

hormigón

**y ACERO**

*n°164*

*ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.*

*DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77*

*INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)*

*APARTADO 19.002. COSTILLARES. CHAMARTIN.*

*28080 MADRID*

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).— P° de la Habana, 14. 28036 Madrid.
- AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.— Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.
- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMENT".— Velázquez, 23. 28001 Madrid.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).— Orense, 10. 28020 Madrid.
- AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.— Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.
- AZMA, S.A.— P° de la Habana, 16. 28036 Madrid.
- BIGUETES, S.L.— Partida Altabix, s/n. 03000 Elche (Alicante).
- CAMARA, S.A.— Apartado 180. 36080 Pontevedra.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.— Grijalba, 9. 28006 Madrid.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.— C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Vicenç dels Horts (Barcelona).
- CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX). Gabinete de Información y documentación.— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A., C.T.T., S.A.— Aribau, 185. 08021 Barcelona.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.— Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
- COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS DE MADRID.— Almagro, 42. 28010 Madrid.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
- COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.— Barquillo, 12. 28004 Madrid.
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.— Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.
- CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.— Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.— Ayala, 42. 28001 Madrid.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Avda. de América, 24. 28028 Madrid.
- EMESA-TREFILERIA, S.A.— Apartado 451. 15080 La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento Obras Especiales.— Padilla, 46. 28006 Madrid.
- ENAGA, S.A.— Hermanos Fernández Calvajal, 31. 28023 Pozuelo de Alarcón (Madrid).
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.— Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
- ESTEYCO, S.A.— Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).— Arapiles, 14. 28015 Madrid.
- EUROCONSULT, S.A.— Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).
- FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FÓCSA).— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- FREYSSINET, S.A.— General Perón, 24. 28020 Madrid.
- GRACE, S.A.— Apartado 523. 08080 Barcelona.
- HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.— Almogávares, 11 - 17. 08018 Barcelona.
- HISPANO-ALEMANA DE CONSTRUCCIONES, S.A.— Capitán Haya, 51. 28020 Madrid.
- HORMIGONES GERONA, S.A.— Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
- HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.— Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.

*(Continúa en el int. de contraportada)*

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO  
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO  
DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

SERVICIO DE ESTUDIOS  
ESPECIALES

# *hormigón y acero*

n.º 164

3.º trimestre 1987

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales) .....	4.500,— ptas.	40,— dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) .....	7.000,— ptas.	100,— dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) .....	12.000,— ptas.	200,— dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - 28080 MADRID

Depósito Legal: M-853-1958  
Imprieme: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID  
ISSN: 0439-5689

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
 BARREDO, Carlos  
 CUVILLO, Ramón del  
 CHUECA, Rafael  
 ELICES, Manuel  
 FERNANDEZ DE VILLALTA, Manuel  
 FISAC, Miguel  
 GONZALEZ VALLE, Enrique  
 JODAR, Juan  
 JULIA, Manuel  
 LLOMBART, José Antonio  
 MANTEROLA, Javier  
 MARIA TOME, Javier  
 MURCIA, Juan  
 PIÑEIRO, Rafael  
 POZO VINDEL, Florencio J. del  
 ROMERO, Rafael  
 SANCHEZ CASTRO, Carlos  
 SANCHEZ GALVEZ, Vicente  
 SIEGRIST, Carlos

# hormigón y acero

**N. 164**

## índice

	<u>Pág.</u>
457-0-115	11
<b>Cálculo, con variación lineal, de características elastogeométricas</b> . . . . .	
Le calcul, avec variation linéale, des caractéristiques élasto-géométriques.	
Frame analysis with linear variation of elastogeometric properties.	
<i>J.M. Arrieta y F.J. del Pozo Vindel.</i>	
457-0-116	29
<b>Análisis de piezas curvas pretensadas (I)</b> . . . . .	
Analyse des pièces courbes précontraintes (I).	
Analysis of the prestressed curves members (I).	
<i>M. Martínez Lafuente.</i>	
457-0-117	57
<b>Una formulación matemática para el estudio analítico de los tirantes</b> . . . . .	
Une formulation mathématique pour l'étude analytique des tirants.	
A mathematical formulation for the analytical study of tie-rods.	
<i>I. Duque y A.C. Aparicio.</i>	
457-0-118	81
<b>Determinación del coeficiente (K) de longitud efectiva en columnas de segmentos espaciales de naves metálicas, utilizando microcomputadoras</b> . . . . .	
Détermination du coefficient (K) de la longueur effective dans les colonnes à segments spatiaux des nefs métalliques, avec l'utilisation de microcomputers.	
Determination of the effective length coefficient (K) of columns of spatial segments in metallic sheds, making use of microcomputers.	
<i>J.M. Torres y D. Botta.</i>	

- 457-0-119 **Nuevas fórmulas aproximadas para el dimensionamiento de secciones de hormigón armado** ..... 89  
 Nouvelles formules approchées pour le calcul des armatures des sections en béton armé.  
 New approximate formulae for the design of reinforced concrete cross-sections.  
*P. Jiménez Montoya y F. Morán Cabré.*
- 457-2-33 **Pandeo con fluencia** ..... 101  
 Flambement avec fluage.  
 Buckling with creep.  
*E. Pedoja.*
- 685-0-17 **Módulo de deformación global equivalente del hormigón. Aplicación al análisis de los efectos de la fluencia en el tiempo** 111  
 Module de déformation global équivalent du béton. Application à l'analyse des effets du fluage dans le temps.  
 Equivalent deformation modulus of concrete. Application to the analysis of time-dependent creep effects.  
*J. Murcia.*
- 685-0-18 **Estudio experimental de la influencia de las condiciones de curado inicial en la resistencia de probetas moldeadas de hormigón** ..... 129  
 Etude expérimentale de l'influence des conditions de cure initiale sur la résistance des éprouvettes moulées en béton.  
 Experimental study of the influence of the initial conditions of curing procedure on the strength of concrete test specimens.  
*J. Fernández Gómez.*

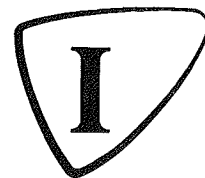
## NOTA IMPORTANTE A nuestros colaboradores

Se nos ha solicitado que, con el fin de que puedan ser incluídas las oportunas referencias bibliográficas en los "Abstracts" que se editan en diferentes países, todos los artículos que se publiquen en Hormigón y Acero vayan acompañados de un resumen, lo más breve posible, (no más de cien palabras) en español, francés e inglés. El título del artículo también debe figurar en los indicados tres idiomas.

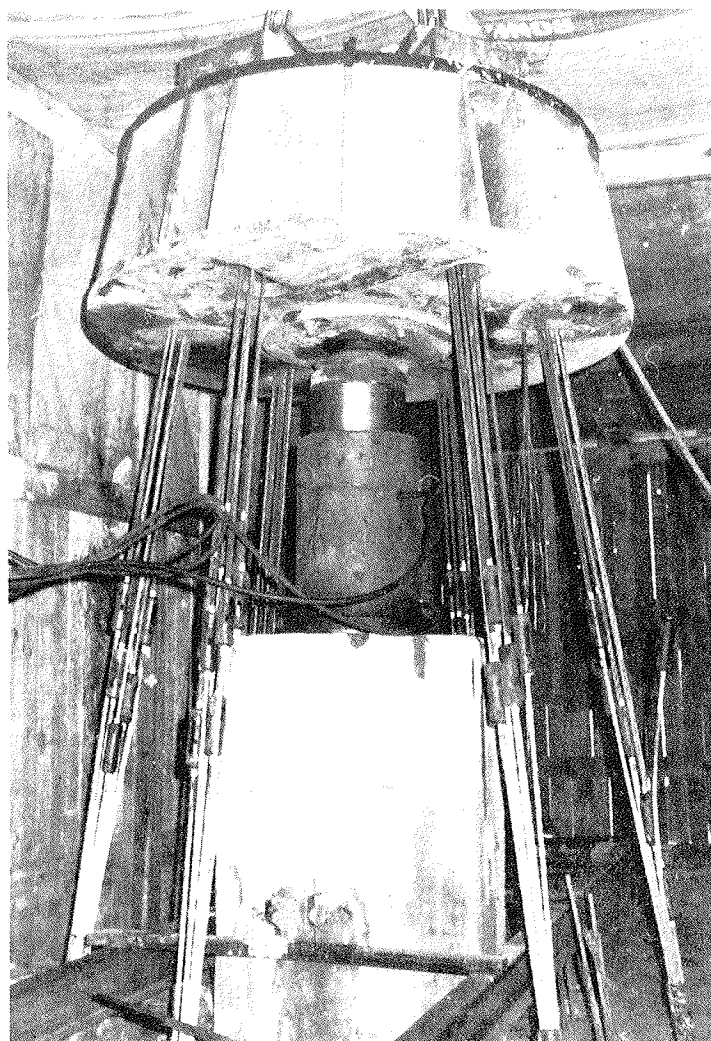
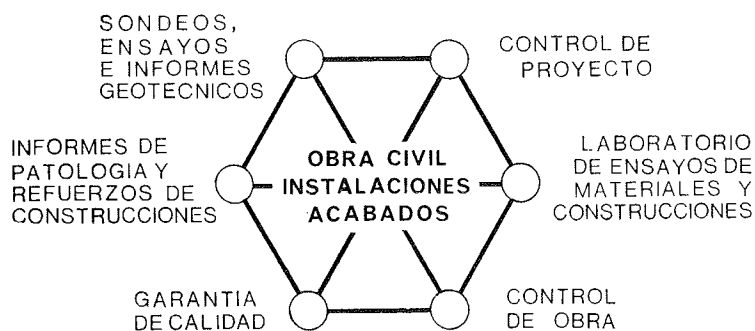
Por consiguiente, rogamos encarecidamente a nuestros amables colaboradores tomen buena nota de estas nuevas normas, para su cumplimentación en el momento de preparar los trabajos que nos envíen para su publicación en nuestra Revista.

EL COMITE DE REDACCION

# INTEMAC



## INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



Prueba de carga  
de un pilote.

### MADRID

Oficinas:  
Monte Esquinza, 30 - 4º D  
MADRID-4  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:  
Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. (91) 675 31 00/04/08

### BARCELONA

Pasaje Busquets, 37  
CORNELLA DE LLOBREGAT  
Tels. (93) 377 43 58/62

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

ESPAÑA

ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
ASOCIACION ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.—Barcelona.  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.  
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislatá (Valencia).  
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.— Oviedo.  
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT. S.A.".— La Coruña.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Murcia.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Tarragona.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.— Palma de Mallorca.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. Departamento de Laboratorios.— Santa Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
COMERCIAL Y COLOCADORA DE TEXSA, S.A.— Barcelona.  
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR. Biblioteca.—Sevilla.  
CONTROLEX.—Alicante.  
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Madrid.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Biblioteca.—Córdoba.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Córdoba.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.— León.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA OBRAS PUBLICAS.—Burgos.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.—Manresa (Barcelona).  
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.  
EXCELENTISIMA DIPUTACION DE SALAMANCA.—Salamanca.  
EXCELENTISIMO AYUNTAMIENTO DE GRANADA. Area de Obras Públicas e Infraestructura.—Granada.  
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.

FERROVIAL, S.A.— Madrid.  
FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).  
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.— Madrid.  
GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).  
HORMADISA, S.L.—Puenteceseures-Cordeiro (Pontevedra).  
HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.  
INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).  
INGENIERIA Y ECONOMIA DEL TRANSPORTE, S.A.— Centro de Documentación.— Madrid.  
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.  
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.— Madrid.  
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.  
J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).  
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Consejería de Obras Públicas y Ordenación Territorial.  
Servicio Tecnología e Información.—Valladolid.  
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Servicio de Obras Públicas.—Avila.  
JUNTA DEL PUERTO DE VILLAGARCIA DE AROSA.—Villagarcía de Arosa (Pontevedra).  
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.  
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).  
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.  
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO.—DIRECCION GENERAL PARA LA VIVIENDA Y ARQUITECTURA, SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA BASICA Y TECNOLOGICA.—Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.  
POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.  
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.  
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.  
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.  
PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.  
RUBIERA, S.A.—León.  
SERINCO, S.A.— Madrid.  
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.  
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.  
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.  
SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.  
TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).  
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.—Madrid.  
TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Cantabria).  
TELEFONICA.—Departamento Inmobiliario.—Madrid.  
TERRATEST, S.A.—Madrid.  
TIGNUS, S.A.—Valencia.  
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).—Madrid.  
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.  
VIGUETAS MUBEMI.—Torrente (Valencia).



## EXTRANJERO

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).  
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).  
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de Angola).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.—Santiago de Chile (Chile).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.—Lima (Perú).  
SARET P.P.B. Cadre Technique.—Le Pontet (France).  
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.—Londres (Inglaterra).  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.—Facultad de Ingeniería. Biblioteca. Caracas (Venezuela).  
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).  
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

## MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

\* \* \*

## AVISO IMPORTANTE

### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

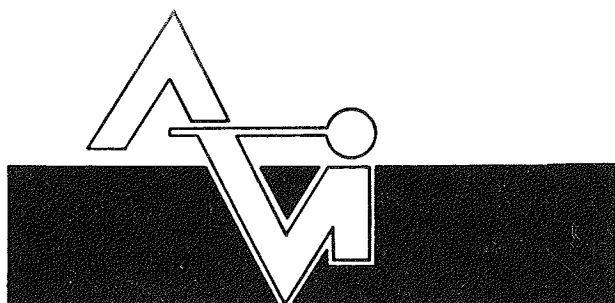
Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002. 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.



PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



#### **HUESCA:**

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA

Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON

Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

#### **MADRID**

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10

Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4- 8 -  
TORREJON DE ARDOZ

Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

#### **ZARAGOZA**

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

# IN MEMORIAM

Con profundo pesar hemos recibido la noticia del fallecimiento, a finales del pasado mes de marzo, de nuestro entrañable amigo e inestimable y valiosísimo colaborador durante muchos años, el insigne Profesor Doctor Arquitecto D. Buenaventura Bassegoda Musté.

Los íntimos lazos de amistad que le unían a D. Eduardo Torroja, lamentamente ya también fallecido, le impulsaron a colaborar en las actividades de nuestra Asociación, desde que en 1949 D. Eduardo decidió crearla para difundir y promocionar la que, en aquellas fechas, era nueva técnica constructiva.

Durante muchos años formó parte de la Junta de Gobierno de la ATEP, pronunció Conferencias, publicó artículos y, en fín, colaboró amplia y activamente en la labor que la ATEP tenía encomendada.

Sus profundos conocimientos de cuantos elementos intervienen en la construcción y de las peculiaridades y problemas que plantea, tanto el proyecto como la dirección y ejecución de todo tipo de obras, conferían un extraordinario valor a todas sus intervenciones. Pero además, el singular conocimiento que de nuestro idioma poseía y del que sabía extraer vocablos y matices tan exactos como, en general, poco difundidos y conocidos, añadían al valor científico y técnico de sus intervenciones una calidad artística y humana que las transformaban en auténticas obras literarias de inolvidable recuerdo.

Innumerables han sido sus éxitos profesionales que le llevaron a reunir una larga serie de títulos, ocupar distintos cargos, ser nombrado miembro de Academias y Asociaciones, tanto nacionales como extranjeras, y recibir numerosas distinciones dentro del campo de la ciencia, la técnica y el arte. De todo ello, en los artículos que en su memoria han sido publicados en diferentes Revistas, con motivo de su fallecimiento, se ha dado cumplida información.

No queremos repetirnos y, en consecuencia, a ellos nos remitimos y, por nuestra parte, sólo añadiremos que en reconocimiento a los innumerables méritos contraídos en nuestra Asociación y a su inapreciable y valiosísima colaboración, fue nombrado Miembro de Honor de la misma y galardonado con una de las primeras “Medallas de la ATEP”, creadas para premiar a aquellos Asociados que se destacaron por su singular aportación al avance de la técnica del pretensado, en cualquiera de sus aspectos, y al desarrollo de las actividades encomendadas a la ATEP en sus Estatutos.

¡Descanse en paz nuestro siempre recordado D. Buenaventura Bassegoda Musté!

LA JUNTA DE GOBIERNO DE LA A.T.E.P.

## **CONSTRUCCION-87**

### **Feria Nacional de Edificación, Obras Públicas y Equipamientos Urbanos**

Del 4 al 7 de noviembre del presente año 1987 tendrá lugar la "II Edición de la Feria Nacional de Edificación, Obras Públicas y Equipamientos Urbanos", CONSTRUCCION' 87, organizada por la Institución Feria de Muestras Iberoamericana de Sevilla, con la colaboración de la Consejería de Obras Públicas y Transportes de la Junta de Andalucía.

Continuando en la línea emprendida en la I Edición, al poner de manifiesto la importancia del sector y hacer coincidir la oferta y la demanda en un Certamen Nacional, se pretende abrir una esperanzadora perspectiva para los próximos años que serán de importante desarrollo para Andalucía, máxime teniendo en cuenta que, tanto la Conmemoración del V Centenario del Descubrimiento de América, como la celebración de la Exposición Universal de Sevilla, EXPO' 92, deberán significar hitos fundamentales en la transformación y modernización de dicha Comunidad Autónoma.

Los interesados en participar en este Certamen deberán ponerse en contacto con:

Institución Feria de Muestras Iberoamericana de Sevilla.  
Polígono Aeropuerto (Sevilla-Este).  
Apartado 4.016  
41007 SEVILLA

\* \* \*

## **XLII<sup>a</sup> Exposición Internacional de Edificación y Construcción "INTERBUILD"**

Durante los días 22 al 28 de noviembre del actual año 1987, se va a celebrar en el National Exhibition Centre, de Birmingham (Reino Unido), la XLII<sup>a</sup> Edición de "INTERBUILD".

