

# hormigón

## **y ACERO**

*nº160*

*ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.*

*DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77*

*INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)*

*APARTADO 19.002. COSTILLARES. CHAMARTIN.*

*28080 MADRID*

# MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).**— Pº de la Habana, 14. 28036 Madrid.
- AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.**— Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.
- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMEN".**— Velázquez, 23. 28001 Madrid.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**— Orense, 10. 28020 Madrid.
- AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.**— Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.
- AZMA, S.A.**— Pº de la Habana, 16. 28036 Madrid.
- BIGUETES, S.L.**— Partida Altabix, s/n. 03000 Elche (Alicante).
- CAMARA, S.A.**— Apartado 180. 36080 Pontevedra.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.**— Grijalba, 9. 28006 Madrid.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.**— C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Vicenç dels Horts (Barcelona).
- CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX).**  
Gabinete de Información y documentación.— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A., C.T.T., S.A.**— Aribau, 185. 08021 Barcelona.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.**— Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
- COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS DE MADRID.**— Almagro, 42. 28010 Madrid.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.**— Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.**— Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.
- CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.**— Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.**— Ayala, 42. 28001 Madrid.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**— Avda. de América, 24. 28028 Madrid.
- EMESA-TREFILERIA, S.A.**— Apartado 451. 15080 La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI).** Departamento Obras Especiales.— Padilla, 46. 28006 Madrid.
- ENAGA, S.A.**— Hermanos Fernández Carvajal, 31. 28023 Pozuelo de Alarcón (Madrid).
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A.** Biblioteca.— Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.**— Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
- ESTEYCO, S.A.**— Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).**— Arapiles, 14. 28015 Madrid.
- EUROCONSULT, S.A.**— Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).
- FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).**— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- FORJADOS DOMO.**— Hermosilla, 64. 28001 Madrid.
- FREYSSINET, S.A.**— General Perón, 24. 28020 Madrid.
- GRACE, S.A.**— Apartado 523. 08080 Barcelona.
- HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.**— Almogávares, 11 - 17. 08018 Barcelona.
- HISPANO-ALEMANA DE CONSTRUCCIONES, S.A.**— Capitán Haya, 51. 28020 Madrid.
- HORMIGONES GERONA, S.A.**— Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
- HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.**— Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.

*(Continúa en el int. de contraportada)*

# MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

*(Continuación de Int. Portada)*

- HUARTE Y CIA, S.A. Departamento Técnico.**— Profesor Waksman, 14. 28036 Madrid.
- IBERDUERO, S.A. Centro Documentación.**— Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERDUERO, S.A. Centro de Documentación.**— Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).**— Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
- IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.**— Plaza Gala Placidia, 5-7. 08006 Barcelona.
- INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**— Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
- INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPISA).**— General Díaz Porlier, 49-51. 28001 Madrid.
- INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).**— Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
- INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.**— Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Dirección General de Carreteras. P<sup>o</sup> de la Castellana, 67. 28071 Madrid.
- INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).**— Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
- INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA).**— Biblioteca.— Orense, 70. 28020 Madrid.
- JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.**— Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
- LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- MECANOGUMBA, S.A.**— Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
- NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**— Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
- OBRAS Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES, S.A. (OCISA).**— Princesa, 3-7<sup>o</sup>. 28008 Madrid.
- PACADAR, S.A.**— Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
- PRENSOLAND, S.A.**— Calle Industria, s/n. 08529 Sant Martí de Centelles (Barcelona).
- PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.**— Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
- SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.**— Avda. del Triunfo, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
- SIKA, S.A.**— Carretera Madrid-Irún, km. 14,500. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
- SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA BBR (S.A.E. BBR).**— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SECEGSA).**— Estébanez Calderón, 3 - 1<sup>o</sup> A. 28020 Madrid.
- TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**— Velázquez, 105. 28006 Madrid.
- TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.**— Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
- TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).**— Monturiol, 5. 08210 Santa Marfá de Barberá (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente, su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO  
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO  
DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

# *hormigón y acero*

*n.º 160*

**3.º trimestre 1986**

**CUOTAS ANUALES**

| CATEGORIAS                                                                                                                  | ESPAÑA         | EXTRANJERO    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------------|
| Miembros "Personales" (personas naturales) .....                                                                            | 4.500,- ptas.  | 40,- dólares  |
| Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) .....                                                                            | 7.000,- ptas.  | 100,- dólares |
| Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) ..... | 12.000,- ptas. | 200,- dólares |

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - 28080 MADRID

Depósito Legal: M-853-1958  
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID  
ISSN: 0439-5689

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
BARREDO, Carlos  
CUVILLO, Ramón del  
CHUECA, Rafael  
ELICES, Manuel  
FERNANDEZ DE VILLALTA, Manuel  
FISAC, Miguel  
GONZALEZ VALLE, Enrique  
JODAR, Juan  
JULIA, Manuel  
LLOMBART, José Antonio  
MANTEROLA, Javier  
MARIA TOME, Javier  
MURCIA, Juan  
PIÑEIRO, Rafael  
POZO VINDEL, Florencio J. del  
ROMERO, Rafael  
SANCHEZ CASTRO, Carlos  
SANCHEZ GALVEZ, Vicente  
SIEGRIST, Carlos

# hormigón y acero

**N. 160**

## *índice*

|                                                                                                                                       | <u>Pág.</u> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>457-0-103</b> Formulación simple de la superficie resistente última del hormigón, a partir de un modelo pentaparamétrico . . . . . | 9           |
| Formulation simple de la surface résistante ultime du béton, à partir d'un modèle pentaparamétrique.                                  |             |
| Simple formulation of the ultimate strength surface of the concrete starting from a pentaparametrical model.                          |             |
| <i>M. Martínez Lafuente.</i>                                                                                                          |             |

|           |                                                                                                                                                                                                               |    |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 457-0-104 | Evaluación de deformaciones en forjados para viviendas. Relaciones canto/luz que satisfacen las limitaciones de flecha especificadas por la E.H.-82 . . . . .                                                 | 19 |
|           | Evaluation des déformations dans les planchers pour habitations. Rapports hauteur/portée qui satisfont les limitations de flèche spécifiées dans la E.H.-82.                                                  |    |
|           | Evaluation of deflections in dwelling floors. Depth/span ratios that satisfy the deflection limits specified in the E.H.-82.                                                                                  |    |
|           | <i>L. Villegas.</i>                                                                                                                                                                                           |    |
| 457-0-105 | Límites de esbeltez para soportes de hormigón armado: 1.— Límite de esbeltez inferior . . . . .                                                                                                               | 31 |
|           | Limites d'élancement pour poteaux en béton armé: 1.— Limite d'élancement inférieur.                                                                                                                           |    |
|           | Slenderness bounds for reinforced concrete columns: 1.— Lower slenderness bound.                                                                                                                              |    |
|           | <i>O. Rfo.</i>                                                                                                                                                                                                |    |
| 457-0-106 | Dimensionamiento en teoría de segundo orden de soportes esbeltos, de sección constante, de hormigón armado, en flexo-compresión esviada . . . . .                                                             | 39 |
|           | Dimensionnement en deuxième ordre, de poteaux élancés en béton armé, soumis à flexion bi-axiale.                                                                                                              |    |
|           | Second-order theory design of slender reinforced concrete columns in biaxial bending and compression.                                                                                                         |    |
|           | <i>A. Aires.</i>                                                                                                                                                                                              |    |
| 457-0-107 | Excentricidad ficticia $e^*$ . Fórmulas simplificadas para el dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado . .                                                                                    | 53 |
|           | Excentricité fictive $e^*$ . Formules simplifiées pour le dimensionnement des poteaux élancés en béton armé.                                                                                                  |    |
|           | Fictitious eccentricity $e^*$ . Simplified formulas for the design of slender reinforced concrete columns.                                                                                                    |    |
|           | <i>H. Corres; B. Alsaadi y F.J. León.</i>                                                                                                                                                                     |    |
| 457-0-108 | Un criterio local para determinar el límite de validez del esquema rebajado en las estructuras de membrana. Aplicación al paraboloid hiperbólico y a las velarias paraboidal y singular parabólica . . . . .  | 71 |
|           | Un criterium local pour déterminer la limite de validité du schéma rebaisé dans les structures de membrane. Application au paraboloid hyperbolique, "velaria" et surface singulier parabolique.               |    |
|           | A local criterion for assessing the validity limit of membrane structure's low outline. Its applicability to the hyperbolic paraboloid, parabolic velaroidal shell and singular parabolic velaroidal surface. |    |
|           | <i>R. Cortell.</i>                                                                                                                                                                                            |    |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 457-2-29  | <b>Un modelo incremental para el comportamiento instantáneo y diferido no lineal del hormigón bajo tensiones uniaxiales . .</b><br>Un modèle pour le comportement instantané et diferé, non linéaire du béton soumis à des contraintes uniaxiales.<br>An incremental model for non-linear instantaneous and time-dependent behaviour of concrete under uniaxial stresses.<br><i>I. Carol y J. Murcia.</i>                                                                                                                                               | 83  |
| 457-2-30  | <b>Análisis paso a paso en el tiempo, de estructuras reticulares, planas, de hormigón armado . . . . .</b><br>Analyse pas à pas dans le temps des ossatures planes en béton armé.<br>Time-dependent step by step analysis of reinforced concrete plane frames.<br><i>I. Carol y J. Murcia.</i>                                                                                                                                                                                                                                                          | 101 |
| 457-5-14  | <b>El problema de la transmisibilidad en las vibraciones mecánicas: la medición de las vibraciones . . . . .</b><br>Le problème de la transmissibilité dans les vibrations mécaniques: le mesurage des vibrations.<br>The problem of the transmissibility in the mechanical vibrations: the measuring of the vibrations.<br><i>M. Vieco.</i>                                                                                                                                                                                                            | 123 |
| 457-5-15  | <b>Aplicación del método de la matriz de flexibilidad a la determinación de las frecuencias angulares naturales en las vibraciones mecánicas de sistemas multigrados</b><br>Application de la méthode de la matrice de flexibilité à la détermination des fréquences angulaires naturelles dans les vibrations mécaniques des systèmes de plusieurs degrés.<br>Application of the matrix of flexibility method to the determination of the natural angular frequencies in the mechanical vibrations of the systems of many degrees.<br><i>M. Vieco.</i> | 129 |
| 457-8-108 | <b>Esfuerzo rasante en piezas compuestas. II . . . . .</b><br>Effort tangent le long de l'interface des pièces composées. II.<br>Shear at the interface of compound members. II.<br><i>J.J. Vallés.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 137 |

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

## ESPAÑA

ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.  
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).  
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT. S.A."— La Coruña.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Murcia.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Tarragona.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. Departamento de Laboratorios.— Santa Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.—Madrid.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
COMERCIAL Y COLOCADORA DE TEXSA, S.A.— Barcelona.  
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR. Biblioteca.—Sevilla.  
CONTROLEX.—Alicante.  
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Madrid.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Biblioteca.—Córdoba.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Córdoba.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.— León.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA OBRAS PUBLICAS.— Burgos.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE ALMADEN.—Almadén (Ciudad Real).  
ESTEBAN ORBEGOZO, S.A.—Zumárraga (Guipúzcoa).  
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.  
EXCELENTISIMO AYUNTAMIENTO DE GRANADA. Area de Obras Públicas e Infraestructura.— Granada.  
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.



FERROVIAL, S.A.— Madrid.  
 FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).  
 FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.— Madrid.  
 GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).  
 HORMADISA, S.L.—Puentecesures-Cordeiro (Pontevedra).  
 HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.  
 INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
 INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).  
 INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.  
 INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.  
 J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).  
 JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Consejería de Obras Públicas y Ordenación Territorial.  
 Servicio Tecnología e Información.—Valladolid.  
 LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.  
 LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).  
 LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
 LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.  
 LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
 MAHEMA, S.A.—Granollers (Barcelona).  
 MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.  
 MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE EDIFICACION. Sección de Normativa.—Madrid.  
 MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.  
 POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
 PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.  
 PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.  
 PREFABRICADOS ALAVESES, S.A. (PREASA).—Vitoria.  
 PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.  
 PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.  
 PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
 PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.  
 REALIZACIONES Y ESTUDIOS DE INGENIERIA, S.A. (REISA).—Pinto (Madrid).  
 RUBIERA, S.A.—León.  
 SAINCE.—Madrid.  
 SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.  
 SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.—Gerona.  
 SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.  
 SOCIEDAD ANONIMA FERROVIAL.—Zamora.  
 SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.  
 SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.  
 SUMMA, S.A.—Manresa (Barcelona).  
 TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).  
 TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Cantabria).  
 TERRATEST, S.A.—Madrid.  
 TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).—Madrid.  
 UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.  
 VIGUETAS MUBEMI.—Torrente (Valencia).

## EXTRANJERO

- ASOCIACION DE FABRICANTES DE CEMENTO PORTLAND DEL URUGUAY.—Montevideo (Uruguay).
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).
- CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).
- CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).
- LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de Angola).
- PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.—Santiago de Chile (Chile).
- PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.—Lima (Perú).
- SARET P.P.B. Cadre Technique.—Le Pontet (France).
- SCIENCE REFERENCE LIBRARY.—Londres (Inglaterra).
- UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).
- UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).
- UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).
- UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.—Facultad de Ingeniería. Biblioteca. Caracas (Venezuela).
- UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).
- UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

## MIEMBRO CORRESPONDIENTE

- ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

\* \* \*

## AVISO IMPORTANTE

### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.



PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



**HUESCA:**

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA

Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON

Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

**MADRID**

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10

Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4 - 8 -  
TORREJON DE ARDOZ

Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

**ZARAGOZA**

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

# Formulación simple de la superficie resistente última del hormigón a partir de un modelo pentaparamétrico

Manuel Martínez Lafuente. Dr. Ingeniero de Caminos  
SENER, Técnica Industrial y Naval, S.A.

## RESUMEN

En la exposición que sigue se presenta un nuevo modelo para aproximar la superficie resistente última del hormigón a partir de una formulación dependiente de cinco parámetros, que quedan determinados unívocamente en cuanto se conozcan los resultados de otros tantos ensayos característicos efectuados sobre probetas de dicho material. En la práctica, dichos parámetros pueden reducirse a cuatro, habida cuenta del comportamiento manifestado por el hormigón bajo regímenes de sollicitaciones pluriaxiales en tracción. Los resultados proporcionados por el modelo que se propone, guardan una correlación bastante satisfactoria con los que se deducen de otras formulaciones más complejas y suficientemente contrastadas por los ensayos.

## INTRODUCCION

La determinación de la superficie resistente última de los materiales de construcción, ha constituido desde antaño un objetivo básico de los investigadores, puesto que en base a ella deben definirse, en cada caso, los criterios válidos para el diseño estructural. Dicha superficie, que obviamente depende del estado de sollicitación elemental, se formula con toda generalidad para los materiales isotrópicos como:

$$F(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (I)$$

donde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son los invariantes del tensor tensión, que se expresan en la forma (ver referencia nº 1):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \end{aligned} \quad (II)$$

donde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las tensiones principales en un punto genérico del medio elástico, seleccionadas con el criterio  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

En la práctica, resulta más ventajoso formular, alternativamente, la expresión (I) en términos de las componentes tensionales sobre los planos octaédricos cuyos cosenos directores con las orientaciones principales del tensor tensión son idénticos ( $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ ). Dichas componentes valen:

$$\begin{aligned}\sigma_o &= \frac{1}{3} I_1 \\ \tau_o &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}\end{aligned}\tag{III}$$

Esta nueva formulación depende también del ángulo formado sobre cada plano octaédrico por el vector posición que, con origen en el eje hidrostático ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), recorre la superficie resistente última. El valor de este último (véase Figura 1) es:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{J_3 \cdot \sqrt{2}}{\tau_o^3} \right]\tag{IV}$$

donde  $J_3$  es el tercer invariante del desviador de tensiones, que se escribe en la forma:

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_o) \cdot (\sigma_2 - \sigma_o) \cdot (\sigma_3 - \sigma_o)\tag{V}$$

Se llega de esta manera a una función implícita equivalente a la ecuación (I) definida como:

$$G(\sigma_o, \tau_o, \theta) = 0$$

Algunos autores prefieren incorporar a la formulación de la superficie límite, los parámetros que definen la distancia del plano octaédrico al origen,  $\xi$ , y el radio vector,  $\rho$ , que proporciona en cada uno de éstos la posición de dicha superficie con relación al eje hidrostático. Esta variante tiene la ventaja de introducir en la fórmula variables con un significado físico concreto, aunque bajo un punto de vista estrictamente formal no hay ninguna diferencia entre la formulación resultante y la expresada en (V), ya que se verifican las relaciones siguientes (véase Figura 2):

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{3} \cdot \sigma_o \\ \rho &= \sqrt{3} \cdot \tau_o\end{aligned}\tag{VI}$$

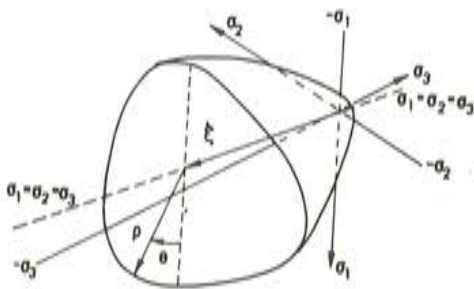


Fig. 1. Representación triaxial típica de la superficie resistente última de un material isotrópico.

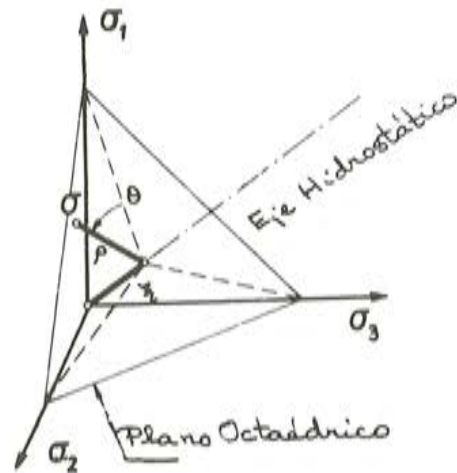


Fig. 2. Representación del estado tensional sobre un plano octaédrico.

Las condiciones de isotropía supuestas, exigen que la función (V) satisfaga las relaciones siguientes (véase Figura 3):

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_o, \theta) &= \rho(\sigma_o, \frac{2\pi}{3} - \theta); \text{ para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \rho(\sigma_o, \theta) &= \rho(\sigma_o, \frac{2\pi}{3} + \theta); \text{ para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \rho(\sigma_o, \theta) &= \rho(\sigma_o, -\theta) \quad ; \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

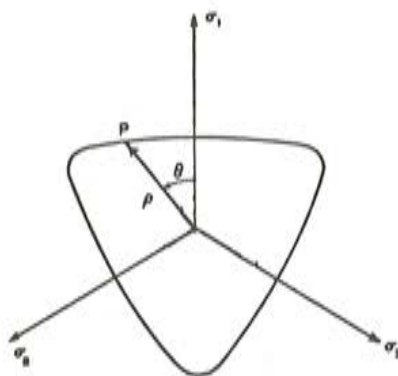


Fig. 3. Intersección de la superficie resistente última con los planos octaédricos.

La tensión tangencial octaédrica aparece, en ocasiones, reemplazada en las expresiones antedichas por el segundo invariante del desviador de tensiones,  $J_2$ , con quien se relaciona mediante:

$$\tau_o = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot J_2} \quad (\text{VIII})$$

Los intentos acometidos, hasta el presente, para tratar de expresar analíticamente las superficies resistentes últimas de los materiales, se han dirigido, en general, a explicitar alguna de las variables que intervienen en las fórmulas (I) o (V) en términos de las dos restantes. Se han observado, en este sentido, dos tendencias claras. La primera de ellas propone formulaciones del tipo:

$$\tau_o = f(\sigma_o, \theta) \quad (\text{IX})$$

En este grupo se encuentran las que se derivan de los criterios clásicos de Rankine, Saint-Venant, Tresca, Huber-von Mises y Coulomb-Mohr, en las que, además, la función  $f(\sigma_o, \theta)$  es equivalente al cociente de una función de la variable  $\sigma_o$  por otra función que depende sólo de  $\theta$ , es decir:

$$f(\sigma_o, \theta) = \frac{g(\sigma_o)}{h(\theta)} \quad (\text{X})$$

En estos casos, además, la función  $g(\sigma_o)$  es de tipo polinómico y lineal (véase referencia n° 2).

Otras propuestas más recientes, tales como las de Drucker-Prager o Lade-Duncan, también obedecen a formulaciones como las que acaban de describirse.

La experiencia ha demostrado que la mayoría de los criterios antedichos no son apropiados para representar el comportamiento último de diversos tipos de materiales bajo condiciones de sollicitación pluriaxiales, como es el caso del hormigón.

En el segundo grupo de formulaciones, la variable que aparece explicitada es la tensión normal octaédrica,  $\sigma_o$ , o tensión media. Se llega entonces a expresiones del tipo siguiente:

$$\sigma_o = f'(\tau_o, \theta) \quad (XI)$$

Entre estas últimas cabe destacar las obtenidas por Willam-Warnke y Ottosen (véase referencia n° 3) para el hormigón, a partir de los resultados evidenciados por los ensayos sobre probetas bajo diferentes estados de sollicitación. La primera de ellas depende de cinco parámetros, mientras que la segunda se ajusta sólo con cuatro de ellos. Recientemente, Podgórski ha efectuado también una propuesta de este tipo, aplicable a diferentes materiales y que resulta particularmente adecuada para el hormigón (véase referencia n° 4).

Siguiendo esta última tendencia, se expone a continuación una particularización simple de la expresión (XI), que permite deducir el comportamiento último del hormigón en base a los resultados proporcionados por cinco ensayos característicos.

### APROXIMACION PROPUESTA

Se propone en este trabajo, aproximar la superficie resistente última del hormigón mediante la función siguiente:

$$\sigma_o = [a + b(\theta) \cdot \frac{\tau_o}{f'_c} + c \cdot (\frac{\tau_o}{f'_c})^2] \cdot f'_c \quad (XII)$$

donde  $a$  y  $c$  son dos constantes que hay que determinar, mientras que el término  $b(\theta)$  se define como:

$$b(\theta) = b_o + b_1 \cdot \cos \theta + b_2 \cdot \sen \theta \quad (XIII)$$

con  $b_o$ ,  $b_1$  y  $b_2$  también constantes.

En la expresión (XII),  $f'_c$  designa a la tensión de rotura del hormigón bajo compresión uniaxial, que es la característica más representativa del material.

Como la aproximación propuesta depende de cinco constantes, se precisará conocer, en cada caso, otros tantos resultados correspondientes a determinados ensayos realizados sobre probetas en laboratorio. Entre las infinitas soluciones posibles, y tratando de ajustar al máximo la superficie límite dentro de los márgenes habituales de variación de las tensiones en los elementos de construcción, se han escogido aquí las correspondientes a los siguientes supuestos:

- Ensayo Triaxial de Tracción
- Ensayo Uniaxial de Tracción
- Ensayo Uniaxial de Compresión
- Ensayo Biaxial de Compresión ( $\sigma_2/\sigma_3 = 0,50$ )
- Ensayo Biaxial de Compresión ( $\sigma_2/\sigma_3 = 1,00$ )

Si se designan por  $f_{vt}$ ,  $f_t$ ,  $f'_c$ ,  $f'_{bc}$  y  $f'_{cc}$  a los valores absolutos de las tensiones que producen la rotura, respectivamente, en las cinco situaciones precedentes, puede comprobarse fácilmente, a partir de las expresiones dadas en el apartado anterior, que se verifican las relaciones siguientes:

- Para  $f_{vt}$  :  $\sigma_o = f_{vt}$  ;  $\tau_o = 0$  ;  $\theta = \text{cualquiera}$
- Para  $f_t$  :  $\sigma_o = \frac{1}{3} f_t$  ;  $\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} f_t$  ;  $\theta = 0$

- Para  $f'_c$  :  $\sigma_o = -\frac{1}{3} f'_c$  ;  $\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} f'_c$  ;  $\theta = \frac{\pi}{3}$
- Para  $f'_{bc}$  :  $\sigma_o = -\frac{1}{2} f'_{bc}$  ;  $\tau_o = \frac{1}{\sqrt{6}} f'_{bc}$  ;  $\theta = \frac{\pi}{6}$
- Para  $f'_{cc}$  :  $\sigma_o = -\frac{2}{3} f'_{cc}$  ;  $\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} f'_{cc}$  ;  $\theta = 0$

Si se introduce la notación:

$$\begin{aligned} \alpha &= f_{vt}/f'_c \\ \beta &= f_t/f'_c \\ \gamma &= f'_{bc}/f'_c \\ \delta &= f'_{cc}/f'_c \end{aligned} \tag{XIV}$$

las cinco constantes que intervienen en la fórmula (XII) quedan determinadas unívocamente.

Las condiciones del ensayo triaxial de tracción, particularizadas en la expresión general (XII), obligan a que se verifique:

$$a = \alpha \tag{XV}$$

Del ensayo de tracción uniaxial, se deduce:

$$\beta = 3a + (b_o + b_1) \cdot \sqrt{2} \beta + \frac{2}{3} \beta^2 c \tag{XVI}$$

mientras que del ensayo biaxial de compresión ( $\sigma_2/\sigma_3 = 1.00$ ), se desprende:

$$2 \delta = -3a - (b_o + b_1) \cdot \sqrt{2} \delta - \frac{2}{3} \delta^2 c \tag{XVII}$$

Las expresiones (XVI) y (XVII) conducen a:

$$c = -\frac{9}{2} \frac{\alpha \beta - \delta (\alpha - \beta)}{(\delta - \beta) \beta \delta} \tag{XVIII}$$

$$b_o + b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + 3 \left( \frac{\alpha \beta - \delta (\alpha - \beta)}{(\delta - \beta) \delta} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right]$$

De los ensayos de compresión biaxial y compresión simple se obtienen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \gamma &= -2 \alpha - (2 \cdot b_o + \sqrt{3} \cdot b_1 + b_2) \frac{\gamma}{\sqrt{6}} - \frac{c}{3} \gamma^2 \\ 1 &= -3 \alpha - (b_o + \frac{b_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b_2) \sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot c \end{aligned} \tag{XIX}$$

que unidas a las ecuaciones (XVIII) permiten determinar las constantes  $b_o$ ,  $b_1$  y  $b_2$  buscadas.

La ecuación (XII) sólo es aplicable para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ , quedando definida la superficie resistente última, en el resto del espacio, a partir de las relaciones (VII).

A los efectos prácticos, bastan cuatro parámetros para determinar la expresión propuesta, ya que el hormigón manifiesta un comportamiento, bajo sollicitaciones pluriaxiales de tracción, de tipo frágil, bastante aproximado al modelo propuesto por Rankine, en el que la ro-



tura se produce cuando se alcanza un determinado valor de la tensión principal máxima. En estas condiciones, puede admitirse con suficiente aproximación que se verifica:

$$f_{vt} = f_t \rightarrow \alpha = \beta \quad (\text{XX})$$

quedando reducido el problema planteado a la determinación de cuatro coeficientes.

Por otra parte, los resultados de los ensayos muestran que el hormigón presenta poca dispersión bajo sollicitaciones biaxiales de compresión; admitiéndose que éste se encuentra suficientemente aproximado, en su comportamiento resistente último en tensión plana, mediante el diagrama propuesto por Kupfer y Gerstle (véase referencia nº 5). Partiendo de la formulación propuesta por dichos autores, se obtienen los siguientes valores para las resistencias últimas del hormigón bajo sollicitación biaxial de compresión:

$$f_{bc}^* = \frac{1 + 3,65 \cdot 0,50}{1,5^2} \cdot f_c^* \rightarrow \gamma = 1,2556 \quad (\text{XXI})$$

$$f_{cc}^* = \frac{1 + 3,65}{4} \cdot f_c^* \rightarrow \delta = 1,1625$$

Admitiendo para  $\gamma$  y  $\delta$  los valores anteriores y suponiendo que  $\alpha = \beta$ , los coeficientes de la ecuación (XII) adoptan los valores que se dan en la Tabla 1 para diferentes relaciones entre  $f_t$  y  $f_c^*$ .

TABLA 1

| $f_t/f_c^*$ | a       | $b_0$     | $b_1$     | $b_2$     | c         |
|-------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0,060       | 0,06000 | - 0,02350 | - 1,38475 | - 0,02217 | - 0,21066 |
| 0,080       | 0,08000 | - 0,02879 | - 1,37464 | - 0,02985 | - 0,28608 |
| 0,100       | 0,10000 | - 0,03268 | - 1,36436 | - 0,03768 | - 0,36433 |
| 0,120       | 0,12000 | - 0,03510 | - 1,35391 | - 0,04569 | - 0,44558 |

## CARACTERISTICAS DE LA SUPERFICIE RESISTENTE ULTIMA DEL HORMIGON

Los ensayos han demostrado que la superficie resistente última del hormigón adopta la forma de un "pseudoparaboloide", que satisface las condiciones siguientes:

- Se trata de una superficie convexa.
- Sus meridianos no se intersectan con el eje hidrostático negativo.
- Los meridianos son de tipo parabólico.
- La intersección (traza) de dicha superficie con los planos octaédricos, varía desde una configuración triangular para los niveles bajos de la tensión octaédrica, hasta una circular para elevadas compresiones medias.

El modelo propuesto verifica estas condiciones, como veremos a continuación, siempre que se cumplan las condiciones:  $a > 0$  y  $c < 0$ , que, obviamente, se satisfacen dentro del rango de variación habitual de las características resistentes del hormigón. Como prueba de ello, la Figura 4 muestra la representación de la superficie límite propuesta, sobre los planos octaédricos, para intensidades crecientes (en valor absoluto) de la tensión normal media  $\sigma_0$ .

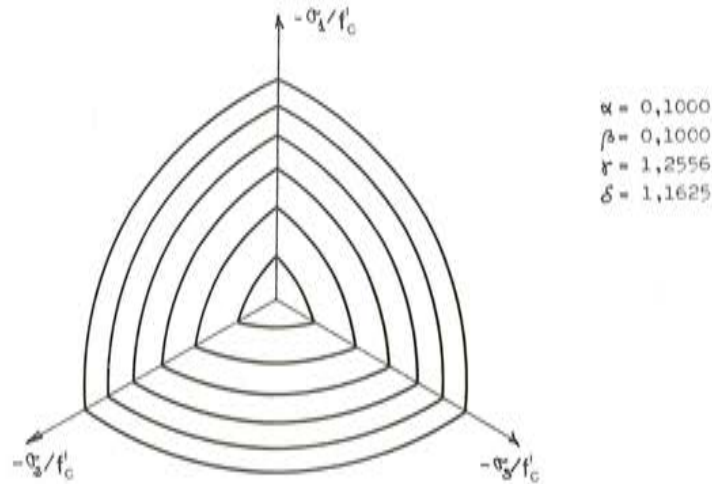


Fig. 4. Intersecciones de la superficie límite propuesta, sobre los planos octaédricos, para diferentes valores de la tensión normal media.

### COMPARACION DEL MODELO PROPUESTO, CON OTROS SANCIONADOS POR LA EXPERIENCIA

Para comparar la superficie límite propuesta, con los resultados de los ensayos sobre probetas, y ante la dificultad de poder disponer de un número de éstos suficientemente amplio y fiable, se recurre a su contraste con otras formulaciones convencionales, suficientemente sancionadas por la experiencia. La comparación se centra sobre dos aspectos básicos de gran interés práctico: el dominio resistente último para solicitaciones biaxiales, y la variación de las líneas meridianas extremas con el valor de la tensión normal media.

El dominio resistente último bajo sollicitación biaxial es el resultado de la intersección de la superficie resistente última, con uno de los planos definido por dos de las tres tensiones principales. Si se supone que  $\sigma_3 = 0$ , la ecuación (XII) proporciona el diagrama buscado, para diferentes relaciones entre las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Se obtiene así una representación como la de la Figura 5, cuya comparación con el criterio de Kupfer y Gerstle es totalmente satisfactoria, tal como muestra la Tabla 2.

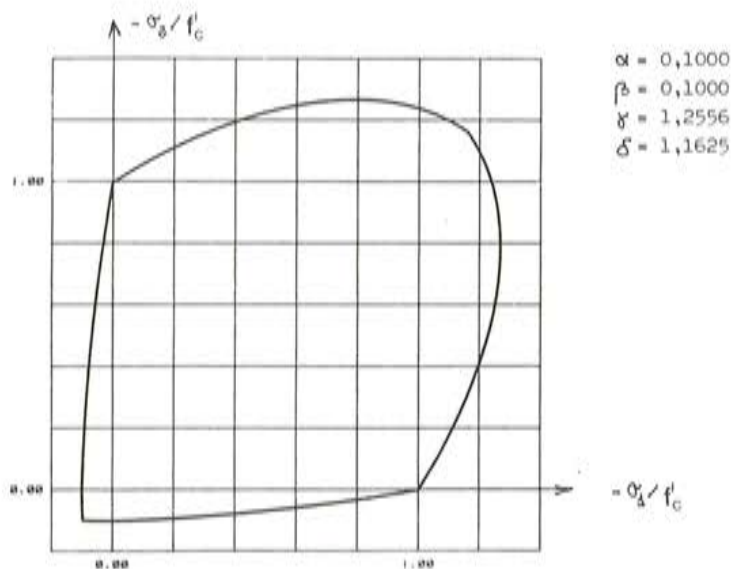


Fig. 5. Dominio resistente último, bajo sollicitación biaxial, resultante de la ecuación (XII).

Los meridianos extremos (compresión para  $\theta = \pi/3$  y tracción para  $\theta = 0$ ), se obtienen de la intersección de la superficie resistente última, con los planos en los que se igualan dos de las tensiones principales; y vienen definidos directamente por la ecuación (XII), particularizada para los valores citados de la variable  $\theta$ . Procediendo de esta forma se obtiene la representación proporcionada por la Figura 6, cuya comparación numérica con la resultante del modelo propuesto por Ottosen (véase referencia nº 6) se recoge en la Tabla 3.

TABLA 2

Comparación del dominio resistente último, bajo sollicitación biaxial ( $\alpha = \beta = 0,1000$ ;  $\gamma = 1,2556$ ;  $\delta = 1,1625$ ), con el propuesto por Kupfer y Gerstle (referencia nº 5)

| $ \sigma_1/\sigma_2 $ | Dominio       | $ \sigma_u/f'_c $ (1) | $ \sigma_u/f'_c $ (2) | Error (%) |
|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------|
| 1,00                  | Bitracción    | 0,097378              | 0,100000              | 2,62      |
| 0,80                  | Bitracción    | 0,098135              | 0,100000              | 1,87      |
| 0,60                  | Bitracción    | 0,098786              | 0,100000              | 1,21      |
| 0,40                  | Bitracción    | 0,099315              | 0,100000              | 0,69      |
| 0,20                  | Bitracción    | 0,099718              | 0,100000              | 0,28      |
| 0,00                  | Tracción s.   | 0,100000              | 0,100000              | 0,00      |
| 0,20                  | Tracc.-Comp.  | 0,099564              | 0,098425              | 1,16      |
| 0,40                  | Tracc.-Comp.  | 0,099039              | 0,096899              | 2,21      |
| 0,60                  | Tracc.-Comp.  | 0,098438              | 0,095420              | 3,16      |
| 0,80                  | Tracc.-Comp.  | 0,097772              | 0,093985              | 4,03      |
| 1,00                  | Tracc.-Comp.  | 0,097051              | 0,092593              | 4,81      |
| 1,25                  | Tracc.-Comp.  | 0,120103              | 0,113636              | 5,69      |
| 2,50                  | Tracc.-Comp.  | 0,226221              | 0,208333              | 8,59      |
| 5,00                  | Tracc.-Comp.  | 0,391549              | 0,357143              | 9,63      |
| $\infty$              | Compresión s. | 1,000000              | 1,000000              | 0,00      |
| 5,00                  | Bicompresión  | 1,125373              | 1,201389              | 6,33      |
| 2,50                  | Bicompresión  | 1,225375              | 1,255102              | 2,37      |
| 1,25                  | Bicompresión  | 1,242039              | 1,209877              | 2,66      |
| 1,00                  | Bicompresión  | 1,162500              | 1,162500              | 0,00      |

(1) Valores proporcionados por la ecuación (XII).

(2) Valores propuestos por Kupfer y Gerstle.

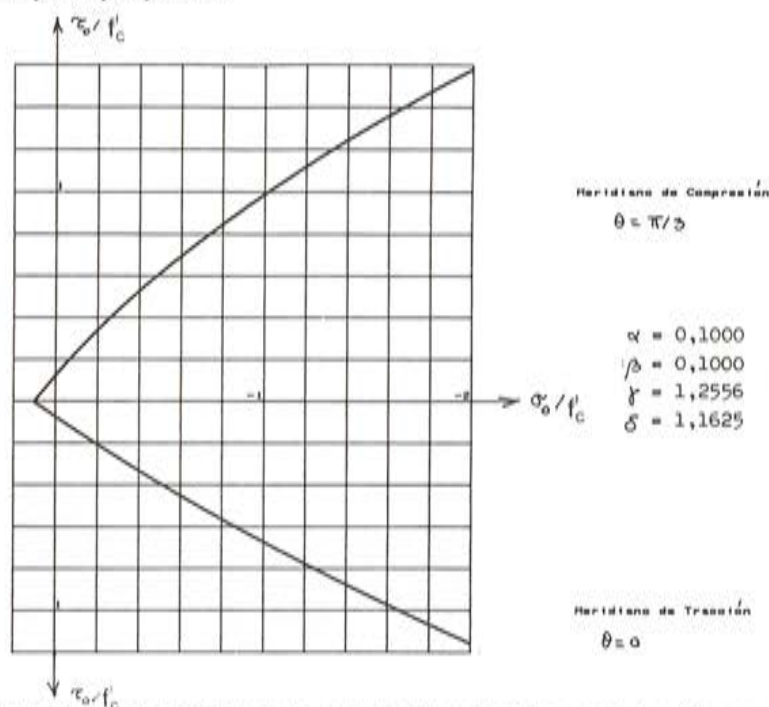


Fig. 6. Variación de los meridianos de compresión y tracción con la tensión normal media.

TABLA 3

Comparación de los meridianos de tracción y compresión ( $\alpha = \beta = 0,1000$ ;  $\gamma = 1,2556$ ;  $\delta = 1,1625$ ), con los que se deducen de la formulación propuesta por Ottosen (referencia n<sup>o</sup> 6)

| $\sigma_o/f'_c$ | Meridiano  | $\tau_o/f'_c$ (1) | $\tau_o/f'_c$ (2) | Error (%) |
|-----------------|------------|-------------------|-------------------|-----------|
| 0,10            | Tracción   | 0,000000          | 0,002867          | —         |
| 0,05            | Tracción   | 0,035462          | 0,036122          | 1,83      |
| 0,01            | Tracción   | 0,063375          | 0,062517          | 1,37      |
| 0,00            | Tracción   | 0,070291          | 0,069087          | 1,74      |
| -0,05           | Tracción   | 0,104521          | 0,101769          | 2,70      |
| -0,10           | Tracción   | 0,138181          | 0,134176          | 2,99      |
| -0,20           | Tracción   | 0,203898          | 0,198192          | 2,88      |
| -0,50           | Tracción   | 0,389846          | 0,384293          | 1,44      |
| -1,00           | Tracción   | 0,670232          | 0,677098          | 1,01      |
| -1,50           | Tracción   | 0,923074          | 0,951692          | 3,01      |
| -2,00           | Tracción   | 1,155178          | 1,211101          | 4,62      |
| 0,10            | Compresión | 0,000000          | 0,005136          | —         |
| 0,05            | Compresión | 0,064841          | 0,064091          | 1,17      |
| 0,01            | Compresión | 0,114061          | 0,110117          | 3,58      |
| 0,00            | Compresión | 0,126038          | 0,121474          | 3,76      |
| -0,05           | Compresión | 0,184144          | 0,177405          | 3,80      |
| -0,10           | Compresión | 0,239584          | 0,231989          | 3,27      |
| -0,20           | Compresión | 0,343749          | 0,337479          | 1,86      |
| -0,50           | Compresión | 0,617085          | 0,629505          | 1,97      |
| -1,00           | Compresión | 0,991977          | 1,056553          | 6,11      |
| -1,50           | Compresión | 1,307392          | 1,432198          | 8,71      |
| -2,00           | Compresión | 1,584975          | 1,771471          | 10,53     |

(1) Valores proporcionados por la ecuación (XII).

(2) Valores obtenidos a partir de la formulación de Ottosen, para  $f_t/f'_c = 0,10$ .

Conforme aumenta en valor absoluto la tensión normal media, se incrementa la diferencia entre los meridianos obtenidos con la ecuación (XII) y los propuestos por Ottosen, como cabía esperar, ya que dicho autor ajusta su diagrama en base a los resultados de un ensayo bajo elevadas compresiones medias. A los efectos prácticos, no son significativas estas diferencias puesto que, por una parte, es difícil efectuar ensayos en probetas de hormigón bajo elevados regímenes de compresión, tal como denota la escasa publicación de los mismos (entre los que existe cierta dispersión), pero, por otra, si lo que se pretende es, no ya obtener una formulación general de la superficie resistente última del hormigón, sino, por contra, llegar a una formulación simple de la misma aplicable dentro de los márgenes habituales del diseño estructural, es evidente que la propuesta efectuada con anterioridad cumple sobradamente dicho requisito.

## CONCLUSIONES

La formulación de las superficies resistentes últimas de los materiales de construcción, en términos de los invariantes del tensor de tensiones, puede efectuarse por diversos caminos alternativos, que pueden resultar técnicamente aceptables con vistas a su utilización práctica. En cualquier caso, siempre hay que tener en cuenta los resultados evidenciados por los ensayos, para decidir la propuesta más oportuna para cada material.

Por lo que al hormigon se refiere, la ecuación (XII), ajustada en cada caso con los oportunos coeficientes, proporciona una aproximación suficientemente fiable para su aplicación en la verificación de los elementos estructurales.

Sería, por tanto, deseable que los criterios de verificación estructural preconizados por las Instrucciones vigentes, fueran evolucionando, progresivamente, tomando en consideración ciertos comportamientos generales manifestados por los materiales que, hoy por hoy, no reciben un tratamiento adecuado en dichas reglamentaciones.

## REFERENCIAS

1. J. Courbon. "Tratado de Resistencia de Materiales", Vol. II. Editorial Aguilar (1969).
2. S. Timoshenko. "Resistencia de Materiales". Vol. II. Editorial Espasa-Calpe (1967).
3. State-of-the-Art Report on "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete", A.S.C.E. (1982).
4. J. Podgórski. "General Failure Criterion for Isotropic Media", Journal of Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., Vol. 111, N<sup>o</sup> 2 (Febrero 1985).
5. H.B. Kupfer y K.H. Gerstle. "Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses", Journal of the Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., Vol. 99, N<sup>o</sup> EM4 (Agosto 1973).
6. N.S. Ottosen. "A Failure Criterion for Concrete". Journal of the Engineering Mechanics Division, A.S.C.E., Vol. 103, N<sup>o</sup> EM4 (Agosto 1977).

## I Premio Soft/Hewlett-Packard. Informática para Arquitectos

El pasado día 5 de mayo fué dado a conocer el fallo del jurado sobre el I Concurso de Carteles Soft/Hewlett-Packard, Informática para Arquitectos.

El premio, valorado en 1.800.000.— Pts, y compuesto por un ordenador HP-150 II, impresora THINKJET, y la biblioteca de programas SOFT, se concedió al cartel con el lema "0794", elaborado por un equipo de jóvenes arquitectos del COAM, cuyo titular se denomina Arsenio Pacios. El resto de los miembros son: José María Casado Herrero, Enrique García Mantilla y Juan Carlos González Herrero.

Además, fueron seleccionado dos carteles finalistas, el primero de los cuales pertenece al arquitecto catalán Daniel Navas Lorenzo con el lema "LUBALIN", y el segundo a Gaspar Sánchez Moro, con el cartel "ALMIZATE".

Dado el gran entusiasmo que han demostrado, tanto los arquitectos como los estudiantes de arquitectura, el año próximo volverá a convocarse otro Concurso análogo.

# Evaluación de deformaciones en forjados para viviendas. Relaciones "canto/luz" que satisfacen las limitaciones de flecha especificadas por la EH-82

Luis Villegas  
Dr. Ingeniero de Caminos  
Dpto. Tecnología de las Estructuras  
E.T.S.I. C.C.P. Universidad de Cantabria

## 1. INTRODUCCION

En este artículo se evalúan las flechas que toman varios forjados nervados (fig. 1), de los que habitualmente se construyen en nuestro país, a partir de los métodos simplificados propuestos en el Código ACI (1), "método de Branson", y en el "Manual sobre Fisuración y Deformaciones" del CEB (2), "método de los coeficientes globales".

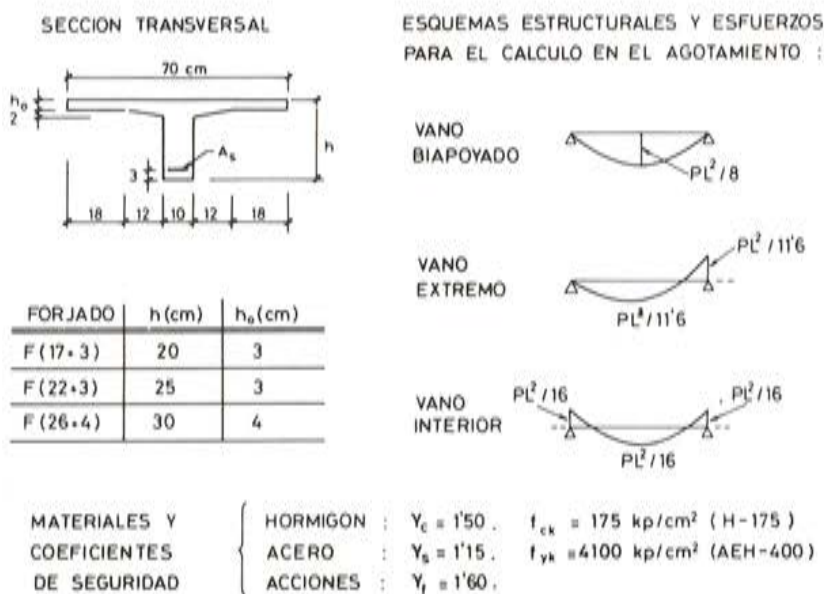


Fig. 1. Forjados analizados.

Tomando como base los valores de las flechas así calculadas, se obtienen las relaciones "canto/luz" que satisfacen las limitaciones que establece la Instrucción EH-82 (3) para las deformaciones, en el Artículo 47 dedicado a los Forjados de Edificación. No se entra aquí en la adecuación o no de tales límites, [al respecto pueden consultarse (4), (5) y (6)] y se los toma como dato previo de partida.

EH-82, en el apartado "3g" del citado Artículo, contempla dos posibles tipos de forjado, según tengan o no que recibir paredes de fábrica sobre ellos, estableciendo límites diferentes en cada caso:

- El valor máximo de la flecha admisible en forjados que no hayan de soportar tabiques ni muros es de  $L/300$ , siendo  $L$  la luz del elemento considerado. La Instrucción aclara que esta flecha es la "instantánea" debida a la "carga total".
- En el caso de forjados que hayan de soportar muros o tabiques, se distinguen tres casos, según que la fábrica haya sido construída con mortero de yeso, de cal o de cemento, imponiendo, en cada uno de ellos, que la flecha máxima no alcance  $L/300$ ,  $L/400$  ó  $L/500$ . La Instrucción especifica que la flecha que se debe considerar ahora es la producida desde el momento en que se termine la construcción del muro o tabique.

En cada una de las dos situaciones anteriores, y para cada tipo de forjado, esquema estructural contemplado y una luz prefijada, se ha dimensionado la armadura requerida por los esfuerzos de cálculo que solicitan al nervio (como se observa en la figura 1, en el caso de forjados continuos se ha aceptado la redistribución de flectores que admite la EH-82). A continuación, se ha obtenido la flecha que adopta el forjado en estudio.

En la figura 2 se muestra el proceso de cálculo seguido en la obtención de la relación "canto/luz" que satisface una determinada limitación de flecha. En "2a" puede observarse cómo, para cada espesor de forjado, se llega a una luz máxima por encima de la cual se incumple el límite impuesto. En "2b" y en ejes "Canto-Luz" se han representado los puntos  $(h_i, L_i)$  correspondientes a los tres forjados estudiados, y la recta que se aproxima a los mismos y constituye el objetivo de este Artículo.

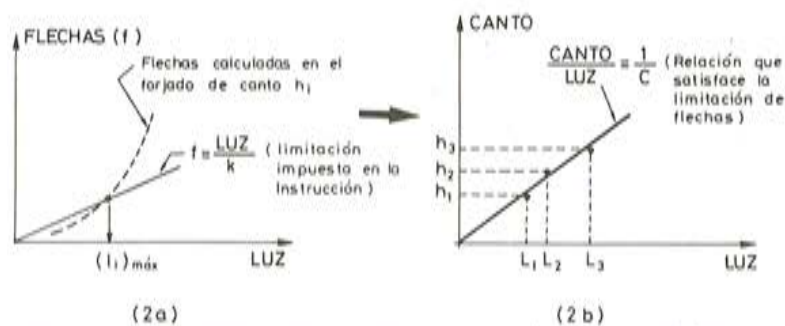


Fig. 2. Proceso general de cálculo para obtener relaciones "canto/luz" que satisfagan una determinada limitación de flechas.

Se adelanta, ya, que en general las relaciones "canto/luz" aquí obtenidas son más exigentes que las recomendadas por nuestra Instrucción EH-82 en los Comentarios al Artículo 47; y que aceptando estas últimas y evaluando las flechas con los métodos aquí utilizados, no se satisfacen las limitaciones que a éstas les impone la citada Instrucción.

## 2. METODOS ADOPTADOS PARA EVALUAR LAS DEFORMACIONES

### 2.1. Método del Código ACI-318-83

#### a) Cálculo de flechas instantáneas

El Código establece que se calculen las deformaciones por los métodos usuales y se tengan en consideración los efectos de la fisuración y de la existencia de las armaduras al evaluar la rigidez de los elementos.

Para piezas biapoyadas, la inercia eficaz de las mismas se obtiene a partir de la fórmula de Branson aplicada a la sección central:

$$I_e = \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \cdot I_b + \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_f$$

siendo:

$M_f$  = Momento de fisuración de la sección.

$M_a$  = Momento actuante en la sección.

$I_b$  = Inercia bruta de la sección.

$I_f$  = Inercia fisurada de la sección.

Para piezas continuas, su inercia eficaz se obtiene en función de las inercias que suministra la fórmula anterior en las secciones de vano ( $I_{em}$ ) y en las de apoyos con continuidad ( $I_{ec}$  en vanos extremos,  $I_{ed}$  e  $I_{ef}$  en los extremos dorsal y frontal de vanos interiores):

$$\text{Vano extremo: } I_e = 0,85 I_{em} + 0,15 I_{ec}$$

$$\text{Vano interior: } I_e = 0,70 I_{em} + 0,15 (I_{ed} + I_{ef})$$

#### b) Cálculo de flechas diferidas.

ACI establece que la flecha adicional a largo plazo, puede obtenerse multiplicando la flecha instantánea calculada, por el factor  $\lambda = \xi / (1 + 50 \cdot \rho')$ , siendo:

$\xi$  un factor función del tiempo de aplicación de las cargas. Viene dado por una curva continua, en un gráfico, que toma, entre otros, los siguientes valores: 0,5 (1 mes), 1 (3 meses) y 2 (60 meses).

$\rho'$  =  $A_s' / b \cdot d$ , es la cuantía geométrica de la armadura en compresión.

### 2.2. Método de los coeficientes globales

El Boletín núm. 158-F del CEB (2) propone, para el cálculo de flechas, el denominado "Método bilineal" que ha sido desarrollado, y contrastado experimentalmente, bajo la dirección del Prof. Favre en la Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (4) y que está basado en la constatación de que, en el estado de servicio, la relación "momento-flecha" puede ser aproximada por una ley bilineal y adoptando una serie de simplificaciones en el "cálculo exacto" de flechas por integración de las curvaturas medias de cada sección.

Una simplificación al método anterior, recogida en (2), conduce al método que se utiliza en este trabajo, según el cual, la flecha de un elemento a flexión, biapoyado o con continuidad, se obtiene a partir de la flecha elástica ( $a_c$ ), calculada en su sección central como pieza íntegra, corrigiendo la misma por unos "Coeficientes globales" que tienen en cuenta el efecto de la fisuración, de las armaduras y de la fluencia. Según este método:



|                              |                                                             |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Flecha instantánea ( $a_0$ ) | $a_0 = a_c \cdot K_0$                                       |
| Flecha diferida ( $a_t$ )    | $a_t = a_c \cdot K_t \cdot \eta$                            |
| $K_0$ depende de:            | $(d/h)$ , $(M_f/M_a)$ y $(\alpha \cdot \rho)$               |
| $K_t$ depende de:            | $(d/h)$ , $(M_f/M_a)$ , $(\alpha \cdot \rho)$ y $(\varphi)$ |
| $\eta$ depende de:           | $(\alpha \cdot \rho)$ y $(\rho'/\rho)$                      |

En donde:

$d/h$  = (Canto útil/canto total)

$M_f/M_a$  = (M fisuración/M actuante) en la sección central

$\alpha$  =  $E_s/E_c = 2.100.000/19.000 \sqrt{f_{ck}}$

$\rho$  =  $A_s/b \cdot d$

$\rho'$  =  $A'_s/b \cdot d$

$\varphi$  = Coeficiente de fluencia.

Estos coeficientes globales son suministrados por el Manual, para secciones rectangulares, de ancho  $b$ , y pueden aplicarse para secciones T, considerando un rectángulo equivalente de igual altura y momento de inercia, y refiriendo las cuantías geométricas ( $\rho$  y  $\rho'$ ) al ancho ( $b_e$ ) de éste.

Para obtener mayores detalles de este método puede consultarse, además de la referencia (2) del CEB, la Monografía (7), en castellano.

### 2.3. Comentarios

Los métodos simplificados anteriores suministran las flechas que probablemente tomarán los forjados en estudio con error del orden del  $\pm 30$  por 100, que puede considerarse suficiente a efectos de proyecto y habida cuenta de que la magnitud de las flechas de las estructuras de hormigón armado, para edificios, depende de tantos factores que no es posible un cálculo exacto.

En cuanto al valor del coeficiente de fluencia que se ha tomado en este estudio, al actuar con el método de los coeficientes globales, es de  $\varphi = 2$ , que se corresponde con los valores de flechas diferidas que se obtienen según ACI, cuando no existe armadura en compresión, y con las que suministraría un cálculo previo de estas deformaciones adoptando las inercias brutas de las secciones y el módulo de deformación longitudinal que, para cargas de larga duración y "clima medio", proporciona la Instrucción EH y que conduce a que, en tal situación, las flechas diferidas son el doble de las instantáneas.

### 3. FORJADOS QUE NO SOPORTAN FABRICAS

Este es el caso típico de los forjados de cubierta, en azoteas, y el de los situados en la planta abertal en edificación residencial, que sirven de zona de esparcimiento y de techo a la planta de garajes. Las cargas que se han adoptado en este estudio son:

- Peso propio del forjado: Varía según el espesor. Se ha tomado, considerando bovedillas de relleno de hormigón,  $250 \text{ Kp/m}^2$  (17 + 3),  $285 \text{ Kp/m}^2$  (22 + 3) y  $350 \text{ Kp/m}^2$  (26 + 4).
- Carga muerta debida al hormigón utilizado para dar pendientes de desagüe, al material de revestimiento impermeable y al solado:  $200 \text{ Kp/m}^2$ .

