H^2_p(\eta)] \quad 0 \quad \cos^2\phi\ \}\ .\ \{C\} \\ Z' = 2\pi Eh\,\{\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad \frac{-\operatorname{sen} 2\phi}{2}\ \}\ .\ \{C\} \\ M = 2\pi Eh \frac{\cos\phi}{\mu^2}\{-I_m[A_4(\eta)]\ \mathrm{Re}[A_4(\eta)] - I_m[B_4(\eta)]\ \mathrm{Re}[B_4(\eta)]\ 0 \quad \frac{p^2(\nu-1)}{\xi^2}\ \}\ .\ \{C\} \end{cases}$$

$$A_4(\eta) = \frac{\eta}{2} H^1_{p-1}(\eta) - \left(\frac{p}{2} - \nu\right) H^1_p(\eta) \qquad (12)$$

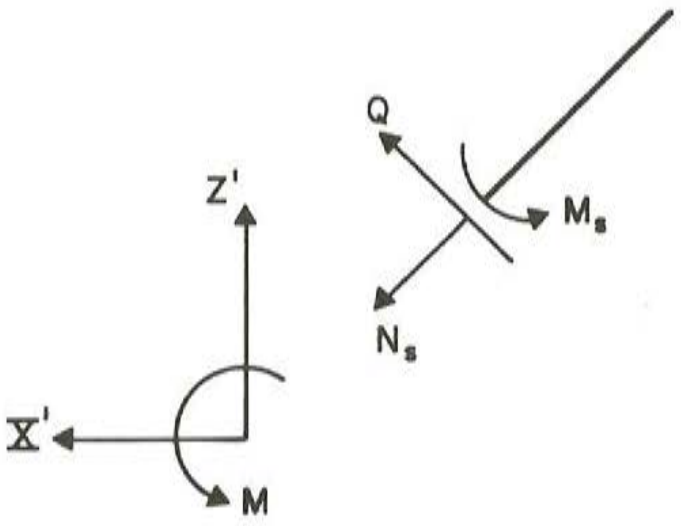


Fig. 4

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Se comprueba que Z' es constante y relacionado directamente con C_6.

La expresión de los esfuerzos es:

$$\begin{cases} N_s = \dfrac{1}{2\pi s}(X' - \operatorname{tg}\phi \cdot Z') \\ Q = \dfrac{1}{2\pi s}(\operatorname{tg}\phi \cdot X' + Z') \\ M_s = \dfrac{M}{2\pi s \cos\phi} \\ N_\theta = 2E\sqrt{12\left(\dfrac{p^2}{4} - \nu^2\right)}\operatorname{tg}\phi \{-I_m [A_5(\eta)]\, \mathrm{Re}[A_5(\eta)] - I_m [B_5(\eta)]\, \mathrm{Re}[B_5(\eta)]\, 0\ 0\}\{C\} \\ M_\theta = Eh \operatorname{sen}\phi \{\mathrm{Re}[A_6(\eta)]\, I_m [A_6(\eta)]\, \mathrm{Re}[B_6(\eta)]\, I_m [B_6(\eta)]\, 0\ \dfrac{2p^2(1-\nu)}{\xi^4}\}\{C\} \end{cases} \quad (13)$$

$$A_5(\eta) = \frac{H^1_{p-1}(\eta)}{\eta} - \frac{p}{\eta^2} \cdot H^1_p(\eta)$$

$$A_6(\eta) = -H^1_{p-2}(\eta) + \frac{2(p-1-\nu)}{\eta} H^1_{p-1}(\eta) + H^1_p(\eta)\left[\frac{p(2\nu - p)}{\eta^2} - \frac{1}{\cos\phi}\right]$$

3.3. Matriz de rigidez

Una vez obtenida la solución analítica para la lámina cónica en flexión, podemos obtener, a partir de ella, la matriz de rigidez exacta de un elemento troncocónico que se adapte a las restricciones enunciadas en el planteamiento del problema.

En primer lugar, expresaremos las constantes de integración $\{C\}$ en función de los desplazamientos nodales $\{d^e\}$. Si particularizamos las expresiones (11) en los extremos del elemento,

$$\{d^e\} = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ w'_1 \\ \varphi_1 \\ u'_2 \\ w'_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = [PE] \cdot \{C\} \quad (14)$$

podemos obtener las constantes de integración, por inversión de la matriz PE; ésta es no singular, pues no hay relaciones cinemáticas impuestas entre los movimientos de los extremos.

De forma similar podemos expresar las fuerzas generalizadas en los extremos:

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} -X'_1 \\ -Z'_1 \\ -M_1 \\ X'_2 \\ Z'_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [QE]\{C\} = [QE][PE]^{-1}\{d^e\} \quad (15)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Por definición, la matriz de rigidez será:

$$[K] = [QE] \cdot [PE]^{-1} \tag{16}$$

Si se adoptan como fuerzas generalizadas las que hemos definido (resultantes en el paralelo correspondiente), la matriz de rigidez es simétrica.

La matriz QE, y en consecuencia la matriz de rigidez, son singulares, pues existe una relación de equilibrio entre las fuerzas aplicadas al elemento en su contorno.

3.4. Cargas en el interior del elemento

La solución obtenida corresponde al estado de cargas homogéneo. Para cargas repartidas en el elemento, se pueden obtener las fuerzas nodales equivalentes (que mantengan el equilibrio y anulen los desplazamientos nodales), por aplicación de principios variacionales, a partir de la expresión:

$$\{q^e\} = -\int_v [N]^t \{b\} dV$$

siendo las cargas másicas:

$$\{b\}^t = \{b^x \; b^z \; b^m\}$$

y las funciones de forma [N] las correspondientes a los corrimientos y giro, en función de los desplazamientos nodales.

Estas funciones son las obtenidas anteriormente y satisfacen las condiciones del problema; por lo que las fuerzas nodales serán exactas, así como los desplazamientos nodales obtenidos a partir de un método de rigidez.

Las funciones de forma, con nuestra nomenclatura, serán:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ w' \\ \varphi \end{Bmatrix} = [P]\{C\} = [P][PE]^{-1}\{d^e\}$$

$$[N] = [P][PE]^{-1} \tag{17}$$

y las cargas nodales:

$$-\{q^e\} = 2\pi \cos\phi \, [PE]^{-1,t} \int_{s_1}^{s_2} [P]^t \{b\} \, s \, ds \tag{18}$$

La integral, así como las fuerzas nodales, dependen de las cargas actuantes (b). Para algunas leyes de carga sencillas, se puede hacer una integración analítica; en casos más complejos se puede recurrir a integración numérica, teniendo cuidado con la cuadratura adoptada, dado el carácter exponencial de las funciones englobadas en la matriz P.

Para conocer la solución en el interior de cada elemento, necesitamos una solución particular del sistema no homogéneo, para añadir a la solución obtenida anteriormente. Esta solución puede ser la solución de membrana correspondiente al estado de cargas actuante.

4. EJEMPLOS

A continuación vamos a realizar unas aplicaciones del elemento desarrollado, empleando la matriz de rigidez deducida anteriormente, en un proceso de elementos finitos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Para tener elementos de referencia, analizaremos los tres casos resueltos en el artículo de Grafton y Strome (citado anteriormente), y que han servido de comparación con muchos de los trabajos posteriores sobre el tema.

4.1.

El primer ejemplo corresponde a una esfera, con la clave abierta y empotrada en la base. La figura 5, tomada del artículo de Grafton y Strome, representa la esfera con sus características geométricas y mecánicas, y con la subdivisión en elementos para el análisis. La figura 6 representa la variación del momento flector meridional y del desplazamiento horizontal obtenidos por Grafton y Strome.

Para el análisis con nuestro elemento, se discretizó la lámina en 28 elementos (como en Grafton y Strome), en 14 elementos, en 7 elementos y en sólo 2 elementos. Se ha procurado mantener la densidad relativa de elementos por zonas:

Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*	*Caso 4*
7° - 14 el.	7° - 7 el.	7° - 3 el.	15° - 1 el.
7° - 7 el.	7° - 3 el.	7° - 2 el.	45° - 1 el.
6° - 3 el.	6° - 2 el.	6° - 1 el.	
40° - 4 el.	40° - 2 el.	40° - 1 el.	

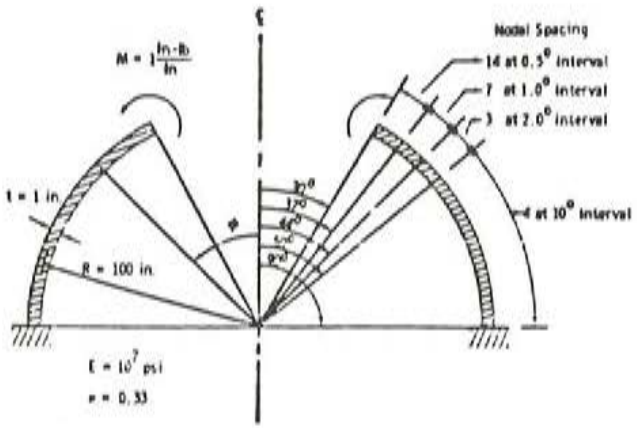


Fig. 5 Hemispherical shell, properties and nodal breakdown.

Para el caso de discretización en 28 elementos, los resultados coinciden plenamente con los de Grafton y Strome (y éstos con el valor teórico). Más interesante es observar qué sucede cuando desciende el número de elementos. Si analizamos los valores del corrimiento horizontal u' en el borde libre y del momento flector Ms en z = 15, tendremos:

	u'	%	*Ms (15)*	%
28 elem.	1,631390	0	−0,854100	0
14 elem.	1,629877	−0,09	−0,854059	−0,004
7 elem.	1,637416	0,37	−0,855425	0,16
2 elem.	1,677113	2,80	−0,873175	2,23

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

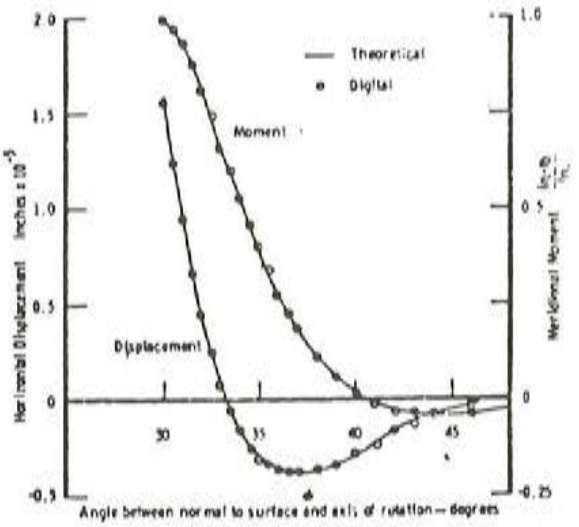


Fig.6 Stress resultant and displacement, hemispherical shell.

Se aprecia que las diferencias máximas entre el caso de 28 elementos y el caso extremo de sólo 2 elementos son de 2,8 por 100 para el desplazamiento horizontal y 2,23 por 100 para el momento flector.

La precisión obtenida es muy aceptable, incluso para discretizaciones groseras, no presentando los problemas que surgen con el empleo de funciones de forma impuestas. Hay que destacar además que los valores son igual de aproximados en el interior del elemento que en los nudos, dado que la solución obtenida es exacta para la lámina cónica en estado de cargas homogéneo; el punto z = 15, para el cual se ha calculado el momento flector, no corresponde a ningún nudo.

4.2.

En la formulación del elemento de lámina de revolución con simetría axial y generatriz recta, hemos incluído las soluciones ya conocidas del cilindro y la placa ortótropos, para cubrir los casos singulares del tronco de cono.

A partir de la solución del sistema diferencial en ambos casos, la obtención de la matriz de rigidez es similar a la del tronco de cono.

Los otros dos ejemplos del artículo de Grafton y Strome, que corresponden a una placa y un cilindro, se han podido analizar con un sólo elemento, ya que éste contiene la solución analítica para ambos casos. En el artículo citado, con funciones de forma impuestas, se necesitan del orden de 10 a 15 elementos para obtener una precisión aceptable.

5. CONCLUSIONES

La solución obtenida para la lámina cónica con comportamiento axisimétrico, junto con la del cilindro y la placa, permiten obtener un elemento de lámina de revolución, de directriz recta, con funciones de forma "exactas".

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El análisis de una lámina de revolución de directriz cualquiera, por descomposición en elementos de directriz recta, sólo introduce errores en la asimilación geométrica de la directriz a una poligonal. La matriz de rigidez y las cargas nodales en cada elemento, satisfacen todas las condiciones cinemáticas y de equilibrio.

Ello permite el empleo, para una misma precisión, de elementos de mayores dimensiones que si se emplean funciones de forma impuestas. Estos "macroelementos" pueden representar un ahorro de cálculo importante.

Su aplicación principal se centra en el análisis de estructuras laminares, donde las acciones sean predominantemente simétricas, como depósitos y recipientes a presión. Se están realizando estudios para ampliar el campo de aplicación, con la consideración de acciones no simétricas, mediante desarrollos en serie polar.

Otra aplicación importante de la solución obtenida es en procesos de asimilación de una banda de malla monocapa, con simetría de revolución, a un continuo laminar troncónico ortótropo. Identificando los coeficientes de las matrices de rigidez de la banda de malla y del continuo (aquí deducida), es posible obtener las constantes constitutivas de un continuo laminar, ortótropo, que tenga la misma energía de deformación, para un nivel de carga dado y en régimen lineal, que una malla reticulada monocapa con características geométricas y mecánicas definidas. El sistema de ecuaciones resultante es superabundante, al haber más coeficientes de las matrices de rigidez que hay que identificar, que características constitutivas. Ello es consecuencia de que la ortotropía de la malla no es de tipo material sino geométrico.

La elección de los coeficientes que hay que identificar en las matrices de rigidez, y la solución del sistema de ecuaciones resultante (no lineal y no explícito), son problemas complejos.

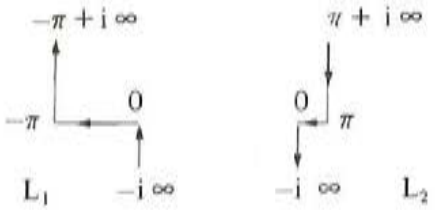
APENDICE.– FUNCIONES DE HANKEL Y EXPRESIONES ASINTOTICAS

Las funciones de Hankel, o de Bessel de tercera especie, se definen como:

$$H_p^1(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{-iz \operatorname{sen}(\xi + ip\,\xi)}\, d\xi$$

$$H_p^2(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{-iz \operatorname{sen}(\xi + i\,p\,\xi)}\, d\xi$$

siendo los caminos de integración de la variable:



Su relación con las funciones de Bessel de primera y segunda especie es:

$$J_p(z) = \frac{1}{2}\left[H_p^1(z) + H_p^2(z)\right]$$

$$N_p(z) = \frac{1}{2i}\left[H_p^1(z) - H_p^2(z)\right]$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Para argumentos grandes, se pueden emplear diversas expresiones asintóticas. En el rango usual de nuestro problema, y de acuerdo con la precisión requerida, se ha adoptado la siguiente formulación:

$$H_p^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \{P(p, z) + i \cdot Q(p, z)\}$$

$$H_p^2(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \{P(p, z) - i \cdot Q(p, z)\}$$

siendo:

$$P(p, z) = 1 - \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{2!\ (8z)^2} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu - 25)(\mu - 49)}{4!\ (8z)^4}$$

$$Q(p, z) = \frac{\mu - 1}{8z} - \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu - 25)}{3!\ (8z)^3}$$

$$\mu = 4p^2$$

RECONOCIMIENTOS

El presente artículo está basado en las ideas contenidas en la Tesis Doctoral "Generación de macroelementos finitos en el análisis de láminas de revolución", presentada por el autor en la Universidad Politécnica de Valencia, en el mes de Marzo de 1985.

Quiero reconocer la importante ayuda de todo tipo prestada por los Directores de la Tesis, Doctores D. Pedro Fuster García y D. Salvador Monleón Cremades. En la realización de la Tesis dispuse de una beca concedida por la Caja de Ahorros de Valencia.

REFERENCIAS

1.– P. E. GRAFTON y D.R. STROME.– "Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method".– A.I.A.A. Journal, vol. 1, n° 10 – 1963.

2.– H. MOLLMANN.– "Theory of thin shells".– John Wiley, U.K. – 1981.

3.– V. G. REKACH.– "Problemas de la teoría de la elasticidad".– Ed. Mir, Moscú – 1978.

4.– S. MONLEON.– "Estabilidad de cúpulas esféricas reticuladas monocapa".– Tesis Doctoral, Valencia – 1983.

5.– F. BONET.– "Generación de macroelementos finitos en el análisis de láminas de revolución".– Tesis Doctoral, Valencia – 1985.

6.– COURANT-HILBERT.– "Methods of mathematical physics".– Interscience P., New York – 1953.

7.– WHITTAKER-WATSON.– "A course of modern analysis".– Cambridge U.P. – 1969.

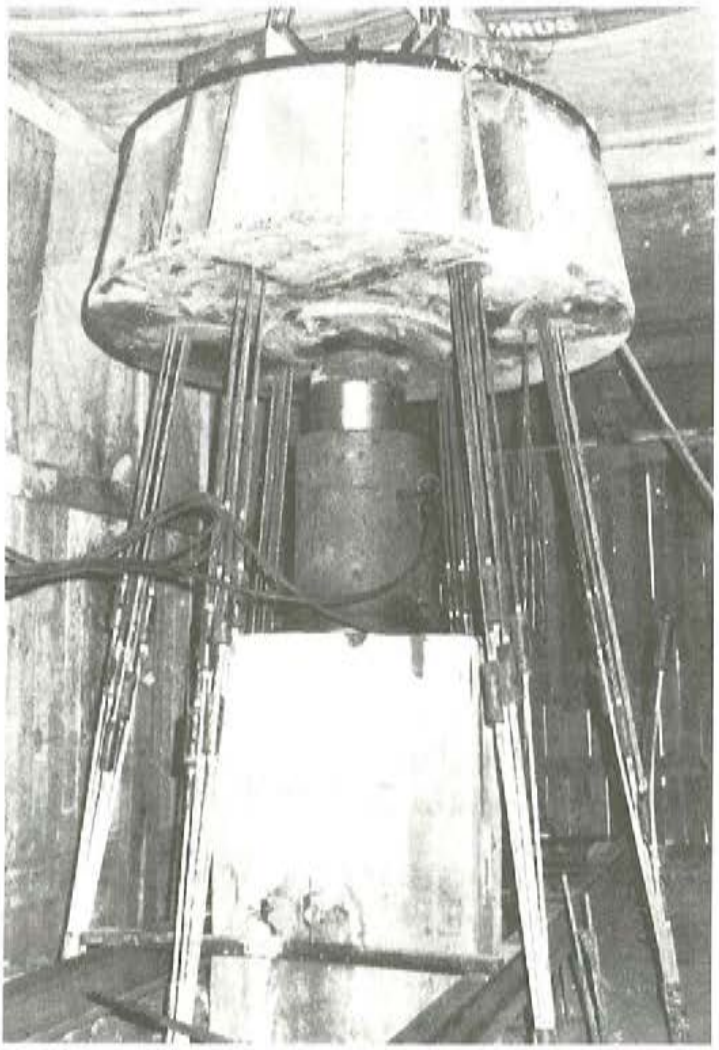
8.– ABRAMOWITZ-STEGUN eds.– "Handbook of mathematical functions".– New York – 1972.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

INTEMAC

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES





Prueba de carga de un pilote.

MADRID

Oficinas:
Monte Esquinza, 30 - 4º D
MADRID-4
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:
Carretera de Loeches, 7
TORREJON DE ARDOZ
Tels. (91) 675 31 00/04/08

BARCELONA

Pasaje Busquets, 37
CORNELLA DE LLOBREGAT
Tels. (93) 377 43 58/62

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Extensión de la fórmula de Merchant-Rankine para las estructuras metálicas planas, traslacionales, de retícula no ortogonal

Jesús Ortíz Herrera
Dr. Ingeniero de Caminos
Catedrático de Estructuras I, ETSA, UPM

Antonio Mas-Guindal Lafarga
Dr. Arquitecto
Profesor Titular de Estructuras III, ETSA, UPM

SINOPSIS

Es bien conocida la utilidad de la fórmula de Merchant-Rankine, como fórmula empírica simplificada aplicable a los pórticos metálicos planos ortogonales, para la estimación de la carga última de los mismos. El presente trabajo amplía la base de dicha fórmula empírica mediante la prospección diversificada de tipologías estructurales más generales, dentro del campo de las estructuras metálicas planas de retícula no ortogonal. Algunos de los ejemplos expuestos han sido deliberadamente forzados, tanto en su geometría como en su estado de cargas, al efecto de contrastar la fórmula de Merchant-Rankine en casos extremos, varios de ellos de índole puramente teórica. Las cargas últimas obtenidas mediante el análisis no lineal de dichas estructuras de prueba, han sido contrastadas con las previstas por la fórmula de Merchant-Rankine, apreciándose un ajuste relativamente satisfactorio, que permite defender la extensión de esta fórmula aproximada al caso de las estructuras metálicas no ortogonales. No obstante, se proponen, como resultado adicional de este trabajo, correcciones de dicha fórmula que, sin perjudicar su sencillez de aplicación, permiten mejorar su nivel de fiabilidad.

1. INTRODUCCION

Las referencias favorables a la utilización de la fórmula de Merchant-Rankine para los pórticos metálicos planos ortogonales son muy numerosas [1], [2], [3], [4], [5], [6], [9], [10], [11], [15]. El origen de dicha fórmula radica en una expresión empírica propuesta por Rankine en 1866 [12], para la evaluación aproximada de la capacidad portante de los soportes metálicos comprimidos. La significación y el alcance de dicha fórmula originaria, fueron

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ampliados por Merchant, muy posteriormente [11]. La fórmula de Rankine generalizada, o fórmula de Merchant-Rankine, se aplica para la estimación de la carga última de los pórticos metálicos planos ortogonales, traslacionales, de una o varias plantas, en función de la carga crítica "ideal" de pandeo de conjunto de la estructura (determinada bajo la hipótesis de material de elasticidad indefinida), y la carga límite dada por la teoría rígido-plástica de primer orden (cálculo plástico "convencional"). Para la tipología estructural anteriormente indicada, la validez aproximada de la fórmula de Merchant-Rankine ha sido ampliamente contrastada, tanto desde bases teóricas [6], [15] como experimentales [8], encontrándose que las diferencias con respecto a las cargas últimas "exactas" son favorables o, en caso contrario, de mínima incidencia en la seguridad.

La utilidad de la fórmula de Merchant-Rankine radica en la simplificación de un problema costoso, como es el cálculo de la carga última de los entramados metálicos de acuerdo con la teoría no lineal ("geométrica" y "mecánicamente" no lineal), que conlleva el consumo de importantes tiempos de cálculo en ordenador y resulta prohibitivo cuando se consideran estructuras constituidas por gran número de elementos. La aplicación de dicha fórmula reduce el problema a otros dos más simples, en cada uno de los cuales sólo una de las dos fuentes básicas del comportamiento no lineal entra en juego. la no linealidad "geométrica", por un lado, y la no linealidad "mecánica", por otro; es decir, para el tipo de estructura y de material que se han especificado anteriormente, y en base a hipótesis generales sobradamente conocidas, el problema queda reducido a un análisis de pandeo "linealizado" y un análisis rígido-plástico de primer orden; el tiempo de ordenador necesario para estos cálculos es considerablemente menor que el correspondiente al problema general. Además, para pórticos ortogonales "regulares", existen a su vez métodos simplificados que permiten la estimación aproximada rápida, e incluso manual, de las cargas críticas ideales (método de las "longitudes de pandeo") y de las cargas límites rígido-plásticas (estructuras dimensionadas en base al teorema estático de la Plasticidad), con lo cual la utilidad de la fórmula de Merchant-Rankine en el diseño estructural se ve doblemente potenciada.

Por todo ello, parece claro que la investigación acerca de la posible validez de la fórmula de Merchant-Rankine para tipologías estructurales más generales, ofrece considerable interés. En este trabajo se expone una prospección efectuada por los autores del mismo, en el campo de las estructuras metálicas planas de retícula no ortogonal, constituidas por piezas de directriz recta enlazadas rígidamente en los nudos, y suponiendo coartado el posible pandeo de la estructura o de sus elementos, fuera del plano de la misma. En el Anejo nº 1 se resume la formulación básica del programa de ordenador utilizado, el cual permite el cálculo no lineal de las estructuras del tipo anteriormente indicado, tanto en las variantes de análisis "geométricamente" no lineal o "mecánicamente" no lineal, como en el análisis no lineal conjunto, con ambas causas de no linealidad integradas en el mismo proceso. El cuerpo del artículo se dedica a la exposición de los casos analizados y a la derivación de conclusiones. En primer lugar, no obstante, se incluye un resumen o aclaración de conceptos generales de la moderna teoría no lineal de estructuras metálicas, cuya lectura puede resultar útil para el lector no familiarizado con la literatura técnica actual sobre dicho tema. Los ejemplos expuestos han sido deliberadamente forzados tanto en su geometría como en su estado de cargas, al efecto de contrastar la aplicación de la fórmula de Merchant-Rankine en casos extremos, varios de ellos de índole puramente teórica. Ello ha permitido el contraste diversificado de dicha fórmula y la propuesta de posibles mejoras de la misma, expuestas en las conclusiones finales de este trabajo.

2. CONCEPTOS GENERALES [1], [2]

Se considera una estructura de acero, plana, constituida por piezas rectas enlazadas rí-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

gidamente en los nudos, siendo éstos desplazables, y encontrándose impedido el pandeo tridimensional (fuera del plano medio de la estructura), así como los fenómenos de inestabilidad local de los elementos y otros posibles estados límites últimos (rotura frágil, etc.).

Se supone que todas las cargas son estáticas y crecen monótona y proporcionalmente entre sí, siendo representable este proceso mediante un único parámetro multiplicador, γ, denominado "factor de carga" o, simplemente, "carga". No hay inconveniente en interpretar γ como un "coeficiente de ponderación" que se aplica a una configuración de acciones de referencia o "servicio".

El problema que aquí se considera consiste en determinar la "carga última" (γ_u) para la cual se produce el agotamiento de la estructura, habida cuenta del comportamiento anelástico del material y de los fenómenos de inestabilidad de conjunto. La fórmula de Merchant-Rankine proporciona precisamente un valor aproximado (γ_R) de la carga última, $\gamma_R \simeq \gamma_u$.

Suponiendo, en primer lugar, que el material puede permanecer indefinidamente elástico lineal bajo cualquier rango de tensión, pero introduciendo en el análisis los fenómenos de segundo orden en deformaciones, se obtiene un primer modelo teórico (la Teoría elástica de segundo orden), que tiene en cuenta, de forma simplificada, los efectos del cambio de geometría de la estructura debido a la deformación, sobre el comportamiento de la misma (no linealidad "geométrica"). Este modelo teórico predice una "respuesta" o relación carga/desplazamientos ($\gamma - \Delta$) no lineal, siendo el pandeo una posible manifestación especialmente dramática de esa respuesta no lineal.

Análogamente a los fenómenos de inestabilidad de los soportes aislados, el pandeo de la estructura puede ocurrir por "bifurcación" de equilibrio o por "divergencia" de equilibrio. En el primer caso, que ocurre sólo si la teoría lineal predice un estado con desplazamientos nulos (en la hipótesis de inextensibilidad de las barras), la estructura abandona bruscamente dicho estado al alcanzarse una cierta "carga crítica ideal", γ_c, bajo la cual aparecen desplazamientos que siguen un determinado perfil o "modo de pandeo", indeterminado salvo uno o varios factores no acotados (dentro de la teoría de segundo orden); este comportamiento se encuentra idealmente representado por la rama 1 de la figura 1.

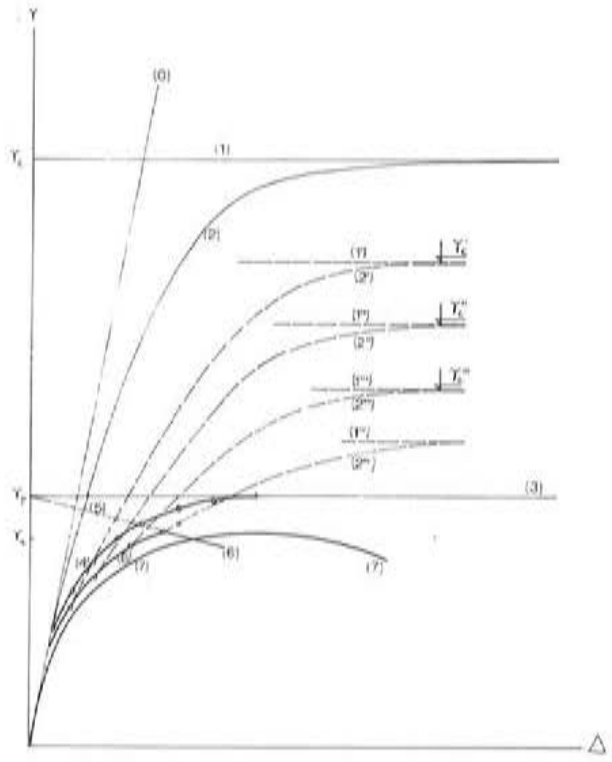


Fig. 1. Respuesta no lineal de las estructuras metálicas.
Notación:
(0) Teoría lineal (Teoría elástica de primer orden)
(1) Bifurcación de equilibrio (Teoría elástica de 2° orden)
(2) Divergencia de equilibrio (Teoría elástica de 2° orden)
(3) Teoría rígido-plástica de primer orden
(4) Teoría elastoplástica de primer orden
(5) Teoría rígido-plástica de segundo orden
(6) Teoría elastoplástica de segundo orden
(7) Comportamiento "real".

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

La "carga crítica ideal" se determina en ordenador resolviendo un problema atípico de autovalores, consistente en la anulación del determinante de la matriz de rigidez no lineal del sistema (de las múltiples raíces de dicho problema matemático, sólo la de menor valor, γ_c, tiene significación física). En la formulación de este problema, que puede seguirse en el Anejo 1, basado en el "método de las funciones de estabilidad" [6], [7], [9], [14], intervienen como datos esenciales las rigideces de las barras y los esfuerzos axiles de las mismas, los cuales generalmente se suponen aproximadamente proporcionales a los del estado lineal ($\gamma \cdot N$). Determinadas formulaciones, no empleadas en este trabajo por su menor eficacia a igualdad de número global de grados de libertad del sistema, "linealizan" la expresión de la matriz de rigidez reteniendo sólo los términos lineales de un desarrollo en serie de potencias de γ; ello permite la utilización de rutinas standard para problemas lineales de autovalores de matrices ("pandeo linealizado"). Para la resolución del problema de autovalores original (no linealizado) resulta especialmente útil el "método de las perturbaciones", basado en la transformación del problema de bifurcación de equilibrio en uno de "divergencia de equilibrio", introduciendo un sistema de acciones parásitas o imperfecciones geométricas que, aun siendo de pequeño valor, sean capaces de excitar una cierta componente de deformación afín al primer modo de pandeo; ello permite reemplazar el difícil problema no lineal de autovalores por un proceso iterativo, en general muy rápidamente convergente, posteriormente descrito.