"INTERBUILD" está considerado como el mayor y más prestigioso Salón Internacional para la industria de la edificación y construcción que se celebra en el Reino Unido. En la anterior edición, en 1985, se reunieron 1.200 expositores y hubo más de 134.000 visitantes, procedentes de 80 países diferentes.

Los interesados en participar en esta magna Exposición o en recibir información más detallada sobre la misma, deberán dirigirse a:

CASSANDRA MARCHESSINI  
Interbuild 87  
11 Manchester Square  
Londres W1M 5AB  
Teléfono: (44 1) 486 1951/487 5831  
Télex: 24591 Montex G  
Fax: 486 8773

# Cálculo con variación lineal de características elasto-geométricas

José M<sup>a</sup> Arrieta Torrealba

Dr. Ing. de Caminos

Profesor de Cálculo de Estructuras de la E.T.S.I. Caminos C. y P.

Florencio J. del Pozo Vindel

Dr. Ing. de Caminos

Catedrático de Resistencia de Materiales de la E.T.S.I. Caminos C. y P.

## 1. INTRODUCCION

Es frecuente, en el proyecto de estructuras, tener la necesidad de resolver estructuras reticuladas con elementos de sección variable. Si se dispone únicamente de un método para piezas de sección constante, cada una de las piezas de sección variable se modeliza mediante varios elementos de sección constante. En esta situación, es muy normal que el número de elementos en que es necesario dividir la pieza de sección variable para representar adecuadamente su comportamiento, sea muy superior al que elegiríamos por otras causas, aumentando de esta forma el tamaño del sistema de ecuaciones que hay que resolver.

En el presente artículo se expone un método matricial de cálculo de estructuras reticuladas planas con barras de sección variable. La variación de las características elastomecánicas a lo largo de la barra es de tipo lineal, permitiendo adaptarse a la variación real de las características de la barra, de una manera mucho más aproximada que con una constancia de las mismas.

## 2. DESCRIPCION DE LA BARRA

Sea la barra de sección variable 1-2 de la figura 1, cuyas rigideces a flexión y extensión, en los extremos dorsal y frontal, son, respectivamente,  $(EI)_1$ ,  $(EI)_2$ ,  $(EA)_1$  y  $(EA)_2$ , y donde:

E: Módulo de elasticidad de Young.

A: Area de la sección transversal.

I : Momento de inercia de la sección transversal.

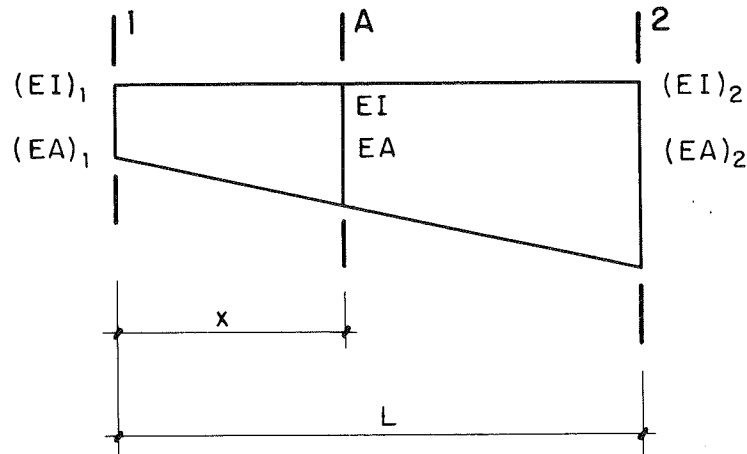


Fig. 1

El valor de dichas rigideces en una sección genérica A, situada a una distancia  $x$  del extremo dorsal de la barra, teniendo en cuenta su variación lineal, es el siguiente:

$$EA = (EA)_1 \cdot (1 + a \cdot \mu)$$

$$EI = (EI)_1 \cdot (1 + i \cdot \mu) \quad [1]$$

siendo:

$$a = [(EA)_2 - (EA)_1] / (EA)_1$$

$$i = [(EI)_2 - (EI)_1] / (EI)_1$$

$$\mu = x/L \quad [2]$$

### 3. COMPORTAMIENTO DE LA BARRA A FLEXION

Sea la barra de sección variable 1-2 de la figura 2, sometida a una carga genérica  $q$  y a unas acciones, en sus extremos, originadas por su vinculación al resto de la estructura.

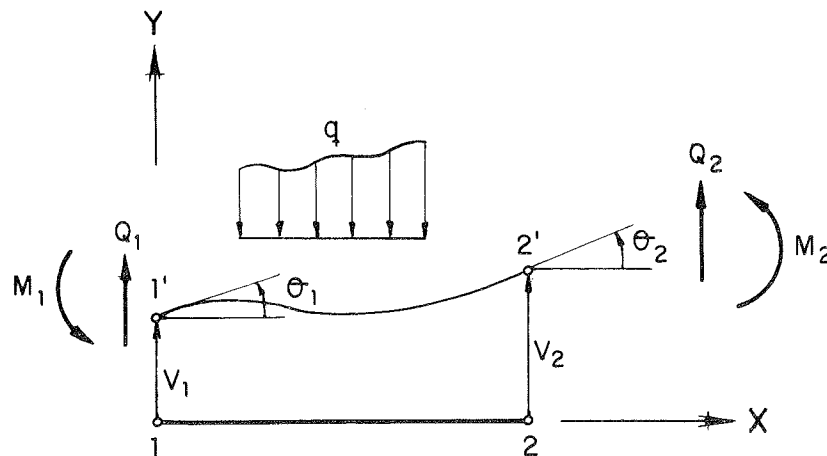


Fig. 2

Las ecuaciones que rigen el comportamiento a flexión de dicha barra, según la Teoría General de las Estructuras son:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1^0 + K_1 \cdot [\Theta_1 + \gamma_2 \cdot \Theta_2 - (1 + \gamma_2) \cdot (v_2 - v_1) / L] \\ M_2 &= M_2^0 + K_2 \cdot [\Theta_2 + \gamma_1 \cdot \Theta_1 - (1 + \gamma_1) \cdot (v_2 - v_1) / L] \end{aligned} \quad [3]$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son los coeficientes de rigidez dorsal y frontal de la barra,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  los coeficientes de transmisión dorsal y frontal, respectivamente, y  $M_1^0$  y  $M_2^0$  los momentos de empotramiento perfecto originados por la carga  $q$ . Dichos coeficientes se definen, a través del comportamiento de la pieza empotrada-apoyada (figura 3), como el inverso del giro en el apoyo y el momento en el empotramiento, al aplicar un momento unitario en el extremo apoyado.

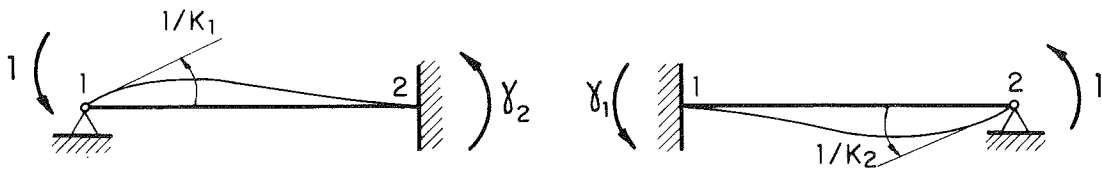


Fig. 3

Si descomponemos cada uno de los estados de la figura 3, en función de los estados de la viga simplemente apoyada sometida a momentos unitarios en sus extremos (figura 4), y aplicamos las condiciones de la superposición resulta:

$$\begin{aligned} K_1 &= \Theta_2^{\text{II}} / (\Theta_1^{\text{I}} \cdot \Theta_2^{\text{II}} - \Theta_1^{\text{II}} \cdot \Theta_2^{\text{I}}) \\ K_2 &= \Theta_1^{\text{I}} / (\Theta_1^{\text{I}} \cdot \Theta_2^{\text{II}} - \Theta_1^{\text{II}} \cdot \Theta_2^{\text{I}}) \\ \gamma_1 &= -\Theta_1^{\text{II}} / \Theta_1^{\text{I}} \\ \gamma_2 &= -\Theta_2^{\text{I}} / \Theta_2^{\text{II}} \end{aligned} \quad [4]$$

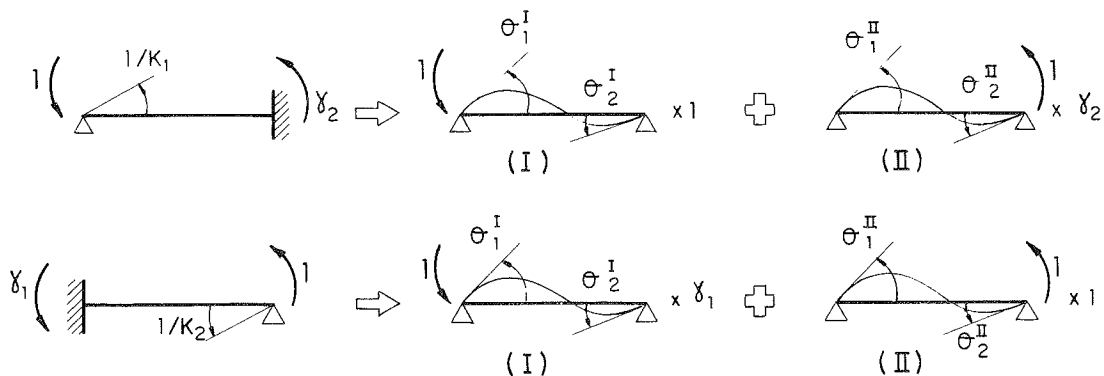


Fig. 4

Para calcular dichos coeficientes de rigidez y transmisión, resolveremos los estados I y II aplicando los teoremas de Mohr a cada uno de ellos. La expresión de los giros en los extremos será:

$$\begin{aligned}\Theta_1^I &= -1/L \cdot \int_0^L M_f^I \cdot (L-x) / EI \cdot dx \\ \Theta_2^I &= \Theta_1^I + \int_0^L M_f^I / EI \cdot dx \\ \Theta_1^{II} &= -1/L \cdot \int_0^L M_f^{II} \cdot (L-x) / EI \cdot dx \\ \Theta_2^{II} &= \Theta_1^{II} + \int_0^L M_f^{II} / EI \cdot dx\end{aligned}\quad [5]$$

donde  $M_f^I$  y  $M_f^{II}$  son las leyes de momentos flectores de los estados I y II, respectivamente.

Los resultados de estos giros, como en general de todos los elementos de la matriz de rigidez y vector de cargas, quedarán en función de unas integrales con cuatro parámetros  $J(\alpha, n, \mu_0, \mu_1)$  que a continuación definimos:

$$J(\alpha, n, \mu_0, \mu_1) = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \mu^n / (1 + \alpha \cdot \mu) \cdot d\mu \quad [6]$$

Dichas integrales tienen una solución analítica exacta y su expresión general es la siguiente:

Si  $\alpha < > 0$ :

$$\begin{aligned}J(\alpha, n, \mu_0, \mu_1) &= \{ (-1)^n \cdot \text{Ln} [ (1 + \alpha \cdot \mu_1) / (1 + \alpha \cdot \mu_0) ] + \\ &+ \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \cdot n! \cdot [ (1 + \alpha \cdot \mu_1)^{n-s} - (1 + \alpha \cdot \mu_0)^{n-s} ] / \\ & / [s! \cdot (n-s)! \cdot (n-s)] \} / \alpha^{n+1}\end{aligned}$$

Si  $\alpha = 0$ :

$$J(0, n, \mu_0, \mu_1) = (\mu_1^{n+1} - \mu_0^{n+1}) / (n+1) \quad [7]$$

A fin de simplificar la formulación, utilizaremos los siguientes símbolos intermedios para algunas de estas integrales:

$$\begin{aligned}I_n &= J(i, n, 0, 1) \\ A_n &= J(a, n, 0, 1)\end{aligned}\quad [8]$$

Los giros correspondientes a los estados I y II antes mencionados, teniendo en cuenta la nomenclatura establecida, resultan:

$$\begin{aligned}\Theta_1^I &= (I_0 - 2 \cdot I_1 + I_2) \cdot L / (EI)_1 \\ \Theta_2^I &= \Theta_1^{II} = (-I_1 + I_2) \cdot L / (EI)_1 \\ \Theta_2^{II} &= I_2 \cdot L / (EI)_1\end{aligned}\quad [9]$$



Sustituyendo dichos giros en las expresiones de los coeficientes de rigidez y transmisión [4] se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= I_1 / (I_0 \cdot I_2 - I_1^2) \cdot (EI)_1 / L \\
 K_2 &= (I_0 - 2 \cdot I_1 + I_2) / (I_0 \cdot I_2 - I_1^2) \cdot (EI)_1 / L \\
 \gamma_1 &= (I_1 - I_2) / I_2 \\
 \gamma_2 &= (I_1 - I_2) / (I_0 - 2 \cdot I_1 + I_2)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Mediante los coeficientes que acabamos de obtener y las ecuaciones de estado [3], queda caracterizado el comportamiento a flexión de una barra de sección variable.

#### 4. COMPORTAMIENTO DE UNA BARRA A EXTENSION

Sea la pieza 1-2 de la figura 5 sometida a una carga axial  $q$  y a unas acciones en extremo,  $N_1$  y  $N_2$ . La ecuación que rige su comportamiento viene dada por:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_1^0 - K_N \cdot (u_2 - u_1) \\
 N_2 &= N_2^0 + K_N \cdot (u_2 - u_1)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

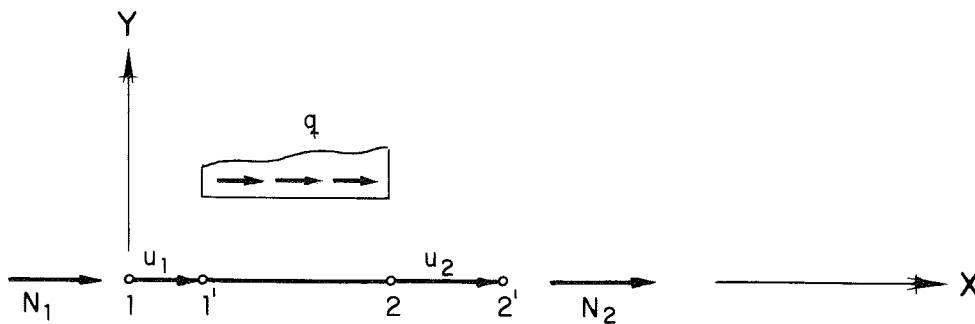


Fig. 5

donde  $K_N$  es la rigidez a esfuerzo axial de la pieza y  $N_1^0$  y  $N_2^0$  son los esfuerzos de empotramiento perfecto originados por la carga  $q$ .

La rigidez a esfuerzo axial de la pieza tiene la siguiente expresión:

$$K_N = 1 / \int_0^L dx / EA
 \tag{12}$$

Sustituyendo la rigidez  $EA$  por su valor según [1] y realizando transformaciones se obtiene:

$$K_N = 1/A_0 \cdot (EA)_1 / L
 \tag{13}$$

## 5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA

Sea la barra 1-2 de la figura 6 en un sistema de ejes locales X-Y. Como es habitual en cálculo matricial, englobamos los movimientos de los nudos extremos en el vector de movimientos  $d_{e\ell}$ :

$$d_{e\ell} = [u_1 \ v_1 \ \Theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \Theta_2]^T \quad [14]$$

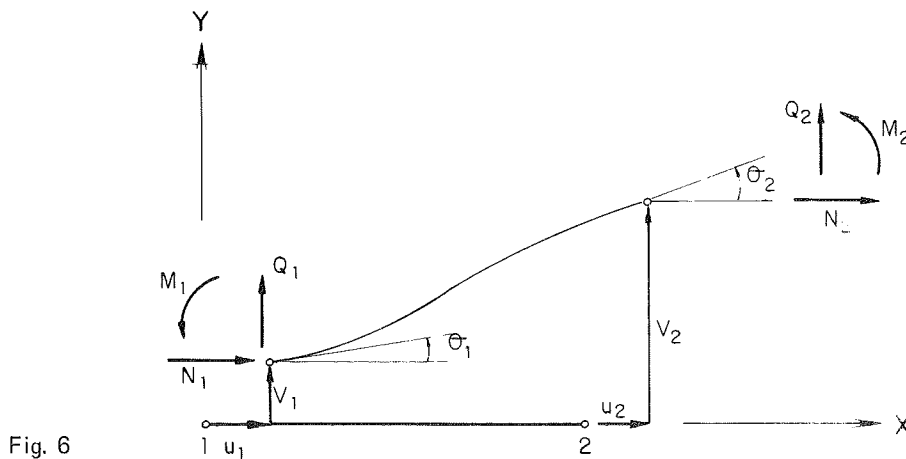


Fig. 6

que también puede expresarse:

$$\bar{d}_{e\ell} = [\bar{d}_1^T \ \bar{d}_2^T]^T \quad [15]$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 &= [u_1 \ v_1 \ \Theta_1]^T \\ \bar{d}_2 &= [u_2 \ v_2 \ \Theta_2]^T \end{aligned} \quad [16]$$

Las acciones en extremo de barra las agruparemos de forma similar:

$$\bar{p}_{e\ell} = [N_1 \ Q_1 \ M_1 \ N_2 \ Q_2 \ M_2]^T \quad [17]$$

o bien:

$$\bar{p}_{e\ell} = [\bar{p}_1^T \ \bar{p}_2^T]^T \quad [18]$$

siendo:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= [N_1 \ Q_1 \ M_1]^T \\ \bar{p}_2 &= [N_2 \ Q_2 \ M_2]^T \end{aligned} \quad [19]$$

La ecuación de estado de la barra es aquella que nos relaciona los movimientos de sus nudos extremos con las acciones actuantes en ellos. Dicha ecuación tiene la forma:

$$\bar{p}_{e\ell} = \underline{K}_{e\ell} \cdot \bar{d}_{e\ell} \quad [20]$$

donde  $\underline{K}_{e\ell}$  es la matriz de rigidez de barra en ejes locales.