- Sobrecarga de uso. Se han considerado dos casos: 150 Kp/m<sup>2</sup> para azoteas accesibles sólo privadamente; 300 Kp/m<sup>2</sup> en zonas abertales de acceso y uso público.

De acuerdo con lo expuesto se verificará que la flecha instantánea, bajo la carga total, no supere 1/300 de la luz del elemento en estudio.

La carga total para los diferentes forjados oscila entre 600 Kp/m<sup>2</sup> ( $F \cdot 17 + 3$  y  $SC = 150$  Kp/m<sup>2</sup>) y 850 Kp/m<sup>2</sup> ( $F \cdot 26 + 4$  y  $SC = 300$  Kp/m<sup>2</sup>).

### 3.1. Caso de forjados biapoyados

En la figura 3 se representan los valores de las flechas instantáneas obtenidas en los tres forjados estudiados, para diferentes luces, sobrecarga de 150 Kp/m<sup>2</sup> y armado estricto en cada caso, por los dos métodos considerados. Como puede verse, las flechas calculadas por ambos métodos son parecidas. La intersección de la curva correspondiente a cada forjado y método, con la limitación de flechas que impone la Instrucción EH, nos suministra la luz máxima que puede alcanzar el forjado, cumpliéndola.

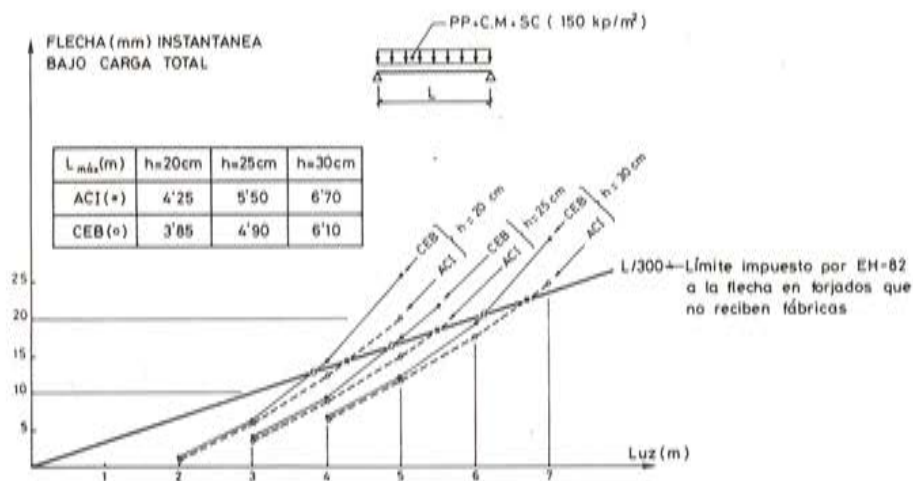


Fig. 3. Flechas instantáneas, bajo carga total, en los diferentes forjados estudiados, y "luces máximas" que admite cada "canto" de modo que se respete la limitación (L/300) de flecha.

Se ha repetido el proceso anterior para el caso de sobrecarga igual a 300 Kp/m<sup>2</sup>, obteniéndose, lógicamente, flechas mayores y menores valores de "luces máximas" a que puede llegarse para cada "canto" de forjado. En la figura 4 se han representado estos pares de valores obtenidos por los métodos de cálculo de flechas utilizados y las rectas que se aproximan a los mismos. También se ha representado la relación "canto/luz" que en estos casos recomienda la Instrucción EH-82 (1/24) y la de ACI 318-83 (1/16), que establece que el espesor a que conduce esta relación será el valor mínimo que debe adoptarse, "a menos que se calculen las flechas", en "forjados nervados que no soportan o están unidos a paredes u otros elementos constructivos que puedan resultar dañados por grandes flechas".

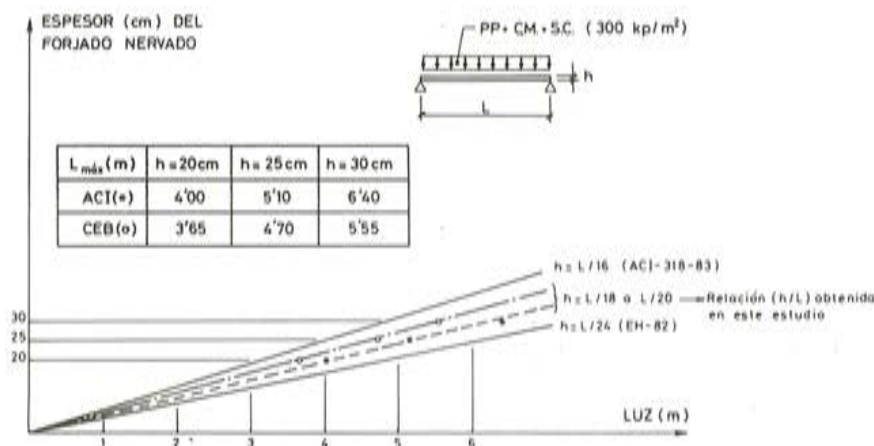


Fig. 4. Relaciones (h/L) recomendadas por EH-82 y ACI-318-83, para forjados que no soporten fábricas. "Luces máximas" que admite cada "canto", de modo que se respete la limitación (L/300) de flecha, y relaciones (h/L) obtenidas en este estudio.

Como se observa en la figura 4, las relaciones "canto/luz" obtenidas, 1/18 ó 1/20, según evaluemos las flechas por el método de los coeficientes globales del CEB o por el de ACI, son más exigentes que la recomendada por la Instrucción EH-82 (1/24) que de seguirla no garantizaría que el forjado tome una flecha instantánea, bajo carga total, menor a L/300. En esta figura puede verse, también, que el límite recogido por ACI-318 conduciría a flechas menores a L/300.

Estas relaciones "canto/luz" de la figura 4, para  $SC = 300 \text{ Kp/m}^2$ , así como las obtenidas, por un proceso análogo, de los pares de puntos (canto, luz máxima) de la figura 3, para  $SC = 150 \text{ Kp/m}^2$ , se recogen, al final, en uno de los Cuadros resumen de este estudio.

### 3.2. Caso de forjados continuos

Como se expuso en la figura 1, la armadura dispuesta en estos forjados se ha dimensionado de modo que, en el estado límite último de agotamiento resistente (con cargas mayoradas y resistencias de materiales minoradas), se cubran los esfuerzos de diseño que se obtienen aceptando la redistribución de momentos admitida por la EH-82 y que es muy frecuentemente adoptada, aparte de por la sencillez con que se realizan los cálculos, por las ventajas que conlleva en el armado de los nervios, al descongestionar de armaduras la zona de flexión negativa (la menos capaz resistientemente, al presentar sólo el ancho del nervio como cabeza de compresión).

Ahora bien, en la verificación del estado límite de deformación (con valores característicos de las cargas y de las resistencias de los materiales), los esfuerzos que se tienen en el forjado serán próximos a los que suministre su cálculo elástico. Es decir, los momentos negativos en los apoyos con continuidad serán mayores que los considerados anteriormente y, por lo tanto, las flechas en servicio serán menores.

El valor de los momentos negativos en los apoyos con continuidad depende de las luces de los diferentes vanos y del estado de cargas en el forjado. En lo que sigue se estudiarán las flechas en los vanos extremos e interiores de estos forjados, admitiendo dos

- Sobrecarga de uso. Se han considerado dos casos: 150 Kp/m<sup>2</sup> para azoteas accesibles sólo privadamente; 300 Kp/m<sup>2</sup> en zonas abertales de acceso y uso público.

De acuerdo con lo expuesto se verificará que la flecha instantánea, bajo la carga total, no supere 1/300 de la luz del elemento en estudio.

La carga total para los diferentes forjados oscila entre 600 Kp/m<sup>2</sup> (F · 17 + 3 y SC = 150 Kp/m<sup>2</sup>) y 850 Kp/m<sup>2</sup> (F · 26 + 4 y SC = 300 Kp/m<sup>2</sup>).

### 3.1. Caso de forjados biapoyados

En la figura 3 se representan los valores de las flechas instantáneas obtenidas en los tres forjados estudiados, para diferentes luces, sobrecarga de 150 Kp/m<sup>2</sup> y armado estricto en cada caso, por los dos métodos considerados. Como puede verse, las flechas calculadas por ambos métodos son parecidas. La intersección de la curva correspondiente a cada forjado y método, con la limitación de flechas que impone la Instrucción EH, nos suministra la luz máxima que puede alcanzar el forjado, cumpliéndola.

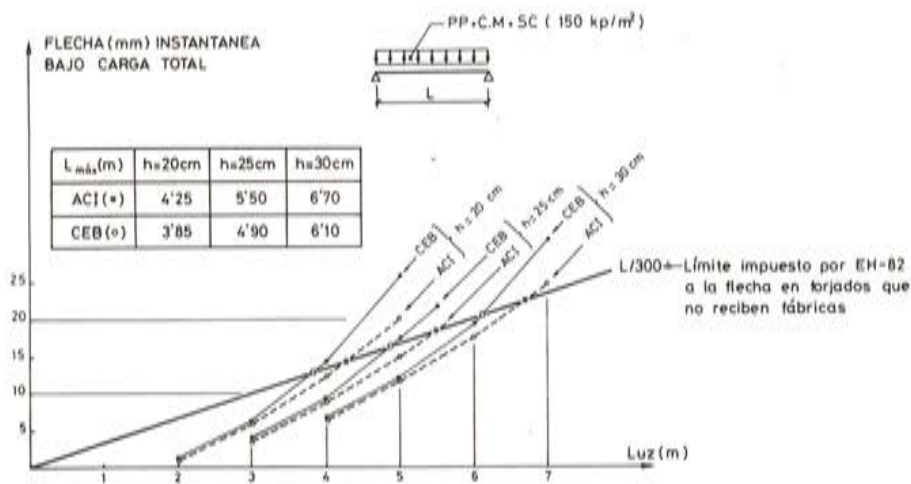


Fig. 3. Flechas instantáneas, bajo carga total, en los diferentes forjados estudiados, y "luces máximas" que admite cada "canto" de modo que se respete la limitación (L/300) de flecha.

Se ha repetido el proceso anterior para el caso de sobrecarga igual a 300 Kp/m<sup>2</sup>, obteniéndose, lógicamente, flechas mayores y menores valores de "luces máximas" a que puede llegar para cada "canto" de forjado. En la figura 4 se han representado estos pares de valores obtenidos por los métodos de cálculo de flechas utilizados y las rectas que se aproximan a los mismos. También se ha representado la relación "canto/luz" que en estos casos recomienda la Instrucción EH-82 (1/24) y la de ACI 318-83 (1/16), que establece que el espesor a que conduce esta relación será el valor mínimo que debe adoptarse, "a menos que se calculen las flechas", en "forjados nervados que no soportan o están unidos a paredes u otros elementos constructivos que puedan resultar dañados por grandes flechas".

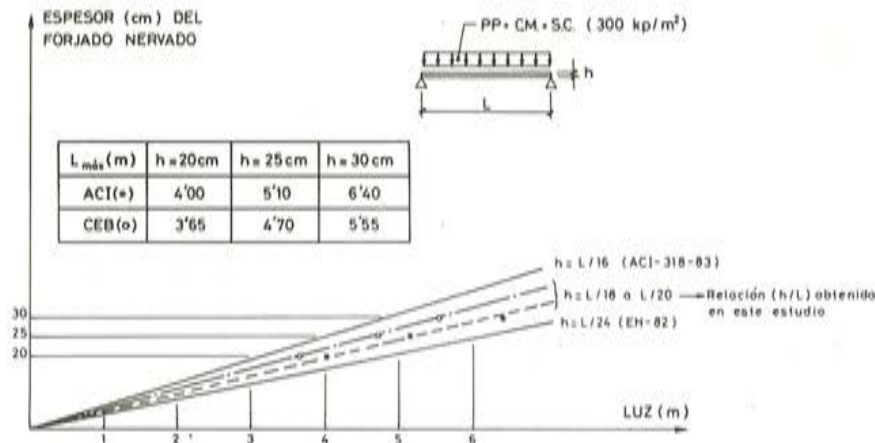


Fig. 4. Relaciones (h/L) recomendadas por EH-82 y ACI-318-83, para forjados que no soporten fábricas. "Luces máximas" que admite cada "canto", de modo que se respete la limitación (L/300) de flecha, y relaciones (h/L) obtenidas en este estudio.

Como se observa en la figura 4, las relaciones "canto/luz" obtenidas, 1/18 ó 1/20, según evaluemos las flechas por el método de los coeficientes globales del CEB o por el de ACI, son más exigentes que la recomendada por la Instrucción EH-82 (1/24) que de seguirla no garantizaría que el forjado tome una flecha instantánea, bajo carga total, menor a L/300. En esta figura puede verse, también, que el límite recogido por ACI-318 conduciría a flechas menores a L/300.

Estas relaciones "canto/luz" de la figura 4, para  $SC = 300 \text{ Kp/m}^2$ , así como las obtenidas, por un proceso análogo, de los pares de puntos (canto, luz máxima) de la figura 3, para  $SC = 150 \text{ Kp/m}^2$ , se recogen, al final, en uno de los Cuadros resumen de este estudio.

### 3.2. Caso de forjados continuos

Como se expuso en la figura 1, la armadura dispuesta en estos forjados se ha dimensionado de modo que, en el estado límite último de agotamiento resistente (con cargas mayoradas y resistencias de materiales minoradas), se cubran los esfuerzos de diseño que se obtienen aceptando la redistribución de momentos admitida por la EH-82 y que es muy frecuentemente adoptada, aparte de por la sencillez con que se realizan los cálculos, por las ventajas que conlleva en el armado de los nervios, al descongestionar de armaduras la zona de flexión negativa (la menos capaz resistentemente, al presentar sólo el ancho del nervio como cabeza de compresión).

Ahora bien, en la verificación del estado límite de deformación (con valores característicos de las cargas y de las resistencias de los materiales), los esfuerzos que se tienen en el forjado serán próximos a los que suministre su cálculo elástico. Es decir, los momentos negativos en los apoyos con continuidad serán mayores que los considerados anteriormente y, por lo tanto, las flechas en servicio serán menores.

El valor de los momentos negativos en los apoyos con continuidad depende de las luces de los diferentes vanos y del estado de cargas en el forjado. En lo que sigue se estudiarán las flechas en los vanos extremos e interiores de estos forjados, admitiendo dos

valores para los momentos negativos en tales apoyos: uno, el correspondiente a la situación de empotramiento perfecto, y otro, el que hemos considerado para el cálculo de la armadura por condiciones de agotamiento del forjado, o sea, admitiendo redistribución.

a) Vano extremo

Según lo expuesto, obtendremos la flecha instantánea para los dos siguientes valores del momento negativo en el apoyo con continuidad:

a.1.  $M^- = pL^2/8 = 0,125 pL^2$

a.2  $M^- = pL^2/11,6 = 0,086 pL^2$

Es claro que la armadura calculada en tal apoyo, para el momento de diseño  $M_d = \gamma_f \cdot pL^2/11,6 = 0,138 pL^2$ , cubre sobradamente los valores a.1 y a.2 de los momentos de servicio.

En las dos situaciones anteriores, la flecha elástica en el centro de la luz, que toma valores muy próximos a los de la flecha máxima, vale:

a.1  $f_{1e} = 0,0052 pL^4/EI$

a.2  $f_{2e} = 0,0076 pL^4/EI$

b) Vano interior

Los momentos negativos en los apoyos con continuidad, y las flechas elásticas en centro de vano, son, en los dos casos estudiados:

b.1  $M^- = pL^2/12 = 0,083 pL^2 \rightarrow f_{1i} = 0,0026 \cdot pL^4/EI$

b.2  $M^- = pL^2/16 = 0,063 pL^2 \rightarrow f_{2i} = 0,0052 \cdot pL^4/EI$

Siguiendo, tanto para los vanos extremos como para los interiores, el proceso general expuesto en la figura 2 y desarrollado en las figuras 3 y 4 para el caso de vano biapoyado, se llega a las relaciones "canto/luz" recogidas, al final, en el Cuadro 1, resumen de este apartado.

#### 4. FORJADOS QUE SOPORTAN FABRICAS

En este caso la limitación de flecha que imponen las diferentes normas se refiere al valor de ésta que pueda causar daños en las paredes, o sea, la que se produce desde que se termina su construcción.

Es lo que J. Calavera (6) denomina "flecha activa" y es suma de los siguientes términos:

a) Flechas instantáneas:

- Debidas a las sobrecargas de uso.
- Debidas al solado. Se supone que, como es habitual, éste se coloca una vez construídos los tabiques.
- Debidas a la tabiquería. De acuerdo con (6) hay que tener en cuenta que la rápida rigidización de los tabiques después de construídos, hace que las cargas de los inmediatamente próximos a uno dado, construídos pocos días después, produzcan flechas instantáneas que pueden dañar al primero.

b) Flechas diferidas:

- Flecha diferida del peso propio del forjado, producida a partir del momento en que se construyen los tabiques.
- Flecha diferida debida a la carga de tabiquería.
- Flecha diferida debida a la carga de solados.
- Flecha diferida debida a la posible fracción de las sobrecargas de uso, que actúe de modo permanente.

Las cargas adoptadas ahora son:

- Peso propio del forjado = (los ya vistos).
- Solado = 100 Kp/m<sup>2</sup>
- Tabiquería = 100 Kp/m<sup>2</sup>
- Sobrecarga de uso = 200 Kp/m<sup>2</sup> (viviendas).

La carga total para los diferentes forjados oscila, pues, entre 650 Kp/m<sup>2</sup> ( $F \cdot 17 + 3$ ) y 750 Kp/m<sup>2</sup> ( $F \cdot 26 + 4$ ).

En este trabajo se ha considerado que las cargas de tabiquería, solado y sobrecargas de uso de actuación permanente (se ha admitido aquí que éstas son el 25 por 100 de la sobrecarga total, o sea 50 Kp/m<sup>2</sup>) actúan sobre el forjado a los tres meses de haberse descimbrado éste y que esta operación se ha hecho al mes del hormigonado del mismo.

Debido a que en los métodos utilizados en la evaluación de flechas interviene el cociente ( $M_f/M_a$ ) entre el momento de fisuración y el momento actuante en la sección en estudio y éste varía en las diferentes situaciones de carga del forjado, los términos que intervienen en la flecha activa deben calcularse para cada nivel de carga considerado. Así, la flecha activa que tratamos de calcular, se ha obtenido a través de los siguientes pasos:

- 1) Flecha instantánea, ( $f_1$ ), debida a la totalidad de las cargas.
- 2) Flecha diferida, ( $f_2$ ), debida a las cargas permanentes (todas menos el 75 por 100 de la sobrecarga, tal como se ha aceptado).
- 3) Flecha instantánea, ( $f_3$ ), debida al peso propio del forjado.
- 4) Flecha diferida, ( $f_4$ ), debida al peso propio del forjado y producida en los tres meses transcurridos entre su descimbrado y la construcción de las paredes.
- 5) La flecha activa, ( $f_a$ ), buscada es:

$$f_a = f_1 + f_2 - f_3 - f_4$$

En la figura 5 se representan, para el caso de vano biapoyado, los valores de las flechas activas obtenidas en los tres forjados estudiados, para diferentes luces y con los dos métodos utilizados. La intersección de la curva correspondiente a cada caso, con las limitaciones ( $L/300$  a  $L/500$ ) impuestas por la EH-82, nos proporciona las luces máximas que se recogen en el cuadro adjunto a esta figura.

En la figura 6 se representan, en ejes ( $h, L$ ), los puntos recogidos en el cuadro anterior, la recta que se aproxima a los mismos y la relación ( $h/L$ ) recomendada en cada caso por la Instrucción EH-82. Como puede observarse, los cantos a que conduce ésta vuelven a ser menores que los deducidos en este trabajo.

Estas relaciones, así como las obtenidas para el caso de vanos continuos (para los cuales se ha repetido la casuística expuesta en 3.2), se recogen en el Cuadro 2 del siguiente apartado, en el que se resume este trabajo.

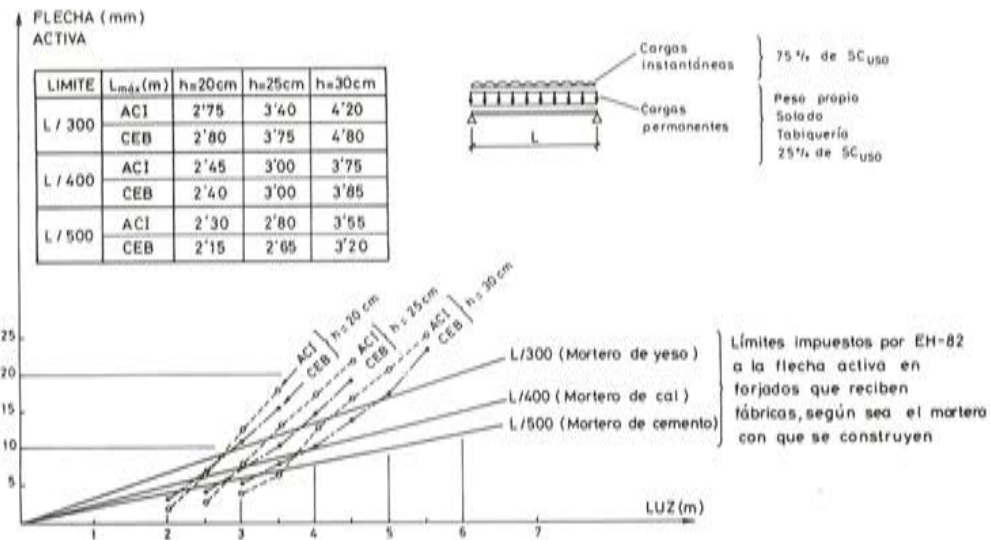


Fig. 5. Flechas activas en los diferentes forjados estudiados y "luces máximas" que admite cada "canto", de modo que se respeten las limitaciones de flecha de la EH-82.

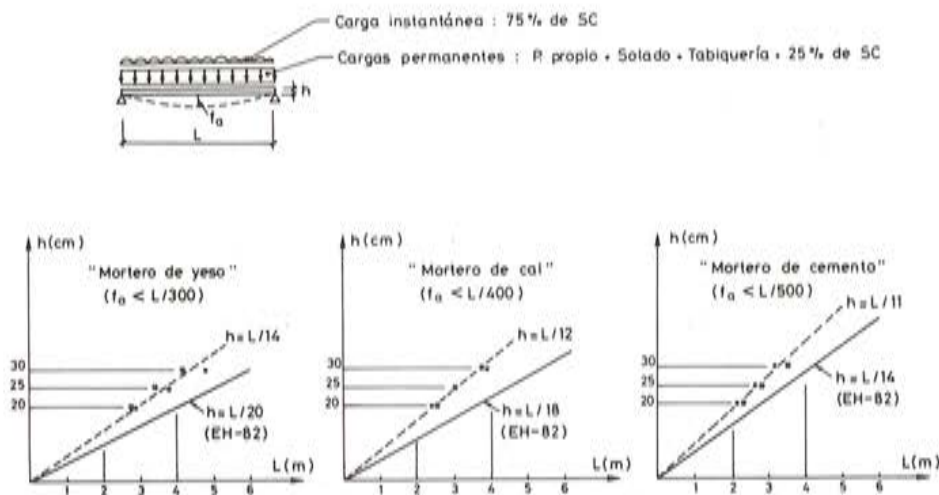


Fig. 6. Relaciones (h/L) recomendadas por la EH-82 y obtenidas en este estudio para forjados nervados que reciben fábricas construídas con diferentes tipos de mortero.




## 5. RESUMEN

Los Cuadros 1 y 2 que siguen, recogen las relaciones, entre el canto y la luz del forjado, obtenidas en los diferentes esquemas estructurales y casos contemplados en este estudio, junto a las propuestas por la Instrucción EH-82. En el cuadro 1, relativo a los forjados que no reciben fábricas, se anotan, también, los valores de ACI-318-83.






CUADRO 1

Relaciones "canto/luz" para forjados nervados de edificación que no reciban fábricas

| ESQUEMA ESTRUCTURAL                                                                                                  | EH-82 | RELACIONES OBTENIDAS EN ESTE ESTUDIO DE MODO QUE $f_l, T_{OT} < LUZ/300$ |                                           | ACI-318-83 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|------------|
|                                                                                                                      |       | SC = 150 Kp/m <sup>2</sup>                                               | SC = 300 Kp/m <sup>2</sup>                |            |
|                                     | 1/24  | 1/20                                                                     | 1/18                                      | 1/16       |
| <br>$(M_E = K_e \cdot p \cdot l^2)$ | 1/20  | $K_e=1/8$<br>1/30<br>$K_e=1/11,6$<br>1/24                                | $K_e=1/8$<br>1/28<br>$K_e=1/11,6$<br>1/22 | 1/18,5     |
| <br>$(M_i = K_i \cdot p \cdot l^2)$ | 1/32  | $K_i=1/12$<br>1/38<br>$K_i=1/16$<br>1/26                                 | $K_i=1/12$<br>1/36<br>$K_i=1/16$<br>1/24  | 1/21       |

CUADRO 2

Relaciones "canto/luz" para forjados nervados de edificación que reciban fábricas

| ESQUEMA ESTRUCTURAL                                                                                                    | FABRICAS CONSTRUIDAS CON MORTERO DE |                                           |                       |                                           |                           |                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------|
|                                                                                                                        | YESO: fact $< LUZ/300$              |                                           | CAL: fact $< LUZ/400$ |                                           | CEMENTO: fact $< LUZ/500$ |                                           |
|                                                                                                                        | EH-82                               | EN ESTE ESTUDIO                           | EH-82                 | EN ESTE ESTUDIO                           | EH-82                     | EN ESTE ESTUDIO                           |
|                                     | 1/20                                | 1/14                                      | 1/18                  | 1/12                                      | 1/14                      | 1/11                                      |
| <br>$(M_E = K_e \cdot p \cdot l^2)$ | 1/24                                | $K_e=1/8$<br>1/22<br>$K_e=1/11,6$<br>1/17 | 1/20                  | $K_e=1/8$<br>1/18<br>$K_e=1/11,6$<br>1/14 | 1/18                      | $K_e=1/8$<br>1/16<br>$K_e=1/11,6$<br>1/12 |
| <br>$(M_i = K_i \cdot p \cdot l^2)$ | 1/28                                | $K_i=1/12$<br>1/28<br>$K_i=1/16$<br>1/19  | 1/24                  | $K_i=1/12$<br>1/24<br>$K_i=1/16$<br>1/17  | 1/20                      | $K_i=1/12$<br>1/20<br>$K_i=1/16$<br>1/14  |

De las dos relaciones obtenidas, en cada caso, al actuar con los dos métodos utilizados para evaluar las flechas (método de Branson del ACI y método de los coeficientes globales del CEB), se ha reflejado en los Cuadros la más conservadora de ellas, aunque puede señalarse que no existe gran diferencia entre ambas.

De los valores recogidos en estos Cuadros, pueden hacerse los siguientes comentarios:

- Para el caso de vanos biapoyados, las relaciones (h/L) a que conduce este estudio son más exigentes que las recomendaciones que al respecto hace la EH-82. Cuando se trata de forjados que no reciben fábricas, los valores que suministra ACI-318 son, como puede verse en el Cuadro 1, aún más conservadores que los aquí obtenidos.
- Para el caso de vanos continuos, cabe decir:
  - Los valores de la Instrucción EH-82 pueden ser aceptados si las luces y demás condicionantes de los forjados en cuestión permiten garantizar comportamientos de cada vano próximos al de empotramiento perfecto (en uno o en los dos apoyos, según sea el caso de vano extremo o interior). Obsérvese que, en tales situaciones, este estudio proporciona unas relaciones (h/L) próximas a las de la EH-82, e incluso, en alguno de los casos, algo menos conservadoras.
  - Con situaciones de empotramiento menores a las anteriores, debe acudirse, como muestran los dos Cuadros, a unas relaciones canto/luz más exigentes que las dadas por la EH-82.
- Debe entenderse que, en los casos en que en los Cuadros se tengan relaciones h/L más conservadoras que las recomendadas por la Instrucción EH-82, de adoptar las que ésta propone se obtendrían deformaciones que no respetarían las limitaciones de flecha que ella preconiza, siempre, claro está, que evaluáramos las deformaciones con alguno de los dos métodos aquí utilizados y se aceptaran las hipótesis de construcción aquí hechas.
- En el caso de forjados que reciben fábricas, las relaciones que se obtienen en este estudio conducen a cantos que, normalmente, no se están respetando en la práctica constructiva actual. Si por la circunstancia que fuera, se tuvieran que utilizar espesores significativamente menores que los deducidos de estas relaciones, deberían tomarse medidas encaminadas a reducir el valor de la flecha activa (disponer armadura en compresión, de cara a disminuir las flechas diferidas bajo las cargas permanentes; retrasar al máximo la colocación de las tabiquerías, de modo que una buena fracción de la flecha diferida debida al peso propio del forjado ya se haya producido, etc.) y a evitar la transmisión de cargas a través de los tabiques, independizando el comportamiento de los forjados de cada planta.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- (1) ACI-318 "Buildings Code Requirements for Reinforced Concrete". American Concrete Institute. Detroit, 1983.
- (2) CEB Bulletin d'Information No. 158-F. Manual CEB Fissuration et Deformations (Octubre 1983).
- (3) Instrucción EH-82 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado.
- (4) FAVRE R., KOPRNA M., RADOJICIC A. "Effets différés, fissuration et deformations des structures en béton". Ecole Polytechnique Federale de Lausanne. 1980.

- (5) GONZALEZ VALLE E. "La flexibilidad de los forjados de hormigón armado en edificación. Evaluación de la situación actual". Informes de la Construcción núm. 343. Septiembre 1982.
- (6) CALAVERA J. "Proyecto y cálculo de estructuras de Hormigón Armado para edificios". INTEMAC. Madrid, 1985.
- (7) ALVAREZ BALERIOLA J.I., BAQUEDANO F., GUTIERREZ J.P., RECUERO A. "Fisuración y cálculo de flechas en Estructuras de hormigón armado". Monografía núm. 376-377 del Instituto Eduardo Torroja (Madrid, Junio 1984).
- (8) CALAVERA J., FERNANDEZ GOMEZ J.A. "Cálculo de flechas a largo plazo en forjados". Hormigón y Acero núm. 157 (1985).
- (9) GONZALEZ VALLE E. "La flexibilidad de los forjados: sus condicionantes técnicos y la situación de su normativa". Hormigón y Acero núm. 157 (1985).

## **Índice de disposiciones relacionadas con la edificación Legislación del Estado y de las Comunidades autónomas, vigente al 1 de enero de 1986**

Esta publicación ha sido realizada por la Subdirección General de Edificación de la Dirección General de Arquitectura y Edificación, basada en la Legislación que dicha Subdirección ha recopilado para su uso interno como documento de trabajo en la labor de redacción de la Normativa de la Edificación.

Las disposiciones se han ordenado por una serie alfabética de epígrafes que permiten conocer la Legislación vigente en cada una de las materias relacionadas con la Edificación, constituyendo un instrumento práctico para su búsqueda por parte de aquellos profesionales que intervienen en el proceso edificatorio.

A esta 5ª edición se ha incorporado la Legislación de las Comunidades Autónomas, con un índice, por Comunidades, independiente del de la Legislación del Estado. Dentro del apartado de cada Comunidad Autónoma, se han ordenado las disposiciones por un índice alfabético de temas que se corresponde con el de la Legislación del Estado.

Para cualquier información o sugerencia sobre esta publicación pueden dirigirse por correspondencia o telefónicamente a: Subdirección General de Edificación. Dirección General de Arquitectura y Edificación. M.<sup>o</sup> de Obras Públicas y Urbanismo (Edificio del M.<sup>o</sup> de Transportes y Comunicaciones). Planta 7, despacho 2. Plaza de San Juan de la Cruz. s/n. 28003 Madrid. Teléfonos: 253 16 00 y 253 56 00. Extensiones: 3502 y 3957.

Los pedidos deben dirigirse al Servicio de Publicaciones del MOPU, Nuevos Ministerios. 28046 Madrid. Teléfono: 253 16 00. Extensiones: 2215 y 2312.

# Límites de esbeltez para soportes de hormigón armado: 1. Límite de esbeltez inferior

Olga Rfo  
 Dr. Ing. de Caminos. IETcc/CSIC  
 Francisco Morán  
 Dr. Ing. de Caminos. IETcc/CSIC

## RESUMEN

Se presenta una propuesta racional de límites de esbeltez para soportes de hormigón armado, que tiene en cuenta los principales parámetros conocidos en el dimensionamiento: el esfuerzo axial, la excentricidad relativa y la relación de excentricidades en los extremos del soporte. En función de estos parámetros se define la esbeltez límite equivalente,  $\lambda_e$ , que permite calibrar la importancia de los efectos de segundo orden.

## 1. INTRODUCCION

Las diversas normas vigentes sobre hormigón armado indican que en la comprobación de elementos comprimidos (soportes) puede ser necesario tener en cuenta los efectos de segundo orden. Para ello definen los llamados límites de esbeltez. El límite de esbeltez inferior separa el campo de los soportes cortos, para los cuales puede prescindirse de la consideración de los efectos de segundo orden, del de los soportes esbeltos, que requieren tener en cuenta dichos efectos. El límite de esbeltez superior delimita el campo de los soportes de esbeltez moderada, para los que los efectos de segundo orden pueden evaluarse por algún método simplificado, del de los de esbeltez elevada, que requieren un estudio más riguroso en teoría de segundo orden.

La mayoría de las normas establecen estos límites en función de la esbeltez mecánica,  $\lambda_m$ , del soporte biarticulado equivalente. Por ejemplo, la Instrucción española EH-82 [1] adopta los siguientes valores:

límite inferior  $\lambda_m = 35$ ;  
límite superior  $\lambda_m = 100$ .

Esta definición del límite inferior obliga a calcular como esbeltos un gran número de soportes en los que los efectos de segundo orden carecen de importancia. Por ello, parece conveniente encontrar una definición racional del límite de esbeltez inferior, que haga intervenir los principales parámetros que determinan la importancia real de los efectos de segundo orden. Ello se hace en este trabajo que, por su extensión, se ha dividido en dos partes. En la segunda de ellas, de próxima publicación, se encontrarán ejemplos numéricos y referencias bibliográficas.

## 2. MEDIDA DE LOS EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN

Ante todo, es necesario establecer un criterio para medir la importancia de los efectos de segundo orden. Si bien en algunas propuestas se utiliza, como magnitud para medir dichos efectos, el error referido a momentos, definido por la expresión:

$$\epsilon_\mu = \frac{\mu^{II}}{\mu^I},$$

para un esfuerzo axial constante [2, 3],

siendo:

$\mu^{II}$  el momento de segundo orden;  
 $\mu^I$  el momento de primer orden,

esta forma de medir el error tiene el inconveniente de que, para valores del momento de primer orden que tienden a cero (situaciones cercanas a la compresión simple), el error resultante tiende a infinito, aún para esbelteces tan bajas como se quiera. Por otra parte, esta relación no siempre da una buena medida de lo que se quiere conocer cuando se analizan soportes de hormigón armado con el fin de evaluar la influencia de los efectos de segundo orden: la reducción de la capacidad portante de los mismos, con respecto al estado último de agotamiento de la sección.

Por las razones expuestas, en esta propuesta se adopta como magnitud idónea para medir la importancia de los efectos de segundo orden, el error referido a axiles, también adoptado por otros autores [4, 5] y definido por la expresión:

$$\epsilon_\nu = \frac{\nu^I - \nu^{II}}{\nu^{II}},$$

para una excentricidad de primer orden constante,

siendo:

$\nu^I$  = esfuerzo axial que resiste el soporte, en teoría de primer orden (cálculo de sección o soporte corto);  
 $\nu^{II}$  = esfuerzo axial que resiste el soporte, con la misma excentricidad que  $\nu^I$ , en teoría de segundo orden (soporte esbelto).

El error referido a axiles,  $\epsilon_\nu$ , es más difícil de calcular que el error referido a momentos,  $\epsilon_\mu$ , adoptado en otros estudios de límites de esbeltez [2, 3], pero parece más representativo [4, 5, 6]. Las diferencias entre ambos errores son importantes.

### 3. PARAMETROS CONSIDERADOS

En segundo lugar es preciso elegir, entre los parámetros conocidos en el dimensionamiento de un soporte, aquéllos que tengan mayor influencia en el error  $\epsilon_p$ . Estos parámetros son los siguientes:

- forma de la sección;
- distribución de la armadura;
- esfuerzo axial reducido:  $\nu = N_d / (f_{cd} \cdot b \cdot h)$ ;
- excentricidad de primer orden relativa  $\eta = e_2^1 / h$ ;
- relación de excentricidades en los extremos del soporte  $\alpha = e_1^1 / e_2^1$ ;
- esbeltez geométrica del soporte:  $\lambda = l_o / h$ .

Las formas de la sección más frecuentes en un soporte son, la rectangular, que para flexión diagonal se transforma en rombo, y la circular. Un estudio comparativo sobre estas formas de sección, ha demostrado que este parámetro no tiene gran influencia. Por ello se considera sólo la sección rectangular.

La distribución de armaduras es desconocida a priori en el dimensionamiento, porque depende de la cuantía resultante. Un estudio comparativo sobre varias distribuciones de armado simétricas, ha demostrado que los mayores errores se presentan para armaduras iguales en las cuatro caras de la sección. Sin embargo, y dado que los resultados no difieren demasiado si se consideran armaduras iguales en dos caras opuestas, se ha utilizado esta última por ser más sencilla de calcular.

Por lo que respecta a los otros parámetros,  $\nu$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$  y  $\lambda$ , se ha realizado un estudio sistemático de su influencia en el error  $\epsilon_p$ , que se describe en el apartado siguiente.

### 4. ESTUDIO PARAMETRICO DE LOS EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN

Para evaluar la influencia de los parámetros citados en la importancia de los efectos de segundo orden se ha estudiado el siguiente modelo:

**GEOMETRIA:** soporte biarticulado, de longitud  $l_o$  igual a la longitud de pandeo del soporte considerado y sección rectangular con armaduras iguales,  $A_s/2$ , en dos caras opuestas. La sección y sus armaduras son constantes a lo largo de la altura del soporte.

**MATERIALES:** Diagrama parábola-rectángulo para el hormigón, sin considerar fluencia. Diagrama bilineal para el acero (dureza natural), con límite elástico  $f_{yd} = 4200/1,1$  Kp/cm<sup>2</sup> y  $E_s = 2.100.000$  Kp/cm<sup>2</sup>.

**CARGAS:** Cargas axiales, instantáneas,  $N_d$ , actuando en ambos extremos del soporte con iguales o distintas excentricidades de primer orden,  $e_1^1$ ,  $e_2^1$ .

**CUANTIAS MAXIMA Y MINIMA:** Se consideran las siguientes cuantías mecánicas extremas:

$$\omega_{mín} = f_{yd} \cdot A_{s,mín} / (f_{cd} \cdot b \cdot h) = 0,1$$

$$\omega_{máx} = f_{yd} \cdot A_{s,máx} / (f_{cd} \cdot b \cdot h) = 1,4$$

**RELACION DE EXCENTRICIDADES,  $\alpha$ :** Se estudian las tres relaciones de excentricidades,  $\alpha = -1, 0$  y  $1$ .

**EXCENTRICIDADES RELATIVAS  $\eta$ :** Se consideran los diez valores siguientes:  $\eta = 0,1; 0,2; \dots; 1,0$ .

**AXILES REDUCIDOS  $\nu$ :** Se consideran los comprendidos entre  $\nu_1$  (axil inferior, para el que  $\omega = \omega_{mín}$ ) y el  $\nu_s$  (para el que  $\omega = \omega_{máx}$ ), con intervalos de 0,02.

**ERROR DE AXILES  $\epsilon_\nu$ :** Se toma constante e igual a 0,1 (error del 10 por 100), para el límite de esbeltez inferior.

El procedimiento seguido es el siguiente:

- Conocido el axil  $\nu^I$  del soporte corto y su excentricidad  $\eta$ , se dimensiona como soporte corto (cálculo de sección). Se obtiene la cuantía  $\omega$ , que debe cumplir  $\omega_{mín} < \omega < \omega_{máx}$ . Si no es así, se elige otra pareja  $\nu^I, \eta$ .
- El axil  $\nu^{II}$  del soporte esbelto, para un error en axiles del 10 por 100, valdrá  $\nu^{II} = \nu^I/1,1$ .
- Se calcula cuál es la esbeltez geométrica  $\lambda$  de un soporte esbelto, armado con la cuantía  $\omega$ , tal que su axil último, con la excentricidad  $\eta$ , sea precisamente  $\nu^{II}$ . Este cálculo se hace por tanteos, utilizando el método general (método de Engesser-Vianello o de las diferencias finitas [6]). En otros estudios de límites de esbeltez [2, 4] se han utilizado métodos aproximados (Método de la Columna Modelo); pero entonces, el error propio de estos métodos (del orden del 6 por 100) puede falsear las conclusiones del estudio.

La esbeltez  $\lambda_e$  así calculada se denomina esbeltez equivalente; y para ella el error de axiles es constante e igual al 10 por 100.

Los resultados del estudio paramétrico (véanse figs. 1 a 4), muestra que la esbeltez equivalente depende, en efecto, de los parámetros restantes  $\nu, \eta, \alpha$ .

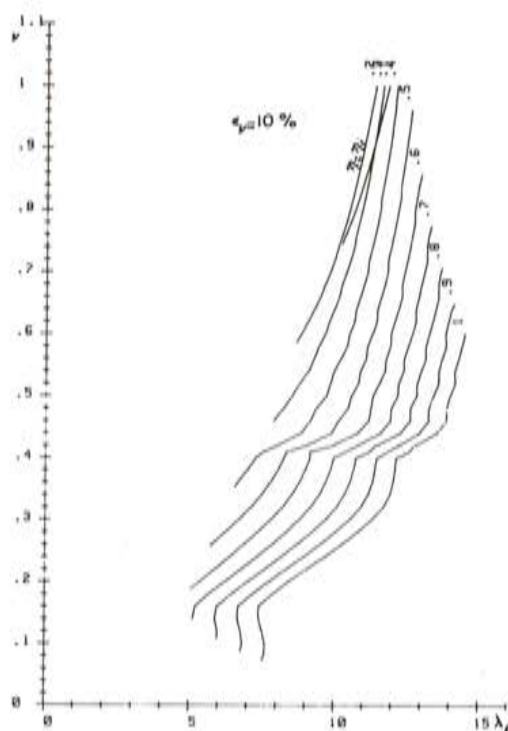


Fig. 1. Influencia de la excentricidad mayor de primer orden.

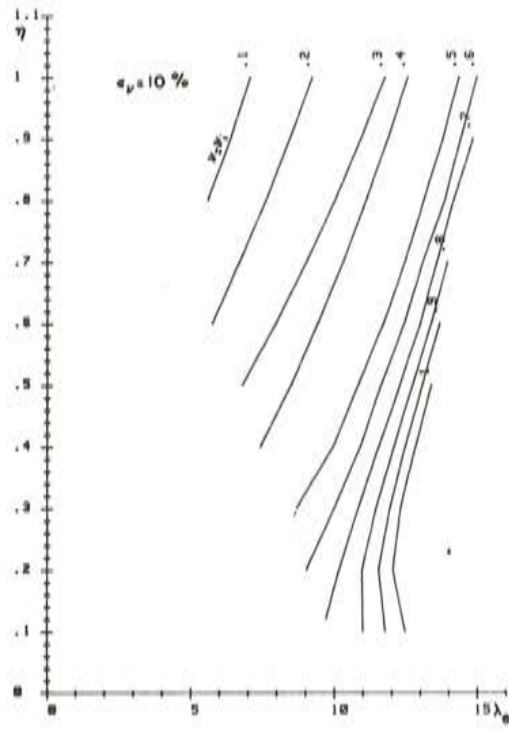


Fig. 2. Influencia del axil.

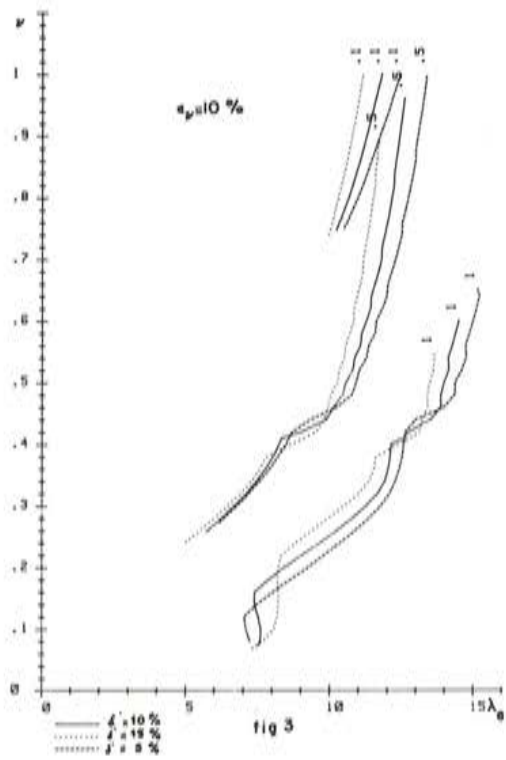


Fig. 3. Influencia del recubrimiento.



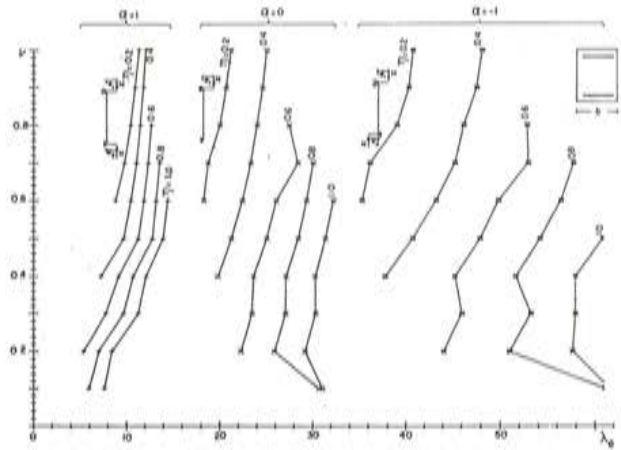


Fig. 4. Influencia de la relación de excentricidades.

## 5. LIMITE DE ESBELTEZ INFERIOR

En virtud de la definición de esbeltez equivalente,  $\lambda_c$ , resulta la siguiente definición del límite de esbeltez inferior:

$$\lambda \leq \lambda_c = f(\nu, \eta, \alpha)$$

o sea, un soporte podrá calcularse como corto siempre que su esbeltez geométrica  $\lambda$  no supere la esbeltez equivalente  $\lambda_c$ , función de los parámetros  $\nu$ ,  $\eta$  y  $\alpha$ , con un error acotado al valor considerado admisible (10 por 100).

Para deducir una expresión analítica para  $\lambda_c$  se observan las formas de las curvas de la fig. 4, pudiéndose concluir lo siguiente:

- Las curvas  $\eta = \eta_1$  de las familias  $\alpha = 0$  y  $\alpha = -1$  resultan, aproximadamente, de efectuar una traslación horizontal de la curva  $\eta = \eta_1$  de la familia  $\alpha = 1$ .
- Las curvas  $\eta = \eta_1$  de una familia  $\alpha = 1$  resultan, aproximadamente, de efectuar una afinidad horizontal de la curva  $\eta = 0,2$  de la misma familia  $\alpha = 1$ .

Sobre la base de estas conclusiones se ajusta una fórmula aproximada, de la forma:

$$\lambda_c = (K_1 + K_2 \nu - K_3 \alpha) (K_4 + K_5 \eta)$$

resultando los valores numéricos de los coeficientes  $K_i$ :

$$K_1 = 12,4 ; K_2 = 7 ; K_3 = 10 ; K_4 = 1 ; K_5 = 1,1$$

Los errores resultantes de esta aproximación pueden verse en la tabla I.

TABLA I

| $\alpha$ | $\eta$  | $\nu$           | $\epsilon_{\nu}$ % | $\sigma$ % |
|----------|---------|-----------------|--------------------|------------|
| 1        | 0,1-1,0 | $\nu_1 - \nu_8$ | 8,99               | 1,35       |
| 0        |         |                 | 14,06              | 2,25       |
| -1       |         |                 | 4,18               | 1,45       |

Una mejor solución se obtiene mediante el nomograma de la fig. 5. Este nomograma representa la función:

$$\lambda_e = g(\nu, \alpha) \cdot (1 + 1,1 \eta)$$

y en él las curvas  $g(\nu, \alpha)$  de la parte izquierda, se han obtenido gráficamente como envolventes de las nubes de puntos representativos de soportes reales, estudiados numéricamente mediante el proceso indicado en el apartado anterior.

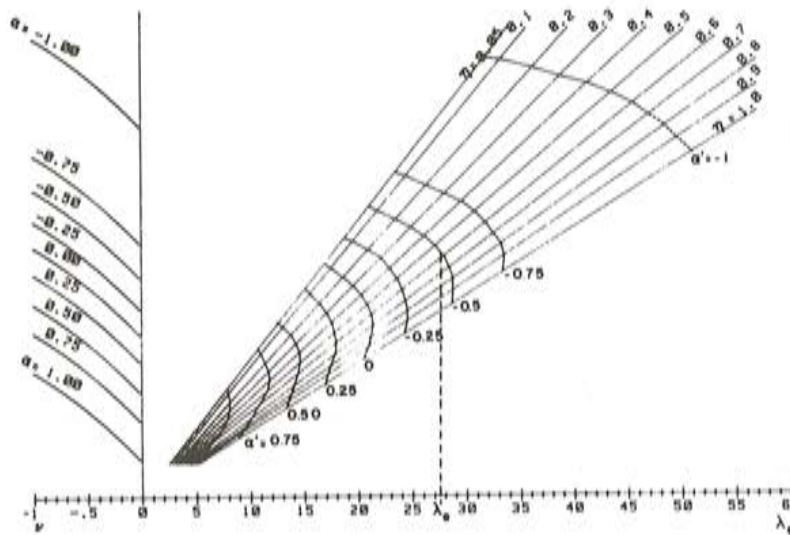


Fig. 5. Nomograma para determinar la esbeltez equivalente,  $\lambda_e$ .

Los errores resultantes de la aplicación del nomograma, pueden verse en la tabla II.

TABLA II

| $\alpha$ | $\eta$  | $\nu$           | $\epsilon_{\nu}$ % | $\sigma$ % |
|----------|---------|-----------------|--------------------|------------|
| 1        | 0,1-1,0 | $\nu_1 - \nu_8$ | 9,39               | 1,05       |
| 0        |         |                 | 9,27               | 1,23       |
| -1       |         |                 | 9,97               | 1,39       |

Las ventajas del nomograma son las siguientes:

- Facilita el valor de  $\lambda_c$ , por lectura directa, sin cálculos auxiliares.
- Permite una mejor precisión que la fórmula aproximada.
- Sobre el nomograma (parte derecha) se ha representado otra familia de curvas (curvas  $\alpha'$ ). Esta familia corresponde a situaciones en las que la cuantía resultante es la mínima,  $\omega_{mín}$ . Por consiguiente, para  $\lambda \leq \lambda_c$  no es preciso efectuar el dimensionamiento del soporte corto (cálculo de sección), bastando armarlo con  $\omega_{mín} = 0,1$ .

## Simposio sobre "Utilización del Hormigón de alta resistencia"

Stavanger, Noruega, 15-21 Junio 1987

Patrocinado por la Asociación Noruega del Hormigón, el Instituto de Investigaciones del Cemento y del Hormigón, la Sociedad Noruega de Ingenieros, el Instituto Tecnológico de Noruega y la Federación Internacional del Pretensado, se va a celebrar en Stavanger (Noruega), durante los días 15 al 21 de junio del próximo año 1987, un Simposio con el objeto de dar a conocer los últimos trabajos de investigación y los más recientes proyectos y obras relacionados con la utilización del hormigón de alta resistencia en diversos tipos de estructuras tales como: estructuras marítimas, plataformas en alta mar, puentes, edificios de altura, estructuras de grandes luces, etc.

Se discutirán trabajos relativos a los últimos avances y estudios experimentales realizados para el mejor conocimiento de: las propiedades mecánicas, físicas y químicas de los hormigones de alta resistencia; la transmisión de tensiones; la ductilidad, la fatiga y el estado multiaxial de tensiones.

Habrán tres Sesiones principales en las que se presentarán, para su discusión, Comunicaciones (todas ellas en inglés), sobre:

1. *Proyecto*.—Nuevos conceptos estructurales; criterios y métodos de cálculo; últimos trabajos experimentales; normas y especificaciones.
2. *Ejecución*.—Obras singulares; nuevas técnicas y aplicaciones.
3. *Comportamiento de las estructuras*.—Propiedades de los materiales; proyectos de investigación; resultados experimentales; estado actual de conocimientos.

Los interesados en recibir información suplementaria sobre este Simposio, deberán dirigirse a:

HIGH STRENGTH CONCRETE SYMPOSIUM 1987  
c/o NIG - Att: Berg  
Kronprinsensgt. 17  
N-0251 OSOLO 2  
(Norway).

# Dimensionamiento, en teoría de segundo orden, de soportes esbeltos de sección constante de hormigón armado en flexo-compresión esviada

Ana Aires,  
Dr. Ingeniero Civil, IETcc, Madrid

Francisco Morán,  
Dr. Ingeniero de Caminos C.P., IETcc, Madrid

## RESUMEN

En este artículo se estudian el análisis y el dimensionamiento de soportes esbeltos biarticulados de sección constante de hormigón armado solicitados en flexo-compresión esviada. Se presenta un estudio paramétrico de la influencia de las distintas variables que intervienen en el fenómeno del pandeo oblicuo, a través del análisis de las superficies de interacción para este tipo de piezas. Se expone un método simplificado que realiza, con suficiente aproximación, el dimensionamiento directo de dichos soportes.

## 1. INTRODUCCION

El análisis de estructuras esbeltas de hormigón armado constituye un problema muy complejo, por tratarse de un fenómeno altamente no lineal debido a los dos tipos de no linealidad, geométrica y mecánica, que se presentan, agravado por el hecho de que estas estructuras pueden alcanzar dos tipos de estado límite último: el de agotamiento de una sección y el de inestabilidad de la estructura.

En particular, el comportamiento de soportes esbeltos de hormigón armado en flexo-compresión esviada (pandeo oblicuo) constituye un fenómeno todavía más problemático. Esto se debe no sólo al gran número de parámetros que intervienen en el fenómeno, sino además a la existencia de momentos flectores fuera de los planos de simetría del soporte, que acarrear unos efectos que, por sí solos, determinan la gran dificultad que plantean estas piezas cuando son analizados su comportamiento y su seguridad frente al pandeo. Dichos efectos son:

- por un lado, el hecho de que la dirección de la curvatura, en cada sección del soporte, no coincide con la dirección del momento flector (fig. 1.a);
- por otro lado, y como consecuencia de lo anterior, la deformada del soporte es una curva alabeada y el plano de flexión es variable para cada sección del soporte (fig. 1.b).