En realidad, toda estructura, aún supuesta elástica, debido a la existencia de "imperfecciones" inevitables o acciones "transversales" más o menos intensas, experimenta desplazamientos transversales (Δ) desde el comienzo del proceso de carga, los cuales pueden presentar un crecimiento divergente como resultado de los fenómenos de segundo orden; este comportamiento se representa idealmente mediante la curva 2 de la figura 1. Si el material fuera capaz de permanecer indefinidamente elástico, y suponiendo que los desplazamientos no son tan elevados como para invalidar la teoría de segundo orden, se produce una tendencia asintótica de la curva 2 a la recta 1, para $\gamma \to \gamma_c$. Siendo Δ una cierta norma del vector de desplazamientos (por ejemplo, su valor máximo absoluto) y Δ_0 su valor según la teoría lineal para $\gamma = 1$, asintóticamente para $\gamma \to \gamma_c$ se cumple: $\Delta \simeq \simeq \gamma \cdot \Delta_0/(1 - \gamma/\gamma_c)$. Esta expresión es extraordinariamente útil para deducir γ_c [9], a partir de Δ_0 y una o varias determinaciones de Δ, para diferentes γ, según la teoría no lineal (generalmente dos evaluaciones de Δ, una de "ensayo" y primera estimación de γ_c, y una segunda, o a lo sumo una tercera, de "verificación", son suficientes, si se hace una elección adecuada de las "perturbaciones" del sistema, en su caso). El conocido método "P–Δ", que reproduce también adecuadamente la "divergencia de equilibrio", puede asimismo emplearse para la estimación de γ_c. Y, aunque con menor rigor, pero con aplicabilidad "manual", el "método de las longitudes de pandeo", en caso de resultar válido, permite a su vez una estimación aproximada, pero muy rápida, de la carga crítica,

$$\gamma_c \simeq \min^0 \{\pi^2 \, EI/(\ell_k^2 \, N)\},$$

siendo ℓ_k la longitud de pandeo de cada una de las barras comprimidas, y N el respectivo esfuerzo axil de compresión, según la teoría lineal, para $\gamma = 1$. (Para una aplicación correcta del método de las longitudes de pandeo, se recomienda tener bien presente las hipótesis en que dicho método se fundamenta, descritas en multitud de tratados sobre fenómenos de inestabilidad elástica, cuya enumeración sería ociosa aquí, y examinar discriminadamente la verificación o no de dichas hipótesis en cada caso concreto).

En contraposición a la teoría elástica de segundo orden y sus diversas variantes, la "teoría elastoplástica de primer orden" constituye un segundo modelo teórico no lineal, básico, también incompleto y frecuentemente inadecuado a la evidencia experimental. En este modelo teórico se supone válida la teoría de primer orden (ignorando los efectos del cambio de la geometría sobre la propia respuesta estructural), pero se introduce en cambio el comportamiento anelástico del material. Con las condiciones de validez que pueden consultarse en la normativa y bibliografía corrientes sobre cálculo de estructuras metálicas,

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

este modelo básico puede reducirse a la introducción de "rótulas plásticas" localizadas en las secciones que alcanzan un valor determinado del momento (momento plástico, M_p), que puede depender del resto de esfuerzos concomitantes en la misma sección. Suponiendo prácticamente ilimitada la capacidad de rotación de las rótulas plásticas, la estructura colapsa para un determinado factor de carga, γ_p (carga "rígido-plástica" o "plástica") para la cual la estructura como conjunto, o una cierta subestructura, se transforma en un mecanismo. En la figura 1 se indican esquemáticamente el comportamiento rígido-plástico (rama 3), para el cual la carga plástica se supone alcanzada sin deformación previa alguna, y el comportamiento elastoplástico (poligonal 4), tal como puede evaluarse mediante la transformación progresiva de la estructura por la aparición de las sucesivas rótulas plásticas a lo largo del proceso.

La determinación directa de γ_p, sin necesidad de seguir todo el proceso de carga, puede efectuarse aplicando los teoremas del análisis límite de la Teoría de la Plasticidad. Ello permite reducir la obtención de γ_p a un problema matemático de "programación lineal", resoluble mediante el bien conocido algoritmo del "simplex"; de esta forma, la determinación de γ_p en ordenador resulta sencilla y rápida para una estructura dada, previamente conocida. (Este procedimiento admite aplicaciones de mayor alcance, en el campo del dimensionamiento óptimo de estructuras, que no son consideradas en este trabajo). Por último, manualmente, al menos cuando se manejan tipologías convencionales de comportamiento bien conocido, resulta frecuentemente fácil estimar, mediante fórmulas o ábacos, el valor de γ_p, o dimensionar la estructura de modo que una cierta carga plástica quede garantizada por exceso.

Cuando las dos fuentes de comportamiento no lineal (efectos de segundo orden y fenómenos elastoplásticos) se reunen en un mismo modelo teórico (teoría elastoplástica de segundo orden), el análisis se encarece considerablemente. Aunque han sido propuestos métodos que eluden el seguimiento progresivo del proceso de aparición de rótulas plásticas, el tiempo de cálculo en ordenador resulta prohibitivo si el número de grados de libertad e hiperestatismo son considerables. La respuesta de la estructura se describe en la figura 1 (curva 6) y admite la siguiente interpretación: la formación de la primera rótula plástica produce un deterioro de la rigidez global de la estructura, lo cual provoca una reducción de la carga crítica (γ_c') y la consiguiente transformación de la curva 2 (curva 2'); de nuevo, la segunda rótula plástica genera otra transformación (γ_c'', 2"); y este proceso continúa hasta que la aparición de una cierta rótula plástica adicional produce la pérdida del carácter definido positivo de la matriz de rigidez "deteriorada" o "residual", hecho que caracteriza una situación de inestabilidad. Ello sucede, normalmente, con un número de rótulas menor que las que aparecen en el proceso descrito por la curva 4, pudiendo además no existir coincidencia en el orden y/o situación de las mismas. La sucesión $\gamma_c \geqslant \gamma_c' \geqslant \gamma_c'' \geqslant \geqslant \gamma_c''' \geqslant \cdots \geqslant \gamma_u$ permite la interpretación de γ_u como carga crítica "deteriorada" del sistema, aún cuando las cargas críticas intermedias γ_c', γ_c'', etc., no llegan a calcularse explícitamente, sino que γ_u se determina directamente como el valor límite de γ alcanzado en el proceso descrito por la curva 6.

Finalmente, cuando se tiene además en cuenta la extensión finita de las zonas plastificadas, así como las tensiones residuales de laminación, soldadura, etc., las inevitables imperfecciones geométricas a nivel de sección, pieza y estructura, el endurecimiento del material para deformaciones elevadas, etc., se obtienen modelos teóricos aún más sofisticados, susceptibles de representar todavía mejor el comportamiento "real" (curva 7). En el presente estudio, no obstante, se identifica γ_u como el máximo de la curva 6, con las salvedades ya indicadas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3. LA FORMULA DE MERCHANT-RANKINE

La fórmula de Merchant-Rankine proporciona un valor aproximado (γ_R) de la carga última (γ_u), a partir de la carga crítica ideal (γ_c) y de la carga plástica (γ_p):

$$\frac{1}{\gamma_R} = \frac{1}{\gamma_c} + \frac{1}{\gamma_p} \quad , \quad \gamma_R = \frac{\gamma_p}{1 + \gamma_p / \gamma_c}$$

Aun cuando su justificación es fundamentalmente empírica, admite ciertas explicaciones teóricas, simplistas, para modelos de un solo grado de libertad, y para modelos de más de un grado de libertad cuyas rótulas plásticas se formen todas simultáneamente (para $\gamma = \gamma_p$); en este hipotético caso, en el cálculo elastoplástico de primer orden, las solicitaciones coinciden con las de la teoría lineal ($\gamma \cdot M$) para $0 < \gamma < \gamma_p$, y alcanzan los valores plásticos $\gamma_p \cdot M = M_p$ simultáneamente en todas las secciones críticas. Entonces, admitiendo $1/(1 - \gamma/\gamma_c)$ como factor de amplificación aproximado por efectos de segundo orden, se tendrá:

$$\frac{\gamma_u \cdot M}{(1 - \gamma_u / \gamma_c)} \simeq M_p \simeq \gamma_p \cdot M \ ,$$

de donde:

$$\frac{1}{\gamma_u} \simeq \frac{1}{\gamma_c} + \frac{1}{\gamma_p} = \frac{1}{\gamma_R}$$

Verdaderamente, esto dista mucho de ser una justificación mínimamente rigurosa de la fórmula, pero apunta ciertas características de la misma, empíricamente observadas, como la de que su precisión es tanto mejor cuanto más semejantes sean entre sí el primer modo de pandeo y la deformada del mecanismo de colapso plástico [6], ya que en tal situación cabe esperar, razonablemente, una buena aproximación del factor de amplificación, $1/(1 - \gamma/\gamma_c)$, de las solicitaciones primarias.

Otra posible explicación de la fórmula de Merchant-Rankine se obtiene admitiendo la hipótesis (ciertamente gratuita) de que γ_u coincide aproximadamente con la ordenada de la curva 2 de la figura 1, correspondiente a un desplazamiento de valor: $\Delta = \gamma_p \cdot \Delta_0$ (*) (desplazamiento correspondiente, según la teoría lineal, para $\gamma = \gamma_p$). Entrando con $\Delta = \gamma_p \cdot \Delta_0$ en la expresión asintótica $\Delta = \gamma \cdot \Delta_0/(1 - \gamma/\gamma_c)$, se despeja el valor indicado (γ_R). Otras posibles estimaciones aproximadas de la carga última, en base a este tipo de consideraciones simplistas, se discuten en [9].

Para los pórticos ortogonales, la justificación empírica de la fórmula de Merchant-Rankine procede de ensayos en modelos reducidos y ensayos simulados por procedimientos numéricos [6], [8], [15], cuyos resultados se resumen en las figuras 2, 3 y 4. De entre las diferencias contrarias a la seguridad, las pésimas observadas son del orden del 12 por 100. Estas diferencias desfavorables tienden a localizarse para valores reducidos de γ_p/γ_c, según se aprecia en dichas figuras. También Majid [9] señala pequeñas diferencias, contrarias a la seguridad, para valores bajos de γ_p/γ_c, en determinados casos particulares.

La fórmula de Merchant-Rankine puede considerarse como la expresión de un diagrama de interacción, particularmente simple, en el plano x – y (figura 2), o la de una "curva de pandeo" $\overline{\gamma}$ ($\overline{\lambda}$) muy simple (figuras 3 y 4), en dichas figuras se denomina x e y

(*) Δ_0 = desplazamiento, según la teoría lineal, para $\gamma = 1$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

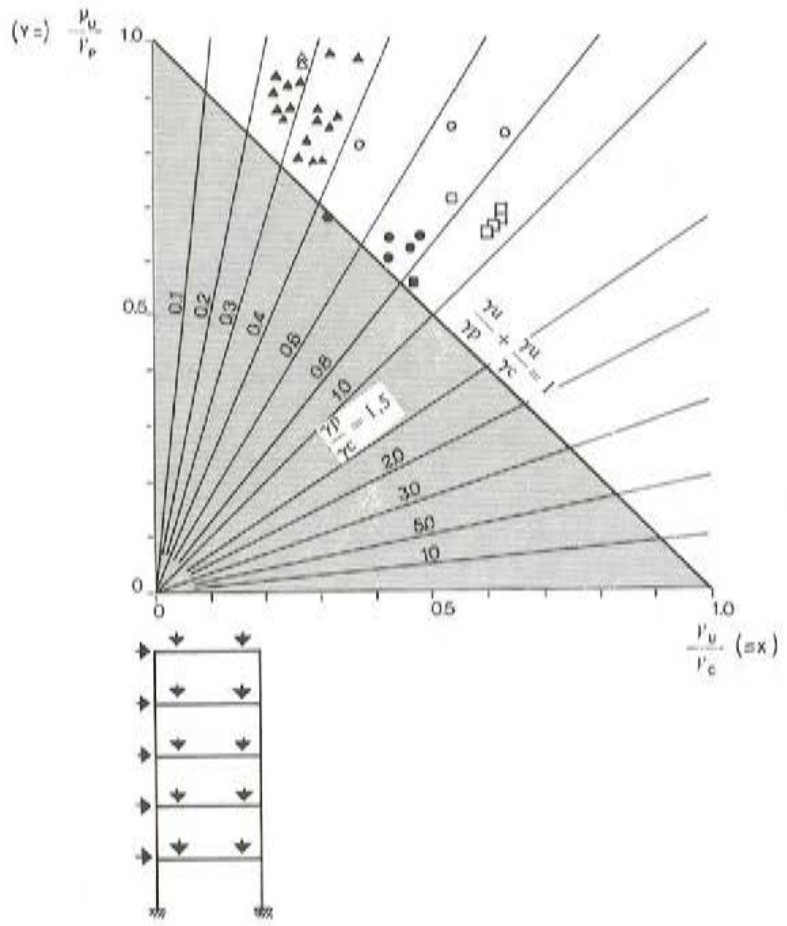


Fig. 2. Cargas de rotura de estructuras de pisos, ensayadas por Low (Ref. 8).
Notación:

- ▲ Pórticos de 3 pisos
- ● Pórticos de 5 pisos
- ■ Pórticos de 7 pisos
- □○△ Pórticos sin carga lateral
- γ_u Carga de rotura
- γ_p Carga de colapso rígido-plástica
- γ_c Carga crítica elástica

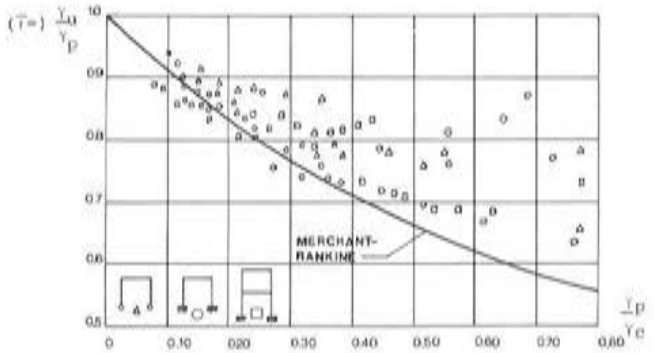


Fig. 3. (Ref. 6, 10, 15)
Notación:

- γ_c = Carga crítica elástica.
- γ_p = Carga de colapso rígido-plástica.
- γ_u = Carga de ruina.

Merchant-Rankine: $\frac{1}{\gamma_u} = \frac{1}{\gamma_p} + \frac{1}{\gamma_c}$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

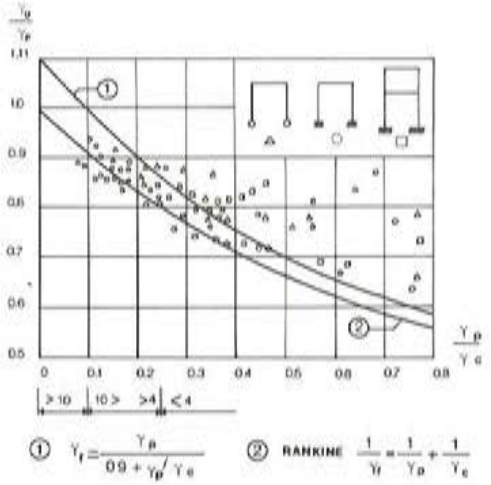


Fig. 4. (Ref. 2)
Notación:
γ_c = Carga crítica elástica.
γ_p = Carga de colapso rígido-plástica.
γ_u = Carga de rotura.
Merchant-Rankine: $\frac{1}{\gamma_u} = \frac{1}{\gamma_p} + \frac{1}{\gamma_c}$

a las magnitudes relativas: $x = \gamma_u/\gamma_c$, $y = \gamma_u/\gamma_p$, $\bar{\lambda} = \sqrt{\gamma_p/\gamma_c}$ es la "esbeltez reducida generalizada" (generalización de la magnitud $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_r$, con $\lambda_r = \pi\sqrt{E/f_y}$, empleada en las "curvas europeas" de pandeo de soportes) y: $\bar{\gamma} = \gamma_u/\gamma_p$ es el "coeficiente de pandeo generalizado", o factor reductor de la carga plástica.

Puede tener cierto interés la comparación *formal* de estas expresiones con las deducidas mediante ajuste de formulaciones de Ayrton-Perry-Robertson a las "curvas de pandeo" de los soportes metálicos [13]:

$$y + \eta \cdot \frac{y}{1 - x} = 1$$

siendo: $\eta = \eta(\bar{\lambda})$, una magnitud adimensional denominada "imperfección generalizada", que se determina por ajuste a los coeficientes de pandeo teórico-experimentales. Así, para $\eta = 0{,}3 \cdot (\bar{\lambda})^2$ se obtienen coeficientes de pandeo $\bar{\gamma}$ equivalentes ($\bar{\gamma} = 1/\omega$) a los propuestos en las normas españolas "em 62" y "MV 103" (Dutheil). Y con expresiones del tipo $\eta = \rho \cdot (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)$, Rondal y Maquoi [13] ajustan, con notable precisión, las cinco curvas de pandeo europeas (CECM-1977) y las tres de las recomendaciones americanas (SSRC-1976).

En términos de "diagramas de interacción", puede proponerse una expresión general del tipo siguiente, de la cual resultan, por particularización, los diversos criterios citados:

$$f(x, y) \equiv (ax + by) - \mu xy + \rho \cdot \sqrt{xy}, = 1 \ (*)$$

en donde:

- Merchant-Rankine: $a = b = 1, \mu = \rho = 0$ (... $x + y = 1$).
- Dutheil: $a = 1{,}3; b = 1; \mu = 1; \rho = 0$ (... $1{,}3\,x + y - xy = 1$).
- Rondal-Maquoi: $a = 1; b = 1 - 0{,}2\,\rho, \mu = 1; \rho = 0{,}125, 0{,}206, 0{,}339, 0{,}489, 0{,}756$ (curvas CECM a_0, a, b, c, d) (... $x + (1 - 0{,}2 \cdot \rho)\,x - xy + \rho \cdot \sqrt{xy} = 1$).

La transformación del "diagrama de interacción" (x–y) en "curva de pandeo" ($\bar{\gamma} - \bar{\lambda}$) se realiza de manera trivial, efectuando el cambio de variables $x = (\bar{\lambda})^2 \cdot \bar{\gamma}$, $y = \bar{\gamma}$, y despejando $\bar{\gamma}$ en función de $\bar{\lambda}$. Si $\mu \neq 0$, resulta de esta forma la siguiente expresión:

(*) La incorporación de dos términos adicionales $cx^2 + dy^2$ mantendría una de las ventajas esenciales de esta fórmula, la de poder despejar $\bar{\gamma}$ explícitamente en función de $\bar{\lambda}$, generando así "coeficientes de pandeo" de manejo cómodo. No obstante, esos términos cuadráticos adicionales no son necesarios para reproducir los diversos criterios arriba mencionados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2\,\mu\,\bar{\lambda}} \left[(a\,\bar{\lambda} + \frac{b}{\bar{\lambda}} + \rho) - \sqrt{(a\,\bar{\lambda} + \frac{b}{\bar{\lambda}} + \rho)^2 - 4\,\mu} \right]$$

En cambio, para $\mu = 0 = \rho$, $a = 1 = b$ (Merchant-Rankine), se obtiene:

$$\bar{\gamma}_R = \frac{1}{1 + (\bar{\lambda})^2}\ , \quad \text{siendo} \quad \bar{\gamma}_R = \frac{\gamma_R}{\gamma_p}$$

Las diferencias, tanto formales como numéricas, de ambas expresiones $\bar{\gamma}$ $(\bar{\lambda})$ son considerables, lo cual pone de manifiesto, entre otras consideraciones, la conocida inadecuación de la fórmula de Merchant-Rankine para los soportes aislados. Pero, evidentemente, la expresión "general" f (x, y) = 1 puede servir de base de partida para la búsqueda de posibles fórmulas de interacción alternativas.

4. DESCRIPCION DE LOS CASOS ANALIZADOS

Se han analizado, en total, siete casos de estructuras no ortogonales, de diversas tipologías y con distintos estados de cargas. Las características esenciales de dichos casos aparecen resumidas en la Tabla n° 1. Las figuras 5, 6, 7 y 8, describen de manera gráfica algunos de los resultados más significativos de cuatro de los siete casos analizados. En la Tabla n° 2 se recogen, para la totalidad de los casos, los resultados finales que interesan a efectos de establecer el contraste de la fórmula de Merchant-Rankine objeto de este estudio. En la misma tabla se recogen otros siete casos descritos en la ref[a] n° 9, correspondientes a estructuras no ortogonales, pero dentro de una tipología limitada (pórticos a dos aguas, simétricos, con carga vertical uniformemente repartida). Finalmente, las figuras 9 y 10 incluyen la totalidad de los casos, y sirven de base para las conclusiones finales expuestas en el apartado 5°.

Los casos analizados se han elegido de manera que varíen ampliamente la geometría y estados de carga posibles, llegando incluso a situaciones deliberadamente forzadas, como las de los casos 5, 6 y 7. Las diversas configuraciones estudiadas generan estados de solicitaciones de compresión y de flexión, combinadas con incidencias muy diversas, de manera que varía ampliamente la proporción γ_p/γ_c o su equivalente, el parámetro $\bar{\lambda} = \sqrt{\gamma_p/\gamma_c}$ (esbeltez relativa generalizada).

Todos los casos se han analizado en base a cuatro modelos de comportamiento diferentes, que aparecen en las figuras con las siglas siguientes:

E1: análisis elástico, según la teoría de primer orden (cálculo lineal).

E2: análisis elástico, según la teoría de segundo orden.

EP1: análisis elastoplástico, según la teoría de primer orden.

EP2: análisis elastoplástico, según la teoría de segundo orden.

La carga límite según este último modelo teórico, se adopta como estimador fiable de la carga última de la estructura; mientras que los dos modelos anteriores, E2 y EP1, proporcionan los parámetros γ_c y γ_p, respectivamente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

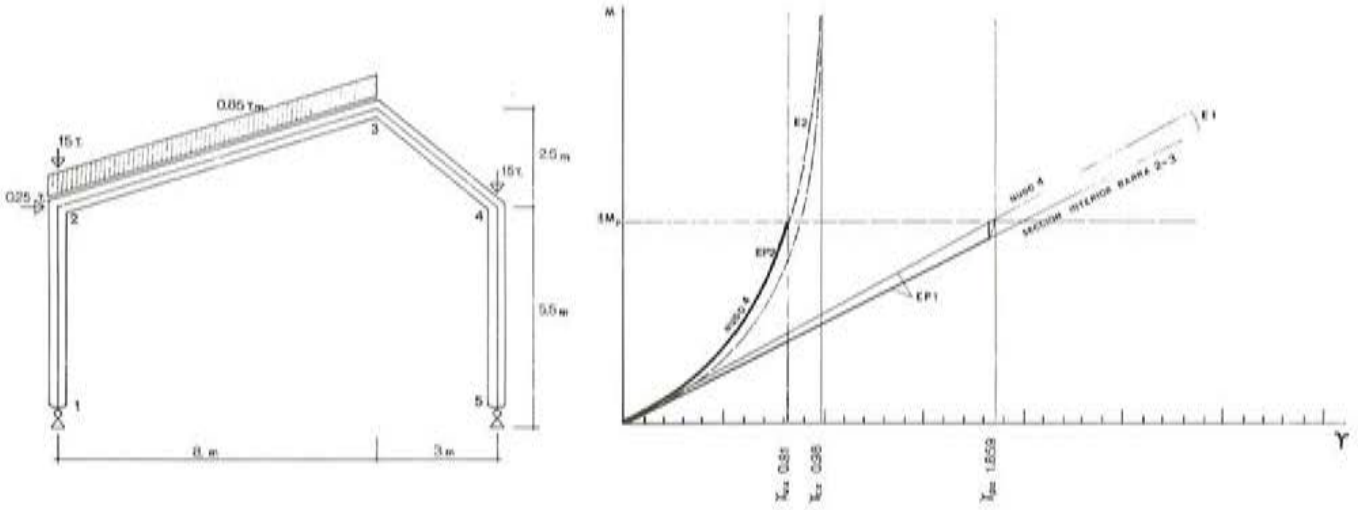


Fig. 5. Resultados correspondientes al caso 2.
Nota: El caso 1 es análogo, con diferente estado de cargas.

Notación:
E1 : Análisis elástico, teoría de 1er orden
E2 : Análisis elástico, teoría de 2° orden
EP1 : Análisis elasto-plástico, teoría de 1er orden
EP2 : Análisis elasto-plástico, teoría de 2° orden.

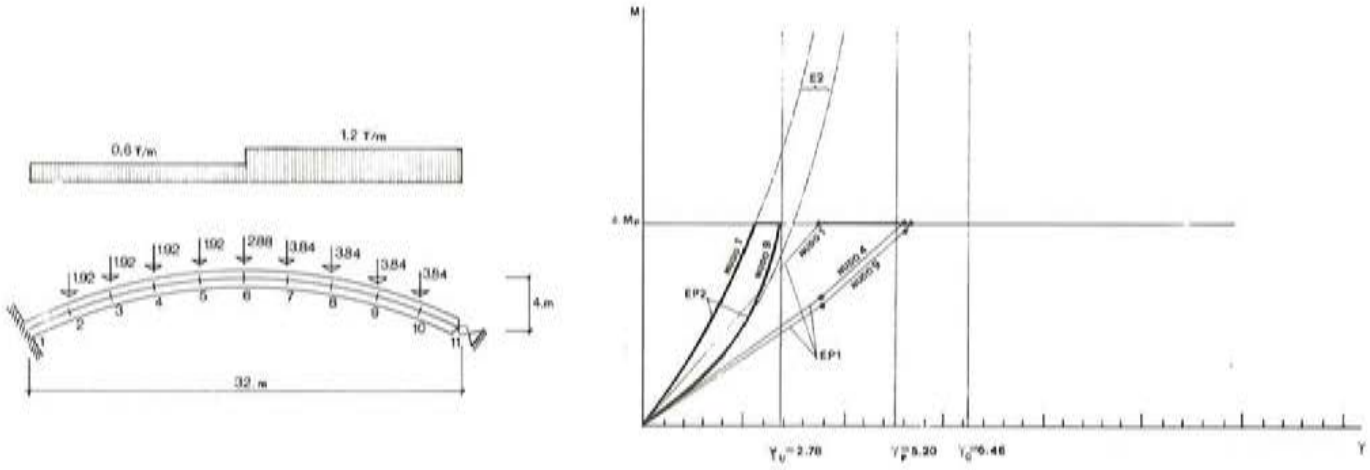


Fig. 6. Resultados correspondientes al caso nº 3.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

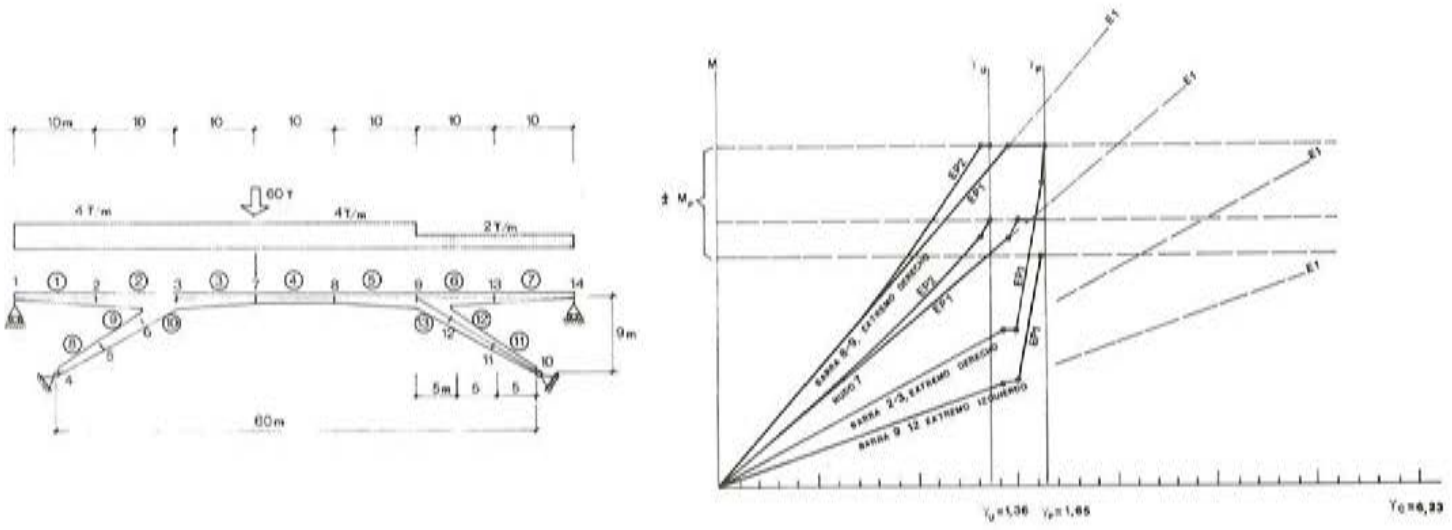


Fig. 7. Resultados correspondientes al caso nº 4.

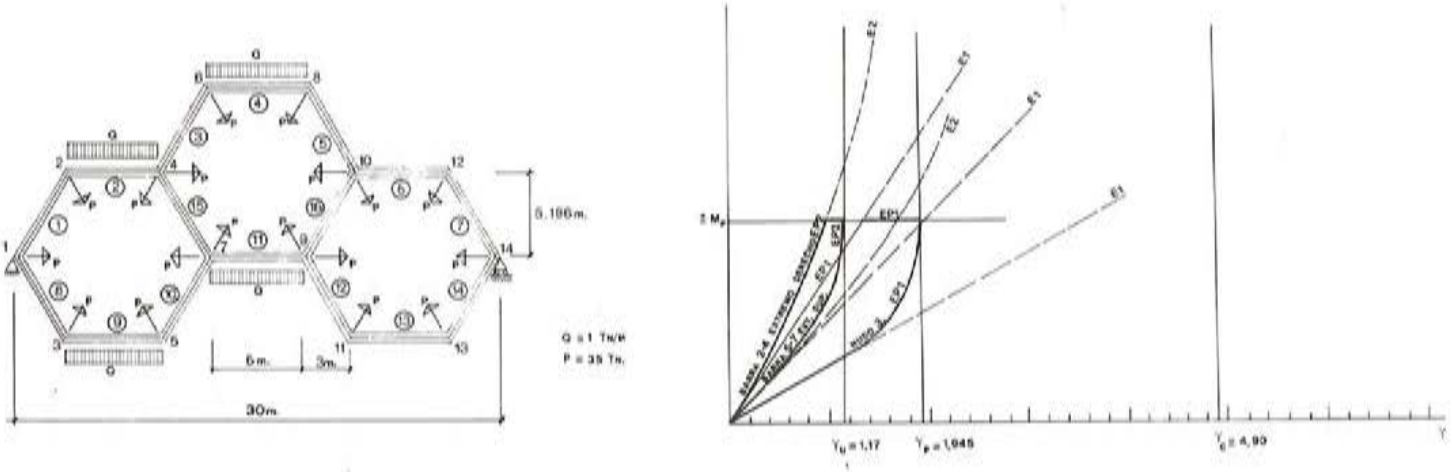


Fig. 8. Resultados correspondientes al caso nº 5.
Notas: Los casos 6 y 7 son análogos, con diferentes estados de cargas.

Se representa únicamente la evolución de los momentos en las secciones correspondientes a la primera y última rótulas plásticas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

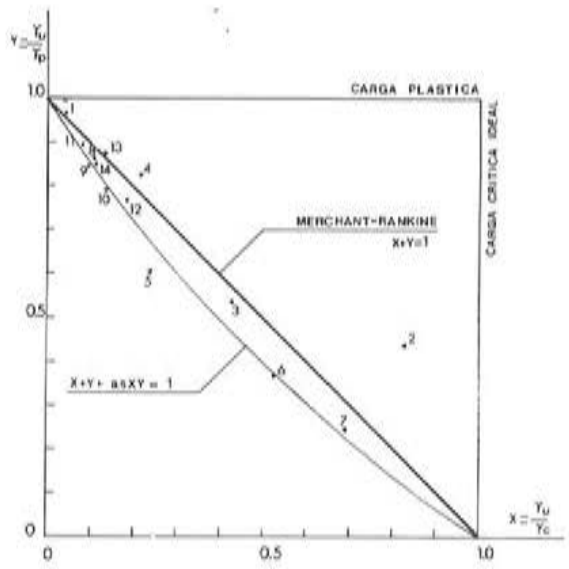


Fig. 9. Diagrama de interacción.