Si desglosamos el vector de movimientos y el de acciones en la parte correspondiente a cada nudo, obtenemos dos ecuaciones matriciales de estado:

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= \underline{K}_{11} \cdot \bar{d}_1 + \underline{K}_{12} \cdot \bar{d}_2 \\ \bar{p}_2 &= \underline{K}_{21} \cdot \bar{d}_1 + \underline{K}_{22} \cdot \bar{d}_2\end{aligned}\quad [21]$$

donde  $\underline{K}_{11}$ ,  $\underline{K}_{12}$ ,  $\underline{K}_{21}$  y  $\underline{K}_{22}$  son las cuatro cajas de la matriz de rigidez, de forma que:

$$\underline{K}_{e\ell} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix}\quad [22]$$

A partir de las ecuaciones [3] y [11] obtenemos los términos de cada una de las cajas de la matriz de rigidez:

$$\begin{aligned}\underline{K}_{11} &= \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & K_3 \\ 0 & K_3 & K_4 \end{bmatrix} \\ \underline{K}_{22} &= \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & K_5 \\ 0 & K_5 & K_6 \end{bmatrix} \\ \underline{K}_{12} &= \begin{bmatrix} -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & -K_5 \\ 0 & -K_3 & K_7 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad [23]$$

donde:

$$\begin{aligned}K_1 &= 1/A_0 \cdot (EA)_1/L \\ K_2 &= I_0/I_d \cdot (EI)_1/L^3 \\ K_3 &= I_1/I_d \cdot (EI)_1/L^2 \\ K_4 &= I_2/I_d \cdot (EI)_1/L \\ K_5 &= (I_1 - I_0) \cdot (EI)_1/L^2 \\ K_6 &= (I_2 - 2 \cdot I_1 + I_0)/I_d \cdot (EI)_1/L \\ K_7 &= (I_1 - I_2)/I_d \cdot (EI)_1/L\end{aligned}\quad [24]$$

siendo:

$$I_d = I_0 \cdot I_2 - I_1^2\quad [25]$$

El cambio de sistema de ejes locales a globales de la matriz de rigidez, así como el montaje de dicha matriz y del vector de cargas, se realizan siguiendo las técnicas propias del cálculo matricial.

## 6. COMPROBACIONES NUMERICAS

Es evidente que mediante la utilización de barras con características variables linealmente, se aproxima el comportamiento de una barra de sección variable genérica con mayor exacti-

tud que a través de barras de sección constante. A fin de comparar la aproximación proporcionada por la subdivisión de la estructura en barras de sección constante, con la obtenida mediante la utilización del tipo de barra propuesto, hemos realizado diversos cálculos.

En cuanto al trabajo a extensión, ambos procedimientos proporcionan el mismo resultado; para llegar a dicha conclusión basta analizar las expresiones relacionadas con el esfuerzo axial. Sin embargo, en el trabajo a flexión de la pieza, existen diferencias; para analizarlas hemos utilizado una viga empotrada-apoyada (figura 7) con características variables linealmente, sometida a un momento unitario en su extremo apoyado. Se han calculado el giro  $\Theta$  y el momento en el empotramiento  $M$  para diversas relaciones de rigideces a flexión entre sus extremos y diversas discretizaciones de la viga en barras de sección constante. A partir de los resultados de dichos cálculos y por comparación con los correspondientes al método propuesto, que resuelve este caso de forma exacta, hemos determinado los adimensionales  $\Phi_\Theta$  y  $\Phi_M$  que definen las diferencias entre el cálculo exacto y cada uno de los cálculos aproximados. Las expresiones de dichos coeficientes son las siguientes:

$$\begin{aligned}\Phi_\Theta &= |(\Theta_{\text{aprox}} - \Theta_{\text{ex}}) / \Theta_{\text{ex}}| \\ \Phi_M &= |(M_{\text{aprox}} - M_{\text{ex}}) / M_{\text{ex}}|\end{aligned}\quad [26]$$

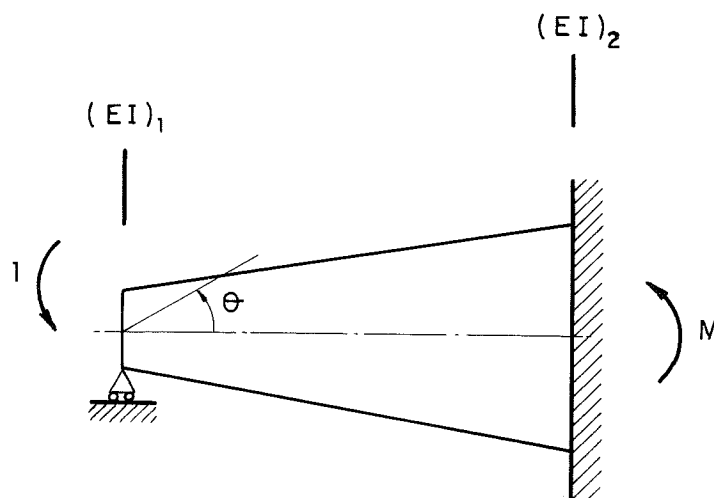


Fig. 7

siendo:

$\Theta_{\text{aprox}}$  : Valor del giro  $\Theta$  según un cálculo realizado mediante subdivisión de la viga en  $N$  barras de sección constante.

$M_{\text{aprox}}$  : Valor del momento  $M$  según un cálculo realizado mediante subdivisión de la viga en  $N$  barras de sección constante.

$\Theta_{\text{ex}}$  : Valor exacto del giro  $\Theta$ .

$M_{\text{ex}}$  : Valor exacto del momento  $M$ .

En la figura 8 se representan gráficamente las variaciones de los coeficientes  $\Phi_\Theta$  y  $\Phi_M$ , en función del coeficiente de variación de la rigidez a flexión,  $i$ , y del número de partes  $N$  en que se subdivide de la viga.

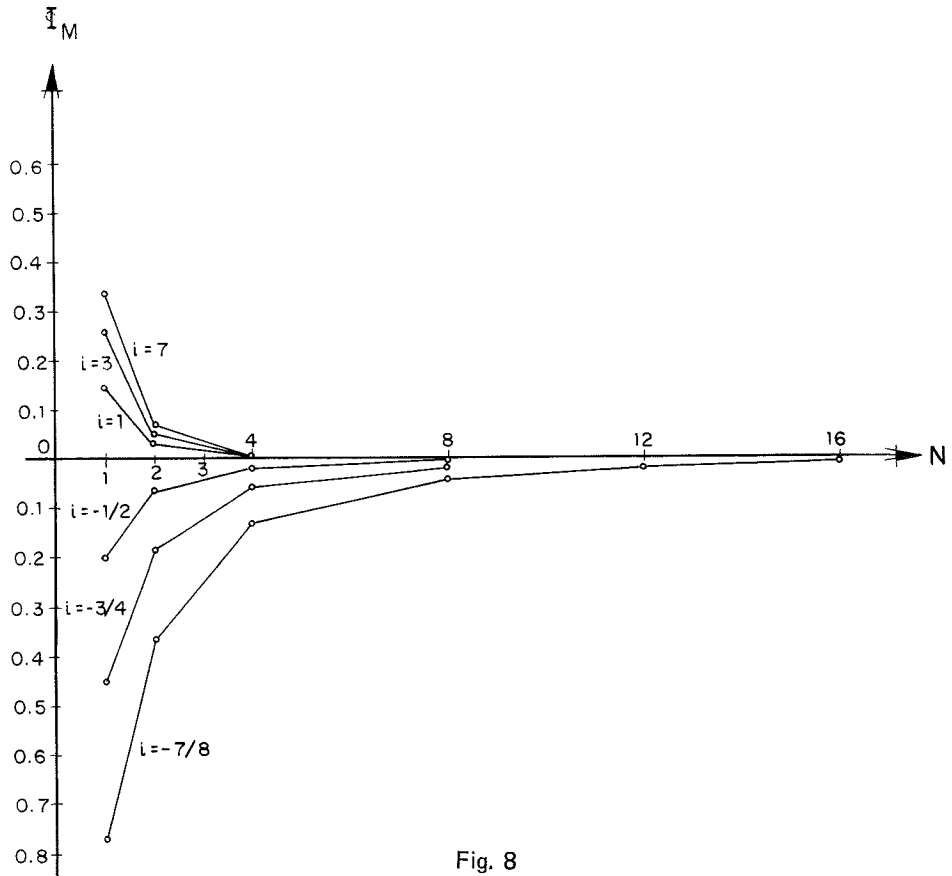
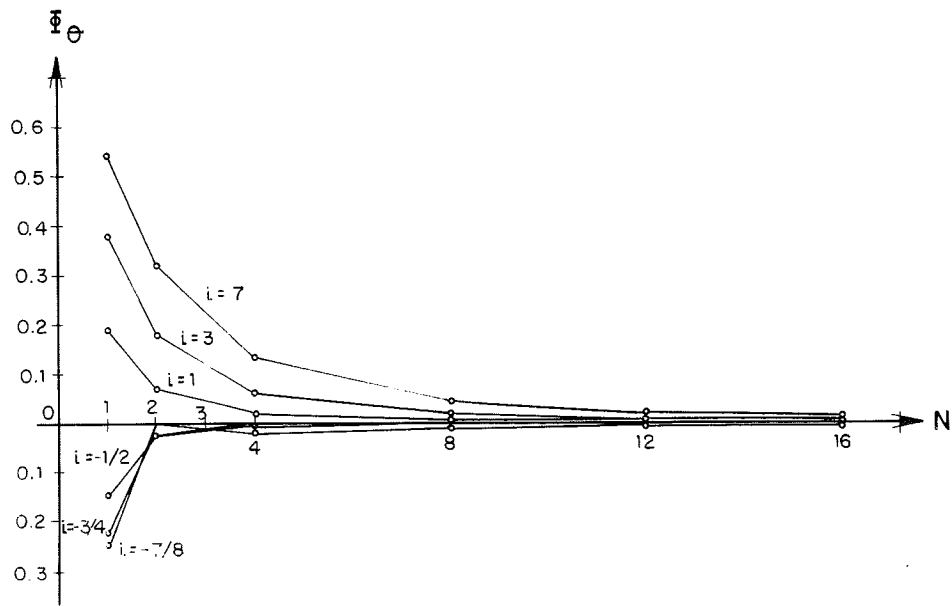


Fig. 8

Mediante el análisis de la figura se observa que, para valores positivos del coeficiente  $i$ , las mayores diferencias se obtienen en el giro  $\Theta$ ; mientras que para valores negativos de dicho coeficiente, las discrepancias del momento  $M$  son de mayor cuantía. Asimismo, se deduce que, para los rangos de variaciones de rigidez analizados, resulta necesario subdividir la viga hasta en seis barras, para conseguir errores inferiores al 10 por 100.



## **CEMCO-88. XI Curso de Estudios Mayores de la Construcción Normativa, Cálculo, Experimentación y Patología en Edificación**

El Instituto Eduardo Torroja del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, anuncia la celebración del XI CURSO DE ESTUDIOS MAYORES DE LA CONSTRUCCION, CEMCO-88.

Normativa, Cálculo, Experimentación y Patología son aspectos fundamentales que deben considerarse para cumplir los requisitos de seguridad, funcionalidad y durabilidad en toda construcción. El conocimiento de tales aspectos es una valiosa fuente de enseñanza a la que CEMCO-88 dedicará cinco meses de estudio.

El Curso va destinado a los postgraduados en Ingeniería Civil o en Arquitectura, especialmente a los procedentes de países Iberoamericanos.

Todas las actividades que se desarrollen en CEMCO-88 serán comunes para arquitectos e ingenieros.

La matrícula estará limitada a treinta participantes.

### **Lugar y duración del Curso**

El Curso se desarrollará en el Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, Serrano Galvache, s/n, 28033 Madrid; Teléfono 202.04.40.

Comenzará el lunes 1 de febrero y terminará el jueves 16 de junio de 1988.

### **Patrocinadores de CEMCO-88**

- Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- Secretaría de Estado de Universidades e Investigación.
- Instituto de Cooperación Iberoamericana.

### **Colaboradores**

- Asociación Técnica Española del Pretensado.
- Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas.
- Colegio Oficial de Arquitectos.
- Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos.
- Ayuntamiento de Madrid.
- Fundación Escuela de la Edificación.
- ANEFHOP.
- Grupo Español del Hormigón.
- Instituto de Tecnología de la Construcción de Cataluña.
- TECNIBERIA.
- Fundación MAPFRE.

### **Director del Curso**

D. José Pedro Gutiérrez Jiménez.

## **Cuota de inscripción**

La cuota de inscripción es de 200.000 ptas. y dará derecho a participar en todas las actividades del Curso y a recibir la documentación correspondiente.

## **Certificado y Diploma**

A todos los participantes en CEMCO-88 que asistan a más del 80 por 100 de las clases teóricas y prácticas se les entregará un CERTIFICADO de asistencia. Los que además de satisfacer la condición anterior superen las pruebas individuales voluntarias correspondientes, obtendrán un DIPLOMA acreditativo de los conocimientos adquiridos.

## **Horario**

Las actividades del Curso se desarrollarán fundamentalmente de 9,00 a 16,00 con interrupciones para tomar café (11,00 a 11,30) y almorzar (14,00 a 15,00) y, básicamente, de lunes a viernes.

Al inicio de cada semana se entregará a los participantes un programa-horario que, salvo excepciones, podrá considerarse como definitivo.

## **Clases teóricas**

Las clases teóricas se desarrollarán durante 45 minutos, con un corto debate o cambio de impresiones. Su distribución es la siguiente:

Area de materiales . . . . .	28 horas
Area de estructuras . . . . .	31 horas
Area de unidades funcionales de obra . . . . .	16 horas
Area de habitabilidad y energía . . . . .	21 horas
Area de patología . . . . .	25 horas
Total . . . . .	121 horas

Al final de cada Area habrá un coloquio y una prueba individual y voluntaria de aprovechamiento.

## **Trabajos prácticos**

Se realizarán ejercicios teóricos y/o experimentales, individuales o en grupos de cinco participantes sobre uno de los temas del Programa de Trabajos prácticos. Al objeto de facilitar la formación de los grupos de trabajo, cada aspirante elegirá, de acuerdo con su interés y formación, dos temas.

A los trabajos prácticos de cada tema se dedicarán 20 horas.

## **Seminarios**

A fin de tratar en profundidad ciertos temas y con la intención de facilitar los contactos entre participantes de CEMCO y profesionales españoles con afinidad de intereses, los Seminarios tendrán carácter abierto, para lo que se posibilitará en todos ellos la matriculación de profesionales españoles.



Como norma general, de los trece Seminarios programados, los aspirantes a CEMCO-88 han de elegir, de acuerdo con su interés y formación, un mínimo de 7 y un máximo de 9.

Para el desarrollo de los 13 Seminarios se destinarán 150 horas.

### **Visitas**

Se han programado seis visitas a obras, realizaciones y entidades relacionadas con temas de construcción y que por su carácter singular o aportaciones técnicas son dignas de estudio. Dichas visitas tendrán lugar, normalmente, en la mañana de los viernes, ampliándose a la tarde cuando la distancia o la importancia lo requiera.

### **Viajes**

Como actividades del Curso se han programado dos viajes de carácter técnico-cultural. Los gastos de desplazamiento, hoteles y, parcialmente, la pensión alimenticia están cubiertos por la cuota de inscripción. En principio, será posible el desplazamiento de familiares, estudiándose en su momento el coste suplementario.

### **Conferencias**

Como actividad complementaria del Curso se ha programado un ciclo de Conferencias Magistrales, en el que se contará con la participación de especialistas de categoría internacional. Caso de ser necesario se dispondrá de un servicio de traducción simultánea al castellano.

### **Otras actividades y servicios**

Siguiendo la práctica de otros CEMCOs, cada participante pronunciará una Conferencia técnica, de media hora de duración, sobre su actividad profesional, especialidad o panorámica de la edificación en su país, por lo que puede ser oportuno la preparación previa del texto o diapositivas destinadas a tal fin. Los aspirantes deberán enviar, con la documentación de preinscripción, un resumen de su eventual conferencia, mecanografiado a doble espacio y con una extensión máxima de una página en papel tamaño DIN A4 (210 x 297 mm).

Cada participante preparará un mínimo de 10 fichas bibliográficas sobre el tema de trabajo práctico que haya elegido, consultando las publicaciones correspondientes (libros y revistas) en la Sala de lectura de la Biblioteca del I.E.T.c.c. En el programa-horario semanal se indicará el tiempo asignado a esta actividad.

Los participantes prepararán, asimismo, en turno rotativo, resúmenes de las clases teóricas, para su oportuna publicación y distribución a todos los participantes.