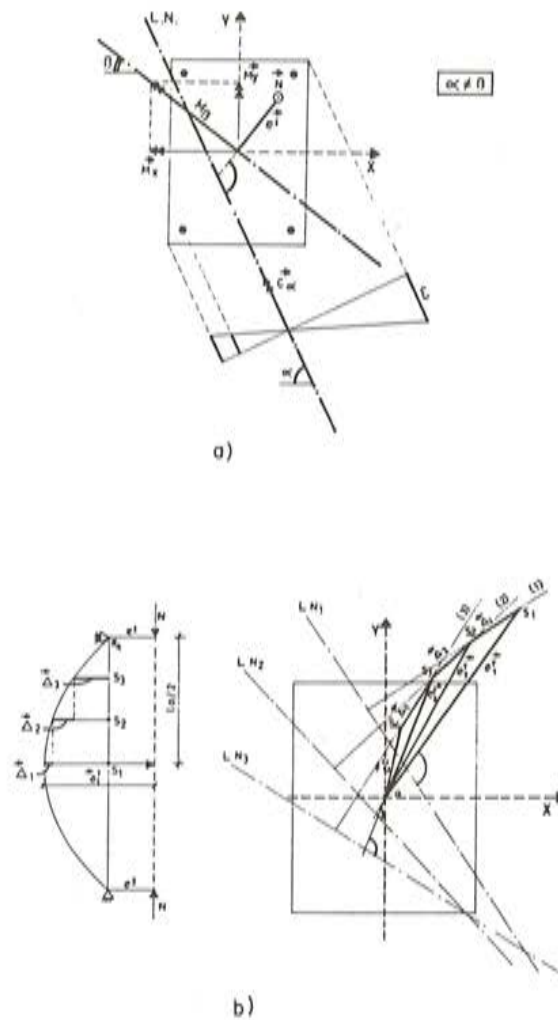


Fig. 1. Efectos de la flexo-compresión esviada.

## 2. HIPOTESIS BASICAS

Las hipótesis básicas de cálculo adoptadas en el análisis del fenómeno del pandeo oblicuo se dividen en los dos grupos siguientes: hipótesis habituales de la Resistencia de Materiales para el cálculo de piezas lineales e hipótesis de cálculo de secciones de hormigón armado.

### a) Hipótesis de la Resistencia de Materiales.

- cargas estáticas;
- tensiones y deformaciones normales a planos paralelos al eje del soporte, nulas;
- efectos de torsión y desplazamientos axiales, despreciables;
- deformaciones por distorsión, despreciables;
- análisis en teoría de segundo orden con pequeñas deformaciones.

b) Hipótesis de cálculo de secciones de hormigón armado:

- deformación plana de la sección transversal;
- perfecta adherencia entre hormigón y acero;
- diagrama tensión-deformación parábola-rectángulo, para el hormigón;
- diagrama tensión-deformación birrectilíneo, para el acero de dureza natural;
- resistencia a tracción del hormigón entre fisuras y tensión stiffening, despreciables;
- efectos de la fluencia del hormigón, considerados mediante la aplicación del procedimiento lineal propuesto por el CEB (2).

### 3. METODO GENERAL

Teniendo en cuenta las hipótesis mencionadas, se ha desarrollado un método riguroso de análisis no lineal, en teoría de segundo orden, que permite el estudio del comportamiento de soportes esbeltos de hormigón armado, solicitados por unas acciones que produzcan una flexo-compresión recta o esviada. Es aplicable tanto en situaciones de servicio como en las de agotamiento, y evalúa de forma adecuada los efectos de segundo orden. Establece además unos criterios de agotamiento e inestabilidad que permiten averiguar el tipo de estado límite último que alcanza el soporte.

### 4. ESTUDIO PARAMETRICO. SUPERFICIES DE INTERACCION

El comportamiento de los soportes esbeltos de hormigón armado en flexo-compresión esviada se considera función de los siguientes parámetros:

1) Parámetros geométricos:

- forma de la sección;
- relación entre los lados de la sección ( $h/b$ );
- distribución de armaduras;
- recubrimiento de las armaduras;
- esbeltez geométrica según cada plano de flexión ( $\lambda_x, \lambda_y$ );

2) Parámetros mecánicos:

- esfuerzo axial, reducido, de compresión ( $\nu$ );
- excentricidades relativas de primer orden ( $\eta_x^I, \eta_y^I$ );
- cuantía mecánica de armadura ( $\omega$ );
- resistencias mecánicas del hormigón y del acero.

El objetivo del estudio paramétrico realizado es analizar la influencia de las mencionadas variables en el comportamiento de estos soportes, en cuanto a su resistencia y deformabilidad. El estudio es independiente de la calidad del hormigón y de las dimensiones de la sección transversal, por haberse trabajado con el diagrama parábola-rectángulo y con parámetros adimensionales.

Se han estudiado soportes biarticulados, con sección transversal rectangular, armada simétricamente en las cuatro esquinas, con un recubrimiento del 10 por 100 en ambas direcciones y para un acero de resistencia  $4.100 \text{ kp/cm}^2$  y  $\gamma_s = 1,15$ .

La realización de este estudio ha permitido:

– observar la variación de la respuesta última resistente de primer orden ( $\nu, \eta_x^I, \eta_y^I$ ) en función de los parámetros geométricos y mecánicos mencionados, a través de una representación análoga a los diagramas de interacción, es decir, a través de *superficies de interacción para soportes esbeltos en flexo-compresión esviada*, que en realidad se representan en el plano  $\eta_x^I - \eta_y^I$  mediante sus curvas de nivel para axil constante;

– observar el tipo de estado límite último (Inestabilidad o Agotamiento) que alcanza el soporte, en función de los mismos parámetros;

– evaluar las excentricidades de segundo orden ( $\eta_x^{II}, \eta_y^{II}$ ) correspondientes a las distintas combinaciones ( $\nu, \eta_x^I, \eta_y^I$ ) de esfuerzos de primer orden.

La obtención de estas superficies ha permitido llegar a las siguientes conclusiones.

1. Los parámetros que influyen de modo relevante el comportamiento de los soportes esbeltos en flexo-compresión esviada son: el axil, la cuantía de armadura longitudinal, la esbeltez según ambos planos de flexión, la relación de lados de la sección transversal y, por último, las excentricidades de primer orden (y sobre todo la predominancia de la que actúa según la dirección más rígida sobre la otra).

2. Para soportes con esbeltez elevada y secciones transversales alargadas, se presenta una pérdida de convexidad de las curvas de nivel de las superficies de interacción, que reafirma que la linealización propuesta por el Código Modelo del CEB no siempre queda del lado de la seguridad (fig. 2).

3. Para un rango de valores de la esbeltez geométrica del soporte comprendido entre 0 y 25, el axil reducido es el parámetro que determina más fuertemente la forma de las curvas de nivel de las superficies de interacción (fig. 3).

4. La cuantía mecánica de armadura interviene en el comportamiento global de la pieza, ya que un aumento de la cuantía conduce a una mayor deformabilidad del soporte. Todo esto se manifiesta en cambios en el tipo de rotura que alcanza el soporte cuando el único parámetro que varía es la cuantía (fig. 4).

5. Cuanto mayores son las dos esbelteces del soporte, mayores son los efectos de segundo orden y predomina la rotura por inestabilidad (fig. 5). Si, además, la esbeltez geométrica mayor del soporte es superior a 25, puede producirse la pérdida de convexidad de las curvas de nivel de las superficies de interacción (fig. 2).

6. La relación de lados de la sección es un parámetro muy importante en la flexo-compresión esviada. En efecto, si esta relación es superior a 2 ( $h/b > 2$ ) y si, además, la esbeltez del soporte es alta ( $\lambda_x > 25$ ) y la excentricidad de primer orden según la dirección más rígida es mucho mayor que la otra, se presenta la referida concavidad de las curvas de nivel de la superficie de interacción. En esta situación, la resistencia del soporte queda fuertemente disminuída por la existencia de una excentricidad de la carga axil de compresión, en la dirección de la menor dimensión, aunque ésta sea muy pequeña, ya que en la dirección de la mayor dimensión la rigidez disminuye fuertemente al crecer la excentricidad en la otra dirección, debido a los efectos no lineales. Esto hace resaltar el problema de cómo debe considerarse la excentricidad adicional,  $e_a = l_0/300$ , que propone el CEB, en la comprobación a pandeo en flexo-compresión recta (fig. 2).

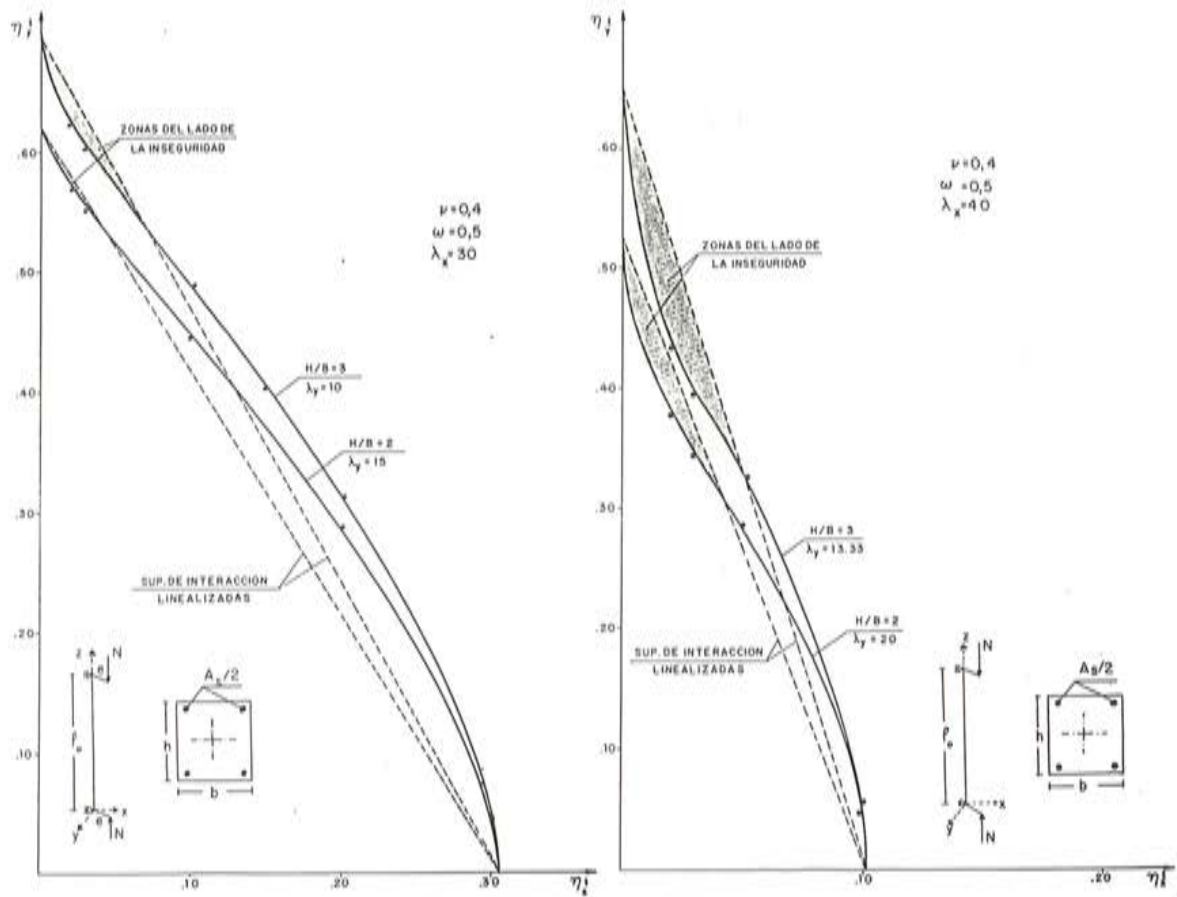


Fig. 2. Superficies de interacción.

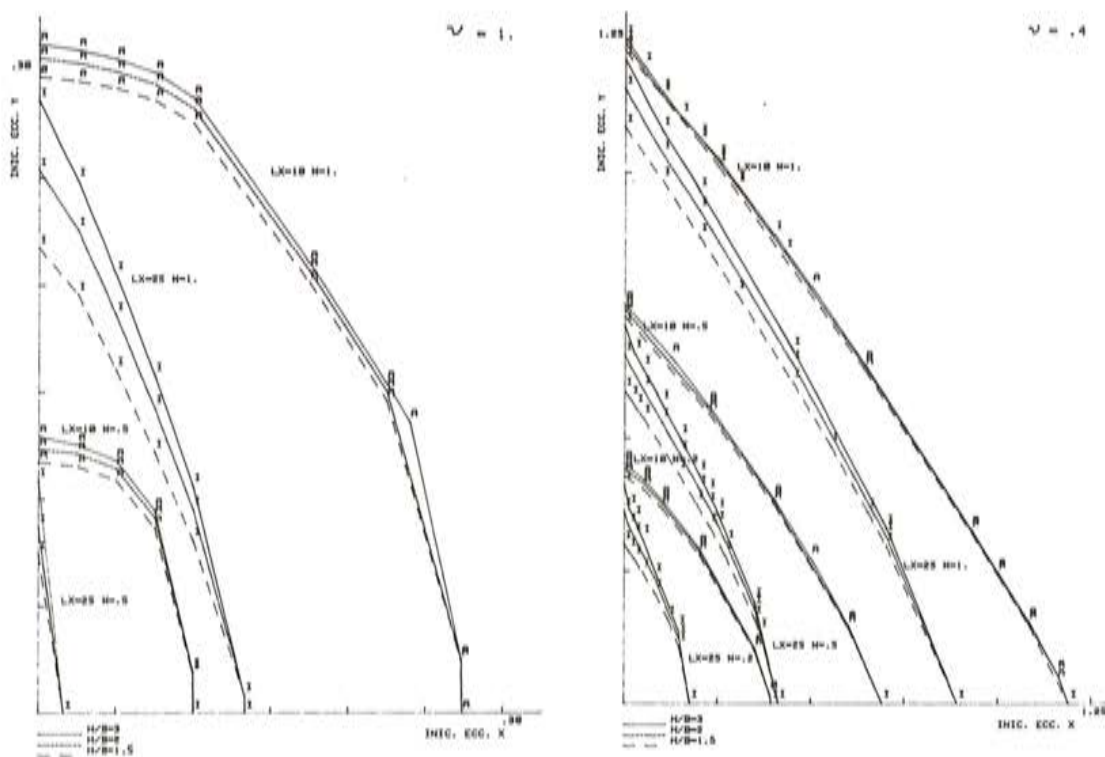


Fig. 3. Superficies de interacción.



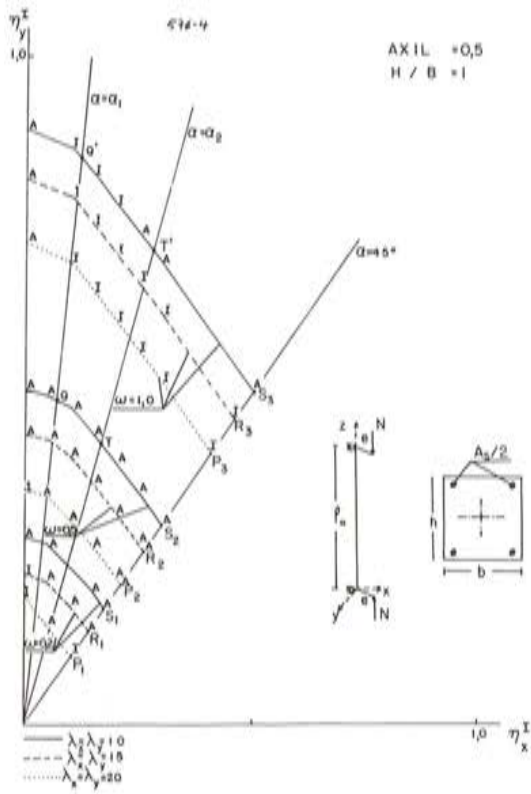


Fig. 4. Superficies de interacción.  
Cambios en el tipo de rotura.

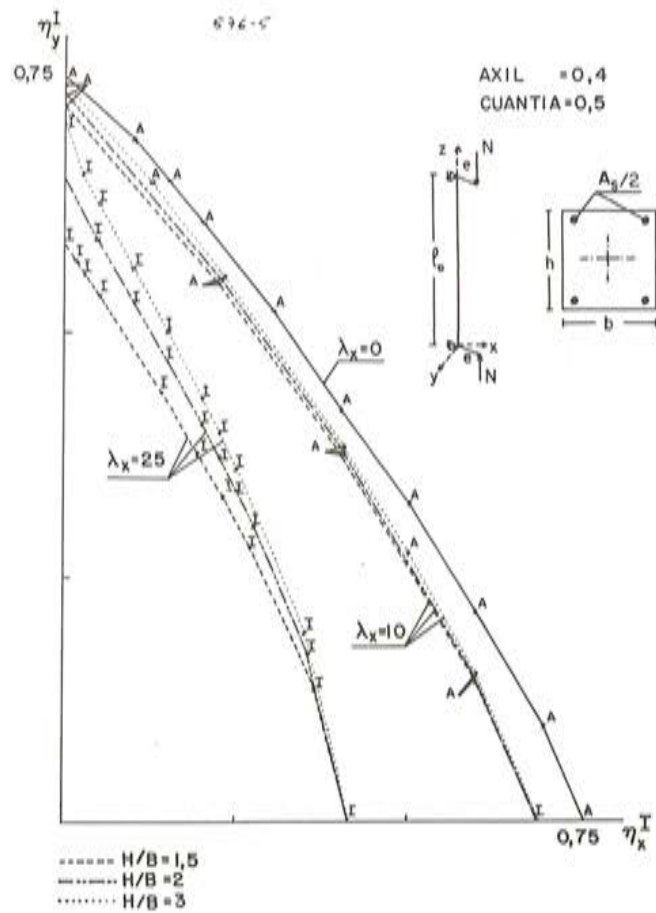


Fig. 5. Superficies de interacción.  
Efectos de la esbeltez.

## 5. METODO APROXIMADO DE DIMENSIONAMIENTO DIRECTO

En base a las conclusiones y resultados obtenidos del estudio paramétrico, se presenta la propuesta de un método aproximado de dimensionamiento directo de soportes esbeltos biarticulados de hormigón armado de sección constante solicitados en flexo-compresión esviada.

Dicho método aproximado se ha plasmado en un sistema de fórmulas simplificadas que cumplen los siguientes requisitos:

- representan adecuadamente el fenómeno del pandeo oblicuo, sin que al aplicarlas se pierda de vista el concepto físico que engloban;
- realizan el dimensionamiento directo de los soportes, tanto cortos como esbeltos, solicitados en flexo-compresión recta y esviada;
- conducen a resultados suficientemente aproximados, comparados con los obtenidos por aplicación del método general;
- son de fácil utilización por parte del proyectista.

Dichas fórmulas simplificadas presentan la siguiente forma:

$$\eta_x^T = \frac{\eta_x^I + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \eta_y^T) \cdot \lambda_x^2}{1 - (\beta_3 + \beta_4 \cdot \eta_y^T) \cdot \lambda_x^2} \quad (1.a)$$

$$\eta_y^T = \frac{\eta_y^I + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \eta_x^T) \cdot \lambda_y^2}{1 - (\beta_3 + \beta_4 \cdot \eta_x^T) \cdot \lambda_y^2} \quad (1.b)$$

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot ((\eta_x^T)^m + (\eta_y^T)^m)^{1/m} \quad (2)$$

siendo:

$\eta_x^I = e_x^I/b$ ,  $\eta_y^I = e_y^I/h$  = excentricidades relativas de primer orden, según las dos direcciones principales;

$\eta_x^T = e_x^T/b$ ,  $\eta_y^T = e_y^T/h$  = excentricidades totales relativas, según las dos direcciones principales;

$\lambda_x = l_0/b$ ,  $\lambda_y = l_0/h$  = esbelteces geométricas, según los dos planos principales de flexión;

$\omega = A_s \cdot f_{yd} / (b \cdot h \cdot f_{cd})$  = cuantía mecánica de dimensionamiento;

$\alpha_i, \beta_i, m$  = coeficientes numéricos que ajustan las funciones  $\eta_x^T$ ,  $\eta_y^T$  y  $\omega$  y que dependen del esfuerzo axial reducido y del tipo de estado límite último (Tabla 1).

Para un determinado valor del esfuerzo axial, cuyo efecto se refleja en los valores de los coeficientes  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $m$ , las dos primeras fórmulas (1.a y 1.b) evalúan de forma muy aproximada las excentricidades totales y, en consecuencia, también los efectos de segundo orden en la sección más solicitada del soporte. La tercera fórmula (2) propuesta permite obtener directamente la cuantía de dimensionamiento, como si de un cálculo de sección se tratase, ya que considera que las excentricidades actuantes son las totales, en lugar de las de primer orden, para el mismo valor del axial. En el caso de rotura por inestabilidad, las excentricidades totales no corresponden al agotamiento de la sección más solicitada; pero se busca la

cuantía de dimensionamiento para estas excentricidades, ya que son las que determinan la inestabilidad de la pieza.

A las excentricidades totales obtenidas de las fórmulas 1.a y 1.b corresponden unas excentricidades de primer orden ( $\eta_x^I, \eta_y^I$ ) que aproximan suficientemente un punto de la superficie de interacción para un determinado axil, cuantía, esbelteces y relación de lados. O sea, dichas fórmulas traducen, analíticamente y de forma aproximada, las curvas de nivel de la superficie de interacción.

La expresión analítica de estas dos fórmulas se ha encontrado recurriendo al procedimiento gráfico (1) indicado en la figura 6, que explica el comportamiento de los soportes esbeltos en flexo-compresión esviada y constituye una generalización del seguido en flexo-compresión recta por el Método de las Curvaturas de Referencia (3).

En la figura 6 se representan las directrices mecánicas para un valor  $\nu_0$  fijo del axil, representativas del comportamiento interno de la sección transversal de un soporte perfectamente definido en cuanto a su forma, cuantía y distribución de armado, solicitada en flexo-compresión esviada. El procedimiento gráfico referido consiste en realizar los siguientes pasos:

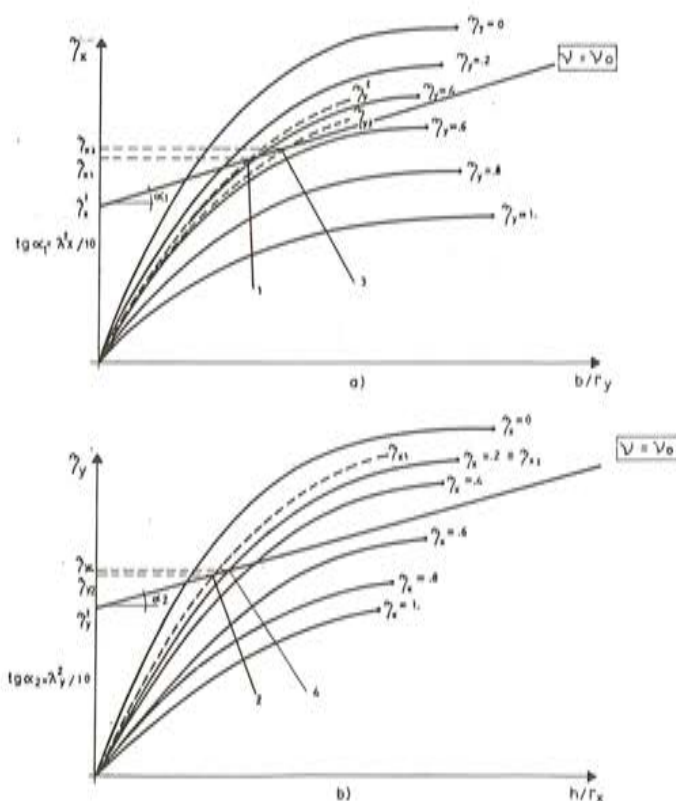


Fig. 6. Procedimiento gráfico.

1. Se obtienen sobre ambos gráficos (fig. 6.a y 6.b) las directrices geométricas definidas por el método de la Columna Modelo, cuyas ecuaciones son:

$$\eta_x^T = \eta_x^I + \frac{\lambda_x^2}{10} \cdot \frac{b}{r_y} \quad \text{y,} \quad (3.a)$$

$$\eta_y^T = \eta_y^I + \frac{\lambda_y^2}{10} \cdot \frac{h}{r_x} \quad , \quad (3.b)$$

y representan la evolución de los momentos externos en ambas direcciones de flexión.

2. En la figura 6.a y suponiendo  $\eta_y = \eta_y^1$ , se encuentra el punto (1) de intersección de la directriz geométrica con la directriz mecánica correspondiente a  $\eta_y = \eta_y^1$ , cuya ordenada es  $\eta_{x1}$ .

3. En la figura 6.b, se obtiene el punto (2) de intersección entre la directriz mecánica,  $\eta_x = \eta_{x1}$ , y la directriz geométrica y se obtiene  $\eta_{y2}$ .

4. En la figura 6.a, se busca un punto (3) de intersección entre la directriz mecánica,  $\eta_y = \eta_{y2}$ , y la directriz geométrica, y se obtiene  $\eta_{x3}$ .

Se continúa así hasta la convergencia del proceso (punto 4), o sea, cuando en dos etapas sucesivas las excentricidades  $\eta_x$  o  $\eta_y$  no difieren entre sí más de una cota de error prefijada.

Las situaciones referentes a estados límites últimos, representadas en las superficies de interacción, corresponden a cualquiera de las situaciones indicadas en la figura 7, o sea, se identifican por la posición que ocupan, para cada plano de flexión, las directrices geométricas y mecánicas. El punto de tangencia puede producirse para una curvatura inferior a la de agotamiento (inestabilidad), o que coincide con la de agotamiento (agotamiento de la sección crítica).

Estos puntos de tangencia permiten conocer las excentricidades totales correspondientes a las curvaturas de inestabilidad y agotamiento.

En base a este razonamiento, y admitiendo que los puntos de tangencia de inestabilidad y de agotamiento se encuentran, para distintas directrices mecánicas relativas a un mismo axil y diferentes cuantías y excentricidades totales para cada plano de flexión, contenidos en dos rectas, una de inestabilidad y otra de agotamiento, las relaciones entre excentricidad total y curvatura en cada plano de flexión, se pueden representar del siguiente modo:

$$\frac{h}{r_x} = \beta_1 + \beta_2 \cdot \eta_x^T + \beta_3 \cdot \eta_y^T + \beta_4 \cdot \eta_x^T \cdot \eta_y^T \quad y,$$

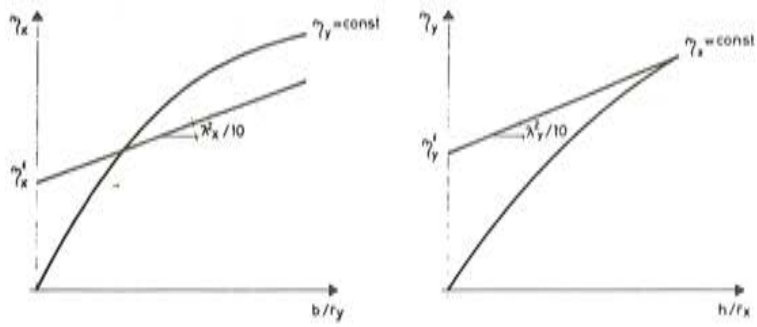
$$\frac{b}{r_y} = \beta_1 + \beta_2 \cdot \eta_y^T + \beta_3 \cdot \eta_x^T + \beta_4 \cdot \eta_y^T \cdot \eta_x^T \quad ,$$

con valores de  $\beta_i$  distintos, según se refieran a situaciones de inestabilidad o agotamiento.

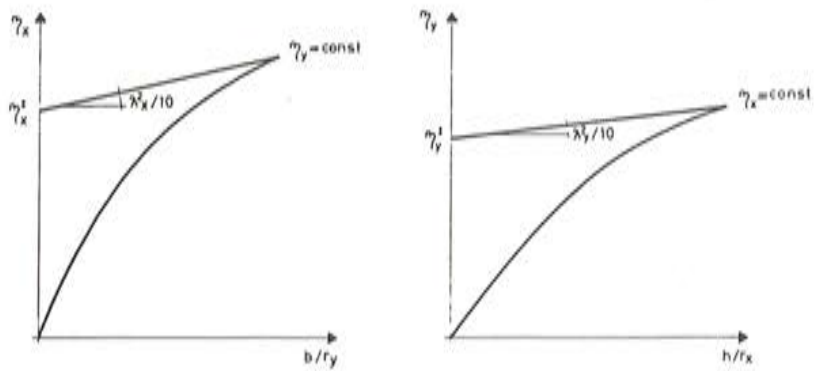
Las dos expresiones son simétricas, porque se suponen distribuciones de armado y recubrimientos relativos idénticos en ambas direcciones, y están representadas en términos adimensionales.

A su vez, considerando como directrices geométricas, en cada plano de flexión, las indicadas por las expresiones (3.a y 3.b), los puntos de intersección entre las directrices geométricas y las rectas de agotamiento e inestabilidad corresponden a la igualdad de las curvaturas de inestabilidad y agotamiento dadas por ambas expresiones.

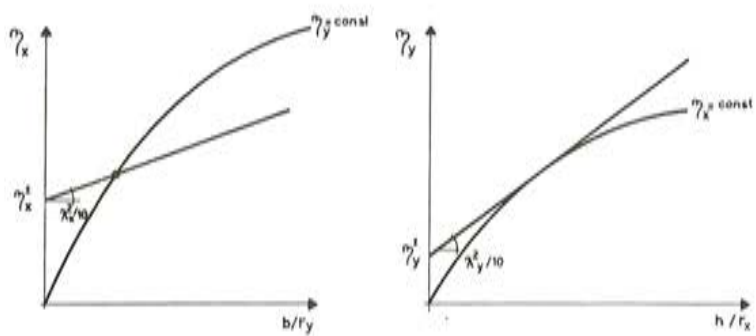
De dicha igualdad se obtienen las expresiones analíticas de las fórmulas 1.a y 1.b, que permiten calcular en dos iteraciones (o como máximo tres), las excentricidades totales de agotamiento y de inestabilidad.



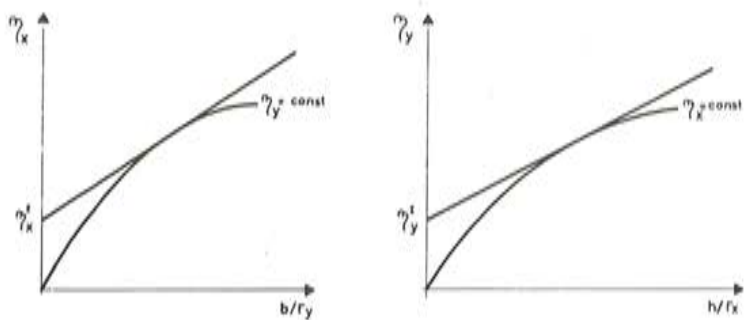
a)



b)



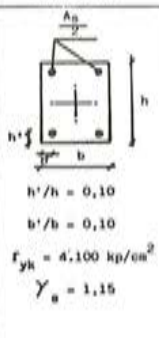
c)



d)

Fig. 7. Tipos de rotura en flexo-compresión esviada.

Los coeficientes  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  y  $\beta_4$  son los coeficientes que ajustan las funciones excentricidades totales, presentados en la Tabla 1 en función del axil y del tipo de rotura.

| Sección transversal                                                               | U   | m    | INESTABILIDAD |           |           |           |            |            | AGOTAMIENTO |           |           |           |            |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|------|---------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|-------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
|                                                                                   |     |      | $\beta_1$     | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\beta_1$   | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|  | 0,1 | 1,83 | 2,83          | -1,36     | 0,91      | 1,21      | -0,11      | 0,26       | 5,32        | -1,19     | 0,83      | -0,09     | -0,14      | 0,27       |
|                                                                                   | 0,2 | 1,29 | 2,33          | -1,32     | 1,77      | 0,40      | -0,20      | 0,52       | 4,19        | -1,49     | 1,42      | -0,02     | -0,25      | 0,54       |
|                                                                                   | 0,3 | 1,17 | 2,46          | -1,79     | 2,02      | 0,31      | -0,27      | 0,79       | 3,95        | -1,87     | 1,92      | -0,44     | -0,29      | 0,80       |
|                                                                                   | 0,4 | 1,14 | 1,79          | -1,61     | 3,65      | -0,51     | -0,24      | 1,01       | 3,10        | -2,97     | 2,64      | 1,94      | -0,30      | 1,06       |
|                                                                                   | 0,5 | 1,30 | 1,69          | -1,78     | 3,86      | 1,05      | -0,18      | 1,27       | 2,46        | -2,96     | 4,10      | 3,34      | -0,27      | 1,34       |
|                                                                                   | 0,6 | 1,40 | 1,00          | -1,85     | 5,25      | 5,35      | -0,11      | 1,54       | 2,04        | -2,30     | 4,46      | 1,31      | -0,19      | 1,61       |
|                                                                                   | 0,7 | 1,48 | 0,87          | -1,93     | 5,96      | 4,13      | -0,06      | 1,86       | 1,99        | -2,92     | 4,69      | 3,79      | -0,15      | 1,94       |
|                                                                                   | 0,8 | 1,54 | 0,95          | -2,29     | 5,76      | 5,36      | 0,02       | 2,19       | 1,99        | -3,82     | 5,41      | 5,78      | -0,07      | 2,22       |
|                                                                                   | 0,9 | 1,69 | 0,83          | -2,51     | 6,13      | 10,20     | 0,08       | 2,55       | 0,98        | -2,17     | 9,87      | 0,75      | 0,11       | 2,22       |
|                                                                                   | 1,0 | 2,00 | 0,42          | -1,70     | 7,68      | 11,30     | 0,20       | 2,76       | 1,66        | -4,38     | 7,65      | 9,05      | 0,10       | 2,87       |

$$\beta_i = \beta_{TABLA} \times 10^{-4}; \quad \alpha_i = \alpha_{TABLA}; \quad m = m_{TABLA}$$

TABLA 1. Coeficientes numéricos para las fórmulas simplificadas del método aproximado.

Conocidas las excentricidades totales, la fórmula (2):

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 [ (\eta_x^T)^m + (\eta_y^T)^m ]^{1/m}$$

permite conocer las cuantías de dimensionamiento de inestabilidad y agotamiento de modo directo, considerando los efectos de segundo orden.

Los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , correspondientes a cada axil y tipo de rotura, así como el coeficiente m de forma de la superficie de interacción, definido a continuación, son función del axil y se encuentran tabulados en la Tabla 1.

El parámetro de forma, m, se define como:

$$m = - \frac{\log 2}{\log \beta}$$

siendo  $\beta$  el parámetro de aplanamiento (4) tal que (fig. 8):

$$\beta = \frac{\eta_{x,45}^T}{\eta_{x,0}^T}$$

en que:

$\eta_{x,45}^T$  = excentricidad relativa total, según el eje OX, para un flexo-compresión a  $45^\circ$ ;

$\eta_{x,0}^T$  = excentricidad relativa total, según el eje OX, para una flexo-compresión recta, en el plano OYZ.

Como se puede observar, la fórmula (2) de la cuantía representa la superficie de interacción, para un determinado axil, en términos de excentricidades totales.

Se obtienen dos cuantías: una cuantía de agotamiento (valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\eta_x^T$  y  $\eta_y^T$ , correspondientes a rotura por agotamiento) y una cuantía de inestabilidad (valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\eta_x^T$  y  $\eta_y^T$  correspondientes a rotura por inestabilidad). La cuantía estricta de dimensionamiento será el menor de los dos valores calculados de  $\omega$ .

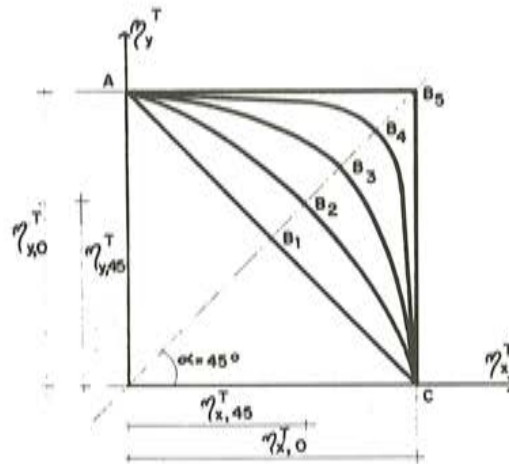


Fig. 8. Definición del parámetro de aplanamiento  $\beta$ .

## 6. PRECISION Y CAMPO DE VALIDEZ DEL METODO APROXIMADO

Con objeto de indicar la precisión y el campo de validez de este método aproximado, en la Tabla 2 se resume un estudio comparativo de dicho método con el método general mencionado en el apartado 3.

Este estudio comparativo consiste en buscar, utilizando las fórmulas aproximadas, el axil  $\nu$  (F.A.) correspondiente a unos valores de la cuantía y de las excentricidades, representativos de un punto de la superficie de interacción obtenido por el método general, para un axil determinado  $\nu$  (M.G.). O sea, para un soporte que resiste estrictamente según el método general, se calcula el axil último, aplicando las fórmulas simplificadas.

Los errores relativos,  $\epsilon_\nu$ , definidos como:

$$\epsilon_\nu = \frac{\nu (\text{F.A.}) - \nu (\text{M.G.})}{\nu (\text{M.G.})} \cdot 100$$

se presentan en la Tabla 2, para 2860 ensayos numéricos.

Se observa que tanto el error máximo positivo como el negativo, de un modo general, crecen a medida que aumenta la esbeltez mayor del soporte ( $\lambda_x = l_0/b$ ). Se comprueba que el mayor valor está del lado de la inseguridad para valores de  $\lambda_x = 25$ . Sin embargo, este resultado no altera sustancialmente la validez del método. En efecto, tanto este valor como la mayoría de todos los errores máximos corresponden a casos aislados, como se puede comprobar de la observación de los errores medios obtenidos para cada esbeltez y respectivas desviaciones típicas, y ocurren además para situaciones de flexo-compresión recta.

El hecho de que se presenten errores fuertes (aunque sea para casos aislados), para el valor 25 de la esbeltez mayor, sumado al fenómeno de pérdida de convexidad de las superficies de interacción, también para esbeltez superior a 25, ha llevado a limitar la validez del método aproximado a este valor de la esbeltez geométrica del soporte.

| ESBELTEZ<br>MAYOR<br>$\lambda_x$ | CUANTIA<br>$\omega$ | ERROR<br>MAXIMO<br>(+) % | ERROR<br>MAXIMO<br>(-) % | ERROR<br>MEDIO<br>$\bar{\epsilon}_v$ % | DESVIACION<br>TÍPICA<br>$\sigma$ % |
|----------------------------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|
| 0                                | 0,20                | 4,27                     | -1,94                    | 0,52                                   | 2,02                               |
|                                  | 0,30                | 1,68                     | -4,17                    | -0,62                                  | 1,79                               |
|                                  | 0,50                | 1,42                     | -1,81                    | 0,27                                   | 1,18                               |
|                                  | 0,80                | 1,97                     | -1,38                    | 0,28                                   | 1,02                               |
|                                  | 1,00                | 3,50                     | -2,42                    | 0,85                                   | 1,53                               |
|                                  | SUBTOTAL            | 4,27                     | -4,17                    | 0,22                                   | 1,61                               |
| 10                               | 0,20                | 6,55                     | -7,30                    | 0,26                                   | 3,12                               |
|                                  | 0,30                | 3,33                     | -2,07                    | 0,34                                   | 1,42                               |
|                                  | 0,50                | 6,60                     | -5,70                    | 0,39                                   | 1,75                               |
|                                  | 0,80                | 3,90                     | -3,05                    | 0,58                                   | 1,94                               |
|                                  | 1,00                | 4,21                     | -3,13                    | 0,24                                   | 1,51                               |
|                                  | SUBTOTAL            | 6,55                     | -7,30                    | 0,33                                   | 2,00                               |
| 15                               | 0,20                | 10,50                    | -6,40                    | 0,33                                   | 3,60                               |
|                                  | 0,30                | 1,65                     | -2,44                    | 0,41                                   | 1,02                               |
|                                  | 0,50                | 7,00                     | -6,05                    | 0,73                                   | 1,94                               |
|                                  | 0,80                | 4,79                     | -3,37                    | 0,65                                   | 2,01                               |
|                                  | 1,00                | 4,34                     | -3,67                    | 0,42                                   | 1,69                               |
|                                  | SUBTOTAL            | 10,50                    | -6,40                    | 0,53                                   | 2,24                               |
| 20                               | 0,20                | 13,50                    | -8,10                    | 0,67                                   | 4,17                               |
|                                  | 0,30                | 4,08                     | -3,10                    | 1,19                                   | 1,90                               |
|                                  | 0,50                | 6,50                     | -3,98                    | 1,06                                   | 1,94                               |
|                                  | 0,80                | 4,79                     | -3,37                    | 0,67                                   | 2,01                               |
|                                  | 1,00                | 4,34                     | -3,67                    | 0,21                                   | 1,69                               |
|                                  | SUBTOTAL            | 13,50                    | -8,10                    | 0,66                                   | 2,44                               |
| 25                               | 0,20                | 15,25                    | -12,63                   | 0,20                                   | 4,84                               |
|                                  | 0,30                | 4,47                     | -11,29                   | -0,75                                  | 4,47                               |
|                                  | 0,50                | 6,40                     | -5,10                    | 0,95                                   | 2,18                               |
|                                  | 0,80                | 4,51                     | -3,80                    | 0,42                                   | 2,05                               |
|                                  | 1,00                | 4,66                     | -7,70                    | -0,63                                  | 2,49                               |
|                                  | SUBTOTAL            | 15,25                    | -12,63                   | 0,15                                   | 3,02                               |
| TOTAL                            | 15,25               | -12,63                   | 0,42                     | 2,40                                   |                                    |

TABLA 2

Este límite es además próximo al valor 29 que da la Instrucción Española EH-82 como límite de esbeltez superior, hasta el cual es posible aplicar el método aproximado de dimensionamiento de soportes esbeltos en flexo-compresión recta.

## 7. EJEMPLO DE APLICACION

Se pretende dimensionar un soporte con las siguientes características:

$$\begin{aligned}\lambda_x &= 15 \\ \lambda_y &= 10 \\ \nu &= 0,5 \\ \eta_x^I &= 0,20 \\ \eta_y^I &= 0,3593\end{aligned}$$

De la Tabla 1 se obtienen los valores de los coeficientes  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $m$  para  $\nu = 0.5$ .



| <i>Coefficientes</i> | <i>Inestabilidad</i>  | <i>Agotamiento</i>    |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\beta_1$            | $1,69 \cdot 10^{-4}$  | $2,46 \cdot 10^{-4}$  |
| $\beta_2$            | $-1,78 \cdot 10^{-4}$ | $-2,96 \cdot 10^{-4}$ |
| $\beta_3$            | $3,86 \cdot 10^{-4}$  | $4,10 \cdot 10^{-4}$  |
| $\beta_4$            | $1,05 \cdot 10^{-4}$  | $3,34 \cdot 10^{-4}$  |
| $\alpha_1$           | -0,18                 | -0,27                 |
| $\alpha_2$           | 1,27                  | 1,34                  |
| m                    | 1,30                  | 1,30                  |

Resolviendo iterativamente las fórmulas 1.a y 1.b (dos iteraciones son suficientes), se obtienen las excentricidades totales de inestabilidad y agotamiento:

|            | <i>Inestabilidad</i> | <i>Agotamiento</i> |
|------------|----------------------|--------------------|
| $\eta_x^T$ | 0,2462               | 0,2608             |
| $\eta_y^T$ | 0,3878               | 0,3959             |

Las cuantías de inestabilidad ( $\omega_1$ ) y agotamiento ( $\omega_A$ ) serán:

$$\omega_1 = 0,5113 \qquad \omega_A = 0,4847$$

La cuantía estricta de dimensionamiento es  $\omega_A = 0,4847$ , y el soporte alcanza un estado límite último de agotamiento. Para el mismo soporte, dimensionado por el método general se obtendría  $\omega = 0,50$ .

## 8. BIBLIOGRAFIA

- (1) C.E.B. Bulletin d'Information n° 123. CEB - FIP Manual of Buckling and Instability. Diciembre, 1977.
- (2) AIRES PEREIRA, A. "Dimensionamiento, en teoría de segundo orden, de soportes esbeltos de sección constante de hormigón armado en flexocompresión esviada". Tesis Doctoral. E.T.S. Ingenieros de Caminos Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. Mayo 1986.
- (3) CORRES, H., MORAN, F. "Reference Curvatures Method". Bulletin d'Information n° 155. Praga. Octubre, 1983.
- (4) MORAN, F. "Documentation complémentaire au Manuel de Calcul CEB - FIP. Flexion Compression. Boletín n° 83 del C.E.B., París, 1972.

# **Excentricidad ficticia e\*. Fórmulas simplificadas para el dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado**

**Hugo Corres**  
 Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
**Balhan Alsaadi**  
 Ingeniero Civil  
**F. Javier León**  
 Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
 Departamento de Hormigón Armado y Pretensado  
 E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
 Universidad Politécnica de Madrid

## **1. INTRODUCCION**

Las Normas de diferentes países, (EH-82(1), ACI-318-83(2), DIN-1045(3), CP-110(4), BAEL-80(5)), así como recientes trabajos (6) proponen diferentes fórmulas simplificadas para el dimensionamiento indirecto de soportes esbeltos de hormigón armado. Según estos procedimientos, el comportamiento de soportes esbeltos puede tenerse en cuenta dimensionando el soporte como corto, de acuerdo con los principios generales del cálculo de secciones sometidas a tensiones normales en estado límite último, considerando como esfuerzos de cálculo los valores de primer orden transformados.

En la figura 1 se explican conceptualmente las ideas de este tipo de métodos. Se muestra en ella, en primer lugar, el diagrama de interacción de un soporte corto ( $\lambda = 0$ ) y el diagrama de interacción de un soporte esbelto ( $\lambda = 20$ ), con idéntica sección transversal.

Se aprecia que, debido a los efectos de la esbeltez, se produce una pérdida de capacidad resistente que puede definirse de distinta manera:

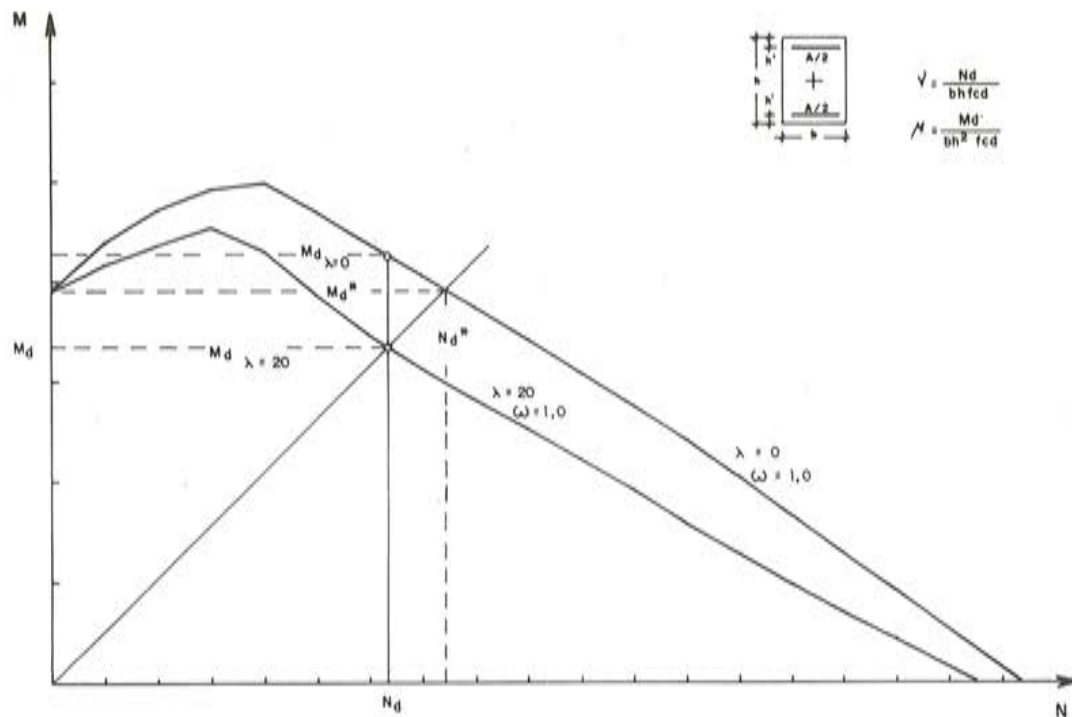


Fig. 1. Definición de la pérdida de capacidad resistente de soportes esbeltos.

1) Para un axil dado  $N_d$ , la pérdida de capacidad resistente puede expresarse en términos de momentos. En el ejemplo de la figura, esta pérdida puede expresarse por

$$\Delta M = M_{d, \lambda = 0} - M_{d, \lambda = 20} \quad \text{ec. (1)}$$

2) Para una excentricidad constante, la pérdida de capacidad resistente puede definirse en términos de axil y momento. En el ejemplo de la figura, este criterio puede expresarse, para axiles:

$$\Delta N = N_d^* - N_d \quad \text{ec. (2)}$$

y para momentos:

$$\Delta M = M_d^* - M_d \quad \text{ec. (3)}$$

Si fuese posible obtener las pérdidas de capacidad resistente, definidas con cualquiera de los dos criterios indicados, el dimensionamiento de soportes esbeltos podría abordarse con igual nivel de precisión que con métodos más precisos (Columna Modelo o Curvaturas de Referencia), dimensionando la sección transversal del soporte con los esfuerzos de primer orden, obtenidos del cálculo de esfuerzos, más la pérdida de capacidad resistente debida al efecto de la esbeltez.

En general, las fórmulas propuestas en las distintas normativas utilizan el criterio 1, pero conducen a resultados poco precisos. En la Tabla 1 se muestra un estudio comparativo entre los resultados obtenidos con las fórmulas de distintas normas, y los obtenidos utilizando el Método de la Columna Modelo. Como puede verse, algunas fórmulas (EH-82, por ejemplo) conducen siempre a resultados del lado de la seguridad, dando errores impor-

tantes. En otros casos (ACI-318-83 particularmente), los resultados no sólo son poco precisos sino que, además, pueden conducir a dimensionamientos del lado de la inseguridad.

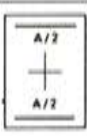


| $e_1/e_2$                                                                         | 1                       |                         |               |                     | 0                       |                         |               |                     | -1                      |                         |               |                     | Fórmula dimensionamiento |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------------------|---------------|---------------------|-------------------------|-------------------------|---------------|---------------------|--------------------------|
|                                                                                   | Error máximo positivo % | Error máximo negativo % | Error medio % | Desviación Estándar | Error máximo positivo % | Error máximo negativo % | Error medio % | Desviación Estándar | Error máximo positivo % | Error máximo negativo % | Error medio % | Desviación Estándar |                          |
|  | 5.9                     | -30                     | -5.0          | 7.4                 | 18.2                    | -29                     | -2.8          | 7.2                 | 6.9                     | -32                     | -4.6          | 8.5                 | CP110-72                 |
|                                                                                   | 12.3                    | -34                     | -10.0         | 6.9                 | 2.1                     | -38                     | -8.2          | 8.8                 | 6.9                     | -22                     | -2.6          | 5.4                 | DIN1045-72               |
|                                                                                   | 48.9                    | -33                     | -2.0          | 14.4                | 35.3                    | -36                     | -2.6          | 10.1                | 30.7                    | -35                     | -1.7          | 7.3                 | ACI318-78                |
|                                                                                   | 1.4                     | -40                     | -11.0         | 8.6                 | 2.6                     | -40                     | -7.9          | 10.1                | 2.9                     | -38                     | -5.9          | 9.5                 | EH-80                    |
|  | 16.0                    | -34                     | -3.6          | 8.0                 | 19.1                    | -29                     | -2.1          | 7.2                 | 7.5                     | -36                     | -4.4          | 8.2                 | CP110-72                 |
|                                                                                   | 13.5                    | -28                     | -9.2          | 6.7                 | 4.5                     | -31                     | -8.2          | 8.3                 | 12.2                    | -19                     | -2.1          | 4.7                 | DIN1045-72               |
|                                                                                   | 61.1                    | -28                     | 2.3           | 16.7                | 43.4                    | -30                     | -0.5          | 10.6                | 32.0                    | -31                     | -0.5          | 7.5                 | ACI318-78                |
|                                                                                   | 4.1                     | -42                     | -9.8          | 8.8                 | 3.9                     | -42                     | -7.9          | 9.9                 | 3.4                     | -40                     | -5.8          | 9.4                 | EH-80                    |
|  | 13.3                    | -34                     | -2.5          | 7.9                 | 19.8                    | -30                     | -1.7          | 7.5                 | 6.3                     | -34                     | -4.2          | 7.9                 | CP110-72                 |
|                                                                                   | 12.1                    | -26                     | -8.3          | 6.3                 | 3.4                     | -31                     | -7.9          | 7.9                 | 12.2                    | -17                     | -1.8          | 4.4                 | DIN1045-72               |
|                                                                                   | 69.1                    | -26                     | 4.2           | 17.3                | 47.0                    | -28                     | 0.4           | 11.0                | 36.8                    | -30                     | -0.3          | 7.9                 | ACI318-78                |
|                                                                                   | 5.9                     | -43                     | -8.9          | 8.4                 | 5.8                     | -43                     | -7.7          | 9.5                 | 6.3                     | -41                     | -5.6          | 9.1                 | EH-80                    |

Tabla 1

Estudio de la precisión de distintas ( $\nu_s$ ) fórmulas de dimensionamiento indirecto propuestas por distintas normas, respecto a los resultados obtenidos con el ( $\nu_{CM}$ ) Método de la Columna Modelo [Error % = 100 ( $\nu_s - \nu_{CM}$ )/ $\nu_{CM}$ ]

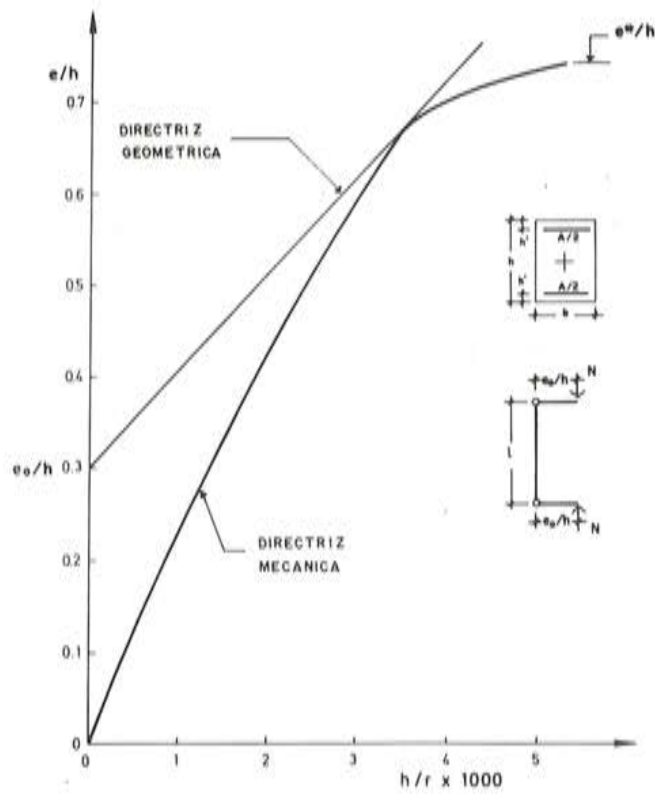
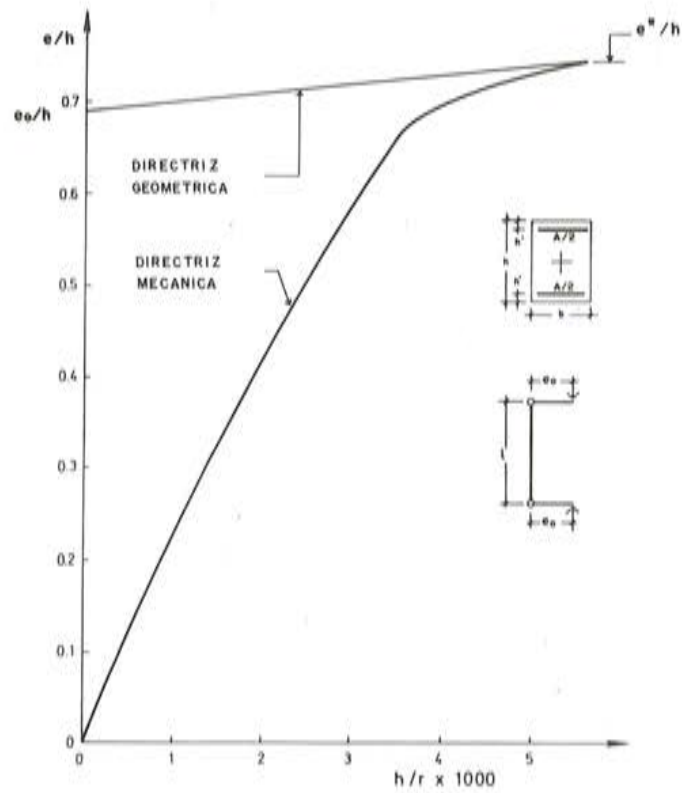
En recientes trabajos (6), se propone un método gráfico para el dimensionamiento indirecto de soportes esbeltos, utilizando el criterio 2. Este procedimiento conduce a resultados más precisos que los anteriores, pero presenta el inconveniente de no permitir el empleo de un ordenador, debido a su formulación gráfica.