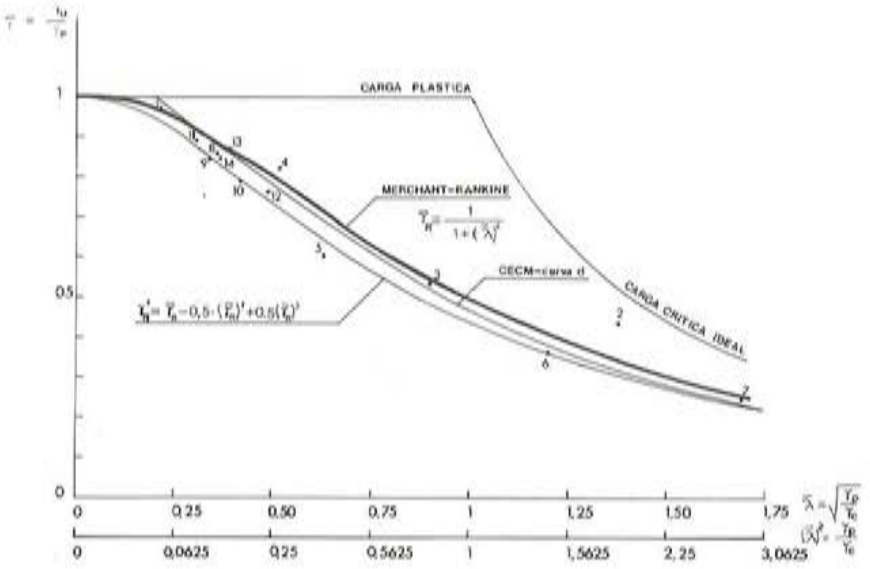


Fig. 10. "Curva de pandeo" generalizada.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 1

Descripción de los casos analizados

CASO 1
PORTICO A DOS AGUAS, BIARTICULADO, ASIMETRICO, DE UN VANO.
Carga vertical, vano 2, 3: uniforme, 0,85 t/ml.
Carga horizontal, nudo 2: puntual, 1 t.
Supuesto arriostrado en la dirección transversal.
Igual sección en todas las barras.
Dimensiones: las de la figura 5.

CASO 2 (Figura 5)
IDEM PORTICO ANTERIOR, SALVO ESTADO DE CARGAS.
Carga vertical, vano 2, 3: uniforme, 0,85 t/ml.
Carga puntual, nudos 2 y 4: puntual, 15 t.
Carga horizontal, nudo 2: 0,25 t.

CASO 3 (Figura 6)
ARCO EMPOTRADO-ARTICULADO, CON CARGA ASIMETRICA.
Rebajado, esbelto y arriostrado transversalmente.
Directriz parabólica.
Sección constante.
Dimensiones: las de la figura.
Cargas verticales: nudos 1 al 6, uniforme, 0,6 t/ml.
nudos 6 al 11, uniforme, 1,2 t/ml.

CASO 4 (Figura 7)
PORTICO ESBELTO.
Rebajado, arriostrado transversalmente. Sección variable.
Carga asimétrica: intervalo 1-2-3-7-8-9: uniforme, 4 t/ml.
nudo 7: puntual, 60 t.
intervalo 9-13-14: uniforme, 2 t/ml.

CASO 5 (Figura 8)
ESTRUCTURA NO ORTOGONAL TEORICA.
Grado de hiperestatismo elevado. Cargas ligeramente asimétricas.
Carga vertical en vanos 2-4, 3-5, 6-8 y 7-9: uniforme, $q = 1$ t/ml.
Cargas puntuales en todos los nudos, en dirección al centro del hexágono: $P = 35$ t.
Igual sección en todas las barras.
Supuesto arriostrado en dirección transversal.

CASO 6
IDEM ESTRUCTURA ANTERIOR, SALVO ESTADO DE CARGAS.
Carga vertical: uniforme $q = 0{,}4$ t/ml.
Cargas puntuales: $P = 52$ t.

CASO 7
IDEM ESTRUCTURA 5, SALVO ESTADO DE CARGAS.
Carga vertical: uniforme, $q = 0{,}2$ t/ml.
Cargas puntuales: $P = 52$ t.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 2

Resumen de resultados

Caso	x	y	γ_p/γ_c	$\bar{\lambda}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}_R$	ϵ %
1	0,043	0,962	0,044	0,211	0,962	0,957	+ 0,5
2	0,827	0,436	1,897	1,377	0,436	0,345	+ 20,9
3	0,430	0,535	0,805	0,897	0,535	0,534	− 3,6
4	0,218	0,824	0,265	0,515	0,824	0,791	+ 4,0
5	0,239	0,602	0,397	0,630	0,602	0,716	− 18,9
6	0,524	0,366	1,430	1,196	0,366	0,411	− 12,3
7	0,691	0,242	2,852	1,689	0,242	0,260	− 7,4
8	0,111	0,858	0,129	0,359	0,858	0,885	− 3,1
9	0,097	0,846	0,115	0,339	0,846	0,898	− 6,1
10	0,138	0,790	0,175	0,418	0,790	0,851	− 7,7
11	0,082	0,891	0,092	0,303	0,891	0,915	− 2,7
12	0,183	0,766	0,238	0,488	0,766	0,807	− 5,4
13	0,133	0,871	0,153	0,391	0,871	0,866	+ 0,6
14	0,113	0,852	0,133	0,365	0,852	0,883	− 3,6

$$x = \frac{\gamma_u}{\gamma_c} \; ; \quad y = \frac{\gamma_u}{\gamma_p} = \bar{\gamma} \; ; \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\gamma_p}{\gamma_c}} \; ;$$

$$\bar{\gamma}_R = \frac{1}{1 + (\bar{\lambda})^2} \; ; \quad \epsilon = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_R}{\bar{\gamma}} \text{ (en \%)}$$

Nota: Los casos 8, 9, ..., 14 se toman de la referencia [9], y corresponden a pórticos a dos aguas, esbeltos, simétricos, con carga vertical uniformemente repartida.

5. CONCLUSIONES

La tabla nº 2 y las figuras números 9 y 10, confeccionadas en base a los diversos casos considerados, permiten establecer las siguientes conclusiones:

a) El criterio de Merchant-Rankine podría extenderse a las estructuras metálicas de retícula no ortogonal objeto de este trabajo o, por lo menos, no puede afirmarse radicalmente lo contrario en base a los valores obtenidos. Salvo en dos de los catorce casos, las diferencias desfavorables ($\epsilon < 0$) no exceden de −10 por 100; la diferencia pésima observada es −18,9 por 100; y la diferencia media, −3,1 por 100. No obstante, los resultados obtenidos no son tan favorables como los recogidos en el apartado 3 de este artículo, correspondientes a los pórticos ortogonales.

b) Una sencilla corrección del coeficiente de Merchant-Rankine, $\bar{\gamma}_R = 1/[1 + (\bar{\lambda})^2]$, puede realizarse en la forma:

$$\bar{\gamma}'_R = \bar{\gamma}_R - 0{,}5\,(\bar{\gamma}_R)^2 + 0{,}5 \cdot (\bar{\gamma}_R)^3 \; (*)$$

Este "coeficiente de pandeo" modificado, reduce la diferencia pésima, para el conjunto de casos considerados, a −6,8 por 100, con lo cual se mejora razonablemente la seguridad de la fórmula, manteniendo su sencillez de aplicación. En términos de "diagrama de interacción", el criterio modificado anterior es prácticamente equivalente a la expresión:

(*) El "diagrama de interacción" correspondiente a este "coeficiente de pandeo" adopta una expresión algo complicada: $[x^2 + y^2 + 1{,}5\,xy] / (x + y)^3 = 1$; pero es prácticamente equivalente a la fórmula más simple que al final del párrafo b) se indica.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$f(x, y) = x + y + 0{,}5\ xy = 1\ (*)$$

c) La quinta curva de pandeo (d) de los soportes metálicos, según la Convención Europea de la Construcción Metálica (CECM-1977), aplicada en función de la esbeltez reducida generalizada ($\bar{\lambda}$) de la estructura, arroja valores intermedios (salvo en intervalos muy locales) entre los dos "coeficientes de pandeo" $\bar{\gamma}_R$ y $\bar{\gamma}'_R$, por lo cual su nivel de fiabilidad es también intermedio entre los de dichos coeficientes. Según Rondal y Maquoi [13], dicha curva (d) puede ajustarse con suficiente exactitud mediante una fórmula explícita del tipo indicado en el apartado 3° de este trabajo, con $a = 1$, $b = 0{,}849$, $\mu = 1$, $\rho = 0{,}756$, siendo pues de aplicación sencilla e inmediata.

Salvo las modificaciones que han quedado propuestas, el criterio de Merchant-Rankine puede, en definitiva, mantenerse (o adaptarse) para su aplicación a las estructuras estudiadas en el presente trabajo, manteniéndose pues la disponibilidad de un criterio simplificado, cuyo interés práctico ha quedado ya suficientemente resaltado en los apartados iniciales de este artículo.

ANEJO 1: FORMULACION (6), (7), (9), (14)

(I) Matriz de rigidez de la barra recta, según el método de las "funciones de estabilidad". (Hipótesis: teoría de segundo orden en deformaciones; material elástico lineal; ausencia de deformación de cortante; sección y esfuerzo axil constantes a lo largo de la barra):

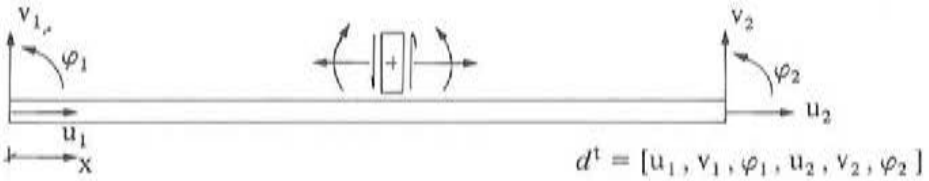
$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA^*}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA^*}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12\,EI}{L^3}\Phi_1 & \frac{6\,EI}{L^2}\Phi_2 & 0 & -\frac{12\,EI}{L^3}\Phi_1 & \frac{6\,EI}{L^2}\Phi_2 \\ & & \frac{4\,EI}{L}\Phi_3 & 0 & -\frac{6\,EI}{L^2}\Phi_2 & \frac{2\,EI}{L}\Phi_4 \\ & & & \frac{EA^*}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12\,EI}{L^3}\Phi_1 & -\frac{6\,EI}{L^2}\Phi_2 \\ & \text{(SIMETRICA)} & & & & \frac{4\,EI}{L}\Phi_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (u_1) \\ (v_1) \\ (\varphi_1) \\ (u_2) \\ (v_2) \\ (\varphi_2) \end{matrix}$$

(*) Esta fórmula de interacción responde a la expresión más general indicada en el apartado 3°, particularizada para $a = b = 1$, $\mu = -0{,}5$, $\rho = 0$. El "coeficiente de pandeo" correspondiente es:

$$\bar{\gamma} = \left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\left\{\sqrt{\left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}}\right)^2 + 2} - \left(\bar{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\right\}$$

A pesar de la gran diferencia formal con el coeficiente $\bar{\gamma}'_R$ antes indicado, los valores numéricos prácticamente coinciden (máxima diferencia, en valor absoluto, entre ambos: 2,7 por 100).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



$d^t = [u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2]$

a) Si $N < 0$:

$$N_E = \frac{\pi^2 \, EI}{L^2} \; ; \quad r = \frac{-N}{N_E} \; ; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}\sqrt{r} \; ; \quad \beta = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$s = \frac{\alpha \cdot (\alpha + \beta - \alpha \beta^2)}{1 - \alpha \beta} \; ; \quad c = \frac{\alpha - \beta + \alpha \beta^2}{\alpha + \beta - \alpha \beta^2}$$

$$\Phi_1 = \frac{s\,(1 + c)}{6} - \frac{\alpha^2}{3} \; ; \quad \Phi_2 = \frac{s\,(1 + c)}{6} \; , \quad \Phi_3 = \frac{s}{4} \; ; \quad \Phi_4 = \frac{s\,c}{2}$$

b) Si $N > 0$:

$$r' = \frac{N}{N_E} \; ; \quad \alpha' = \frac{\pi}{2}\sqrt{r'} \; ; \quad \beta' = \operatorname{Cth} \alpha'$$

$$s = \frac{\alpha' \cdot (\beta' - \alpha' - \alpha' \beta'^2)}{1 - \alpha' \beta'} \; ; \quad c = \frac{\alpha' + \beta' - \alpha' \beta'^2}{\alpha' - \beta' + \alpha' \beta'^2}$$

$$\Phi_1 = \frac{s\,(1 + c)}{6} + \frac{\alpha'^2}{3} \; ; \quad \Phi_2 = \frac{s\,(1 + c)}{6} \; ; \quad \Phi_3 = \frac{s}{4} \; ; \quad \Phi_4 = \frac{s\,c}{2}$$

(II) Esfuerzos de empotramiento perfecto (p_E):

Carga uniformemente repartida extendida a toda la longitud de la barra: los momentos de empotramiento de la teoría lineal se ven afectados del factor $1/\Phi_2$, permaneciendo inalterados, en ese caso, los cortantes en los extremos empotrados. Para otros casos de carga, véase ref. 6. En general, puede admitirse que esta corrección es omitible si $|r| < 0{,}25$.

(III) Articulaciones y/o rótulas plásticas:

Transformación de la ecuación de respuesta de la barra, $p = k\,d + p_E$, en caso de aparición de una rótula plástica ($M = M_p$) en la sección $x = x_0 \cdot (M_p$ con su signo correspondiente. En caso de tratarse de una "verdadera" articulación, el algoritmo siguiente es aplicable con $M_p = 0$).

Siendo M_0 el momento "isostático" en la sección $x = x_0$, se tiene:

$$M_0 - p_3 + (p_3 + p_6)\frac{x_0}{L} = M_p, \quad \text{luego:} \quad \underline{a}^t \cdot \underline{p} = M_p^*,$$

siendo: $M_p^* = M_p - M_0$, $\underline{a}^t = \left[0, 0, -\left(\frac{L - x_0}{L}\right), 0, 0, \frac{x_0}{L}\right]$

Se define asimismo $\underline{b} = \underline{k}\,\underline{a}$, $t = \underline{a}^t \underline{b}$ $(= \underline{a}^t \, \underline{k} \, \underline{a})$, $\mu = \frac{1}{t}(M_p^* - \underline{a}^t \, p_E)$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Siendo θ la rotación de la rótula, con $\underline{d} = \underline{d}^* + \theta\,\underline{a}$ se obtiene:

$$\underline{p} = \underline{K}\,(\underline{d}^* + \theta\,\underline{a}) + \underline{p}_E = \underline{K}\,\underline{d}^* + \theta\,\underline{b} + \underline{p}_E \;;$$

$$M_p^* = \underline{a}^t\underline{p} = \underline{b}^t\underline{d}^* + t\,\theta + \underline{a}^t\,\underline{p}_E \;;\quad \theta = \mu - \frac{1}{t}\,\underline{b}^t\,\underline{d}^* \;;$$

$$\underline{p} = \underline{K}\,\underline{d}^* - \frac{1}{t}\,\underline{b}\,\underline{b}^t\underline{d}^* + \mu\,\underline{b} + \underline{p}_E \;:\quad \text{luego}\quad \underline{p} = \underline{k}^*\,\underline{d}^* + \underline{p}_E^* \;,$$

siendo: $\underline{K}^* = \underline{K} - \frac{1}{t}\,\underline{b}\,\underline{b}^t \;;\quad \underline{p}_E^* = \underline{p}_E + \mu\,\underline{b}$

Este algoritmo de transformación de la matriz de rigidez y de los esfuerzos de empotramiento perfecto, puede aplicarse de nuevo sobre la misma barra, en caso de aparecer una segunda rótula plástica en un instante posterior del proceso de carga.

En el caso particular de la barra articulada en ambos extremos ($x_0 = 0$, $x_0 = L$), la matriz de rigidez transformada, puede expresarse más sencillamente de forma directa:

$$K^* = \begin{bmatrix} \frac{EA^*}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA^*}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{N}{L} & 0 & 0 & -\frac{N}{L} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{EA^*}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{N}{L} & 0 \\ \text{(SIMETRICA)} & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(IV) Imperfecciones geométricas.

Al menos en el caso de la barra articulada en ambos extremos, resulta conveniente establecer los coeficientes de rigidez $\pm \frac{EA^*}{L}$, en base a un área "efectiva" $A^* < A$. Para la barra biarticulada, con una preflecha sinusoidal de amplitud $n \cdot \ell$ ($n > 1/500$), se determina:

$$A^* = \frac{A}{1 + \frac{n^2\,\lambda^2\,r}{4\,(1-r)^2}} \;,\quad \text{siendo } \lambda = \frac{L}{\sqrt{I/A}} \;,\quad r = \frac{-N}{N_E}\;(0 \leqslant r < 1)$$

La existencia de desplomes de los soportes e imperfecciones análogas, puede generalmente introducirse, de forma equivalente, mediante cargas transversales ficticias aplicadas en los nudos de la estructura, adoptando la configuración más desfavorable (de manera de excitar el primer modo de pandeo). En el caso de pórticos ortogonales, una regla adecuada puede ser la de introducir cargas horizontales no inferiores a 1/200 de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

las cargas verticales de cada planta, bien entendido que todo el análisis estructural subsiguiente se efectúa con los criterios de segundo orden expresados en este Anejo.

ANEJO 2: NOTACION

A : Area de la sección transversal de la barra.
A* : Area equivalente.
a : Parámetro del diagrama de interacción.
$\underline{a}$: Matriz columna; incluye los giros extremos de la barra, asociados a un giro unitario de una rótula plástica, en una sección arbitraria.
b : Parámetro del diagrama de interacción.
$\underline{b}$: Producto $\underline{K} \cdot \underline{a}$.
c : Segunda función de estabilidad.
$\underline{d}$: Matriz columna, de desplazamientos y giros extremos de la barra.
$\underline{d}^*$; Matriz columna, de desplazamientos y giros transformados.
E : Módulo de Young.
f (x, y) : Función de interacción.
I : Momento de inercia de la sección transversal de la barra.
$\underline{K}$: Matriz de rigidez de la barra.
$\underline{K}^*$: Matriz de rigidez, transformada por aparición de una rótula plástica.
L : Longitud de la barra.
M : Momento flector.
M_p : Momento plástico.
M_p^* : Diferencia $M_p - M_0$.
M_0 : Momento "isostático" en la sección de abscisa x_0 (momento flector en la hipótesis de estar la pieza simplemente apoyada en ambos extremos, sin momentos aplicados en los mismos, y supuestas actuantes las posibles cargas intermedias de la barra).
N : Esfuerzo axil.
N_E : Carga crítica de Euler de la barra biarticulada.
n : Cociente preflecha/longitud de la barra.
$\underline{p}$: Matriz columna, de esfuerzos de extremo de la barra.
$\underline{p}_E$: Esfuerzos de empotramiento perfecto de la barra.
$\underline{p}_E^*$: Esfuerzos de empotramiento perfecto, modificados por la aparición de una rótula plástica.
r : En valor absoluto, relación entre el esfuerzo axil, supuesto de compresión, y el axil crítico N_E.
r' : Idem, para esfuerzo axil de tracción.
s : Primera función de estabilidad.
t : Producto $\underline{a}^t \underline{b}$ $(= \underline{a}^t \underline{K} \underline{a})$.
u_1, u_2 : Desplazamientos longitudinales de los extremos de la barra.
v_1, v_2 : Desplazamientos transversales de los extremos de la barra.
x : Abscisa de la barra, en ejes locales de la misma $(0 \leqslant x \leqslant L)$.
x : Cociente γ_u/γ_c.
x_0 : Abscisa de la sección donde aparece una rótula plástica.
y : Cociente γ_u/γ_p.
α, α', β, β': Parámetros auxiliares para la formulación de las funciones de estabilidad de la barra.
γ : Coeficiente o factor de carga.
γ_c : Factor de carga que determina la pérdida del carácter definido, positivo, de la matriz de rigidez de la estructura, dentro de la teoría de 2° orden elástica (abreviadamente: "carga crítica").

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

γ_p : Factor de carga correspondiente al colapso, según la teoría elastoplástica de primer orden (abreviadamente: "carga plástica").

γ_R : Aproximación a γ_u, según la fórmula de Merchant-Rankine.

γ_u : Factor de carga correspondiente al colapso, según la teoría elastoplástica de segundo orden (abreviadamente: "carga última").

$\overline{\gamma}$: "Coeficiente de pandeo" (relación γ_u/γ_p).

$\overline{\gamma}_R$: Aproximación a $\overline{\gamma}$, según el criterio de Merchant-Rankine (cociente γ_R/γ_p).

$\overline{\gamma}'_R$: Coeficiente $\overline{\gamma}_R$ modificado.

Δ : Desplazamiento máximo o representativo de la estructura.

Δ_0 : Valor de Δ según la teoría lineal, para $\gamma = 1$.

η : Imperfección adimensional, generalizada, según Maquoi y Rondal.

ϵ : Error relativo $(\overline{\gamma} - \overline{\gamma}_R)/\overline{\gamma}$, en %.

φ_1, φ_2 : Giros de los extremos de la barra.

λ : Esbeltez de la barra biarticulada.

$\overline{\lambda}$: Esbeltez relativa, generalizada, de la estructura, $\overline{\lambda} = \sqrt{\dfrac{\overline{\gamma}_p}{\gamma_c}}$.

μ : Parámetro del diagrama de interacción.

μ : Parámetro auxiliar para la formulación de p_E^*.

ρ : Parámetro del diagrama de interacción.

θ : Giro de una rótula plástica, en una sección arbitraria de la barra.

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$: Funciones de estabilidad.

ANEJO 3: REFERENCIAS

[1] A.S.C.E.: "Structural Design of Tall Steel Buildings", Monograph on Planning and Design of Tall Steel Building, Volume SB, 1979.

[2] Convención Europea de la Construcción Metálica: "Manual on Stability of Steel Structures", 1976.

[3] Chajes, A.: "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall.

[4] Horne, M.R.: "Elastic-plastic failure loads of plane frames", Proc. R. Soc., 1963, 274 (A), 343.

[5] Horne, M.R.: "Plastic Theory of Structures", M.I.T. Press, 1971.

[6] Horne, M.R., Merchant, W.: "The Stability of Frames", Pergamon Press, 1965.

[7] Livesley, R.K.: "Métodos matriciales para cálculo de estructuras", Blume, 1970.

[8] Low, M.W.: "Some model tests on multi-storey rigid steel frames", Proc. Instn. Civ. Engrs., 1959, 13, 287.

[9] Majid, K.I.: "Non-Linear Structures", Butterworth, 1972.

[10] Massonnet, Ch., Save, M.: "Cálculo plástico de las construcciones", Ed. Montaner y Simon, Barcelona, 1966.

[11] Merchant, W.: "The Failure Load of Rigidly Jointed Frameworks as Influenced by Stability", Structural Engineer, 32, 185, 1954.

[12] Rankine, W.J.M.: "Useful Rules and Tables", London, 1866.

[13] Rondal, J., Maquoi, R.: "Formulations d'Ayrton-Perry pour le flambement des barres métalliques", Construction Métallique, C.T.I.C.M., nº 4, décembre, 1979.

[14] Sáez Benito, J.M.: "Cálculo matricial de estructuras", F. ed. de Ing. Naval, Madrid, 1975.

[15] Salem, A., Ph. D. Thesis, Manchester, 1958.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Manual H.P. 5-79 "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras"

Dentro de la serie de Manuales que, desde hace años, viene editando la Asociación Técnica Española del Pretensado, y en los que se recogen las recomendaciones relativas a las diferentes etapas del proceso general de ejecución de las construcciones pretensadas, se ha publicado el Manual H.P. 5-79 en el que, bajo el título "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras", se han recopilado todas aquellas normas que la práctica ha demostrado deben tenerse en cuenta para obtener una adecuada disposición de las armaduras en los elementos pretensados, tanto si se trata de armaduras pretesas como postesas, incluyéndose así mismo las armaduras pasivas que suelen acompañar a las activas.

Por la íntima relación existente entre tales armaduras y otra serie de dispositivos y piezas tales como los anclajes, empalmes, vainas, separadores, etc., se recogen también en este Manual las recomendaciones correspondientes a su colocación.

En todos los casos, se tratan por separado las fases de proyecto, ejecución y control.

El interés del tema elegido resulta evidente si se tiene en cuenta que el estado tensional creado por las armaduras activas en todo elemento pretensado, debe ser tal que permita a éste cumplir, con las necesarias garantías de seguridad y durabilidad, la función a que va destinado. Y como dicho estado tensional depende, no sólo de la magnitud sino también del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de pretensado introducidas, se comprende que la disposición de las armaduras en este tipo de piezas adquiere una importancia primordial; por lo que su colocación debe ser cuidadosamente realizada en obra.

A la consecución de este objetivo se estima que pueden contribuir, de modo importante, las recomendaciones de este Manual.

El Manual H.P. 5-79, con 87 páginas y varias figuras, está a la venta al precio de 300,- ptas el ejemplar (seis dólares USA para el extranjero). Para los Miembros de la ATEP se ha establecido el precio especial de 200,- ptas (cuatro dólares USA para el extranjero).

Manual H.P. 6-83 "Recomendaciones para la conservación de obras pretensadas"

Continuando con la serie de Manuales que esta Asociación viene publicando con las recomendaciones que se consideran idóneas para conseguir una adecuada realización de las construcciones pretensadas y su buen comportamiento a lo largo de su vida de servicio, se ha editado el Manual H.P. 6-83 en el que, bajo el título "Recomendaciones para la conservación de obras pretensadas", se recogen las directrices que deben seguirse para mantener en buen estado las estructuras pretensadas, salvando así las lagunas hasta ahora existentes en la normativa oficial en relación con este problema tan de actualidad y que tanto preocupa en todos los países.

Por otra parte, se ha estimado también interesante incluir en este Manual las oportunas recomendaciones para la mejor aplicación de la técnica del pretensado en la realización de reparaciones y refuerzos de estructuras.

Debe subrayarse que, en realidad, el título de esta publicación resulta algo restrictivo, puesto que los principios sobre conservación que en ella se establecen para las obras pretensadas son de aplicación mucho más amplia; casi podría asegurarse que son de aplicación general a todo tipo de construcciones.

El Manual H.P. 6-83, con 110 páginas y numerosas fotografías, figuras y tablas, está a la venta al precio de 600,- ptas el ejemplar (siete y medio dólares USA, para el extranjero). Para los Miembros de la ATEP se ha establecido el precio especial de 400,- ptas cada ejemplar (cinco dólares USA para el extranjero).

Los interesados en la adquisición de estos manuales deberán dirigir sus pedidos a:

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
Apartado 19.002
28080 MADRID
Telf.: 202 04 40.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Entorno del análisis no lineal de estructuras de hormigón pretensado

Juan Murcia
E.T.S.I.C.C.P.
U.P.C.

INTRODUCCION

Abordar el análisis de estructuras lineales o de barras de hormigón pretensado de manera general y rigurosa, en consecuencia, tanto en el ámbito de la no linealidad como en la amplitud de tal tipología (estructuras reticulares en general), no parece ser todavía algo trillado, cuando sí lo es bastante para otras estructuras.

Es posible que una de las razones profundas de ello resida en, como pasa en muchos otros campos de la actividad humana, la tendencia persistente a extrapolar lo conocido; en lo que nos atañe, el análisis de estructuras de un solo material (acero, por ejemplo, o, en abstracto, con un comportamiento ideal supuesto) y, sobre todo, ya en los materiales compuestos, las del propio hormigón armado.

Pero muchas veces la vía de la extrapolación inmediata no resulta fructífera. Es preciso profundizar en el nuevo campo y sacar conclusiones propias del mismo.

Con la técnica del hormigón pretensado (nos ceñiremos a la de armaduras tesas) parece que continuamente ocurre ésto. Aunque dicha técnica nació en contraposición al hormigón armado en aspectos importantes, no supuso un replanteamiento de muchos otros aspectos desde *bases nuevas;* o, al menos, este replanteamiento se ha venido haciendo parcialmente y a golpes, por aspectos separados, no globalmente. En el análisis estructural todavía no parece haberse realizado del todo (1); es cierto que la forma de cálculo, respecto a la utilizada en hormigón armado, es distinta; pero las bases, en buena medida, son las mismas.

Si se hubiese llevado de manera radical, en este campo, la idea de que estábamos ante un nuevo material estructural, separándose por completo del hormigón armado, posiblemente las cosas serían diferentes. Igual habría ocurrido tal vez, si se hubiera planteado la idea, casi contraria, de que el hormigón pretensado era algo en continuidad con el hormigón armado (hormigón y armaduras de acero), pero con el importantísimo y definitivo matiz de que este último podía ser considerado como un caso particular del hormigón pretensado, con $P = 0$ (10); con esta idea, no tenía sentido extrapolar mecánicamente: había que profundizar en los aspectos de la nueva técnica, replantear, concluir y, en todo caso, comprobar, para el caso particular del hormigón armado, perfectamente conocido. Muy

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

probablemente, no obstante, la línea original hubiese conducido, con el tiempo, a este segundo y tardío planteamiento, que si bien fue enunciado por obvio, hace mucho tiempo, no pasó de enunciado de algo que, siendo cierto, resultaba de buen tono académico. Así, podría pensarse que si una línea de pensamiento no ha sido lo suficientemente radical en relación a lo que su enunciado demandaba, la otra no ha sabido explotar la enorme radicalidad inmersa en su contenido; pero lo importante, más allá de consideraciones formales, aparentes paradojas o conjeturas, es la convicción de que no sólo ambas concepciones son compatibles sino que la segunda es una traducción o versión de la primera en un lenguaje más preciso. Con todo lo que esto lleva consigo.

En lo que sigue, se efectuará un estudio del análisis general instantáneo de las estructuras lineales de hormigón pretensado, en primer orden, mediante armaduras activas adherentes. Se incidirá especialmente en algunos aspectos importantes, como los relacionados con la existencia o no de adherencia entre el hormigón y las armaduras activas.

Se realizará, en primer lugar, un análisis somero de la sección, que resulta totalmente imprescindible, no solamente porque es un paso necesario para el análisis de la estructura, sino porque no resulta extrapolable (a no ser, mediante artificios que no son generales y que, a la larga, precisamente por suponer extrapolaciones, conviene abandonar) del realizado para el hormigón armado.

A continuación, se entrará en el análisis estructural, planteando su metodología general para el hormigón pretensado.

Finalmente, se apuntarán algunas conclusiones de cara a la práctica, haciendo referencia también a los aspectos diferidos del análisis, por retracción y fluencia del hormigón (*).

ANALISIS DE LAS SECCIONES

Proceso general

Recordemos brevemente cómo se aborda, de manera general, el análisis de una sección, lo que conduce a la obtención de relaciones esfuerzos-deformaciones de la misma, necesarias para el análisis de la estructura. Prescindiremos de la consideración de interacciones tales como flexión-cortante o flexión-torsión, no incluyendo más que deformaciones normales.

Es bien conocido que, con la hipótesis de deformación plana, para el caso general de sección en flexión recta, hay que estudiar las relaciones momento-axil -curvatura-elongación (M-N-c-ϵ), puesto que no sólo existen los evidentes acoplamientos momento-curvatura (M-c) y axil-elongación (N-ϵ) sino que también el esfuerzo axil puede influir en la curvatura y el momento en la elongación, habiendo por tanto lo que se entiende por acoplamientos cruzados (que no existen en el caso lineal).

Antes de seguir, ha de tenerse en cuenta la forma de las relaciones tenso-deformacionales de los materiales estructurales usuales ($\epsilon_m \rightarrow \sigma_m$ unívocas, pero $\sigma_m \rightarrow \epsilon_m$ no necesariamente) y considerar también que, en una sección, dadas sus deformaciones (c, ϵ), se conoce de forma inmediata (en términos geométricos) la deformación en cualquier punto de la misma; pero dados sus esfuerzos (M, N) no es inmediato conocer la distribución de tensiones.

Por ello, el proceso lógico que se debe seguir es el siguiente:

- Tomar un punto de referencia en la sección, para los momentos y las deformaciones c y ϵ.
- Dar sucesivos valores a las variables c y ϵ, cubriendo sus respectivos rangos de valores que interesan.

(*) La notación empleada es la habitual en la literatura y normativa sobre la materia. Las variables se representan en las figuras, en principio, con sus signos positivos (excepto en algún caso las tensiones, para las que se supone positiva la tracción).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

– Para un determinado par (c, ϵ), se conoce la ley de deformaciones en la sección, a partir de la cual, y mediante los diagramas $\sigma_m - \epsilon_m$ del material (o materiales), se puede pasar a conocer la ley de tensiones y, por integración, el correspondiente par (M, N).