El "Club Deportivo Costillares", formado por todas las personas del I.E.T.c.c., acogerá a los participantes que lo deseen, ofreciéndoles sus instalaciones (piscina, campos de deportes, salas de juego, etc.), y la posibilidad de participar en sus actividades.

Se celebrará un concurso de proyectos para la realización de una obra conmemorativa del CEMCO-88 entre todos los participantes en el mismo. La obra ganadora se inaugurará en el Acto de Clausura del Curso.

Los participantes estarán cubiertos por un seguro de accidentes durante las actividades programadas en el Curso. Los respectivos seguros de enfermedad correrán a cargo de los interesados.

## PROGRAMA DEL CEMCO-88

### Clases teóricas

I – Area de materiales.

A. Componentes del hormigón.

A.1. Cemento

1. Características y tipos de cementos.
2. Fabricación del cemento.
3. Hidratación del cemento.
4. Fraguados anómalos. Aterronamiento. Causas desencadenantes y soluciones para prevenirlos.
5. Propiedades mecánicas de la pasta de cemento endurecida.
6. Recomendaciones de empleo e incompatibilidades.
7. Normativa. Control de calidad.

A.2. Aridos.

- 8 Aspectos físico-mecánicos y físico-químicos.

A.3 Agua.

9. Aguas de amasado y de curado.

A.4. Aditivos.

10. Definición, clasificación y normativa.
11. Composición, mecanismos de acción y aplicaciones 1.
12. Composición, mecanismos de acción y aplicaciones 2.

B. Yesos, cales y morteros.

13. Yesos y cales.
14. Morteros tradicionales y morteros especiales 1.
15. Morteros tradicionales y morteros especiales 2.

C. Hormigones.

C.1. El hormigón en estado fresco.

16. Dosificación del hormigón: objetivos y métodos.
17. Propiedades del hormigón en estado fresco y factores que las afectan.
18. Curado del hormigón.
19. Hormigones preamasados.

C.2. El hormigón endurecido.

20. Estructura del hormigón.
21. Resistencia del hormigón y factores que la afectan.
22. Estabilidad dimensional.

C.3. Avances en la tecnología del hormigón.

23. Hormigones con fibras.
24. Hormigones ligeros y pesados. Hormigones de alta resistencia y hormigones de alta trabajabilidad.
25. Hormigones secos y hormigones expansivos. El futuro del hormigón.

D. Otros materiales de construcción.

26. Materiales bituminosos.

27. Plásticos.

28. Cerámica y vidrio.

E. Coloquio del Area I.

II – Area de Estructuras.

A. Cálculo de estructuras de hormigón.

1. Introducción a las estructuras 1.

2. Introducción a las estructuras 2.

3. Seguridad de las estructuras.

4. Métodos semiprobabilistas de los estados límites.

5. Acciones e hipótesis de carga.

6. Características de los materiales con vista al proyecto.

7. Cálculo de esfuerzos.

8. Estados límites últimos. Flexión-compresión.

9. Esfuerzo cortante.

10. Punzonamiento. Torsión.

11. Pandeo.

12. Estados límites de utilización. Fisuración. Deformaciones.

13. Estructuras sismorresistentes 1.

14. Estructuras sismorresistentes 2.

B. Control de calidad de estructuras de hormigón.

15. Planteamiento general.

16. Control de calidad del proyecto.

17. Control de calidad del hormigón. Bases teóricas.

18. Control de calidad del hormigón. Aplicación práctica.

19. Control de calidad del hormigón. Acciones a tomar en caso de no cumplimiento.

20. Control de calidad del acero, cemento y componentes del hormigón.

21. Control de calidad de la ejecución.

22. Ensayos no destructivos 1.

23. Ensayos no destructivos 2.

C. Análisis experimental de estructuras de hormigón.

24. Ensayos normalizados.

25. Pruebas de carga en edificación.

26. Pruebas de carga en obra civil. Puentes.

27. Análisis experimental de pavimentos de hormigón.

D. Normativa sobre estructuras de hormigón.

28. Código Modelo CEB/FIP.

29. Instrucción Española E.H.

30. Eurocódigo Estructuras de Hormigón.

31. Otras Normas: ACI, DIN.

E. Coloquio del Area II.

### III – Area de unidades funcionales de obra.

#### A. Cerramientos exteriores pesados.

1. Muro de doble hoja. Bloque de hormigón.
2. Muro de doble hoja. Ladrillo.
3. Prefabricados. Hormigones con fibras de vidrio.
4. Prefabricados. Hormigones con áridos ligeros aislantes.
5. Muros multicapas. Protección del muro e incorporación del aislamiento.

#### B. Cerramientos exteriores ligeros.

6. Paneles metálicos.
7. Muros-cortina.

#### C. Avances tecnológicos.

8. Cerramientos de cristal con nuevos anclajes estructurales.
9. Nuevas carpinterías. Procesos de producción, diseño y montaje.

#### D. La cubierta.

10. La cubierta plana. Concepto y diseño.
11. La cubierta plana. Calientes y ventiladas.
12. Nuevas soluciones. La cubierta invertida.
13. Nuevas soluciones. La cubierta de pendiente nula.
14. Cubiertas ajardinadas y transitables.
15. Cubiertas en climas extremos.
16. Sistemas de iluminación cenital en cubiertas.

#### E. Coloquio del Area III.

### IV – Area de habitabilidad y energía.

#### A. Higrotermia.

1. El clima externo. Efecto biofísico de los factores ambientales.
2. Fenómenos de la transmisión de calor en edificación. Propiedades termofísicas de los materiales.
3. Tipología y características de los materiales aislantes. Disposiciones constructivas.
4. Norma básica sobre condiciones térmicas en los edificios.
5. Procedimientos de cálculo en régimen transitorio.
6. Humedades, infiltraciones y condensaciones en edificios.
7. Puentes térmicos. Tipología y correcciones.

#### B. Acústica.

8. Conceptos generales.
9. Reverberación y absorción. Materiales.
10. Normativa y problemática de las instalaciones.

#### C. Instalaciones.

11. Exigencias funcionales.
12. Sistemas de distribución y de calefacción.
13. Fenómenos de corrosión.

#### D. Iluminación.

14. Conceptos generales.
15. Sistemas de iluminación.

- E. Vivienda pasiva.
  - 16. Principios generales de diseño bioclimático.
  - 17. Calentamiento pasivo.
  - 18. Tipología de sistemas pasivos.
  - 19. Enfriamiento pasivo.
  
- F. Vivienda activa.
  - 20. Aplicaciones térmicas y fotovoltaicas.
  - 21. Bomba de calor. Sistemas y experimentaciones.
  
- G. Coloquio del Area IV.

V – Area de patología.

- A. Patología del hormigón.
  - 1. Fenómenos patológicos debidos al cemento.
  - 2. Daños causados por los áridos.
  - 3. Aguas agresivas y de mar.
  - 4. Alteraciones causadas por la dosificación y fabricación incorrectas.
  - 5. Defectos debidos al transporte, colocación y compactación.
  
- B. Patología del proyecto y ejecución de estructuras de hormigón.
  - 6. Patología del proyecto. Errores de concepción.
  - 7. Errores en la determinación de acciones.
  - 8. Errores en el cálculo de esfuerzos.
  - 9. Errores en disposiciones constructivas.
  - 10. Errores en planos y otros documentos de proyecto.
  - 11. Patología de ejecución. Errores de ferralla.
  - 12. Errores varios en ejecución de estructuras de edificación.
  - 13. Patología de estructuras de edificios convencionales.
  - 14. Patología de estructuras de edificios no convencionales.
  
- C. Patología de obras en servicio.
  - 15. Inspección periódica y síntomas patológicos.
  - 16. La fisuración y sus causas.
  - 17. Reconocimiento del terreno y patología de suelos.
  - 18. Fallos intrínsecos de cimentaciones.
  - 19. Efectos de las construcciones sobre cimentaciones próximas.
  - 20. Recalce de cimentaciones.
  - 21. Patología bajo la acción del fuego.
  
- D. Reparación de estructuras de hormigón.
  - 22. Concepción y diseño de referzos estructurales.
  - 23. Ejemplos de refuerzos de estructuras de edificios.
  - 24. Refuerzos mediante resinas.
  - 25. Refuerzos mediante otros métodos.
  
- E. Coloquio del área V.

## Trabajos prácticos

Se suprimirán aquellos trabajos prácticos que no hubiesen sido elegidos al menos por cuatro participantes.

- TP.1. Cálculo de estructuras con ordenador.
- TP.2. Patología de estructuras en construcción o en servicio.
- TP.3. Rehabilitación de edificios.
- TP.4. Cálculo de pérdidas térmicas en viviendas.
- TP.5. Diseño asistido con ordenador (C.A.D.).
- TP.6. Métodos de ensayos no destructivos.
- TP.7. Ensayos de aislamiento acústico.
- TP.8. Lenguajes de programación.
- TP.9. Adherencia de armaduras.

## Seminarios

- S.1. Durabilidad y mecanismos de degradación en materiales de construcción.
- S.2. Corrosión y protección de materiales metálicos utilizados en construcción.
- S.3. Diseño asistido con computador en arquitectura e ingeniería.
- S.4. Cementos con adiciones activas y cementos especiales: Características, problemática y normativa.
- S.5. Cálculo de estructuras de hormigón con ordenadores personales compatibles.
- S.6. Rehabilitación en edificación.
- S.7. Análisis experimental de estructuras de hormigón.
- S.8. Garantía de calidad en construcción.
- S.9. Tecnologías para viviendas de interés social en Latinoamérica.
- S.10. Proyecto y construcción de estructuras de hormigón pretensado.
- S.11. Metodología, cálculo y patología de los sistemas activos en la energía solar.
- S.12. Diagnóstico, protección y reparación de obras de hormigón.
- S.13. Seguridad e higiene en la Construcción.

## Visitas

El programa de visitas se concretará a la vista de las actividades profesionales de los participantes en CEMCO-88, entre las que se indican a continuación:

- Conjunto histórico artístico.
- Fábrica de cemento y laboratorio de ensayos.
- Plan de saneamiento integral de Madrid.
- Laboratorios del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas.
- Nudo de comunicaciones.
- Viviendas en construcción.
- Conjunto residencial.
- Edificio de altura para oficinas.
- Centro de diseño CAD-CAM.
- Instituto Tecnológico de Seguridad MAPFRE.

# Análisis de piezas curvas pretensadas (I)

Manuel Martínez Lafuente  
 Profesor Titular de Estructuras I  
 de la E.T.S.A. Madrid

## INTRODUCCION

En la exposición que sigue se recoge la metodología general del análisis de las vigas de "planta curva" y se obtienen las relaciones fundamentales que resuelven la determinación de los estados de sollicitación y de deformación de estas piezas frente a las acciones genéricas de diseño, que se particularizan para el caso en que dichas acciones se identifiquen con las que proporciona el pretensado. A través de las relaciones que se exponen, queda patente la influencia de la "curvatura" en el comportamiento estructural, que constituye una generalización del sobradamente conocido en las piezas de directriz recta. En un próximo artículo se particularizará el estudio genérico antedicho, para las vigas circulares de sección constante.

## CONVENIOS GENERALES

### Características geométricas de las vigas de planta curva

Si se considera una curva plana, tal como la  $\widehat{AB}$  representada en la Figura n° 1, y se supone que dicha curva es el lugar geométrico de los baricentros de secciones planas que poseen un eje principal de simetría perpendicular al plano que contiene a aquélla, se obtiene una geometría que, bajo el punto de vista del análisis estructural, recibe la denominación de "viga de planta curva", siempre que se verifiquen, además, las condiciones que más adelante se detallan. La curva  $\widehat{AB}$ , a la que en lo sucesivo se denominará "directriz", tendrá como características propias, además de las que definen su geometría en el plano que la contiene, las que permitan identificar la figura plana resultante de su intersección por los planos normales a la misma. En un punto genérico, dicha figura será denominada como "sección transversal", o, simplemente "sección" (véase Figura n° 2).

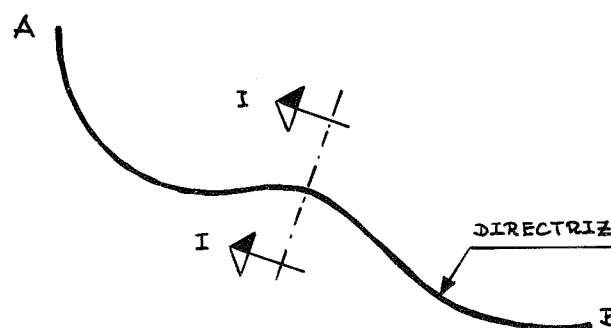


Fig. 1. Viga genérica de planta curva

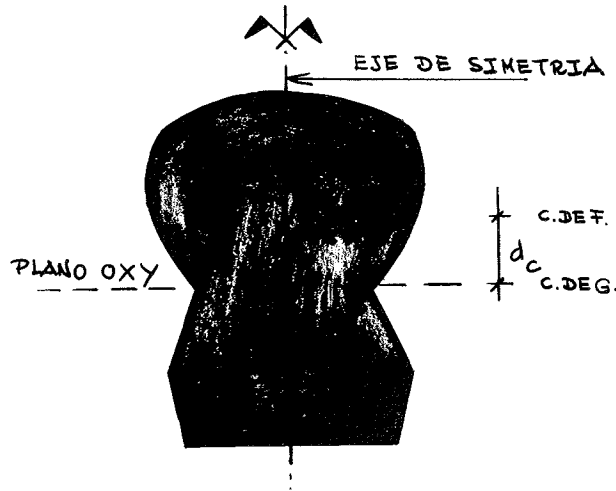


Fig. 2. Sección transversal I - I

Las condiciones adicionales que debe satisfacer la pieza descrita con anterioridad para que pueda ser considerada a todos los efectos como “viga de planta curva” son las siguientes:

- a) La directriz debe ser continua.
- b) Las dimensiones de la sección transversal de la pieza deben ser pequeñas comparadas con el radio de curvatura y la longitud de la directriz.
- c) La variación de la sección transversal de la pieza a lo largo de la directriz debe ser suave, para poder identificar su superficie exterior como “suficientemente lisa”.

Admitiendo estas premisas y suponiendo que el plano que contiene a la directriz de la viga sea el OXY (véase Figura n° 3), las características geométricas de la misma que resultan de interés para el análisis estructural son las siguientes:

- a) Las coordenadas cartesianas “x” e “y”.
- b) La abscisa curvilínea “s”.
- c) El ángulo de contingencia “ $\alpha$ ”.
- d) El radio de curvatura “ $\rho$ ”.
- e) El área de la sección “ $\Omega$ ”.
- f) Los momentos de inercia de la sección respecto del eje contenido en el plano OXY, orientado en cada sección hacia del centro de curvatura de la pieza,  $I_n$ , y con relación al eje vertical,  $I_z$ , que contienen al centro de gravedad de la sección transversal.
- g) El módulo de torsión, K, de la sección (\*).
- h) La distancia vertical entre el centro de gravedad y el centro de esfuerzos cortantes,  $d_c$ , en una sección genérica.

Si se supone que las coordenadas cartesianas de la pieza curva admiten una expresión paramétrica generalizada, los valores del ángulo de contingencia y del radio de curvatura en una sección cualquiera P vienen dados por:

(\*) Se denomina módulo de torsión a la relación entre la rigidez torsional de la sección y el módulo de rigidez transversal.



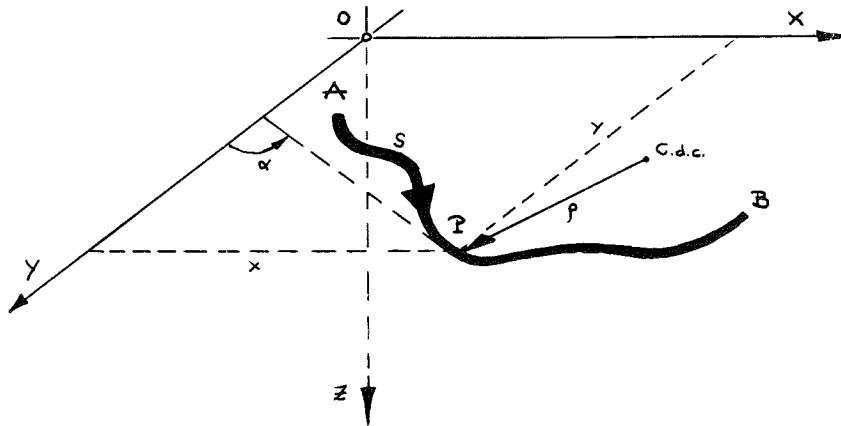


Fig. 3. Coordenadas generales y elementos característicos de la geometría de la viga de planta curva

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \text{arc tg } \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \\ \rho &= \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}} \end{aligned} \right] \quad (1)$$

donde el punto designa a la derivada con relación al parámetro de referencia que define la geometría de la pieza.

A su vez, el elemento diferencial de longitud de la directriz curva viene definido por:

$$ds = \rho \cdot d\alpha = \cos \alpha \cdot dx + \text{sen } \alpha \cdot dy \quad (2)$$

En lo que sigue, se admitirá que, tanto las coordenadas cartesianas de la directriz como las características geométricas de la sección transversal de la pieza, pueden expresarse explícitamente en función de un mismo parámetro. Habitualmente, dicho parámetro se identificará con la propia abscisa curvilínea de la pieza curva, o con el ángulo de contingencia (caso, por ejemplo, de la viga circular).