En este trabajo se presentan fórmulas de dimensionamiento indirecto que, utilizando el criterio 1 para la definición de la pérdida de capacidad resistente y las hipótesis generales del Método de las Curvaturas de Referencia (7), permiten la definición de una excentricidad ficticia,  $e^*$ , para el dimensionamiento de soportes esbeltos, y conducen a resultados de precisión similar a la que se obtiene utilizando métodos más exactos (Columna Modelo, Curvaturas de Referencia, etc.).

## 2. TIPOS DE ROTURA Y DEFINICION DE LA EXCENTRICIDAD FICTICIA $e^*$

La pérdida de capacidad resistente de los soportes esbeltos, debe definirse de acuerdo con el tipo de rotura o estado límite último (ELU) que corresponde al soporte analizado. Los efectos de la esbeltez pueden conducir a que el soporte alcance un estado de equilibrio estable con unos valores de sollicitación, en la sección crítica, que producen el agotamiento de la misma (ELU de agotamiento de la sección crítica), o a que el soporte alcance un estado de equilibrio inestable, aunque los esfuerzos en la sección crítica sean menores que los que producen el agotamiento de dicha sección (ELU de inestabilidad).

En la figura 2 se muestra el comportamiento de un soporte esbelto que alcanza el ELU de agotamiento en su sección crítica, utilizando la representación que define el Método de la Columna Modelo.



En este caso, la excentricidad total en la sección crítica produce el agotamiento de ésta y por lo tanto del soporte. A los efectos del dimensionamiento indirecto, sería suficiente dimensionar la sección con el valor máximo de excentricidad, que se denomina excentricidad ficticia  $e^*$ .

En la figura 3 se muestra el comportamiento de un soporte esbelto que alcanza el ELU de inestabilidad. En este caso, la excentricidad total de la sección crítica, definida por el punto de tangencia entre las directrices geométrica y mecánica correspondientes, resulta menor que la excentricidad que representa el agotamiento de la sección. Si se tomase esta excentricidad para el dimensionamiento, se obtendrían cuantías del lado de la inseguridad.

Para este tipo de rotura, la pérdida de capacidad resistente de la sección o la excentricidad ficticia  $e^*$  para un dimensionamiento indirecto es la que corresponde al último punto de la directriz mecánica para la que se produce el ELU, tal como se indica en la figura.

### 3. FORMULAS SIMPLIFICADAS PARA EL CALCULO DE $e^*$

Tal como se ha indicado, las fórmulas simplificadas que se presentan se han obtenido a partir de las hipótesis propuestas por el Método de las Curvaturas de Referencia, según el cual, el ELU de agotamiento de la sección crítica está caracterizado por la curva de Curvaturas de Referencia de Agotamiento, y el ELU de inestabilidad por la curva de Curvaturas de Referencia de Inestabilidad.

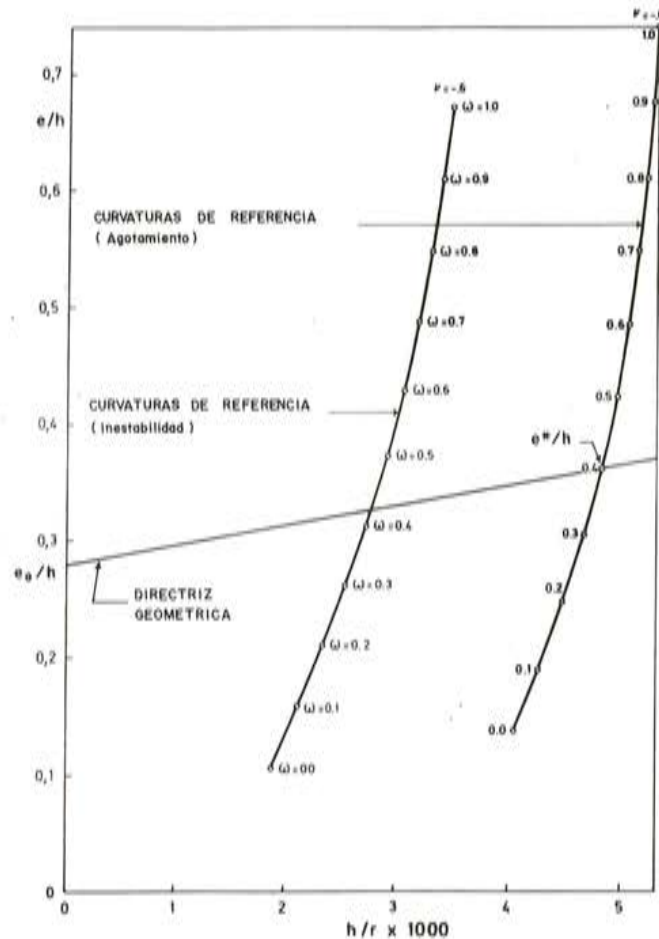


Fig. 4. Definición de  $e^*$  para soportes que rompen por agotamiento.

Si la rotura se produce por agotamiento, la determinación de  $e^*$  consiste en encontrar la intersección de la directriz geométrica y la curva de Curvaturas de Referencia de Agotamiento. (Figura 4).

Si la rotura se produce por inestabilidad,  $e^*$  se obtiene encontrando, en primer lugar, la intersección entre la directriz geométrica y la curva de Curvaturas de Referencia de Inestabilidad. Esta intersección permite definir la excentricidad máxima que se produce en el soporte. (Figura 5).

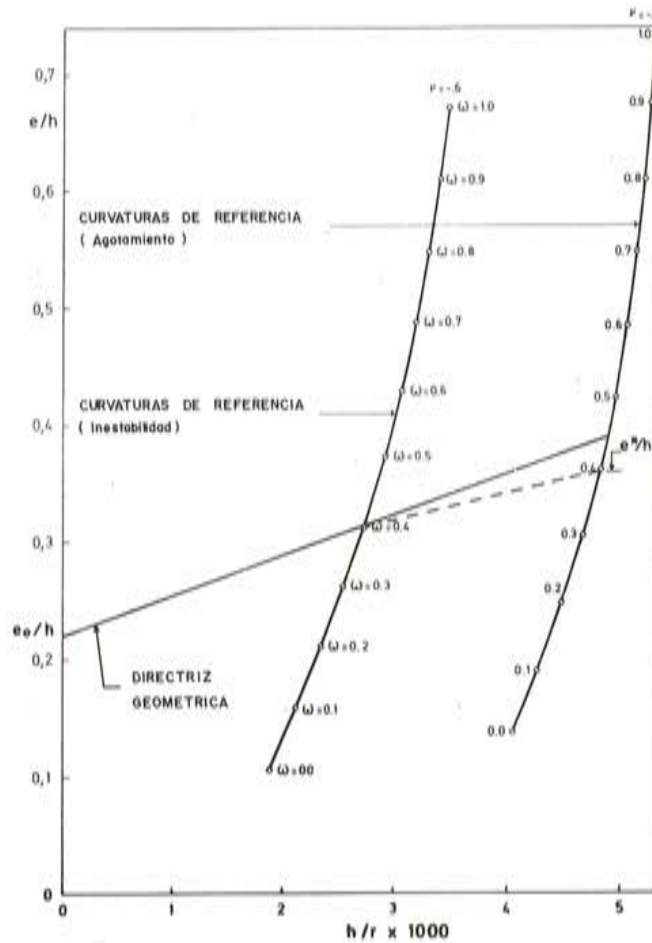
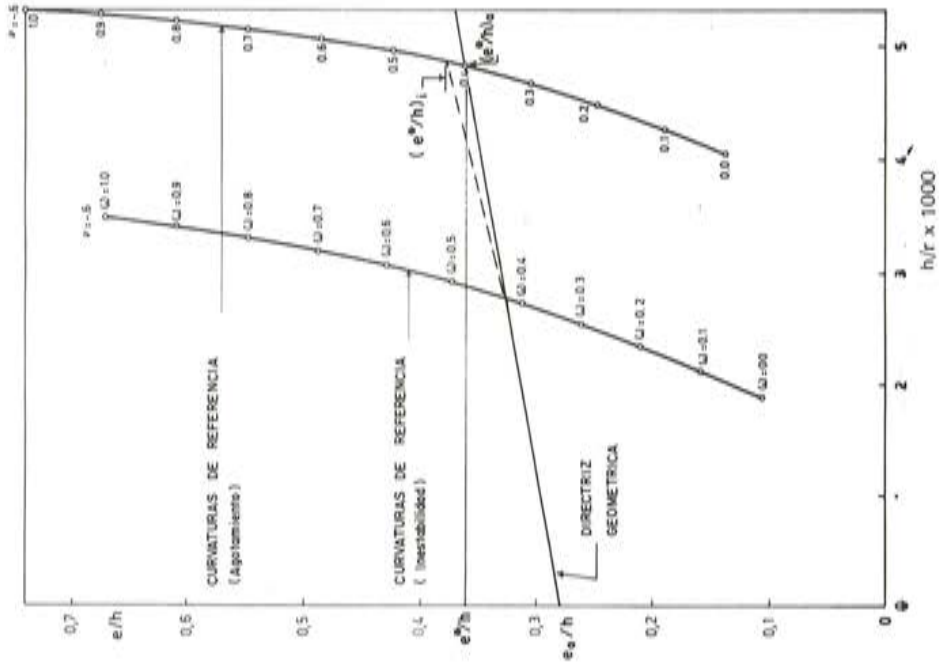


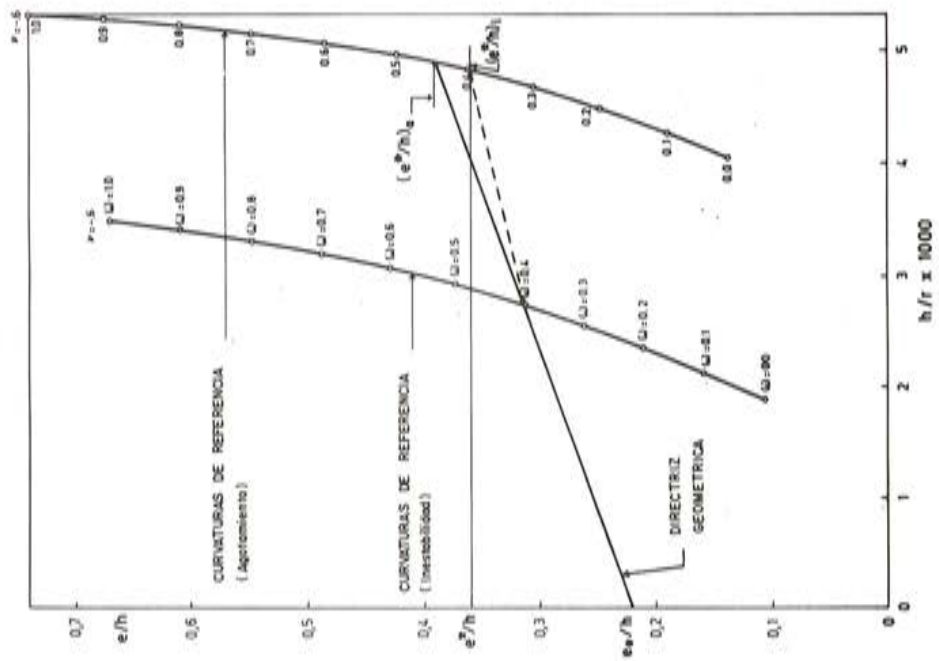
Fig. 5. Definición de  $e^*$  para soportes que rompen por inestabilidad.

Seguidamente, es necesario determinar el último punto de la directriz mecánica que define el ELU de inestabilidad, es decir, el punto de la curva de Curvaturas de Referencia de Agotamiento con igual cuantía que el de la intersección anterior.

Ya que, en principio, no es posible saber, a partir de los datos de dimensionamiento, qué tipo de rotura tendrá el soporte, será necesario determinar dos valores de  $e^*$ , correspondientes a agotamiento e inestabilidad, respectivamente, y utilizar el menor para el dimensionamiento de la sección transversal. En la figura 6 se muestra gráficamente este problema, para los dos tipos de rotura posibles.



a) ELU de inestabilidad.



b) ELU de agotamiento de la sección crítica.

Fig. 6.



A los efectos de la obtención de las fórmulas simplificadas, se han adoptado las simplificaciones que se describen a continuación:

### Características de la sección transversal y de los materiales considerados

Las fórmulas se han deducido para secciones rectangulares, con armadura simétrica en caras opuestas, considerando un recubrimiento  $h'/h = 0,1$  y un acero tipo AEH-400.

La influencia del recubrimiento y de la calidad del acero, resulta pequeña en el fenómeno estudiado.

Las fórmulas resultan muy diferentes para tipos de armado o secciones transversales diferentes a las elegidas. En cualquier caso, la tipología adoptada es, posiblemente, la más frecuente en estructuras de edificación.

### Ajuste por mínimos cuadrados de las Curvas de Curvaturas de Referencia

Para la deducción de las fórmulas, se han sustituido las curvas de Curvaturas de Referencia, correspondientes a los distintos axiles, que sólo pueden ser definidas por puntos, por rectas ajustadas por mínimos cuadrados. De esta forma, para cada axil, se tendrán dos rectas que representan las curvas de Curvaturas de Referencia de Agotamiento e Inestabilidad, respectivamente, presentando la forma general siguiente:

$$h/r = \beta_1 + \beta_2 \cdot c/h \quad \text{ec. (4)}$$

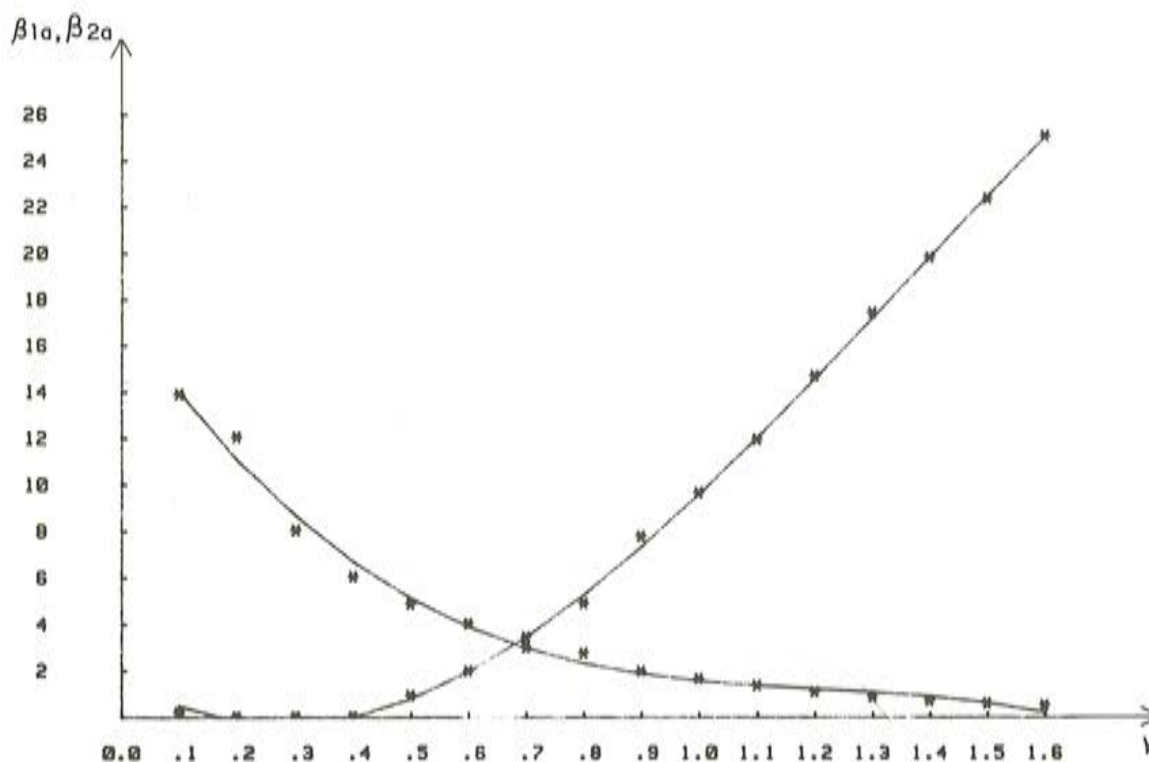


Fig. 7.

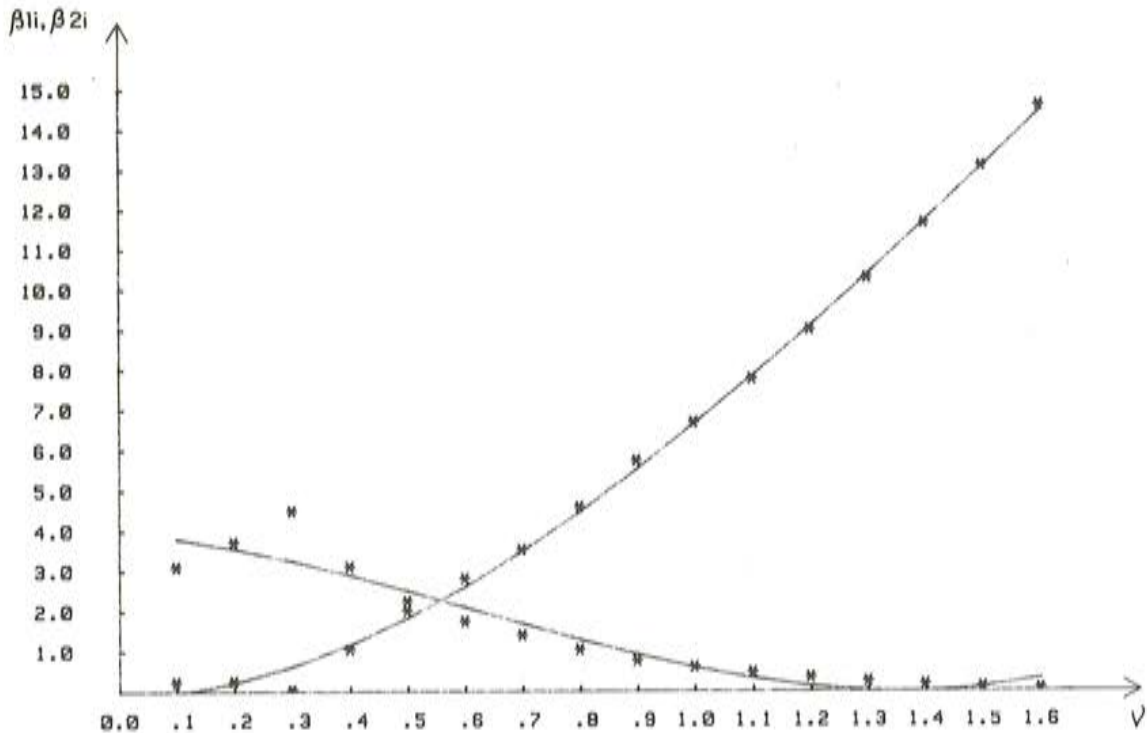


Fig. 8.

donde  $h/r$  y  $e/h$  representan la curvatura y la excentricidad relativas o adimensionales. Los coeficientes  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , tanto para agotamiento como para inestabilidad, pueden expresarse de forma polinómica, en función del axil. En las figuras 7 y 8 se muestran los valores de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , en función del axil reducido,  $\nu$ ; y en las ecuaciones 5 a 8 se presenta el ajuste polinómico adoptado.

$$\beta_{1a} = 17,479 - 37,649 \cdot \nu + 29,97 \cdot \nu^2 - 8,241 \cdot \nu^3 \quad \text{ec. (5)}$$

$$\beta_{2a} = 1,719 - 15,395 \cdot \nu + 30,856 \cdot \nu^2 - 7,574 \cdot \nu^3 \quad \text{ec. (6)}$$

$$\beta_{1i} = 3,969 - 1,264 \cdot \nu - 4,57 \cdot \nu^2 + 2,458 \cdot \nu^3 \quad \text{ec. (7)}$$

$$\beta_{2i} = -0,186 + 0,434 \cdot \nu + 8,006 \cdot \nu^2 - 1,064 \cdot \nu^3 \quad \text{ec. (8)}$$

donde  $\beta_{1a}$  y  $\beta_{2a}$  son los coeficientes correspondientes al ajuste de las curvas de Curvaturas de Referencia de Agotamiento y  $\beta_{1i}$  y  $\beta_{2i}$  los coeficientes para el caso de Inestabilidad.

### Directriz geométrica

Se ha adoptado, como directriz geométrica, la propuesta por el Método de la Columna Modelo:

$$e_t/h = e_0/h + (\ell/h)^2 \cdot (h/r)/10 \quad \text{ec. (9)}$$

donde:

$e_t/h$  es la relación entre la excentricidad total,  $e_t$ , y el canto total  $h$ ;

$e_0/h$  es la relación entre la excentricidad de primer orden,  $e_0$ , y el canto  $h$ ;

$\ell$  es la longitud del soporte equivalente, y  
 $h/r$  es la curvatura relativa (o adimensional) de la sección crítica.

De acuerdo con estas hipótesis, relativas a las curvas de Curvaturas de Referencia y a la directriz geométrica, la intersección entre estas curvas puede expresarse, en general, por la ec. (10):

$$e_t/h = \frac{e_0/h + \beta \cdot \beta_1}{1 - \beta \cdot \beta_2} \quad \text{ec. (10)}$$

donde:

$e_t/h$  es la relación entre la excentricidad total en el estado límite considerado,  $e_t$ , y el canto total  $h$ ;

$e_0/h$  es la excentricidad relativa de primer orden;

$\beta = \lambda^2/10.000$ , siendo  $\lambda$  la esbeltez geométrica definida por el cociente entre la longitud del soporte equivalente  $\ell$ , y el canto total  $h$ ;

$\beta_1, \beta_2$  son los coeficientes que definen el ajuste de las curvas de Curvaturas de Referencia.

### Relación $e_i - e_a$

Tal como se ha comentado, para la determinación de  $e^*$  en el caso del ELU de inestabilidad, es necesario determinar la relación existente, para un mismo valor de cuantía, entre los puntos de las curvas de Curvaturas de Inestabilidad y las curvas de Curvaturas de Agotamiento. En la figura 9 se muestra la relación  $e_i - e_a$  para axiles reducidos comprendidos entre 0,1 y 1,6 y cuantías entre 0,1 y 1. Tal como puede verse, esta relación resulta prácticamente lineal y puede expresarse por la ec. 11:

$$e_a/h = 0,021 + 1,035 \cdot e_i/h \quad \text{ec. (11)}$$

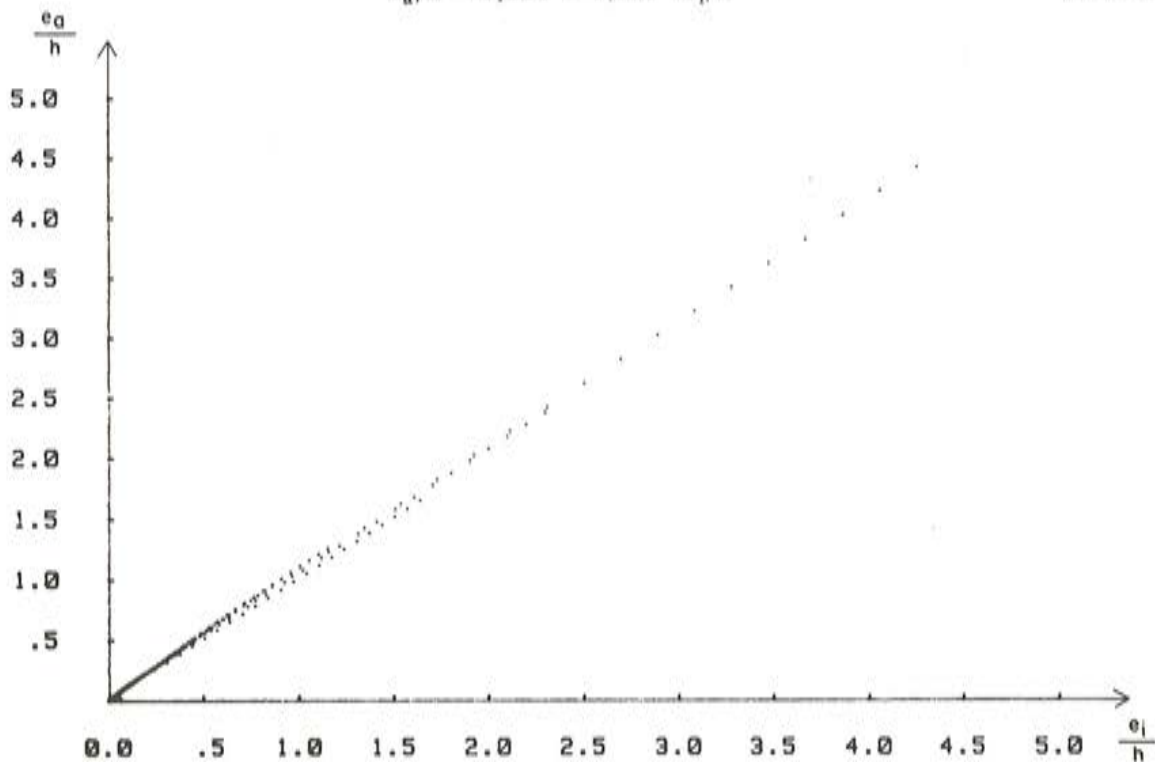


Fig. 9

### Fórmulas excentricidad ficticia

De acuerdo con las hipótesis expuestas, la excentricidad ficticia  $e^*$  puede definirse, por medio de la ec. 12 para roturas por agotamiento de la sección crítica, y por la ec. 13 para roturas por inestabilidad.

$$(e^*/h)_a = \frac{e_0/h + \beta \cdot \beta_{1a}}{1 - \beta \cdot \beta_{2a}} \quad \text{ec. (12)}$$

$$(e^*/h)_i = 0,021 + 1,035 \cdot \frac{e_0/h + \beta \cdot \beta_{1i}}{1 - \beta \cdot \beta_{2i}} \quad \text{ec. (13)}$$

donde

$(e^*/h)_a$  es la excentricidad relativa ficticia de agotamiento;

$(e^*/h)_i$  es la excentricidad relativa ficticia de inestabilidad;

$\beta_{1a}$ ,  $\beta_{2a}$ ,  $\beta_{1i}$  y  $\beta_{2i}$  son los coeficientes definidos en las ecuaciones 5 a 8, y

$\beta$  es el mismo parámetro definido en la ec. 10.

### Efecto de las cargas permanentes. Fluencia

Para tener en cuenta el efecto de las cargas permanentes, el procedimiento propuesto es compatible con la utilización del método lineal de la excentricidad de fluencia, propuesto por el CEB (8).

$$e_c = e_{1g} \cdot \exp \left[ \frac{\varphi(t_\infty, t_0) \cdot F_g}{F_E - F_g} - 1 \right] \quad \text{ec. (14)}$$

donde:

$e_c$  es la excentricidad adicional de fluencia;

$e_{1g}$  es la excentricidad de primer orden debida a la carga de larga duración;

$\varphi(t_\infty, t_0)$  es el coeficiente de fluencia a tiempo infinito, para una edad  $t_0$  de puesta en carga;

$F_g$  es el esfuerzo axial debido a las acciones de larga duración;

$$F_E = 10 \cdot E_{cm} \cdot I_c / \ell^2$$

con  $E_{cm}$ : módulo de deformación longitudinal del hormigón;

$I_c$ : momento de inercia de la sección bruta de hormigón;

$\ell$ : longitud del soporte equivalente o longitud de pandeo.

### Excentricidades diferentes en las articulaciones

El planteamiento general expuesto corresponde al caso de soportes con excentricidades iguales en los extremos,  $e_1 = e_2 = e_0$ ; pero las fórmulas son válidas para soportes con excentricidades  $e_1$  y  $e_2$  distintas, utilizando el concepto de excentricidad equivalente,  $e_e$ , propuesto por el CEB (8).

$$e_e = 0,6 \cdot e_2 + 0,4 \cdot e_1 \leq 0,4 \cdot e_2 \quad \text{ec. (15)}$$

siendo:

$e_e$  la excentricidad de primer orden equivalente,  
 $e_1$  y  $e_2$  las excentricidades de primer orden en los extremos, siendo  $e_2$  la de mayor valor absoluto, que se tomará como positiva, y  $e_1$  la de menor valor absoluto, con el signo que corresponda.

#### 4. EJEMPLO DE CALCULO

Se propone el dimensionamiento del soporte cuyas características se indican seguidamente, como ejemplo de aplicación del método que se presenta.

$$l = 7,35 \text{ m};$$

$$b = 0,30 \text{ m};$$

$$h = 0,30 \text{ m}; h' = 0,03 \text{ m};$$

$$N = 40,5 \text{ Mp};$$

$$e_1 = e_2 = 0,12 \text{ m};$$

$$f_{ck} = 200 \text{ kp/cm}^2; \gamma_c = 1,50;$$

$$f_{yk} = 4.100 \text{ kp/cm}^2; \gamma_s = 1,10;$$

$$\gamma_f = 1,60.$$

La sección transversal es la indicada en la figura 1 (armadura simétrica en caras opuestas).

Los valores adimensionales que intervienen en la formulación son:

$$\nu = \frac{N \cdot \gamma_f}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{40,5 \cdot 1,60}{0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,9 \cdot 2000/1,50} = 0,6$$

$$e_0/h = e_1/h = e_2/h = \frac{0,12}{0,30} = 0,4$$

$$\lambda = l/h = \frac{7,35}{0,30} = 24,5$$

$$\beta = \lambda^2/10000 = 0,06$$

Sustituyendo el valor de  $\nu$  en las ecuaciones 5 a 8, se tiene:

$$\beta_{1a} = 3,90$$

$$\beta_{2a} = 1,95$$

$$\beta_{1i} = 2,10$$

$$\beta_{2i} = 2,61$$

y entrando con estos datos en las ecuaciones 12 y 13, resulta:

$$(e^*/h)_a = \frac{0,4 + 0,06 \cdot 3,90}{1 - 0,06 \cdot 1,95} = 0,72$$

$$(e^*/h)_i = 0,021 + 1,035 \cdot \frac{0,4 + 0,06 \cdot 2,10}{1 - 0,06 \cdot 2,61} = 0,67$$

Así pues, la excentricidad relativa ficticia vendrá dada por:

$$e^*/h = \min [(e^*/h)_a, (e^*/h)_i] = \min (0,72, 0,67) = 0,67$$

lo que quiere decir que la rotura del soporte se producirá por inestabilidad.

Dimensionando la sección transversal del soporte con los siguientes esfuerzos de cálculo reducidos:

$$\nu = 0,6 \quad \text{y}$$

$$\mu = \nu \cdot (e^*/h) = 0,6 \cdot 0,67 = 0,40$$

por medio, por ejemplo, de unos diagramas de interacción, se obtiene:

$$\omega = 0,89$$

que equivale a una sección total de armadura:

$$A_{s,tot} = \frac{0,89 \cdot 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,9 \cdot 2000/1,50}{41.000/1,1} = 25,79 \text{ cm}^2$$

a disponer simétricamente en caras opuestas.

## 5. PRECISION DE LAS FORMULAS PROPUESTAS

Para analizar la precisión de las fórmulas propuestas, se ha procedido a una exhaustiva comparación con el Método de la Columna Modelo. En las figuras 10, 11 y 12, se muestra una serie de diagramas de interacción obtenidos utilizando las fórmulas propuestas, la fórmula de la EH-82 y el Método de la Columna Modelo.

Este estudio ha considerado las siguientes variables:

- |                               |                                    |
|-------------------------------|------------------------------------|
| – esbeltez geométrica         | $\lambda = 10, 20 \text{ y } 30$   |
| – cuantía mecánica            | $\omega = 0,1, 0,5 \text{ y } 1,0$ |
| – relación de excentricidades | $e_1/e_2 = 1, 0 \text{ y } -1$     |

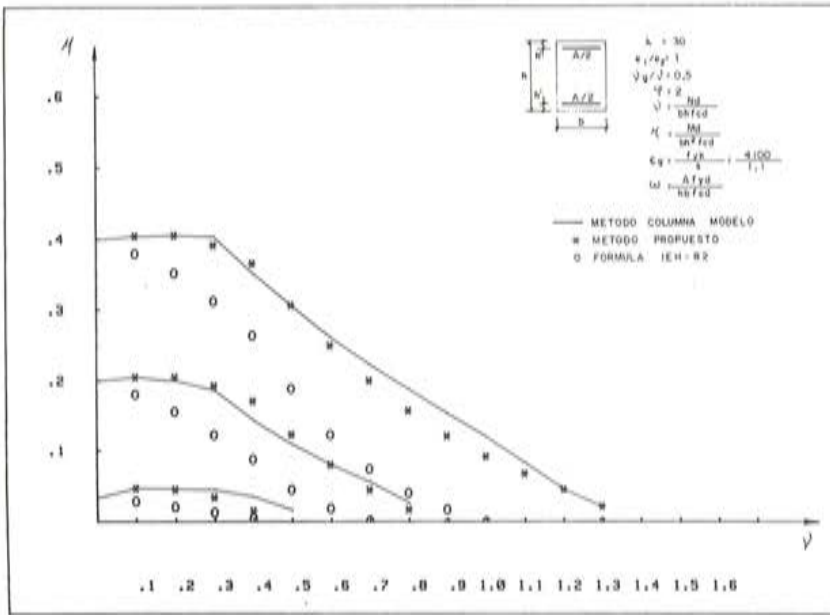
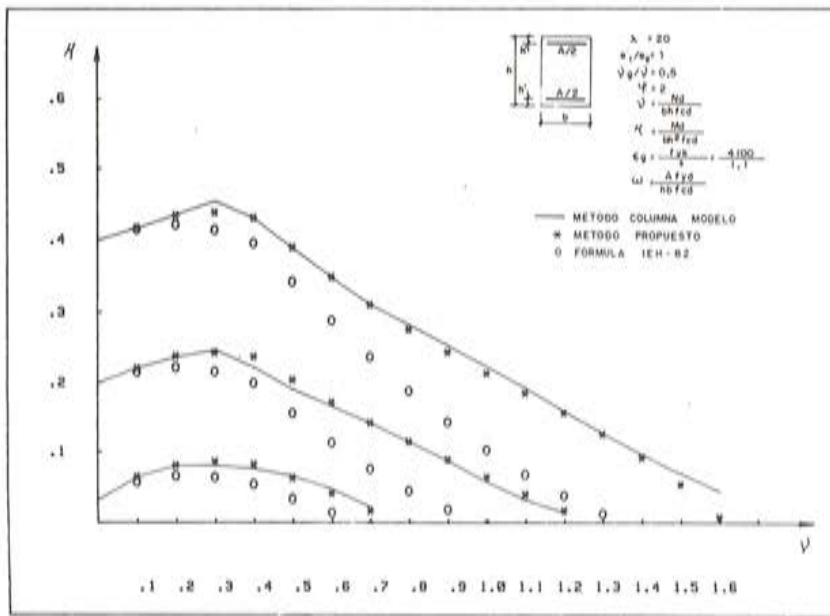
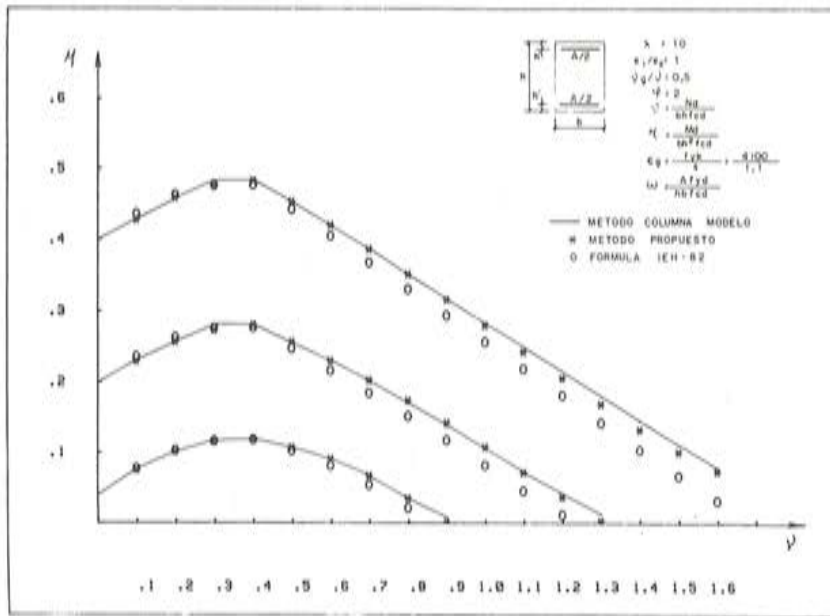


Figura 10

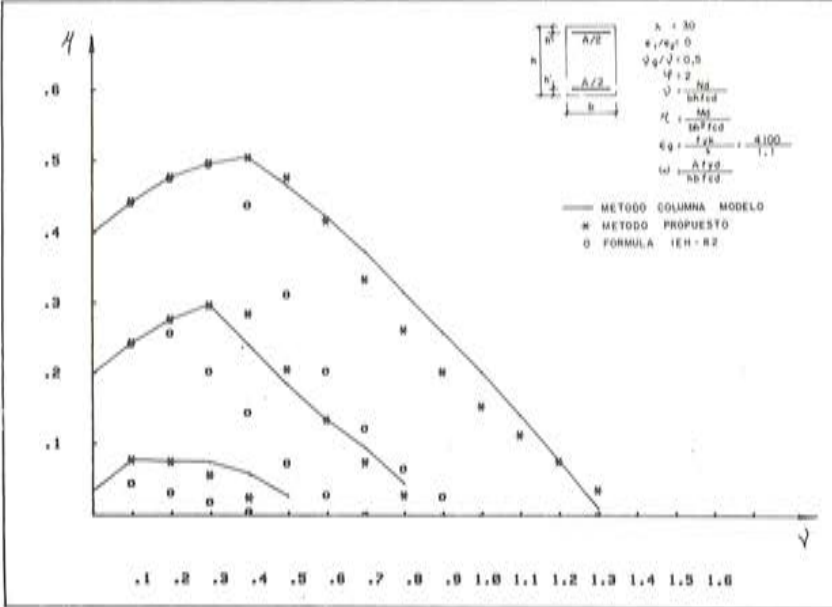
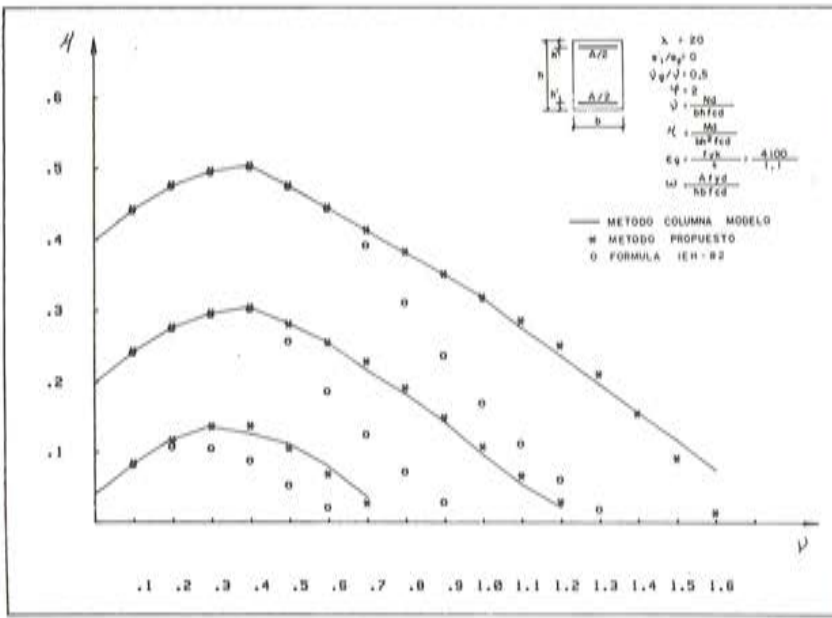
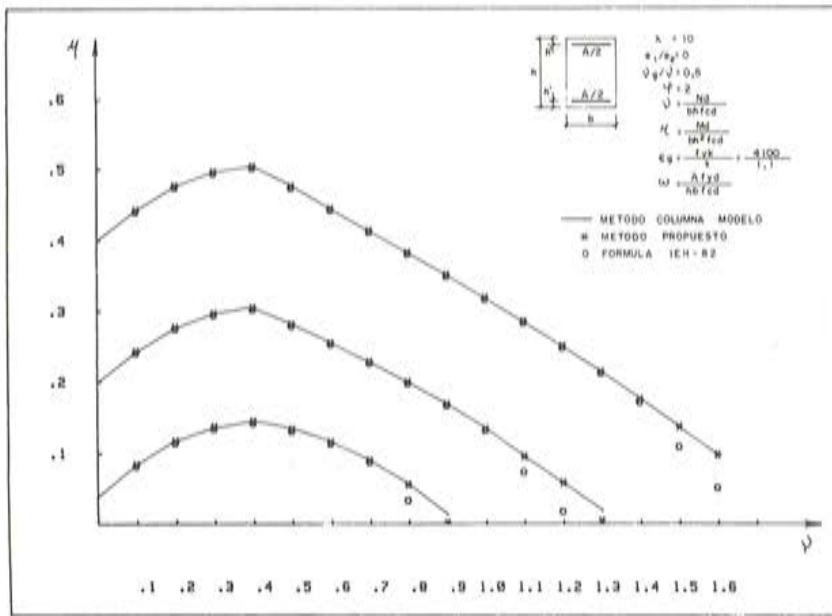


Figura 11



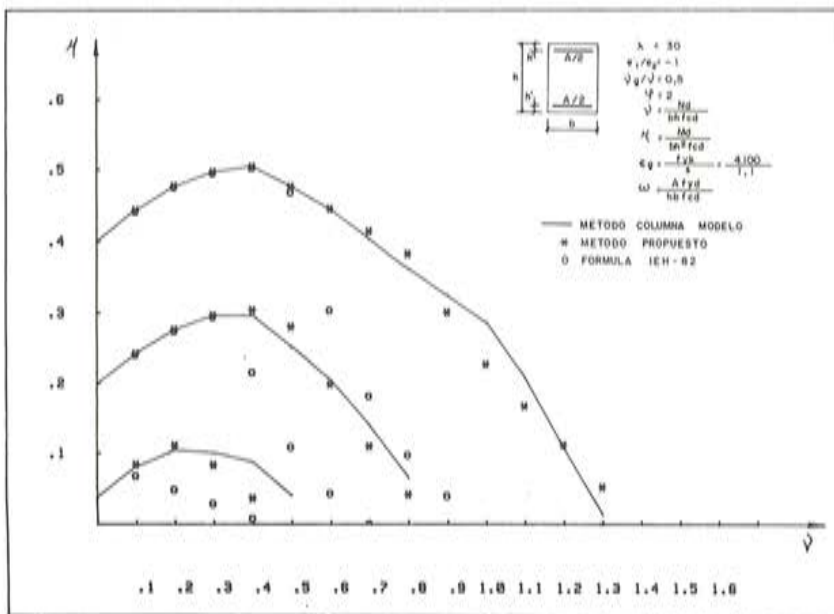
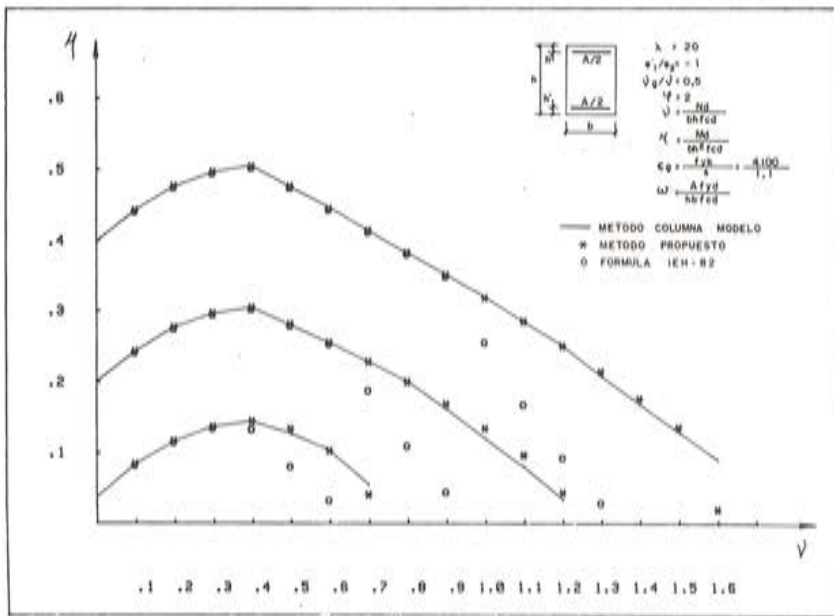
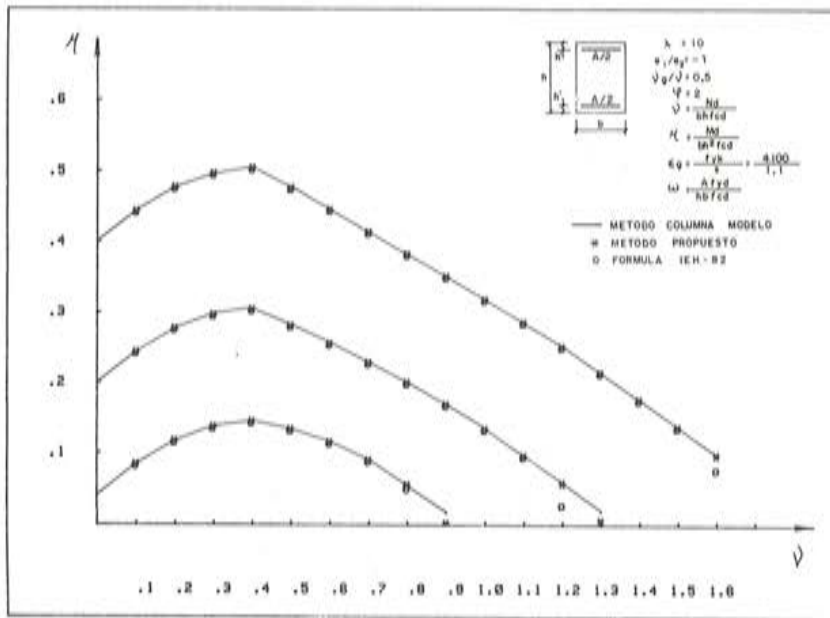


Figura 12

Con relación al fenómeno de la fluencia, se ha tenido en cuenta el efecto de las cargas de larga duración, a través de una excentricidad adicional de fluencia dada por la ec. 14 con:

$$\varphi(t_{\infty}, t_0) = 2$$

$$F_g/F_{\text{tot}} = 0,5$$

Como puede verse, las fórmulas propuestas proporcionan una precisión comparable con los resultados del Método de la Columna Modelo, mientras la fórmula de la EH-82 conduce a resultados sumamente conservadores.

## 6. LIMITES DE VALIDEZ DE LAS FORMULAS PROPUESTAS

En primer lugar, las ecuaciones que se presentan son estrictamente válidas para la tipología y disposición de armaduras elegidas.

Estas ecuaciones cubren los casos de piezas con cuantía mecánica  $\omega \leq 1,0$  y axiles reducidos  $\nu \leq 1,6$ . En realidad, estos límites no son muy restrictivos, ya que, tanto por axiles como por cuantías mínimas, se cubre prácticamente todo el campo de posibilidades de proyecto.

Finalmente, las fórmulas se han comprobado para esbelteces geométricas no superiores a 30, valor para el que comenzaron a detectarse las mayores desviaciones con respecto al Método de la Columna Modelo. La falta de un estudio más completo, para esbelteces geométricas superiores a 30, aconseja limitar la aplicabilidad de estas fórmulas por debajo de dicha esbeltez.

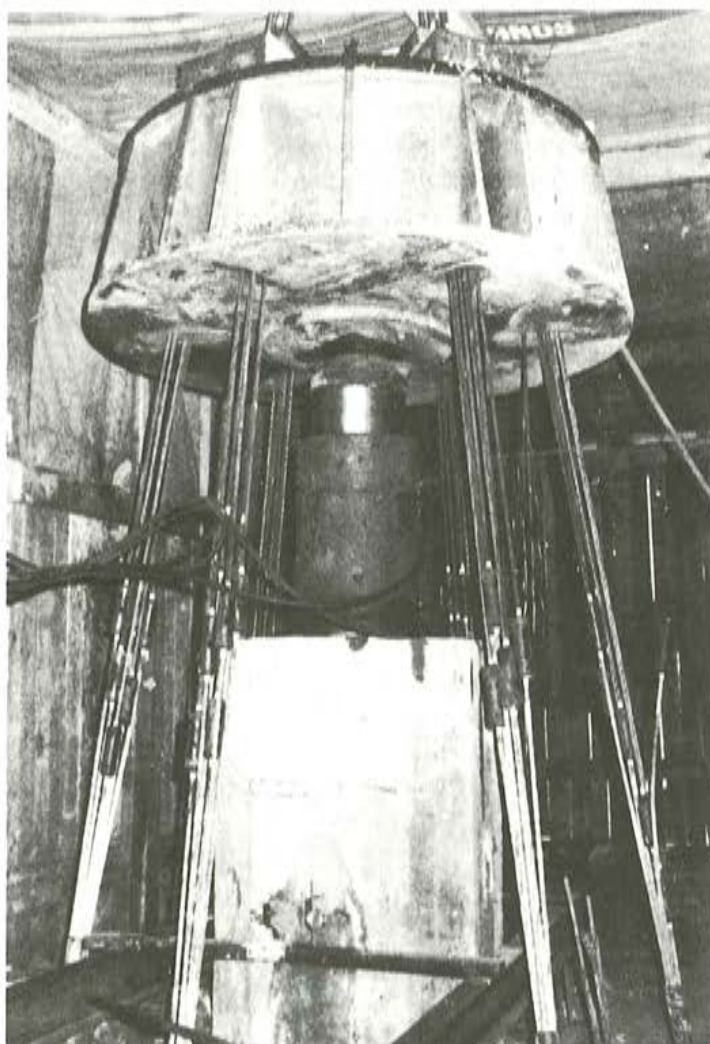
## REFERENCIAS

1. EH-82. Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. MOPU. Madrid, 1982.
2. ACI 318-83. "Building Code Requirements for Reinforced Concrete". Detroit, 1983.
3. DIN 1045. "Beton-und Stahlbetonbau. Bemessung und Ausführung". Beton-Kalender 1985. Wilhelm Ernst. Berlin, 1984.
4. CP-110. "Code of Practice for the use of concrete". British Standard Institution. London, 1972.
5. BAEL-83. "Regles Techniques de Conception et de Calcul des Ouvrages et Constructions en Béton Armé suivant la Methode des Etats Limites". Eyrolles. Paris, 1984.
6. Río, O. "El problema de los límites de esbeltez en el dimensionamiento en teoría de segundo orden de soportes esbeltos de hormigón armado". Tesis Doctoral dirigida por F. Morán y presentada en la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, C. y P. de Madrid, 1986.
7. Corres H. y Morán F. "Reference Curvatures Method." C.E.B. Bulletin d'Information Num. 155.
8. C.E.B./F.I.P. "Manual of Buckling and Instability". The Construction Press, 1978.

# INTEMAC



INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Prueba de carga  
de un pilote.

Oficinas:  
MADRID  
Monte Esquinza, 30 - 4º D  
MADRID-4  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:  
MADRID  
Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. (91) 675 31 00/04/08

BARCELONA  
Pasaje Busquets, 37  
CORNELLA DE LLOBREGAT  
Tels. (93) 377 43 58/62

## **Un criterio local para determinar el límite de validez del esquema rebajado en las estructuras de membrana. Aplicación al paraboloides hiperbólico y a las velarias paraboloidal y singular parabólica**

**Rafael Cortell**  
Doctor Ingeniero de Caminos  
Profesor Titular en el área de Física Aplicada  
ETSICCP de la Universidad Politécnica de Valencia

### **RESUMEN**

El estudio de una lámina como membrana, queda simplificado cuando dicha lámina puede considerarse como rebajada (5).

Por otro lado, es conveniente poseer un criterio que nos permita determinar hasta qué límites es posible llegar con el esquema rebajado, así como el error que se comete al usarlo. A este respecto, Wlassow (8) indica, para lámina esférica y paraboloides hiperbólico sobre planta rectangular, el valor máximo de  $1/5$  entre la cota máxima y el lado menor del rectángulo base. Otros autores (6), (7), adoptan este límite para superficies cualesquiera.

Obviamente, dicho valor máximo representa una limitación del valor medio del error cometido al considerar una lámina como rebajada, y debería venir acompañado de la tolerancia que se está presuponiendo (2), (4).

Partiendo de las condiciones analíticas de admisión del esquema rebajado (1), (2), es posible analizar su aplicabilidad para una determinada tolerancia previamente establecida. Estas condiciones se pueden englobar en una sola y obtener una condición local que permitirá investigar puntualmente la validez del esquema (2).

Se hacen aplicaciones al paraboloides hiperbólico y a las velarias paraboloidal y singular parabólica (3).

## Estática de la membrana

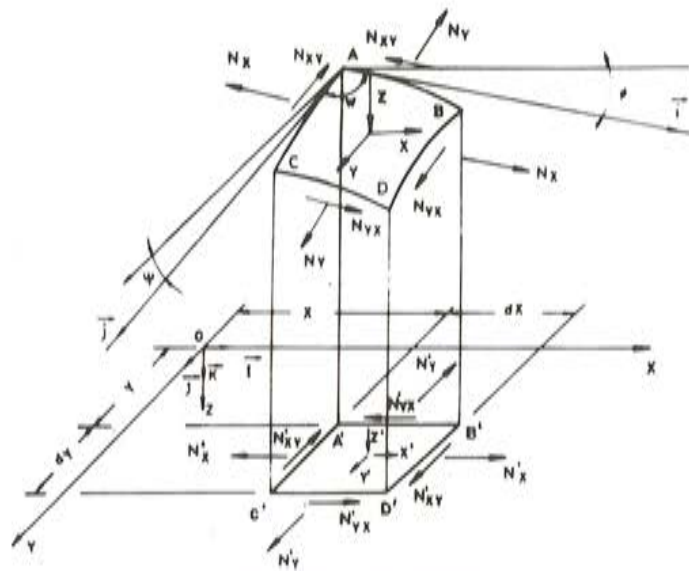
Sea

$$Z = Z(x, y) \quad (1)$$

la función de forma que define la geometría de la lámina respecto de una terna cartesiana ortogonal.