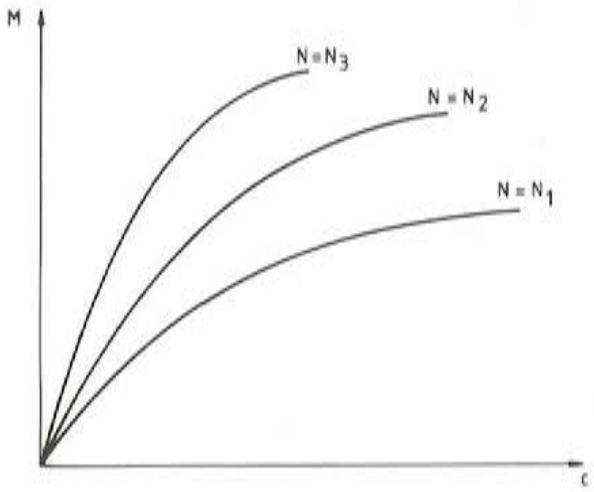
Evidentemente, este proceso significa tener que emplear un número de pares (c, ϵ) y calcular sus correspondientes (M, N). Teniendo presente que, en la práctica, el valor de los esfuerzos axiles en las piezas se puede mover dentro de un rango relativamente pequeño que, dada una estructura y sus acciones, puede determinarse a priori, y aún más si no se consideran en el análisis de dicha estructura las deformaciones axiales, resulta más práctico obtener la relación momento-axil-curvatura (que es una superficie en el correspondiente espacio de tres dimensiones), restringida a ese pequeño rango de valores del esfuerzo axil.

En este caso el proceso sería:

– Suponer diversos valores de N, dentro del rango considerado.

– Para un valor concreto de N, dar sucesivos valores a la variable c, de manera que para cada uno de ellos, se ajuste la ley de deformaciones añadiendo la deformación axial ϵ tal que, al pasar a tensiones mediante los diagramas $\sigma_m - \epsilon_m$, la resultante de las mismas en la sección sea precisamente N; calculando finalmente el momento M.

Se obtiene así una serie de relaciones M-c, para un conjunto de valores de N, que se pueden representar en forma de diagramas (curvas de nivel de la superficie M – N – c).



Por supuesto, si se desea, también se puede retener el valor de la deformación ϵ finalmente introducida que ajusta en cada caso el valor de la resultante de tensiones al axil N, asociándolo por tanto al correspondiente par (c, N) o, expresado gráficamente, al punto de abscisa c dentro de la curva para axil N; e, incluso, representar también las curvas de nivel de ϵ (correspondientes a la superficie M - c - ϵ).

Lo anterior se refiere, según se ha dicho, a la construcción de las relaciones esfuerzos-deformaciones de la sección, que nos interesan en el análisis y que, ya se ha visto, admiten una representación gráfica en dos dimensiones (o en tres, si se quisiera, con curvas alabeadas de nivel, sobre la superficie, para la cuarta variable) que nos suministra una información muy valiosa y global, precisamente por ser gráfica, del comportamiento mecánico-geométrico de la sección.

Pero es claro que, en el análisis de la estructura, no resulta siempre necesario tener que construir, ni toda la superficie (o diagrama, en su caso) ni mucho menos tener que hacer simplificaciones no considerando algún parámetro. Puede arbitrarse un proceso de análisis tal

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

que, para cada sección, se calcule en cada momento solo el par (M, N) para la situación (c, ϵ) concreta que se tiene (11), (13).

Por último, se ha de indicar que, por brevedad, no se entra en la consideración de otros factores, tales como los efectos no propiamente seccionales sino zonales; así, el que proporciona el hormigón traccionado entre fisuras ("tension stiffening"), cuya inclusión en los diagramas M-c es bien conocida.

Secciones de hormigón pretensado

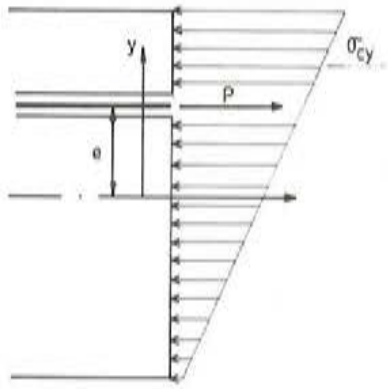
En el hormigón pretensado (con armaduras activas adherentes) el procedimiento general se aplica teniendo en cuenta que la deformación del acero de pretensado nunca coincide con la que tiene el hormigón en su misma fibra, ya que desde el principio, en el momento del tesado de la armadura, aparece una diferencia precisamente por el hecho de pretensar. Sea $\Delta \epsilon_p$ tal diferencia de deformaciones en el instante de establecer la adherencia entre acero y hormigón.

Esto hay que tenerlo en cuenta al construir la superficie M-N-c o los diagramas M-c, de manera que, si en la sección existe una curvatura c y una deformación axial ϵ, en el acero de pretensado es $\epsilon_p = \epsilon_{ce} + \Delta \epsilon_p$, siendo ϵ_{ce} la deformación que corresponde al hormigón en la fibra del acero, para dichas deformaciones en la sección (c y ϵ), y $\Delta \epsilon_p$ la diferencia inicial ya mencionada.

En el caso de *armaduras pretesas*, dicha diferencia es $\Delta\epsilon_p = \dfrac{P_b}{E_p \cdot A_p}$, siendo P_b, precisamente, la fuerza en bancada, puesto que las deformaciones del hormigón son nulas cuando aparece la adherencia al endurecer el hormigón.

En el caso de *armaduras postesas* (adherentes), tal diferencia hay que establecerla cuando se ha realizado el tesado e inmediatamente antes de realizar la inyección y, por tanto, sobre la sección neta de hormigón (incluidas en ella, homogeneizando, las armaduras pasivas y, si hace al caso, las activas adherentes de fases de pretensado anteriores).

Suponiendo, en principio, que existe linealidad de tensiones y que no se produce fisuración (trabaja toda la sección de hormigón), se tiene:



$$\sigma_{cy} = -\frac{P}{A_c} - \frac{P.e.y}{I_c}$$

$$\epsilon_{cy} = \frac{\sigma_{cy}}{E_c}$$

Por definición, $\Delta \epsilon_p = \epsilon_p - \epsilon_{ce}$ en dicho instante, por lo que

$$\Delta \epsilon_p = \frac{P}{A_p \cdot E_p} - \frac{1}{E_c} \cdot \left[-\frac{P}{A_c} - \frac{P \cdot e^2}{I_c}\right] =$$

$$= \frac{P}{A_p \cdot E_p} + \frac{P}{E_c} \cdot \left[\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c}\right] = \frac{P}{A_p \cdot E_p} \cdot \left[1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c}\right)\right]$$

donde $n = \dfrac{E_p}{E_c}$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Ahora bien, en la técnica de armaduras postesas, al pretensar pueden aparecer, en su caso, esfuerzos hiperestáticos. Por otra parte, además del pretensado, en esta etapa pueden existir otras acciones que generen esfuerzos sobre la sección (así, normalmente, es el peso propio, o parte del mismo, el que se moviliza automáticamente como acción en el momento de pretensar, al despegarse la pieza en cuestión, o parte de ella, de su encofrado; al mismo tiempo, pueden aparecer acciones correspondientes a otras cargas gravitatorias aplicadas sobre la estructura al pretensar). Todo ello, que corresponde a la etapa previa a la inyección, influye en el valor de $\Delta\epsilon_p$.

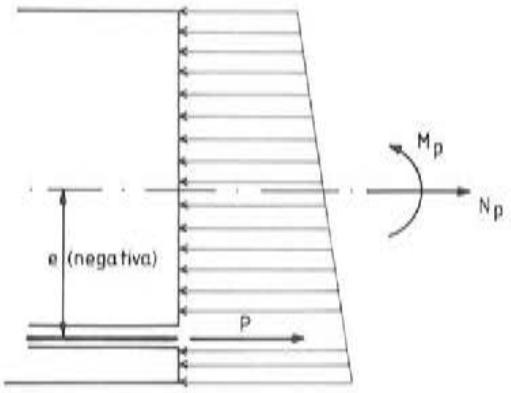
También es posible la existencia de acciones de tipo geométrico (deformaciones o desplazamientos), en esta etapa anterior a la inyección, cuyo efecto sobre la sección habrá de ser también tenido en cuenta, si ello incide en $\Delta\epsilon_p$.

Es importante remarcar aquí que, de resultas de todo lo anterior, puede no siempre resultar indiferente, para el valor de $\Delta\epsilon_p$, una secuencia temporal inyección-desencofrado o viceversa.

Es así que hay que considerar, en el cálculo de $\Delta\epsilon_p$, la solicitación debida a las acciones que con el pretensado son efectivas en esta etapa, incluyendo en ella, en su caso, los esfuerzos hiperestáticos de pretensado; naturalmente, habrá que tomar la existente en el instante mismo de la inyección, momento en que se determina $\Delta\epsilon_p$.

Supongamos que dicha solicitación es, para simplificar, un momento M_p y un esfuerzo axil N_p.

En estas condiciones, por supuesto, se suele reforzar la adecuación a la realidad, de la hipótesis de que no se produce fisuración y, por tanto, trabaja toda la sección. Ahora, siempre dentro de la hipótesis de tensiones lineales, se tiene:



$$\sigma_{cy} = -\frac{P}{A_c} - \frac{P \cdot e \cdot y}{I_c} + \frac{N_p}{A_c} - \frac{M_p \cdot y}{I_c}$$

$$\epsilon_{cy} = \frac{\sigma_{cy}}{E_c}$$

$$\Delta\epsilon_p = \epsilon_p - \epsilon_{ce}$$

$$\Delta\epsilon_p = \frac{P}{A_p \cdot E_p} - \frac{1}{E_c} \cdot \left[-\frac{P - N_p}{A_c} - \frac{P \cdot e^2 + M_p \cdot e}{I_c}\right] =$$

$$= \frac{P}{A_p \cdot E_p}\left\{1 + n \cdot A_p \left[\frac{1}{A_c}\left(1 - \frac{N_p}{P}\right) + \frac{e^2}{I_c}\left(1 + \frac{M_p}{P \cdot e}\right)\right]\right\}$$

Conviene advertir que, en la expresión anterior, $\frac{M_p}{P \cdot e}$ resulta normalmente negativo ya que M_p y $P \cdot e$ suelen ser momentos de signo contrario (por lo que al dar valores, si M_p es po-

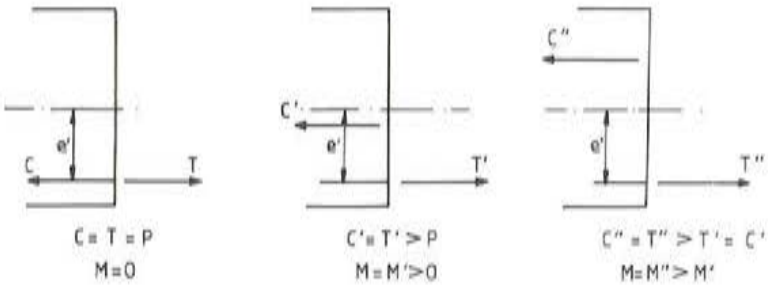
Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

sitivo, como en la figura, e es negativo; y viceversa). De ello que, para una misma sección e igual pretensado, $\Delta\epsilon_p$ disminuya al aumentar M_p, como es lógico en esas condiciones.

Veamos ahora lo que ocurre al construir el diagrama M-c de una sección de hormigón pretensado, en la que ya se ha establecido adherencia, de área A e inercia I (sección homogeneizada). Tomaremos como eje de referencia el baricentro de dicha sección.

Hay que indicar, previamente, que el pretensado (entendido como la tracción P de la armadura activa, que introduce, a la altura de la misma, una compresión P sobre el hormigón, esto es, en condiciones de isostatismo) origina un sistema de tensiones, en la sección que ahora se considera, cuya resultante es nula. Por ello, si al introducir una curvatura c aparece un momento M, ese momento no incluye el efecto debido al pretensado en configuración isostática sobre sección neta de hormigón (momento isostático de pretensado).

En efecto, si se supone N=0, al aumentar c y crecer el valor de M desde 0, representando las resultantes de las tensiones sobre el hormigón por C y en el acero por T, se tendría, internamente, lo siguiente:



correspondiendo, precisamente, la situación de pretensado (isostático) sin otras acciones a M=0.

Analicemos a continuación algunos puntos del diagrama. Continuaremos tomando, para simplificar, N=0.

Así, para c=0, suponiendo en principio ϵ=0, resulta que ϵ_{cy}=0 y, por tanto, $\epsilon_p = \Delta\epsilon_p$. De ello se sigue que N≠0; es preciso que exista una ϵ tal que $\epsilon.E_c.A = -\Delta\epsilon_p.E_p.A_p$; con lo que N será ya nulo. Se tiene así,

$$\epsilon_{cy} = \epsilon = -\frac{\Delta\epsilon_p.E_p.A_p}{E_c.A} = -\Delta\epsilon_p.n.\frac{A_p}{A}$$

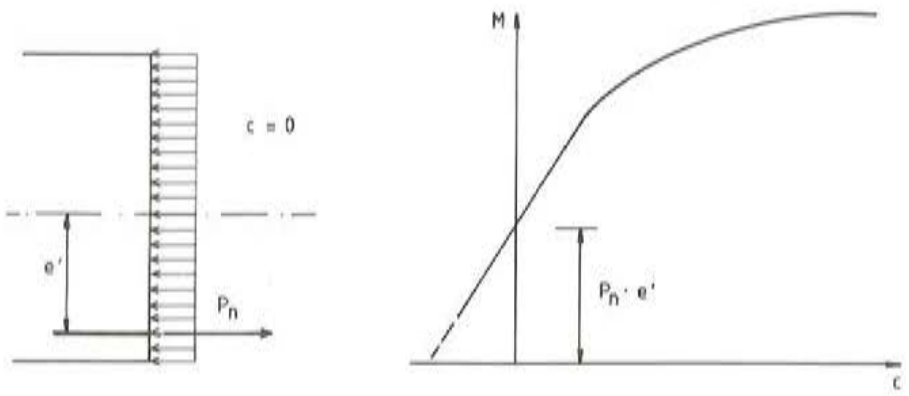
Es claro que las tensiones debidas a ϵ no producen momento respecto al baricentro de la sección; por lo que, si e' es la excentricidad de la armadura activa (e' ≠ e, ya que los baricentros de las secciones homogeneizada y neta no coinciden) resulta:

$$M = -\epsilon_p.E_p.A_p.e' = -\Delta\epsilon_p.E_p.A_p.e' \neq 0 \text{ (siempre que } e' \neq 0)$$

Por tanto, para c=0, M≠0; lo que indica que el diagrama M-c no pasa por el origen. Ello no tiene nada de extraño puesto que, por ejemplo, ya se ha visto que M=0 corresponde a la situación de pretensado (isostático) y, entonces, la curvatura nunca es nula (salvo si el pretensado está centrado sobre la sección).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Así, para una sección como la de la figura (e' negativo), el momento para c=0 es $M = -\Delta\epsilon_p . E_p . A_p . e' > 0$; siendo, evidentemente, $c < 0$ cuando M=0.

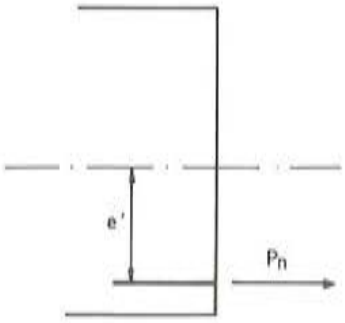


Si la armadura activa es *postesa*, y tomando ya valores absolutos para e y e', resulta:

$$M = \Delta\epsilon_p . E_p . A_p . e' = P\{1 + n . A_p [\frac{1}{A_c}(1 - \frac{N_p}{p}) + \frac{e^2}{I_c}(1 - \frac{M_p}{P . e})]\} . e' = P_n . e',$$

$$\text{siendo } P_n = P\{1 + n . A_p [\frac{1}{A_c}(1 - \frac{N_p}{P}) + \frac{e^2}{I_c}(1 - \frac{M_p}{P . e})]\}$$

La fuerza P_n se denomina *fuerza de neutralización*, porque aplicada como solicitación sobre la sección al nivel de la armadura activa, anula las tensiones sobre toda la sección de hormigón (no, claro está, en el acero de pretensado), lo cual es inmediato comprobar, visto todo lo que antecede (4). Para esta solicitación corresponde, entonces, una curvatura $c = 0$; pero también $\epsilon = 0$, ya que el momento $M = P_n \cdot e'$ es el mismo que en el caso anterior, si bien ahora existe además una tracción $N = P_n$.



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

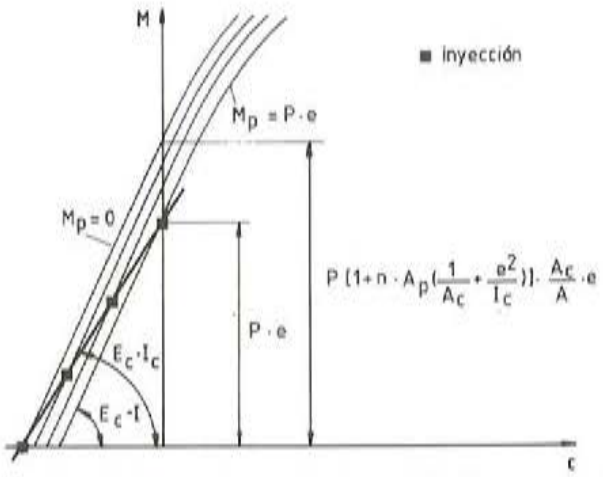
Si la armadura activa es *pretesa*, para c = 0, tomando el valor absoluto de e', se tiene:

$$M = \Delta \epsilon_p \cdot E_p \cdot A_p \cdot e' = P_b \cdot e'$$

lo que representa idéntico resultado, puesto que la fuerza de neutralización, P_n, es evidentemente, en este caso, la fuerza en bancada P_b.

Por supuesto, en el caso de armaduras postesas, la situación que corresponde al cambio de sección neta a sección homogeneizada, el instante de la inyección, se puede reflejar sobre el diagrama M-c de la sección (el correspondiente, entonces, a un esfuerzo axil de valor N_p) como el punto del mismo de ordenada M_p. Por cierto que, el diagrama M-c, al variar según sea el valor de $\Delta \epsilon_p$, depende tanto de M_p como de N_p, puesto que $\Delta \epsilon_p$ es función de ambos (9).

Examinemos brevemente los diagramas M-c que se obtienen para distintos valores de M_p, suponiendo, para simplificar, que $N_p = 0$, así como la situación sobre ellos del punto que representa, en cada caso, el instante de la inyección.



Al crecer M_p desde 0, los puntos representativos de la inyección se encuentran en las intersecciones de los diferentes diagramas M-c que se van obteniendo (con pendientes $E_c \cdot I$ en esa zona, si el comportamiento es lineal) con una recta de pendiente $E_c \cdot I_c$, algo menor.

En efecto,

- para $M_p = 0$, dicho punto corresponde a un momento $M = 0$ y a una curvatura $c = -\dfrac{P.e}{E_c \cdot I_c}$;

- para $M_p = P.e$, dicho punto corresponde a un momento $M = P.e$ y a una curvatura nula; eso significa que su correspondiente diagrama M-c corta precisamente al eje de momentos por el punto de ordenada $M = P \cdot e$, por lo que según lo visto anteriormente, deberá ser $P_n \cdot e' = P \cdot e$. En efecto, en este caso (2)

$$P_n \cdot e' = P \cdot (1 + n \frac{A_p}{A_c}) \cdot e' = P \cdot (1 + n \frac{A_p}{A_c}) \cdot e \cdot \frac{A_c}{A} = P \cdot \frac{A}{A_c} \cdot e \cdot \frac{A_c}{A} = P.e$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ANALISIS DE LA ESTRUCTURA

Proceso general

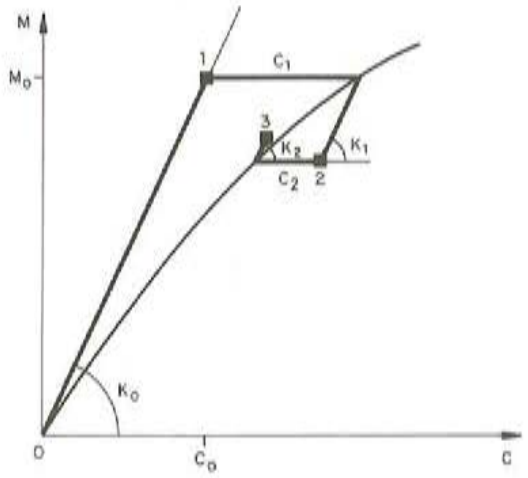
Al igual que en el análisis de las secciones, vamos a recordar brevemente cómo se puede abordar, de una forma general, el análisis no lineal en estas estructuras.

Consideremos una sección genérica de la estructura y trabajemos sobre su diagrama M-c (para el esfuerzo axil que se tenga, o suponga, en la misma). En estas condiciones es posible encontrar la solución mediante la superposición de soluciones (parciales) equilibradas y compatibles (obtenidas normalmente mediante análisis lineal) hasta llegar a un punto que, cumpliendo también estos requisitos, alcance el diagrama M-c de todas las secciones de la estructura, con lo que se cumplirán todas las condiciones del análisis (5).

Para ello puede procederse de diversas maneras, a partir de una solución inicial equilibrada y compatible, representada en tales coordenadas M-c, para esta sección genérica, por el punto 1. Este podría ser la solución de un análisis lineal, para una rigidez ficticia K_0, teóricamente con un valor cualquiera.

Existen diversas posibilidades, relativas a otros tantos procesos, de ir encontrando soluciones equilibradas y compatibles, tendentes siempre a acercarse al diagrama M-c o gráfica de comportamiento real de la sección. En todos los casos, como se verá, resulta un proceso iterativo.

Veamos una primera, que se denomina *método de las deformaciones impuestas* (7), (8).



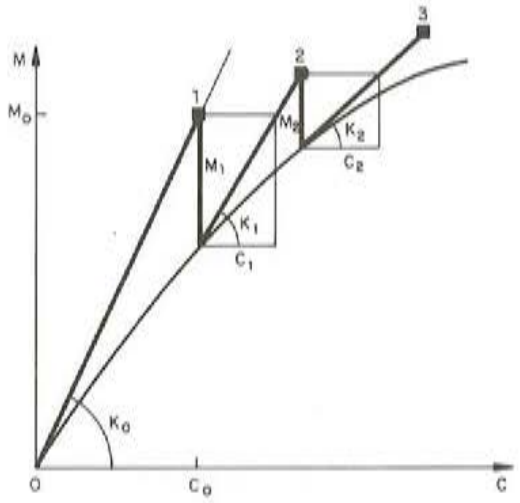
Consiste en, moviéndose en horizontal paralelamente al eje de curvaturas, hasta el punto de corte con el diagrama M-c, imponer una acción geométrica pura, correspondiente al sistema de curvaturas c_1 (según se representa en la figura para la sección genérica) en todas las secciones (puntos) de la estructura. No siendo, en general, compatible dicho sistema, se producirán unos esfuerzos (hiperestáticos) en la misma, cuyo cálculo se puede realizar suponiendo de nuevo comportamiento lineal, con una cierta rigidez K_1 (igual o distinta de K_0); llevando estos esfuerzos a partir del punto anterior sobre la curva, con la rigidez tomada, se alcanza el punto 2. Lo importante de este punto es que representa de nuevo una solución equilibrada y compatible de la estructura con sus acciones reales, ya que se ha superpuesto a la inicial 1 una solución autoequilibrada y compatible (5).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Desplazándose otra vez en horizontal desde el punto 2 hasta cortar de nuevo al diagrama M-c se introduce el sistema de curvaturas c_2 como acción en la estructura, cuya respuesta, calculándola mediante la rigidez K_2, en forma de un segmento con dicha pendiente, nos conduce al punto 3 que representa otra solución parcial equilibrada y compatible.

Y así sucesivamente hasta llegar a un punto similar sobre la curva, con lo que se cumplirán todas las condiciones del análisis, llegándose a la solución exacta.

Veamos un segundo camino, llamado método de *transferencia de esfuerzos o de esfuerzos impuestos* (11), (13).

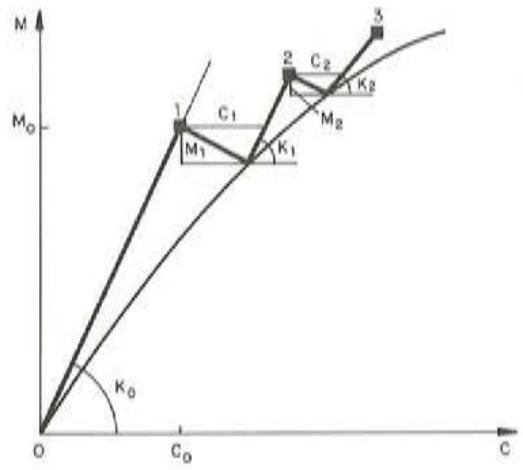


Consiste en, desplazándose en vertical paralelamente al eje de momentos, hasta el punto de corte con el diagrama M-c, modificar para cada sección, en el valor M_1, el sistema de momentos (según se muestra en la figura para la sección genérica) de la estructura. Al hacer ésto, en general, se pierde la situación de equilibrio que se da en el punto 1, manteniéndose la compatibilidad, ya que no se alteran las curvaturas. Una forma muy sencilla de restablecer el equilibrio es imponer en la estructura un sistema de momentos, de valor absoluto M_1 pero de signo contrario a los primeros; ello supone introducir en la estructura unas curvaturas correspondientes, c_1, cuyo valor viene fijado a través de la rigidez K_1 que se considere, llegándose así a un punto que es equilibrado de nuevo, pero en general no compatible; se producen unos esfuerzos (hiperestáticos) con sus correspondientes curvaturas ligadas a ellos a través de la rigidez supuesta K_1 (podría suponerse incluso otra rigidez distinta para calcular esta respuesta a las curvaturas c_1, como se vió en el método anterior); con lo que se llega al punto 2 donde, sin modificarse la situación de equilibrio (por el autoequilibrio de los hiperestáticos), se recupera la compatibilidad.

Desplazándose de nuevo en vertical desde el punto 2 hasta cortar a la curva, se vuelve a iniciar otro ciclo similar al anterior, hasta alcanzar finalmente un punto equilibrado y compatible sobre el diagrama M-c; lo que significa llegar a la solución exacta.

Una tercera posibilidad, que podría denominarse *método mixto*, se representa en la figura que aparece a continuación.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



Consiste en alcanzar la curva oblícuamente, con lo que se pierde, en general, tanto el equilibrio como la compatibilidad. Al restablecer el equilibrio imponiendo unos esfuerzos M_1 con rigideces K_1, se han introducido en total las curvaturas c_1, cuya compatibilización (que, como en el método anterior, puede hacerse con la rigidez K_1 o con otra), sin romper el equilibrio, hace alcanzar el punto 2, el cual representa una solución parcial equilibrada y compatible. Y así sucesivamente hasta llegar a una solución de este tipo sobre el diagrama M-c. En principio, la forma de acercarse al diagrama M-c desde las soluciones parciales, puede ser cualquiera; no obstante, parece razonable hacerlo a través de la normal a la curva desde cada uno de tales puntos.

Hagamos ahora algunos comentarios sobre los métodos anteriores.

En primer lugar, puede indicarse que todos ellos se reducen, finalmente, a introducir en la estructura sucesivos sistemas de curvatura c_i, a partir de soluciones parciales equilibradas y compatibles representadas por puntos i (al moverse en horizontal desde los mismos, no modificando la situación anterior de equilibrio, se procede únicamente a la compatibilización de las c_i). En definitiva, pueden ser considerados, en último término, como de *deformaciones impuestas*. Y ello, en el fondo, tampoco tiene nada de extraño. Debe advertirse que si se trabaja con esfuerzos y deformaciones de sección, como es ahora el caso, sólo las deformaciones tienen auténtico carácter de acciones sobre la estructura (5), (12).

Puede decirse, por tanto, que se trata de un mismo método con diferentes procesos de acercamiento al diagrama M-c real, a través de sucesivas soluciones parciales equilibradas y compatibles, para lo cual, como se sabe, existen infinitas posibilidades. Por supuesto, entonces, la elección de uno u otro proceso está ligada a factores operativos de tipo práctico.

En este sentido, por no extender más la exposición, no se ha entrado en la consideración de aspectos prácticos muy importantes, relativos, por ejemplo, a qué proceso seguir, a si se utilizan rigideces constantes o variables, diagramas M-c explícitos o no, y otros factores relevantes de cara a la eficacia y coste del análisis. Tampoco se han comentado los métodos concretos de cálculo aplicables en cada paso del proceso iterativo, si bien normalmente convendrá un método de rigidez, más general.

Es evidente que, cualquiera que fuese el proceso adoptado, habría que ir corrigiendo el diagrama M-c en la medida en que, en su caso, se modificara durante el mismo el esfuerzo axil inicialmente tomado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Es sabido que el pretensado, como acción sobre las estructuras, puede ser introducido en el análisis de éstas a través de sus cargas, o bien de sus esfuerzos isostáticos (1), (12). En cualquier caso, siempre es preciso conocer la fuerza P en la armadura activa o de pretensado.

Ya se ha indicado que, en las estructuras de hormigón pretensado con armaduras postesas, separadas por la discontinuidad que, en lo que respecta al análisis, representa la inyección con productos adherentes, existen dos situaciones claramente diferenciadas:

- Antes de inyectar, al no existir adherencia entre el acero y el hormigón, es preciso trabajar sobre sección neta de hormigón.
- Después de inyectar, y una vez establecida la adherencia, se ha de trabajar sobre sección hormigón-acero, lo que se suele hacer obteniendo la sección homogeneizada.

Estudiaremos, en lo que sigue, este caso, haciendo referencia, en su momento, al de armaduras pretesas, donde siempre existe adherencia a estos efectos.

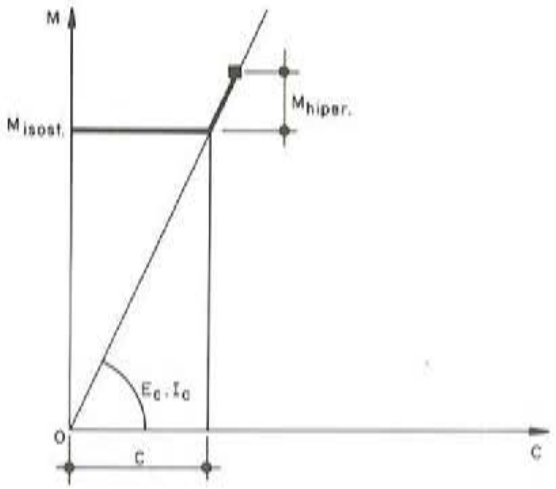
Otras peculiaridades, no todas intrínsecas al pretensado, pero sí frecuentemente asociadas al mismo, son las que se refieren a la necesidad de considerar distintas etapas en el cálculo, además de las dos que se acaban de indicar, debido a:

- Introducción del pretensado en diversas fases (para cada una de las cuales habría, en principio, que considerar las dos etapas anteriores).
- Modificación de la configuración de las estructuras durante la construcción (ligando, precisamente mediante pretensado, en muchas ocasiones, las diferentes partes), tanto transversal (sección) como longitudinalmente (estructura, en sentido restringido).

Etapa previa a la inyección

Dentro de esta etapa suele realizarse, en la práctica, un *análisis lineal,* el cual se ajusta bien, generalmente, a la situación real. Como ya se indicó, hay que tomar las rigideces correspondientes a las *secciones netas de hormigón.* Además, es posible calcular la estructura, separadamente, para el pretensado y para las demás acciones coexistentes en esta fase, y superponer los resultados.

Si el pretensado se calcula a *través de los esfuerzos,* el esquema de cálculo es, en la forma gráfica habitual en términos del diagrama M-c, el que se representa a continuación para una sección genérica: obtención de los esfuerzos totales de pretensado, mediante la compatibilización de las deformaciones de los isostáticos.