### Hipótesis básicas sobre el comportamiento estructural

Como punto de partida del desarrollo que se expone a continuación, se asumen las siguientes hipótesis básicas de comportamiento estructural:

- a) Las cargas y momentos que actúan, bien sobre el conjunto de la estructura, bien sobre cualquier parte segregada de la misma, están en equilibrio estático.
- b) El material que constituye la viga es homogéneo e isótropo, obedeciendo a un comportamiento elástico de tipo hookeano, que queda identificado por el valor de su módulo de Young, E, y por el de su módulo de elasticidad transversal, G.
- c) La deformación estructural de la viga se acomoda a las leyes básicas de la teoría simplificada de la Resistencia de Materiales, que se concretan en este caso en:
  - c.1) Aceptar la validez de la hipótesis de Navier-Bernouilli (deformación plana de las secciones solicitadas a flexión) y de la de Kirkchoff (conservación de la ortogonalidad de las normales a la directriz).

- c.2) Admitir la hipótesis de Saint-Venant (proporcionalidad entre el giro elemental y el momento de torsión) frente a las sollicitaciones torsoras.
- c.3) Despreciar las deformaciones debidas al esfuerzo cortante frente a las motivadas por el esfuerzo axial, los momentos flectores y el momento torsor.
- c.4.) Suponer que los desplazamientos de la pieza son pequeños y despreciables frente a las dimensiones iniciales de la viga, pudiendo, por tanto, prescindirse en el análisis de los efectos de “segundo orden”.

Bajo estos supuestos, la pieza curva vendrá, en general, sollicitada por esfuerzos axiales, cortantes, flectores y torsores, de manera que, en cada sección de la misma, la resultante de las cargas y momentos que actúan a uno y otro lado de esta última queda determinada por una fuerza tangente a la directriz, contenida en el plano OXY (“esfuerzo axial”), una fuerza normal a la directriz, contenida en el plano OXY (“cortante radial”), una fuerza perpendicular al plano que contiene a la directriz (“cortante vertical”), un momento sobre el eje contenido en el plano OXY, dirigido según la normal a la viga en cada sección (“momento radial”), un momento alrededor del eje perpendicular al plano que contiene a la directriz (“momento vertical”) y un momento alrededor del eje paralelo a la tangente a la directriz, que pasa por el centro de esfuerzos cortantes de la pieza (“momento torsor”).

Estas sollicitaciones pueden verse reducidas a sólo tres, cuando las cargas que actúan sobre la pieza son verticales y los momentos son de eje coplanario con el plano OXY; en estos casos se anulan el esfuerzo axial, el cortante radial y el momento vertical. Análogamente, si las cargas exteriores están contenidas en el plano OXY y los momentos actuantes son de eje vertical, se anulan el esfuerzo cortante vertical y el momento flector radial (\*).

Como consecuencia, los movimientos de la estructura vendrán, en general, definidos por un desplazamiento dirigido según la tangente a la viga (“desplazamiento tangencial”), un desplazamiento dirigido según la normal a la misma (“desplazamiento radial”), un desplazamiento según el eje OZ (“desplazamiento vertical” o “flecha”), un giro sobre el eje normal a la viga contenido en el plano OXY (“giro a flexión radial”), un giro sobre el eje perpendicular al plano que contiene a la viga (“giro a flexión vertical”) y por un giro sobre el eje paralelo a la tangente a la viga, que pasa por el centro de esfuerzos cortantes de la sección (“giro de torsión”). Dichos movimientos generalizados, podrán verse también simplificados cuando las cargas y momentos que actúan sobre la viga admitan componentes nulas con relación al plano OXY o respecto del eje OZ, como se verá más adelante.

### Convenio de signos

A efectos del análisis estructural de la pieza curva debe considerarse, complementariamente con el sistema general de coordenadas OXYZ introducido con anterioridad, un sistema de referencia local, variable de una sección a otra de la viga, en el que se definen cómo-damente los movimientos y sollicitaciones estructurales.

Para ello, basta con establecer previamente un “sentido de avance” en la pieza, adoptando como extremo “dorsal” a uno cualquiera de los puntos extremos de la viga  $\overline{AB}$  (normalmente se toma como dorsal al extremo A) y estableciendo en este último el origen de coordenadas curvilíneas de la estructura. El “sentido de avance” queda identificado entonces con el sentido creciente de las abscisas curvilíneas (“s”) al recorrer la pieza desde su extremo “dorsal” (A) hacia su extremo frontal” (B), tal como se define en la figura nº 4.

(\*) El momento torsor podría anularse también, en estos supuestos, si coincidieran el centro de gravedad y el de esfuerzos cortantes.

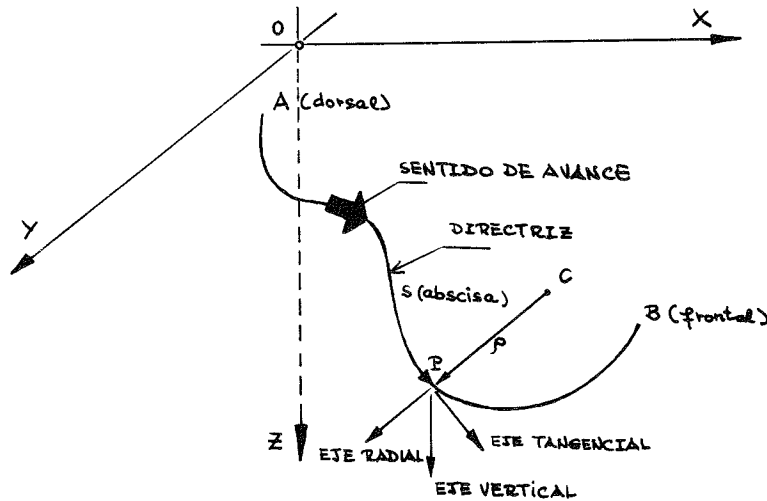


Fig. 4. Sentido de avance y convenio de signos

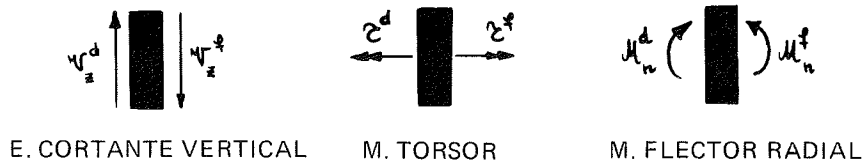
Considerando una sección cualquiera de la viga, tal como la definida por el punto P, pueden definirse tres ejes principales, ortogonales entre sí, cuyo sentido positivo es el siguiente:

- El perpendicular al plano de la directriz, según el sentido creciente del eje general de referencia OZ (“eje vertical”).
- El contenido en el plano OXY, orientado en el sentido de avance creciente de la viga (“eje tangencial”).
- El normal a la directriz y contenido en el plano de la misma, resultante de girar el eje tangencial 90 grados según el sentido dextrógiro alrededor del eje vertical (“eje radial”).

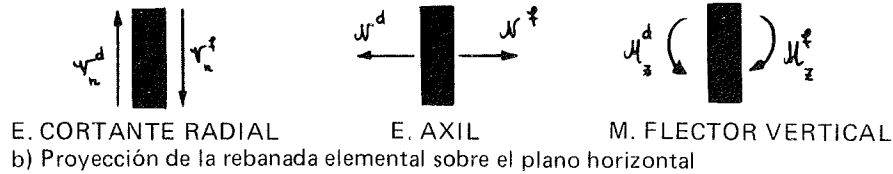
Las fuerzas exteriores y los desplazamientos estructurales se considerarán positivos cuando su sentido coincida con el positivo de los ejes antedichos. Los momentos actuantes sobre la pieza y los giros de la deformada de la misma, serán considerados positivos cuando su sentido coincida con el del giro dextrógiro alrededor de los ejes anteriores, según el sentido creciente definido para cada uno de ellos. Partiendo de este criterio, se adoptarán como positivas a las sollicitaciones internas actuantes sobre la pieza, cuando así lo sean los esfuerzos y momentos actuantes sobre la cara frontal de la “rebanada elemental” limitada por las secciones transversales correspondientes a dos puntos de la viga infinitamente próximos. Así, introduciendo la nomenclatura siguiente:

- $N$  : esfuerzo axial
- $V_n$  : esfuerzo cortante radial
- $V_z$  : esfuerzo cortante vertical
- $\tau$  : momento torsor
- $M_n$  : momento flector radial
- $M_z$  : momento flector vertical

en la Figura nº 5 se representan las sollicitaciones internas positivas en una rebanada elemental genérica.



a) Proyección de la rebanada elemental sobre un plano vertical



b) Proyección de la rebanada elemental sobre el plano horizontal

Fig. 5. Solicitaciones internas positivas en la viga ( los superíndices " d " y " f " designan, respectivamente, a los esfuerzos dorsales y frontales en la rebanada ).

## SOLICITACIONES INTERNAS

### Generalidades

En lo que sigue, se supondrá que las cargas y momentos que actúan sobre la pieza se distribuyen continuamente a lo largo de la misma siguiendo el avance de la directriz. Las intensidades de las fuerzas con dirección tangencial, radial y vertical, se designarán, respectivamente, por  $q_t$ ,  $q_n$  y  $q_z$ , mientras que los momentos actuantes sobre dichos ejes se denotarán, respectivamente, como  $m_t$ ,  $m_n$  y  $m_z$ , referidos ambos a una longitud unitaria de la directriz y suponiendo que actúan en el plano OXY. La existencia de dichas acciones origina la movi- lización de las sollicitaciones internas estructurales, que se deducen de aquéllas mediante las relaciones que se exponen en los apartados siguientes.

### Ecuaciones de equilibrio de la rebanada elemental

Considérese la rebanada elemental limitada por las secciones transversales de la direc- triz, definidas por los puntos P y P', representada en la Figura n° 6. Debido a las acciones externas, las sollicitaciones internas en la viga variarán, en general, de uno a otro extremo de la rebanada, como consecuencia de las ecuaciones de equilibrio estático del conjunto de la misma, que proporcionan las relaciones siguientes:

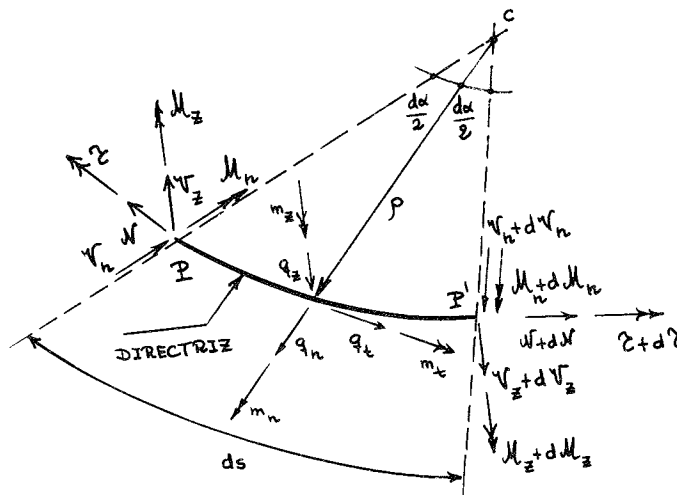


Fig. 6. Acciones y sollicitaciones sobre la rebanada elemental

a) Para las fuerzas:

$$\left. \begin{aligned} q_z &= - \frac{d \mathcal{Q}_z}{ds} \\ q_n &= - \frac{d \mathcal{Q}_n}{ds} + \frac{f}{\rho} \\ q_t &= - \frac{d \cdot f}{ds} - \frac{\mathcal{Q}_n}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

b) Para los momentos:

$$\left. \begin{aligned} m_z &= - \frac{d \cdot \mathcal{M}_z}{ds} - \mathcal{Q}_n \\ m_n &= - \frac{d \cdot \mathcal{M}_n}{ds} + \mathcal{Q}_z + \frac{\tau}{\rho} \\ m_t &= - \frac{\cdot \mathcal{M}_n}{\rho} - \frac{d \tau}{ds} + q_n \cdot d_c \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Eliminando  $\mathcal{Q}_n$  o  $\mathcal{Q}_z$  entre la segunda y tercera de las ecuaciones (3), se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} (\rho \cdot \frac{d \mathcal{Q}_n}{ds}) + \frac{\mathcal{Q}_n}{\rho} &= - q_t - \frac{d}{ds} (\rho \cdot q_n) \\ \frac{d}{ds} (\rho \cdot \frac{d \cdot f}{ds}) - \frac{f}{\rho} &= - q_n - \frac{d}{ds} (\rho \cdot q_t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Procediendo análogamente con la segunda y tercera ecuaciones del sistema (4) se llega al resultado siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{M}_n}{d \alpha^2} + \mathcal{M}_n &= - (m_t - q_n \cdot d_c + \frac{d m_n}{d \alpha} - \frac{d \mathcal{Q}_z}{d \alpha}) \cdot \rho + (\mathcal{Q}_z - m_n) \frac{d \rho}{d \alpha} \\ \frac{d^2 \tau}{d \alpha^2} + \tau &= [m_n - \mathcal{Q}_z - \frac{d}{d \alpha} (m_t - q_n \cdot d_c)] \cdot \rho - (m_t - q_n \cdot d_c) \frac{d \rho}{d \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Las expresiones anteriores evidencian que el comportamiento estructural de la viga genérica de planta curva es la superposición del funcionamiento de un "arco plano" (motivado por la actuación de  $q_n$ ,  $q_t$  y  $m_z$ ) con el de una "viga balcón" (debido a  $q_z$ ,  $m_n$  y  $m_t'$ ), donde  $m_t'$  es la torsión equivalente por unidad de longitud, cuyo valor es:

$$m_t' = m_t - q_n \cdot d_c \quad (7)$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales anteriores para cada caso, en función de la geometría de la pieza, de las cargas exteriores y de las condiciones de contorno, se obtienen las sollicitaciones internas en la viga, para cualquier sección de la misma. La solución general de dichas ecuaciones coincide con la que se expone en el próximo apartado.

## Expresión general de las solicitaciones internas, a partir de las cargas exteriores

Sea la viga  $\widehat{AB}$  representada en la Figura n° 7 y considérese un punto cualquiera de su directriz, tal como el P, identificado por la abscisa curvilínea "s". Seccionando la viga por un plano normal a la directriz que pase por el punto P, los esfuerzos resultantes a uno y otro lado de dicha sección deberán equilibrar estáticamente al conjunto de fuerzas y momentos actuantes sobre cada uno de los dos trozos de viga desgajados por el corte. Como consecuencia, a partir de los esfuerzos en cualquiera de los dos extremos de la pieza, las solicitaciones internas en una sección genérica quedan determinadas al establecer las condiciones generales de equilibrio de fuerzas y momentos entre dicho extremo de la viga y la sección anterior.

Tomando como referencia a las solicitaciones dorsales, los esfuerzos en la sección transversal definida por el punto P se expresan, a partir de las cargas exteriores, mediante las relaciones siguientes:

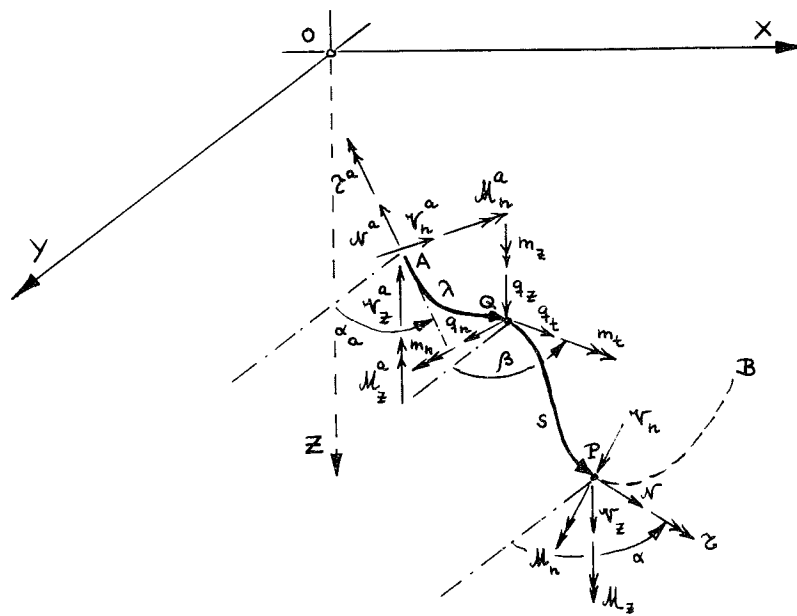


Fig. 7. Solicitaciones internas en una sección genérica

$$\left. \begin{aligned}
 Q_z &= Q_z^a + Q_z^{\text{ext}}(s) \\
 Q_n &= N^a \cdot \text{sen}(\alpha - \alpha_a) + Q_n^a \cdot \text{cos}(\alpha - \alpha_a) + Q_n^{\text{ext}}(s) \\
 N &= N^a \cdot \text{cos}(\alpha - \alpha_a) - Q_n^a \cdot \text{sen}(\alpha - \alpha_a) + N^{\text{ext}}(s) \\
 M_z &= M_z^a + N^a \cdot d'(s, o) - Q_n^a \cdot r'(s, o) + M_z^{\text{ext}}(s) \\
 M_n &= M_n^a \cdot \text{cos}(\alpha - \alpha_a) + \tau^a \cdot \text{sen}(\alpha - \alpha_a) + Q_z^a \cdot r(s, o) + M_n^{\text{ext}}(s) \\
 \tau &= \tau^a \cdot \text{cos}(\alpha - \alpha_a) - M_n^a \cdot \text{sen}(\alpha - \alpha_a) - Q_z^a \cdot d(s, o) + \tau^{\text{ext}}(s)
 \end{aligned} \right\} (8)$$

siendo:

- "a" el superíndice (solicitaciones) o subíndice (ángulos) que identifica al extremo A.
- $r(s, o)$ ,  $d(s, o)$ ,  $r'(s, o)$  y  $d'(s, o)$  unas funciones que dependen exclusivamente de la geometría de la pieza (véase Figura n° 8) cuyo valor es:

$$\begin{aligned}
 r(s, o) &= (x - x_a) \cdot \text{sen } \alpha + (y - y_a) \cdot \text{cos } \alpha \\
 d(s, o) &= -(x - x_a) \cdot \text{cos } \alpha + (y - y_a) \cdot \text{sen } \alpha \\
 r'(s, o) &= (x - x_a) \cdot \text{sen } \alpha_a + (y - y_a) \cdot \text{cos } \alpha_a \\
 d'(s, o) &= -(x - x_a) \cdot \text{cos } \alpha_a + (y - y_a) \cdot \text{sen } \alpha_a
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

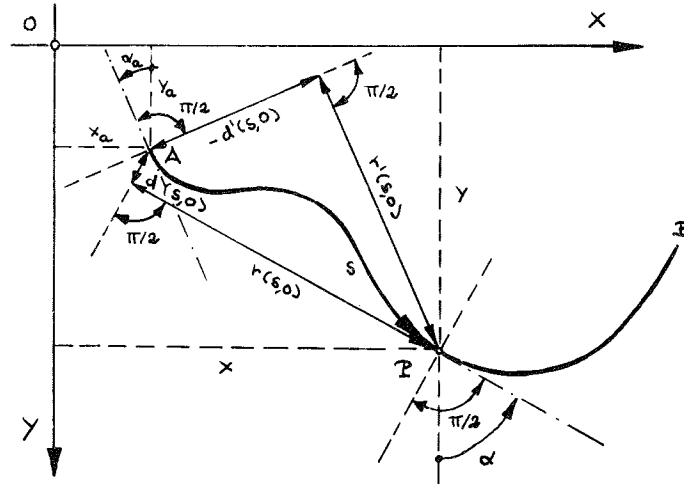


Fig. 8. Representación gráfica de las funciones  $r(s, o)$ ,  $d(s, o)$ ,  $r'(s, o)$  y  $d'(s, o)$ .