Según el tratamiento de Pucher (figura 1), para un elemento de lámina, la relación entre los esfuerzos reales sobre la lámina y los proyectados por unidad de longitud proyectada sobre el plano XOY es (5):

$$N'_x = N_x \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}; \quad N'_{xy} = N_{xy}; \quad N'_y = N_y \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} \quad (2)$$



ESFUERZOS DE MEMBRANA

Fig. 1.

Análogamente, se obtiene para las cargas:

$$\begin{aligned} Z' &= Z \sqrt{1+p^2+q^2} & Y' &= Y \sqrt{1+p^2+q^2} \\ X' &= X \sqrt{1+p^2+q^2}, & p &= \frac{\partial Z}{\partial x}; & q &= \frac{\partial Z}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

Entonces, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N'_x}{\partial x} + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial y} &= -X' \\ \frac{\partial N'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N'_y}{\partial y} &= -Y' \end{aligned} \quad (4)$$

$$N'_x \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2 N'_{xy} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + N'_y \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -Z' + X' \frac{\partial Z}{\partial x} + Y' \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Como vemos, los esfuerzos proyectados están referidos a líneas coordenadas ortogonales sobre el plano OXY, que se corresponde, en general, sobre la superficie en líneas coordenadas no ortogonales, formando un ángulo tal que:

$$\cos w = \frac{pq}{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}} \quad (5)$$

Para considerar una lámina como rebajada ha de cumplirse:

$$N'_x \cong N_x, \quad N'_{xy} \cong N_{xy}, \quad N'_y \cong N_y \quad (6.1)$$

$$X' \cong X; \quad Y' \cong Y; \quad Z' \cong Z \quad (6.2)$$

$$\cos w \cong 0 \quad (6.3)$$

Vamos a examinar estas condiciones por separado, relacionándolas con el margen de aproximación que consideremos aceptable.

### Hipótesis 6.1

Esta hipótesis identifica numéricamente los esfuerzos sobre la lámina, con los proyectados. El factor de proporcionalidad entre ambos es, respectivamente:

– Para  $N'_x$  :  $\frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}$

– Para  $N'_{xy}$  : 1

– Para  $N'_y$  :  $\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}}$

– Haciendo:  $m \leq \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} \leq M$  ;

$$m \leq \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} \leq M \quad (7)$$

y siendo:

$$m = 1 - \mu, \quad M = 1 + \mu \quad (8)$$

con

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad (9)$$

La (7) la podemos reducir a una sola expresión:

De un lado, 
$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} \leq M \quad ,, \quad \frac{1}{M} \leq \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} \quad (10)$$

y por otra parte:

$$\frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} \leq M \quad (11)$$

luego de (10) y de (11):

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} \leq M \quad (12)$$

luego:

$$(1/M)^2 \leq \frac{1+q^2}{1+p^2} \leq M^2 \quad (13)$$

Adoptando el signo igual:

$$(1/M)^2 = \frac{1+q^2}{1+p^2} = M^2 \quad (14)$$

Obteniendo las siguientes igualdades:

$$p^2 - M^2 q^2 = M^2 - 1 \quad (15)$$

$$q^2 - M^2 p^2 = M^2 - 1 \quad (16)$$

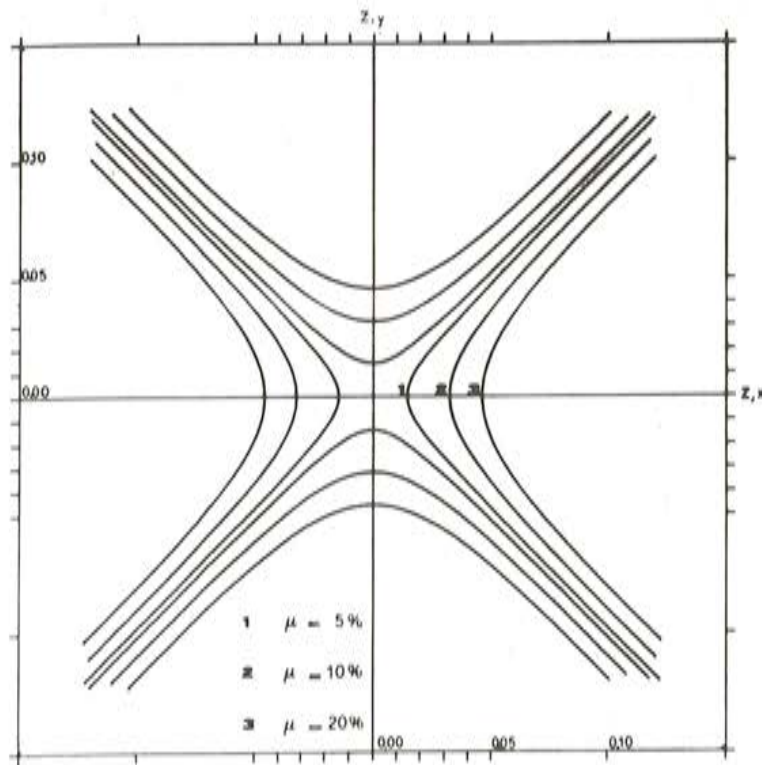


Fig. 2.

Para una tolerancia asignada  $\mu$ , la ecuación (13) representa, en unos ejes cartesianos  $(p, q)$ , un dominio de validez cuya frontera está dada por las curvas (15) y (16) que son un haz de hipérbolas.

Sus asíntotas son, respectivamente, las rectas de ecuación:

$$q = \pm \frac{1}{M} \cdot p ; \quad q = \pm M \cdot p \quad (17)$$

En el caso de tolerancia nula ( $\mu = 0$ ;  $M = 1$ ) resulta de (15) y (16) que las hipérbolas degeneran en las bisectrices de los cuatro cuadrantes.

En la figura 2 se representan las fronteras del dominio de validez que corresponde a diversos valores de la tolerancia  $\mu$ .

### Hipótesis 6.2

Su admisibilidad puede ser formulada de la siguiente manera:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} \leq L \quad (18)$$

siendo:

$$L = 1 + \lambda ; \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (19)$$

Para una determinada tolerancia, la condición (18) define, en el plano  $(p, q)$ , un dominio de validez circular cuya frontera viene dada por:

$$p^2 + q^2 = L^2 - 1 \quad (20)$$

En la figura (3) se han representado algunos dominios para diversas tolerancias.

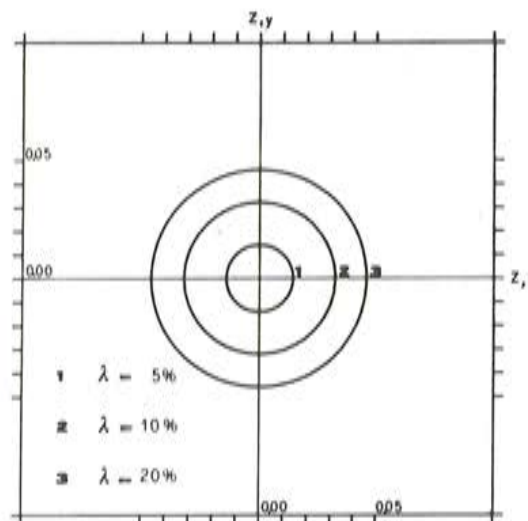


Fig. 3.



### Hipótesis 6.3

Esta hipótesis se puede considerar aceptada si se cumple la condición:

$$-\nu \leq \frac{pq}{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}} \leq \nu \quad (21)$$

siendo:

$$\nu = \operatorname{sen} \left| \frac{\pi}{2} - w \right| \quad (22)$$

con:

$$0 \leq \nu \leq 1$$

La frontera de un dominio de admisibilidad genérico, viene dada por la siguiente curva:

$$(1 - \nu^2) p^2 \cdot q^2 - \nu^2 (p^2 + q^2) = \nu^2 \quad (23)$$

La curva (23) es simétrica respecto de los ejes (p, q) y respecto de las bisectrices de los cuadrantes.

Sus asíntotas están representadas por las cuatro rectas:

$$p = \pm \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} ; \quad q = \pm \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \quad (24)$$

Para tolerancia nula, las ramas de la curva degeneran en los ejes coordenados.

En la figura 4 se representan algunas de estas curvas, para distintas tolerancias.

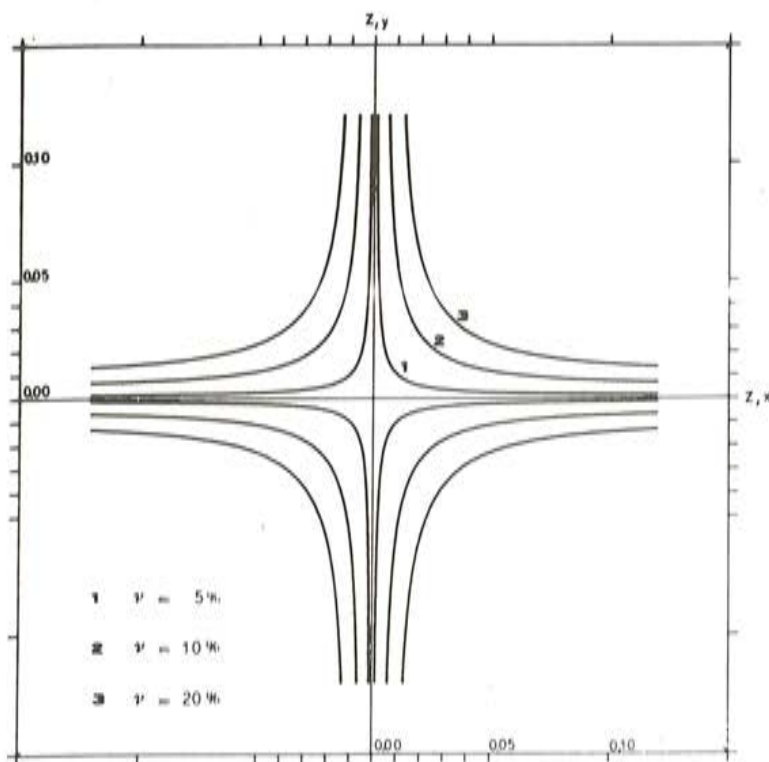


Fig. 4.

### Criterio de comprobación

Los diagramas obtenidos nos permiten conocer si podemos o no aplicar las hipótesis de lámina rebajada, fijándonos de antemano una determinada tolerancia.

Se propone (2), a continuación, un criterio de más rápida aplicación y algo más restrictivo.

Consiste en fijar de antemano una cierta tolerancia permisible  $\delta$  e igual a las tres anteriormente tratadas:

$$\mu = \lambda = \nu = \delta \quad (25)$$

Representando en un mismo diagrama todas las curvas anteriores, se obtiene el diagrama de la figura 5.

Las intersecciones de las curvas (20) y (23) con las bisectrices de los cuadrantes son, respectivamente:

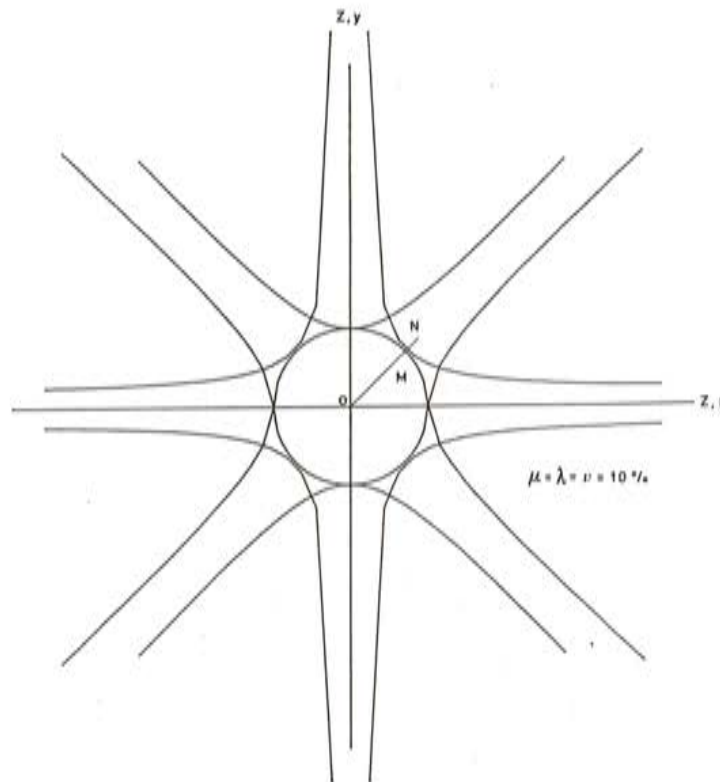


Fig. 5.

$$\left( \pm \sqrt{\frac{\delta(2+\delta)}{2}}, \pm \sqrt{\frac{\delta(2+\delta)}{2}} \right) \quad (26)$$

$$\left( \pm \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}}, \pm \sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}} \right) \quad (27)$$

Como resulta ser:

$$\frac{\delta (2 + \delta)}{2} < \frac{\delta}{1 - \delta} \quad (28)$$

podemos afirmar que el dominio circular cuya frontera está dada por la ecuación (20), no posee puntos exteriores a los dominios cuyas fronteras son las ecuaciones (15), (16) y (23).

En la figura 5 la relación  $\frac{\overline{MN}}{\overline{OM}}$  es:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{OM}} = \sqrt{\frac{2}{(1 - \delta)(2 + \delta)}} - 1 \quad (29)$$

Esta relación es, aproximadamente, del 3 por 100 para una tolerancia del 10 por 100.

Se concluye pues que el dominio circular es el más restrictivo de todos; entonces, si para una determinada tolerancia asignada estamos dentro del dominio circular, esto implicará que las demás condiciones, (menos restrictivas que ésta) se cumplirán también para esa misma tolerancia.

Por consiguiente, podemos reducir el problema a estudiar solamente el dominio circular:

$$p^2 + q^2 \leq R^2 \quad (30)$$

con:

$$R^2 = L^2 - 1 = (1 + \delta)^2 - 1 = \delta (2 + \delta) \quad (31)$$

es decir:

$$p^2 + q^2 \leq \delta (2 + \delta) \quad (32)$$

### Tolerancia mínima. Aplicaciones

Para una determinada tolerancia asignada, deberá cumplirse (32) en todo punto del dominio de definición de la lámina de ecuación  $Z = Z(x, y)$ .

Si obtenemos el máximo absoluto,  $M$ , de la función:

$$F(x, y) = p^2 + q^2 \quad (33)$$

en dicho dominio de definición, la ecuación:

$$M = \delta (2 + \delta) \quad (34)$$

nos proporcionará la mínima tolerancia,  $\delta_{mín}$ , que habría que adoptar para satisfacer en todo punto de la lámina las condiciones anteriormente comentadas.

En este trabajo se obtienen dichos valores para el paraboloides hiperbólico, velaria paraboloidal y superficie singular parabólica (3), en función de la relación  $C/B$ , en donde  $C$  es la cota máxima sobre el plano  $XOY$  y  $B$  es el semilado menor de la base.

Consideremos las superficies indicadas referidas a un sistema de coordenadas ortogonal, con el origen en la cúspide de las mismas. Adoptando las coordenadas adimensionales:

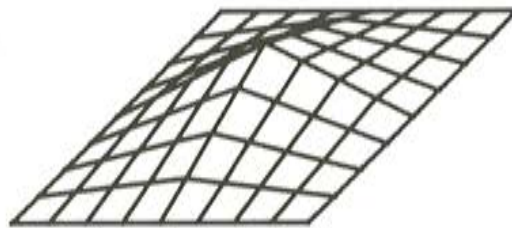
$$\zeta = Z/C; \quad \xi = x/A; \quad \eta = y/B \quad (35)$$

tendremos las siguientes ecuaciones:

Paraboloide hiperbólico:

$$\begin{aligned} \zeta &= 1 - (1 - \xi) \cdot (1 - \eta); & 0 \leq \xi \leq 1; \\ & & 0 \leq \eta \leq 1; \\ & & 0 \leq \zeta \leq 1 \end{aligned} \quad (36)$$

representado en la figura 6.



Paraboloide hiperbólico (mosaico de cuatro)

Fig. 6.

Velaria paraboloidal:

$$\zeta = \xi^2 + \eta^2 - (\xi \cdot \eta)^2; \quad 0 \leq \zeta \leq 1; \quad -1 \leq \xi \leq 1; \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (37)$$

representada en la figura 7.



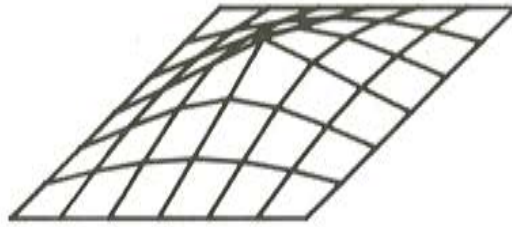
Velaria paraboloidal  
A = B = 2, C = 1, m = -\frac{2C}{B} = -1

Fig. 7.

Superficie singular parabólica:

$$\begin{aligned} \zeta &= -\left(\frac{mB}{C} + 1\right) \cdot (\xi^2 + \eta^2 - (\xi \cdot \eta)^2) + \left(\frac{mB}{C} + 2\right) \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - (\xi \cdot \eta)^2}; \\ & 0 \leq \zeta \leq 1; \quad -1 \leq \xi \leq 1; \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad ,, \quad -2 C/B \leq m < 0 \end{aligned} \quad (38)$$

representada en la figura 8, para m = -C/B.



Superficie singular (42)  
 $A = B = 2, C = 1, m = -\frac{C}{B} = -0.5$

Fig. 8.

Si  $m = -2 C/B$ , la (38) coincide con (37). Por tanto, la velaria paraboloidal es una superficie particular de la familia de superficies singulares dada por (38).

A partir de (33) obtenemos, para el paraboloides hiperbólico:

$$F(\xi, \eta) = (1 - \xi)^2 + (1 - \eta)^2 \quad (39)$$

que se anula en (1, 1), siendo  $F(0, 0) = 2$  (máximo).

Y para las superficies singulares (38) resultará:

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= 4 \cdot \left[ -\left(\frac{mB}{C} + 1\right) + \left(\frac{mB}{C} + 2\right) \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - (\xi \eta)^2}} \right]^2 \\ &\quad \cdot \left( \xi^2 (1 - \eta^2)^2 + \eta^2 (1 - \xi^2)^2 \right) = \\ &= \left[ -2 \left( \frac{mB}{C} + 1 \right) \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - (\xi \eta)^2} + \frac{mB}{C} + 2 \right]^2 \\ &\quad \cdot \left( 1 + \frac{\eta^2 \xi^4 + \xi^2 \eta^4 - 3 \xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2 - (\xi \eta)^2} \right); \quad -2 C/B \leq m \leq 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Para la velaria paraboloidal ( $m = -2 C/B$ ), la (40) resulta ser:

$$F(\xi, \eta) = 4 \cdot \left( \xi^2 (1 - \eta^2)^2 + \eta^2 (1 - \xi^2)^2 \right) \quad (41)$$

cuyo máximo es  $F(1, 0) = F(0, 1) = 4$ .

Si  $m = -C/B$ , se obtiene según (38) una superficie con un punto singular en cúspide de ecuación:

$$\zeta = \left( \xi^2 + \eta^2 - (\xi \eta)^2 \right)^{1/2} \quad (42)$$

que se caracteriza porque sus intersecciones con los planos  $\xi = 0; \eta = 0$  son rectas. Para esta superficie, la (40) resulta ser:

$$F(\xi, \eta) = 1 + \frac{\eta^2 \xi^4 + \xi^2 \eta^4 - 3 \xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2 - (\xi \eta)^2} \quad (43)$$

siendo para la (43),  $F(1, 1) = 0$ ;  $F(0, \eta) = F(\xi, 0) = 1$ ;  $\lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)} F(\xi, \eta) = 1$ .

Por lo tanto, la expresión (43) toma su mayor valor sobre los ejes coordenados, siendo dicho valor la unidad.

En resumen pues, para planta rectangular, tendremos:

$$M = \begin{cases} 4 \cdot (C/B)^2 & (\text{velaria paraboloïdal}) \\ (C/A)^2 + (C/B)^2 & (\text{paraboloïde hiperbólico}) \\ (C/B)^2 & (\text{sup. singular (42)}) \end{cases} \quad (44)$$

en donde B es el semilado menor del rectángulo base.

Si  $A = B$  (planta cuadrada) resultaría para el paraboloïde hiperbólico  $M = 2 (C/B)^2$ .

### Tolerancia mínima según C/B

A partir de la ecuación (34) y tomando la raíz positiva obtenemos:

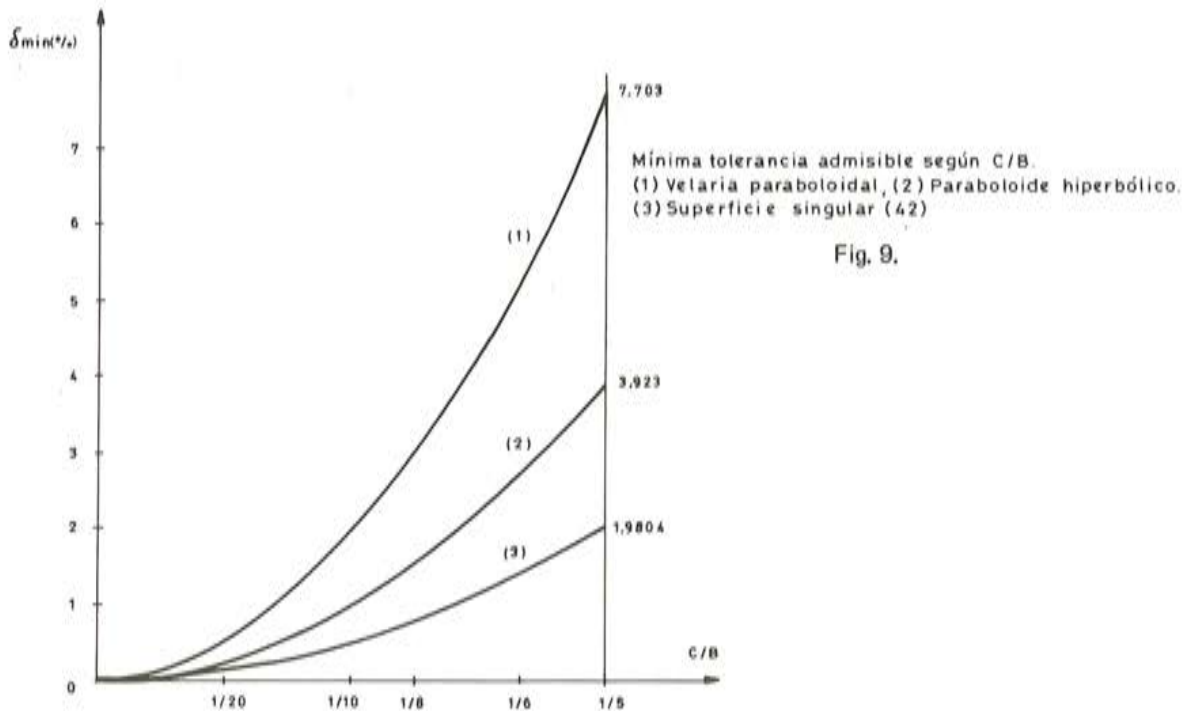
$$\delta_{\text{mín}} = -1 + (1 + M)^{1/2} \quad (45)$$

Considerando planta cuadrada, obtenemos a partir de (44) y (45):

$$\delta_{\text{mín}} = -1 + \left(1 + n \cdot (C/B)^2\right)^{1/2} \quad (46)$$

que representa la mínima tolerancia admisible en función de C/B, para la superficie singular (42),  $[n = 1]$ , para el paraboloïde hiperbólico  $[n = 2]$ , y para la velaria paraboloïdal,  $[n = 4]$ .

En la figura 9 se representa gráficamente la (46) para las tres superficies indicadas.



## Conclusiones

La técnica desarrollada permite evaluar el grado de precisión del esquema rebajado, para una determinada forma laminar y según la relación  $C/B$  entre su máxima cota sobre el rectángulo plano que contiene y el semilado menor del mismo. Por otra parte, la (30) nos determina una condición local que nos permite analizar puntualmente la validez del esquema.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) ALPA, G.; BOZZO, E.; CORSANEGO, A. "Problemi inversi nella statica dei gusci ribassati". Universidad de Génova. Instituto de la Ciencia de la Construcción. Vol. 8; 1978.
- (2) CALZOLARI, M.; MAGGI, L.; STURA, D. "Limiti di validità dello schema ribassato nella statica delle membrane". Universidad de Génova. Instituto de la Ciencia de la Construcción. Publicación nº 11; Serie IV; 1978.
- (3) CORTELL, R. "Formas, tensiones y deformaciones en estructuras laminares con puntos singulares". Tesis doctoral ETSICCP, Universidad Politécnica de Valencia. Junio de 1983.
- (4) CORTELL, R. "Sobre los paraboloides elíptico e hiperbólico y la velaria paraboloidal, considerados como láminas rebajadas". Revista de Obras Públicas. Marzo 1985; págs. 165-168.
- (5) FLUGGE, W. "Stresses in shells", Springer, Berlín, 1966.
- (6) GOULD, P.L. "Static Analysis of Shells", Lexington Books, Lexington, 1977.
- (7) SOARE, M. "Application des equations aux différences finies au calcul des coques". Eyrolles, París, 1962.
- (8) WLASSOW, W.S. "Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik". Akademie-Verlag, Berlín, 1958.

# Un modelo incremental para el comportamiento instantáneo y diferido no lineal del hormigón bajo tensiones uniaxiales

Ignacio Carol  
Juan Murcia  
Dres. Ingenieros de Caminos  
E.T.S. Ingenieros de Caminos  
U.P.C. Barcelona

## INTRODUCCION

Como bien se sabe, por resultar ya claramente establecido, el comportamiento de las estructuras puede ser analizado a partir de tres tipos de leyes diferenciadas:

- Condiciones de equilibrio (mecánicas).
- Condiciones de compatibilidad (estrictamente geométricas).
- Leyes de comportamiento (tenso-deformacional) de los materiales o ecuaciones constitutivas (mecánico-geométricas).

De ellas, las condiciones de compatibilidad y las de equilibrio, que admiten un estudio puramente teórico a partir de los principios de la Mecánica (la cual se apoya ampliamente en la Geometría) ya han sido extensamente abordadas y tratadas matemáticamente; y si bien hay una gran variedad de formulaciones (en algunos casos sobre la base de leyes más o menos sencillas para el material), ello no deja de ser una amplia gama formal sobre los mismos principios abstractos.

No sucede así, sin embargo, con las de comportamiento de los materiales, donde las leyes físicas correspondientes –en este caso el primer y segundo principios de la Termodinámica– constituyen tan sólo unas restricciones (balance energético, y restricciones sobre el flujo y la producción de entropía) que el comportamiento de cualquier material debe respetar. En este contexto, el desarrollo de un modelo matemático de comportamiento para un material determinado, implica los siguientes pasos: información sobre el comportamiento real de dicho material en el campo de validez deseado, propuesta del modelo y, por último, su verificación, esto es, la comprobación de que los resultados obtenidos matemáticamente por medio del modelo, reproducen en la medida deseada el comportamiento real del material.



Esta situación, que hace de las leyes de comportamiento de los materiales un campo relativamente abierto, juntamente con la rápida evolución de los medios informáticos, registrada en estos últimos años, han favorecido la aparición de nuevos modelos, cada vez más complejos y caros de utilizar, de tal forma que hoy en día existen modelos para representar la mayoría de los aspectos conocidos del comportamiento de los materiales.

Este panorama tan satisfactorio, sin embargo, puede cambiar bastante, si se intenta utilizar muchos de los modelos de material existentes como parte integrante de programas generales de cálculo de estructuras. Entonces, inconvenientes tales como el exceso de parámetros que hay que determinar, frente a los pocos datos generalmente disponibles sobre el material; la gran cantidad de variables de "historia" que es preciso conservar (distintas para cada punto de la estructura), o los grandes tiempos de cálculo necesarios, pueden hacer anti-económica, o incluso inviable, su utilización práctica con los medios disponibles.

Por estas razones resulta de gran interés disponer de modelos de comportamiento de los materiales que, en un ámbito específico, representen adecuadamente su comportamiento y cuya utilización no sea excesivamente costosa, para hacer posible su utilización práctica en el marco de programas generales de cálculo de estructuras.

En esta última línea indicada, se puede inscribir el modelo presentado en este artículo para el ámbito específico del comportamiento uniaxial del hormigón.

La principal aplicación de este tipo de modelos se encuentra en el análisis de estructuras reticulares, tipología que representa una gran parte de las estructuras de hormigón que se construyen hoy en día. Como es bien conocido, en ellas, cada barra puede considerarse definida por su directriz y por una serie de secciones planas y perpendiculares a la misma, siendo posible establecer con gran aproximación el estado tenso-deformacional uniaxial en el seno del material, en la dirección perpendicular al plano de las secciones (fig. 1).

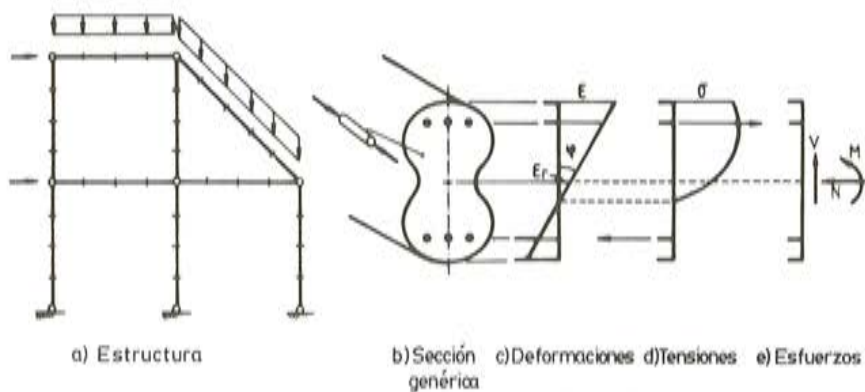


Fig. 1. Estructuras reticulares.

El modelo propuesto incluye los aspectos más relevantes del comportamiento lineal y no lineal del hormigón, tanto en régimen instantáneo como diferido, así como los casos de descarga y recarga (con pocas alternancias y suficientemente lentas) y quedando excluidos del mismo los casos de carga cíclica y fenómenos dinámicos.

## PRINCIPALES ASPECTOS DEL COMPORTAMIENTO EXPERIMENTAL

A continuación se hace un rápido repaso de los principales aspectos del comportamiento experimental típico del hormigón bajo tensiones uniaxiales, que se desea reproducir mediante el modelo.

### a) Comportamiento instantáneo

El comportamiento instantáneo del hormigón "virgen" a una cierta edad (es decir, sin que ninguna tensión haya sido aplicada hasta ese momento), viene descrito por el conocido diagrama tensión-deformación representado en la figura 2, en el que se han incluido los bucles correspondientes a fases de descarga y recarga, de los que el diagrama representa una envolvente exterior.

El diagrama tensión-deformación varía en función de la edad  $t_0$  del hormigón, aumentando con dicha edad el módulo, la resistencia y la deformación "de pico".

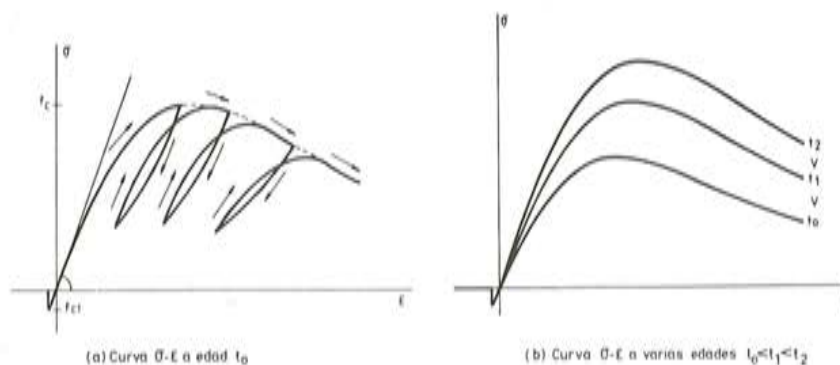


Fig. 2.

### b) Comportamiento diferido

El comportamiento diferido del hormigón se puede poner de manifiesto a través de varios tipos de ensayos distintos sobre probetas cargadas uniaxialmente, de entre los cuales a continuación se repasan los más relevantes, retracción y fluencia.

El ensayo de retracción, que consiste simplemente en mantener el hormigón sin carga aplicada e ir midiendo las deformaciones, arroja como resultado una curva  $\epsilon^{ret}(t)$ , válida para unas condiciones ambientales dadas.

El ensayo de fluencia, consistente en aplicar una tensión a una cierta edad  $t_0$  y posteriormente mantenerla aplicada en el tiempo e ir midiendo las deformaciones, va generalmente acompañado de un ensayo de retracción paralelo. Este ensayo suele hacerse simultáneamente sobre varias probetas del mismo hormigón, conservadas en el mismo ambiente, variando sistemáticamente de una a otra el instante de aplicación de la tensión y el valor de ésta última. Sus resultados, dados ya como diferencia entre la deformación de las diversas probetas cargadas y la de la probeta paralela de retracción, se pueden representar de varias formas.

En los diagramas de la figura 3 se representan, de dos formas distintas, los resultados típicos de ensayos de fluencia, para diversos valores de la tensión,  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$ , a una misma edad  $t_0$ ; diagramas que por su interés se comentan seguidamente con cierto detalle.

En el diagrama 3.a se representan las curvas de la evolución de la deformación medida, a lo largo del tiempo, para cada nivel de la tensión aplicada. En el diagrama 3.b se representa, para cada nivel de tensión  $\sigma$ , y sobre líneas horizontales, las deformaciones medidas a lo largo del tiempo (en diversos instantes  $t_1, t_2, t_3$ , posteriores a  $t_0$ ). Posteriormente, se unen los puntos de cada horizontal correspondientes a los mismos instantes  $t_1, t_2, t_3$ , obteniéndose las líneas curvas generalmente conocidas por "isocronas". Como se habrá advertido, este segundo diagrama es el mismo que, para dos edades de carga distintas ( $t_0 = 28$  días y

$t_0 = 1$  año), viene recogido en la norma EH-82 (Comisión Permanente del Hormigón, 1982).

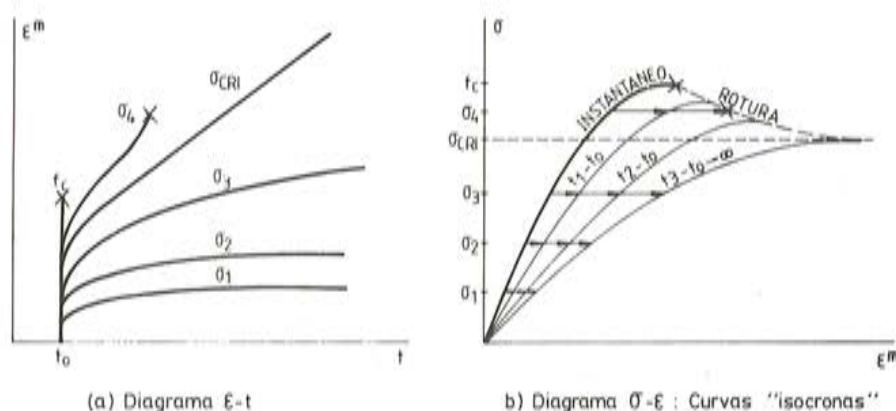


Fig. 3. Resultados típicos de fluencia.

En esta figura se puede observar cómo, para bajos niveles de tensión ( $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , inferiores a 0,3 ó 0,5 de la resistencia a la edad de carga), las deformaciones medidas tienden a crecer en el tiempo de una forma cada vez más lenta (fig. 3.a) y además resultan más o menos proporcionales a la tensión aplicada; lo que se refleja en que, en esta zona del diagrama, las isocronas son prácticamente líneas rectas (fig. 3.b). Se trata del rango de tensiones para el que se suele aceptar que el comportamiento diferido es un fenómeno lineal.

Para valores superiores de la tensión aplicada (como  $\sigma_3$ ), las deformaciones crecen más que proporcionalmente con la tensión aplicada hasta que, para un cierto valor denominado en las figuras por  $\sigma_{CRI}$ , tienden a dispararse. El valor de  $\sigma_{CRI}$  parece oscilar, normalmente, alrededor de 0,8 veces la resistencia a la edad de carga  $t_0$ . Por encima de ese valor (caso de  $\sigma_4$ ), la probeta de hormigón alcanza la rotura después de un cierto período de tiempo de aplicación de la tensión; fenómeno conocido como "rotura diferida" o rotura por cansancio. Para tensiones aplicadas mayores, el período de tiempo necesario para la rotura se reduce; y en el caso límite de que la tensión aplicada es igual a la resistencia a la edad  $t_0$ , la rotura se produce instantáneamente. Obviamente, la isocrona "instantánea" correspondiente a la propia edad de carga  $t_0$ , debe coincidir con la curva tensión-deformación del hormigón a esa edad.

Un fenómeno adicional que se desprende de los resultados anteriores es el de disminución de resistencia del hormigón por la actuación de una tensión aplicada y mantenida previamente. En efecto, si después de un período de fluencia, por ejemplo desde  $t_0$  hasta  $t_2$ , la tensión aplicada se incrementa de forma instantánea hasta la rotura del material, su respuesta depende fuertemente del valor de la tensión  $\bar{\sigma}$  previamente aplicada durante el período de fluencia (fig. 4). Este efecto, poco tratado en la literatura, queda claramente acotado, a partir de los resultados anteriores, mediante sus dos casos extremos. El primero de ellos es aquél en que la carga previamente aplicada es de valor nulo. Entonces, la respuesta del material a la edad  $t_2$  será la correspondiente a la curva tensión-deformación del material virgen a esa edad (curva 2, fig. 4), generalmente por encima de la curva correspondiente a la edad  $t_0$  (curva 1, fig. 4).

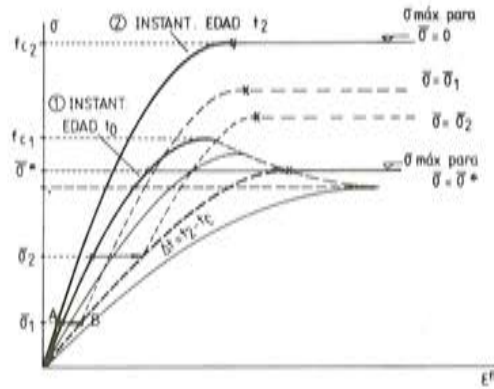


Fig. 4. Disminución de resistencia por carga mantenida previa.

El otro caso extremo consiste en aplicar, a la edad  $t_0$ , una carga  $\bar{\sigma}$  suficientemente elevada como para que en el instante  $t_2$  se alcance el fenómeno de rotura por cansancio de la probeta (tensión  $\bar{\sigma}^*$ , fig. 4), en cuyo caso no es posible aplicar ninguna tensión adicional a la probeta a esa edad, ya rota. No parece existir información experimental concluyente sobre lo que sucede para valores intermedios de la tensión aplicada durante el período de fluencia ( $\bar{\sigma}_1$ ,  $\bar{\sigma}_2$ , fig. 4), aunque parece lógico esperar una variación gradual entre ambos casos extremos, tal como se ha representado en la figura 4 mediante curvas de trazos.

## BREVE REVISION DE LOS MODELOS EXISTENTES

Un análisis de los modelos existentes válidos en el ámbito considerado, muestra que pueden separarse en dos grandes grupos.

En un primer grupo se pueden incluir todos aquellos modelos explícitos (definidos en valores totales de las variables) concebidos desde un principio para reproducir el comportamiento uniaxial del hormigón. En este grupo se encuentran, en primer lugar, todas las expresiones existentes para el diagrama tensión-deformación instantáneo (de las que existe un buen resumen en Sargin, 1971). También pueden incluirse los modelos existentes para reproducir el comportamiento diferido lineal: teorías integrales (recogidas y aplicadas en Murcia, 1980) y modelos reológicos, sin historia integral (Bazant et al, 1982), aunque estos modelos pueden ser fácilmente generalizados al caso multiaxial isótropo. Existen, por último, tentativas de describir el comportamiento diferido no lineal, en el ámbito uniaxial, mediante formulaciones explícitas, a base de acoplar, mediante ciertos criterios y artificios, un diagrama tensión-deformación instantáneo con un modelo diferido lineal (Kabir, 1976; Ferraro Maia et al, 1983; Marí, 1984). Tales modelos, si bien representan un paso más y permiten abordar el problema estructural en su generalidad (por su relativa sencillez y bajo coste de utilización), no se muestran capaces de reproducir los fenómenos propios del comportamiento diferido no lineal, como la rotura por cansancio o la disminución de resistencia por carga mantenida previa, descritos con cierto detalle en el apartado anterior.

Un segundo grupo recoge otra serie de modelos más complejos, concebidos desde un principio para describir el comportamiento multiaxial más general y definidos normalmente de forma incremental. Los modelos pertenecientes a este grupo, entre los que se pueden considerar incluidos, por ejemplo, los de tipo hipoelástico, elasto-plástico o endocrónico (ASCE, 1982; Chen, 1982; Bazant et al, 1976; Bazant et al, 1977; Bazant et al, 1979; Bazant et al, 1980), se encuentran sobre todo desarrollados en la dirección de reproducir el comportamiento bajo carga cíclica. Su utilización práctica requiere, en general, de un proceso de integración numérica "paso a paso", y el almacenamiento y actualización de una serie de varia-

bles de "historia" distintas para cada punto de la estructura que se desea analizar; lo que aumenta considerablemente las necesidades de tiempo de cálculo y almacenamiento de datos en el ordenador. En contrapartida, mediante ellos es posible abordar la modelización de fenómenos complejos que mediante formulaciones de tipo explícito resulta inviable tratar.

Como modelo destacado en este segundo grupo, válido tanto para el comportamiento instantáneo como diferido del hormigón, cabe citar la teoría endocrónica (Bazant, 1976), desarrollada a partir de trabajos anteriores en el campo de los metales (Valanis, 1971). Este modelo, posteriormente modificado en algunos aspectos (Bazant, 1977; Bazant, 1980), permite reproducir, particularizando su formulación para el caso de tensión uniaxial, los fenómenos de comportamiento no lineal anteriormente citados. Sin embargo, su concepción original, orientada además para incluir fenómenos de comportamiento cíclico no considerados aquí, junto a la gran cantidad de parámetros y variables de historia que utiliza, hacen que su utilización en el ámbito particular recogido en este artículo resulte excesivamente cara y compleja.

## DESCRIPCION TEORICA DEL MODELO PROPUESTO

El modelo presentado en este artículo ha sido desarrollado para reproducir específicamente el comportamiento uniaxial del hormigón en el ámbito considerado. Se trata de un modelo incremental, derivado en ciertos aspectos a partir de la teoría endocrónica convenientemente simplificada, pero que difiere de aquélla en la forma de incorporar el comportamiento diferido y de combinar éste con el comportamiento instantáneo no lineal; aspectos que se han resuelto de una forma sencilla y económica, tal como se describe a continuación.

Al igual que en la mayoría de las formulaciones, en primer lugar se ha aceptado la descomposición de la deformación total del hormigón,  $\epsilon$ , en un cierto instante  $t$ , en dos partes:

$$\epsilon(t) = \epsilon^{n.m}(t) + \epsilon^m(t) \quad (1)$$

El término  $\epsilon^{n.m}$  corresponde a la deformación "no mecánica", entendiéndose como tal la deformación que habría existido en el hormigón de haber estado sometido a la misma historia de acciones que la considerada en cada caso, en todos sus aspectos térmicos, ambientales, etc., pero no en cuanto a la tensión aplicada, que se habría mantenido siempre nula. En el marco de este artículo, en que la temperatura y otras variables ambientales se consideran constantes, en este término queda incluida únicamente la deformación de retracción  $\epsilon^{ret}(t)$ , con la que puede identificarse.

El segundo término,  $\epsilon^m(t)$ , corresponde a la deformación "mecánica", entendiéndose ésta como la diferencia entre la deformación total observada en el hormigón en un instante dado y la deformación no mecánica, definida anteriormente, en ese mismo instante. Esta es la parte de la deformación relacionada con la existencia de tensiones en el seno del material.

Ambos términos,  $\epsilon^{n.m}$  y  $\epsilon^m$ , se consideran, como indica la expresión (1), superponibles y, por lo tanto, el modelo puede definirse en dos partes totalmente independientes: por una parte la ley de evolución de la retracción en el tiempo,  $\epsilon^{ret}(t)$ , para unas condiciones ambientales dadas, y por otra, la ley de comportamiento "mecánico", parte más importante del modelo, cuya evolución depende de toda la historia tenso-deformacional y ambiental a que ha estado sometido el hormigón, a través de una serie de variables "de historia".

El comportamiento adoptado para la parte mecánica del modelo, corresponde al del modelo reológico representado en la figura 5.

Este modelo consiste, básicamente, en una cadena de Maxwell de comportamiento lineal, a la que se ha añadido un único elemento "deslizante", colocado en serie, que le con-

fiere al conjunto el carácter no lineal. La deformación mecánica del modelo puede, tal como se indica en la figura, descomponerse en dos partes:

$$de^m = de^{lin} + de^{nl} \quad (2)$$

El comportamiento de la cadena de Maxwell puede expresarse mediante las ya bien conocidas ecuaciones (Bazant et al., 1982) siguientes:

$$d\sigma_\mu = E_\mu(t) \cdot de^{lin} - \frac{\sigma_\mu}{\tau_\mu} \cdot dt; \mu = 1, N$$

$$d\sigma = \sum_{\mu=1}^N d\sigma_\mu \quad (3)$$

donde N es el número de elementos de la cadena de Maxwell,  $E_\mu$  son los módulos de los muelles de cada elemento  $\mu$  de la cadena, también llamados módulos parciales,  $\sigma_\mu$  son las tensiones parciales, y  $\tau_\mu$  son los tiempos característicos de cada unidad, definidos como el cociente (que se supone constante) entre la viscosidad del amortiguador y el módulo del muelle de la unidad. La utilización práctica de esta parte del modelo requiere conservar y actualizar, durante el análisis, el valor de las N tensiones parciales como variables de "historia" del modelo.

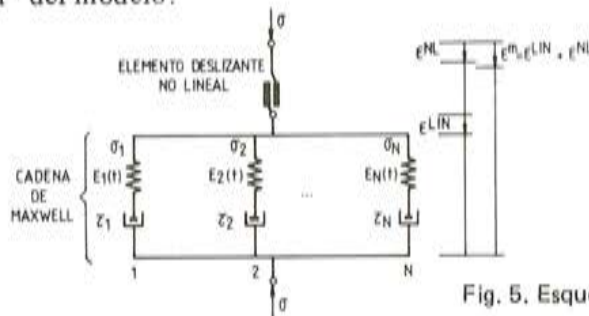


Fig. 5. Esquema reológico del modelo propuesto.

El comportamiento del elemento deslizando (parte no lineal del modelo) se supone regido por la ecuación siguiente:

$$de^{nl} = \sigma \cdot dz \quad (4)$$

donde z es un tiempo intrínseco cuya evolución depende de los valores de la tensión  $\sigma$ , la deformación  $e^m$ , el tiempo t y la situación (compresión, tracción, descarga, etc...).

En el caso de compresión monótonamente creciente, se define:

$$dz = \frac{F(e^m, \sigma)}{Z(t)} \cdot de^m \quad (5)$$

Esta definición del tiempo intrínseco coincide plenamente con la primera versión de la teoría endocrónica (Bazant et al., 1976), particularizada para el caso de tensiones uniaxiales y comportamiento instantáneo, y simplificando una serie de variables intermedias correspondientes al comportamiento cíclico, con excepción de la constante de normalización Z que en este caso se considera variable en el tiempo.

Para la función  $F(e^m, \sigma)$  se ha adoptado la siguiente expresión:

$$F(e^m, \sigma) = 0,5 + \frac{500}{1 + 0,6 \cdot \frac{\sigma}{f_c}} \cdot |e^m| \quad (6)$$

del mismo tipo que se proponía en la citada referencia, aunque con valores de las constantes algo distintas, dado que el ajuste del comportamiento instantáneo del modelo se logra, en este caso, a través del valor del parámetro  $Z$  en cada instante.

Se define la situación de "descarga" como aquélla en la que la deformación existente en el hormigón es menor que el valor máximo alcanzado durante toda la historia anterior,  $\epsilon_{\max}^m$ ; valor que debe conservarse actualizado en todo momento. En estado de "descarga", se supone que  $dz = 0$ , con lo que el elemento deslizante no lineal deja de deslizar, y el comportamiento del modelo en estas circunstancias se reduce al de la cadena de Maxwell de tipo lineal. Ello supone, en la práctica, reducir los bucles de descarga-recarga a una única línea recta, simplificación suficientemente ajustada en el caso de no considerar un número elevado de descargas y recargas, como en este caso se ha aceptado.

El comportamiento en tracción, por su parte, se supone también lineal ( $dz = 0$ ) mientras el valor de la tensión de tracción no supere (en valor absoluto) el valor de la resistencia a tracción del hormigón a la edad considerada. Cuando esa tracción es superada, se supone que el material se fisura, cayendo la tensión a cero; y a partir de ese momento sólo tiene sentido considerar la acción exterior como una deformación impuesta. Ello se puede interpretar, en términos del modelo reológico, como una rotura del enlace existente entre la cadena de Maxwell y el elemento no lineal, definiendo como deformación de apertura de fisura,  $\epsilon^{\text{crac}}$ , la diferencia entre la deformación exteriormente impuesta a partir de este momento y la deformación  $\epsilon^{\text{lin}}$  de la cadena de Maxwell que, por su parte, empieza a evolucionar en el tiempo, tal como corresponde al estado de tensión exterior nula, hasta que un posterior cierre de la fisura permita volver a tomar tensiones de compresión. Una vez fisurado, se supone que el hormigón ya no es capaz de resistir nuevas tracciones, abriéndose de nuevo la fisura al descender la compresión a valor cero. El criterio descrito requiere conservar en todo momento un indicador, " $i_{\text{crac}}$ ", del estado de fisuración del material, que puede valer:

$$\begin{aligned} i_{\text{crac}} &= 0 \text{ si el material no se ha fisurado,} \\ i_{\text{crac}} &= 1 \text{ si el material está fisurado,} \\ i_{\text{crac}} &= 2 \text{ si la fisura está cerrada,} \end{aligned}$$

y la variable  $\epsilon_{\text{crac}}$ , que conserva el valor actualizado de la "apertura" de fisura durante el tiempo que ésta permanezca abierta.

Para formular matemáticamente el modelo global, deben primeramente combinarse las ecuaciones del sistema (3); lo que lleva a la expresión:

$$d\sigma = E_0(t) \cdot d\epsilon^{\text{lin}} - \left( \sum_{\mu=1}^N \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}} \right) \cdot dt \quad (7)$$

donde  $E_0(t)$  es el módulo inicial instantáneo del hormigón a la edad  $t$ , igual a la suma de todos los módulos parciales  $E_{\mu}(t)$ .

Seguidamente, se eliminan las variables  $\epsilon^{\text{lin}}$  y  $\epsilon^{\text{n1}}$ , entre las ecuaciones (2), (7) y (4), lo que conduce a:

$$d\epsilon^m = \frac{1}{E_0(t)} \cdot (d\sigma + \left( \sum_{\mu=1}^N \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}} \right) \cdot dt) + \sigma \cdot dz \quad (8)$$

expresión que puede escribirse también como:

$$d\sigma = E_0(t) \cdot d\epsilon^m - \sigma \cdot dz - \left( \sum_{\mu=1}^N \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}} \right) \cdot dt \quad (9)$$

Esta expresión, junto con las ecuaciones (2) a (5) y los criterios expuestos anteriormente para los casos descarga y tracción, constituyen la formulación matemática del modelo.

### ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL MODELO PROPUESTO

Quizás el aspecto más interesante de la formulación teórica presentada es la forma en que se combinan, a nivel diferencial, por una parte, el comportamiento diferido lineal de la cadena de Maxwell y, por otra, el comportamiento no lineal del elemento deslizante, permitiendo reproducir, por ejemplo, fenómenos como la fluencia no lineal o la rotura por cansancio.

En efecto, considerando el caso de "nueva carga" (si  $\epsilon^m = \epsilon_{m \max}^m$  y  $d\epsilon^m > 0$ , lo cual significa superar el valor  $\epsilon_{m \max}^m$  anteriormente alcanzado) y sustituyendo en (9) el término  $dz$  por su expresión (5), se puede obtener la ecuación siguiente:

$$d\sigma = (E_0(t) - \sigma \cdot \frac{F(\epsilon^m, \sigma)}{Z}) \cdot d\epsilon^m - \left( \sum_{\mu=1}^N \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}} \right) \cdot dt \quad (10)$$

En esta expresión, el primer bloque situado entre paréntesis puede interpretarse como la derivada parcial de la tensión respecto a la deformación, para  $t$  constante; o lo que es lo mismo, como el módulo de deformación instantánea para la tensión, deformación e instante considerados:

$$E^{TAN}(\sigma, \epsilon^m, t) = E_0(t) - \sigma \cdot \frac{F(\epsilon^m, \sigma)}{Z(t)} \quad (11)$$

El segundo término situado entre paréntesis, por su parte, corresponde a la derivada parcial de la tensión respecto al tiempo, para deformación constante; esto es, a la "velocidad" de pérdida de tensión en el tiempo, en el caso de mantener constante la deformación (como sucede, por ejemplo, en un ensayo de relajación). Comparando esta expresión con la correspondiente a la cadena de Maxwell exclusivamente (ec. (3)), se puede advertir que únicamente el módulo instantáneo se ha visto modificado por la inclusión del elemento no lineal en el modelo, y no así el segundo término, responsable del comportamiento diferido, que se mantiene invariado. Este hecho, que confiere gran simplicidad al modelo, no es óbice, sin embargo, para que mediante él puedan reproducirse los fenómenos típicos del comportamiento diferido no lineal, como por ejemplo la fluencia no lineal o la rotura por cansancio.

Para comprender mejor este hecho, resulta conveniente darse cuenta de que los fenómenos citados, para los que  $d\sigma = 0$ , no pueden considerarse, en este contexto, como procesos simples (entendiendo como tales, procesos a  $t$  constante o a  $\epsilon$  constante) sino como una combinación, en cada uno de los sucesivos diferenciales de tiempo  $dt$ , de pequeños escalones diferenciales de relajación en los que la tensión se reduce en:

$$d\sigma^{rel} = \left( - \sum_{\mu=1}^N \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}} \right) \cdot dt \quad (12)$$

seguidos cada uno de ellos por un pequeño escalón de carga instantánea, en el que imponiendo un determinado  $d\epsilon^{fl}$  de valor

$$d\epsilon^{fl} = - \frac{d\sigma^{rel}}{E^{TAN}(\sigma, \epsilon^m, t)} \quad (13)$$



se recupere el valor de la tensión anterior (fig. 6.a).