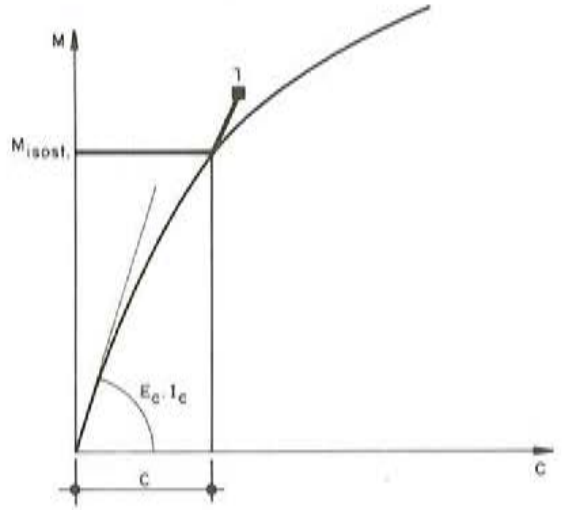


Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

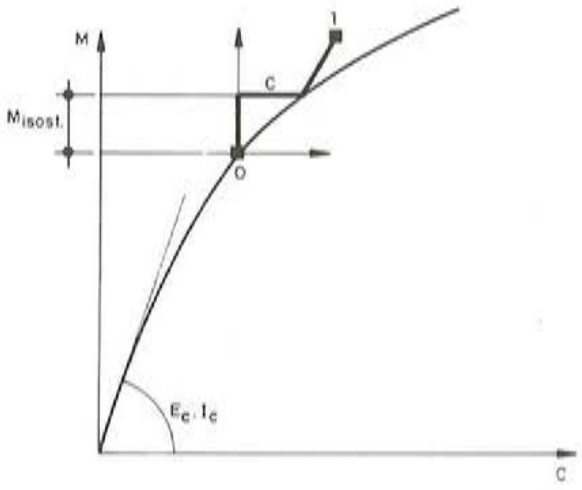
En el caso de que fuera necesario un *análisis no lineal* en esta etapa (lo que puede ocurrir, por ejemplo, si el hormigón está sometido a compresiones relativamente importantes), se procedería de la forma general ya mencionada, teniendo en cuenta que, no siendo válida la superposición, hay que considerar conjuntamente el análisis para las diferentes acciones, o bien, actuando mediante "fases de carga", tomar el origen del análisis para una acción sobre el resultado del efectuado para la acción anterior.

Estos dos caminos que se acaban de indicar vienen representados a continuación en sendos esquemas.

En el primer caso, M_{isost} representa una solución equilibrada para el conjunto de las acciones (sumando los isostáticos de pretensado a los similares para el resto de las acciones) (12). Compatibilizando sus curvaturas c, se llega a la solución parcial representada por el punto 1, a partir del cual se aplica el procedimiento general.



La segunda vía puede consistir, por ejemplo, en partir del punto 0, solución para las acciones distintas al pretensado y, tomándolo como origen, repetir el proceso de la figura anterior, después de introducir los esfuerzos isostáticos de pretensado, M_{isost} (en la figura, al ser genérica, no se tiene en cuenta que éstos, normalmente, serán de signo contrario a los iniciales del punto 0, tomados como positivos).



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Ya se aprecia que aquí, como se combinan en general momentos de distinto signo, puede darse el caso de tener que considerar el diagrama M-c en dos cuadrantes. Por otra parte, al no haber linealidad y existir otras acciones distintas del pretensado, no es posible, como se sabe, delimitar los esfuerzos hiperestáticos de pretensado.

Si el pretensado se calcula a *través de las cargas,* se emplea el proceso general de análisis.

De cualquier modo, sea lineal o no el análisis, se considere el pretensado a través de esfuerzos o de cargas, al final de esta etapa, justamente antes de la inyección, se habrá llegado a una situación en la sección que hay que calcular, reteniendo especialmente el valor de $\Delta \epsilon_p$, diferencia de deformaciones entre acero y hormigón en la fibra de la armadura activa. El valor de $\Delta\epsilon_p$, para el caso lineal, es el ya conocido del apartado anterior.

Será, precisamente, con el valor de $\Delta \epsilon_p$ calculado, con el que se procederá a construir el diagrama M-c de la sección definitiva (hormigón-acero) de la manera asimismo indicada en dicho apartado.

Finalmente, hay que indicar que no siempre es posible llegar a los valores de M_p y N_p, necesarios para la obtención de $\Delta \epsilon_p$, en la forma que subyace a su definición en el apartado que precede. En efecto, es preciso remarcar que no siempre se obtienen de forma explícita los esfuerzos hiperestáticos de pretensado (bien porque no tenga sentido, si no hay linealidad, al existir otras acciones, o bien porque se calcule a través de las cargas de pretensado); pero además, es posible, incluso en análisis lineal, que se calcule de forma tal que lleve a la obtención global de los esfuerzos de las distintas acciones, sin distinción por tanto.

En tales casos, evidentemente, los valores de M_p y N_p se pueden obtener a partir de los esfuerzos globales, M y N, desglosando de ellos los esfuerzos isostáticos de pretensado, inmediatos a partir de la fuerza P, la cual se conoce, y del trazado.

$$M_p = M - P \cdot e \cdot \cos \alpha$$
$$N_p = N + P \cdot \cos \alpha$$

Etapa posterior a la inyección

Como preámbulo, conviene quizá insistir en que los diagramas M-c para esta etapa y para la anterior, y en particular sus orígenes, no tienen nada que ver. Allí, el pretensado es una solicitación exterior; el diagrama M-c pasa por el origen. Ahora, el pretensado ya está introducido, a través de $\Delta \epsilon_p$, de manera interna en la sección, constituyendo solicitación exterior solamente los hiperestáticos, puesto que el efecto directo de la fuerza P (lo que *antes* eran esfuerzos isostáticos *sobre el hormigón*) se autoequilibra en el conjunto hormigón-acero que es la actual sección.

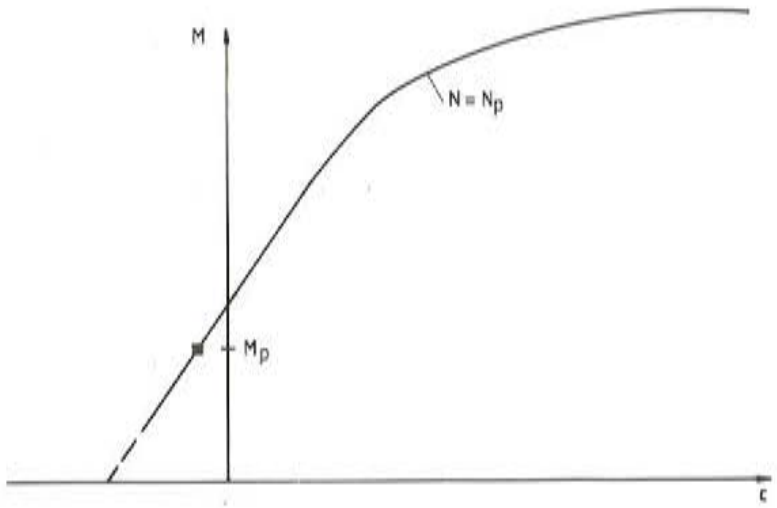
¿Qué punto o fibra de referencia debe tomarse para el diagrama M-c en esta etapa?

En el análisis de una estructura, tomar un punto o fibra de referencia en la sección genérica equivale a definir la directriz de las diferentes piezas o barras, sobre la cual se va a trabajar después longitudinalmente. El conjunto de esas directrices nos fija ya la geometría original de la estructura, lo que se refiere tanto a la de las propias barras como a la posición de los nudos. Por tanto, si se toman de hecho unas directrices para las piezas en una primera etapa del análisis (antes de la inyección) deberán mantenerse en las que siguen.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

En la práctica, se puede tomar como referencia el baricentro de la sección neta de hormigón o, lo que suele ser más cómodo y habitual (a base de introducir en la primera etapa, si no se hace la corrección, un cierto error, muy pequeño en general, pero que siempre se puede calibrar), el baricentro de la sección bruta de hormigón (no descontando los orificios correspondientes a los conductos de las armaduras activas postesas). Con la misma referencia, entonces, se construye el diagrama M-c para la segunda etapa.

En estas condiciones se aplica ya el procedimiento general de análisis no lineal, con los diagramas M-c obtenidos.



Al aplicar dicho procedimiento general de análisis en esta etapa, debe tomarse, como origen en cada sección, el punto que corresponde a la inyección; esto es, el punto del diagrama M-c (para el axil $N=N_p$) de ordenada M_p. En efecto, este punto representa una solución equilibrada y compatible de la estructura en el instante de la discontinuidad de secciones (neta → homogeneizada) y se encuentra sobre el diagrama M-c actual: es la solución, si no sobrevienen otras acciones. En consecuencia, se realiza el análisis de la estructura, para todas las acciones posteriores a la inyección, partiendo de dicho punto.

Veamos ahora lo que ocurre en el caso de *armaduras pretesas.*

Como existe adherencia siempre, es válido como referencia lo que se acaba de indicar, para la etapa posterior a la inyección, en el caso de postesas. Aunque, como ya se expuso, el valor de $\Delta \epsilon_p$ que se toma para la construcción del diagrama M-c, se deduce directamente de la fuerza de pretensado en bancada, P_b.

La relación existente entre la fuerza P_b y la fuerza P después de destesar, cuando la pieza queda pretensada, se deduce fácilmente de la expresión general que relaciona $\Delta \epsilon_p$ y P (actuando sólo el pretensado), vista en el apartado anterior:

$$\Delta \epsilon_p = \frac{P}{E_p \cdot A_p}\left[1 + n \cdot A_p\left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c}\right)\right]$$

Como

$$\Delta \epsilon_p = \frac{P_b}{E_p \cdot A_p},$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

resulta:

$$P_b = P\,[1 + n \cdot A_p\,(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})],$$

expresión que se hubiera podido también plantear directamente, sabiendo que aquí P_b es la fuerza de neutralización.

En este caso no existe problema de origen. Es preciso encontrar una solución equilibrada y compatible, sobre el diagrama M-c, empezando por compatibilizar el pretensado (representado por el punto de corte del diagrama con M=0, pero con c≠0). Ahora bien, en la práctica esta técnica corresponde a piezas isostáticas, que en todo caso entran posteriormente a formar parte de estructuras hiperestáticas; por tanto, en esta primera fase isostática, no será necesario compatibilizar nada, bastando con conocer las acciones actuantes, además del pretensado, y situar sobre los diagramas M-c los puntos cuyas ordenadas son sus correspondientes momentos.

Lo anterior da pie para entroncar con una problemática general, ya aludida más arriba, relativa a la consideración de otras diferentes etapas de cálculo, ligadas en general a un proceso evolutivo en la construcción.

Esta problemática podría dar lugar a una amplia casuística. Por ello, trataremos de indicar los aspectos generales más importantes. La clave está, al igual que ocurre al efectuarse la inyección con productos adherentes (operación que, a estos efectos, supone siempre, en tales estructuras, un mínimo proceso evolutivo en la construcción), en el adecuado tratamiento de las situaciones de discontinuidad.

Si la evolución corresponde a las secciones (pretensado e inyección por fases, secciones compuestas, etc.), es preciso determinar la situación tenso-deformacional en que queda la sección en cada fase, para construir a partir de ellas el diagrama M-c de la siguiente, fijando ya sobre éste dicha situación (en la discontinuidad), la cual se toma como origen del análisis en la nueva fase. Es conveniente recordar aquí que los diagramas M-c se deben construir, en general, partiendo de las deformaciones, por lo que no es ningún problema la evolución de la sección (en el caso de fases de pretensado e inyección, se toman sucesivos $\Delta\, e_p$; en el de secciones compuestas, se parte de la ley de deformaciones en el instante de la transición, para la zona de sección de la fase anterior, y una ley nula, para la zona nueva, manteniendo siempre la diferencia $\Delta\, e_c$ en la discontinuidad física).

Si la evolución corresponde a la estructura (voladizos sucesivos, prefabricación de piezas y continuidad in situ, etc.), es preciso determinar, sobre el diagrama M-c, el punto que marca la discontinuidad, tomándolo como origen para el análisis de la nueva estructura. Mientras ésta permanece isostática, todo se reduce de hecho a una simple superposición de esfuerzos (y de las deformaciones que resultan de los diagramas M-c).

Generalmente, en la realidad se producen ambas evoluciones, por lo que es preciso combinar los dos procesos de manera ordenada.

Resumen y simplificaciones

Para centrar ideas de cara a la aplicación de lo que antecede, no parece ocioso realizar un resumen del caso general con armaduras postesas analizado, sin considerar variaciones ni en sección ni en estructura.

– *Etapa previa a inyección:*

– Análisis de la estructura sobre secciones netas de hormigón, lineal normalmente

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

(rigideces $E_c.I_c$ y $E_c.A_c$), para pretensado y otras acciones de esta etapa (referidas todas al instante de la inyección).

- Determinación de M_p y N_p en cada sección:
  - esfuerzos hiperestáticos pretensado + esfuerzos otras acciones.
  - esfuerzos totales – esfuerzos isostáticos pretensado.
- Obtención de $\Delta\epsilon_p$ en función de P, M_p y N_p, en cada sección.

– *Etapa posterior a inyección:*

- Construcción del diagrama M-c (para $N=N_p$), teniendo en cuenta que $\epsilon_p = \epsilon_{cc} + \Delta\epsilon_p$, en cada sección (hormigón-acero).
- Análisis de la estructura, mediante el procedimiento general, en base a los anteriores diagramas M-c, tomando en ellos como origen los puntos de ordenada M_p, para las acciones de esta etapa.

Hablemos, por último y de forma somera, de posibles *simplificaciones aproximadas.* Evidentemente, la más clara podría consistir en considerar sólo una fase, suponiendo comportamiento único para las secciones (hormigón-acero). Así, los pasos podrían ser los siguientes:

- Obtención de los $\Delta\epsilon_p$ (en función de P únicamente).
- Construcción de los diagramas M-c, con los valores de $\Delta\epsilon_p$.
- Análisis de la estructura en base a los anteriores diagramas, mediante el procedimiento general, tomando en ellos como origen el punto de abscisa c=0. El pretensado se puede tratar bien a través de sus cargas (las que resultarían sobre la estructura de secciones netas de hormigón) o a través de sus esfuerzos, tomando éstos como exteriores a la sección, con valor $P_n \cdot e'$ (donde P_n, de compresión, se considera al igual que P, siempre positiva), y comenzando por compatibilizarlos. (Si se calcula a través de las cargas, es más correcto obtener éstas a partir del valor de P_n en lugar de P).

Lo que de hecho se realiza en el proceso anterior es tomar como referencia el estado de neutralización (4), artificio que, en este caso de sección no evolutiva, es posible; ello significa tomar, en el diagrama $\sigma_p - \epsilon_p$ del acero de pretensado, el origen en el punto de neutralización, esto es, en la ordenada $\sigma_p = \Delta\epsilon_p \cdot E_p = P_n/A_p$ (y, por tanto, abscisa $\epsilon_p = \Delta\epsilon_p$). De esta forma, automáticamente, se toma como origen del análisis el punto del diagrama M-c de abscisa c = 0, valor de la curvatura que, como se ha visto, corresponde a neutralización.

CONCLUSION

Se ha estudiado hasta aquí cómo es posible plantear el análisis general de las estructuras lineales de hormigón pretensado, en el ámbito instantáneo, en sus escalones de sección y de estructura. Por supuesto, particularizando para $P = 0$ ($\Delta\epsilon_p = 0$) se tiene un caso que corresponde al hormigón armado. No obstante, existe la cuestión de cómo abordar el análisis de forma global, esto es, considerando el ámbito diferido, en razón de la retracción y, sobre todo, la fluencia del hormigón, vertiente que en estas estructuras siempre debe ser tratada, aunque sea de forma muy simplificada.

De manera rigurosa, en un planteamiento general resulta prácticamente obligado realizar un proceso paso a paso en el tiempo, de análisis no lineal, cubriendo en principio desde $t=t_o$ hasta $t \to \infty$(13).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

No obstante, cabe obviar ésto en muchas ocasiones. En este sentido, debe recordarse que son las acciones con carácter de permanencia las que, en su caso, generan fluencia en el hormigón; si dichas acciones representan una parte de las totales de manera que no se producen en la estructura grandes tensiones (relativamente a f_c y f_y), se dan con buena aproximación las condiciones para la linealidad (instantánea y diferida), particularmente en estas estructuras de hormigón pretensado.

Así, en estas condiciones, parece muy razonable realizar las siguientes fases en el análisis:

- Análisis *no lineal instantáneo* inicial, $t=t_0$ (instante teórico que, en el caso del hormigón pretensado con armaduras postesas, sería el de la inyección), para la combinación o combinaciones más desfavorables de las acciones posibles en esa etapa inicial.
- Análisis *lineal diferido*, entre t_0 y $t \to \infty$, para las acciones con carácter de permanencia que, según las circunstancias, requerirá o no un proceso paso a paso en el tiempo (3).

Si las condiciones son cercanas a las de ciertos casos elementales (6), es posible obviar este proceso paso a paso, al igual evidentemente que siempre que la estructura sea isostática. En todo caso, este análisis puede quedar reducido, únicamente, al cálculo de las pérdidas diferidas de pretensado; lo que significa realizar un análisis más o menos simplificado de las secciones, sin entrar en el de la estructura.

- Análisis *no lineal instantáneo* final, $t \to \infty$ (eventualmente, algún otro instante que pueda interesar), considerando los resultados finales del análisis anterior ($t \to \infty$ o bien otro tiempo), para la combinación o combinaciones más desfavorables de las acciones posibles en esta etapa final.

Para calcular los diagramas M-c de esta última fase, habría que utilizar el valor de Δe_p calculado, en principio, con la expresión conocida en función de P, M_p y N_p, tomados con sus valores finales anteriores. Es evidente que, en realidad, el valor de Δe_p, precisamente por existir adherencia, no habrá cambiado desde la inyección; pero a efectos del análisis, y sabiendo que la sección neta de hormigón no se comporta en el tiempo como la de acero, la forma más sencilla de pasar del análisis diferido al instantáneo, teniendo en cuenta que debe haber continuidad entre ambos, consiste en suponer $M_p = M_f$ y $N_p = N_f$, valores finales de los esfuerzos para el primero. Por ello, y para considerar también los resultados de tipo geométrico, debe partirse siempre del punto de ordenada $M = M_f$ en este análisis instantáneo, introducir los incrementos de las acciones respecto al análisis diferido, realizar el proceso de análisis no lineal y superponer los resultados de las deformaciones sobre sus valores finales del análisis anterior; lo que equivale a fijar el diagrama M-c de manera que para $M = M_f$, $c = c_f$, valor final anterior de la curvatura.

Con independencia de los casos a los que se ajuste bien el proceso anterior de análisis, pueden existir otros en que las acciones con carácter de permanencia conduzcan a situaciones en las que las tensiones no permitan ya un análisis lineal diferido. Aquí será ya preciso abordar un análisis no lineal diferido, desde t_0 a $t \to \infty$, tal como se indicaba más arriba.

BIBLIOGRAFIA

1. MURCIA, J. Una introducción al análisis estructural del pretensado. Revista de Obras Públicas, nº 3117. Madrid, Enero 1975.
2. MURCIA, J. Tratamiento, en sección no fisurada, de la sección homogeneizada de hormigón y acero, a partir de la neta de hormigón. Hormigón y Acero, nº 114. Madrid, 1975.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3. MURCIA, J. Análisis en el tiempo de estructuras hiperestáticas de hormigón pretensado. Monografía n° 325 del Instituto Eduardo Torroja. C.S.I.C. Madrid, 1975.

4. MURCIA, J. Cálculo de la fuerza de neutralización en secciones de hormigón pretensado. Hormigón y Acero, n° 119-120. Madrid, 1976.

5. MURCIA, J. Reflexiones sobre las bases del análisis de estructuras. Revista de Obras Públicas, n° 3178. Madrid, 1979.

6. MURCIA, J. Estudio analítico, en el tiempo, de estructuras de hormigón armado y pretensado, por retracción y fluencia. Monografía n° 363 del Instituto Eduardo Torroja. C.S.I.C. Madrid, 1980.

7. AGUADO, A. & MURCIA, J. Análisis no lineal de estructuras, a partir de casos lineales, en deformaciones impuestas. Hormigón y Acero, n° 136. Madrid, 1980.

8. AGUADO, A. & MURCIA, J. Aplicación del método de las deformaciones impuestas para analizar el comportamiento no lineal de estructuras hiperestáticas de hormigón. Hormigón y Acero, n° 137. Madrid, 1980.

9. MURCIA J. & MARÍ, A. Diagramas M-c, de secciones de hormigón pretensado, a partir de la fuerza de neutralización P_n. Hormigón y Acero, n° 144. Madrid, 1982.

10. MURCIA, J. Planteamiento conjunto hormigón armado-hormigón pretensado y tendencias futuras de la normativa. Hormigón y Acero, n° 150. Madrid, 1984.

11. CAROL, I. & MURCIA, J. Transfer Moments Method for Nonlinear Analysis of Structural Bar Systems. Application to Reinforced Concrete Structures. Proceedings of the Internacional Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures. Split, September 1984.

12. MURCIA, J. Teoría y práctica, convención e historia. Los esfuerzos hiperestáticos de pretensado. Hormigón y Acero, n° 153. Madrid, 1984.

13. CAROL, I. Modelos de análisis no lineal en el tiempo de estructuras reticulares de hormigón. Revisión integrada y propuesta de un nuevo modelo global para material y estructura. Tesis Doctoral. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, Mayo 1985.

* * *

"Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación" 3ª Edición

Por J. CALAVERA
Prof. Dr. Ingeniero de Caminos

Aparece ahora la Tercera Edición de este libro, que ha estado agotado durante cuatro años, debido a otros trabajos de su Autor en otros temas.

La nueva edición, como las anteriores, constituye un tratado, sin duda el más completo existente, del tema de Forjados, tanto desde el punto de vista del Cálculo como desde los de Construcción, Control y Patología. Se contemplan los forjados tanto armados como pretensados, en sus versiones de prefabricados e in situ.

La edición ha supuesto una revisión completa del libro, siendo de destacar las ampliaciones realizadas en los temas de esfuerzo cortante, flechas, forjados sin vigas, transmisión de cargas en el cimbrado de plantas consecutivas, criterios de descinbrado, ejecución y patología.

Un tema que, aunque ya figuraba en ediciones anteriores, ha sido en ésta considerablemente ampliado, es el de los detalles constructivos, de los que se incluye una colección muy completa.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

VIII[a] Conferencia Europea de Ingeniería Sísmica

Durante los días 7 a 12 de setiembre del presente año 1986 se celebrará, en el Laboratorio Nacional de Ingeniería Civil de Lisboa, la VIII[a] Conferencia Europea de Ingeniería Sísmica organizada por la Asociación Europea de Ingeniería Sísmica y la Sociedad Portuguesa de Ingeniería Sísmica. Se espera que en la misma participen cerca de 40 países y se presenten más de 400 Comunicaciones distribuídas en los siguientes temas:

- Trabajos desarrollados para la unificación de las normas sísmicas de los distintos países europeos.
- Sismicidad, análisis de riesgo sísmico y fiabilidad.
- Vibraciones sísmicas de los terrenos.
- Valoración de los daños ocasionados por sismos anteriores.
- Microzonas, dinámica de los suelos e ingeniería de las cimentaciones.
- Respuesta de las estructuras.
- Ensayos sísmicos de modelos, componentes y estructuras a escala real.
- Proyecto y construcción de estructuras en zonas sísmicas.
- Construcciones rurales en zonas sísmicas.
- Fiabilidad de las infraestructuras básicas.
- Reparación y refuerzo de estructuras normales y monumentos.
- Optimización en ingeniería sísmica.
- Enseñanza de la ingeniería sísmica.
- Coordinación de la investigación.

Igualmente, en esta Conferencia se expondrán las actividades desarrolladas por los diferentes Grupos de Trabajo de la Asociación Europea de Ingeniería Sísmica (E.A.E.E.).

Para más información sobre esta Conferencia, dirigirse a:

Comisión Organizadora de la VIII[a] Conferencia Europea de Ingeniería Sísmica.
C/O Laboratorio Nacional de Ingeniería Civil.
Av. de Brasil, 101
1799 LISBOA CODEX
Tfno.: 88 21 31 (Lisboa)
Telex: 16670 LNEC P

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Métodos numéricos de cálculo dinámico de autovalores y autovectores en las vibraciones mecánicas de elementos resistentes

Manuel Vieco
Ingeniero Industrial

1. INTRODUCCION: METODOS NUMERICOS

Los métodos numéricos permiten el cálculo aproximado de *autovalores y autovectores* en sistemas de n grados de libertad. En general, los métodos no numéricos suponen largos y tediosos desarrollos matemáticos, especialmente cuando el número de grados de libertad es elevado. Hoy día, sin embargo, mediante la utilización de toda clase de ordenadores, la resolución de los n sistemas planteados, y por tanto la *cuantificación de autovalores y autovectores,* es inmediata. Modernamente, el empleo de ordenadores para el cálculo estructural, tanto dinámico como estático, es de uso corriente. No obstante ello, resulta de gran interés la exposición de métodos numéricos clásicos, por cuanto representan muchas veces en *sí propios,* sustanciales ventajas en la programación de los problemas que vayan a resolverse mediante calculadoras digitales.

Los métodos numéricos son "aproximados", pero puede controlarse en ellos el grado de aproximación formal deseada, con la suficiente precisión y celeridad, para que resulte de interés su extenso campo de aplicación. Por otra parte, no se puede olvidar que el concepto de "aproximación" a los valores exactos, implica en este caso una mera intención teóricamente rigorista, pero de relativo valor práctico. La mayoría de las veces, los valores teóricos obtenidos no sirven sino para ofrecer un orden de magnitud, una idea muy general del comportamiento dinámico de las estructuras sometidas a temblor. Los módulos de elasticidad de los hormigones, la ley de discretización de masas y sus cuantificaciones, el comportamiento ultrarrígido supuesto en dinteles y placas de entrepiso, la disposición de cargas en los forjados antes y durante el fenómeno sísmico, la plastificación de sus miembros durante la moción y un largo etcétera de condicionantes, hacen que el empleo de los métodos llamados "aproximados" esté más que justificado. No ha de olvidarse que ninguna solución puede ser más exacta de lo que son los datos confeccionados para el análisis del problema.

En modelos dinámicos teóricos, tales como los que se van a estudiar, el control del grado de aproximación formal a los valores exactos del problema, puede dar una clara idea de la validez de cuanto se ha expuesto.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

1.1. Iteración matricial

En los métodos matriciales empleados para la resolución del problema de vibraciones libres, se han aplicado a las masas, desplazamientos o fuerzas según los casos. El efecto en cadena que se origina con tal motivo en el sistema elástico, conduce al planteamiento de las ecuaciones de movimiento y a la consiguiente obtención de valores propios y vectores modales.

El método de iteración matricial se basa en el hecho de que todos los valores propios son positivos, reales y distintos:

$$\omega_1^r < \omega_2^r < \cdots < \omega_i^r < \cdots < \omega_n^r \qquad (r = 1, 2 \ldots n - \text{modos})$$
$$\varphi_1^r > \varphi_2^r > \cdots > \varphi_i^r > \cdots > \varphi_n^r$$

Para la aplicación del método puede partirse de las ecuaciones características del sistema, bajo cualquiera de sus formas. Sean, por ejemplo, estas formas:

$$[c]\ \{x\} = \frac{1}{\omega^2}\ \{x\} \Rightarrow [c]\ \{x\} = \varphi\ \{x\} \text{ o bien } \{x\} = \frac{1}{\varphi}\ [c]\ \{x\}$$
$$[H]\ \{x\} = \omega^2\ \{x\} \Rightarrow [H]\ \{x\} = \frac{1}{\varphi}\ \{x\} \text{ o bien } \{x\} = \varphi\ [H]\ \{x\} \qquad [1]$$

donde,

$[c]$ = matriz dinámica
$\{x\}$ = vector columna modal
$[H] = [c]^{-1}$ = matriz dinámica *inversa*

cualquiera de cuyas igualdades se sabe son satisfechas por todo *vector* propio, x^r, al que corresponda un valor propio, $\varphi^r = \frac{1}{(\omega^r)^2}$.

Pero mediante la iteración, lo que se *va buscando* es precisamente hallar los autovalores (φ, ω); por ello no entrarán nunca explícitamente éstos en las expresiones matriciales de partida, aunque evidentemente sí están implícitamente ocultos en $\{x\}$.

El proceso iterativo mediante el cual se "extrae" de $\{x\}$ el coeficiente que caracterice el autovalor buscado, puede fácilmente comprenderse si se razona el problema en sentido inverso. En efecto; se considera un *vector* cualquiera, $\{x\}^r$, al que se premultiplica por la matriz dinámica $[c]$. Evidentemente, resulta entonces una *transformación* lineal que caracteriza a otro *vector* lineal $\{x\}^s$ tal que:

$$[c]\ \{x\}^r = \{x\}^s$$

Ahora bien, si $\{x\}^r$ coincide con el *vector* propio $\{x\}$ dado por cualquiera de las expresiones [1], el vector $\{x\}^s$ será proporcional a dicho *autovector*. Pero si no se conocen los autovalores ni los autovectores, la determinación de $\{x\}^s$ puede hacerse mediante aproximaciones sucesivas, dando valores arbitrarios a $\{x\}^r$, hasta que $\{x\}^s$ arroje los mismos valores atribuidos a $\{x\}^r$, con lo cual se consigue una proporcionalidad entre ambos. En la *constante* de proporcionalidad que les *liga* entrará, naturalmente, el valor propio ω^2 ó φ, según sea la expresión de partida. $[c]$ recibirá, en este caso, el nombre de Matriz de Transformación.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El proceso iterativo (o de premultiplicación por [c]) se ve, por tanto, que *converge* al primer *vector* modal o al último, según interese en el planteamiento. Sin embargo, el grado de convergencia iterativo puede verse muy influenciado, cuando los valores de ω sean similares. La convergencia pierde normalmente entonces exactitud.

Los modos intermedios deben, consecutivamente, hallarse en base a su condición de ortogonalidad con los inmediatamente superiores e inferiores recién hallados. En efecto, una vez obtenida la configuración del primer modo (por ejemplo, reiterando la normalización del desplazamiento y el desarrollo de la matriz, hasta repetir el modo con aproximación suficiente), se puede hacer uso del principio de ortogonalidad:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i X_i^r X_i^s = 0$$

donde:

$r \neq s$ son los modos principales consecutivos
X_i amplitud del modo i.
m_i masas del sistema.

con el fin de obtener una nueva ecuación matricial, independiente, de cualquier modo de orden superior a los dos primeros. De nuevo, la iteración conducirá a modos superiores.

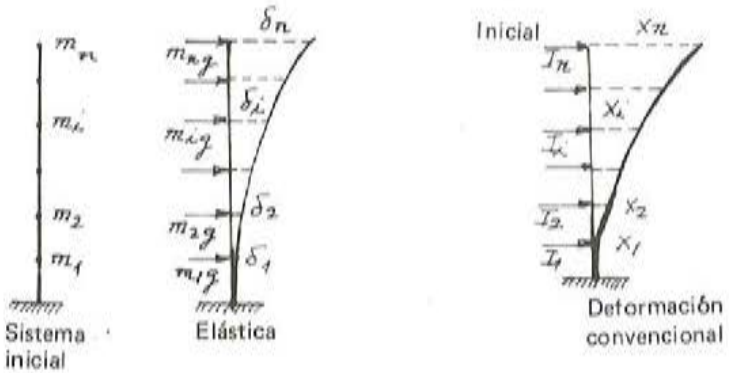
1.2. Método Vianello-Stodola

Se trata de un método iterativo cuyo proceso de aproximaciones sucesivas conduce al cálculo de autovalores y modos principales de sistemas no amortiguados, sin necesidad de recurrir a las ecuaciones generales de equilibrio. Supone, para ello, que la fuerza de inercia generada en cada nivel es máxima en el instante que m_i alcanza su máxima deflexión. Ello quiere decir que se interpreta la carga dinámica como la fuerza de inercia en cada nivel. Por tanto, cuando el sistema vibre según su modo fundamental, se comportará como si actuase bajo la acción exclusiva de sus fuerzas de inercia. Para un movimiento del tipo senoidal, las fuerzas estáticas equivalentes serán:

$$I_i = \omega^2 m_i \delta_i \quad (\delta = \text{deflexión estática}) \qquad [2]$$

Si el sistema inicial, se supone bajo la acción también estática de las fuerzas I_i aplicadas en los grados de libertad, la nueva configuración será tal que sus nuevas deflexiones, x_i, resultan ω^2 mayores que las primitivas. Comparando ambos resultados se puede establecer, para la pulsación propia fundamental, un valor tal que:

$$\omega^2 = \frac{\delta_i}{x_i} \qquad [3]$$



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Si se conociera la deformada correspondiente al modo principal, es evidente que su pulsación propia se obtendría directamente al aplicar la anterior relación sobre cualquiera de los grados de libertad del sistema, sin necesidad de iteración. Dado que en la mayoría de casos no ocurre así, se supone inicialmente la configuración de un modo principal, y se calculan sus correspondientes fuerzas de inercia y elásticas. Se determinan las deflexiones de m_i en base a estas fuerzas elásticas; deflexiones que se tomarán como punto de partida para la siguiente iteración. Si las deflexiones supuestas son diferentes de las correspondientes a un modo principal, serán diferentes a las supuestas en principio, y la iteración debe continuar hasta la convergencia de ambos valores, en cuyo momento finaliza. La configuración correspondiente coincidirá con un modo principal de vibración del sistema.