• “ext” el superíndice que designa a la contribución de las acciones exteriores en las sollicitaciones internas de la sección genérica, que se escribe en la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_z^{\text{ext}}(s) &= - \int_0^s q_z(\lambda) \cdot d\lambda \\
 \mathcal{Q}_n^{\text{ext}}(s) &= - \int_0^s [q_t(\lambda) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) + q_n(\lambda) \cdot \text{cos}(\alpha - \beta)] \cdot d\lambda \\
 \mathcal{V}^{\text{ext}}(s) &= - \int_0^s [q_t(\lambda) \cdot \text{cos}(\alpha - \beta) - q_n(\lambda) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)] \cdot d\lambda \\
 \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(s) &= - \int_0^s [m_z(\lambda) + q_t(\lambda) \cdot d'(s, \lambda) - q_n(\lambda) \cdot r'(s, \lambda)] \cdot d\lambda \\
 \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(s) &= - \int_0^s [m_n(\lambda) \cdot \text{cos}(\alpha - \beta) + m_t(\lambda) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) + q_z(\lambda) \cdot r(s, \lambda)] \cdot d\lambda \\
 \tau^{\text{ext}}(s) &= \int_0^s [m_n(\lambda) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) - m_t(\lambda) \cdot \text{cos}(\alpha - \beta) + q_z(\lambda) \cdot d(s, \lambda)] \cdot d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

donde:

••  $\lambda$  designa a la abscisa curvilínea de una sección genérica de la viga, comprendida entre el extremo A y la sección de abscisa curvilínea “s”, tal como la que se identifica por el punto Q en la Figura n° 7.

••  $r(s, \lambda)$ ,  $d(s, \lambda)$ ,  $r'(s, \lambda)$  y  $d'(s, \lambda)$  son funciones que dependen sólo de la geometría de la directriz (véase Figura n° 9) y adoptan los valores siguientes:

$$\begin{aligned}
 r(s, \lambda) &= (x - \xi) \cdot \text{sen } \alpha + (y - \eta) \cdot \text{cos } \alpha \\
 d(s, \lambda) &= -(x - \xi) \cdot \text{cos } \alpha + (y - \eta) \cdot \text{sen } \alpha \\
 r'(s, \lambda) &= (x - \xi) \cdot \text{sen } \beta + (y - \eta) \cdot \text{cos } \beta \\
 d'(s, \lambda) &= -(x - \xi) \cdot \text{cos } \beta + (y - \eta) \cdot \text{sen } \beta
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

siendo  $\xi$  y  $\eta$ , respectivamente, la abscisa y la ordenada del punto Q en el sistema general de referencia OXY, y  $\beta$  el ángulo de contingencia en dicho punto (\*).

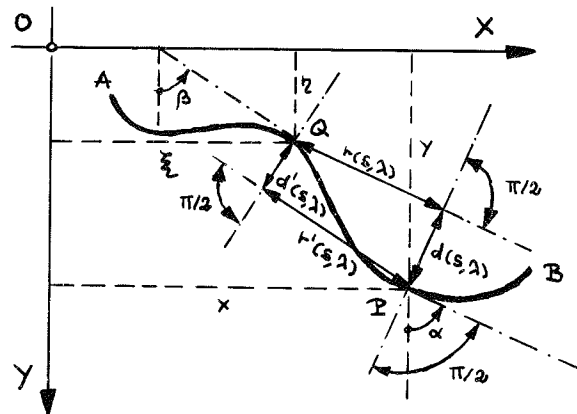


Fig. 9. Representación gráfica de las funciones  $r(s, \lambda)$ ,  $d(s, \lambda)$ ,  $r'(s, \lambda)$  y  $d'(s, \lambda)$ .

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, puede comprobarse fácilmente que las expresiones (8) verifican las ecuaciones diferenciales (3), (4), (5) y (6), por lo que constituyen la solución general que define las sollicitaciones internas en la viga curva, a partir de las cargas exteriores.

Hay que hacer notar que las funciones  $q_z(\lambda)$ ,  $q_t(\lambda)$ ,  $q_n(\lambda)$ ,  $m_z(\lambda)$ ,  $m_n(\lambda)$  y  $m_t^i(\lambda)$  incluyen, tanto las cargas exteriores directamente aplicadas sobre la viga como las reacciones exteriores que puedan actuar entre las secciones definidas por los puntos A y P ( $0 < \lambda < s$ ) y que, si bien las primeras son siempre conocidas, no ocurre igual con las segundas, como tampoco se conocen, en general, las sollicitaciones internas en el extremo dorsal de la pieza.

Por lo tanto, pese a que las fórmulas (8) son de aplicación general cualquiera que sea la geometría de la viga y las cargas que sobre ella actúan, no son suficientes para conocer el estado de sollicitación interna de la estructura, salvo en el caso en que ésta sea "isostática" (viga en voladizo, por ejemplo). Será necesario, pues, recurrir a condiciones complementarias que tengan en cuenta la deformación estructural, para poder resolver el problema con toda generalidad, como se expondrá en los apartados siguientes.

En ocasiones, puede resultar de utilidad el referir los esfuerzos al sistema general de referencia OXYZ. Estos últimos se pueden definir, a partir de las sollicitaciones internas de la viga, mediante las relaciones siguientes (véase Figura nº 10):

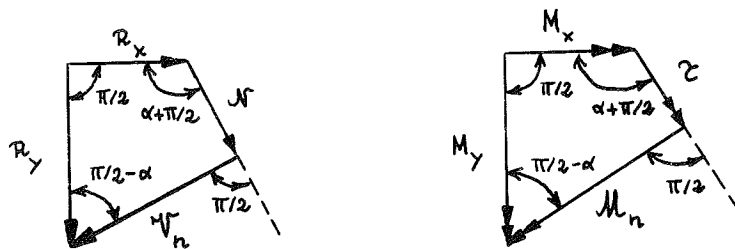


Fig. 10. Esfuerzos generales y sollicitaciones internas

(\*) Las fórmulas (9) son una particularización de las expresiones (11) para el extremo dorsal de la viga.



$$\left. \begin{aligned}
 R_x &= N \cdot \sin \alpha - Q_n \cdot \cos \alpha \\
 R_y &= N \cdot \cos \alpha + Q_n \cdot \sin \alpha \\
 M_x &= -M_n \cdot \cos \alpha + \tau \cdot \sin \alpha \\
 M_y &= M_n \cdot \sin \alpha + \tau \cdot \cos \alpha
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Si se particularizan las expresiones (8) para el extremo frontal de la viga, se obtienen las "ecuaciones de equilibrio del conjunto" que se escriben en la forma (véase Figura n° 11):

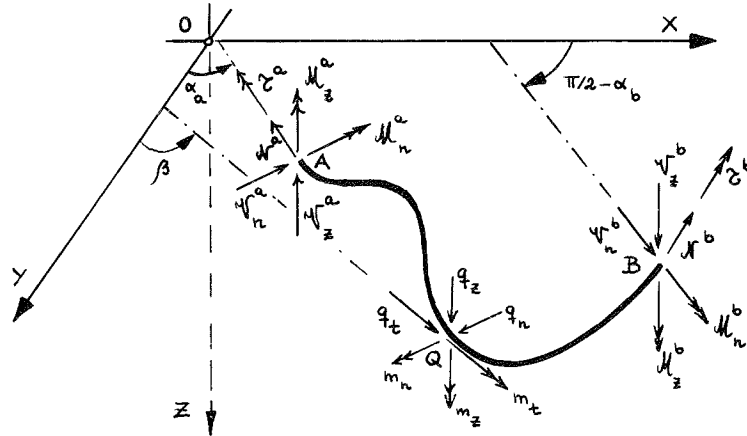


Fig. 11. Solicitaciones extremas y cargas exteriores

$$\left. \begin{aligned}
 Q_z^b &= Q_z^a + Q_z^{\text{ext}}(\ell) \\
 Q_n^b &= N^a \cdot \sin(\alpha_b - \alpha_a) + Q_n^a \cdot \cos(\alpha_b - \alpha_a) + Q_n^{\text{ext}}(\ell) \\
 N^b &= N^a \cdot \cos(\alpha_b - \alpha_a) - Q_n^a \cdot \sin(\alpha_b - \alpha_a) + N^{\text{ext}}(\ell) \\
 M_z^b &= M_z^a + N^a \cdot d'(\ell, 0) - Q_n^a \cdot r'(\ell, 0) + M_z^{\text{ext}}(\ell) \\
 M_n^b &= M_n^a \cdot \cos(\alpha_b - \alpha_a) + \tau^a \cdot \sin(\alpha_b - \alpha_a) + Q_z^a \cdot r(\ell, 0) + M_n^{\text{ext}}(\ell) \\
 \tau^b &= \tau^a \cdot \cos(\alpha_b - \alpha_a) - M_n^a \cdot \sin(\alpha_b - \alpha_a) - Q_z^a \cdot d(\ell, 0) + \tau^{\text{ext}}(\ell)
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

donde  $\ell$  es el desarrollo total de la directriz de la pieza y  $x_b$ ,  $y_b$  y  $\alpha_b$  son, respectivamente, la abscisa, la ordenada y el ángulo de contingencia en el punto B.

Las ecuaciones (13) coinciden con las seis condiciones generales de equilibrio estático de la viga genérica, debiendo ser tomadas en consideración siempre que la viga esté coaccionada en sus extremos o cuando actúen sobre éstos cargas o momentos localizados de cualquier tipo.

## DEFORMACIONES Y MOVIMIENTOS DE LA ESTRUCTURA

### Consideraciones previas

En una pieza de directriz recta, las deformaciones de una rebanada elemental solicitada por esfuerzos axiales, momentos flectores y torsiones, vienen definidas por las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= \frac{N}{E\Omega} \cdot ds \\ d\theta &= \frac{M}{EI} \cdot ds \\ d\omega &= \frac{\tau}{GK} \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Sin embargo, cuando la directriz de la viga es curva, dichas expresiones, aunque siguen siendo válidas a nivel elemental, necesitan modificarse para poder tomar en consideración la influencia de la curvatura sobre los desplazamientos y giros con componente radial y tangencial a la pieza. Se obtienen así unas nuevas "relaciones constitutivas" de ámbito de aplicación más amplio, de las que se derivan directamente las expresiones (14) cuando se trata de vigas rectas.

### Ecuaciones que gobiernan la deformación de la rebanada elemental

Considérese una rebanada elemental de longitud "ds", comprendida entre las secciones normales a la directriz trazadas por los puntos P y P' (véase Figura nº 12).

Sean  $(w, \delta_n, \delta_t, \varphi_z, \varphi_n, \varphi_t)$  y  $(w + dw, \delta_n + d\delta_n, \delta_t + d\delta_t, \varphi_z + d\varphi_z, \varphi_n + d\varphi_n, \varphi_t + d\varphi_t)$ , respectivamente, los desplazamientos (vertical, radial, tangencial) y los giros (sobre los ejes vertical, radial y tangencial) en las caras dorsal y frontal de la rebanada.

Denominando por  $d\epsilon$ ,  $d\theta_n$ ,  $d\theta_z$  y  $d\omega$ , respectivamente, a la elongación, a la rotación según el eje radial, a la rotación según el eje vertical y a la rotación sobre el eje tangencial de la rebanada elemental, que se suponen aplicadas en el punto central de la misma, las condiciones de compatibilidad de movimientos entre P y P' imponen las relaciones siguientes:

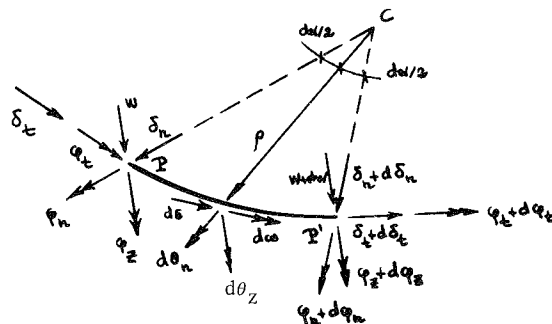


Fig. 12. Deformaciones y movimientos en una rebanada

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_z &= d\theta_z \\ d\varphi_n &= d\theta_n + \varphi_t \cdot d\alpha \\ d\varphi_t &= d\omega - \varphi_n \cdot d\alpha \\ d\delta_t &= d\epsilon - \delta_n \cdot d\alpha \\ d\delta_n &= \delta_t \cdot d\alpha + \varphi_z \cdot \rho \cdot d\alpha \\ dw &= -\varphi_n \cdot \rho \cdot d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Si, en las cuatro primeras ecuaciones anteriores, se reemplazan las deformaciones elementales por los valores definidos en las expresiones (14), se llega a:

$$\left. \begin{aligned} M_z &= E \cdot I_z \cdot \frac{d \varphi_z}{ds} \\ M_n &= E \cdot I_n \cdot \left[ \frac{d \varphi_n}{ds} - \frac{\varphi_t}{\rho} \right] \\ \tau &= G \cdot K \cdot \left[ \frac{d \varphi_t}{ds} + \frac{\varphi_n}{\rho} \right] \\ N &= E \cdot \Omega \cdot \left[ \frac{d \delta_t}{ds} + \frac{\delta_n}{\rho} \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

expresiones que proporcionan, con toda generalidad, las relaciones existentes entre los momentos de flexión, torsión y el esfuerzo axial, con los movimientos de la viga.

Por su parte, las dos últimas ecuaciones del sistema (15) pueden escribirse, alternativamente, en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_z &= \frac{d \delta_n}{ds} - \frac{\delta_t}{\rho} \\ \varphi_n &= - \frac{dw}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

La segunda de las relaciones (17) permite expresar el momento flector radial y el momento torsor en función del desplazamiento vertical y del giro de torsión. Se llega así a:

$$\left. \begin{aligned} M_n &= - E \cdot I_n \cdot \left[ \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{\varphi_t}{\rho} \right] \\ \tau &= G \cdot K \cdot \left[ \frac{d \varphi_t}{ds} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dw}{ds} \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Las ecuaciones (16) a (18) constituyen el sistema general de relaciones constitutivas, aplicables al análisis de la pieza curva plana, y suponen una generalización de las expresiones (14), utilizadas habitualmente en el análisis de piezas rectas. La integral general de los sistemas (16) y (17), particularizada en cada caso con las condiciones de contorno correspondientes, proporciona los movimientos estructurales, en función de las solicitaciones internas en la viga, que, a su vez, dependen de las acciones exteriores. Dicha integral general puede obtenerse directamente razonando sobre las hipótesis básicas admitidas en relación a la deformación de la viga, tal como se expone a continuación.

### Expresión general de los movimientos en función de las solicitaciones internas

Considérese nuevamente la viga de directriz  $\widehat{AB}$  y supóngase que, por efecto de las acciones exteriores, los movimientos del extremo dorsal son  $(w^a, \delta_n^a, \delta_t^a, \varphi_z^a, \varphi_n^a, \varphi_t^a)$ , tal como expresa la Figura nº 13.

En una sección genérica, tal como la P, los movimientos de la viga ( $w$ ,  $\delta_n$ ,  $\delta_t$ ,  $\varphi_z$ ,  $\varphi_n$ ,  $\varphi_t$ ) son el resultado de la acumulación de los desplazamientos globales y deformaciones elementales que se producen entre el extremo A y dicha sección, admitiendo que, en la deformación conjunta, la viga acompaña a cada distorsión elemental como si se tratase de un cuerpo rígido.