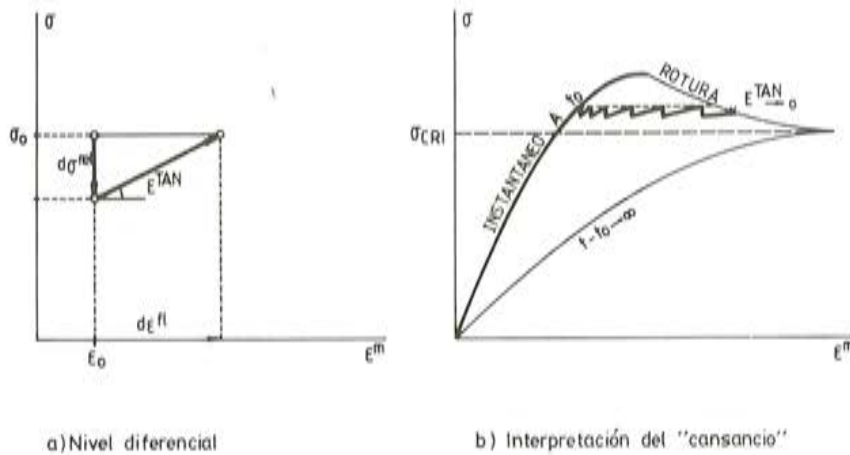


Fig. 6. Fluencia como combinación de relajación y carga instantánea.

De esta forma, y aunque el valor de cada  $d\sigma^{rel}$  viene fijado por una cadena de Maxwell de tipo lineal, el valor de los  $d\epsilon^{fl}$  subsiguientes que se producen, vienen gobernados por los valores que vaya teniendo el módulo instantáneo  $E^{TAN}$ , que es el que en estas circunstancias le confiere al proceso global el carácter no lineal. Así, adoptando para  $E^{TAN}(\sigma, \epsilon^m, t)$  una variación adecuada (variación que depende de la definición de las funciones  $F(\epsilon^m, \sigma)$  y  $Z(t)$ ) se puede conseguir que, tal como se representa en la figura 6.b, los sucesivos  $d\epsilon^{fl}$  sean mayores, simulando la fluencia no lineal, e incluso, si  $E^{TAN}$  disminuye hasta anularse, que no exista solución para la ecuación (13), lo que corresponde a la situación de rotura por cansancio.

## IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO

La utilización práctica del modelo anteriormente descrito, requiere distinguir una serie de casos y arbitrar un conjunto de procedimientos con objeto de evaluar la respuesta del material correspondiente a una determinada historia de acciones (tensiones o deformaciones) impuesta.

En este apartado se van a considerar, únicamente, los casos de compresión monótonamente creciente de forma instantánea y de fluencia (tensión constante en el tiempo).

En la referencia (Carol, 1985) se presenta un procedimiento más general, especialmente desarrollado para poder utilizar el modelo como parte integrante de un programa general de cálculo estructural. En ese caso se tienen en cuenta todas las posibles situaciones del material, considerando siempre la deformación como variable impuesta, tal como es usual en este tipo de programas.

En el primero de los casos considerados en este apartado, el de tensión instantánea monótonamente creciente, el procedimiento empleado consiste en dividir el incremento que hay que calcular en una serie de pasos suficientemente pequeños, y aplicar, para cada uno de ellos, la ecuación:

$$\Delta\sigma = E^{TAN}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^m, \bar{t}) \cdot \Delta\epsilon^m \quad (14)$$

Esta expresión, junto con las ecuaciones (2) a (5) y los criterios expuestos anteriormente para los casos descarga y tracción, constituyen la formulación matemática del modelo.

### ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL MODELO PROPUESTO

Quizás el aspecto más interesante de la formulación teórica presentada es la forma en que se combinan, a nivel diferencial, por una parte, el comportamiento diferido lineal de la cadena de Maxwell y, por otra, el comportamiento no lineal del elemento deslizante, permitiendo reproducir, por ejemplo, fenómenos como la fluencia no lineal o la rotura por cansancio.

En efecto, considerando el caso de "nueva carga" (si  $\epsilon^m = \epsilon_{m \max}^m$  y  $d\epsilon^m > 0$ , lo cual significa superar el valor  $\epsilon_{m \max}^m$  anteriormente alcanzado) y sustituyendo en (9) el término  $dz$  por su expresión (5), se puede obtener la ecuación siguiente:

$$d\sigma = (E_0(t) - \sigma \cdot \frac{F(\epsilon^m, \sigma)}{Z}) \cdot d\epsilon^m - (\sum_{\mu=1}^N \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}}) \cdot dt \quad (10)$$

En esta expresión, el primer bloque situado entre paréntesis puede interpretarse como la derivada parcial de la tensión respecto a la deformación, para  $t$  constante; o lo que es lo mismo, como el módulo de deformación instantánea para la tensión, deformación e instante considerados:

$$E^{TAN}(\sigma, \epsilon^m, t) = E_0(t) - \sigma \cdot \frac{F(\epsilon^m, \sigma)}{Z(t)} \quad (11)$$

El segundo término situado entre paréntesis, por su parte, corresponde a la derivada parcial de la tensión respecto al tiempo, para deformación constante; esto es, a la "velocidad" de pérdida de tensión en el tiempo, en el caso de mantener constante la deformación (como sucede, por ejemplo, en un ensayo de relajación). Comparando esta expresión con la correspondiente a la cadena de Maxwell exclusivamente (ec. (3)), se puede advertir que únicamente el módulo instantáneo se ha visto modificado por la inclusión del elemento no lineal en el modelo, y no así el segundo término, responsable del comportamiento diferido, que se mantiene invariado. Este hecho, que confiere gran simplicidad al modelo, no es óbice, sin embargo, para que mediante él puedan reproducirse los fenómenos típicos del comportamiento diferido no lineal, como por ejemplo la fluencia no lineal o la rotura por cansancio.

Para comprender mejor este hecho, resulta conveniente darse cuenta de que los fenómenos citados, para los que  $d\sigma = 0$ , no pueden considerarse, en este contexto, como procesos simples (entendiendo como tales, procesos a  $t$  constante o a  $\epsilon$  constante) sino como una combinación, en cada uno de los sucesivos diferenciales de tiempo  $dt$ , de pequeños escalones diferenciales de relajación en los que la tensión se reduce en:

$$d\sigma^{rel} = (- \sum_{\mu=1}^N \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}}) \cdot dt \quad (12)$$

seguidos cada uno de ellos por un pequeño escalón de carga instantánea, en el que imponiendo un determinado  $d\epsilon^{fl}$  de valor

$$d\epsilon^{fl} = - \frac{d\sigma^{rel}}{E^{TAN}(\sigma, \epsilon^m, t)} \quad (13)$$

se recupere el valor de la tensión anterior (fig. 6.a).

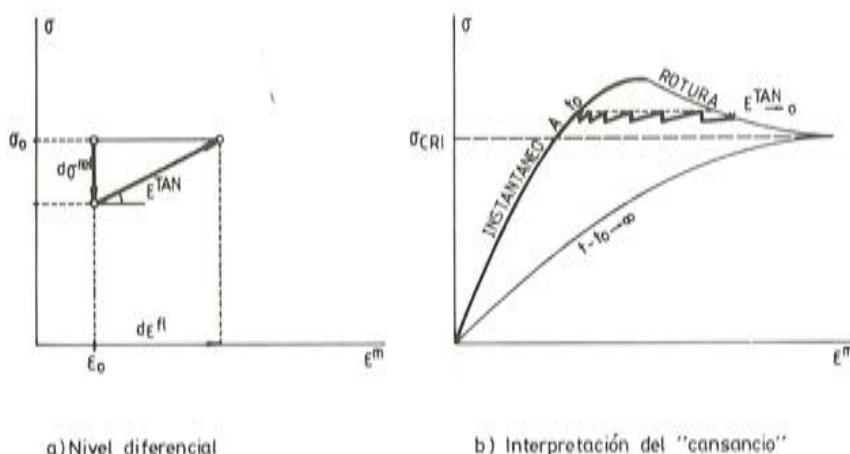


Fig. 6. Fluencia como combinación de relajación y carga instantánea.

De esta forma, y aunque el valor de cada  $d\sigma^{e1}$  viene fijado por una cadena de Maxwell de tipo lineal, el valor de los  $d\epsilon^{fl}$  subsiguientes que se producen, vienen gobernados por los valores que vaya teniendo el módulo instantáneo  $E^{TAN}$ , que es el que en estas circunstancias le confiere al proceso global el carácter no lineal. Así, adoptando para  $E^{TAN}(\sigma, \epsilon^m, t)$  una variación adecuada (variación que depende de la definición de las funciones  $F(\epsilon^m, \sigma)$  y  $Z(t)$ ) se puede conseguir que, tal como se representa en la figura 6.b, los sucesivos  $d\epsilon^{fl}$  sean mayores, simulando la fluencia no lineal, e incluso, si  $E^{TAN}$  disminuye hasta anularse, que no exista solución para la ecuación (13), lo que corresponde a la situación de rotura por cansancio.

### IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO

La utilización práctica del modelo anteriormente descrito, requiere distinguir una serie de casos y arbitrar un conjunto de procedimientos con objeto de evaluar la respuesta del material correspondiente a una determinada historia de acciones (tensiones o deformaciones) impuesta.

En este apartado se van a considerar, únicamente, los casos de compresión monótonamente creciente de forma instantánea y de fluencia (tensión constante en el tiempo).

En la referencia (Carol, 1985) se presenta un procedimiento más general, especialmente desarrollado para poder utilizar el modelo como parte integrante de un programa general de cálculo estructural. En ese caso se tienen en cuenta todas las posibles situaciones del material, considerando siempre la deformación como variable impuesta, tal como es usual en este tipo de programas.

En el primero de los casos considerados en este apartado, el de tensión instantánea monótonamente creciente, el procedimiento empleado consiste en dividir el incremento que hay que calcular en una serie de pasos suficientemente pequeños, y aplicar, para cada uno de ellos, la ecuación:

$$\Delta\sigma = E^{TAN}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^m, \bar{t}) \cdot \Delta\epsilon^m \quad (14)$$

donde  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}^m$  y  $\bar{t}$  son los valores medios de  $\sigma$ ,  $\epsilon^m$ , y  $t$  en el intervalo considerado. Esta expresión puede utilizarse en sentido directo, si lo que se impone es la deformación, o en sentido inverso, si se impone la tensión; y su utilización da lugar a un pequeño proceso iterativo en el que en cada iteración se calcula un nuevo valor de  $E^{TAN}$  a partir de los valores medios de  $\sigma$  y  $\epsilon^m$  obtenidos en la iteración precedente.

En el caso de fluencia, en primer lugar se subdivide el tiempo, contado a partir de la aplicación de la carga, en una serie de intervalos. Esta subdivisión se efectúa escogiendo arbitrariamente el valor de  $\Delta t$  para el primer intervalo y progresivamente mayores para los sucesivos, según las expresiones siguientes.

$$\begin{aligned}\Delta t_k &= t_k - t_{k-1} \\ (t_k - t_0) &= (t_{k-1} - t_0) \cdot 10^{0,25}\end{aligned}\quad (15)$$

En cada uno de estos intervalos el cálculo se basa en el procedimiento ya existente para la cadena de Maxwell lineal (Bazant et al, 1982). Este procedimiento consiste, básicamente, en resolver las ecuaciones diferenciales (3), haciendo la hipótesis de variación lineal de  $\epsilon^m$  en el tiempo y tomando unos módulos constantes medios  $\bar{E}_\mu$ , y en expresar la solución obtenida en términos de los incrementos  $\Delta \epsilon^m$  y  $\Delta \sigma$ . Todo ello conduce a las expresiones:

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_\mu &= E''_\mu \cdot \Delta \epsilon^m + \Delta \sigma''_\mu; \quad \mu = 1, N \\ \Delta \sigma &= \sum_{\mu=1}^N \Delta \sigma_\mu\end{aligned}\quad (16)$$

donde:

$$\begin{aligned}E''_\mu &= \frac{\tau_\mu}{\Delta t} \cdot \bar{E}_\mu \cdot (1 - e^{-\Delta t/\tau_\mu}) \\ \Delta \sigma''_\mu &= -\sigma_{\mu 0} \cdot (1 - e^{-\Delta t/\tau_\mu})\end{aligned}\quad (17)$$

Eliminando  $\Delta \sigma_\mu$  de las ecuaciones (16) se obtiene la expresión:

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma'' + E_0'' \cdot \Delta \epsilon^m \quad (18)$$

donde

$$\begin{aligned}E_0'' &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{\mu=1}^N \tau_\mu \cdot \bar{E}_\mu \cdot (1 - e^{-\Delta t/\tau_\mu}) \\ \Delta \sigma'' &= -\sum_{\mu=1}^N \sigma_{\mu 0} \cdot (1 - e^{-\Delta t/\tau_\mu})\end{aligned}\quad (19)$$

La ecuación (18) permite resolver el caso de fluencia para la cadena de Maxwell lineal, tomando  $\Delta \sigma = 0$  y despejando  $\Delta \epsilon^m$ .

En este caso, se han utilizado el mismo procedimiento y las mismas expresiones (16) a

(19), sustituyendo únicamente los módulos parciales lineales  $E_{\mu}$  por los módulos parciales tangentes  $E_{\mu}^{TAN}$  definidos como

$$E_{\mu}^{TAN} = E_{\mu}(t) \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{E_0(t)} \cdot \frac{F(\epsilon^m, \sigma)}{Z(t)}\right) \quad (20)$$

cuya suma es igual al módulo tangente global  $E^{TAN}$ , definido anteriormente (exp. (11)).

Como en este caso los módulos dependen de  $\sigma$  y  $\epsilon^m$ , y en las exp. (17) aparecen los valores medios, la aplicación de (18) supone un pequeño proceso iterativo en el que en cada iteración se utiliza el valor de los módulos  $E_{\mu}$  tomados para calcular las tensiones y deformaciones medias obtenidas en la iteración anterior. Este procedimiento permite detectar la rotura por cansancio del hormigón, cuando el proceso iterativo no converge a causa de que el valor de los módulos se anula o cambia de signo.

## DETERMINACION DE PARAMETROS

El modelo presentado en apartados anteriores, incluye en su formulación una serie de parámetros y funciones que es preciso ajustar, en cada caso concreto, respecto a los datos experimentales disponibles. Obviamente, sería deseable poseer en todos los casos una información completa sobre el hormigón cuyo comportamiento se trata de representar (por ejemplo diagramas tensión-deformación a varias edades, ensayos de fluencia, etc...). Sin embargo, la información disponible en la mayoría de los casos, se restringe a la resistencia a los 28 días y a una descripción imprecisa de las condiciones ambientales. Por esta razón, el procedimiento para el ajuste de parámetros se ha diseñado partiendo únicamente de los datos reseñados anteriormente, y suponiendo que el comportamiento del hormigón se ajusta, en todos los restantes aspectos (evolución de la resistencia en el tiempo, módulo inicial instantáneo, fluencia y retracción), a las curvas y expresiones incluidas en la norma EH-82.

La primera función que hay que determinar es la de retracción, para la que se adopta directamente la ley incluida en la EH-82.

El ajuste de los parámetros de la parte "mecánica" del modelo, puede desglosarse en dos etapas: en la primera se determinan los parámetros y funciones correspondientes a la cadena de Maxwell (parte lineal del modelo) y en la segunda los correspondientes al elemento no lineal.

El ajuste en la cadena de Maxwell se efectúa con arreglo a los criterios y procedimientos recomendados en la literatura existente (Bazant et al, 1982; Bazant, 1982), en la forma que, resumidamente, se describe a continuación.

En primer lugar, se fija el número de elementos de la cadena,  $N$ , y los tiempos característicos de respuesta de cada una de ellos,  $\tau_{\mu}$ . Esta elección se basa en el hecho de que cada elemento, de tiempo característico  $\tau_{\mu}$  días, colabora a la respuesta del modelo ante la aplicación súbita de una carga en el rango situado aproximadamente entre  $0,3 \tau_{\mu}$  y  $3 \tau_{\mu}$  días después de la aplicación de dicha carga. En este caso se ha fijado el número de unidades igual a cinco; las cuatro primeras con tiempos característicos de 3, 30, 300 y 3.000 días, lo que permite cubrir adecuadamente un tiempo de respuesta entre aproximadamente 1 y 10.000 días, y una quinta unidad constituida únicamente por un muelle (lo que equivaldría a un  $\tau_{\mu}$  tendente a infinito), cuya inclusión viene generalmente recomendada para el buen funcionamiento del modelo.

Seguidamente, debe determinarse la evolución de los  $N$  módulos parciales  $E_{\mu}(t)$  a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta que su suma debe ser igual, en todo momento, al módulo elástico global  $E_0(t)$ , conocido en cada instante. Esta descomposición debe realizarse, además, de tal modo que la cadena de Maxwell resultante reproduzca de la mejor forma posible el comportamiento en fluencia del hormigón considerado. Ello se resuelve evaluando numéricamente las funciones  $E_{\mu}(t)$  en una serie de puntos  $t = t_j$  (en este caso, ocho: 2,8; 8,9; 28; 88,5; 280; 885; 2.800 y 8.854 días), por medio de una aproximación, tipo mínimos cuadrados, con respecto al comportamiento diferido predicho por la función de fluencia de la norma EH-82.

Esta descomposición del módulo total  $E_0(t)$ , en módulos parciales  $E_{\mu}(t)$ , se puede representar, en unos ejes  $t - \tau_{\mu}$ , en lo que algunos autores han denominado como "espectro de relajación". Tal como se puede apreciar en la figura 7, que corresponde a un hormigón de  $f_{c,28} = 3.000 \text{ t/m}^2$  y ambiente húmedo (clasificación según EH-82), no se trata, en general, de ninguna descomposición inmediata ni trivial.

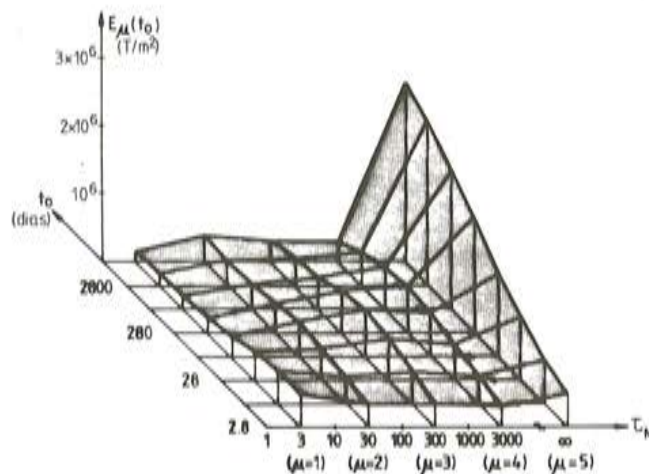


Fig. 7. Espectro de relajación para un hormigón de  $f_{c,28} = 3.000 \text{ t/m}^2$  en ambiente húmedo.

El ajuste de la parte no lineal del modelo consiste en obtener la evolución del parámetro  $Z$  en función del tiempo. En la práctica, ello se traduce en calcular su valor en una serie de instantes concretos, en este caso los mismos ocho en los que se calculaban los módulos parciales. Para cada una de esas edades, se halla el valor de  $Z$  que da lugar a que, al integrar la curva tensión-deformación instantánea, el máximo obtenido corresponda efectivamente a la resistencia a esa edad, deducida de las curvas de la norma EH-82. Dicho valor de  $Z$  se obtiene mediante un sencillo proceso de iteración directa.

Cabe indicar, por último, que los valores obtenidos para la deformación "de pico" en los diagramas tensión-deformación instantáneos, que tal como se ha realizado el ajuste quedan automáticamente fijados por  $Z$ , resultan en general satisfactorios, dentro del poco conocimiento que se tiene de la evolución de este parámetro, oscilando entre 0,0015 para edades tempranas y 0,0025 a 0,0030 para  $t \rightarrow \infty$ .

## UTILIZACION PRACTICA DEL MODELO

En este apartado se presentan los parámetros obtenidos por el ajuste y los resultados de utilización práctica del modelo en un caso concreto: un hormigón de  $f_c = 3.000 \text{ t/m}^2$ , a los 28 días, y un ambiente húmedo según la norma EH-82.

El ajuste de parámetros arroja los valores que para las funciones  $E_{\mu}(t)$  y  $Z(t)$  se indican en la Tabla 1.

**TABLA 1**  
Valores de los parámetros ajustados, para  $f_{c28} = 3000 \text{ t/m}^2$  y ambiente húmedo

| Edad (días) | $E_1$ ( $\text{t/m}^2$ ) | $E_2$ ( $\text{t/m}^2$ ) | $E_3$ ( $\text{t/m}^2$ ) | $E_4$ ( $\text{t/m}^2$ ) | $E_5$ ( $\text{t/m}^2$ ) | Z        |
|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------|
| 2,8         | 473.000                  | 336.000                  | 339.000                  | 272.000                  | 479.000                  | 0,000634 |
| 8,8         | 508.000                  | 426.000                  | 475.000                  | 389.000                  | 677.000                  | 0,000936 |
| 28          | 425.000                  | 489.000                  | 622.000                  | 535.000                  | 941.000                  | 0,001184 |
| 88,5        | 299.000                  | 514.000                  | 703.000                  | 655.000                  | 1.260.000                | 0,001313 |
| 280         | 218.000                  | 445.000                  | 639.000                  | 709.000                  | 1.680.000                | 0,001364 |
| 885,4       | 198.000                  | 382.000                  | 475.000                  | 626.000                  | 2.150.000                | 0,001379 |
| 2.800       | 185.000                  | 370.000                  | 401.000                  | 503.000                  | 2.440.000                | 0,001383 |
| 8.854       | 177.000                  | 393.000                  | 363.000                  | 300.000                  | 2.690.000                | 0,001383 |

Estos valores de  $E_{\mu}(t)$  están representados en el espectro de relajación dibujado en la figura 7.

A partir de estos parámetros y de los algoritmos indicados en el apartado anterior, se ha utilizado el modelo para reproducir una serie de resultados típicos. En primer lugar, se han calculado las curvas tensión-deformación instantáneas, obtenidas imponiendo una deformación creciente a partir de cero, para varias edades distintas del hormigón; concretamente, las mismas ocho edades en las que se evaluaban los parámetros (fig. 8).

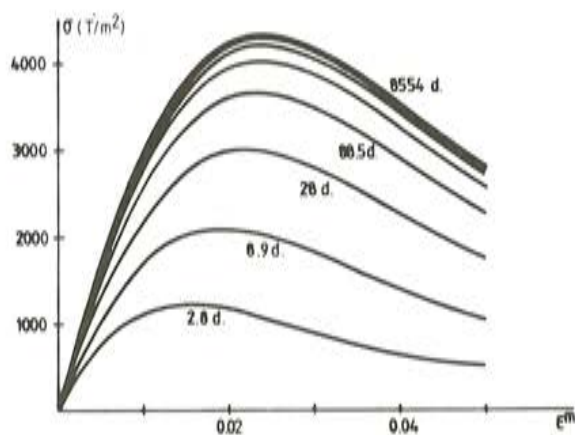


Fig. 8. Diagrama  $\sigma$  -  $\epsilon$  instantáneo, a varias edades.

En estas curvas, el módulo inicial y la resistencia se aproximan a los que se predicen mediante las expresiones y curvas de la norma EH-82, tal como cabía esperar ya que éstas han sido algunas de las condiciones directa o indirectamente impuestas en el ajuste de parámetros. La bondad de la forma de estas curvas queda puesta de manifiesto en la figura 9, donde se ha representado la curva obtenida para la edad de 28 días (línea continua), superpuesta a la curva obtenida mediante la expresión de Sargin (línea de trazos) (Sargin, 1971); expresión empírica derivada del ajuste de resultados experimentales, adoptando los parámetros de este caso particular. Como se puede apreciar, las curvas resultan prácticamente iguales, sobre todo en la zona anterior al pico.

En la figura 10 se representan los resultados obtenidos al reproducir una serie de ensayos de fluencia, cargando a los 28 días, para nueve valores distintos de la tensión.

En la horizontal correspondiente a cada uno de estos valores de la tensión, se ha indicado el valor de la deformación obtenida instantáneamente y tras diversos períodos de tiempo (1 día, 10 días, 100 días, 1.000 días y 8.854 días), puntos que se han unido posteriormente mediante las líneas isocronas. Los puntos en los que se ha detectado rotura por cansancio, se han indicado mediante una "x", y se han unido mediante una "envolvente de rotura", cuya asíntota se ha localizado a una tensión de 2.350 t/m<sup>2</sup>, aproximadamente el 78 por 100 de la resistencia a la edad de carga, valor muy cercano al del diagrama recogido en la EH-82, algo superior al 80 por 100.

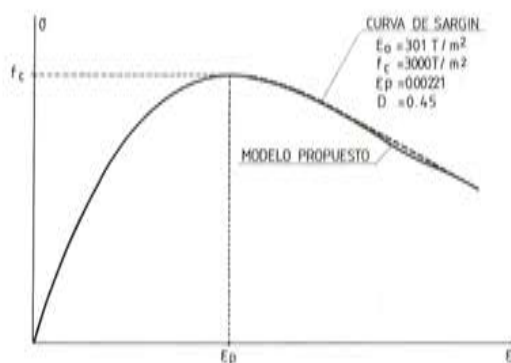


Fig. 9. Verificación de la forma del diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  instantáneo.

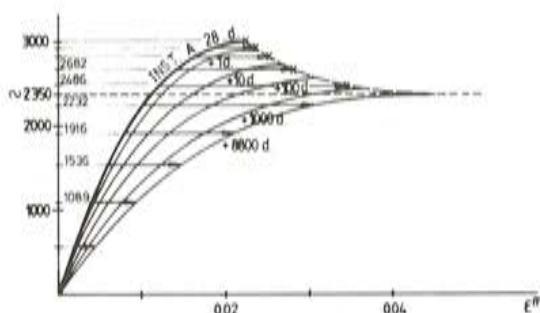


Fig. 10. Diagrama de fluencia para cargas aplicadas a 28 d.

Por último, el modelo se ha utilizado para reproducir el fenómeno de disminución de resistencia a la edad de 8.854 días, debido a la existencia de una carga aplicada previamente desde los 28 días; lo que se ha efectuado como una prolongación del caso anterior, elevando la tensión aplicada, de forma instantánea, al final del período de fluencia, hasta obtener la rotura del material, para los distintos valores de la tensión aplicada a los 28 días. Los resultados obtenidos se representan en la figura 11.

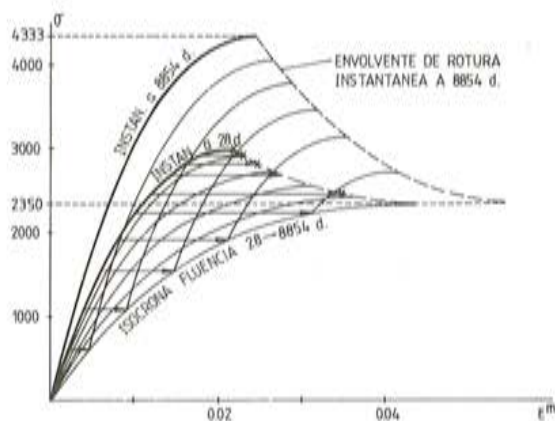


Fig. 11. Disminución de resistencia por cansancio.



Se puede apreciar cómo se obtiene una disminución gradual de la tensión máxima a la edad de 8.854 días, desde un valor de 4.333 t/m<sup>2</sup>, resistencia del material virgen a esa edad, hasta un valor de 2.350 t/m<sup>2</sup>, tensión para la cual el material rompe por cansancio a esa edad, y ya no es posible aplicar ninguna tensión adicional; lo que supone una reducción de aproximadamente el 50 por 100.

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un modelo para el comportamiento uniaxial del hormigón, tanto en régimen instantáneo como diferido, lineal y no lineal.

La formulación propuesta es de tipo incremental. El comportamiento diferido se incorpora de una forma relativamente sencilla, a través de una cadena de Maxwell lineal cuyo comportamiento se combina, a nivel diferencial, con el resto del modelo. El conjunto admite así una interpretación física en términos de un modelo reológico simple.

También han sido descritos los procedimientos numéricos empleados para la obtención de los resultados expuestos, así como el procedimiento de ajuste de parámetros del modelo, efectuado en este caso respecto al comportamiento típico del hormigón recogido en la norma EH-82.

Finalmente, se han presentado los resultados obtenidos al utilizar el modelo para reproducir el comportamiento del hormigón en sus aspectos más importantes (diagrama  $\sigma - \epsilon$  instantáneo, fluencia lineal y no lineal, rotura por cansancio, etc.); lo que se consigue de una forma totalmente satisfactoria.

En vista de las prestaciones obtenidas, y en relación a los modelos previamente existentes, se puede afirmar que el modelo propuesto representa un paso adelante: frente a los modelos de tipo explícito, porque aquéllos no representaban bien todos los fenómenos contemplados, y frente a otros modelos de tipo incremental más generales, porque, además de ofrecer resultados satisfactorios, incorpora una formulación relativamente sencilla y económica.

Las circunstancias aludidas hacen que esta formulación resulte especialmente indicada para ser incluida como parte integrante de un programa general de cálculo de estructuras reticulares; lo que ya ha sido abordado y constituye el contenido de un próximo artículo en esta misma publicación.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo, basado principalmente en la Tesis Doctoral de uno de los Autores (Caril, 1985), ha podido llevarse a cabo gracias a la financiación que ha supuesto el disfrute de una Beca del Plan de Formación de Personal Investigador del M.E.C., entre los años 1981 y 1984, y la percepción de una ayuda para la Finalización de Tesis Doctorales, de la Generalitat de Catalunya, en 1985.

## REFERENCIAS

- M. SARGIN. "Stres-Strain Relationship for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections", Ed. by M.Z. Cohn, Univ. of Waterloo, Canada, 1971.
- J. MURCIA. "Estudio analítico en el tiempo de estructuras de hormigón armado y pretensado por retracción y fluencia", Monog. n° 363 del Inst. Eduardo Torroja, C.S.I.C. Madrid, 1980.
- Z. P. BAZANT y F. WITHMANN (Editors). "Creep and Shrinkage in Concrete Structures", John Wiley and Sons, 1982.
- A. F. KABIR. "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Panels, Slabs and Shells for Time-dependent Effects". Ph. D. Thesis, Univ. Berkeley, Dic. 1976.
- A. C. FERRARO MAIA, A. GRELAT y B. FOURÉ. "Analyse non linéaire des ossatures en béton armé ou précontraint compte tenu du retrait, du fluage et de la relaxation", Annales de l'I.T.B.T.P. n° 412, Feb. 1983.
- A. MARI. "Nonlinear Geometric and Time-dependent Analysis of Three Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Frames". Research Report No. UCB/SESM-84/12, University of California, Berkeley, 1984.
- A.S.C.E. Committee on Concrete Structures. "State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete", 1982.
- W. F. CHEN. "Plasticity in Reinforced Concrete", McGraw Hill, 1982.
- Z. P. BAZANT y SANG-SIK KIM. "Plastic-Fracturing Theory for Concrete", Journal of Eng. Mech. Division, ASCE, vol. 105, No. EM3, Jun. 1979.
- K.C. VALANIS. "A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface", Archiwum Mechaniki Stosowanej, vol. 23, 1971, pp. 517-551.
- Z.P. BAZANT y P.D. BHAT. "Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete", Journal of Eng. Mech. Division, ASCE, vol. 102, N. EM4, Agosto 1976.
- Z. P. BAZANT y A.A. ASGHARI. "Constitutive Law for Nonlinear Creep of Concrete", Journal of Eng. Mech. Division, ASCE, vol 103, No. EM1, Feb. 1977.
- Z. P. BAZANT y CHING-LONG-SHIEH. "Hysteretic Fracturing Endochronic Theory for Concrete", Journal of Eng. Mech. Division, ASCE, Vol. 106, No. EM5, Oct. 1980.
- I. CAROL. "Modelos de análisis no lineal en el tiempo de estructuras reticulares de hormigón. Revisión integrada y propuesta de un nuevo modelo global para material y estructura". Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Mayo 1985.
- COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. "EH-82. Instrucción para el proyecto y ejecución de obras de hormigón en masa y armado". M.O.P.U. Madrid, 1982.
- Z.P. BAZANT. "Input of Creep and Shrinkage Characteristics for a Structural Analysis Program", Materials and Structures, Vol. 15, n° 88, 1982.

## **Asfaltos Españoles, S.A. (ASESA) y Altos Hornos de Vizcaya, S.A., galardonadas con el Diploos Trofeo Nacional de la Seguridad**

En el año 1969 las Mutuas Patronales de Accidentes de Trabajo, a través de su Asociación para la Prevención de Accidentes (APA), instituyeron el DIPLOOS-TROFEO NACIONAL DE LA SEGURIDAD, que desde entonces se otorga anualmente a la empresa que más se ha distinguido en su actuación en materia de Seguridad e Higiene Industrial, reflejada en la memoria de actividades de su Servicio de Prevención.

El fin perseguido no es otro que el de estimular la labor y dedicación de los Servicios de Prevención de las Empresas, en beneficio de sus trabajadores y de la economía de su gestión.

En un relevante acto celebrado recientemente en Barcelona que fue presidido, en nombre del Muy Honorable Presidente de la Generalidad de Cataluña, por el Director General de Relaciones Laborales de la misma, D. Rafael Ortiz, tuvo lugar la entrega del DIPLOOS-Trofeo Nacional de la Seguridad, correspondientes a las ediciones de 1984 y 1985, que han recaído en las siguientes empresas:

- DIPLOOS-TROFEO NACIONAL DE LA SEGURIDAD 1984.  
Concedido a la empresa:
  - ASFALTOS ESPAÑOLES, S.A. (ASESA), de Tarragona.
- Menciones Honoríficas.  
Concedidas a las empresas:
  - STARLUX, S.A. de Montmeló (Barcelona).
  - ALTOS HORNOS DE VIZCAYA, S.A. Factoría de Ansio (Vizcaya).
  - MOTOR IBERICA, S.A. de Barcelona.
- DIPLOOS-TROFEO NACIONAL DE LA SEGURIDAD 1985.  
Concedido a la empresa:
  - ALTOS HORNOS DE VIZCAYA, S.A. Factoría de Ansio (Vizcaya).
- Menciones Honoríficas.  
Concedidas a las empresas:
  - PETROLEOS DEL NORTE, S.A. (PETRONOR), de Somorrostro (Vizcaya).
  - RIO TINTO MINERA, S.A. Fundición de Huelva.
  - EMPRESA NACIONAL DEL URANIO, S.A. (ENUSA), Minas de La Haba (Badajoz).
  - CEMENTOS UNILAND, S.A. de Monjos (Barcelona).
  - S.E. DE LAMPARAS "Z" de San Boi de Llobregat.

# Análisis paso a paso en el tiempo, de estructuras reticulares planas de hormigón armado

Ignacio Carol  
Juan Murcia  
Dres. Ingenieros de Caminos  
E.T.S. Ingenieros de Caminos  
U.P.C. Barcelona

## INTRODUCCION

Es bien conocido que el comportamiento de las estructuras reales suele apartarse, en mayor o menor grado, del comportamiento que de ellas se puede predecir mediante los métodos tradicionales de análisis lineal (comportamiento instantáneo y lineal para los materiales y equilibrio en primer orden).

Aspectos como el comportamiento no lineal de los materiales (fisuración o aplastamiento del hormigón, plastificación del acero), su comportamiento diferido (fluencia y retracción del hormigón, relajación del acero), la influencia de la secuencia de acciones (distintas respuestas en carga o descarga), o la aparición de esfuerzos adicionales por efectos de segundo orden en las piezas esbeltas comprimidas, se encuentran ya, en la actualidad, relativamente bien descritos como fenómenos "aislados" en piezas "simples" (por ejemplo: fluencia en probetas, efectos de segundo orden en piezas aisladas, etc.) en publicaciones y normativas.

La introducción de todos estos efectos, de una forma rigurosa, en el análisis estructural general, sin embargo, plantea ciertas dificultades importantes. En primer lugar, se hace necesario disponer de modelos matemáticos del comportamiento de los materiales, suficientemente elaborados como para poder representar satisfactoriamente todos los aspectos deseados, pero que simultáneamente sean lo suficientemente prácticos y exentos de ambigüedades como para ser utilizados, de forma automática, desde un programa de ordenador.

Además, el carácter no lineal de la mayoría de los efectos que se trata de tener en cuenta tiene una serie de implicaciones a nivel del análisis estructural mismo: Se hace imprescindible definir completamente la estructura antes del análisis y se requiere un proceso incremental y/o iterativo de cálculo a "nivel estructura" con la consiguiente posibilidad de problemas de convergencia, se incrementa la complejidad de los programas y las necesidades de velocidad de cálculo y de almacenamiento de datos del ordenador, y se pierde la validez del principio de superposición, entre las más importantes.

Estas dificultades adicionales, ciertamente importantes, son la causa más probable de la escasa o nula penetración de los procedimientos de análisis no lineal en la práctica profesional habitual en nuestro país, en el campo del proyecto y dimensionamiento estructural, donde se siguen utilizando, casi exclusivamente, los métodos clásicos de análisis lineal, complementados con algunos criterios y "recetas" para la determinación de los datos, y algunas correcciones en los resultados, derivadas de reglas empíricas o normas de buena práctica, cosecha particular de cada calculista, o recogidas en algunas publicaciones y normativas.

No sucede así, sin embargo, en otros ámbitos distintos —universidades, centros de investigación, etc.— y cada día son más numerosos los trabajos en desarrollo relacionados con la puesta a punto de nuevos modelos numéricos capaces de reproducir fielmente los fenómenos más complejos del comportamiento de los materiales y de las estructuras, lo que se refleja en un número creciente de publicaciones relacionadas con el tema.

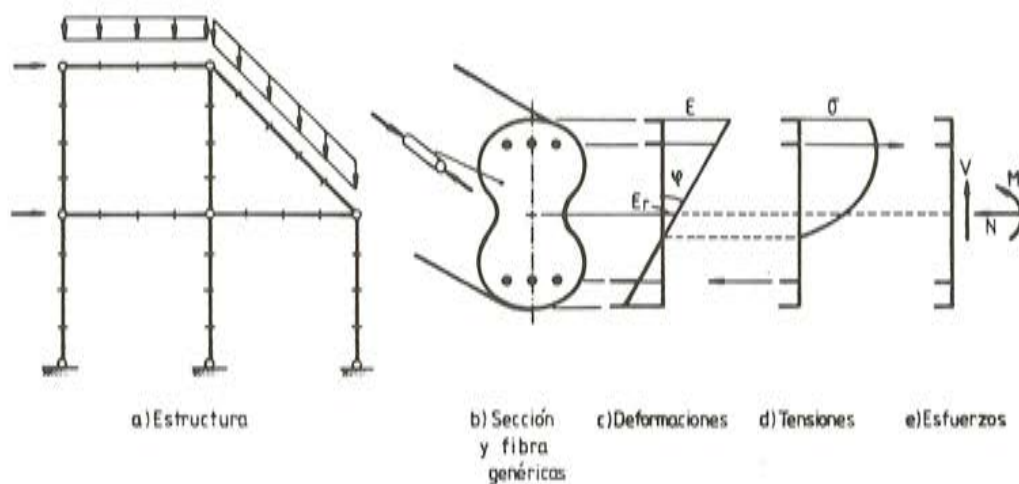


Fig. 1. Análisis de estructuras reticulares.

Este rápido progreso, que se ha visto favorecido en parte por la espectacular evolución de la informática en los últimos años, ha venido impulsado por las grandes posibilidades que, al margen del proceso de dimensionamiento estructural típico, se pueden derivar de la explotación de un buen programa de análisis no lineal, suficientemente validado y fiable. Entre estas posibilidades, se pueden citar todas aquellas aplicaciones en las que se pueda utilizar el modelo numérico como sustitutivo de ensayos, estudios paramétricos, etc., que permitan extraer recomendaciones de tipo práctico de cara a la normativa y proyecto; estudios de validez de ciertas hipótesis simplificadoras; estudios particulares de estructuras de geometría y características previamente determinadas, sometidas a ciertas acciones no tenidas en cuenta en proyecto, situación frecuente hoy en día, por ejemplo, en casos de rehabilitación o cambio de uso de estructuras ya existentes; y, en general, en casos en que se requiere realizar un análisis del margen de seguridad realmente existente frente a una determinada acción, entre otros.

En este artículo se presenta un modelo numérico para el análisis paso a paso en el tiempo de estructuras reticulares planas de hormigón armado, (fig. 1.a), sometidas a acciones no dinámicas, en el que se puede tener en cuenta el comportamiento diferido no lineal de los materiales a nivel "fibra", (fig. 1.b), los efectos de segundo orden y el proceso constructivo. En sucesivos apartados se describen los aspectos teóricos de la formulación utilizada, las leyes de comportamiento adoptadas para los materiales, la forma de introducir los efectos de segundo orden, algunos aspectos de tipo práctico de la implementación numérica realizada, y una descripción del "output" ofrecido por el programa de ordenador.

Finalmente, se presenta un ejemplo de aplicación del programa desarrollado, que se compone de dos partes. En una primera etapa, se utiliza el modelo descrito para reproducir unos resultados experimentales conocidos, comparando con lo obtenido, también numéricamente, por otros autores; y en una segunda etapa se estudia, mediante el modelo, la respuesta de la estructura ante varias historias distintas de acciones, y se extraen algunas conclusiones acerca de la influencia de la existencia de una carga permanente durante largos períodos de tiempo, sobre el comportamiento último de la estructura.

Gran parte del trabajo presentado en este artículo está basado en la tesis doctoral de uno de los autores [Carol, 1985]. En ella pueden encontrarse detalles y aclaraciones que rebasan el ámbito de este propio artículo.

## DESCRIPCION TEORICA DE LA FORMULACION UTILIZADA

### a) Breve repaso de las leyes físicas que rigen el comportamiento estructural.

Como es bien conocido, el comportamiento estructural viene regido por los tres tipos de leyes físicas siguientes:

- Condiciones de equilibrio.
- Condiciones de compatibilidad.
- Leyes de comportamiento de los materiales.

Para una barra típica de la estructura, el *equilibrio* puede expresarse a partir de los esfuerzos actuantes sobre la rebanada diferencial. Para tener en cuenta los efectos de segundo orden es conveniente considerar dicha rebanada en su posición deformada, pero seguir expresando los esfuerzos en las direcciones originales de los ejes  $x$ ,  $y$  (directriz de la pieza y dirección ortogonal) (fig. 2).

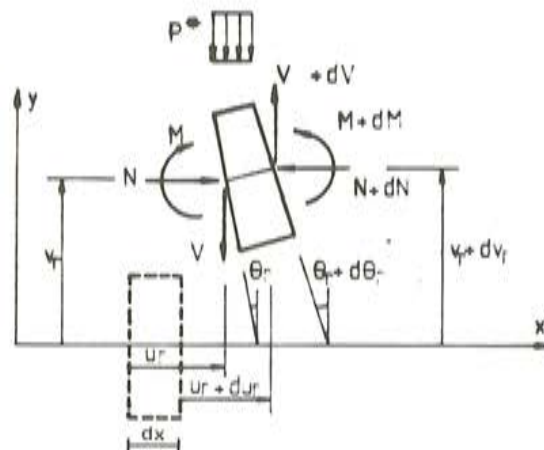


Fig. 2. Equilibrio de la rebanada, en 2º orden.

Aceptando que  $dv_r \ll dx$ , como hipótesis distintiva del ámbito de "equilibrio en segundo orden" de otros ámbitos más generales, e imponiendo el equilibrio de dicha rebanada, se puede obtener el sistema de ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= 0 \\ \frac{d^2 M}{dx^2} &= -p^*(x) - N \cdot \frac{d^2 v_r}{dx^2} \\ V &= -\frac{dM^*}{dx} - N \cdot \frac{dv_r}{dx} \end{aligned} \quad (1)$$

Estas ecuaciones difieren de las clásicas ecuaciones de equilibrio en primer orden, en la aparición, en las ecuaciones 2ª y 3ª, de sendos términos de carácter no lineal, que dependen del axil y de la ley de flechas.

La compatibilidad puede expresarse como relación entre los desplazamientos  $u_r, v_r, \theta_r$  de la directriz y las deformaciones  $\epsilon_r, \phi$  de las secciones (fig. 1.c) que, despreciando la deformación por cortante, se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= -\frac{du_r}{dx} \\ \phi &= \frac{d^2 v_r}{dx^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Estas condiciones pueden, igualmente, ser expresadas en la forma integral siguiente:

$$\begin{aligned} u_B &= u_A - \int_A^B \epsilon_r \cdot dx \\ v_B &= v_A + \theta_A \cdot (x_B - x_A) + \int_A^B \phi \cdot (x_B - x) \cdot dx \\ \theta_B &= \theta_A + \int_A^B \phi \cdot dx \end{aligned} \quad (3)$$

donde A y B son dos puntos de la directriz de la barra.

El comportamiento de los materiales, por su parte, puede ser definido como una relación entre la tensión  $\sigma$  y la deformación  $\epsilon$ , perpendiculares a la sección, en un punto o "fibra" de la misma. Esta relación puede depender, en el caso más general, del tiempo, y se puede expresar como:

$$\Delta\sigma = f_{FIB}(\text{estado inicial}, \Delta\epsilon, \Delta t) \quad (4)$$

donde  $f_{FIB}$  simboliza un procedimiento basado en algún modelo teórico del material, capaz de suministrar el incremento de tensión correspondiente a imponer al material un incremento de deformación,  $\Delta\epsilon$ , durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , a partir de un estado inicial dado.

Definido el procedimiento (4) para todas las fibras de la sección, siempre es posible, aprovechando la hipótesis de secciones planas, definir el comportamiento de la sección como:

$$\Delta\vec{\sigma}_s = f_{SEC}(\text{estado inicial fibras}, \Delta\vec{\epsilon}_s, \Delta t) \quad (5)$$

donde  $\Delta \vec{\epsilon}_s$  es el vector de deformaciones de la sección, de componentes  $\epsilon_r, \phi$ ;  $\Delta \vec{\sigma}_s$  es el vector de esfuerzos asociados a esas deformaciones, de componentes  $N$  y  $M$ ; y  $f_{SEC}$  representa el procedimiento para hallar el incremento de esfuerzos correspondiente a imponer a la sección el incremento de deformaciones  $\Delta \vec{\epsilon}_s$ , durante el intervalo  $\Delta t$ ; procedimiento que consiste en calcular primero  $\Delta e$  en cada fibra y aplicar la expresión (4), para después, por integración de las  $\Delta \sigma$  resultantes, hallar  $\Delta \vec{\sigma}_s$  (fig. 1.c, d, e)

En este caso, se consideran dos materiales, hormigón y acero. Para el *hormigón* se ha adoptado un modelo teórico de comportamiento uniaxial, de tipo incremental, que puede simbolizarse mediante el esquema reológico de la figura 3.

Este modelo permite representar la mayoría de los aspectos del comportamiento instantáneo y diferido, lineal y no lineal, del hormigón, incluidos fenómenos complejos como la "rotura por cansancio" y otros. En las referencias [Carol, 1985] y [Carol et al. 1986], (esta última aparecida en esta misma publicación) se describe en detalle la formulación teórica, los procedimientos necesarios para el ajuste de parámetros respecto a la Instrucción EH-82, y los procedimientos implícitamente incluidos en la expresión (4).

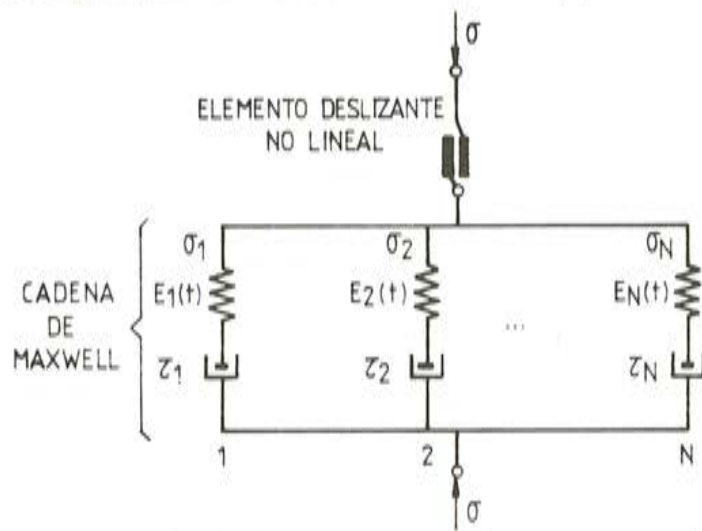


Fig. 3. Modelo para el hormigón.

Para el *acero* se ha adoptado el modelo elasto-plástico, con rigidización, representado explícitamente en la figura 4.

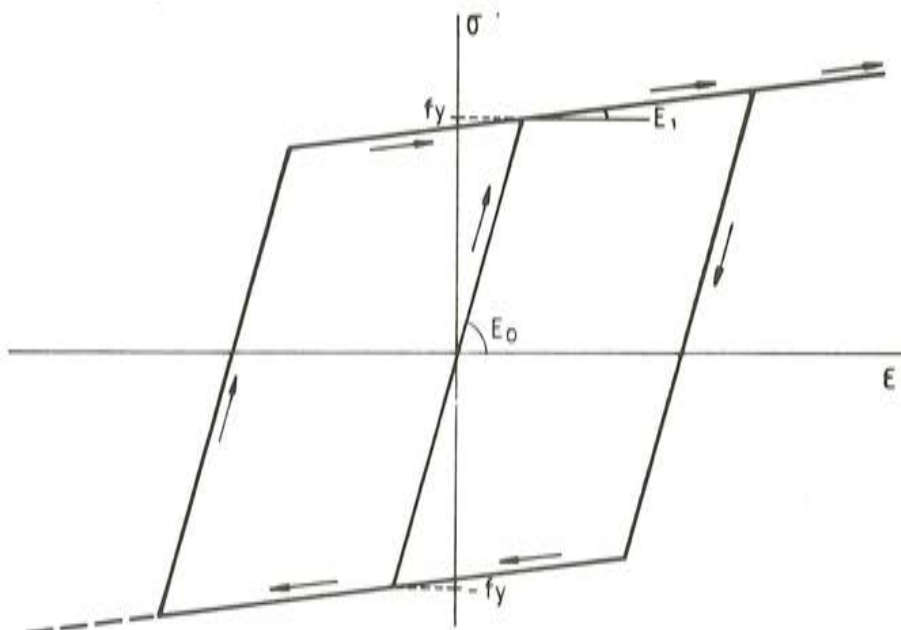


Fig. 4. Modelo para el acero.



b) *Formulación lineal básica.*

La solución del problema no lineal más general suele basarse en una formulación básica, obtenida para material lineal y equilibrio en primer orden.

En este caso, las ecuaciones (1) segunda y tercera, pierden el último término no lineal, y admiten la solución siguiente:

$$\begin{aligned} N(x) &= N \\ M(x) &= M^*(x) + M_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_B \cdot \frac{x}{L} \\ V(x) &= -\frac{dM^*}{dx} - \frac{M_B - M_A}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $N$ ,  $M_A$  y  $M_B$  son los valores de tres fuerzas independientes en los extremos A y B de la barra, y  $M^*$  es la solución particular de la ley de momentos correspondiente a la barra biapoyada, con la carga repartida  $p^*(x)$ .

Las dos primeras ecuaciones pueden ordenarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_A \\ M_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

lo que también puede expresarse como:

$$\vec{\sigma}_s = N(x) \cdot \vec{I} + \vec{\sigma}_s^* \quad (7 \text{ bis})$$

Las ecuaciones de compatibilidad (3), por su parte, pueden ordenarse matricialmente de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} -(u_B - u_A) \\ \frac{v_B - v_A}{L} - \theta_A \\ \theta_B - \frac{v_B - v_A}{L} \end{bmatrix} = \vec{d} = \int_{EL} N^t(x) \cdot \epsilon_s \cdot dx \quad (8)$$

donde  $\vec{d}$  es el vector de desplazamientos relativos entre extremos de barra.

En el marco de la formulación básica presentada en este apartado, para el material se toma la ecuación lineal más general a nivel fibra, que es la siguiente:

$$\sigma = E \cdot \epsilon + \sigma^0 \quad (9)$$

Integrando sobre la sección y gracias a la hipótesis de secciones planas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{SEC} E \cdot ds & \int_{SEC} y \cdot E \cdot ds \\ SIM. & \int_{SEC} y^2 \cdot E \cdot ds \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{SEC} \sigma^0 \cdot ds \\ \int_{SEC} y \cdot \sigma^0 \cdot ds \end{bmatrix} \quad (10)$$

que constituye la expresión de comportamiento más general de la sección, dentro del rango lineal, y se puede expresar abreviadamente como:

$$\vec{\sigma}_s = \underline{\underline{K}}_s \cdot \vec{\epsilon}_s + \vec{\sigma}_s^0 \quad (11)$$

Las expresiones (7 bis), (8) y (11) son suficientes para formular el comportamiento de la barra en término de las fuerzas independientes y desplazamientos relativos en extremos de barra,  $\vec{f}$  y  $\vec{d}$ . Para pasar a términos de los vectores completos en coordenadas x e y locales de la barra  $\vec{F}_{e1}$  y  $\vec{\delta}_{e1}$ , es necesario relacionar estos últimos con aquéllos, mediante las expresiones:

$$\begin{bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ M_A \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_A \\ M_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left. \frac{dM^*}{dx} \right|_A \\ 0 \\ 0 \\ -\left. \frac{dM^*}{dx} \right|_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

lo que se puede escribir en forma matricial como:

$$\vec{F}_{e1} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{f} + \Delta^* \vec{F}_{e1} \quad (13)$$

y

$$\vec{d} = \underline{\underline{T}}^t \cdot \vec{\delta}_{e1} \quad (14)$$

La expresión matricial final para el elemento, en coordenadas locales x, y, es la siguiente:

$$\vec{F}_{e1} = \underline{\underline{K}}_{e1} \cdot \vec{\delta}_{e1} + \vec{F}_{e1}^0 + \vec{F}_{e1}^* \quad (15)$$

donde:

$$\underline{\underline{K}}_{e1} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{T}}^t \quad (16)$$

$$\vec{F}_{e1}^0 = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \left[ \int_{EL} \underline{\underline{N}}^t \cdot \underline{\underline{K}}_s^{-1} \cdot \vec{\sigma}_s^0 \cdot dx \right] \quad (17)$$

$$\vec{F}_{e1}^* = - \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \left[ \int_{EL} \underline{\underline{N}}^t \cdot \underline{\underline{K}}_s^{-1} \cdot \vec{\sigma}_s^* \cdot dx \right] \quad (18)$$

y

$$\underline{\underline{D}} = \left[ \int_{EL} \underline{\underline{N}}^t \cdot \underline{\underline{K}}_s^{-1} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot dx \right]^{-1} \quad (19)$$

La expresión (15) permite, previo cambio de ejes a los ejes globales de la estructura y ensamblaje entre los diversos elementos, resolver la estructura y obtener los desplazamientos nodales y reacciones. Posteriormente, y mediante las expresiones (7), (11) y (9), es posible hallar esfuerzos y deformaciones, en todos los puntos de las barras. Los desplazamientos axiales, flechas y giros, por último, deben hallarse por integración numérica de las ecuaciones diferenciales (2), o por medio de las ecuaciones (3), asignando los límites de integración adecuados.

c) *Extensión a material no lineal.*

El análisis estructural incluyendo el comportamiento no lineal y diferido de hormigón y acero descritos en el subapartado a) requiere, en primer lugar, dividir el tiempo en una serie de intervalos  $\Delta t$  según los criterios expuestos en el siguiente apartado, y después, resolver la estructura para cada uno de ellos sucesivamente.