En la práctica, al comenzar el proceso, se desconoce la deformación dinámica máxima que el sistema es susceptible de experimentar. La deformada inicial de partida debe ser, en todo momento, compatible con las ligaduras del sistema.

Suele partirse por ello de la elástica del sistema; pero cuando el número de grados de libertad es elevado, el cálculo de la deformada estática presenta dificultades. Se recomienda, en todos los casos, el empleo de coeficientes de influencia para establecer los desplazamientos δ_i. El siguiente paso se obtendrá mediante el cálculo de la deflexión X_i producida por la carga convencional $m_i\delta_i$; comparando ambas deflexiones, se obtiene ω, con lo que finaliza la primera etapa.

La segunda etapa se comienza cargando el sistema con $m_i x_i'$, lo que produce otra nueva deflexión x_i''. Comparando las deflexiones de esta etapa (x_i'') y la anterior (x_i'), se obtendrá la pulsación propia, ω'', de esta segunda aproximación, y así sucesivamente.

Se continúa la iteración de etapas hasta que la ω de la etapa n coincida sensiblemente con la ω de la n-1. Esta aproximación se estima válida cuando las ω de dos etapas consecutivas no difieren en un valor superior al 5 por 100.

A medida que el proceso iterativo avanza, la deformada final coincidirá más exactamente con la configuración real de la forma propia del sistema. Si bien hasta ahora se ha hablado de deflexiones, lo cierto es que tal concepto se puede hacer extensivo a cualquier dimensión estática, tales como giros, esfuerzos *cortantes, axiles, momentos flectores,* etc.

Como se ha dicho, este método es aplicable para la obtención de cualquier modo principal de vibraciones de un sistema cualquiera. Todo sistema, incluso *continuo,* puede ser discretizado convenientemente, de forma que su resolución sea viable mediante este método. No obstante ello, y en general, la mayor parte de sus aplicaciones a sistemas con N grados de libertad, van encaminadas a obtener la configuración del modo fundamental. Para los *modos* superiores se aplica el Principio de Ortogonalidad, con lo que se van eliminando los inferiores. Una vez obtenido las x_i del 2° modo de vibración, las operaciones del cálculo para obtener y ajustar su correspondiente ω son idénticas a las empleadas en el 1°. Tiene, sin embargo, el inconveniente de que, a medida que el modo aumenta su orden, la convergencia es más lenta. Suele combinarse, por ello, en este caso, con otros métodos.

1.3. Método Holzer

El método Holzer puede ser demostrado aplicando el método de la Matriz de Rigidez. Se trata de un método tabular mediante cuya aplicación se obtienen las frecuencias angulares naturales de sistemas con o sin amortiguación. En contraste con el método de Stodola-Vianello, las aproximaciones sucesivas de cada etapa se hacen en base a las pulsaciones, y no a los corrimientos. Cada una de las ω supuestas, congruente con las condiciones de soporte del sistema, se cuantifica según el residuo de contorno obtenido en la etapa anterior.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

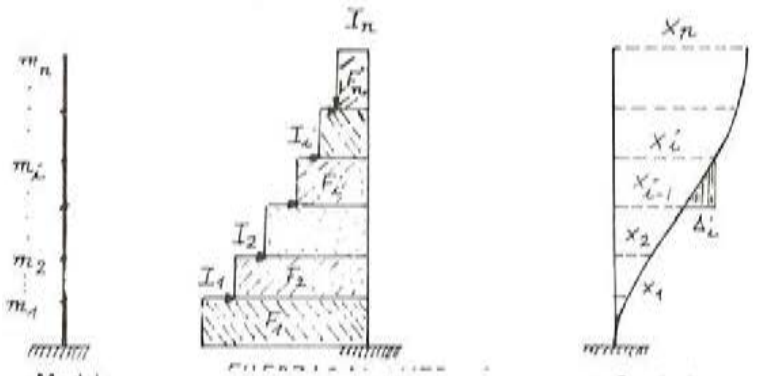
Presenta, respecto a los métodos de iteración, la ventaja de obtener directamente las ω de los modos, de forma tal que cada etapa aproximativa de ω resulta independiente de las demás. De esta manera, no se arrastra a la etapa siguiente cualquier posible error cometido en el proceso.

Las expresiones generales o fórmulas de recurrencia que se obtienen por el presente método, dependen de las condiciones de contorno del modelo elástico en cuestión. Existirán, por consiguiente, tantas fórmulas de recurrencia como modelos dinámicos equivalentes se presenten. En la práctica de cálculo sismorresistente, todas las situaciones pueden encuadrarse en uno de los tres casos generales siguientes:

- sistemas con dos extremos fijos.
- sistemas con un extremo fijo y otro libre.
- sistemas con dos extremos libres.

Los sistemas reales que se presentan en la práctica, pueden identificarse, bien en sus partes o en su conjunto, con cualquiera de los casos citados. En general, los dos primeros encuentran su réplica real en estructuras u órganos estructurales sometidos a solicitación dinámica, vertical u horizontal, (vigas, voladizos, chimeneas, pasarelas, puentes, edificios, etc.). El tercer caso es propio de sistemas sometidos a solicitación dinámica horizontal (cimentaciones superficiales, estructuras articuladas por niveles, etc.).

A continuación se estudia, analíticamente, la fórmula de recurrencia para sistemas con un extremo fijo y otro libre (tipo voladizo) que en sismorresistencia presenta, quizás, el mayor número de casos.



Sea el modelo dinámico representado en la figura adjunta. Durante las oscilaciones experimentadas por el sistema elástico bajo cualquiera de sus formas principales, se producen en sus niveles ciertos desplazamientos de la forma $= x_i = A_i \operatorname{sen} \omega t$. Si se carga cada nivel con las correspondientes fuerzas máximas en ellos desarrolladas, ya se ha visto que el corrimiento resultante puede ser igual a la amplitud dinámica del sistema en vibración. La relación entre dos desplazamientos máximos sucesivos será, por tanto:

$$\Delta_i = \frac{F_i}{K_i}$$

donde:

F_i Solicitación de nivel.

K_i Constante de resorte relativa, o rigidez relativa, entre dos niveles consecutivos. Equivale a la fuerza convencional que, aplicada según la dirección del correspondiente grado de libertad en el nivel *i*, produce en dicho nivel un desplazamiento unitario.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El valor del desplazamiento en un nivel cualquiera, se puede obtener a partir del acaecido en el nivel anterior (o siguiente), y la relación elástica que ligue el desplazamiento relativo de ambos niveles. La fórmula de recurrencia obtenida en este caso será, por tanto:

$$x'_{i-1} = x'_i - \frac{\omega^2}{K_i} \sum_i^n m_i x'_i \qquad [4]$$

Análogamente, para sistemas con ambos extremos fijos, sería:

$$x'_{i-1} = x'_i + \frac{1}{K_i} [K_i x'_i - \omega^2 \sum_i^n m_i x'_i]$$

y para sistemas con ambos extremos libres.

$$x'_{i-1} = x'_i - \frac{\omega^2}{K_i} \sum_i^n m_i x'_i$$

donde:

x_i = desplazamiento o deflexión en el nivel *i*.
ω = pulsación propia.
m_i = masa individual de nivel.
K_i = constante de resorte (Rigidez) de nivel.

Análogamente se podía haber argumentado en el caso de sistemas con ambos extremos fijos o libres.

Mediante este tipo de fórmulas de recurrencia, pueden calcularse, por aproximaciones sucesivas, la pulsación y forma propias de cualquier modo de vibración. Si se considera $X'_n = 1$ y diferentes valores para ω, se pueden obtener los corrimientos en todos los niveles, para cada pulsación considerada.

En la práctica, el método se aplica paso a paso, de acuerdo con las premisas establecidas. En efecto: para un ω cualquiera, supuesto en un primer tanteo, y comenzando por el nivel *n*, se asigna a este desplazamiento un valor, $X'_n = 1$, que equivale a suponer, en dicho punto, el corrimiento relativo del mismo ($-X'_n = \frac{X_{n-1}}{X_n}$). A partir de dichos valores (ω, $X'_n = 1$) se van hallando, sucesivamente, la máxima fuerza de inercia que corresponde al desplazamiento y pulsación supuestos, así como sus correspondientes solicitación de nivel y corrimiento del grado de libertad. Este corrimiento n-simo, juntamente con la solicitación de nivel correspondiente al n-simo grado, serán los datos que requiere la fórmula de recurrencia para fijar el corrimiento relativo del nivel yuxtapuesto.

Una vez calculado el corrimiento de este segundo nivel inmediato, el proceso se repite. La mecánica del proceso se tabula para los *n* grados de libertad, de acuerdo con el plan previsto, análogo para los sucesivos tanteos.

En sistemas con un extremo fijo y el otro libre, la deflexión final deducida para la base, ha de ser $X'_0 = 0$. Evidentemente, en su punto de arranque el sistema no puede experimentar corrimiento alguno. Es este un dato valioso, por cuanto en el momento que tal *precisión* se cumpla, es señal evidente que la ω elegida coincide con una de las pulsaciones propias del sistema oscilante.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

En sistemas con ambos extremos fijos, tal condición ha de cumplirse en los dos nudos extremos ($X'_n = 0$, $X'_0 = 0$). De esta forma, la circunstancia que acuse tal particularidad, es indicativa de que la ω tanteada es precisamente una de las ω propias del sistema. En el caso de sistemas con los dos extremos libres, la condición de coincidencia entre la ω real y la supuesta se establece para $\Sigma I = 0$. Los demás valores (X_0, I_0) *representarán*, en la sucesión de casos tanteados, los valores residuales de X'_0 ó I'_0, en función de una ω no representativa de autovalor.

Graficando por puntos la función $X'_0 = f(\omega)$ o bien $I'_0 = f'(\omega)$, las n intersecciones de la curva representativa, con el eje de abcisas, cuantifican otras tantas pulsaciones. Estas cuantificaciones de ω así halladas, representan los autovalores de los modos naturales de vibración. Llevando los autovalores ω a las fórmulas de recurrencia, se obtendrán finalmente los *autovectores*.

1.4. Método de Rayleigh

La Ley de la conservación de la energía, aplicada al caso de vibraciones, es la base del presente método cuya principal aplicación se centra en el cálculo de la pulsación propia fundamental, de sistemas con número finito o infinito de grados de libertad.

El fenómeno dinámico de vaivén a uno y otro *lados* de su posición estática de equilibrio, hace de la energía potencial un máximo (velocidad nula) cuando el sistema alcanza su máxima deformada; en tanto que la energía cinética *máxima* (máxima velocidad) será alcanzada a su paso por la posición estática (desplazamiento nulo). En el primer caso (energía potencial máxima), la energía cinética es nula; en el segundo (energía cinética máxima), es nula la energía potencial. Según Rayleigh, el sistema básico es conservativo (sin rozamiento) y en consecuencia:

$$E_c + E_p = E_{TOTAL}$$

La transformación continua de energía cinética en potencial, hace válida, en los casos límites planteados, la presente igualdad, de forma que al anularse alternativamente una de las dos energías se cumplen, evidentemente, para ellos, que:

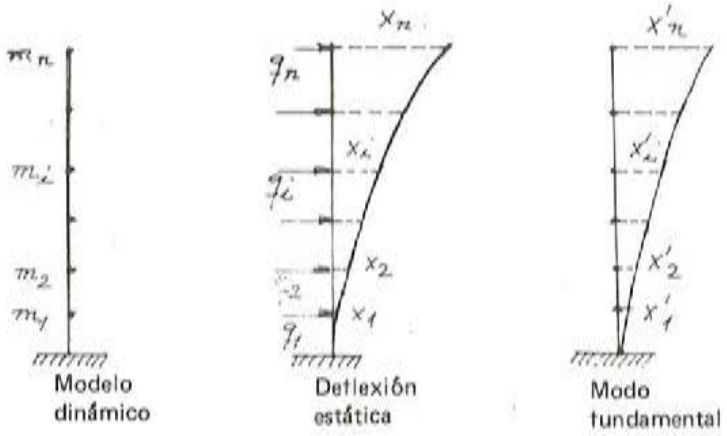
$$[E_{cin}]_{máx} = [E_{pot}]_{máx} = E_{TOTAL}$$

Para determinar E_{cin} y E_{pot} es preciso suponer, en el modelo dinámico, una determinada elástica. Esta configuración ha de ser congruente con las ligaduras del sistema (condiciones de contorno). Si la deformada supuesta coincide con la forma real del modo principal de vibración, la ω_1 obtenida será exacta. Sin embargo, en la práctica del método, no se conoce previamente la configuración dinámica real. Una aproximación satisfactoria de partida podría ser la obtenida a partir de su deformada estática. Evidentemente, cuanto más próxima sea esta deflexión a la dinámica, tanto más próximo será el valor de ω calculado, al real.

En estas condiciones, suponiendo el modelo dinámico representado en la figura adjunta, si se cargan con $q_i = g \cdot m_i$ los niveles del sistema en la dirección de sus grados de libertad (tipo ménsula), se obtendrá una elástica, $y = f(x)$, cuyos corrimientos de nivel serán tales que $X_1, X_2 \ldots X_i \ldots X_n$.

Estos valores son evidentemente distintos de los corrimientos dinámicos máximos, experimentados por el sistema bajo su modo fundamental de vibración: $X'_1, X'_2 \ldots X'_i \ldots X'_n$ cuya deformada será $Y' = f(X')$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



Igualando las energías potencial y cinética a partir de los corrimientos estáticos, se cumple que para todo desplazamiento de nivel tal que $x_i = x_i \cdot \text{sen}\ \omega t$, el valor de la pulsación propia viene dado por:

$$\omega_R^2 = g \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \dot{x}_i^2} \qquad [5]$$

siendo:

ω_R = pulsación propia fundamental de Rayleigh.
m_i = masas específicas de nivel.
x_i = corrimiento estático equivalente de nivel.
$\dot{x}_i$ = velocidad en los *nudos*
g = constante de la gravedad.

Partiendo del valor de referencia E'_{cin} (para $\omega = 1$) de la energía cinética, la expresión anterior tomará la forma:

$$\omega_R^2 = \frac{[E_{pot}]_{máx}}{[E_{cin}]_{máx}}$$

Si cada *vector* propio fundamental, X'_i, difiere una cierta cantidad I de la correspondiente deflexión estática, X_i, el autovalor ω_R tendrá un error de orden II. El error de partida (I) puede ser, teóricamente, por exceso o defecto.

En la práctica sismorresistente, el error siempre será por defecto, en base a una aceleración horizontal fracción de la de gravedad (1 — 10 por 100), pese a que la rigidez instantánea es menor que la diferida (E estático $\simeq$ 1,2 E dinámico) a iguales *condicionantes formales*. Para hacer coincidir la deformada estática y dinámica, será preciso introducir una *ligadura* suplementaria que evite el exceso de corrimiento lateral del sistema. Este artificio equivale a una *rigidización* del modelo dinámico, cuya consecuencia es un aumento del *autovalor* calculado, sobre el real.

Es decir:

$$\omega_R > \omega_{exacta}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Desde el punto de vista práctico, el error cometido no suele superar el 5 por 100 de la pulsación exacta; por cuya razón puede admitirse la aproximación sin reservas, a la vez que su cuantificación marca un *techo* para la frecuencia angular fundamental del sistema.

1.5. Método Dunkerley

Permite este método determinar la pulsación propia fundamental, en sistemas finitos con n grados de libertad, mediante el establecimiento de una fórmula de recurrencia. El valor de ω obtenido es aproximado e inferior al exacto, acercándose tanto más a la pulsación real, cuanto mayor sea el valor de las pulsaciones propias de orden superior respecto del primero.

Para hallar la fórmula de recurrencia, se parte de la equiparación entre la forma exacta y la razonada por Dunkerley. En la primera de ellas, se sabe que la ecuación característica, expresada en su conocida forma polinomial, da para el coeficiente de φ^{n-1} el valor:

$$-a_1 = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots \frac{1}{\omega_i^2} + \cdots \frac{1}{\omega_n^2} \qquad [6]$$

donde ω_1, ω_2 ... ω_i ... ω_n representan las pulsaciones reales (exactas) del sistema con n grados de libertad. Pero si se considera que las pulsaciones propias de orden superior al primero son mucho mayores que ω_1, se podrá poner de, acuerdo con Dunkerley, que:

$$-a_1 \simeq \frac{1}{\omega_D^2}$$

de donde, evidentemente, se deduce que ω Dunkerley $< \omega_1$, exacta.

Por otra parte, si se desarrollase el determinante $\Delta(\varphi) = 0$, expresado en función de los coeficientes de influencia, δ_{ij}, se obtendría, para el coeficiente de φ^{n-1} el valor:

$$-a_1 = m_1\,\delta_{11} + m_2\,\delta_{22} + \cdots + m_i\,\delta_{ii} + \cdots m_n\,\delta_{nn}$$

de forma que, comparando la expresión de Dunkerley con ésta, se obtendría finalmente la fórmual de recurrencia:

$$\omega_D = \sqrt{\frac{g}{\sum_i^n x_i}} \qquad [7]$$

donde:

ω_D = pulsación propia de Dunkerley.
g = aceleración de la gravedad.
x_i = desplazamientos estáticos de nivel.

Para sistemas con un solo grado de libertad:

$$\omega_{11}^2 = \frac{g}{X_1}, \qquad \omega_{22}^2 = \frac{g}{X_2}, \qquad \omega_{nn}^2 = \frac{g}{X_n}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

siendo ω_{ii}, en general, la pulsación propia que posee el sistema real cuando del modelo dinámico correspondiente quedan suprimidas todas las masas excepto la m_i.

Evidentemente, si $\omega_2 \gg \omega_1$, crece el grado de aproximación, siendo precisamente entonces cuando resulta decisiva la importancia del modo fundamental. En los casos normales de edificación, el error cometido al aplicar el presente método suele estar comprendido entre el 10 y el 25 por 100.

En contraste con el método de Rayleigh, ω_D establece un límite inferior para la pulsación fundamental, de tal forma que:

$$\omega_D < \omega_{exacta} < \omega_R$$

1.6. Método de Geiger

En caso de estructuras tipo *ménsula* es evidente que en la fórmula de Dunkerley, la expresión $\sum_1^n X_i$ representará el máximo desplazamiento producido por la acción lateral de las fuerzas gravitacionales. Bajo este supuesto, Geiger propuso la fórmula:

$$\omega_G = \sqrt{\frac{g}{X_{máx}}}$$

donde:

ω_G = pulsación propia de Geiger.
g = aceleración de la gravedad.
$X_{máx}$ = corrimiento máximo, o deflexión en el extremo de la ménsula.

El período fundamental será entonces:

$$T_G = 0{,}2 \sqrt{X_{máx}}$$

Se trata de fórmulas de aproximación, solamente válidas en tanteos previos.

BIBLIOGRAFIA

1. Ramón Moliner, P. Vibraciones. Departamento de Publicaciones. E.T.S.I.I. Barcelona.
2. Domínguez Abascal, J. Vibraciones mecánicas. Departamento de Publicaciones. E.T.S.I.I. Sevilla.
3. Lafita Babio, F. Introducción a la teoría de vibraciones mecánicas. Editorial Labor, S.A.
4. Den Hartog, J.P. Mecánica de las vibraciones. C.E.C.S.A.
5. Nielsen, N. Dynamic response of multistory buildings. California Institute of Technology. Pasadena.
6. Rocard, Y. Dynamique generale des vibrations. Masson et Cie. Paris.
7. Church, A. Mechanical vibrations. John Wiley and Sons. New York.
8. Clough, R.W. Dynamic effects of earthquakes . Transactions of the American Society of Civil Engineers.
9. Clough, R.W. Dynamics of structures. International student edition.
10. Housner, G.W. Mecanica aplicada y dinámica. CECSA.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Comparación de diversos sistemas de cálculo de las longitudes de anclaje de barras de acero corrugadas, en hormigón

Fernando Rodríguez López
Jaime Fernández Gómez
Ingenieros de Caminos C. y P.
Cátedra de Edificación y Prefabricación de la E.T.S.I.C.C.P. de Madrid

0. INTRODUCCION

El cálculo de la longitud necesaria de un anclaje, responde a una formulación matemática sencilla, si se admite la hipótesis de que las tensiones de adherencia movilizadas son constantes. La combinación de lo anterior con el estudio experimental del fenómeno, da origen a la formulación que en la actualidad predomina en las Normativas de cálculo de diferentes países. Está claro que un método o unos valores numéricos, pueden resultar válidos para un país y no para otros (el acero y hormigón que se emplean son un poco diferentes según el país de que se trate); no obstante, vamos a efectuar una comparación entre las formulaciones más importantes para el cálculo de longitudes de anclaje en prolongación recta, para barras de acero laminadas de alta adherencia, con el fin de que el técnico tenga más herramientas a la hora de efectuar su trabajo.

1. LONGITUD BASICA DE ANCLAJE

1.1. Concepto

Entendemos por longitud básica de anclaje aquélla que responde al caso de una barra sometida a tracción, a su límite elástico de cálculo, y situada en condiciones de buena adherencia.

En general, las normativas suelen recoger esta longitud como la principal de cálculo, afectándola de coeficientes según nos apartemos de las condiciones en que se ha definido.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

1.2. Tratamiento según CEB-FIP 1978

El concepto de longitud básica de anclaje, para este Código, es el mismo que figura en los comentarios de las Normas Españolas. La define a partir de la consideración de equilibrio de la barra embebida en el hormigón, llegando a una expresión:

$$\ell_b = \frac{\phi}{4} \frac{f_{yd}}{f_{bd}}$$

donde f_{bd} es el valor límite de la tensión de adherencia, cuyo valor resulta:

– Barras lisas:

$$f_{bd} = \frac{1,14}{\gamma_c} \sqrt{f_{ck}} \text{ , en Kp/cm}^2$$

– Barras de alta adherencia:

$$f_{bd} = \frac{2,25\, f_{ctk\ 0,05}}{\gamma_c}$$

donde:

$$f_{ctk\ 0,05} = 0,45 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \text{ , en Kp/cm}^2$$

$f_{ctk\ 0,05}$ = valor de la resistencia a tracción del hormigón, asociado a un nivel de confianza del 95 por 100.

1.3. Tratamiento según ACI-318-83

El concepto de longitud básica de anclaje, ha variado a lo largo de las diferentes ediciones de la Norma Americana. Hasta 1971, su cálculo era función de las tensiones medias de adherencia, en parecida línea a como lo estudia el Código Modelo del CEB-FIP, siendo, a partir de esa fecha, consecuencia directa de ensayos de laboratorio, a partir de los cuales se han obtenido fórmulas experimentales. La propia Norma justifica este cambio por la falta de precisión de los cálculos teóricos, al considerar tensiones medias y no las máximas, particularmente las que se producen en las proximidades de las fisuras.

Las fórmulas que propone la edición actual de la Norma, dan valores de la longitud básica de anclaje, en función de las resistencias del hormigón y del acero, para distintos diámetros.

– Barras corrugadas con $\phi \leqslant 36$ mm:

Acero $f_{yk} \leqslant 4220$, $\quad \ell_b = 0,06\, A_b \frac{f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}} \not< 0,006\, f_{yk}\, \phi$

Acero $f_{yk} > 4220$, $\quad l_b = 0,06\, A_b \frac{f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}} \left(2 - \frac{4220}{f_{yk}}\right) \not< 0,006\, f_{yk}\, \phi \left(2 - \frac{4220}{f_{yk}}\right)$

– Barras corrugadas con $\phi = 43$ mm:

Acero $f_{yk} \leqslant 4220$, $\quad \ell_b = \frac{0,82\, f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}}$

Acero $f_{yk} > 4220$, $\quad \ell_b = \frac{0,82\, f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}} \left(2 - \frac{4220}{f_{yk}}\right)$

(Unidades en Kp y cm)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

– Barras corrugadas con $\phi = 57{,}3$ mm:

$$\text{Acero } f_{yk} \leq 4220, \quad \ell_b = \frac{1{,}1\ f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}}$$

$$\text{Acero } f_{yk} > 4220, \quad \ell_b = \frac{1{,}1\ f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}} \left(2 - \frac{4220}{f_{yk}}\right)$$

1.4. Tratamiento según CP-110-1980

El concepto de longitud básica de anclaje, coincide en su formulación con el del CEB-FIP, aunque con algunas matizaciones. En primer lugar, utiliza valores de tensión última de adherencia en anclaje, diferentes de los que se utilizan como límite en la comprobación de adherencia, de forma análoga a como se hace en la EH-82. En segundo lugar, incluye la diferenciación importante entre el anclaje de una barra trabajando a tracción o a compresión, admitiendo tensiones de adherencia en anclaje en compresión, del orden de un 25 por 100 superiores a las correspondientes al de tracción; lo que en consecuencia, da lugar a menores longitudes de anclaje en compresión.

De lo especificado en la norma, se deduce que:

$$\ell_b \geq \frac{\phi}{4} \frac{f_{yd}}{\tau_{bd}}$$

Los valores de τ_{bd}, en kp/cm², se indican en la tabla siguiente:

Tipo de barra (*)	Esfuerzo	f_{ck} (Kp/cm²)			
		200	250	300	400
Deformada en frío	Tracción	17	19	22	26
Deformada en frío	Compresión	21	24	27	32
Dureza natural	Tracción	22	25	29	34
Dureza natural	Compresión	27	31	35	42

(*) La diferenciación entre acero estirado en frío y de dureza natural, puede ser debida a diferencias en el corrugado.

Como regla simplificada, incluye el valor: $\ell_b = 42\ \phi$.

1.5. Tratamiento según DIN-1045-1978

Análogamente a las Normas Europeas, la alemana da una expresión de la longitud básica de anclaje, basada en el equilibrio tensional (unidades en Kp y cm):

$$\ell_b = \frac{\phi\ f_{yd}}{4\ \upsilon\ \tau_{1,adm}}$$

donde:

υ : coeficiente de valor 1,75

$\tau_{1,adm}$: valor límite de la tensión media de adherencia en anclaje (véase la tabla siguiente, para un tipo de acero semejante a los utilizados en España).

f_{ck} (Kp/cm²)	150	250	350	450	550
$\tau_{1,adm}$ (Kp/cm²)	14	18	22	26	30

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Una matización importante que introduce esta norma es la modificación de la tensión de adherencia en anclaje, según el tiempo de duración de las cargas:

- Para cargas no predominantemente en reposo, según lo especificado en DIN 1045, los valores de la tabla pueden multiplicarse por un coeficiente de minoración de 0,85.
- Para cargas móviles, en sucesión frecuente, se minorarán los valores de la tabla por un coeficiente:

$$\lambda = 1 - 0{,}6 \left.\frac{\Delta \sigma}{\sigma_{s,min}}\right| \begin{matrix} \geqslant 0{,}5 \\ \leqslant 0{,}85 \end{matrix}$$

1.6. Tratamiento según BAEL-83

La Norma Francesa tipifica dos métodos, uno general y otro simplificado, para el cálculo de la longitud básica de anclaje. El método general está basado en las condiciones de equilibrio y da un valor de la longitud básica de anclaje ℓ_b igual a (unidades en Kp y cm):

$$\ell_b = \frac{\phi \, f_{y\,k}}{4 \, \tau_s}$$

siendo:

τ_s = tensión de adherencia = $0{,}6 \, \psi_s^2 \, f_{tj}$
ψ_s = coeficiente que depende del tipo de acero, de valor:

- 1, para barras lisas.
- valor que corresponde al de la ficha de identificación, para las barras corrugadas.

f_{tj} = resistencia a tracción del hormigón, a j días.

Tomando un valor medio de ψ_s ($\psi_s = 1{,}5$) y f_{t28} para el hormigón, esta Norma da los valores siguientes para τ_s (Kp/cm²):

f_{c28} (Kp/cm²)	200	250	300	350
τ_s	24	28	32	36

El método simplificado, da los siguientes valores para la longitud de anclaje:

40 ϕ para aceros de alta adherencia ($\psi_s \geqslant 1{,}5$) y $f_{y\,k} = 4000$ Kp/cm².
50 ϕ para aceros de alta adherencia ($\psi_s \geqslant 1{,}5$) y $f_{y\,k} = 5000$ Kp/cm².
50 ϕ para aceros lisos de $f_{y\,k} = 2200$ Kp/cm² y $f_{y\,k} = 2400$ Kp/cm².

1.7. Tratamiento según EH-82

El concepto de longitud básica de anclaje, no figura como tal en la actual edición de la Norma. Dentro de sus comentarios, establece el concepto de longitud de anclaje recto (con la misma formulación que la vista en el Código del CEB-FIP) y, ya dentro de su articulado, el de longitud práctica de anclaje. La propia Norma comenta que este último concepto se basa en la experimentación realizada con motivo de la homologación de las características

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

adherentes de las barras de acero fabricadas en España. No existe una formulación de estas longitudes; en la edición de 1973 existía una tabulación, pero en el comentario se aportaban fórmulas prácticas para la obtención de los valores, aunque en la actualidad ya no sirven por haberse modificado algunos valores.

La Norma da una tabla de coeficientes m, en función de las características resistentes del acero y del hormigón, que aplicados a la fórmula (unidades en Kp y cm):

$$\ell_b = m\,\phi^2 \geqslant \frac{f_{yk}}{200}\,\phi \geqslant 15 \text{ cm}$$

nos dan los valores de las longitudes prácticas de anclaje en prolongación recta.

Los valores de m son los siguientes:

Hormigón	m		
	AEH-400	AEH-500	AEH-600
H-150	18	–	–
H-175	16	21	–
H-200	14	19	23
H-225	13	17	21
H-250	12	15	19
H-300	10	13	17
H-350	9	12	16
H-400	8	11	15
H-500	7	10	14

1.8. Longitud mínima de anclaje

A los valores de las longitudes básicas de anclaje se les afecta de unos coeficientes de mayoración o minoración, función de los factores que influyen en la longitud real de anclaje y que veremos posteriormente. La longitud final tiene que cumplir unas condiciones de mínimo, que es contemplado por las diferentes normas de la siguiente manera:

1.8.1. CEB-FIP-1978

$$\ell_{b\,min} = \begin{cases} \text{barras a tracción} & 0{,}3\,\ell_b \geqslant 10\,\phi \geqslant 10 \text{ cm} \\ \text{barras a compresión} & 0{,}6\,\ell_b \geqslant 10\,\phi \geqslant 10 \text{ cm} \end{cases}$$

1.8.2. ACI 318-83

$\ell_{b\,min} \geqslant 30{,}5 \text{ cm} \geqslant 12\,\phi \geqslant$ d, para barras a tracción
$\ell_{b\,min} \geqslant 20{,}3 \text{ cm} \geqslant 12\,\phi \geqslant$ d, para barras a compresión

1.8.3. CP-110-1980

$$\ell_{b\,min} \geqslant \begin{cases} \ell_b \\ 12\,\phi \\ b \end{cases}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

1.8.4. DIN-1045-1978

$$\ell_{b\,min} \not< \begin{cases} 10\,\phi \\ 0.3\,\ell_b \end{cases}$$

1.8.5. BAEL-83

$$\ell_{b\,min} \not< 10\,\phi$$

1.8.6. EH-82

$$\ell_{b,min} \not< \begin{cases} 0{,}3\,\ell_b \\ 10\,\phi \\ 15\ \text{cm} \end{cases}$$

siendo:

ℓ_b : longitud básica de anclaje
ϕ : diámetro de la barra
b : ancho de la sección
d : canto útil de la sección.

2. FACTORES QUE DETERMINAN LA LONGITUD REAL DE ANCLAJE

2.1. Posición de las barras

La normativa existente sobre este tema es, en general, coincidente.

La influencia de este factor está relacionada con el espesor y posición de las armaduras dentro de las piezas. En el caso de una barra horizontal, una capa formada por una mezcla débil de cemento, aire y agua, tiende a depositarse bajo la barra, en especial si ésta está en la parte alta de la pieza hormigonada. El efecto es mucho menos importante en barras que al ser hormigonadas estaban a mucha profundidad bajo la superficie del hormigón fresco. También investigaciones recientes parecen indicar que este efecto es menos importante, cuando debajo de la barra considerada hay otras horizontales, así como en el caso de barras verticales. En el caso de una barra vertical, bajo los resaltos se producirá una segregación de aire y agua, análoga al de una barra horizontal; aunque es muy distinta al caso de estar horizontal.