Bajo este supuesto, los movimientos en cualquier sección pueden obtenerse por integración de las componentes introducidas por las deformaciones elementales que tienen lugar entre el extremo A y la sección considerada y añadiendo las proyecciones que sobre los ejes locales en esta sección producen los movimientos del extremo dorsal de la viga.

Procediendo de esta forma, se llega fácilmente a las expresiones siguientes:

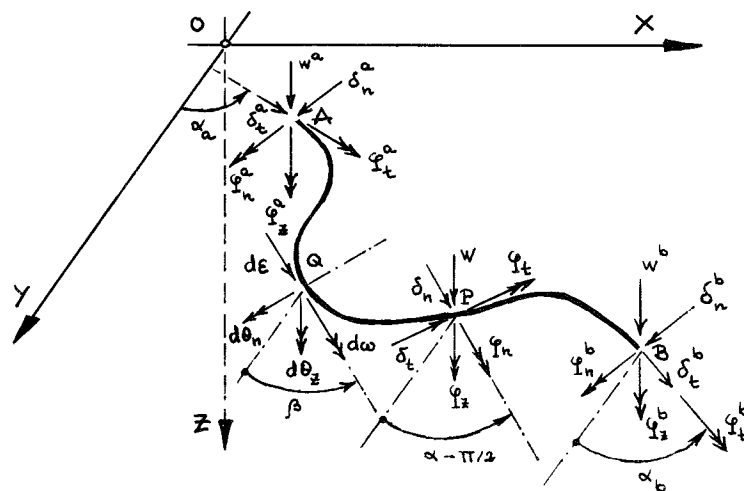


Fig. 13. Movimientos genéricos de la viga curva

$$\begin{aligned}
 w &= w^a - \varphi_n^a \cdot r'(s, 0) + \varphi_t^a \cdot d'(s, 0) - \int_0^s r'(s, \lambda) \cdot d\theta_n + \int_0^s d'(s, \lambda) \cdot d\omega \\
 \delta_n &= \delta_n^a \cdot \cos(\alpha - \alpha_a) + \delta_t^a \cdot \sin(\alpha - \alpha_a) + \varphi_z^a \cdot r(s, 0) + \int_0^s \sin(\alpha - \beta) \cdot \\
 &\quad \cdot d\epsilon + \int_0^s r(s, \lambda) \cdot d\theta_z \\
 \delta_t &= -\delta_n^a \cdot \sin(\alpha - \alpha_a) + \delta_t^a \cdot \cos(\alpha - \alpha_a) - \varphi_z^a \cdot d(s, 0) + \int_0^s \cos(\alpha - \beta) \cdot \\
 &\quad \cdot d\epsilon - \int_0^s d(s, \lambda) \cdot d\theta_z \\
 \varphi_z &= \varphi_z^a + \int_0^s d\theta_z \\
 \varphi_n &= \varphi_n^a \cdot \cos(\alpha - \alpha_a) + \varphi_t^a \cdot \sin(\alpha - \alpha_a) + \int_0^s \cos(\alpha - \beta) \cdot d\theta_n + \\
 &\quad + \int_0^s \sin(\alpha - \beta) \cdot d\omega \\
 \varphi_t &= -\varphi_n^a \cdot \sin(\alpha - \alpha_a) + \varphi_t^a \cdot \cos(\alpha - \alpha_a) - \int_0^s \sin(\alpha - \beta) \cdot d\theta_n + \\
 &\quad + \int_0^s \cos(\alpha - \beta) \cdot d\omega
 \end{aligned} \tag{19}$$

en las que se han introducido las funciones geométricas definidas en (9) y (11).

Puede comprobarse fácilmente que las expresiones anteriores satisfacen las relaciones generales (15), proporcionando, como consecuencia, la solución general mediante la que se expresan los movimientos de la viga curva.

Si se sustituyen las deformaciones elementales por las relaciones (14), se obtienen directamente los movimientos de la pieza en función de las sollicitaciones internas en la misma, que, a su vez, dependen de las acciones exteriores, como muestran las ecuaciones (8).

Cuando interese hallar los movimientos en el sistema general de referencia OXYZ, las componentes normales y tangenciales a la directriz proporcionan los siguientes movimientos sobre los ejes cartesianos (véase Figura n° 14):

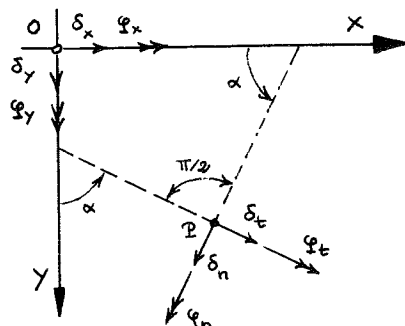


Fig. 14. Movimientos sobre ejes locales y generales

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_x &= \delta_t \cdot \text{sen } \alpha - \delta_n \cdot \text{cos } \alpha \\
 \delta_y &= \delta_t \cdot \text{cos } \alpha + \delta_n \cdot \text{sen } \alpha \\
 \varphi_x &= \varphi_t \cdot \text{sen } \alpha - \varphi_n \cdot \text{cos } \alpha \\
 \varphi_y &= \varphi_t \cdot \text{cos } \alpha + \varphi_n \cdot \text{sen } \alpha
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Las ecuaciones (19) muestran nuevamente el desacoplamiento existente en el comportamiento estructural de la viga curva genérica, consistente en la superposición del estado de “arco plano” con el de “viga balcón”, correspondiendo el primero de ellos a la deformación en el plano OXY ( $\delta_n$ ,  $\delta_t$  y  $\varphi_z$ ), mientras que el segundo de ellos corresponde a la deformación fuera de dicho plano ( $w$ ,  $\varphi_n$  y  $\varphi_t$ ).

Mediante las relaciones obtenidas con anterioridad, puede abordarse con toda generalidad el análisis de las vigas de planta curva, puesto que, como se demostrará más adelante, se dispone siempre de un sistema completo de condiciones para resolver el problema estructural.

Para ello, basta con determinar las reacciones exteriores que actúan sobre la viga, ya que, una vez conocidas, quedan definidas totalmente las sollicitaciones internas en cualquier sección y, como consecuencia, los movimientos estructurales.

Si se exceptúan los casos “isostáticos”, en los que las reacciones se obtienen directamente a partir de las ecuaciones de equilibrio del conjunto, las reacciones dependen de las “coacciones” a la libre deformación, sobre las que se trata a continuación.

### Coacciones exteriores

Se denomina “coacción exterior” a cualquier dispositivo mediante el que se imponen restricciones a la libre deformación estructural. Dichas coacciones, que pueden localizarse en cualquier punto de la pieza, pueden asimilarse, en el caso de vigas de planta curva, a alguno de los tipos siguientes:

a) “Coacciones simples rígidas”, que se desglosan en:

a.1) “Rótula esférica”, que impide el movimiento en el sentido transversal a la misma. Pueden presentarse dos posibilidades:

a.1.1) Si actúa sobre los desplazamientos en el plano OXY, la coacción se identifica por:

$$\left. \begin{aligned} \delta_t \cdot \cos(\alpha_r - \alpha) - \delta_n \cdot \sin(\alpha_r - \alpha) &= 0 \\ V \cdot \sin(\alpha_r - \alpha) + \vartheta_n \cdot \cos(\alpha_r - \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

donde  $\alpha_r$  es el ángulo que define la orientación en el plano de la coacción.

a.1.2) Si coarta los desplazamientos verticales, impone la condición siguiente:

$$w = 0 \quad (22)$$

a.2) “Empotramiento a flexión”, que impide el giro sobre el eje transversal al mismo. Como en el caso anterior, existen dos posibilidades:

a.2.1) Si restringe el giro alrededor del eje radial, se caracteriza por:

$$\varphi_n = 0 \quad (23)$$

a.2.2) Si restringe el giro sobre el eje vertical, la condición que lo define es:

$$\varphi_z = 0 \quad (24)$$

a.3) “Horquilla” o “Empotramiento a torsión”, que se caracteriza por:

$$\varphi_t = 0 \quad (25)$$

b) “Coacciones rígidas compuestas”. Son el resultado de la combinación de las anteriores, siendo las más frecuentes:

b.1) “Articulación”, que impide cualquier desplazamiento en el plano OXY. Se caracteriza por:

$$\begin{aligned} \delta_n &= 0 \\ \delta_t &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

b.2) “Apoyo en horquilla”, que impide el desplazamiento vertical y el giro a torsión de la pieza. Las condiciones que le definen son:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \varphi_t &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

b.3) “Empotramiento en el plano OXY”, que coarta los desplazamientos en dicho plano y el giro alrededor del eje vertical. Se define mediante las ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= 0 \\ \delta_t &= 0 \\ \varphi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

b.4) “Empotramiento en horquilla”, que impide el desplazamiento vertical y los giros sobre el eje radial y de torsión. Se caracteriza por:

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \varphi_n &= 0 \\ \varphi_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

b.5) “Empotramiento total”, que impide cualquier movimiento de la estructura, imponiendo las condiciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \delta_n = \delta_t = w &= 0 \\ \varphi_n = \varphi_t = \varphi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

c) “Coacciones de tipo elástico”, en las que existe una relación de proporcionalidad entre el movimiento de la estructura y la reacción exterior asociada al mismo. El caso más general se define mediante las condiciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_n &= -k_n^\delta \cdot \delta_n \\ \mathcal{H}_t &= -k_t^\delta \cdot \delta_t \\ \mathcal{H}_z &= -k_w \cdot w \\ \mathcal{H}_n &= -k_n^\varphi \cdot \varphi_n \\ \tau &= -k_t^\varphi \cdot \varphi_t \\ \mathcal{H}_z &= -k_z \cdot \varphi_z \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

donde  $k_n^\delta$ ,  $k_t^\delta$ ,  $k_w$ ,  $k_n^\varphi$ ,  $k_t^\varphi$  y  $k_z$  son las “constantes elásticas” que caracterizan a la coacción (cuyo valor es nulo cuando existe libertad de movimiento, e infinito cuando la coacción es rígida) y que generalizan las expresiones (21) a (30).

En ocasiones, pueden presentarse coacciones más complejas que las definidas con anterioridad (caso de sustentación esviada respecto de la directriz, por ejemplo), sobre las que no se tratará en la presente exposición.

En cualquier caso, la necesaria compatibilidad de solicitaciones internas y movimientos estructurales a lo largo de la pieza, proporciona siempre un total de seis condiciones adicionales por coacción, lo que permite resolver totalmente el problema estructural, como se expondrá a continuación.

## METODOLOGIA DEL ANALISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS DE PLANTA CURVA

### Formulación general del problema estructural

Como se expuso con anterioridad, la finalidad del análisis estructural consiste en la determinación de las solicitaciones internas y movimientos generales que se producen en la viga curva por efecto de las acciones exteriores. Para ello, se parte de los datos siguientes:

a) Geometría de la viga (identificada con la de su directriz).

- b) Características de la sección transversal de la pieza (definidas, en cada punto, por los valores de  $\Omega$ ,  $I_n$ ,  $I_z$ ,  $K$  y  $d_c$ ).
- c) Constantes elásticas del material (valores de  $E$  y  $G$ ).
- d) Coacciones exteriores (localización y características de las mismas).
- e) Acciones externas (definidas en cada punto de la directriz por las funciones  $q_n$ ,  $q_z$ ,  $m_t$ ,  $m_z$  y  $m_t$ ).

Si se utilizan las expresiones generales expuestas en apartados precedentes, puede plantearse siempre un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución proporciona los datos necesarios para obtener los valores buscados.

Para demostrar que el sistema de ecuaciones antedicho está siempre determinado ("sistema completo") considérese la viga  $\overline{AB}$  representada en la Figura nº 15, en la que las coacciones exteriores pueden presentarse, tanto en los extremos, A y B, como en "n" secciones intermedias.

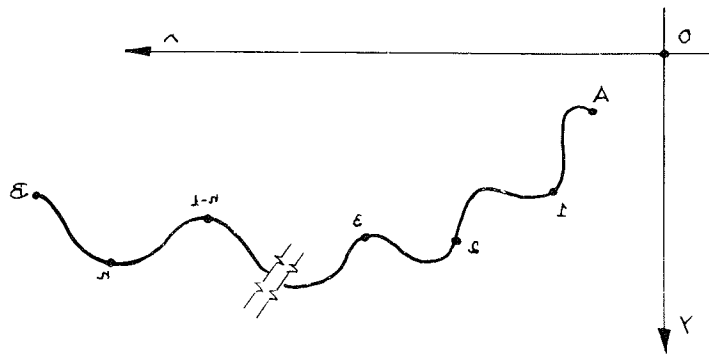


Fig. 15. Viga genérica con coacciones intermedias

Como muestran las ecuaciones (8), la determinación de las solicitaciones internas en la viga exige la evaluación previa de las reacciones exteriores en los puntos coaccionados (6, en general, por coacción). Obtenidas estas últimas, las expresiones (19) proporcionan los valores de los movimientos buscados.

Como consecuencia, en el caso planteado se parte, en el supuesto más general, de  $6 \cdot (n + 2)$  "incógnitas", que se resuelven a partir de las condiciones siguientes:

- a) Las 6 "ecuaciones de equilibrio del conjunto" definidas por las expresiones (13).
- b) Las  $6 \cdot (n + 1)$  ecuaciones (19), particularizadas tramo a tramo (A-1, 1-2, 2-3, ..., n-1, n, n-B), en las que, si se adoptan como incógnitas a las solicitaciones del extremo dorsal de cada tramo parcial, resultan otras tantas condiciones de compatibilidad.

Se llega, por tanto, al mismo número de ecuaciones que de incógnitas, como se pretendía demostrar.

### Procedimientos de cálculo

Sin pretender ofrecer una exposición sistemática de los métodos de análisis de vigas de planta curva, los procedimientos habituales de cálculo de este tipo de estructuras pueden clasificarse en los grupos que se exponen a continuación:



- a) “Cálculos manuales”, que son, en general, laboriosos, aunque pueden simplificarse notablemente en determinados casos, mediante la utilización de fórmulas o ábacos, cuando el caso en estudio está incluido dentro de los resueltos por los tratados o manuales que versan sobre el particular.
- b) “Cálculos en ordenador”, que se basan, normalmente, en la metodología convencional del “análisis matricial” de estructuras, que se aborda a partir del método de las “matrices de rigidez” o mediante el de las “matrices de transferencia”, pudiendo clasificarse en los dos grupos siguientes:
- b.1) Métodos en los que se asimila la viga curva a una estructura formada por una sucesión de tramos rectos, que se obtienen al subdividir la directriz real de la pieza en trozos de pequeña longitud, que a su vez, se aproximan mediante segmentos rectilíneos (habitualmente, se sustituye en cada uno de ellos el “arco” por la “cuerda”). En estos casos, se cuenta con la ventaja de poder utilizar programas convencionales concebidos para el análisis de estructuras de barras rectas, pero se comete un error al establecer las condiciones globales de equilibrio en los nudos donde confluyen los tramos rectos, debido a la discontinuidad que se produce en “el modelo” con la tangente a la directriz en dichos puntos. Dicho error, que, lógicamente, disminuye conforme aumenta el grado de subdivisión de la directriz real, afecta particularmente a las solicitaciones internas en la pieza. Aunque, en los casos normales, los errores cometidos utilizando estos procedimientos de cálculo son poco significativos desde el punto de vista de su influencia sobre el diseño estructural, pueden, sin embargo, resultar relativamente importantes en determinados casos concretos (caso, por ejemplo, de las estructuras de gran luz en las que son predominantes los esfuerzos de flexión, cuya discontinuidad en los nudos antedichos introduce un error relativo considerable sobre los momentos torsores).
- b.2) Métodos en los que se utilizan programas convencionales de análisis matricial, capacitados para incorporar “elementos” nuevos con características específicas, tales como la “matriz de rigidez” las “matrices de paso”, o la que proporciona los “esfuerzos de empotramiento perfecto” equivalentes. En estos supuestos, la exactitud de la solución obtenida es total, pero hay que desarrollar los subprogramas específicos que corresponden, en cada caso, a la viga curva que se va a analizar. Estos últimos se basan en las formulaciones básicas que se han expuesto en anteriores apartados y su desarrollo pormenorizado cae fuera de los límites del presente trabajo.

## EL PRETENSADO

### Generalidades

El pretensado es un procedimiento habitualmente utilizado en las estructuras de hormigón, con objeto de anular, o reducir a límites razonables, las tensiones de tracción motivadas por las acciones que actúan sobre aquéllas. Su efecto es análogo al de la introducción de unas determinadas solicitaciones internas previas, o deformaciones estructurales, que contrarresten en parte a las producidas por las cargas permanentes y sobrecargas de uso de la estructura.

Uno de los métodos más usuales para pretensar elementos es la disposición de unos cables de acero especial dentro de unos conductos o "vainas", que, una vez endurecido el hormigón, se ponen en tensión desde sus extremos (anclajes activos), que, a su vez, se bloquean para garantizar la permanencia de los efectos introducidos en la pieza (\*).

La determinación de las sollicitaciones y movimientos que origina un pretensado de estas características sobre una viga curva, puede llevarse a cabo por diferentes caminos alternativos, siendo uno de los más frecuentes el de asimilar aquél a un sistema de acciones externas, que, una vez determinadas, permiten abordar el análisis por procedimientos análogos a los descritos con anterioridad. La metodología general que hay que seguir en estos casos es la que se expone a continuación.