En un intervalo genérico  $\Delta t$ , el comportamiento del material viene conocido a través de los modelos y procedimientos englobados en la expresión (5). Este comportamiento se puede representar, simbólicamente, sobre unos ejes  $\bar{\sigma}_s$ - $\bar{\epsilon}_s$  (fig. 5), mediante una curva que se obtendría dando diversos valores a  $\Delta \bar{\epsilon}_s$  en la expresión (5), para una situación inicial en todas las fibras del material y un intervalo  $\Delta t$  fijos.

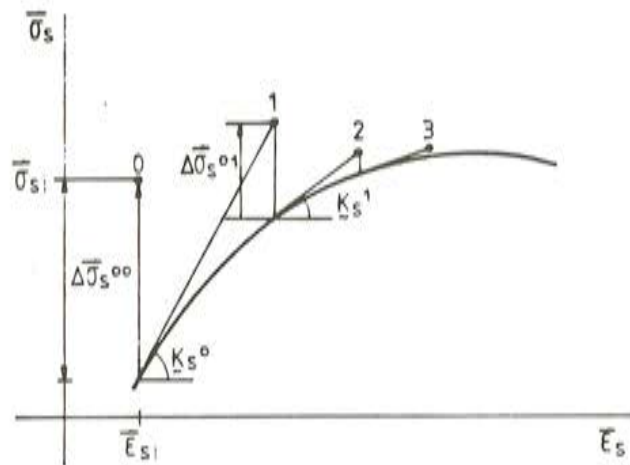


Fig. 5. Proceso iterativo a nivel sección.

El análisis de la estructura durante el intervalo  $\Delta t$  implica un proceso iterativo, que puede interpretarse como la acumulación de los resultados obtenidos en sucesivas resoluciones del problema lineal, utilizando en cada una de ellas la formulación básica descrita en el subapartado anterior, con unos valores ficticios de  $\bar{\sigma}_s^0$  y  $\bar{\epsilon}_s^0$ , en cada iteración, que son los que más convienen según el procedimiento de cálculo no lineal adoptado. En la figura 5 se representa, simbólicamente, el proceso que correspondería a un procedimiento tipo "Newton-Raphson".

Este mismo proceso iterativo permite quizás una interpretación más intuitiva y sencilla, considerando el diagrama simplificado  $M-\phi$  (tomando  $\bar{\sigma}_s = [M]$  y  $\bar{\epsilon}_s = [\phi]$ ). En ese caso, el proceso descrito correspondería a un método del tipo de "transferencia de esfuerzos" o "esfuerzos impuestos", según la nomenclatura de la referencia [Murcia, 1986], pero en el

que no se conoce "a priori" todo el diagrama  $M-\phi$ , sino que se van calculando los valores de  $M$ , sobre la marcha, para los valores de  $\phi$  obtenidos en cada iteración.

d) *Extensión al equilibrio en segundo orden.*

El equilibrio en segundo orden viene gobernado, a nivel sección, por el conjunto de ecuaciones (1). Estas ecuaciones admiten la siguiente solución analítica:

$$\begin{aligned}
 N(x) &= N \\
 M(x) &= M^*(x) + M_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_B \cdot \frac{x}{L} - N \cdot v_{r2}(x) \\
 V(x) &= -\frac{dM^*}{dx} - \frac{M_B - M_A}{L} - N \cdot \frac{\delta}{L}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

que se diferencia de la solución en primer orden (6) en los últimos términos de las ecuaciones segunda y tercera, en los que  $v_{r2}$  es la flecha por encima de la línea recta que une ambos extremos de la barra en la posición deformada, y  $\delta$  es la diferencia de flecha entre ambos extremos,  $v_{rB} - v_{rA}$  (fig. 6).

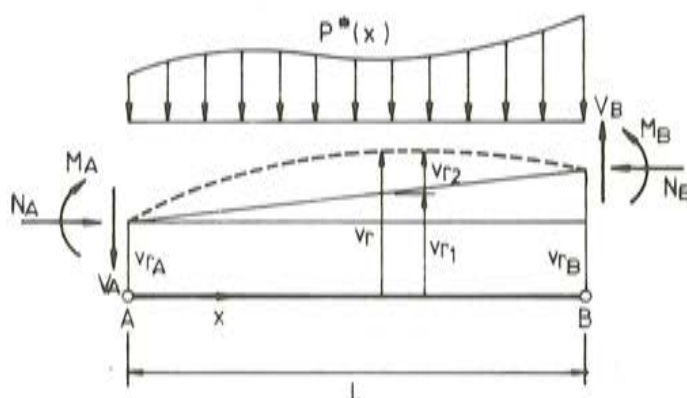


Fig. 6. Equilibrio en 2º orden del elemento.

En estas expresiones, el incremento de cortante puede relacionarse con el conocido "efecto  $P-\delta$ ", en tanto que el incremento de momento, nulo en los extremos, incluye lo que podría denominarse "efecto de ondulación" a lo largo de la barra.

Ordenando matricialmente las ecuaciones (20), se obtiene una expresión similar a la de primer orden (7), pero en la que aparece un último sumando,  $\vec{\sigma}_s^{II}$ , que incorpora el "efecto de ondulación":

$$\vec{\sigma}_s^{II}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -N \cdot v_{r2}(x) \end{bmatrix}
 \tag{21}$$

El término extra en la tercera ecuación (20), por su parte, modifica la relación (12) entre los vectores de fuerzas globales  $\vec{F}_{e1}$ , y "reducido"  $\vec{f}$ , en la que aparece un nuevo sumando,  $\Delta^{II} \vec{F}_{e1}$ , que incorpora el "efecto  $P-\delta$ ":

$$\Delta^{II} \vec{F}_{e1} = \left[ 0, N \cdot \frac{\delta}{L}, 0, 0, -N \cdot \frac{\delta}{L}, 0 \right]^t
 \tag{22}$$

Siguiendo un proceso totalmente análogo al seguido en la formulación básica, se alcanza la ecuación matricial final del elemento, válida para equilibrio en segundo orden:

$$\vec{F}_{e1} = \underline{K}_{e1} \cdot \vec{\delta}_{e1} + \vec{F}_{e1}^0 + \vec{F}_{e1}^* + \vec{F}_{e1}^{II} (N, v_r(x)) \quad (23)$$

en la que aparece un nuevo término de fuerzas iniciales, cuya expresión es:

$$\vec{F}_{e1}^{II} = \underline{T} \cdot \underline{D} \cdot \int_{EL} \underline{N}^t \cdot \underline{K}_s^{-1} \cdot \Delta \vec{\sigma}_s^{II} \cdot dx + \Delta^{II} \vec{F}_{e1} \quad (24)$$

Este término depende del axil y de la ley de flechas en la barra, no conocida "a priori", de la resolución estructural; por lo que la resolución del problema para material lineal y en valores totales de las variables puede realizarse en forma iterativa, repitiendo varias veces el cálculo, utilizando en cada caso los valores de  $N$  y  $v(x)$  obtenidos en la iteración anterior.

Cuando se consideran los efectos de segundo orden simultáneamente a la no linealidad del material, se realiza un único proceso iterativo simultáneo para ambas no linealidades. En cada iteración se producen incrementos del axil y de las flechas, por lo que es necesario obtener el incremento del término de fuerzas iniciales (24), válido originalmente sólo para valores totales de las variables, como diferencia entre su valor correspondiente a los axiles y flechas de la última iteración y su valor para los axiles y flechas obtenidos en la iteración precedente. De esta forma, el valor de  $\vec{F}_{e1}^{II}$  acumulado al final del proceso iterativo, corresponderá, efectivamente, a los valores totales de  $N$  y  $v(x)$ ; con lo que quedará satisfecho el equilibrio en segundo orden, además de las ecuaciones de comportamiento adoptadas para el material.

e) *Algunas consideraciones sobre la formulación descrita.*

Esta formulación puede describirse como una generalización de la teoría clásica del Análisis Matricial de Estructuras al caso más general de material no lineal, a nivel fibra, y equilibrio en segundo orden, aunque también puede ser considerada como una formulación híbrida del Método de los Elementos Finitos, en la que se interpolan los esfuerzos (exp. 7), con la particularidad de que dicha interpolación resulta exacta [Carol et al, 1986].

El planteamiento del método como solución "exacta" de las ecuaciones que rigen el fenómeno, evita algunas limitaciones relativas al tamaño de los elementos usualmente existentes en otros planteamientos de tipo "aproximado", como la formulación clásica del M. E.F. en desplazamientos para elementos barra [Hinton et al, 1979].

Esta formulación posibilita la obtención de leyes de esfuerzos coherentes y continuas, en todos los puntos de la estructura, utilizando un número mínimo de elementos en las discretizaciones, incluso en los casos de carga distribuida arbitrariamente sobre las barras, equilibrio en segundo orden y material no lineal.

Algunos trabajos similares han sido desarrollados con anterioridad. Sin embargo, en algunos casos la no inclusión de la carga distribuida en las ecuaciones, con la consiguiente necesidad de sustituirla por cargas puntuales en nudos, la no inclusión de los efectos de segundo orden, y la elección de esquemas de integración con pocos puntos a lo largo de las barras [Atienza et al, 1985]; y en otros, la consideración de la no linealidad del material de forma simplificada, a nivel del diagrama momento-curvatura [Aguado, 1980; Marí, 1981], o incluso la extensión de la formulación al ámbito de los grandes desplazamientos [Bäklund, 1976; Grelat, 1978], extensión innecesaria para las estructuras de hormigón que, por su relativamente baja deformabilidad, pueden en general ser estudiadas de forma satisfactoria en el ámbito de "segundo orden", han sido causa para no obtener todas las ventajas descritas del planteamiento presentado.

## IMPLEMENTACION NUMERICA DE LA FORMULACION DESCRITA

De cara a la aplicación práctica de la formulación descrita, en cada barra se consideran un total de 11 secciones, igualmente espaciadas, incluidas las secciones extremas, (fig. 7.a), de las que deben conocerse las características, y en las que se obtienen, como resultados del análisis, los esfuerzos, desplazamientos y deformaciones. Se consideran secciones rectangulares, en las que se define un total de 11 "fibras" igualmente espaciadas a lo largo del canto, incluidos los bordes inferior y superior, en las que se evalúan las tensiones en el hormigón, más otras dos fibras para el acero de la armadura superior y de la inferior (fig. 7.b).

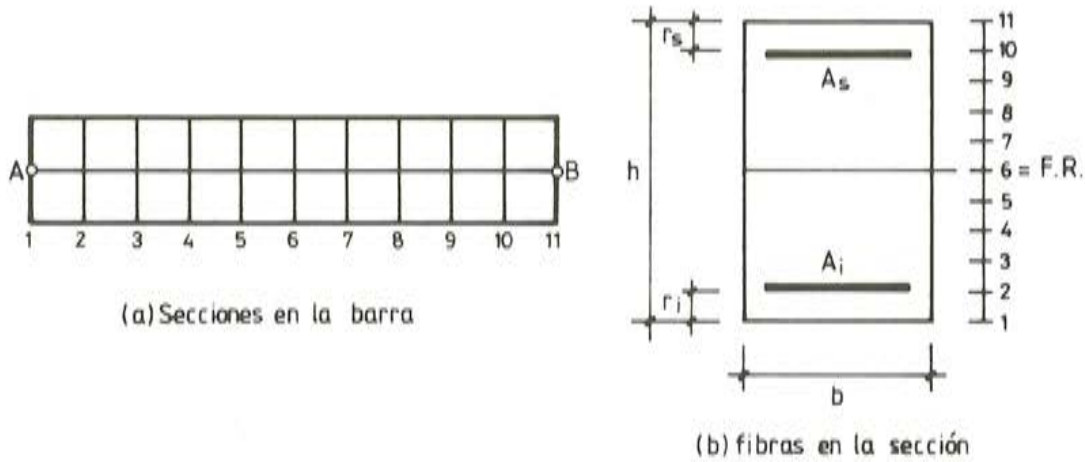


Fig. 7. Definición del elemento barra.

Tanto las 11 secciones definidas a lo largo de la barra, como las 11 "fibras" de la sección, sirven también como puntos de integración para evaluar matrices, vectores, esfuerzos, etc. En todos los casos, se utiliza la regla de Simpson generalizada a 11 puntos, cuya expresión es la siguiente:

$$\int_L f(x) \cdot dx = \frac{L}{30} \cdot [f_1 + 4 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 + \dots + 4 \cdot f_{10} + f_{11}] \quad (25)$$

Las 11 secciones definidas sobre la barra, se utilizan asimismo para la integración de los desplazamientos de la directriz (flechas, etc.), a partir de sus deformaciones (curvaturas, etc.); lo que se efectúa por medio de un esquema simple, en diferencias finitas de segundo orden.

En la figura 8 se representan los lazos y subrutinas básicos del programa de ordenador desarrollado.

En la subrutina EGENCT, se introduce la geometría y características finales de la estructura que se va a analizar.

Esta configuración final se puede alcanzar a través de una serie de etapas constructivas, en cada una de las cuales siempre se añaden nuevos nudos y elementos a la configuración anterior.

En cada etapa constructiva pueden imponerse una serie de escalones de acciones, no obligatoriamente proporcionales entre sí, cada uno de los cuales puede consistir en una serie de cargas y un conjunto de vinculaciones nodales y desplazamientos impuestos, aplicados

ambos de forma gradual a lo largo de un intervalo de tiempo. El caso de intervalo de duración nula corresponde, obviamente, a un escalón de carga instantánea.

Cada escalón de carga puede, a su vez, ser dividido en una serie de "pasos de aplicación", totalmente proporcionales entre sí, que se pueden definir, o bien a voluntad o bien automáticamente. Esta última opción resulta muy útil cuando el escalón de acciones consiste en el paso de un intervalo de tiempo exclusivamente (valor nulo de cargas aplicadas y de desplazamientos impuestos), en cuyo caso el criterio para la determinación de los "pasos"  $\Delta\Delta t_i$ , consiste en tomar el primero,  $\Delta\Delta t_1 = 1$  día, y los siguientes según el criterio:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta t_k &= t_k - t_{k-1} \\ (t_k - t_0) &= (t_{k-1} - t_0) \cdot 10^{0,25} \end{aligned} \tag{26}$$

lo que da unos pasos de duración sucesivamente creciente, hasta completar el intervalo.

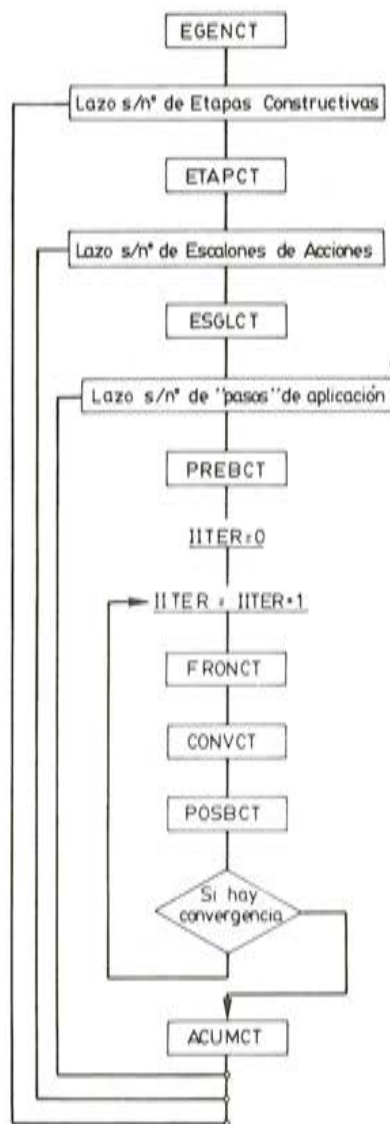


Fig. 8. Diagrama de flujo del programa desarrollado.

En el interior del tercer lazo de la figura 8, se lleva a cabo la resolución del problema no lineal, por medio de la formulación descrita en apartados anteriores. En PREBCT se evalúan las matrices de rigidez y vectores de fuerzas iniciales de cada barra de la estructura, válidas para el paso considerado. En FRONCT estas matrices y vectores se ensamblan, y se resuelve el sistema de ecuaciones global, hallando los incrementos de desplazamientos y reacciones nodales. En CONVCT se acumulan los incrementos de desplazamientos y reacciones, obtenidos en esta iteración a los valores anteriores, y se comprueba convergencia. En POSBCT se hallan los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada barra, y se escogen los nuevos valores de rigidez seccional y esfuerzos iniciales, necesarios para el cálculo de la siguiente iteración, y se calculan las nuevas matrices y vectores correspondientes, tras lo cual se vuelve a resolver la estructura, a calcular esfuerzos, etc., hasta la convergencia.

La elección de la nueva rigidez que hay que utilizar se ha efectuado, en este caso, según el siguiente criterio:

$$\underline{K}_s = (1-\alpha) \cdot \underline{K}_s^{i-1} + \alpha \cdot \underline{K}_s^{\text{tan}} \quad (27)$$

donde  $\underline{K}_s^{i-1}$  es la matriz de rigidez seccional de la iteración precedente,  $\underline{K}_s^{\text{tan}}$  es la nueva matriz de rigidez tangente, y  $\alpha$  es un peso que se fija a voluntad. Valores de  $\alpha$  entre 0,5 y 0,9, suelen producir una marcha aceptable en la convergencia del proceso iterativo.

Una vez el proceso ha convergido, en la subrutina ACUMCT se acumulan los incrementos de las variables en este paso a los resultados precedentes. En la referencia [Carol, 1985] pueden encontrarse más detalles de esta implementación, así como expresiones explícitas de los términos de las diversas matrices y vectores; lo que permite cierta economía en el tiempo de cálculo.

RESULTATS ACUMULATS FINS PAS 8 DEL ESGLAD DE CARGA N. 3  
-----

DESPLS. I REACCIONS GLOBALES ACUMULATS

| NUB | DESP.X        | DESP.Y       | UIR          | REAC.X       | REAC.Y        | REAC.M        |
|-----|---------------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| 1   | 0.000000E+00  | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.205000E+02 | -0.140500E+06 | -0.152461E+01 |
| 2   | -0.171119E-02 | 0.304952E-01 | 0.206052E-01 |              |               |               |

BARRA N. 1  
AXIL = 20.50

|         | EXTR.I   | S.2       | S.3       | S.4       | S.5       | CENTRE    | S.7       | S.8       | S.9       | S.10      | EXTR.J    |
|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| MOMENT  | 1.525    | 1.311     | 1.472     | 1.407     | 1.310     | 1.208     | 1.000     | 0.925     | 0.777     | 0.607     | 0.428     |
| TALLANT | 0.000    | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     |
| EQ      | 0.000719 | 0.000721  | 0.000726  | 0.000733  | 0.000761  | 0.000790  | 0.000797  | 0.000795  | 0.000779  | 0.000774  | 0.000770  |
| FI      | 0.018502 | 0.018282  | 0.017619  | 0.016588  | 0.014759  | 0.012502  | 0.011200  | 0.009654  | 0.008176  | 0.006592  | 0.004921  |
| FLYXA   | 0.000000 | -0.000461 | -0.001047 | -0.004125 | -0.007243 | -0.011109 | -0.015607 | -0.020672 | -0.026226 | -0.032194 | -0.038495 |

SITUACIO DE CADA FIBRA

DEFORMACIO NO MECANICA FORMIGO (RETRACCIO) = 0.000148

| N.FIB.             | DEFOR.MEC. | ICRAC | DEFCCR    | DEFMX    | TENSIO   | T.P.1 | T.P.2  | T.P.3  | T.P.4  | T.P.5   |
|--------------------|------------|-------|-----------|----------|----------|-------|--------|--------|--------|---------|
| --- SECCIO 1 ----- |            |       |           |          |          |       |        |        |        |         |
| A.SUP.             | 0.001736   |       | DEF.PL. = | 0.000000 | 36460.86 |       |        |        |        |         |
| 11                 | 0.001958   | 0     | 0.000000  | 0.001958 | 2164.74  | 7.96  | 103.81 | 824.02 | 620.98 | 607.96  |
| 10                 | 0.001681   | 0     | 0.000000  | 0.001681 | 1932.04  | 7.08  | 90.80  | 737.93 | 555.39 | 540.84  |
| 9                  | 0.001403   | 0     | 0.000000  | 0.001403 | 1656.85  | 5.82  | 74.11  | 637.57 | 478.60 | 460.73  |
| 8                  | 0.001126   | 0     | 0.000000  | 0.001126 | 1398.53  | 4.19  | 53.66  | 522.83 | 390.45 | 367.39  |
| 7                  | 0.000849   | 0     | 0.000000  | 0.000849 | 977.77   | 2.17  | 29.51  | 393.88 | 291.13 | 261.08  |
| 6                  | 0.000571   | 0     | 0.000000  | 0.000571 | 369.26   | -0.33 | 1.16   | 249.07 | 179.37 | 130.98  |
| 5                  | 0.000293   | 0     | 0.000000  | 0.000293 | 130.46   | -2.95 | -39.68 | 94.00  | 39.37  | 9.75    |
| 4                  | 0.000016   | 0     | 0.000000  | 0.000241 | -322.72  | -5.66 | -60.85 | -66.65 | -64.92 | -124.63 |
| 3                  | -0.000262  | 1     | 0.000044  | 0.000140 | 0.00     | 0.17  | 4.42   | 7.93   | -1.45  | -11.06  |
| 2                  | -0.000539  | 1     | -0.000031 | 0.000077 | 0.00     | 0.36  | 12.58  | -7.77  | -7.90  | 2.73    |
| 1                  | -0.000817  | 1     | -0.000026 | 0.000023 | 0.00     | 0.83  | 1.30   | -5.50  | -1.18  | 5.35    |
| A.INF.             | -0.000299  |       | DEF.PL. = | 0.000000 | -6270.89 |       |        |        |        |         |

Fig. 9. Output del programa correspondiente al caso de una ménsula con un axil y un momento en el extremo libre, e incluyendo los efectos de segundo orden.



En la figura 9 se reproduce una salida de resultados, típica del programa descrito. En primer lugar, se listan los desplazamientos y reacciones nodales y, a continuación, la información correspondiente a cada una de las barras. Para una barra típica, esta información consiste en el valor del axil actuante, la lista de valores del momento, cortante, curvatura ( $\phi$ ), deformación de la fibra de referencia ( $\epsilon_r$ ) y flecha ( $v$ ), en cada una de las 11 secciones consideradas en la misma, y finalmente la información sobre el estado en cada una de las 11 fibras de hormigón y, en el acero, en cada una de las secciones de la barra. En la figura 9 se ha incluido únicamente por razones de espacio, la salida correspondiente a una de las secciones.

## EJEMPLOS DE APLICACION

En este apartado se describe, con cierto detalle, un ejemplo de aplicación del modelo desarrollado, con el fin de ilustrar las posibilidades prácticas que de él se derivan. Otros ejemplos, analizados con el mismo modelo, pueden encontrarse en [Carol, 1985].

Este ejemplo consiste en el estudio del comportamiento en el tiempo de una viga continua de dos tramos, sobre la cual se aplica una carga repartida uniforme (fig. 10). Este caso corresponde a un ensayo real, realizado entre 1951 y 1954 [Washa et al, 1956]. En el análisis se considera únicamente un vano, por razón de simetría.

Este ejemplo presenta el interés adicional de haber sido estudiado numéricamente por otros dos autores [Kang, 1977] y [Chow et al, 1984], mediante formulaciones estándar del M.E.F., en desplazamientos, utilizando 15 y 20 elementos "cortos" para la discretización de un vano de la viga. En este caso, y gracias a las características de la formulación utilizada, la discretización se ha resuelto utilizando, únicamente, dos elementos "largos".

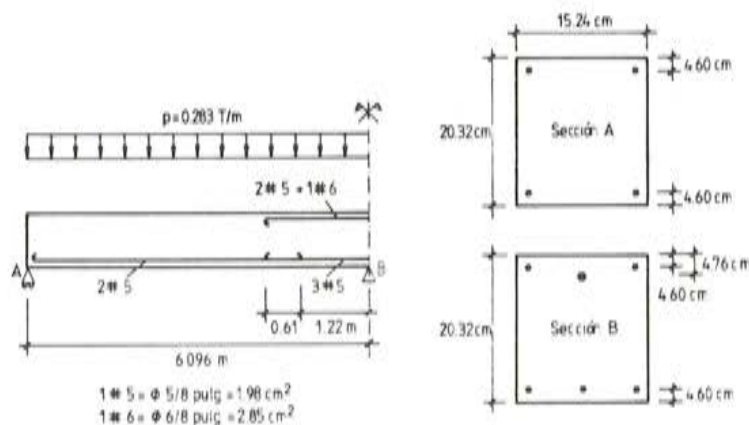


Fig. 10. Viga X3 de Washa-Fluck.

El análisis de este ejemplo ha presentado algunas dificultades para el ajuste de parámetros del modelo teórico de comportamiento del hormigón, dificultades derivadas, fundamentalmente, de la poca información experimental disponible sobre el comportamiento del material en sí, (ensayos de fluencia sobre probetas, etc...). Sí existe, sin embargo, una información más completa relativa a unos ensayos realizados algún tiempo antes, en condiciones relativamente similares; lo que permite una primera estimación cuantitativa. Partiendo de

esos valores, y después de varios tanteos, el modelo se ha ajustado a la función de fluencia de la Instrucción española EH-82 con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 f_{c28} &= 2579 \cdot t/m^2 \\
 E_{c28} &= 3.150.000 \text{ t/m}^2 \\
 \epsilon_{01} \cdot \epsilon_{02} &= 0,00050 \\
 \phi_{01} \cdot \phi_{02} &= 6,0
 \end{aligned}$$

Para el acero, los parámetros adoptados han sido los siguientes:

$$\begin{aligned}
 f_y &= 42.000 \text{ t/m}^2 \\
 E_0 &= 21.090.000 \text{ t/m}^2 \\
 E_1 &= 0,01 \cdot E_0
 \end{aligned}$$

En una primera etapa del análisis, se han reproducido los resultados experimentales disponibles, correspondientes a una historia de cargas consistente en aplicar una carga repartida, de valor  $p = 0,283 \text{ t/m}$ , a los 14 días, y mantenerla hasta los dos años y medio.

En la figura 11 se representa la evolución en el tiempo de la flecha máxima en vano que se produce en una sección situada, aproximadamente, a 0,4 L del extremo izquierdo del vano analizado, tanto obtenida experimentalmente, como del cálculo, en este caso, y por los otros dos autores anteriormente referidos.

El ajuste resulta, en general, satisfactorio, teniendo en cuenta las dificultades anteriormente aludidas de ajuste de parámetros de la ley del material. El aumento de flecha observado se sitúa en torno al 140 por 100.

En la figura 12 se representa la evolución del máximo momento positivo que aparece, aproximadamente, a 0,35 L del extremo izquierdo del vano analizado, y del momento negativo en el apoyo central.

Como se observa en la figura, este es un caso en el que la redistribución de momentos en el tiempo tiende a aumentar el momento en el apoyo (aprox. un 20 por 100), y a disminuir el momento en el vano (aprox. un 15 por 100); lo que, a primera vista, podría parecer extraño, dada la tendencia habitual a igualar los momentos de apoyos y vanos observada en los casos de redistribución por comportamiento no lineal de los materiales.

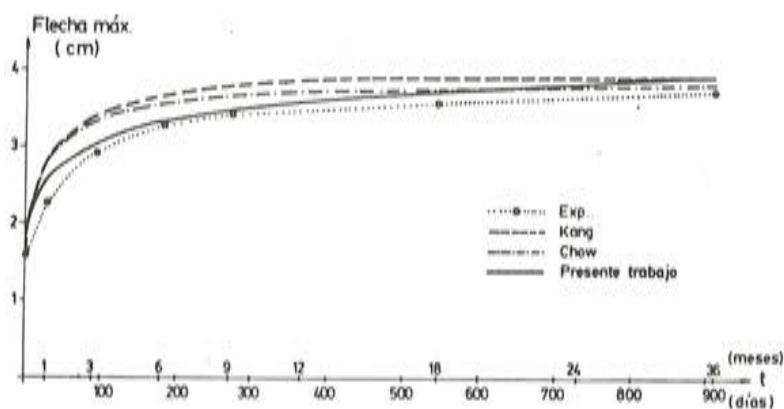


Fig. 11. Evolución de la flecha máxima.

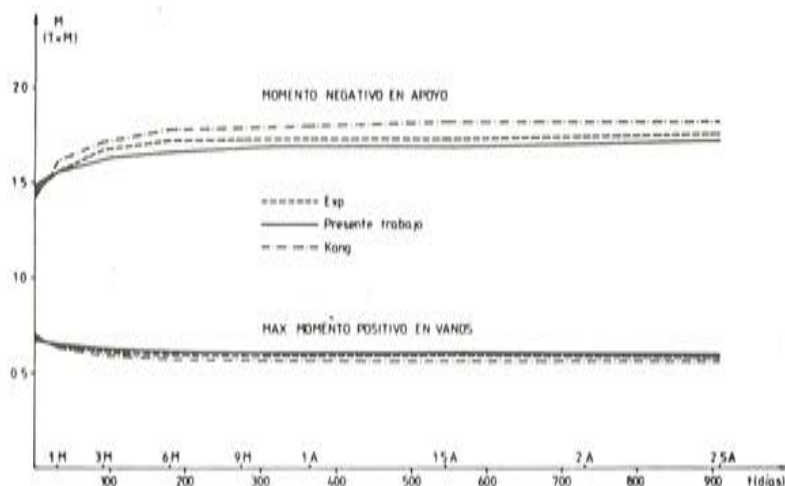


Fig. 12. Evolución de los momentos en vano y apoyo.

La respuesta obtenida resulta, sin embargo, lógica, si se tiene en cuenta que en la mayoría de las secciones de vano no existe armadura de compresión. En estas condiciones, el hormigón puede deformarse libremente por fluencia, y los incrementos de curvatura que aparecen en estas secciones, con el tiempo, resultan relativamente mayores que en la zona de apoyo, donde sí existe armadura de compresión. En este contexto, la redistribución observada puede interpretarse según el "principio" general de que las zonas más rígidas de la estructura tienden siempre a tomar más carga, existiendo así tanto redistribuciones instantáneas por no linealidad del material, como diferidas debidas a la fluencia del hormigón.

La comparación con los resultados experimentales se completa con la figura 13, en la que se representa la posición del plano de deformaciones, tanto tras la aplicación de la carga a los 14 días, como después de los dos años y medio, para las secciones de máximo momento positivo y de apoyo.

En ella se puede apreciar cómo en la sección de vano, donde no existe armadura de compresión, la deformación del hormigón aumenta mucho (un 340 por 100, aprox.), y la del acero casi no varía; mientras que en apoyo, donde sí existe armadura de compresión, la deformación varía en ambas zonas (aprox. un 130 por 100 en la zona comprimida, y un 35 por 100 en la zona traccionada). Estos aumentos de las deformaciones, que no influyen demasiado en las tensiones en el hormigón, que en general tienden a reducirse algo (si hay armaduras de compresión) o mantenerse (si no las hay), sí producen en cambio aumentos de tensión en las armaduras, para las que, por debajo del límite elástico, se mantiene la proporcionalidad entre deformaciones y tensiones. Estos aumentos pueden llegar a ser importantes en secciones con armaduras de compresión, como en la sección de apoyo de este ejemplo. En conjunto, puede hablarse de un fenómeno interno de redistribución de tensiones entre hormigón y acero.

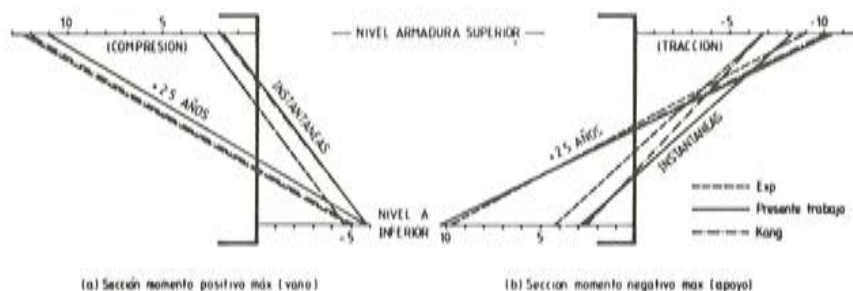


Fig. 13. Deformaciones  $\times 10^3$ , en las secciones de vano y apoyo.

Una vez comprobado que el modelo resulta capaz de reproducir los resultados experimentales disponibles, una segunda etapa del trabajo ha consistido en la utilización del modelo para simular varias historias de carga distintas, de la misma estructura, y obtener algunas conclusiones sobre su comportamiento último.

En particular, algunos de los resultados descritos anteriormente (resultados obtenidos experimentalmente), concretamente el aumento del momento de la sección más solicitada y el aumento de la deformación de la armadura traccionada de esa sección, parecen indicar que la respuesta última de la estructura frente a un aumento de la carga, posterior al período de fluencia, podría ser inferior de las que se obtendría si la estructura hubiera permanecido sin cargar, o con carga inferior, durante dicho período de fluencia.

Para estudiar este efecto, se ha considerado una historia de cargas, análoga a la del ensayo, esto es, una carga instantánea, a los 14 días, y un período de fluencia hasta 2,5 años, pero añadiendo una tercera fase al final de dicho período, consistente en aumentar la carga, de forma instantánea, hasta alcanzar la rotura de la estructura.

El cálculo de la estructura se ha repetido varias veces, para distintos valores de la carga  $\bar{p}$  aplicada durante el período de fluencia, empezando con el caso de valor nulo; lo que corresponde a cargar directamente la estructura a la edad de 2,5 años (fig. 14).

En la figura 15 se representa la evolución obtenida, para los momentos de apoyo y de vano, para las diversas historias de carga, mediante líneas de distinto trazo, en función del valor del factor de carga  $\lambda$ .

Las líneas continuas corresponden al caso de carga aplicada directamente a los 2,5 años, sin carga alguna durante el período de fluencia, ( $\bar{\lambda} = 0$ ), y presentan la evolución típica en estos casos. Las demás líneas presentan quiebros, con tramos verticales correspondientes a las variaciones de momento ocurridas durante el período de fluencia, para  $\lambda$  constante. En la figura se aprecia cómo, a pesar de que el período de fluencia hace aumentar el valor del momento en la sección de apoyo, en todos los casos, al seguir aumentando la carga, aparece un efecto de redistribución que compensa los anteriores aumentos, llegándose a valores finales incluso algo inferiores al caso  $\bar{\lambda} = 0$ .

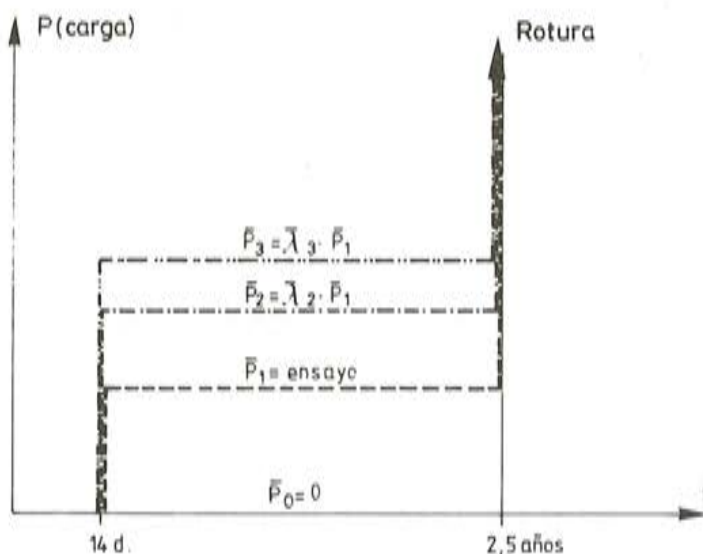


Fig. 14. Distintas historias de carga consideradas.

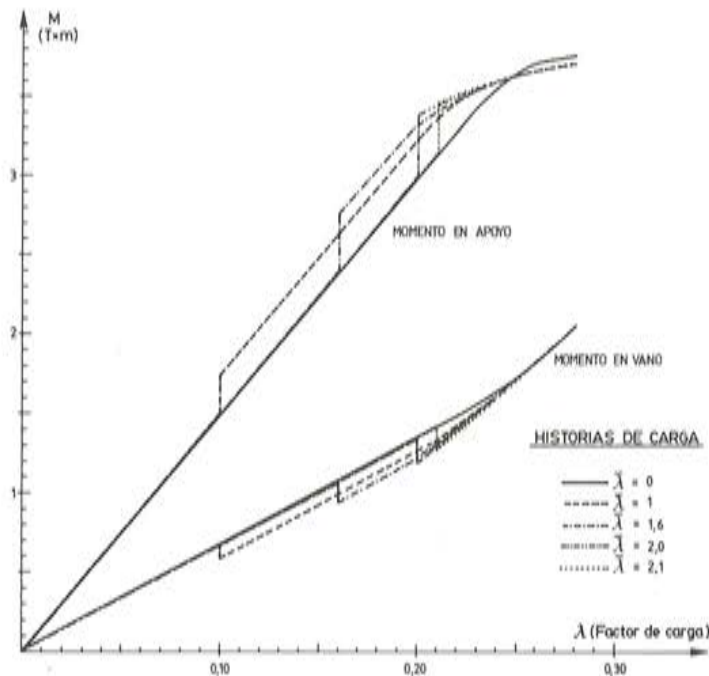


Fig. 15. Evolución del momento máximo en vano y apoyo, para las distintas historias de carga.

Estos resultados no permiten, sin embargo, afirmar gran cosa respecto a la capacidad de carga última de la estructura, ya que para ello habría que comparar con un cierto valor del momento último; concepto que habría que volver a definir, en casos con redistribuciones internas de tensiones hormigón-acero como el que aquí se considera.

Una forma posible de detectar la rotura consiste en representar la evolución de la deformación en la armadura más traccionada (sección del apoyo), en función del valor del factor de carga, para las diversas historias de carga consideradas; lo que se ha hecho en la figura 16, mediante líneas de distinto trazo.

Por haber supuesto el diagrama del acero, en principio, ilimitado (fig. 4), la rotura del mismo debe detectarse fijando, en la figura 16, el valor límite que se desee para su deformación (independiente del tiempo) y encontrando el valor del factor de carga  $\lambda$  que se alcanza en cada historia de carga. Pero la rotura de la estructura también puede proceder del agotamiento del hormigón comprimido. Este segundo tipo de rotura genera más dificultades numéricas, y debido a las ramas descendentes posteriores al pico existentes en la ley de comportamiento del hormigón, en general se detecta por la divergencia del proceso iterativo; lo que se ha representado mediante "x" en la figura 16.

En este estudio se ha supuesto, en principio, que el agotamiento del acero se alcanzaba para una deformación última,  $\epsilon_{su}$ , del 1 por 100, tal como se propone en la Instrucción EH-82. Adoptando este criterio, el agotamiento de la estructura se produce por el acero de la sección de apoyo, en todos los casos de carga considerados. La bondad de esta hipótesis será discutida más adelante.

En la figura 16 se observa cómo todas las curvas presentan un cambio brusco de pendiente al alcanzar el límite elástico del acero ( $\epsilon_s = 0,002$ ). Los tramos verticales corresponden a los aumentos de deformación ocurridos, para carga constante, durante el período de fluencia. La curva en trazo continuo, correspondiente al caso  $\bar{\lambda} = 0$ , alcanza la deformación última para un valor máximo del factor de carga  $\lambda = 2,85$ .

También puede apreciarse cómo la existencia de una carga  $\bar{\lambda}$  durante el período de fluencia, hace aumentar la deformación del acero, que luego alcanza su deformación última

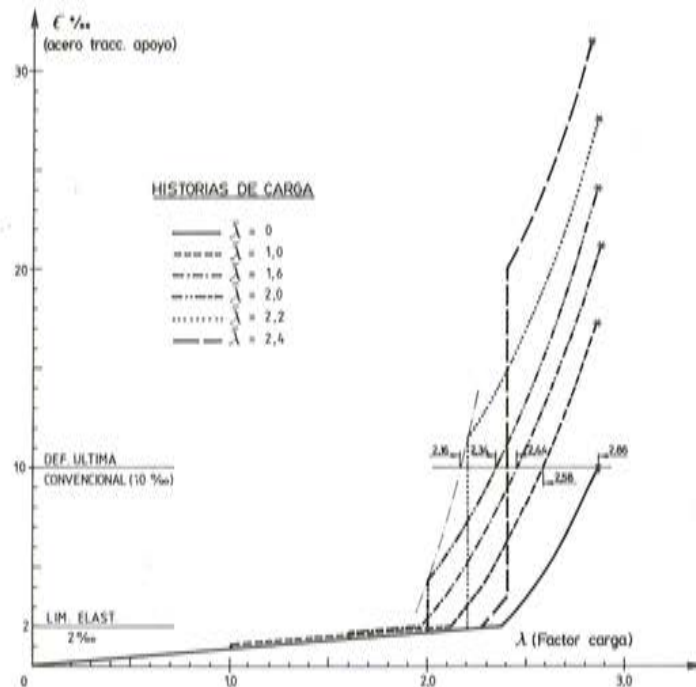


Fig. 16. Evolución de la deformación del acero más traccionado, para distintas historias de carga.

para un valor de la carga total aplicada inferior al que se obtiene en el caso  $\bar{\lambda} = 0$ . Este efecto aumenta con el valor de la carga aplicada durante el período de fluencia, y es máximo para el valor de dicha carga que da lugar a que la deformación última del acero se alcance justamente al final del período de fluencia; caso en el que ya no se puede aplicar ninguna carga adicional. En este caso, dicho valor ha resultado  $\bar{\lambda} = 2,16$ .

En la figura 17 se ha representado la evolución de la carga máxima de la estructura, en función del valor de la carga mantenida durante el período de fluencia, normalizando ambas magnitudes mediante el valor máximo absoluto (2,85) de la carga aplicada directamente a los 2,5 años.

En la figura se aprecia una disminución de la capacidad de carga de la estructura con el valor de la carga aplicada durante el período de fluencia. Esta disminución es sensiblemente lineal en casi todo el dominio, y alcanza el valor máximo del 24 por 100, para un valor límite máximo de la carga “de fluencia”, del 76 por 100 de la carga última.

Estos resultados sugieren que, al menos en ciertos casos, el fenómeno de fluencia puede tener influencia en la carga última de la estructura. Resulta difícil, sin embargo, cuantificar esa influencia dado que, aunque en este caso se han obtenido unas cifras concretas (aprox. 25 por 100 de disminución de la capacidad portante, para cargas del orden del 75 por 100 de la misma, aplicadas desde 14 días hasta 2,5 años), puede haber otros factores, no considerados en este caso, que atenúen o magnifiquen el efecto observado (“tensión stiffening”, por ejemplo), y éste puede asimismo depender, de una amplia casuística (estructuras hiperestáticas o isostáticas, existencia o no de armadura de compresión, cuantías, etc...), o, simplemente, de tomar un valor distinto para la deformación última del acero, lo que puede dar lugar a distinto tipo de roturas (por ejemplo por el hormigón), según la historia de cargas considerada, etc.

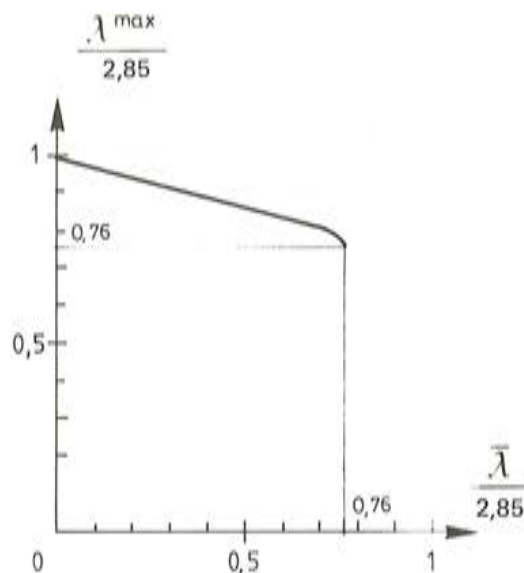


Fig. 17. Disminución de la carga última a 2,5 años, según la carga permanente aplicada desde 14 d.

En cuanto a este último aspecto, evidentemente, el haber tomado el valor de 0,01 como deformación última del acero, no se relaciona con la rotura real de la sección, dado que dicho criterio se justifica en razón de establecer un límite a la deformación plástica excesiva de la misma, suponiéndose, convencionalmente, que entonces se puede dar por agotada. Por otro lado, dicho valor convencional está establecido fuera de consideraciones relativas a la fluencia.

En esta estructura, la rotura real de la sección se produce, para los diferentes casos de carga considerados, bien por agotamiento de la zona comprimida (con deformaciones del acero traccionado casi siempre por encima de 0,01), o bien porque se alcanza la deformación última, real, del acero, superior en general a dicho valor convencional.

En este sentido, aunque en el modelo se ha considerado ilimitado el diagrama  $\sigma-\epsilon$  del acero, los resultados que refleja la figura (16) dejan claro que la disminución de la carga de rotura por fluencia sigue siendo un hecho para deformaciones últimas del acero superiores a 0,01 (en la fig. 16, se obtienen los diferentes puntos de rotura al cortar las diferentes curvas por la horizontal de ordenada  $\epsilon_{su}$ ), si bien decreciendo en importancia conforme aumenta dicho valor.

En cualquier caso, los resultados presentados en este apartado pueden servir para poner un punto de atención sobre esta cuestión.

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

En primer lugar, se ha descrito una formulación para el análisis de estructuras de barras. Esta formulación, que puede ser considerada como una generalización de la teoría clásica de análisis matricial de estructuras, se ha extendido y aplicado al análisis de estructuras reticulares planas, de hormigón armado, teniendo en cuenta el comportamiento no lineal y diferido de los materiales a nivel "fibra", los efectos de segundo orden y el proceso constructivo.

Como ejemplo de aplicación, se ha presentado el estudio del comportamiento en el tiempo de una viga continua de dos vanos, cargada uniformemente, correspondiente a un ensayo real.

En una primera fase del estudio, mediante el modelo desarrollado ha sido posible reproducir los resultados experimentales, con un grado de aproximación similar a los resultados numéricos publicados por otros autores, pero utilizando en las discretizaciones un número de elementos entre siete y diez veces menor.

En una segunda fase, se ha utilizado el modelo para estudiar el comportamiento de la estructura sometida a diversas historias de acciones y poder deducir así algunas conclusiones respecto al comportamiento último de la misma.

En particular, los resultados obtenidos muestran cómo, por lo menos en este caso, el valor de una carga mantenida aplicada durante un período de tiempo prolongado, entre 14 días y 2,5 años sí puede influir sobre el comportamiento último de la estructura a 2,5 años, reduciendo su capacidad portante hasta en un 25 por 100, si la carga duradera llega a ser del 75 por 100 de la carga última a 2,5 años, que se obtendría sin ninguna carga previa aplicada. Todo ello suponiendo una deformación última para el acero del 1 por 100.

De cualquier modo, tomando deformaciones últimas superiores para el acero más acordes con la realidad, esta reducción sigue existiendo, si bien más atenuada, siempre que la rotura sea por el acero; lo que sucede, como es lógico, en los casos de carga en que la incidencia de la fluencia es mayor.

En los casos en que, siendo dicha incidencia más pequeña o nula, la rotura resulta ser por agotamiento en las zonas comprimidas, no se detectan reducciones apreciables de la capacidad portante.

Aunque sea lateralmente, la limitación convencional de la deformación última del acero en tracción,  $\epsilon_{su}$ , que establecen las normativas (0,01 en la EH-82) merece quizá un comentario. Como dicho valor se aplica al cálculo en agotamiento de las secciones en su vertiente instantánea, el hecho de que la fluencia pueda aumentar de una manera apreciable el valor de  $\epsilon_s$  así calculado, puede aconsejar un replanteamiento, tanto en el concepto que hay detrás de dicha limitación como en la forma concreta de reflejarlo en la normativa.

Estos resultados, lejos de ser concluyentes sobre la cuestión, ponen un toque de atención sobre la misma e ilustran las amplias posibilidades de aplicación del modelo numérico presentado.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo, basado principalmente en la Tesis Doctoral de uno de los autores [Carol, 1985], ha podido llevarse a cabo gracias a la financiación que ha supuesto el disfrute de una beca del Plan de Formación de Personal Investigador del M.E.C., entre los años 1981 y 1984, y la percepción de una Ayuda para la Finalización de Tesis Doctorales, de la Generalitat de Catalunya, en 1985.

## REFERENCIAS

- I. CAROL. "Modelos de Análisis no lineal en el tiempo, de estructuras reticulares de hormigón. Revisión integrada y propuesta de un nuevo modelo global para material y estructura". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Catalunya, Mayo 1985.
- I. CAROL, J. MURCIA. "Un modelo incremental para el comportamiento instantáneo y diferido no lineal del hormigón bajo tensiones uniaxiales". Hormigón y Acero n<sup>o</sup> 160. Madrid, 1986.



- COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. "EH-82. Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado". M.O.P.U. Madrid, 1982.
- R.K. LIVESLEY. "Métodos matriciales para el cálculo de estructuras". Ed. Blume, 1970.
- J.S. PRZEMIENIECKI. "Theory of Matrix Structural Analysis". McGraw-Hill, 1968.
- J. MURCIA. "En torno del análisis no lineal de estructuras de hormigón pretensado", Hormigón y Acero n° 159. Madrid, 1986.
- I. CAROL, J. MURCIA. "Utilización de una formulación "exacta" para el análisis no lineal en el tiempo de estructuras reticulares de hormigón armado". Proc. II Symposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos, Vol. 1 pp. 251-267. Ed. Univ. Pol. Catalunya. Barcelona, 1986.
- E. HINTON, D.R.J. OWEN. "An Introduction to Finite Element Computations". Pineridge Press. Swansea, U.K., 1979.
- J.R. ATIENZA, R. IRLLES. "Estudio del comportamiento elastoplástico de estructuras metálicas de entramado". Rev. Int. de Métodos Numéricos para el Cálculo y diseño en ingeniería, Vol. 1 n° 1, 1985.
- A. AGUADO. "Estudio del análisis no lineal de estructuras de hormigón, mediante superposición de problemas lineales en deformaciones". Tesis Doctoral. Univ. Pol. Barcelona, 1980.
- A. MARÍ. "Análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado en teoría de segundo orden". Tesis Doctoral. Univ. Pol. Barcelona, 1981.
- J. BACKLUND. "Large Deflections Analysis of Elasto-Plastic Beams and Frames". Int. J. of Mechanical Science. Vol. 18, pp. 269-277, 1976.
- A. GRELAT. "Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé". Annales de l'I.T.B.T.P. n° 366, Nov. 1978.
- G.N. WASHA, P.G. FLUCK. "Plastic Flow (Creep) of Reinforced Concrete Continuous Beams". A.C.I. Journal, Vol. 27, n° 5, Jan. 1956.
- Y.J. KANG. "Non Linear Geometric, Material and Time-dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames". Ph. Doc. Thesis. Univ. of California, Berkeley, 1977.
- C.O. CHOW, E. HINTON, H.H. ABDEL RAHMAN. "Analysis of Creep and Shrinkage Effects in Reinforced Concrete Beams". Proc. Int. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures (Split), pp. 371-387. Pineridge Press. Swansea, U.K., 1984.

# El problema de la transmisibilidad en las vibraciones mecánicas: la medición de las vibraciones

Manuel Vieco  
Dr. Ingeniero Industrial

## INTRODUCCION

Partiendo del concepto de factor de transmisibilidad como razón de la máxima fuerza transmitida a la base (supuesta perfectamente rígida) a la máxima fuerza impresa al sistema, se trata de analizar la transmisibilidad desde dos enfoques distintos, estableciendo la ecuación diferencial del movimiento a partir de las reacciones en amortiguador y resortes y, a partir de la misma, analizar el tipo de movimiento. Se trata, seguidamente, de obtener la expresión analítica de la transmisibilidad, a partir de la reducción de las amplitudes base-sistema y de analizar su variación en función de la razón frecuencial para distintos valores intervalos de la misma.

La medición de las vibraciones se realiza mediante instrumentos, compuestos esencialmente de un sistema análogo al utilizado al estudiar la transmisibilidad, que reciben distintos nombres en función de la relación entre la frecuencia natural de la masa del sistema registrador y la frecuencia de excitación.

La ecuación del movimiento será análoga a la estudiada en el caso de transmisión de vibraciones, la cual se deducirá en función de la diferencia entre el desplazamiento absoluto de la masa del sistema y el desplazamiento de la base solidaria al elemento vibrante; ecuación análoga a la del movimiento forzado amortiguado para sistemas con un solo grado de libertad. A partir de la respuesta del estado estacionario, conocemos la amplitud del movimiento relativo de la masa, cuya representación gráfica en función de la razón frecuencial, nos permite analizar el movimiento para distintos valores intervalos de la misma y medir las amplitudes de las vibraciones transmitidas.

\* \* \*

Fundamentalmente, la transmisibilidad se estudia bajo dos enfoques distintos: el que potencia la aparición de vibraciones en la base de todo sistema oscilante; o bien, el aislamiento de sistemas dinámicos frente a la acción de posibles mociones aplicadas en su base.

Gráficamente, esta doble versión del problema puede representarse por (véase Fig. 1):

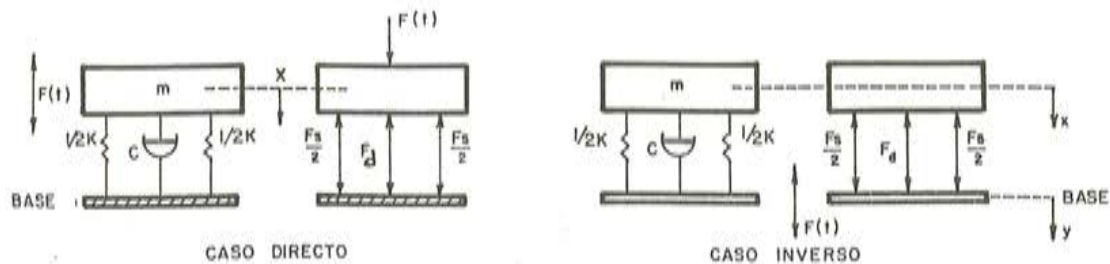


Fig. 1.

El caso directo lo hallamos frecuentemente en el *aislamiento dinámico de máquinas*; el inverso, en la protección dinámica de aparatos sensibles ante la incidencia de perturbaciones motrices externas. Pese a la indudable importancia de ambos enfoques, el problema de la transmisibilidad interesa a nuestros fines bajo su forma segunda. *En este sentido, puede prestar a la sismoresistencia práctica ideas orientadoras nada despreciables.*

Tal como puede apreciarse en los diagramas del sólido libre, la fuerza total transmitida es, en ambos casos, suma de reacciones en los extremos fijos de amortiguador y resortes:

$$F(t) = kx + c\dot{x}; \quad \text{ó} \quad F(t) = ky + c\dot{y}$$

según los casos.

En efecto; como quiera que la actuación de  $F(t)$  suponemos genera en ésta un movimiento sinusoidal,  $T_y(t) = y_0 \text{ sen } pt$ , la ecuación diferencial del movimiento, para todo sistema así concebido, será:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{y_0}{m} (C_p \cos pt + k \text{ sen } pt)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{y_0}{m} \sqrt{(C_p)^2 + K^2} \text{ sen } (pt + \phi)$$

ecuación que nos pone de manifiesto que el movimiento es idéntico al de sistemas amortiguados con un solo grado de libertad y excitados sinusoidalmente.