Veamos lo que estipulan las diferentes normas.

2.1.1. CEB-FIP-1978

Una barra está en posición de buena adherencia:

- Cuando el espesor de la pieza, en el sentido del hormigonado, es menor de 25 cm.
- Cuando siendo el espesor mayor de 25 cm, se encuentra en la mitad inferior o a más de 30 cm de la cara superior.
- Cuando su inclinación con respecto a la horizontal, en el momento del hormigonado, esté comprendida entre 45° y 90°.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Cuando se cumpla lo anterior, no hay que modificar la longitud de anclaje. En caso contrario, la Norma toma como longitud de anclaje, $\ell_{b\,d}$:

$$\ell_{b\,d} = \frac{\ell_b}{0{,}7}$$

2.1.2. ACI-318-83

Esta norma incluye un coeficiente de mayoración de la longitud de anclaje, cuando la barra dista más de 30,5 cm de la superficie de hormigonado. En este caso:

$$\ell_{b\,d} = \ell_b \cdot 1{,}4$$

Obsérvese que este valor es análogo al que estipula el Código Modelo Europeo, pues:

$$\frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}7$$

2.1.3. CP-110-1980

No tipifica nada en este sentido.

2.1.4. DIN 1045-1978

La disposición es análoga a la del Código Modelo del CEB, aunque matiza algo más:

- Los 30 cm deben referirse a cada capa de hormigonado.
- Se debe mayorar siempre la longitud de anclaje de barras horizontales hormigonadas con encofrado deslizante.

El coeficiente de mayoración que emplea es igual a dos. Barras en posición mala de adherencia: $\ell_{b\,d} = 2\,\ell_b$.

2.1.5. BAEL-83

No tipifica nada en este sentido.

2.1.6. EH-82

La normativa es análoga a la del CEB-FIP, aunque el coeficiente de mayoración es 1,4 (ya hemos visto que $\frac{1}{0.7} \approx 1{,}4$).

2.2. Empleo de ganchos o patillas

2.2.1. CEB-FIP-1978

Afecta a la longitud básica de anclaje, de un coeficiente reductor, 0,7, que no excluye al resto de coeficientes:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\ell_{bd,\ \text{gancho}\atop\text{patilla}} \approx 0{,}7\ \ell_b$$

Además, especifica que para barras corrugadas no es aconsejable el empleo de gancho. Sin dar reglas, se tipifica la no proximidad de este sistema de anclaje a los paramentos, así como el evitar la concentración de varios. También incluye reglas referentes a la armadura transversal y recuerda la necesidad de comprobar la rotura por hendimiento del hormigón, en el plano de anclaje.

2.2.2. ACI-318-83

La normativa sobre este factor es nueva en la edición actual de la Norma Americana. Las ediciones anteriores daban reglas para modificar factores que luego entraban en la fórmula de la longitud básica. Actualmente, el uso de este sistema de anclaje implica el empleo de nuevas fórmulas y coeficientes. Como no pretendemos hacer una exposición exhaustiva de los métodos de cálculo, baste indicar que la fórmula para determinar la longitud es la siguiente:

$$\ell_{bh} = 0{,}08\ \phi \frac{f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}}$$

con coeficientes que la modifican según los recubrimientos, presencia de estribos, empleo de área de acero excesiva o el empleo de hormigón de áridos ligeros; existiendo un valor mínimo de $8\ \phi \lessdot 15{,}24$ cm.

Finalmente, es conveniente indicar que esta norma tampoco considera el empleo de este sistema de anclaje en compresión.

2.2.3. CP-110-1980

Esta norma tipifica, para el uso del anclaje por medio de ganchos o codos (según Norma BS 4466), unas longitudes equivalentes de anclaje recto:

- Para un gancho: Min ($24\ \phi$; 8 R).
- Para un codo de 90°: Min ($24\ \phi$; 4 R).

admitiéndose para R (radio de curvatura del sistema de anclaje):

$R \geqslant 2\ \phi$ para un acero dulce;
$R \geqslant 3\ \phi$ para un acero de alto límite elástico.

La disposición anterior se complementa con la limitación de que la presión sobre el hormigón, en el punto medio de la curva de doblado, no supere un valor que tipifica esta Norma.

2.2.4. DIN 1045-1978

El tratamiento de este aspecto se ha modificado en la actual edición de esta Norma.

En la anterior se daban unas longitudes equivalentes de anclaje recto.

Actualmente aplica un coeficiente reductor, no válido para barras comprimidas, de valor 0,7, pero con unas determinadas condiciones, no obligatoriamente simultáneas:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

– Cuando el recubrimiento, según un plano normal al del anclaje, es $\geqslant 3\ \phi$.

– Cuando hay compresiones transversales al anclaje.

– Cuando hay armaduras transversales que aseguren el cosido del plano de anclaje.

2.2.5. BAEL-83

De la misma manera que otras normas anteriores, el uso de ganchos de anclaje lleva consigo una reducción de la longitud de anclaje recto, considerándose un valor de 0,4 ℓ_b, para aceros AEH-400 ó AEH-500, siendo ℓ_b la longitud básica de anclaje.

Como la Norma Inglesa, presenta, además, varias limitaciones al diámetro del gancho, con el fin de no crear tensiones excesivas sobre el hormigón. Los ganchos u otro tipo de anclaje curvo, no son utilizables para el anclaje de barras comprimidas.

2.2.6. EH-82

Afecta a la longitud básica de anclaje de un coeficiente, 0,7, que es simultáneo con el resto de coeficientes. Además, incluye unos valores mínimos:

$$10\ \phi \lessgtr 15 \text{ cm}$$

y la reducción se entiende para barras traccionadas. Las características geométricas del gancho se encuentran normalizadas.

2.3. Influencia del recubrimiento

2.3.1. CEB-FIP-1978

Este código no hace referencia a este aspecto, salvo en el caso de barras con $\phi \geqslant 32$ mm, para las que exige un espesor mínimo de pieza. En cuanto al anclaje curvo, el recubrimiento actúa solamente en cuestiones de comprobación de compresiones excesivas sobre el hormigón, en puntos de la curva de anclaje.

2.3.2. ACI-318-83

Para las barras sometidas a tracción, esta Norma permite la reducción de la longitud de anclaje en los casos siguientes:



El coeficiente de reducción es 0,8 y actúa simultáneamente con el resto de coeficientes. Sin embargo, no actúa para el caso de barras comprimidas.

Si se trata de un anclaje por gancho, como hemos dicho anteriormente, cambia la expresión de la longitud básica, actuando un coeficiente:

0,7 para el caso de ganchos con un recubrimiento lateral superior a 6,35 cm.

0,7 para el caso de patilla (codo de 90°) con recubrimiento lateral superior a 6,35 cm y frontal superior a 5,1 cm.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

2.3.3. CP-110-1980

El recubrimiento sólo influye en el cálculo de las compresiones, producidas por el empleo de ganchos o anclajes curvos, sobre el hormigón.

2.3.4. DIN 1045-1978

Cuando existe un recubrimiento, en todas las direcciones, mayor de 10 ϕ, esta Norma permite reducir las longitudes de anclaje a los 2/3 de su valor, salvo en el caso de anclajes en apoyos y en los solapes:

$$\ell_{b\,d} = \frac{1}{1,5}\,\ell_b = \frac{2}{3}\,\ell_b$$

Este coeficiente es simultáneo con los otros que corresponda utilizar.

2.3.5. BAEL-83

Al igual que en la Norma Inglesa, el recubrimiento se tiene en cuenta en el cálculo de las compresiones sobre el hormigón, producidas por el empleo de ganchos o anclajes curvos.

2.3.6. EH-82

Con relación al recubrimiento, la Norma Española no hace referencia en cuestiones de anclaje. En su comentario señala la conveniencia de que, cuando se ancle por gancho o patilla, ésta se incline hacia el interior del hormigón, con el fin de que quede más embebida.

2.4. Influencia del signo del esfuerzo

2.4.1. CEB-FIP-1978

Salvo en algunas matizaciones que ahora veremos, este Código no distingue entre el anclaje de una barra traccionada y el de una barra comprimida. Los aspectos en que se diferencia son:

– Los ganchos y patillas no actúan como sistema de anclaje en barras comprimidas.

– La longitud mínima de anclaje, una vez aplicados todos los coeficientes, es:

$$\ell_{min} = 0,6\,\ell_b \not< 10\,\phi \not< 10\ \text{cm}$$

2.4.2. ACI-318-83

Tal y como ocurría para el caso de anclaje curvo, si la barra está comprimida la Norma Americana tipifica nuevos valores para la longitud básica de anclaje, así como los coeficientes que pueden actuar sobre ella.

Como longitud básica, se da la expresión:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\ell_b = 0{,}08 \frac{\phi f_{yk}}{\sqrt{f_{ck}}} < 0{,}004 f_{yk} \phi$$

siendo la correlación, con los valores correspondientes a una barra traccionada, función del ϕ, f_{yk} y f_{ck}.

2.4.3. CP-110-1980

Para las barras en compresión, esta Norma admite valores de la tensión de adherencia en anclaje, un 25 por 100 superiores con respecto a las barras traccionadas. Además, como el valor límite de la tensión de compresión en una barra es $0{,}72 f_{yk}$, todo ello nos lleva a unas longitudes de anclaje de barras comprimidas, del 68 por 100 de los valores correspondientes a barras traccionadas.

2.4.4. DIN 1045-1978

Esta Norma no introduce cambios en la longitud básica de anclaje para el uso de barras comprimidas. Hace constar la no posibilidad de emplear ganchos cuando se anclan barras a compresión.

2.4.5. BAEL-83

La longitud básica de anclaje correspondiente a una barra comprimida es el 60 por 100 de la correspondiente a una barra traccionada.

2.4.6. EH-82

En ediciones anteriores de la Norma se hacía referencia a barras permanentemente comprimidas. En la actualidad no considera el signo del esfuerzo que actúa, en relación al anclaje.

2.5. Influencia del exceso de cuantía de acero

Con relación a este factor, el tratamiento, según la mayoría de las normativas, es análogo. La influencia queda determinada por un coeficiente:

$$\frac{A_{s,\,cal}}{A_{s,\,ef}}$$

siendo:

$A_{s,cal}$: Sección de armaduras estrictamente requerida por el cálculo.
$A_{s,ef}$: Sección de armaduras efectivamente prevista.

Este factor figura en todas las Normas que estamos estudiando, salvo en la CP-110-1980.

3. RESUMEN Y COMENTARIOS

Se han expuesto con anterioridad los métodos para calcular las longitudes de anclaje,

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

en prolongación recta, de barras de acero corrugado, según el Código Modelo del CEB (Comité Europeo del Hormigón) y las Normas BAEL, DIN, CP, ACI y EH-82.

El tratamiento del tema en todos ellos es similar; se especifica una longitud básica de anclaje de la barra, en función del diámetro y resistencia del hormigón (calculada mediante modelos teórico-empíricos o totalmente empíricos) y luego se contemplan variaciones de esta longitud, en función de diversas condiciones. Algunos de estos Códigos estudian otras condiciones, como la existencia de esfuerzos normales a las armaduras, etc. No se ha tratado tampoco el anclaje de los paquetes de barras, mallas electrosoldadas y otros asuntos, por salirse del tema de este trabajo.

En las figuras núms. 1 y 2 se ha representado la longitud básica de anclaje dada por los códigos estudiados, en función del diámetro de la barra, para diversas calidades del hormigón (*); y en las figuras núms. 3 a 5 se ha representado la longitud básica de anclaje, en función de la calidad del hormigón, para diferentes diámetros (*).

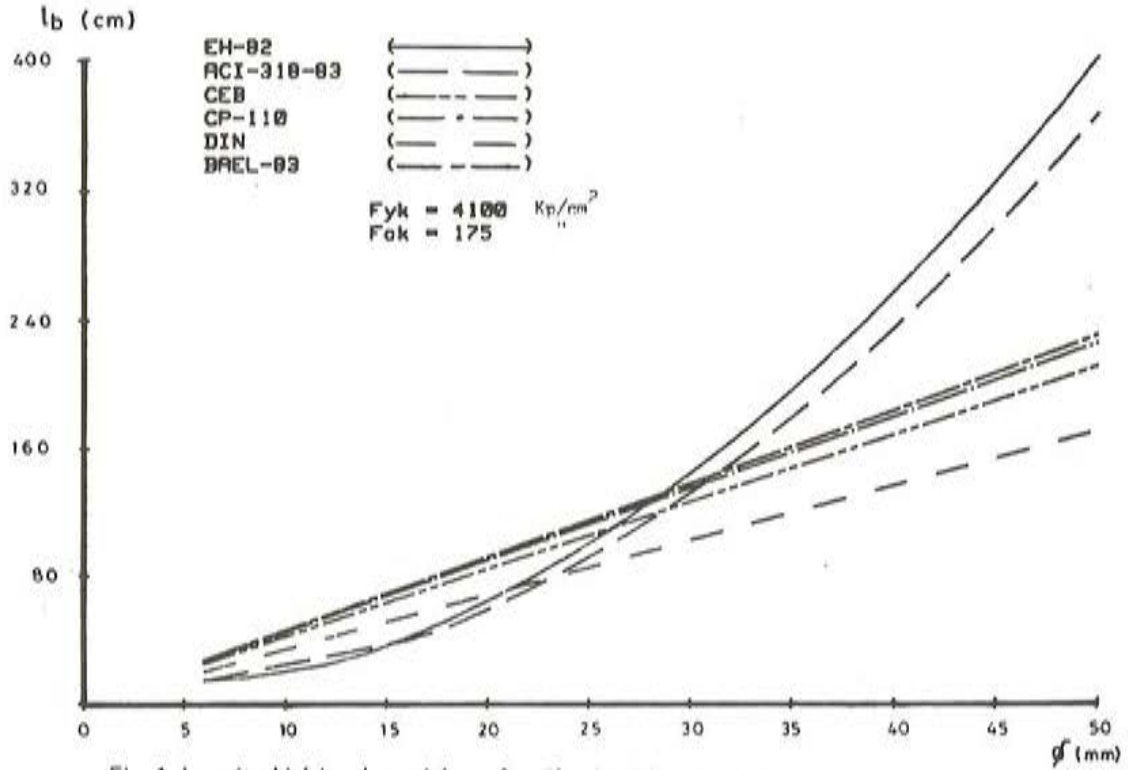


Fig. 1. Longitud básica de anclaje en función del diámetro de la barra.

* La influencia de la variación del límite elástico del acero, en cuanto a la comparación de las Normas, es pequeña.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

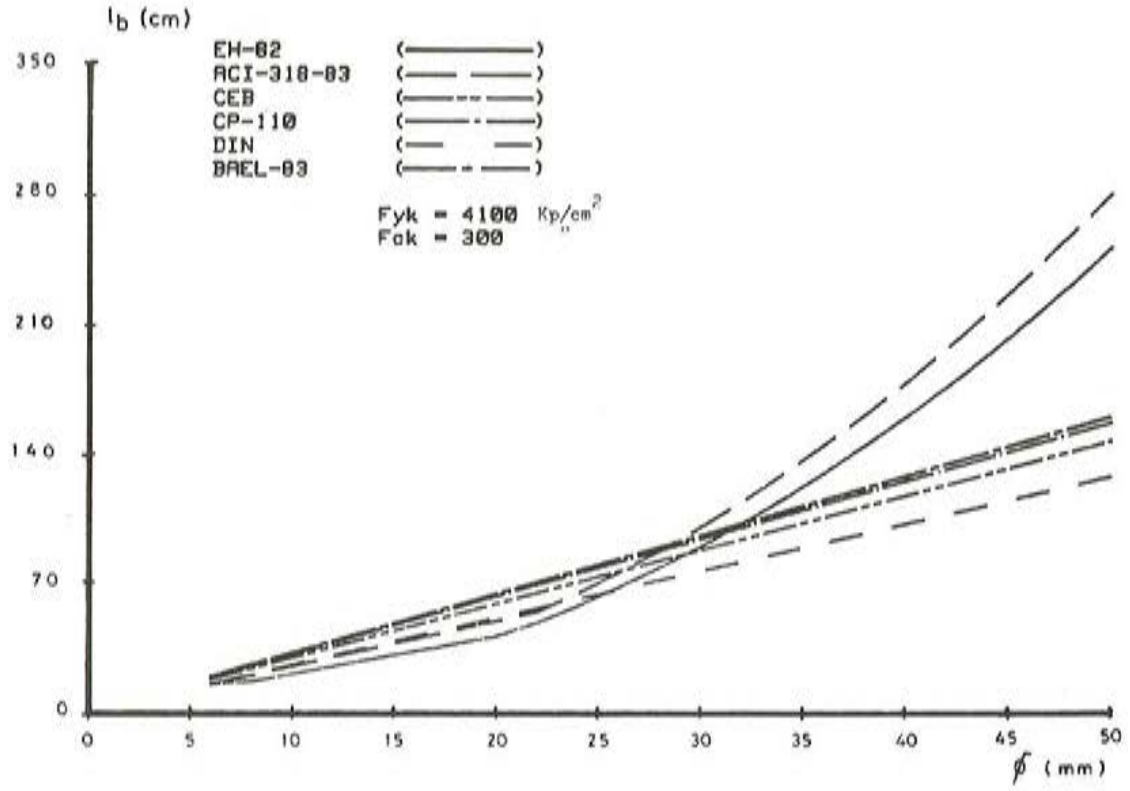


Fig. 2. Longitud básica de anclaje en función del diámetro de la barra.

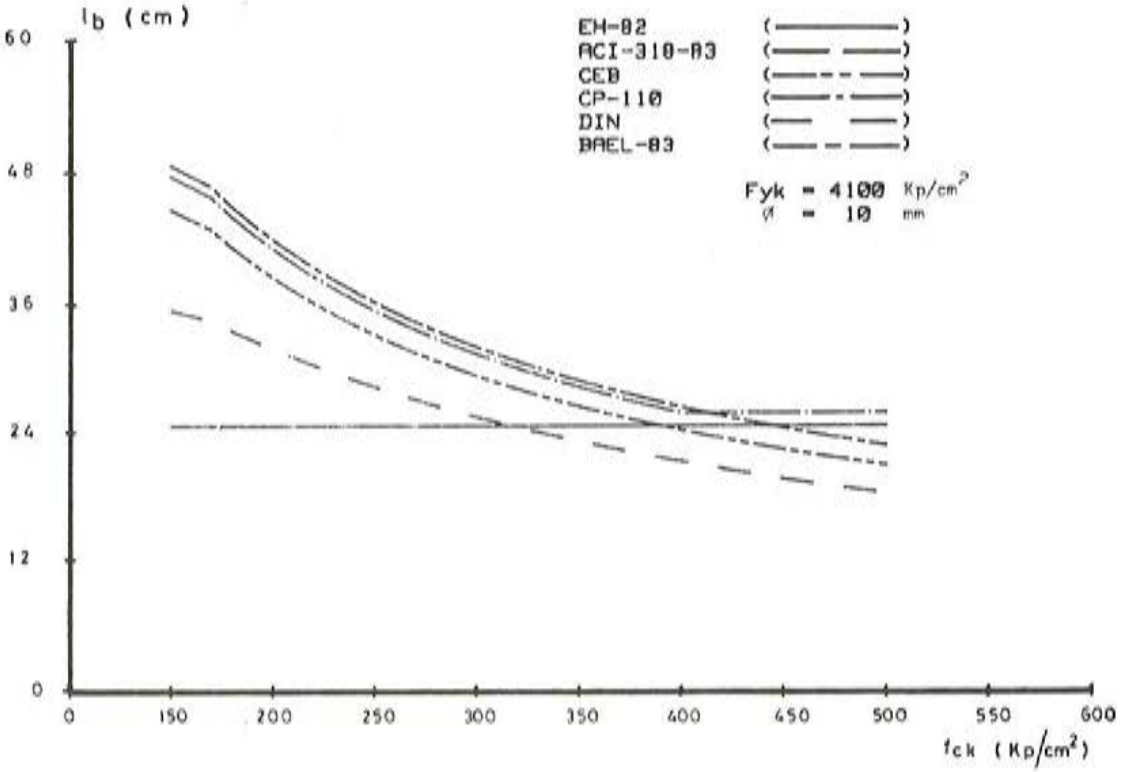


Fig. 3. Longitud básica de anclaje en función de la resistencia del hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

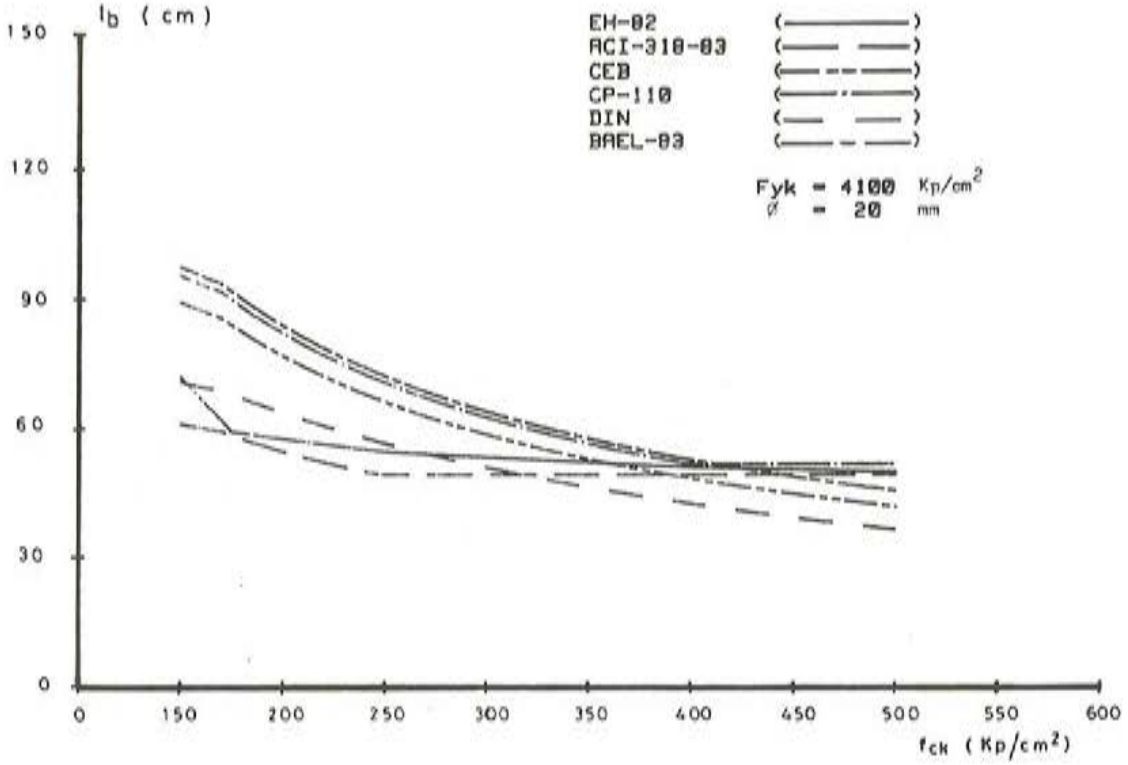


Fig. 4. Longitud básica de anclaje en función de la resistencia del hormigón.

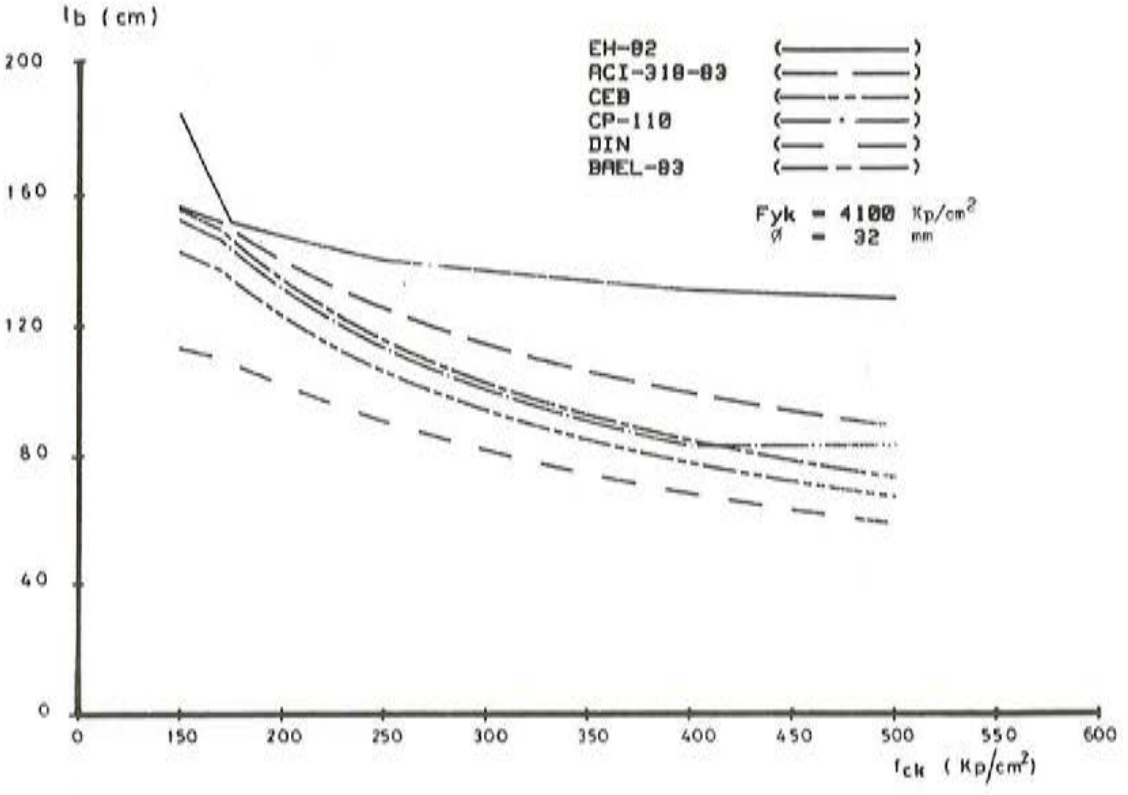


Fig. 5. Longitud básica de anclaje en función de la resistencia del hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Vamos a realizar una comparación entre los valores ofrecidos por la Instrucción EH-82 y las otras Normas.

A la vista de las figuras núms. 1 a 4 se desprende que la Instrucción EH-82 (así como la Norma ACI), al tener una ley de la longitud básica de anclaje que es proporcional al cuadrado del diámetro, en lugar de ser proporcional al diámetro como sucede en el Código Modelo y Normas BAEL, CP-110 y DIN, da una longitud inferior a la de estos códigos para diámetros pequeños, y superior para diámetros grandes. Esto se intenta solucionar dando unas longitudes mínimas para los diámetros pequeños. Sin embargo, y como se deduce de las figuras núms. 3 a 5, para la práctica totalidad de las resistencias del hormigón, sigue ocurriendo que, en los diámetros pequeños y medianos, las longitudes básicas de anclaje dadas por la EH-82 son inferiores a las dadas por las Normas CM-CEB, BAEL, CP-110 y DIN. EH-82 da unas longitudes prácticamente coincidentes con las de la Norma ACI.

La experiencia de laboratorio demuestra que las longitudes de anclaje dadas por la Instrucción EH-82, para diámetros pequeños e incluso medianos, están muy ajustadas; además, estos diámetros son susceptibles de presentar dispersiones en la geometría de su corrugado, agravando más el problema.

Para diámetros grandes ($\phi \geqslant 25$ mm) los valores dados por EH-82 son superiores a la media de las Normas estudiadas, si bien el pequeño uso en nuestro país de dichos diámetros y el carecer de una amplia experiencia de laboratorio sobre la adherencia de los diámetros grandes, hace que no pueda evaluarse la diferencia.

Respecto a las correcciones de la longitud básica de anclaje en función de diversas condiciones, el tratamiento de la EH-82 es similar al de las otras Normas estudiadas. El único aspecto importante que no trata, es el del signo del esfuerzo, exigiendo las mismas longitudes de anclaje, en prolongación recta, para barras sometidas a tracción y compresión, mientras que otras Normas permiten una reducción importante de la longitud de anclaje en el caso de barras sometidas a compresión.

En el momento de redacción de este estudio, uno de los autores está investigando el anclaje de armaduras de espera, en compresión, para el caso de zapatas. El tema es objeto de la Tesis Doctoral "Investigación experimental de las longitudes de anclaje de las armaduras de los pilares, en los cimientos".

Como resumen final del método de cálculo de las longitudes de anclaje de la EH-82, respecto a las demás Normas estudiadas, podemos hacer los siguientes comentarios:

- Para diámetros pequeños ($\phi \leqslant 12$ mm) da unos valores inferiores a las otras Normas (aunque semejantes a los de ACI), demostrando además la experiencia de laboratorio que estos valores están muy ajustados.

- Para diámetros grandes ($\phi \leqslant 25$ mm) da valores superiores de la longitud de anclaje. No existe, sin embargo, una experiencia lo suficientemente amplia en este tema como para juzgarlo. Deberían investigarse las características adherentes de los diámetros grandes.

- Convendría investigar algunas condiciones concretas de los anclajes, tales como la existencia de esfuerzos normales a la barra y anclajes en compresión, dada la importancia de su influencia en la adherencia hormigón-acero.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Simposio sobre "Utilización de plantas vegetales y sus fibras como materiales de construcción"

Del 7 al 9 de octubre de 1986, se celebrará en Baghdad (Iraq) un Simposio Científico Internacional sobre "Utilización de plantas vegetales y sus fibras como materiales de construcción".

Este Simposio ha sido organizado, conjuntamente, por la RILEM y el "Centro Nacional de Laboratorios de Construcción" (NCCL), del Iraq y está patrocinado por el CIB, la "Comisión Económica para Asia Occidental" (ACWA), la "Organización de las Naciones Unidas para el Desarrollo Industrial" (UNIDO) y otras Entidades.

En el mismo se discutirá el papel que pueden desempeñar las plantas vegetales y sus fibras como materiales para la construcción de viviendas. Se expondrá su utilización y métodos de aplicación en diferentes países, con vistas a aumentar su durabilidad y vida útil de servicio, mejorando su protección frente al fuego y al ataque de insectos. Se estudiará también la posibilidad de utilizar dichas fibras en la construcción de paneles y distintos elementos estructurales.

Los temas seleccionados para la presentación de Comunicaciones son:

- Propiedades mecánicas y ensayos.
- Durabilidad. Métodos para la protección contra el fuego, la humedad y el ataque de insectos.
- Propiedades térmicas de las fibras vegetales, según su composición.
- Requisitos prestacionales de los elementos, componentes y sistemas.
- Influencia de los avances en bioingeniería, en la mejora de las características de los materiales a base de fibras vegetales.

Los interesados en participar en este Simposio deberán dirigirse a:

Dr. Mufid A. Samarai
National Centre for Construction Labs.
Tell-Mohammed
Mousa Bin Nasser Sq.
BAGHDAD (Iraq)
Tel.: 762 00 59 – Telex: 21 27 04 NCCL-IK.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Esfuerzo rasante en piezas compuestas

José J. Vallés
Profesor Titular
Universidad Politécnica de Valencia

1. INTRODUCCION

La utilización de piezas compuestas, es decir, las constituídas por una parte prefabricada y otra hormigonada "in situ", se encuentra actualmente muy extendida.

En el caso concreto de los forjados, construídos a base de placas o viguetas, nos encontramos con un hormigón elaborado en fábrica, que es el utilizado en el elemento prefabricado (de hormigón armado o pretensado), y un hormigón vertido en obra, con el que se construye parte de los nervios y la losa superior del forjado terminado.

Para considerar la pieza en cuestión como verdaderamente compuesta, los esfuerzos de cortadura se deberán transmitir a través de la superficie de contacto entre los dos hormigones, de la misma forma y con las mismas deformaciones: como si la sección completa fuera monolítica.

De existir algún punto débil en la superficie de contacto, el elemento será sólo parcialmente compuesto, presentando rigideces intermedias entre un sistema monolítico y otro de dos piezas.

Se pone así de manifiesto, la decisiva importancia que tiene la superficie de contacto en el comportamiento de los forjados, quedando pues condicionada la seguridad de los mismos, por el estado de tensiones tangenciales en la "interfase" entre los dos hormigones, normalmente diferentes en edad y calidad.

Es evidente, por tanto, que en éstas piezas resulta fundamental el análisis de la superficie de contacto, cuando dichos elementos estén sometidos a flexión.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

2. RESISTENCIA DE LA UNION

De acuerdo con las investigaciones de HANSON, SAEMANN y WASHA, MATTOCK, GROSSFIELD, principalmente, podemos decir que las variables más influyentes en la resistencia de la superficie de contacto, se pueden clasificar en tres grupos:

– *Variables intrínsecas a la pieza*

Resistencia de los hormigones.
Inercia de los elementos.
Posición del eje neutro respecto al plano de la unión.

– *Variables intrínsecas a la unión*

Adherencia entre los dos hormigones.
Rugosidad del hormigón prefabricado.
Area de la superficie de contacto.

– *Otras variables*

Relación entre la distancia desde el primer punto de aplicación de la carga al apoyo, y el canto útil de la pieza.
Tipo de sustentación.
Cuantía y calidad de la armadura transversal.

Puede deducirse, pues, la dificultad que entraña dar, en cada caso, valores de las tensiones rasantes de agotamiento.

No obstante, muchas Normas y Recomendaciones Europeas y Norteamericanas, preconizan unos valores máximos, normalmente en función de la calidad de los hormigones, adherencia, rugosidad de las superficies y cuantía de la armadura transversal.

Por el contrario, en la correspondiente Normativa Española (EH-82 y EP-80) se echa de menos, a nuestro juicio, una mayor concreción sobre éste tema.

Así, tanto la Instrucción EH-82 como la EP-80 admiten la no disposición de armadura transversal, cuando el esfuerzo cortante de cálculo es menor que un determinado esfuerzo cortante de agotamiento.

Ahora bien, éste extremo queda condicionado a que la adherencia entre los dos hormigones sea suficiente, lo que se justificará mediante los oportunos ensayos.

3. ENSAYOS DE CAPACIDAD RESISTENTE A ESFUERZO RASANTE

Es evidente que un taller de viguetas prefabricadas, deberá realizar una serie de ensayos con objeto de comprobar las características resistentes de las piezas (deformación, fisuración, rotura por flexión, rotura por cortante, etc.). Por otro lado, es importante que aquéllos sean sencillos y que reproduzcan, lo más fielmente posible, la realidad.

De partida, los ensayos sobre semiviguetas entrañan mayor complejidad que los tradicionalmente realizados sobre las viguetas autorresistentes, y ello por dos razones fundamentales:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

a) Necesidad de construir una banda de forjado o bien una semivigueta con cabeza de compresión (constituída mediante un molde o mediante semibovedillas) que sea representativa.

b) Someter dicho elemento a una prueba de carga, acorde con las condiciones de trabajo en la obra.

No resulta sencillo, para un control de fabricación sistemático, aplicar cargas uniformemente repartidas; deberíamos ir a cargas puntuales. Por otra parte, para estudiar la capacidad a rasante, las condiciones de ejecución del ensayo deben ser tales que se produzca antes la rotura por rasante que por flexión.

Ni la EH-82, ni la EP-80, dan pautas para poner en práctica dichos ensayos.

En la bibliografía española sobre el tema, únicamente encontramos especificaciones en las "Recomendaciones VP-81 del sello de conformidad CIETAN de viguetas pretensadas", redactadas por una comisión mixta I.E.T. cc - ANDECE.

En dichas Recomendaciones, se dividen los ensayos sobre semiviguetas en ensayos de homologación del forjado y ensayos en fábrica de las semiviguetas con cabeza hormigonada.

En el apartado correspondiente a esfuerzo cortante de rotura, se describe la determinación del mismo mediante "la aplicación de dos cargas lineales, iguales, situadas a una distancia de apoyos igual a tres veces el canto total del forjado. Dichas cargas se aumentarán paulatinamente hasta que se produzca, bien la rotura del forjado por esfuerzo cortante o bien por un deslizamiento sensible entre la capa de compresión hormigonada y las semiviguetas".

"El ensayo de cortante no se considerará válido si antes de alcanzar el valor de la carga correspondiente al esfuerzo cortante último garantizado de la zona que se ensaya, se rompiese la pieza habiéndose sobrepasado el valor del momento flector último, positivo, garantizado; ya que en el agotamiento habría influído sustancialmente la solicitación de flexión, falseando el resultado de la resistencia real a esfuerzo cortante que se trataba de determinar".

4. RELACION VANO DE CORTANTE – CANTO UTIL

La resistencia a cortante de una viga se encuentra fuertemente influída por la posición de las cargas.

Se ha constatado que la forma de desarrollo y crecimiento de la fisuración inclinada, así como el tipo de rotura que posteriormente se desarrollará, dependen principalmente de la relación entre las tensiones de flexión f y las de cortadura v.

En primera aproximación, estas tensiones se pueden expresar:

$$v = K_1 \cdot \frac{V}{b_w \cdot d}; \qquad f = K_2 \cdot \frac{M}{b \cdot d^2}$$

donde K_1 y K_2 son coeficientes que dependen de diversas variables, como la geometría de la viga, el tipo de carga, el tipo de acero, etc.

V y M son los valores del cortante y momento, en una sección dada; b la anchura del ala; b_w la anchura del alma, y d el canto útil de la viga.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Por tanto: $$\frac{f}{v} = K \cdot \frac{M}{V \cdot d} \cdot \frac{b_w}{b}$$

siendo: $$K = \frac{K_2}{K_1}$$

Por otra parte, $V = \frac{dM}{dx}$, y en vigas sometidas a cargas concentradas, $V = \frac{M}{a}$,

siendo "a" la distancia desde el punto de aplicación de la carga al apoyo: "vano de cortante".

Es decir:

$$\frac{f}{v} = K \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b_w}{b}$$

Manteniendo constantes las demás variables, se puede observar, en la figura 1, el efecto de la relación a/d sobre la fisuración de una viga de hormigón armado, de sección rectangular, simplemente apoyada, sometida a dos cargas puntuales situadas simétricamente.

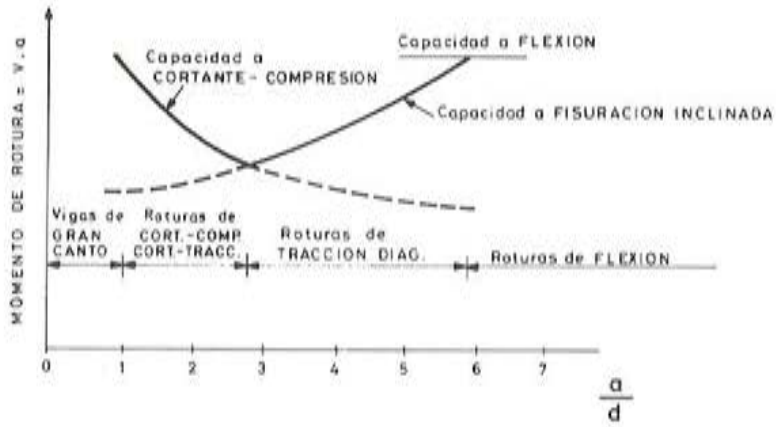


Fig. 1.

– *Vigas de Gran Canto $0 < a/d < 1$*

En este intervalo, las tensiones de cortadura y las tensiones normales verticales son de mayor importancia que las de flexión. Existen importantes tensiones principales de compresión y tracción, a lo largo y a través, respectivamente, de la línea que une la carga y la reacción; por lo que pronto aparecen fisuras inclinadas en las proximidades de la reacción.

Casi inmediatamente después, la viga se transforma en un arco atirantado, que puede colapsar de diversas formas (fallo del anclaje de la armadura de tracción, rotura por aplastamiento en las reacciones, etc.).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

– *Vigas Cortas* $1 < a/d < 2{,}5$

Una fisura de flexión, que se extiende verticalmente hasta justamente encima de la armadura de tracción, se inclina, progresando en la dirección del punto de aplicación de la carga. La fisura de flexión inicial, generalmente, se forma hacia el centro del "vano de cortante"

Al incrementar la carga, la parte inclinada de la fisura, generalmente, se propaga hacia abajo, encontrando la armadura de tracción en un ángulo aproximado de 45º, formándose así una fisura secundaria que se extiende a lo largo de la armadura, hacia el apoyo.

Una vez se ha desarrollado la fisuración inclinada, la rotura puede producirse de una de las dos formas siguientes:

a) Rotura del anclaje de la armadura de tracción: ROTURA de CORTANTE-TRACCION. (Figura 2).

b) Rotura por aplastamiento del hormigón situado sobre la fisura inclinada: ROTURA de CORTANTE-COMPRESION. (Figura 3).

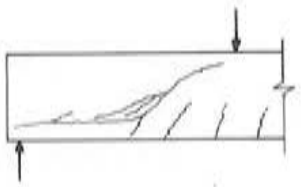


Fig. 2.

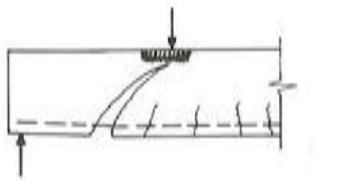


Fig. 3.

– *Vigas Normales y Largas* $a/d > 2{,}5$

En el intervalo de valores de $\frac{a}{d}$ comprendidos entre 2,5 y el correspondiente a la rotura por flexión, las fisuras inclinadas se forman a partir de las fisuras de flexión.

Entre dos fisuras de flexión se encuentra un "diente" vertical que funciona como una ménsula. Al aumentar la carga, comienza su rotura, formándose una prolongación inclinada de una fisura de flexión primaria. (Figura 4).

Tal como se vio antes, para valores de a/d mayores de 2,5, la carga de fisuración inclinada supera a la carga de rotura por cortante-compresión; de manera que en una viga sin armadura de alma, la aparición de la fisura inclinada implica que se haga inestable y colapse.

A este tipo de rotura se le llama de "tracción diagonal".

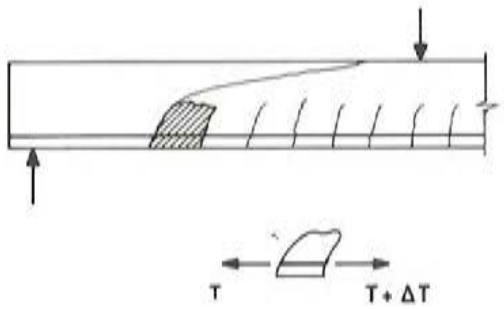


Fig. 4.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

— *Vigas en I*

El comportamiento de una viga en I se verá afectado por la geometría del alma; puesto que al reducirse la relación anchura alma/anchura ala, se incrementarán las tensiones de cor - tadura en el alma, aumentando más rápidamente que las máximas tensiones de flexión.

Es decir, que en este tipo de vigas, para un valor dado de a/d, será la relación de anchuras alma/ala la que decidirá sobre la iniciación y propagación de la fisuración inclinada.

5. INFLUENCIA DE LA RELACION a/d SOBRE LA RESISTENCIA A RASANTE

SAEMANN y WASHA, en ensayos realizados en la Universidad de Wisconsin, comprobaron que el esfuerzo rasante máximo resistido por los elementos compuestos, era menor a medida que la relación a/d aumentaba.

Según dichos investigadores, en el caso de piezas sin armadura transversal, la variación se podía expresar de la siguiente forma:

$$T = \frac{190}{R + 5}$$

siendo:

T: máximo valor de la tensión rasante que puede absorberse, en K_p/cm^2.

R: relación a/d (longitud de deslizamiento o vano de cortante/canto útil).

Esta expresión también ha sido recomendada por MATTOCK y KAAR.

6. PLANTEAMIENTO Y DISCUSION DEL PROBLEMA

Resulta claro que a un taller de fabricación de viguetas semirresistentes que quiera realizar determinaciones experimentales de la resistencia a esfuerzo rasante, y que por razones de sencillez vaya a utilizar dos cargas, el primer problema que se le planteará es la ubicación de dichas cargas.

Si éstas se encuentran muy distanciadas de los apoyos, el elemento colapsará por flexión; si por el contrario se encuentran muy cercanas al apoyo, se producirán roturas por cortante del tipo "vigas cortas". Además, las cargas próximas a los apoyos ocasionarán "pinzamientos" que, por consiguiente, desvirtuarán el ensayo a rasante.

De todo lo anterior se puede inferir que para un ensayo de cortante en vigas de sección rectangular, la relación a/d = 3 resulta apropiada, por coincidir con el momento de rotura mínimo; punto en el que se pasa de un gobierno de la capacidad de cortante-compresión, a la capacidad de fisuración inclinada.

Sin embargo, en una pieza con las características de la banda de forjado que se va a ensayar, a nuestro juicio, no se puede mantener dicha relación. Teniendo en cuenta las relaciones alma/ala que generalmente se presentan en un elemento compuesto de este tipo, creemos que un cociente vano de cortante/canto con valores más altos, alrededor de 5, puede rendir mejores resultados.

Dicha relación permite movilizar mayores tensiones rasantes, elimina en mayor grado el riesgo de que se produzcan pinzamientos y provoca una más temprana aparición de la fisuración inclinada (consecuencia de una fisura de flexión primaria), forzando así la posibilidad de deslizamientos al alcanzar dicha fisuración la superficie de contacto.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Otra importante ventaja, es que las relaciones momento flector/esfuerzo cortante, en las diferentes secciones, están mucho más ajustadas a las que se darán bajo las condiciones de trabajo reales.

Por contra, el inconveniente resultante de una fisuración de flexión prematura queda, en parte, mitigado por ser uno de los dos elementos pretensado.

Nuestra intención es confeccionar próximamente una serie de piezas, con las que poder comprobar experimentalmente estos extremos. De todas maneras, sí podemos adelantar que en las determinaciones realizadas hasta el momento por nosotros, con relaciones a/d = 3, siempre observamos una temprana fisuración en la zona próxima a los apoyos, seguida de roturas de cortante-compresión, o roturas tipo fallos de anclaje, que nos han impedido observar y evaluar los posibles deslizamientos en la superficie de contacto entre los dos hormigones. (Véanse fotos 1 y 2).



Foto 1. Vista de la pieza ensayada.



Foto 2. Otra vista de la pieza ensayada.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

REFERENCIAS

- ACI. Manual Of Concrete Practice. Detroit, 1981.
- CALCULO, CONSTRUCCION Y PATOLOGIA DE FORJADOS DE EDIFICACION. J. Calavera. Madrid, 1981.
- V.P.– 81. Sello de conformidad CIETAN de viguetas pretensadas. Madrid, 1981.
- FENWICK R.C., PAULAY T. "Mechanism of Shear Resistance of Concrete Beams". Journal of the Structural División, ASCE. Vol. 94, nº. St 10, Proc. Paper 2325, Oct. 1968.
- HANSON N. "Precast-prestressed concrete bridges.– 2. Horizontal Shear Connection". Journal of the Portland Cement Association. Vol. 2, Nº. 2, May 1960.
- MATTOCK, KAAR. "Precast prestressed concrete bridges. Shear tests of continuous girders". Journal of PCA. January 1961.
- SAEMANN, WASHA. "Horizontal Shear connection between beams and cast in place slabs". Journal of ACI. Nov. 1976.
- CALAVERA J. "Ensayos de corte en la superficie de contacto entre hormigones de piezas prefabricadas y hormigones vertidos in situ". Hormigón y acero, núms. 119 y 120. 1976.
- DARDARE. Traducción de R. PIÑEIRO. "Estudio de los esfuerzos rasantes y el deslizamiento, en los elementos compuestos sometidos a flexión". Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie du Béton Manufacturé. Monografía 1. Junio 1970. Hormigón y Acero Nº. 121. 1976.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Reuniones de la F.I.P., en Nueva Delhi (India)

X Congreso de la F.I.P., en Nueva Delhi (India)

Ramón Martí
Centro de Trabajos Técnicos, S.A. (C.T.T.)

Durante los pasados 16-20 de febrero, se celebró en Nueva Delhi el X Congreso de la F.I.P. Asistieron al mismo 2.200 Delegados, de los cuales 1.500 eran Delegados locales y 700 del resto del mundo, representando a 42 países.

Simultáneamente con el Congreso se celebró una exposición en la cual, los principales sistemas de postesado, así como industrias relacionadas con el postesado, mostraron sus últimas novedades. Es de destacar que la tradicional masiva asistencia de los fabricantes de acero para pretensado, en esta ocasión, se vió reducida a una sola firma japonesa.

Diferentes realizaciones españolas fueron mostradas en el stand de CTT-STRONGHOLD, entre ellas, el puente Ingeniero Fernández Casado, puente sobre el Ebro, puente de Fernando Reig en Alcoy, y acueducto de los Monegros.

La inauguración del Congreso tuvo lugar el 16 de febrero y en élla cabe destacar la conferencia del Profesor Leonhardt sobre puentes atirantados. Consistió en un resumen sobre las diferentes posibilidades y realizaciones actuales del pretensado, así como datos generales sobre diseño. Se citó el puente del Ebro y el puente Ingeniero Fernández Casado, en Barrios de Luna, extendiéndose en detalle sobre este último y señalando que posee el record mundial de luz en tableros de hormigón.

El lunes día 17 empezaron las Sesiones Técnicas. En relación con ellas merece mención especial, dentro de la primera Sesión, dedicada a puentes, la presentación de diferentes realizaciones sobre puentes atirantados. A lo largo de todo el Congreso fue quizás éste el tema al que se dedicó mayor atención.

Entre los puentes que se comentaron se encuentran el de Penang, en Malasia, atirantado, con 225 metros de vano central, y el conocido Saudi-Bahrain Causeway que une el emirato de Bahrain con Arabia Saudita, a través de 12,5 km de puente, que fue diseñado y construído en 225 semanas. La solución final, con vanos de 50 metros para los tramos de acceso y un puente por voladizos, de 150 metros, es altamente interesante, tanto desde el punto de vista de proyecto como de construcción.

En la sesión vespertina sobre trabajos realizados en condiciones difíciles, cabe destacar tres contribuciones: la de Dragados y Construcciones, presentada por Luis García de Miguel sobre la toma de agua de la Central Térmica de Ras Djinet, presentada así mismo en la pasada Asamblea de la ATEP, en Santander; el Linn Cove Viaduct, de J. Muller, interesante puente construído en Estados Unidos en un parque natural y cuya construcción, debido a problemas ecológicos, debió iniciarse desde un estribo y realizarse toda ella desde el tablero, pilas intermedias inclusive, consiguiendo una estructura de gran belleza, perfectamente adaptada al entorno natural; y la de K. Ukaji, de Japón, sobre depósitos para gas natural líquido, construídos bajo tierra.

En la sesión del martes día 18 sobresalieron, la presentación de Javier Ripoll, de C.T.T., S.A., sobre refuerzo de estructuras por medio de conectores, y la de H. Schambeck que pre-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

sentó el proyecto del Metro de Medellín, en el que interviene Entrecanales y Távora. Así mismo, en este día se dedicó una sesión a puentes realizados en países en vías de desarrollo, sesión altamente interesante, en la que entraban temas tan diferentes como el uso del hormigón reforzado con bambú, presentado por S.H. Perry, y estudios de puentes para acceso a zonas rurales (granjas, mercados, etc.), presentado por M.S. Fletcher.

El miércoles día 19 se dedicó a los nuevos desarrollos experimentados, tanto en diseño como en construcción. Importante contribución fue la de M.A. Bell sobre el uso de tendones no adherentes en elementos de hormigón parcialmente pretensados. Dos o tres ponencias versaron sobre la construcción de traviesas pretensadas.

En relación con el tema de "Aceros y Sistemas", se presentaron tendones de nuevas fibras, cuya aplicación en el postesado es ya una realidad, como lo demuestra la construcción de un puente de dos vanos, de 25 y 27 metros, sobre una autopista, en Alemania.

Otra de las novedades del Congreso fue la presentación de varias ponencias sobre estructuras construídas utilizando para el postesado tendones exteriores, que pueden ser sustituídos en cualquier momento, permitiendo así soluciones muy versátiles, susceptibles de reforzarse con toda facilidad y eficacia siempre que las circunstancias lo requieran.

El tipo de inyección que debe utilizarse en estos cables, fue objeto de polémica. La mayoría de las realizaciones presentaban productos tipo cera, y en la citada sesión relativa al tema de los aceros, se señaló que todas estas innovaciones en los productos de inyección, deben controlarse muy estrictamente. Por el momento, se considera que la protección con lechada de cemento es la mejor.

El jueves día 20 se dedicó una sesión a nuevos métodos para la construcción de estructuras de hormigón. De gran interés fueron tres ponencias en las que se expusieron nuevas soluciones, desde el punto de vista del proyectista, del constructor, y del subcontratista especializado. Por la tarde, se comentaron las conclusiones de las diferentes sesiones, así como las principales contribuciones al Congreso, entre las que se incluyó la presentada por Dragados y Construcciones.

Como innovación, se celebraron, cada tarde, las "Poster Sessions" en las cuales los autores de comunicaciones que por falta de tiempo no podían ser presentadas en las diferentes sesiones del Congreso, tenían la oportunidad de exponerlas a todos los asistentes interesados. Su celebración fue altamente positiva, pues en estas sesiones se establecía un diálogo con el Autor y se podía profundizar en aspectos que difícilmente podrían tratarse en una sesión normal.

En la representación española en el Congreso figuraban, aparte de los anteriormente citados, el Secretario de la ATEP, Rafael Piñeiro, Santiago Pérez-Fadón de FERROVIAL, S.A. y J.B. Ripoll y Ramón Martí Ayxalá, de Centro de Trabajos Técnicos, S.A.

Finalmente, querría destacar la presentación, por parte de la mayoría de los países, de publicaciones con las principales realizaciones por ellos ejecutadas en los últimos cuatro años. Estas publicaciones creo que son muy interesantes, tanto desde el punto de vista técnico como del comercial. España fue quizás el único de los países de alto nivel de construcción que no presentó su publicación. Espero y desde aquí hago una llamada a todos, proyectistas y empresas constructoras, para que se animen a ello, que en el próximo Congreso de la FIP que habrá de celebrarse, en Hamburgo, en 1990, figure una publicación sobre realizaciones españolas.

Asimismo, y en la línea de lo anterior, creo que en España tenemos realizaciones de un nivel muy superior a muchas de las presentadas en el Congreso. Se debería hacer un esfuerzo para tratar de exponerlas en eventos de este tipo, ya que son excelentes plataformas para futuras colaboraciones internacionales.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Reunión del Consejo de la F.I.P.

El sábado día 15 del pasado febrero, coincidiendo con el X Congreso Internacional de la F.I.P., y con la asistencia de veintiséis delegados de los distintos Grupos Nacionales integrados en la Federación, se celebró en Taj Palace Hotel, de Nueva Delhi, India, la primera de las reuniones del Consejo de la F.I.P. correspondientes al presente año 1986. En representación de la A.T.E.P. participó el Sr. Piñeiro.

De los temas tratados de acuerdo con el amplio orden del día previsto, a continuación se comentan aquellos que, por su interés, se considera oportuno destacar, para general conocimiento.

- Se ha reorganizado el Presidium de la F.I.P., habiéndose incorporado al mismo los siguientes señores: Prof. L.V. Mikhailov (Rusia), Mr. Oud (Holanda) y Mr. Janda (Checoslovaquia).

- Se informó que también se ha reorganizado la Secretaría de la F.I.P. Han cesado en las funciones que hasta ahora venían desempeñando, Mr. Shacklock, que era Secretario General y Tesorero, y los Secretarios Técnicos de las Comisiones de la F.I.P. Mr. Crozier, uno de estos Secretarios, continuará desempeñando el cargo de Editor de las Notas de la F.I.P. La Secretaría funcionará bajo los auspicios de la Institution of Structural Engineers, en Londres, y el Dr. R.P. Andrew será el que desempeñe el cargo de Secretario. Próximamente se designará el nuevo Tesorero.

  Los Presidentes de las distintas Comisiones Técnicas, deberán designar sus correspondientes Secretarios, preferiblemente de entre el personal de sus propias organizaciones o de su Grupo miembro de la F.I.P. De acuerdo con este criterio, las Comisiones de "Estructuras en zonas sísmicas" y "Práctica constructiva" ya han nombrado sus nuevos Secretarios.

- Las Asambleas Generales de la F.I.P., que hasta ahora se venían celebrando coincidiendo con los Congresos, en el futuro, y según la propuesta formulada, se celebrarán con ocasión de los Simposios entre Congresos. No obstante, la decisión final sobre este tema se adoptará en la próxima reunión del Consejo, aunque ya, en este X Congreso no se reunió la Asamblea.

- Con el objeto de preparar ejemplos de cálculo de estructuras siguiendo las normas de la Publicación de la F.I.P. "Practical design of reinforced and prestressed concrete structures", se está estudiando la formación de una nueva Comisión Técnica. Se ha solicitado a los diversos Grupos Nacionales propongan un representante, preferiblemente algún ingeniero joven pero suficientemente experimentado, para formar parte de la misma. Estos ejemplos de cálculo se publicarán con el carácter de Manual.

- Se informó que se ha constituído un Comité Mixto CEB-FIP-IABSE, para la revisión del actual "Model Code" y la redacción de una nueva edición del mismo que se pretende publicar en el plazo de cuatro años. Las propuestas de modificaciones sólo se admitirán hasta setiembre de 1986, para dar tiempo a su posterior discusión y redacción final del nuevo texto. La F.I.P. considera que, dado el poco tiempo disponible, la aportación que se pueda hacer no va a ser todo lo amplia que sería de desear.

- Con motivo del X Congreso, se otorgaron los siguientes nombramientos y Medallas:

  Medallas Freyssinet a:

  – R. Lacroix (Francia)
  – S. Inomata (Japón)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Medallas de la F.I.P. a:

- J.H. van Loenen (Holanda)
- C.R. Alimchandani (India)
- T.N. Subba Rao (India)
- H.F. Cabjolsky (Argentina)
- J. Mathivat (Francia)

Miembros de Honor de la F.I.P.:

- B.W. Shacklock (Inglaterra)
- W.F.G. Crozier (Inglaterra)

- Se aprobó el balance final correspondiente al pasado año 1985.
- Se dió cuenta de las nuevas publicaciones de la F.I.P. que han sido editadas con motivo del X Congreso y que son:
  - Pilotes prefabricados.
  - Proyecto y construcción de barcos de hormigón.
  - Garantía y control de calidad de las estructuras de hormigón con armaduras postesas.
  - Inspección y conservación de las estructuras de hormigón armado y hormigón pretensado.
  - Hormigonado en tiempo caluroso.

Próximamente, se editarán también las siguientes publicaciones:

- Cálculo de estructuras prefabricadas de hormigón, para edificios de varias plantas.
- Tesado de tendones.
- Corrosión y protección contra la corrosión de los anclajes al terreno.
- Protección contra la corrosión, de tendones no adherentes.

- Se informó sobre los trabajos que vienen desarrollando las diferentes Comisiones Técnicas de la F.I.P., algunas de las cuales celebraron reunión coincidiendo con el X Congreso.
- Fue aprobado el siguiente calendario para próximas reuniones:
  - Para el Consejo:
    - del 4 al 9 de octubre de 1986, en Viena (Austria)
    - del 26 al 28 de abril de 1987, en Amsterdam (Holanda)
    - los días 5, 6 y 7 de septiembre de 1987, en París (Francia)
  - El próximo XI Congreso se celebrará, en Hamburgo (Alemania), durante los días 3 al 7 de junio de 1990.

    Para el XII Congreso, de 1994, se han recibido invitaciones de Japón (Tokyo), China (Pekin o Shanghai) y Estados Unidos (Nueva Orleans).
  - El próximo Simposio se celebrará en 1988, en Israel, (Tel Aviv), durante los días 4 al 9 de setiembre.
  - Se ha presentado una oferta de Hungría, para organizar en Budapest el Simposio de 1992. La oferta ha sido aceptada en principio.
- De conformidad con el acuerdo adoptado, la próxima reunión del Consejo se celebrará, em Viena (Austria), durante los días 4 al 9 del próximo mes de octubre.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Reunión de la Comisión de Prefabricación de la F.I.P.

Coincidiendo con el X Congreso Internacional de la F.I.P., el día 17 del pasado mes de febrero se celebró la primera de las dos reuniones anuales reglamentarias de la Comisión Técnica de la F.I.P. que se ocupa del tema de "Prefabricación". En la misma participaron 29 de sus Miembros. La A.T.E.P. estuvo representada por el Sr. Piñeiro.

En esta reunión, el que hasta ahora ha sido Presidente de la Comisión, Mr. Bernander, de Suecia, anunció que, en el futuro, esta Presidencia la ocupará Mr. van Acker, de Bélgica.

Se pasó revista al estado actual de la labor que tienen encomendada los distintos Grupos de Trabajo integrados en la Comisión.

El Grupo de Trabajo que se ocupa del estudio de las losas aligeradas, de hormigón pretensado, para forjados, anunció que viene trabajando en íntimo contacto con Grupos análogos del CEB y de Estados Unidos, y que su labor está ya casi concluída; por lo que espera que en la próxima edición del Mode Code, podrá incluirse un nuevo capítulo con las oportunas especificaciones relativas a este tipo de elementos estructurales.

El Grupo de Trabajo sobre "Traviesas de hormigón", una vez realizadas las correcciones que le han sido propuestas, está redactando el texto final que se espera pueda editarse, como publicación de la F.I.P., durante el presente año 86.

El Grupo de Trabajo sobre forjados constituídos a base de viguetas y bloques de entrevigado, que dirige la representación española en la Comisión, continúa la redacción del borrador correspondiente, con arreglo al índice ya aprobado en anteriores reuniones. En este trabajo, en la actualidad, colabora el representante de México y, para fecha próxima, se espera la incorporación al grupo de un representante del Reino Unido. Por otra parte, Mr. van Acker prometió que enviará copia de unos textos, relacionados con este tema, que han sido publicados en el nº 27 de los "Cahiers Techniques du Bâtiment", y que considera pueden ser utiles para el trabajo que se está realizando.

Se anunció que hace falta nombrar un nuevo Presidente para el grupo que se ocupa del curado acelerado del hormigón, por haber dimitido el que hasta ahora ostentaba dicho cargo.

Se acordó formar nuevos Grupos de Trabajo para el estudio de los siguientes temas:

- Estructuras constituídas a base de losas aligeradas compuestas.
- Estructuras de hormigón a base de placas delgadas prefabricadas.
- Control de calidad.

Se anunció la próxima publicación en las Notas de la F.I.P. de un informe sobre "Prefabricación de elementos pretensados en bancadas de gran longitud".

Aceptando la invitación del representante de Hungría, se acordó que la segunda reunión reglamentaria de la Comisión de Prefabricación correspondiente al presente año 1986, se celebrará, en Budapest, durante los días 10 al 12 del próximo mes de octubre.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Reunión de la Comisión sobre "Práctica Constructiva" de la F.I.P.

Los días 21 y 22 de febrero de 1986, inmediatamente después de las Sesiones del X Congreso de la F.I.P. celebrada en Nueva Delhi (India), se reunió la Comisión sobre "Práctica Constructiva", en Agra (India). A esta reunión asistió, en representación de la A.T.E.P., D. Santiago Pérez-Fadón, Miembros español de dicha Comisión.

En la reunión se pasó revista a los informes que han sido recientemente terminados por los diferentes Grupos de Trabajo, y cuya relación es la siguiente:

a) Tesado de tendones: relación entre fuerza y alargamiento.

b) Hormigonado en climas cálidos.

c) Garantía de calidad y control de calidad para hormigón postesado.

d) Corrosión y protección de anclajes pretensados al terreno.

e) Inspección y mantenimiento de estructuras de hormigón.

Así mismo se comentó la situación de los trabajos en curso:

a) Inyección de vainas en hormigón pretensado.

b) Reparación y refuerzo de estructuras de hormigón armado y pretensado.

c) Seguridad en las construcciones de hormigón.

Finalmente, se propusieron ideas para futuros Grupos de Trabajo que elaboraran nuevos informes, de las cuales se aceptaron:

a) Participación en la revisión del CEB/FIP Model Code.

b) Especificaciones para los trabajos de postesado.

La Comisión celebrará su próxima reunión, en mayo de 1987, en Hamburgo, Alemania.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



asociación técnica
española del pretensado

hormigón y acero n.º 159

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026