Estas ecuaciones acusan la existencia de dos movimientos acoplados, uno de los cuales viene definido por el estado transitorio, en tanto el otro lo está por el permanente, estacionario o respuesta dinámica del sistema. Su expresión matemática viene dada por:

$$x = e^{-\epsilon t} (c \text{ sen } \omega_a \cdot t + D \text{ cos } \omega_a \cdot t) + \frac{\omega^2 \cdot \rho}{\sqrt{4 \epsilon^2 p^2 + (\omega^2 - p^2)^2}} \text{ sen } (pt + \phi)$$

de forma que, bajo el régimen permanente, adquiere la forma:

$$x_p = \frac{\omega^2 \cdot \rho}{\sqrt{4 \epsilon^2 p^2 + (\omega^2 - p^2)^2}} \text{ sen } (pt + \phi)$$

siendo:

$$\epsilon = \frac{c}{2m} \rightarrow \text{factor de amortiguamiento};$$

$$\omega^2 = k/m \rightarrow \text{frecuencia angular natural (pulsación propia)};$$

$$\xi = \epsilon/\omega \rightarrow \text{factor de amortiguamiento integral};$$

$$\omega_a = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \rightarrow \text{frecuencia angular amortiguada (pulsación amortiguada)};$$

$$p \rightarrow \text{frecuencia angular de } F(t), \text{ excitadora};$$

$F_0 = 4 \rho$  → fuerza inicial de excitación exterior al sistema;

$r = p/\omega$  → razón frecuencial (excitación/pulsación);

$\rho$  → deflexión inicial;

y por tanto:

$$x_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{4 \xi^2 r^2 + (1 - r^2)^2}} \cdot \text{sen}(pt + \phi)$$

haciendo  $F_0 = y_0 \sqrt{c^2 p^2 + k^2}$ , la ecuación de movimiento en régimen permanente será:

$$x_p = \frac{y_0/k \sqrt{c^2 p^2 + k^2}}{\sqrt{4 \xi^2 r^2 + (1 - r^2)^2}} \cdot \text{sen}(pt + \phi)$$

y, en consecuencia, su amplitud será:

$$A = \frac{y_0/k \sqrt{c^2 p^2 + k^2}}{\sqrt{4 \xi^2 r^2 + (1 - r^2)^2}}$$

de forma que la reducción de las amplitudes base-sistema vendrá dada por la expresión:

$$\frac{A}{y_0} = \frac{\sqrt{1 + 4 \xi^2 r^2}}{\sqrt{4 \xi^2 r^2 + (1 - r^2)^2}} = \text{TR}$$

que representa el concepto de TRANSMISIBILIDAD o decremento vibratorio.

Cuando  $\xi = 0$  se nos transforma en:

$$\text{TR} = \frac{1}{1 - r^2} = \frac{1}{|r^2 - 1|}$$

Este caso no interesa, sin embargo, desde el punto de vista del decremento vibratorio, puesto que el amortiguamiento del sistema es un factor esencial para la no resonancia de éste. Si representamos gráficamente la transmisibilidad en función de la razón frecuencial, tal como indicamos en la figura 2, pueden sacarse las siguientes conclusiones:

$$r > \sqrt{2} \rightarrow \text{TR} \leq 1$$

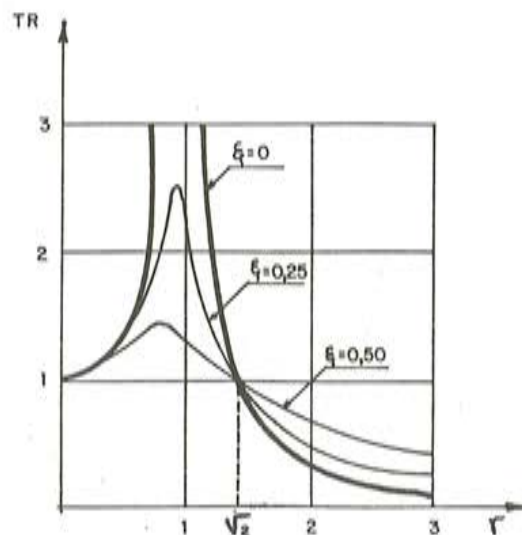


Fig. 2.

En este intervalo la presencia de amortiguación ( $\xi \neq 0$ ) juega un papel desfavorable, puesto que las curvas amortiguadas se encuentran por encima de las no amortiguadas. El amortiguamiento, en efecto, aunque necesario para estabilizar las condiciones transitorias o evitar excesivas amplitudes de resonancia, disminuye un tanto la efectividad del montaje aislante.

$$r \simeq 1 \rightarrow TR = \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2}}{2\xi}$$

En el intervalo  $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ , la fuerza transmitida a la base es mayor que la propia fuerza perturbadora. La influencia de  $\xi$  empieza a ser decisiva puesto que, en resonancia ( $r = 1$ ), hace que la TR tome valores limitados, según los grados de amortiguamiento.

$$r \leq \sqrt{2} \rightarrow TR \geq 1$$

En este intervalo las curvas amortiguadas van por debajo de la curva  $\xi = 0$ . Ello indica la acción favorable del factor  $\xi$ .

En esencia, los instrumentos destinados a medir vibraciones (véase Fig. 3) se componen de un sistema masa-resorte-base, análogo al visto al estudiar el problema de la transmisibilidad. La base está en contacto con el cuerpo vibrante cuyo movimiento se desea medir. El movimiento relativo entre masa y base, se registra gráficamente mediante un registro desplazable en función del tiempo. Cuando la masa del sistema registrador es grande en frecuencia natural baja, comparada con la frecuencia de excitación, el aparato registrador se llama VIBROMETRO. En caso contrario (masa pequeña, frecuencia de vibración elevada con relación a la excitación) recibe el nombre de ACELEROMETRO. TORSIOMETROS Y SISMOGRAFOS son tipos comunes de aparatos destinados a medir vibraciones.

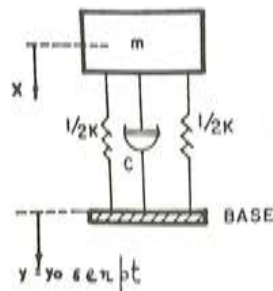


Fig. 3.

Partiendo de un símil análogo al empleado para estudiar la transmisión de vibraciones, es evidente que la ecuación de movimiento será, en este caso, análoga a aquella:

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + K(x - y) = 0$$

Si suponemos que la base se halla solidariamente unida al elemento vibrante y tomando  $\underline{x}$  como desplazamiento absoluto de la masa del sistema, la salida del instrumento será proporcional a  $z = (x - y)$ , puesto que tal salida depende del movimiento relativo masa-base. Este movimiento relativo puede detectarse por medios mecánicos, eléctricos u ópticos. La ecuación representativa de este tipo de mociones tomará, evidentemente, la forma:

$$\ddot{z} + \frac{c}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = y_0 p^2 \sin pt$$

ecuación análoga a la del movimiento forzado amortiguado para sistemas con un solo grado de libertad. La respuesta del estado estacionario es por tanto:

$$z_p = \frac{y_0 \cdot r^2}{\sqrt{4\xi^2 r^2 + (1 - r^2)^2}} \cdot \sin(pt + \phi)$$

Donde:

$$r = \frac{p}{\omega} \quad \rightarrow \text{razón frecuencial;}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \text{frecuencia angular natural de la vibración recogida;}$$

$$\xi = \frac{c}{\omega} = \frac{c}{2m\omega} \quad \rightarrow \text{factor de amortiguamiento integral;}$$

$$p \quad \rightarrow \text{frecuencia de la vibración desconocida (excitación);}$$

y la amplitud del movimiento relativo de la masa, viene dada por:

$$A = \frac{y_0 r^2}{\sqrt{4 \xi^2 r^2 + (1 - r^2)^2}} \quad \text{con fase } \phi = \arctg \frac{2 \xi r}{1 - r^2}$$

Si suponemos que  $A \simeq 1$ ,  $\phi \simeq 0$  el instrumento leerá directamente el desplazamiento de la base. Para ello es necesario que  $r$  sea grande, lo cual puede estudiarse en el adjunto gráfico de respuestas  $A = f(r)$  (véase Fig. 4).

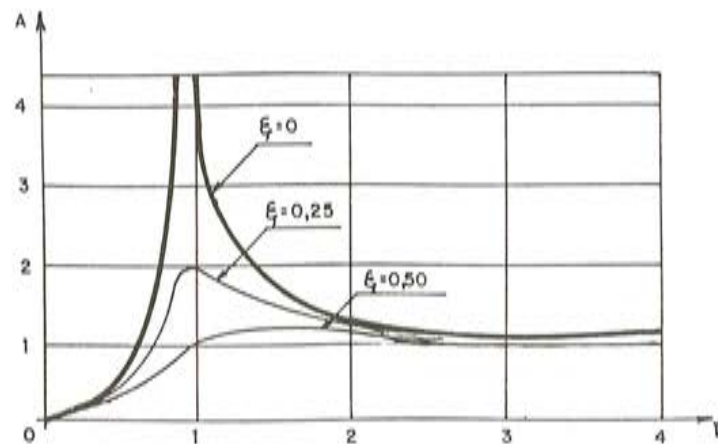


Fig. 4.

Pero para que  $r = p/\omega$  adquiera valores grandes, es preciso que la frecuencia angular de la vibración registrada,  $\omega^2 = K/m$ , sea pequeña; lo que implica una masa grande, o una constante elástica del resorte, pequeña. En estas condiciones ( $r = \text{grande}$ ), la expresión del movimiento en régimen estacionario vendrá dada por:

$$z_p = y_0 \text{ sen } (pt + \phi); \text{ siendo por tanto } A = y_0$$

que junto con el valor ya conocido de:

$$\phi = \arctg \frac{2 \xi r}{1 - r^2} = \arctg \frac{2 \xi/r}{\frac{1}{r^2} - 1} = \arctg 0 = 2 \pi$$

indica que los dos movimientos están desfasados  $2 \pi$ .

Este principio se emplea básicamente en los VIBROMETROS, con el fin de medir las amplitudes de vibración transmitidas. Debido a que la frecuencia natural del aparato se elige de manera que tenga un valor pequeño, la amplitud de vibración impresa es igual al movimiento relativo captado por la base, con una diferencia de fase  $= 2 \pi$ .

Consideramos seguidamente la región del diagrama en la cual  $r =$  pequeño,  $\phi \simeq 0$ .

Si  $r = \frac{p}{\omega} =$  pequeño, es preciso que  $\omega^2 = k/m$  sea grande, y por tanto  $m =$  pequeña o  $k =$  grande. En lugar de resortes blandos se utilizarán resortes muy rígidos, con el fin de obtener una frecuencia natural del sistema muy elevada. En estas condiciones:

$$z = y_0 \cdot r^2 \cdot \sin(\omega t + \phi) = y_0 \cdot p^2 / \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi) \rightarrow A = y_0 \cdot r^2$$

pero  $y_0 \cdot p^2$  es la amplitud de la aceleración, cuando la base vibra con un movimiento del tipo  $y = y_0 \sin \omega t$ . Luego el movimiento relativo es proporcional a la aceleración y la salida del instrumento representa una medida de ésta. Este es el principio usado por los acelerómetros.

## REFERENCIAS

1. Dimarogonas, A.D. "Vibration Engineering".
2. Hartog, J.P.D. "Mecánica de las Vibraciones".
3. Harris, C.M. "Shock and Vibration Handbook".
4. Housner, G.W. y Hudson, D.E. "Mecánica aplicada y dinámica".
5. Lafita Babio, F. "Introducción a la teoría de Vibraciones Mecánicas".
6. Meirovitch. "Methods of Analytical Dynamics".
7. Rocard, Y. "Dynamique générale des vibrations".
8. Thomson, W.T. "Theory of vibration with applications".

# Aplicación del método de la matriz flexibilidad a la determinación de las frecuencias angulares naturales en las vibraciones mecánicas de sistemas multigrados

Manuel Vieco  
Dr. Ingeniero Industrial

## INTRODUCCION

Se inicia el análisis con la obtención de las ecuaciones canónicas de un sistema linealmente elástico multigrado, al que se aplica un impulso inicial. A partir de dicho sistema de ecuaciones e introduciendo las condiciones para producir el fenómeno oscilatorio, se llega a la ecuación frecuencial de la que obtenemos las pulsaciones propias y la fundamental. Introduciendo la notación matricial, obtenemos las ecuaciones canónicas en función de la matriz dinámica, de flexibilidad, de inercia y de los vectores columna de amplitudes y modal. La respuesta o espectro de valores propios se obtiene a partir de la ecuación característica obtenida, introduciendo la condición de que los vectores columna de amplitudes o modal sean diferentes de cero. Se establecen las matrices espectral y modal, cuyas expresiones dependen únicamente de las características propias del sistema elástico, es decir de la distribución de las masas y rigideces del mismo.

A continuación, se parte de un modelo análogo al visto hasta ahora, solicitado por un sistema de fuerzas exteriores periódicas, a partir del cual se obtienen las ecuaciones canónicas del sistema oscilante. Este sistema de ecuaciones se expresa en función de las máximas fuerzas de inercia; lo que nos permite definir los coeficientes de influencia modificados. Se calculan las fuerzas de inercia, y a partir de la ecuación matricial que nos permite su cálculo, estudiamos las condiciones necesarias para que el sistema tenga soluciones finitas y las posibilidades de resonancia. Halladas las fuerzas de inercia, se determinan las máximas fuerzas estáticas equivalentes al efecto dinámico y los máximos desplazamientos correspondientes.

\* \* \*

Si consideramos un sistema linealmente elástico con "n" grados de libertad, tal como el representado en el esquema de la figura 1 y le aplicamos un impulso inicial vertical, en el sistema tienen lugar vibraciones libres transversales; pero sólo en el caso de pequeñas oscilaciones, puede considerarse que las masas se desplazan en el plano vertical, siendo nulos los grados de libertad horizontal.





que representan las pulsaciones propias o frecuencias angulares naturales del sistema. Resulta tedioso establecer la ecuación característica a partir de las ecuaciones canónicas. Por ello, y con el fin de facilitar el cálculo de las  $\omega_r$ , suele introducirse el cambio:

$$\varphi = \frac{1}{\omega^2}$$

que origina un nuevo valor propio,  $\varphi$ , con lo cual la ecuación característica queda reducida a un polinomio de grado  $n$ :

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + a_2 \varphi^{n-2} + \dots + a_{n-1} \varphi + a_n = 0$$

Una vez calculados los valores  $\varphi$ , la obtención de las  $\omega$  es inmediata. El más pequeño de estos  $\omega$  recibe el nombre de pulsación propia fundamental,  $\omega_1$ , de tal forma que:

$$\omega_1 < \omega_r$$

siendo  $\omega_r$  toda pulsación de orden superior al primero.

Para frecuencias fundamentales y de orden superior, se cumple:

$$\left[ f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \right] < \left[ f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} \right]$$

en tanto que para períodos fundamentales superiores, la desigualdad se torna en sentido contrario:

$$\left[ T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \right] > \left[ T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} \right]$$

como resulta lógico.

Hasta aquí, el desarrollo físico-matemático nos conduce a soluciones similares a las que se pueden obtener por el método analítico. Empleando la notación matricial, las ecuaciones canónicas toman la forma:

$$(\omega^2 [D] [M] - [I]) \{A\} = \{0\}$$

o lo que es lo mismo, en función del valor propio  $\varphi = \frac{1}{\omega^2}$ :

$$([D] [M] - \varphi [I]) \{A\} = \{0\}$$

o bien, en función de los desplazamientos relativos de los modos de vibración  $X_i^t$ :

$$([D] [M] - \varphi [I]) \{X\} = \{0\}$$

o bien:

$$[C] \{X\} = \varphi \{X\}$$

donde:

[C] – matriz dinámica formada por los productos de las matrices de flexibilidad e inercia;

[D] – matriz flexibilidad formada por los coeficientes de influencia o coeficiente de flexibilidad;

[M] – matriz inercia o matriz de masas;

[I] – matriz unidad o matriz diagonal;

{A} – vector columna de amplitudes;

{X} – vector columna modal o matriz de desplazamientos relativos.

La respuesta, o espectro de valores propios, se obtiene a partir de la condición de que, en las ecuaciones conónicas, los vectores columnas de amplitudes o modal sean diferentes de cero; es decir, que el sistema esté animado de vibraciones libres. Para ello es necesario que:

$$\Delta(\omega) = |\omega^2 [D] [M] - [I]| = 0$$

o bien:

$$\Delta(\varphi) = |[D] [M] - \varphi [I]| = 0 \Rightarrow \Delta(\varphi) = |[C] - \varphi [I]| = 0$$

ecuación característica, de la que se obtienen los valores propios  $\omega_r$ , que substituidos en:

$$([D] [M] - \varphi [I]) \{X\}_r = \{0\}$$

nos determinará la configuración del sistema para los modos  $r = 1, 2 \dots n$ .

Además de la citada matriz dinámica, existen otras dos, llamadas espectral y modal, que dependen únicamente de las características propias del sistema elástico; es decir, de la distribución de masas y rigideces del mismo, y cuyas expresiones vienen dadas por:

Matriz espectral:

$$[\Omega] = \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_n \end{vmatrix}$$

que representa la matriz diagonal de frecuencias angulares naturales de orden (n, n), y la matriz modal:

$$[X] = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nj} & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

o matriz cuadrada de orden (n, n), constituida de submatrices columnas modales. Ambas matrices, espectral y modal, son matrices asociadas y sus elementos ( $\omega_i, X_{ij}$ ), lo mismo que en el caso de la matriz dinámica, se determinan independientemente de la fuerza perturbadora excitatriz (exterior al sistema). Son invariables, por tanto, en todo sistema elástico animado o no de excitación exterior.

Si partimos de un modelo análogo al visto a la hora de estudiar las vibraciones libres por el método de la matriz flexibilidad y lo suponemos solicitado por un sistema de fuerzas ex-

teriores periódicas del tipo  $F_j = F_{j0} \sin pt$ , con un punto de aplicación cualquiera y la misma pulsación en todas ellas, en un determinado momento del proceso cinemático, los desplazamientos experimentados por éstas vendrán dados por  $X_1, X_2 \dots X_i \dots X_n$ , tal como puede verse en el esquema de la figura 2.

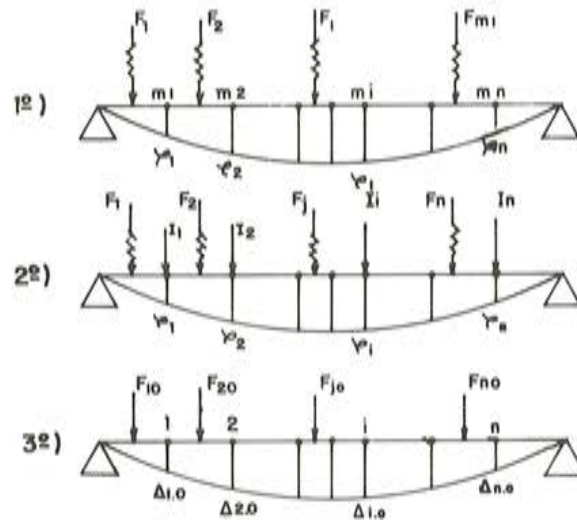


Fig. 2.

En ese instante, es evidente que las masas puntuales localizadas en los grados de libertad generan unas fuerzas de inercia,  $I_1 = -m_1 \ddot{x}_1 \dots I_i = -m_i \ddot{x}_i \dots I_n = -m_n \ddot{x}_n$ , de forma tal que el diagrama del sólido en equilibrio vendrá dado por el segundo gráfico representado. Expresando los desplazamientos en la dirección de los grados de libertad:

$$X_1, X_2 \dots X_i \dots X_n$$

en función de los coeficientes de influencia, y sustituyendo las fuerzas de inercia por sus respectivos valores, obtenemos las ecuaciones canónicas del sistema oscilante:

$$\begin{aligned} (m_1 \delta_{11} p^2 - 1) x_1 + \dots + m_1 \delta_{1i} p^2 x_i + \dots + m_n \delta_{1n} p^2 x_n + \Delta_{1,0} &= 0 \\ m_1 \delta_{21} p^2 x_1 + \dots + m_i \delta_{2i} p^2 x_i + \dots + m_n \delta_{2n} p^2 x_n + \Delta_{2,0} &= 0 \\ \dots &\dots \\ m_1 \delta_{i1} p^2 x_1 + \dots + (m_i \delta_{ii} p^2 - 1) x_i + \dots + m_n \delta_{in} p^2 x_n + \Delta_{i,0} &= 0 \\ \dots &\dots \\ m_1 \delta_{n1} p^2 x_1 + \dots + m_i \delta_{ni} p^2 x_i + \dots + (m_n \delta_{nn} p^2 - 1) x_n + \Delta_{n,0} &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\Delta_{j0}$  representa el desplazamiento estático acaecido en  $i$  (gráfico tercero) debido a la acción simultánea de las fuerzas exteriores. Estas fuerzas exteriores pueden suponerse aplicadas en las propias masas  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots n$ ) o bien directamente sobre el soporte que las *liga* (de ahí que hayamos tomado  $j = 1, 2 \dots m$ , siendo en general  $m \neq n$ ). Si el sistema de ecuaciones canónicas lo expresamos en función de las máximas fuerzas de inercia susceptibles de aparecer sobre las masas puntuales, tomará la forma:

$$\delta_{11}^* I_1 + \delta_{12} I_2 + \dots + \delta_{1i} I_i + \dots + \delta_{1n} I_n + \Delta_{1,0} = 0$$

$$\delta_{21} I_1 + \delta_{22}^* I_2 + \dots + \delta_{2i} I_i + \dots + \delta_{2n} I_n + \Delta_{2,0} = 0$$

.....

$$\delta_{i1} I_1 + \delta_{i2} I_2 + \dots + \delta_{ii}^* I_i + \dots + \delta_{in} I_n + \Delta_{i,0} = 0$$

.....

$$\delta_{n1} I_1 + \delta_{n2} I_2 + \dots + \delta_{ni} I_i + \dots + \delta_{nn}^* I_n + \Delta_{n,0} = 0$$

en donde  $\delta_{ij}^*$  representa, en este caso, todo coeficiente de influencia definido como desplazamiento del punto  $i$ . Cuando sobre dicho punto se aplica una fuerza de valor  $(1 - \frac{1}{m_i \delta_{ii} p^2}) I_i$ .

reciben el nombre de COEFICIENTES DE INFLUENCIA MODIFICADOS. En forma matricial compacta, los sistemas de ecuaciones planteados vendrán expresados por:

$$(p^2 [D] [M] - [I]) \{X\} + \{\Delta\} = \{0\} \text{ o bien por:}$$

$$p^2 [D] [M] \{X\} - [I] \{X\} + \{\Delta\} = \{0\} \text{ o bien por:}$$

$$\{X\} = [D] \{J\} + \{\Delta\}$$

y por:  $[D^*] \{J\} + \{\Delta\} = \{0\}$

donde:

$p$  – pulsación o frecuencia angular de la fuerza excitadora;

$[M]$  – matriz inercia;

$[I]$  – matriz unidad;

$[D]$  – matriz flexibilidad;

$\{X\}$  – vector columna modal;

$\{\Delta\}$  – vector columna de los desplazamientos estáticos;

$[D^*]$  – matriz de flexibilidad MODIFICADA, obtenida como resultado de sustituir los términos  $\delta_{ii}$  por los  $\delta_{ii}^* = 1 - \frac{1}{m_i p^2}$  en la diagonal principal de  $[D]$ ;

$\{j\}$  – vector columna de fuerzas de inercia o matriz de fuerzas dinámicas suplementarias al aplicar la excitación exterior al sistema.

Podemos calcular las fuerzas de inercia, aplicando Cramer al sistema de ecuaciones. En efecto:

$$I_i = - \frac{|D_i^*|}{|D^*|}$$

siendo:

$|D^*|$  – determinante principal del sistema formado por los coeficientes de  $I_i$ ;

$|D_i^*|$  – determinante obtenido a partir del anterior con sólo sustituir la columna  $i$  por el término independiente  $\Delta_{i0}$ .

Para que el sistema tenga soluciones finitas es preciso que  $|D^*| \neq 0$  puesto que, en caso contrario, las fuerzas de inercia  $I_i \rightarrow \infty$ . Este segundo caso se presenta cuando la pulsación  $p$  coincide, en valor absoluto, con alguna de las pulsaciones propias del sistema oscilante ( $p = \omega_i$ ).

Entonces:

$$|D^*| = \Delta(\omega) = 0$$

coincide con la ecuación característica de las vibraciones libres y aparece el fenómeno de RESONANCIA. Existen, por tanto,  $n$  posibilidades de resonancia:

$$\begin{aligned} p &= \omega_1 \\ p &= \omega_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p &= \omega_j \\ &\dots\dots\dots \\ p &= \omega_n \end{aligned}$$

que gráficamente vienen representadas en la figura 3 adjunta (resonancia múltiple).

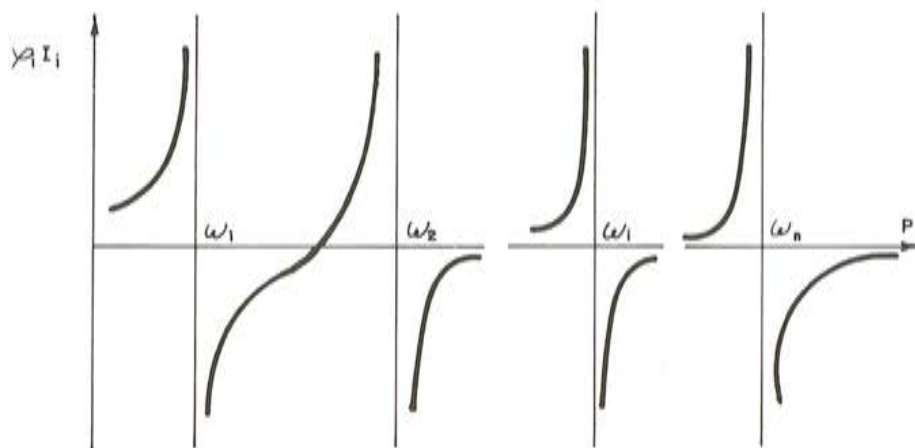


Fig. 3.

Si el sistema elástico tiene amortiguamiento, los máximos resultan notablemente disminuidos, estando este decremento en función directa del grado de amortiguación que el sistema posea; tal como se estudia en las vibraciones forzadas con amortiguamiento, para sistemas con un grado de libertad. En el cálculo práctico de estructuras se procede, sin embargo, a la inversa; de forma que se precisa calcular previamente el espectro de pulsaciones propias del sistema oscilante, para comprobar que la zona en que se sitúa la pulsación  $p$  no ofrece peligro de resonancia para la estructura al ser ésta solicitada dinámicamente.

En caso contrario, es susceptible de presentarse una superposición de efectos, como consecuencia de la acción conjunta de las fuerzas exteriores y las de inercia propias del sistema.

Puesto que para que el problema admita soluciones finitas es preciso que el determinante principal sea  $\neq 0$ , es evidente que, para que tal condición se lleve a efecto, deberá cumplirse a su vez que:

$$|D^*| = |[D] - \frac{1}{p^2} [M]| \neq 0$$

o bien, posmultiplicando por  $[M]$ :

$$|p^2 [D] [M] - [I]| \neq 0$$

En caso contrario, sabemos que los elementos de  $\{X\}$  y  $\{j\}$  tenderán a infinito.

Ahora bien; en base a estos razonamientos, y una vez halladas las fuerzas de inercia de cada nivel, las máximas fuerzas estáticas equivalentes al efecto dinámico, vendrán expresadas mediante:

$$F'_i = F_{i,0} + I_i \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

y los máximos desplazamientos a que dan lugar serán, a su vez:

$$x_i = \sum_{j=1}^{j=n} F'_j \delta_{ij} \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

## REFERENCIAS

1. Dimarogenas, A.D. "Vibration Engineering".
2. Hartog, P.P.D. "Mecánica de las vibraciones".
3. Harris, C.M. "Shock and Vibration Handbook".
4. Housner, G.W. y Hudson, D.E. "Mecánica aplicada y dinámica".
5. Lafita Babio, F. "Introducción a la teoría de Vibraciones Mecánicas".
6. Meirovitch. "Methods of Analytical Dynamics".
7. Rocard, Y. "Dynamique générale des vibrations".
8. Thomson, W.T. "Theory of vibration with applications".

## Esfuerzo rasante en piezas compuestas. II

José Joaquín Vallés  
Profesor Titular  
Universidad Politécnica de Valencia

### I. INTRODUCCION

En un artículo anterior (\*), poníamos de manifiesto la necesidad de ensayos en viguetas semiresistentes (semiviguetas), al objeto de estudiar su capacidad a esfuerzo rasante.

También se daba un breve repaso a las variables más influyentes en la resistencia al deslizamiento en la superficie de contacto entre dos hormigones distintos en calidad y edad.

Finalmente, se planteaba lo que, en nuestra opinión, constituía el primer problema que hay que resolver en la materialización de dichos ensayos: la ubicación de las cargas.

En el presente trabajo se presentan los resultados obtenidos llevando hasta roturas piezas compuestas, idénticas, sometidas a dos cargas simétricas, situadas en un caso a tres cantos de los apoyos, y en otro a cinco cantos.

### II. MATERIAL DISPONIBLE Y CARACTERISTICAS

#### II.1. Semiviguetas

Las semiviguetas fueron ejecutadas en taller, por el procedimiento de armaduras previamente tesas y ancladas por adherencia. Los alambres se tesaron, por capas, antes del hormigonado. A continuación se dispusieron los moldes, a base de encofrados metálicos, y se hormigonó la pieza, compactándola mediante vibrado efectuado con vibradores externos acoplados a los moldes.

En nuestro caso, el hormigón permaneció siete días en los moldes, soltándose seguidamente los hilos de los dispositivos de retención. Los esfuerzos de los alambres se transmiten así al hormigón, por adherencia.

La sección recta de las semiviguetas utilizadas se representa en la figura 1.

(\*) Véase "Hormigón y Acero" N° 159, 2º trimestre 1986, pág. 141.



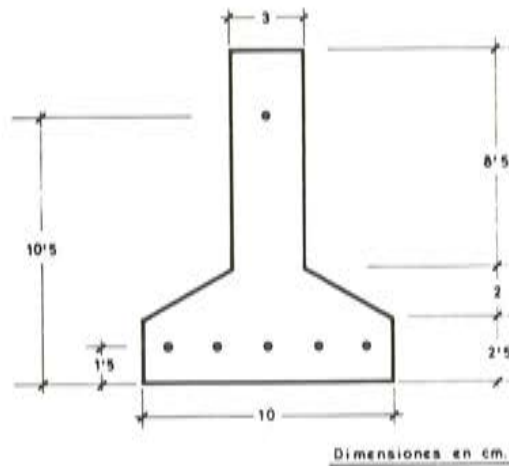


Fig. 1.

Dos han sido las razones que nos han llevado a adoptar este perfil:

- La pequeña anchura de la cara superior (3 cm); lo que determinará perímetros de contacto menores y, en consecuencia, tensiones rasantes mayores.
- El tipo de fabricación en moldes, conlleva el que las superficies laterales del alma sean lisas, buscando el mismo objetivo que en el punto anterior, es decir, la situación más desfavorable por la transmisión del rasante.

## II.2. FABRICACION DE LOS ELEMENTOS COMPUESTOS

Con objeto de confeccionar una banda de forjado con las dimensiones que tendrá en obra, se adosaron a cada semivigueta las dos correspondientes filas de semi-bovedillas, hormigonándose el conjunto con un espesor de 3 cm de capa de compresión, obteniendo así un elemento de 19 cm de altura y 70 cm de anchura de cabeza hormigonada. (Figura 2).

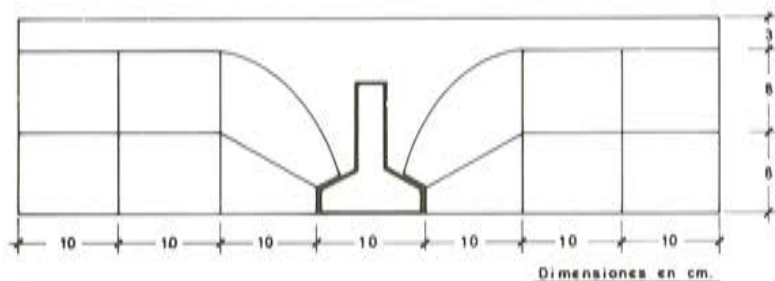


Fig. 2.

El vertido del hormigón in situ se realizó cuando la edad del hormigón de la pieza pretensada era de 28 días. El ensayo de los elementos se llevó a cabo a los 21 días de la fabricación de los mismos.

Antes del vertido del hormigón in situ se procedió al regado, con agua a presión, de las semiviguetas y bovedillas, con objeto de dejar limpias las superficies. El hormigonado no se realizó hasta que desaparecieron los últimos vestigios de agua.

En total, se prepararon seis elementos, de 2,80 m de longitud, con una armadura activa de  $6 \phi 3,5$  de acero tipo AH 1770-R5.

Las características resistentes de dichos elementos eran:

$$M_u = 1.228 \text{ m.Kp};$$

$$M_l = 858 \text{ m.Kp};$$

$$M_{II} = 1.020 \text{ m.Kp};$$

$$V_{u0} = 917 \text{ Kp}$$

Con estas características, se intenta que se produzca un agotamiento por cortante, anterior al agotamiento por flexión.

### II.3. Instrumentación

Durante los ensayos se midieron:

- a) Las flechas tomadas por las piezas, en el centro del vano.
- b) Los deslizamientos entre los dos hormigones, a un cuarto de la luz.

Si bien la máquina de ensayo disponía de una reglilla en la que se podían apreciar medios milímetros, hasta la carga correspondiente al cortante último se han utilizado comparadores que permitan leer centésimas de mm.

Estos comparadores, sujetos en una plataforma, se situaron con su émbolo aplicado en la parte inferior de la semivigueta, en el centro del vano.

Para medir deslizamientos entre el hormigón in situ y el prefabricado, se colocó un comparador al cuarto de la luz de la pieza. Esta ubicación se justifica por los resultados de ensayos anteriores (HANSON, SAEMANN y WASHA, etc.) que demuestran cómo en dicha zona se producen los mayores deslizamientos.

Una varilla, alojada en un taladro practicado lateralmente en el extremo superior del alma de la semivigueta, tiene su otro extremo roscado para poder fijar el comparador.

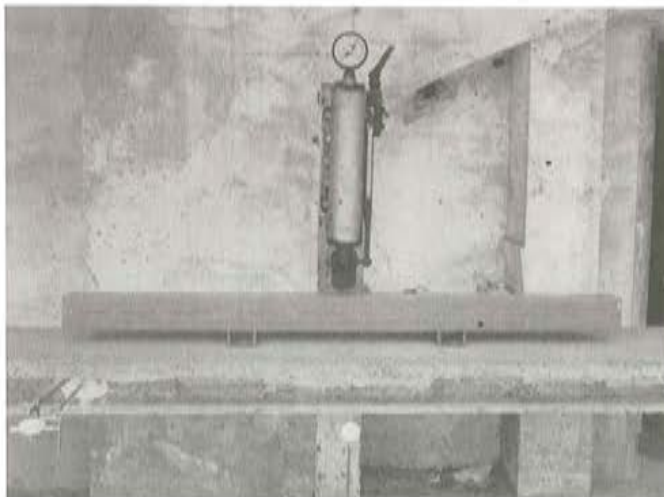


Foto 1. Dispositivo de ensayo.

El émbolo de éste hace tope con una pletina dispuesta, en la parte de hormigón in situ, en contacto con la cara superior de la semivigueta.

Puesto que en el ensayo existen tres superficies de contacto, aparecía un problema no existente en las experiencias en las que la unión se reduce a una sola cara: la varilla empotrada en el hormigón prefabricado, se encontraba rodeada de hormigón in situ; lo que po-

día invalidar totalmente los resultados. Esto se resolvió mediante la colocación de una placa de poliestireno expandido, de 1 cm de espesor, en la cara lateral correspondiente de la semivigueta, que impedía el hormigonado de dicha cara, quedando el resto de la sección exactamente igual que en toda la longitud restante de la pieza.

La varilla y la pletina se encontraban en el mismo plano vertical. Las deformaciones de flexión se eliminaban así al máximo, puesto que ambos elementos arrancaban prácticamente a la misma altura.

Sin embargo, es posible que la fisuración haya introducido errores en las medidas de los deslizamientos, de acuerdo con la bibliografía consultada.

#### II.4. Procedimiento de ensayo

Las cargas se aplicaron mediante una prensa hidráulica de 10 toneladas de capacidad. Con objeto de materializar dos cargas, se dispuso, entre el pistón de la prensa y el elemento que se iba a ensayar, una viga metálica constituida por 2 UPN-80, soldados por las alas, que apoyaba en el hormigón por intermedio de dos perfiles UPN-10, móviles (para variar la posición de las cargas), colocados perpendicularmente al eje longitudinal de simetría de la viga.

Estos perfiles producen sendas cargas, distribuidas uniformemente sobre una anchura igual a la del nervio de la semivigueta.

El ensayo se realizó sobre un vano simplemente apoyado, aumentando paulatinamente las cargas, hasta determinados escalones, al llegar a los cuales se medían flechas y deslizamientos. A continuación, se descargaba y se medían las deformaciones remanentes.

Los escalones de carga se adoptaron tomando como base el cortante último teórico,  $V_{uo}$ , y fueron:

- $0,40 \cdot V_{uo}$
- $0,60 \cdot V_{uo}$
- $0,80 \cdot V_{uo}$
- $1,00 \cdot V_{uo}$
- $1,20 \cdot V_{uo}$
- Rotura

El esquema del ensayo era el indicado en la figura 3.

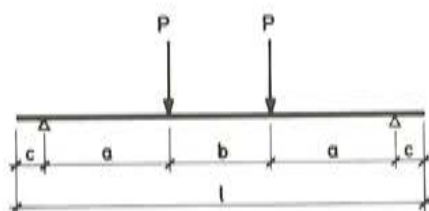


Fig. 3.

La longitud "c" se justifica por la necesidad de evitar fallos prematuros de anclaje. Se ha tomado  $c = 10$  cm, longitud que resulta, tanto de considerar que debe valer medio canto, como de que no ha de ser inferior a  $30 \phi$  ( $\phi =$  diámetro mayor de la armadura activa).

La distancia "a", en tres elementos era igual a 60 cm; mientras que en los otros tres valía 100 cm.

En resumen, se tenía:

| <i>Elementos</i> | <i>Longitud (m)</i> | <i>a (m)</i> | <i>b (m)</i> | <i>c (m)</i> |
|------------------|---------------------|--------------|--------------|--------------|
| Serie B-1        | 2,80                | 0,60         | 1,40         | 0,10         |
| Serie B-2        | 2,80                | 1,00         | 0,60         | 0,10         |

### III. RESULTADOS

A continuación, se indican las medidas medias registradas en cada una de las dos series, así como las observaciones más sobresalientes.

| <b>Serie B-1</b>                                                           |                                                                                                                                      |                      |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| <i>Medidas carga</i>                                                       | <i>Observaciones</i>                                                                                                                 | <i>Descarga</i>      |
| 0,40 . $V_{uo} = 370 K_p$ .<br>Deslizamiento 0 mm.<br>Flecha 1,55 mm.      |                                                                                                                                      | 0 mm.<br>0,81 mm.    |
| 0,60 . $V_{uo} = 550 K_p$ .<br>Deslizamiento 0<br>Flecha 2,35 mm.          | Para $P = 450 K_p$ , se observan "desgranamientos" en apoyos                                                                         | 0 mm.<br>1,32 mm.    |
| 0,80 . $V_{uo} = 740 K_p$ .<br>Deslizamiento 0,01 mm.<br>Flecha 3,07 mm.   |                                                                                                                                      | 0,01 mm.<br>1,55 mm. |
| $V_{uo} = 920 K_p$ .<br>Deslizamiento 0,15 mm.<br>Flecha 9,00 mm.          | Para $P = 850 K_p$ , se produce un fuerte "chasquido", observándose la casi rotura de un apoyo. No se observa fisuración de flexión. | 0,15 mm.<br>5,00 mm. |
| 1,20 . $V_{uo} = 1.100 K_p$ .<br>Deslizamiento 0,16 mm.<br>Flecha 10,0 mm. |                                                                                                                                      |                      |
| Rotura = 2.000 $K_p$ .                                                     | Rotura de CORTANTE-COMPRESION<br>Para $P = 1.700 K_p$ , se observan las primeras fisuras de flexión.                                 |                      |



Foto 2. Rotura de un elemento de la serie B-1.

### Serie B-2

| <i>Medidas carga</i>                                                                          | <i>Observaciones</i>                                                                                                   | <i>Descarga</i>      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 0,40 · V <sub>uo</sub> = 370 K <sub>p</sub> .<br>Deslizamiento 0 mm.<br>Flecha 1,18 mm.       |                                                                                                                        | 0 mm.<br>0,17 mm.    |
| 0,60 · V <sub>uo</sub> = 550 K <sub>p</sub> .<br>Deslizamiento 0,01 mm.<br>Flecha 1,72 mm.    |                                                                                                                        | 0,01 mm.<br>0,47 mm. |
| 0,80 · V <sub>uo</sub> = 740 K <sub>p</sub> .<br>Deslizamiento 0,01 mm.<br>Flecha 2,68 mm.    |                                                                                                                        | 0,01 mm.<br>0,53 mm. |
| V <sub>uo</sub> = 920 K <sub>p</sub> .<br>Deslizamiento 0,02 mm.<br>Flecha 5,23 mm.           | Fisuras visibles de flexión.                                                                                           | 0,02 mm.<br>0,73 mm. |
| 1,20 · V <sub>uo</sub> = 1.100 K <sub>p</sub> .<br>Deslizamiento 0,03 mm.<br>Flecha 12,00 mm. | Fisuras de flexión más numerosas y anchas. No se observada nada en los apoyos.                                         | 0,03 mm.             |
| Rotura = 1.900 K <sub>p</sub> .                                                               | Rotura de FLEXO-TRACCION. Aproximadamente en el centro de la luz, se produce la rotura de las armaduras de pretensado. |                      |

Para  $P = 1.500 K_p$ , las fisuras de flexión se inclinan hacia los puntos de aplicación de las cargas, afectando de lleno al hormigón in situ.

La primera fisura visible en apoyo, se produjo bajo una carga de  $1.250 K_p$ , aproximadamente.

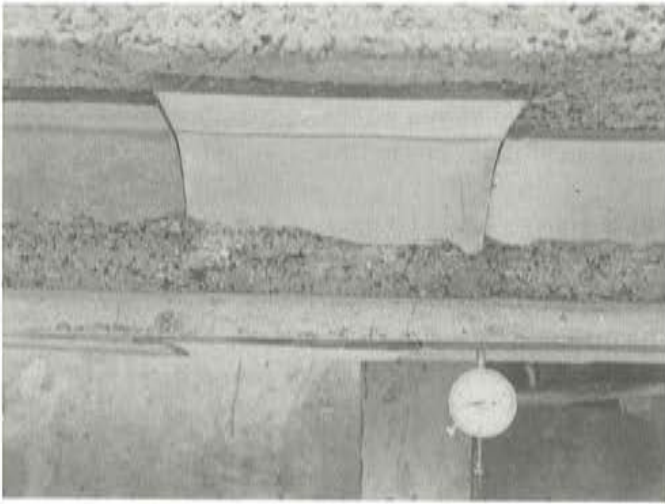


Foto 3. Fisuración de un elemento de la serie B-2.



Foto 4-a

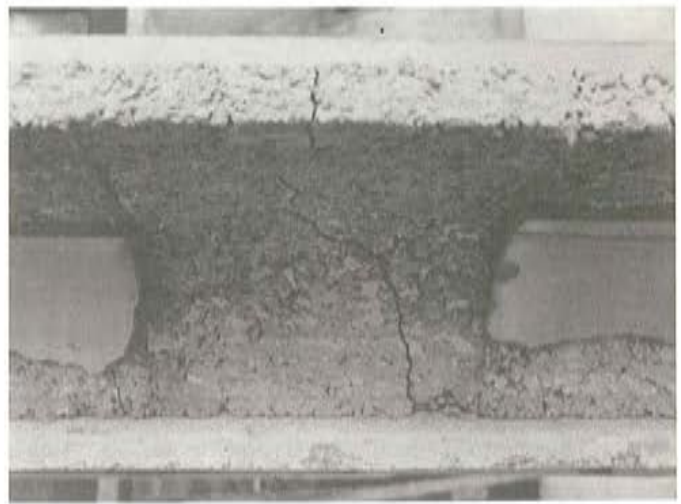


Foto 4-b

Detalles de fisuras en vano de cortante, en elementos de la serie B-2.

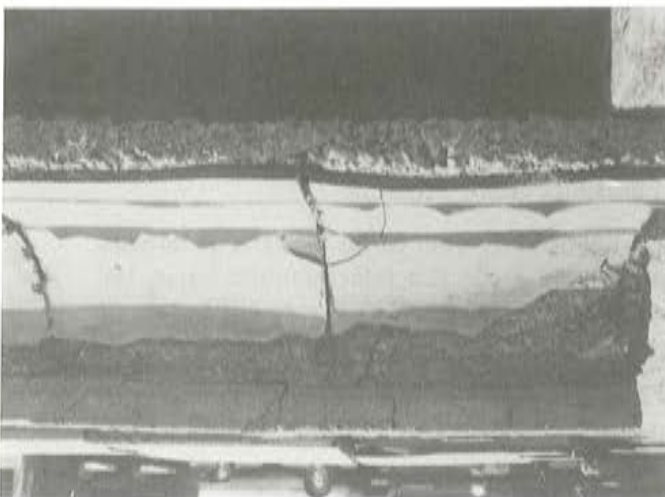


Foto 5. Rotura de un elemento de la serie B-2.

## IV. DISCUSION

En los elementos de la serie B-1 (relación  $a/d = 3$ ) se observaron muy pronto fisuras en la zona de apoyos. Cuando la carga estaba cercana a  $V_{uo}$ , un apoyo estaba ya prácticamente "roto", sin que se viesen fisuras de flexión. La rotura se produjo por la fisuración del ala inferior, prolongándose oblicuamente, penetrando en el hormigón in situ y llegando hasta el borde superior: Rotura de CORTANTE-COMPRESION.

En los elementos de la serie B-2 (relación  $a/d = 5$ ) aparecieron fisuras de flexión en la zona comprendida entre cargas, antes de que lo hiciesen las fisuras cerca de los apoyos. La fisuración de flexión alcanzaba el hormigón in situ, inclinándose poco después y afectando finalmente a toda la pieza. El colapso del elemento se produjo por rotura de los alambres de pretensado: Rotura de FLEXO-TRACCION.

### IV.1. Relación entre esfuerzo cortante y deslizamiento

En todos los elementos de la serie B-2, el deslizamiento viene a ser del orden de 0,02 mm, para las cargas correspondientes a  $V_{uo}$ . En los de la serie B-1 es mucho mayor.

De todas maneras, en el rango de cortantes que se ha estudiado no se observó una relación clara entre esfuerzo cortante y deslizamiento.

Grossfield y Birnstiel (miembros del A.C.I.) expresan muy claramente la dificultad de realizar medidas reales de deslizamientos en vigas compuestas. Sus afirmaciones se basan en que, en sus investigaciones, encontraron deformaciones de la misma magnitud en los elementos compuestos y en los monolíticos utilizados como testigos. Puesto que el comportamiento de unos y otros fue tan similar, es lógico suponer que los movimientos medidos se deban a las mismas causas. Si se soslaya la posibilidad de deslizamiento en una viga monolítica, deberá ser la fisuración del alma la que justifique estos movimientos relativos.

La validez de esta hipótesis se reforzó al comprobar que las vigas compuestas, con armadura transversal, desarrollaron deslizamientos incluso menores que las monolíticas (con cuantía de armadura de alma, mitad que aquéllas).

En nuestros ensayos hemos podido constatar que la brusca aparición de fisuras en las cercanías de los apoyos supone una fuerte discontinuidad en las lecturas de los comparadores. Este hecho podría explicar los grandes deslizamientos medidos en las vigas con vanos de cortante pequeños.

En las experiencias de Hanson, se produjeron verdaderos deslizamientos a partir de unas tensiones de cortadura de 30-35  $K_p/cm^2$ . En estas investigaciones, la relación canto/perímetro de contacto fue de 2,9; en las experiencias de Saemann y Washa era cercana a 5. En nuestros elementos, dicha relación era algo superior a la unidad; con lo que la posibilidad de alcanzar tensiones rasantes altas es mucho más reducida, ya que la pieza colapsa con anterioridad, al tener menos capacidad resistente, tanto a cortante como a flexión.

Todo lo anterior lleva, a nuestro juicio, a la conclusión de que, en los ensayos de bandas de forjados en los que las tensiones rasantes puestas en juego son relativamente bajas, las medidas de deslizamientos suponen una complicación adicional y resultan poco fiables.

En consecuencia, salvo en los casos de forjados con muy malas condiciones de adherencia, deberán ser otro tipo de parámetros los que nos sirvan de base a la hora de enjuiciar el comportamiento de un elemento compuesto de esta clase.

#### IV.2. Relación entre esfuerzo cortante y flechas en el centro de la luz

En la gráfica de la figura 4 puede observarse la relación entre las cargas aplicadas y la flecha en el centro de la luz, para las dos series de elementos.

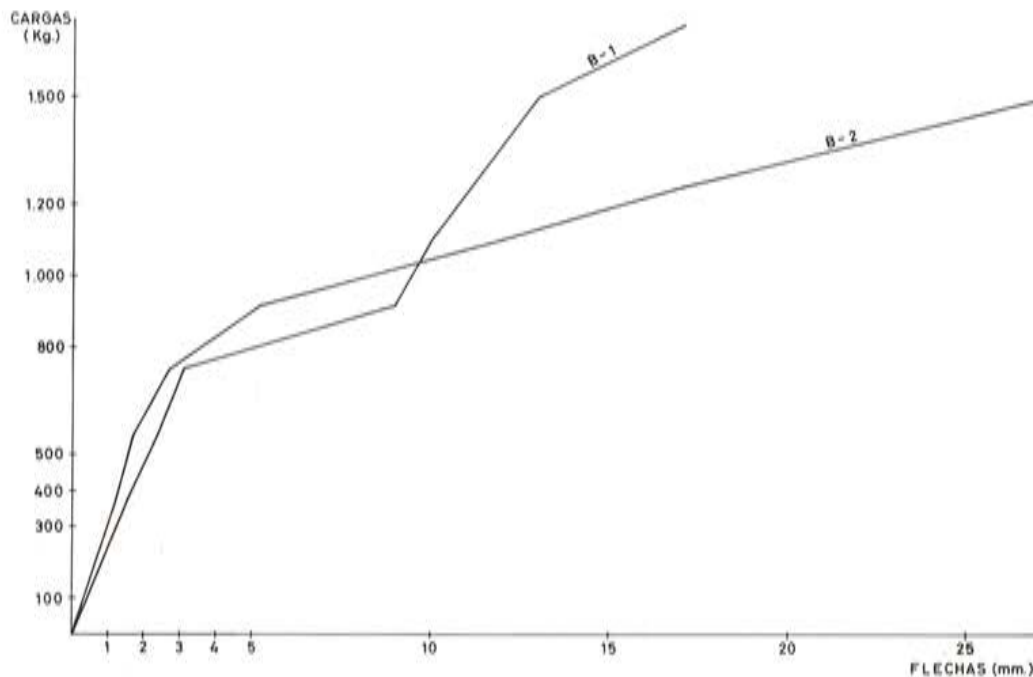


Fig. 4.

En primer lugar, llama la atención el que los elementos de la serie B-1, registren mayores flechas que los de la serie B-2, en el intervalo 0-1.000  $K_p$ , siendo a partir de aquí cuando se comportan más rígidamente, es decir, de acuerdo con lo que teóricamente debía ocurrir desde un principio.

La explicación de este hecho podría estar en una pérdida de rigidez prematura, consecuencia de la temprana fisuración de la zona de apoyos, producida en la serie B-1. Esto no ocurre en la serie B-2, para la cual es a partir del momento en que los elementos sufren una considerable fisuración de flexión, cuando sus flechas se hacen mayores que en la serie B-1.

Por otra parte, la configuración de la curva cargas-flechas en los elementos con  $a/d = 5$ , resulta ser mucho más usual que la de las piezas con  $a/d = 3$ , con grandes oscilaciones en su pendiente.

Sirviéndonos de estos datos, hemos iniciado un estudio con el objeto de comprobar las discrepancias entre flechas teóricas y reales, ya que creemos puede mostrarnos hasta qué punto estas piezas compuestas se comportan como tales.

Dicho de otra manera, sería interesante ver el grado de aproximación entre las características mecánicas calculadas mediante el modelo teórico y las obtenidas en la realidad. Más concretamente, nos estamos refiriendo al "momento de inercia de la sección compuesta homogeneizada" que es básico en la determinación de los momentos de fisuración.



En esta línea, convendría hacer ensayos con piezas compuestas, idénticas, en las cuales sólo variase la adherencia en la superficie de contacto entre los dos hormigones.

## V. RESUMEN

- a) De acuerdo con lo observado en las piezas compuestas ensayadas, creemos que el situar las cargas a cinco cantos de los apoyos, resulta más idóneo que la ubicación a tres cantos, para la realización del ensayo a rasante. La relación  $a/d = 3$  es más adecuada para la prueba de cortante.
- b) En este tipo de elementos, sometidos a tensiones rasantes medias/bajas, las medidas de los deslizamientos no aportan datos clarificadores en orden a estudiar el comportamiento de las piezas bajo cargas.
- c) Pensamos que una buena forma de comprobar el monolitismo será el estudio de las flechas obtenidas en los ensayos, en relación con las correspondientes teóricas, y de esta forma poder juzgar si los sucesivos módulos de flecha que registra la pieza se corresponden con los calculados.
- d) La experimentación de piezas con adherencia disminuida, nos permitirá ver la posible pérdida de resistencia de las mismas y, por tanto, evaluar la influencia de este importante parámetro en la resistencia a rasante.

## REFERENCIAS

- EP-80. INSTRUCCION para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado. Comisión Permanente del Hormigón. Madrid, 1980.
- CALAVERA, J. Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación. Madrid, 1981.
- V.P.-81. Sello de conformidad CIETAN de viguetas pretensadas. Madrid, 1981.
- HANSON, N.W. "Precast-prestressed concrete bridges.—2 Horizontal shear connections". Journal of PCA. Vol. 2. N<sup>o</sup> 2. Mayo, 1960.
- SAEMANN, WASHA. "Horizontal shear connection between beams and cast in place slabs". Journal of ACI. Noviembre, 1964.
- GROSSFIELD, BIRNSTIEL. "Tests of T beams with precast webs and cast in place flanges". Journal of ACI. Junio, 1962.
- DARDARE. Traducción de R. PIÑEIRO. "Estudio de los esfuerzos rasantes y el deslizamiento, en los elementos compuestos sometidos a flexión". Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie du Béton Manufacturé. Monografía 1. Junio 1970. Hormigón y Acero N<sup>o</sup> 121, 1976.



**asociación técnica  
española del pretensado**