### Definición geométrica básica

Considérese nuevamente la viga de directriz  $\widehat{AB}$ , cuyo radio vector, referido al origen general de coordenadas, se denominará en adelante por  $\vec{\Delta}$ . Supóngase que el "cable medio" del sistema de pretensado  $\vec{\Gamma}$ , viene definido, en cada sección transversal, por la expresión (véase Figura nº 16):

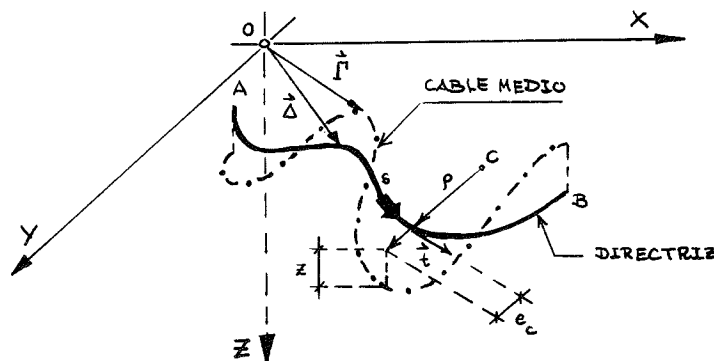


Fig. 16. Representación genérica de un cable de pretensado

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Delta} + e_c(s) \cdot \vec{r} + z(s) \cdot \vec{k} \quad (32)$$

donde:

- $s$  : es la abscisa curvilínea de la directriz de la viga.
- $e_c(s)$  : es la excentricidad del cable según el eje radial.
- $z(s)$  : es la distancia del cable al plano OXY.

Las relaciones fundamentales de la geometría diferencial proporcionan las ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Delta} &= x(s) \cdot \vec{i} + y(s) \cdot \vec{j} \\ \vec{t} &= \frac{d\vec{\Delta}}{ds} = \frac{dx(s)}{ds} \cdot \vec{i} + \frac{dy(s)}{ds} \cdot \vec{j} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} \\ \vec{r} &= -\frac{dy(s)}{ds} \cdot \vec{i} + \frac{dx(s)}{ds} \cdot \vec{j} = -y' \cdot \vec{i} + x' \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(\*) No se consideran en esta exposición los efectos reológicos inherentes al hormigón.

que, sustituidas en la expresión (32), permiten escribir la geometría del cable en la forma siguiente:

$$\vec{\Gamma} = (x - e_c \cdot y') \cdot \vec{i} + (y + e_c \cdot x') \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad (34)$$

donde todas las variables son función de la abscisa curvilínea "s". El vector tangente unitario al cable, viene definido, en cada sección, por la expresión:

$$\vec{t}_p = \frac{1}{T} \cdot \frac{d\vec{\Gamma}}{ds} = \frac{1}{T} (x'_p \cdot \vec{i} + y'_p \cdot \vec{j} + z'_p \cdot \vec{k}) \quad (35)$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} x'_p &= x' - e'_c \cdot y' - e_c \cdot y'' \\ y'_p &= y' + e'_c \cdot x' + e_c \cdot x'' \\ z'_p &= z' \\ T &= \sqrt{(x'_p)^2 + (y'_p)^2 + (z'_p)^2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

donde se ha designado por una coma (') a la derivación con respecto a la variable "s".

### Esfuerzos en el cable

El esfuerzo de pretensado en cada sección, equivale a una tracción en el cable de valor F, que depende del esfuerzo en el anclaje activo, de la geometría del cable y de la rugosidad de la vaina. Su expresión general es la siguiente:

$$F = F_0 \cdot e^{-\mu(\alpha_c + \beta \cdot s_c)} \quad (37)$$

donde:

- $F_0$  : esfuerzo en el anclaje activo
- $e$  : base de los logaritmos neperianos
- $\mu$  : coeficiente de rozamiento en curva
- $\alpha_c$  : ángulo girado entre el anclaje activo y la sección considerada
- $\beta$  : coeficiente de rozamiento parásito por unidad de longitud
- $s_c$  : longitud del cable desde el anclaje activo.

Dicho esfuerzo, dirigido según la tangente a  $\vec{\Gamma}$  en cada punto, admite la siguiente representación vectorial:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{t}_p \quad (38)$$

Descomponiendo F según las direcciones axial, radial y vertical, se llega, teniendo en cuenta las expresiones (33) a (36), a:

$$\left. \begin{aligned} F_a &= F \cdot (\vec{t}_p \cdot \vec{t}) = \frac{F}{T} (x'_p \cdot x' + y'_p \cdot y') \\ F_r &= F \cdot (\vec{t}_p \cdot \vec{r}) = \frac{F}{T} (x' \cdot y'_p - y' \cdot x'_p) \\ F_v &= F \cdot (\vec{t}_p \cdot \vec{k}) = \frac{F}{T} \cdot z' \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

fórmulas que se utilizarán de referencia para el resto de la exposición.

### Solicitaciones en la viga curva

Como se expuso con anterioridad, las solicitaciones internas en una viga curva genérica dependen, entre otros factores, de las coacciones exteriores a la libre deformación de la misma. Cuando se trata de una estructura isostática, las solicitaciones internas en la pieza están, en cada sección, en equilibrio estático global con los esfuerzos internos en el cable. En estas condiciones, las fuerzas internas debidas al pretensado pueden expresarse por:

$$\left. \begin{aligned} V &= -F_a \\ Q_n &= -F_r \\ Q_z &= -F_v \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

mientras que los momentos internos, en cualquier sección, valen:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= F_r \cdot (z + d_c) - F_v \cdot e_c \\ M_n &= -F_a \cdot z \\ M_z &= F_a \cdot e_c \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Como se desprende de las expresiones (3) y (4), las solicitaciones internas anteriores están estáticamente en equilibrio con el siguiente sistema de fuerzas y momentos externos, distribuidos a lo largo de la directriz de la pieza:

$$\left. \begin{aligned} q_z &= \frac{d F_v}{ds} \\ q_n &= \frac{d F_r}{ds} - \frac{F_a}{\rho} \\ q_t &= \frac{d F_a}{ds} + \frac{F_r}{\rho} \\ m_z &= - \frac{d (F_a \cdot e_c)}{ds} + F_r \\ m_n &= \frac{d (F_a \cdot z)}{ds} + \frac{1}{\rho} [F_r (z + d_c) - F_v (\rho + e_c)] \\ m_t &= \frac{1}{\rho} \cdot F_a (z + d_c) - \frac{d}{ds} (F_r \cdot z - F_v \cdot e_c) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Puesto que el pretensado constituye siempre un sistema de acciones exteriores auto-equilibrado, la determinación de las solicitaciones introducidas por el mismo en una viga curva genérica, puede abordarse por el procedimiento general de análisis expuesto anteriormente, en el supuesto de que las solicitaciones externas sobre la viga son las definidas

por las expresiones (41). En las secciones de anclaje de cables habrá que considerar, además, acciones localizadas, cuyo valor es el definido por las fórmulas (39) y (40) (\*).

Los cálculos, complejos en general, pueden desarrollarse fácilmente utilizando algoritmos simples de cálculo numérico, asequibles de programación en ordenadores de tipo personal o, incluso, en máquinas calculadoras habituales. En ocasiones, pueden admitirse ciertas simplificaciones que posibilitan una obtención rápida de resultados, en muchos casos simples, con un grado de aproximación suficiente bajo el punto de vista técnico. La más usual, válida para los casos de "pretensado interior a la sección" en las vigas consideradas en este estudio, es admitir que la excentricidad del cable, tanto en dirección radial como en la dirección vertical, es despreciable frente al radio de curvatura; es decir:

$$e_c \ll \rho ; \quad z \ll \rho \quad (42)$$

Como consecuencia, puede admitirse que se verifican las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x_p'^2 + y_p'^2 + z_p'^2 &\simeq x'^2 + y'^2 = 1 \rightarrow T \simeq 1 \\ x_p' \cdot x' + y_p' \cdot y' &\simeq 1 \\ x' \cdot y_p' - y' \cdot x_p' &\simeq e_c' \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

que, unidas a la de condición de ortogonalidad entre los vectores  $\bar{t}$  y  $\bar{r}$ :

$$x' \cdot x'' + y' \cdot y'' = 0 \quad (44)$$

simplifican las fórmulas generales (38), llegándose a:

$$\left. \begin{aligned} F_a &= F \\ F_r &= F \cdot e_c' \\ F_v &= F \cdot z' \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Si se sustituyen estos valores en las expresiones (39) y (40), se obtienen los esfuerzos isostáticos debidos al pretensado, que se escriben ahora en la forma simplificada siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -F \\ \sigma_n &= -F \cdot e_c' \\ \sigma_z &= -F \cdot z' \\ \tau &= F \cdot [(z + d_c) \cdot e_c' - z' \cdot e_c] \\ \sigma_n &= -F \cdot z \\ \sigma_z &= F \cdot e_c \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Reemplazando las expresiones (45) en las fórmulas generales (41), se llega, análogamente, a nuevos valores simplificados para las acciones exteriores equivalentes al pretensado. Procediendo de esta forma, se obtiene:

(\*) De hecho, dichos valores sólo son válidos para el anclaje frontal, debiendo cambiarse de signo para los anclajes dorsales.

$$\begin{aligned}
 q_z &= F' \cdot z' + F \cdot z'' \\
 q_n &= F' \cdot e'_c + F \cdot (e''_c - \frac{1}{\rho}) \\
 q_t &= F' + \frac{F}{\rho} \cdot e'_c \\
 m_z &= -F' \cdot e_c \\
 m_n &= F' \cdot z + \frac{F}{\rho} \cdot [(z + d_c) \cdot e'_c - z' \cdot e_c] \\
 m_t &= F' \cdot (z' \cdot e_c - e'_c \cdot z) + \frac{F}{\rho} \cdot [z + d_c - \rho \cdot (e''_c \cdot z - z'' \cdot e_c)]
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

Si además, se desprecia el efecto del rozamiento (suposición habitual en tanteos previos o cálculos a nivel de anteproyecto) y se admite que el valor del esfuerzo de pretensado es constante en toda la viga ( $F = F_0$ ), las acciones equivalentes al pretensado se escriben en la forma:

$$\begin{aligned}
 q_z &= F \cdot z'' \\
 q_n &= F \cdot (e''_c - \frac{1}{\rho}) \\
 q_t &= \frac{F}{\rho} \cdot e'_c \\
 m_z &= 0 \\
 m_n &= \frac{F}{\rho} \cdot [(z + d_c) \cdot e'_c - z' \cdot e_c] \\
 m_t &= \frac{F}{\rho} \cdot [z + d_c - \rho \cdot (e''_c \cdot z - z'' \cdot e_c)]
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Por último, si se supone que el cable está centrado en dirección radial ( $e_c = 0$ ), se llega a las expresiones siguientes:

ESFUERZOS ISOSTATICOS		ACCIONES EXTERIORES EQUIVALENTES
$  \begin{aligned}  \mathcal{N} &= -F \\  \mathcal{N}_n &= 0 \\  \mathcal{N}_z &= -F \cdot z' \\  \tau &= 0 \\  \mathcal{M}_n &= -F \cdot z \\  \mathcal{M}_z &= 0  \end{aligned}  $	$  \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{49 a)}  $	$  \begin{aligned}  q_z &= F \cdot z'' \\  q_n &= -\frac{F}{\rho} \\  q_t &= 0 \\  m_z &= 0 \\  m_n &= 0 \\  m_t &= \frac{F}{\rho} \cdot (z + d_c)  \end{aligned}  $
		$  \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{(49 b)}  $

Estas últimas expresiones simplificadas, servirán para particularizar el estudio precedente a la determinación de los esfuerzos introducidos por el pretensado en el caso de vigas curvas planas circulares. Este desarrollo será abordado en un próximo trabajo.

## BIBLIOGRAFIA

- M. ALBIGES, A. COIN y H. JOURNET: "Estudio de las estructuras por los métodos matriciales". Editores Técnicos Asociados S.A., 1971.
- J. COURBON: "Tratado de Resistencia de Materiales", Tomo II. Aguilar, S.A. de Ediciones, 1969.
- C. FERNANDEZ CASADO: "Cálculo de Arcos". Editorial Dossat, S.A., 1955.
- C.F. KOLLBRUNNER y K. BASLER: "Torsion. Application à l'étude des structures". Ediciones SPES, 1970.
- R.K. LIVESLEY: "Métodos matriciales para Cálculo de Estructuras". Editorial Blume, 1970.
- J. RENAULT: "Complexe d'échange de la porte de Bagnolet. Précontrainte dans les viaducs courbes et biais". ANNALES I.T.B.T.P. n° 269, 1970.
- R.J. ROARK y W. C. YOUNG: "Formulas for Stress and Strain". Mc Graw-Hill Book Company, 1975.
- E.A.B. SALSE: "Analysis and design of prestressed concrete circular bow girders for bridge structures". Publicación A.C.I. SP-26, 1971.
- S. TIMOSHENKO: "Resistencia de Materiales". Espasa Calpe, S.A., 1967.
- G. TONIOLO: "La funzione di trasmissione delle travi ad asse curvilíneo". Costruzioni Metalliche n° 5, 1975.
- W. VREDEN: "Curved continuous beams for Highway bridges". Frederik Ungar Publishing Co., 1969.
- A.A. WITECKI: "Simplified method for the analysis of torsional moment as an effect of a horizontally curved multispan continuous bridge". Publicación A.C.I. SP-23, 1969.

\* \* \*

## XV Premio "García Cabrerizo" a la Invención Española

La Fundación García Cabrerizo convoca el XV Premio García Cabrerizo a la Invención Española, destinado a reconocer públicamente los méritos de los autores de innovaciones tecnológicas españolas que hayan contribuido a nuestro auge económico. La dotación del Premio es de 500.000 pesetas, y su fallo tendrá lugar dentro del presente año por un jurado compuesto por 44 personalidades de la Ciencia, la Técnica, la Industria y el Periodismo Científico.

La presentación de trabajos deberá realizarse antes del día 10 del próximo Octubre, y cuantos inventores, investigadores, Centros o Empresas deseen conocer las bases de la presente convocatoria, deberán dirigirse por escrito a la Fundación García Cabrerizo. Vitruvio, 23. 28006 Madrid.

## Reunión del Consejo de la F.I.P.

Durante los días 26, 27 y 28 de abril, con la asistencia de veintisiete Delegados en representación de los distintos Grupos Nacionales integrados en la Federación, se celebró, en Amsterdam (Holanda), la primera de las reuniones del Consejo de la FIP correspondientes al actual año 1987. En representación de la ATEP participó el Sr. Piñeiro.

Como siempre, en el Orden del día previsto para la reunión se incluía, para su estudio y discusión, un gran número de temas. De entre ellos nos referiremos únicamente a aquellos que, por su especial interés, estimamos deben ser destacados para general conocimiento.

- Se estudió la mejor forma de solucionar el problema que plantean algunos Grupos Nacionales afiliados a la FIP (cuatro en total) que llevan varios años sin abonar sus cuotas. En principio, se acordó que cuando la demora de pagos supere los cinco años, se les dará de baja. Se intentará reducir el importe de la cuota que está establecida para la categoría inferior de las tres actualmente existentes y que ahora es de 1.650,— francos suizos. El tema lo estudiará detenidamente el Directorio y en la próxima reunión del Consejo se adoptará el acuerdo definitivo que se estime procedente.
- Se comentó el estado actual de los trabajos que vienen realizando las diferentes Comisiones Técnicas de la FIP y la forma en que se están reorganizando estas Comisiones. Dado que, en la actualidad, en cada una de ellas existe un excesivo número de Miembros, algunos de los cuales ni siquiera participan en las reuniones y lo único que hacen es recibir los textos de los Informes que se preparan, se tomó la decisión de que, cuando algún Miembro deje de asistir sin clara justificación a tres reuniones consecutivas, será dado de baja automáticamente y dejará de recibir las correspondientes publicaciones. Por otra parte, cada Grupo Nacional sólo podrá tener dos representantes en cada Comisión. Independientemente, podrán participar, para el estudio de determinados temas concretos, y adscritos con carácter provisional al Grupo de Trabajo que corresponda, otros especialistas de los distintos países. Estos especialistas podrán, incluso, prestar su colaboración exclusivamente por escrito, si no les es posible participar personalmente en las reuniones de la Comisión, y tendrán derecho a recibir la publicación que se edite como resultado final del estudio en que participen.
- Se repartió y discutió un primer borrador de la publicación que se está preparando con los nombres y direcciones de todos los Miembros de los Organos Directivos de la FIP y de las diferentes Comisiones Técnicas. Se acordó incluir en ella, al final, una relación por orden alfabético de los nombres de todos los Miembros que figuran en la publicación, con indicación de la página en que aparecen. Se sugirió también que, si ello resulta posible, se incluya una breve reseña histórica de todos los Congresos y Simposios hasta la fecha celebrados por la FIP.
- Se acordó que, coincidiendo con el Simposio que habrá de celebrarse en setiembre del próximo año 1988, en Jerusalem, se reunirá el Consejo y la Asamblea de la FIP.



- El Presidente del Grupo “Estructuras compuestas” en el que están representados varios Grupos de Trabajo de la Comisión, anunció que se prepara un Simposio o Seminario que se celebrará, en París, durante los días 12 y 13 de febrero del próximo año 1988, con la participación de los Grupos que se ocupan de “Control y garantía de la calidad”, “Forjados a base de viguetas y bovedillas”, “Losas aligeradas”, “Curado acelerado”, y un nuevo Grupo que estudiará las estructuras construidas por segmentos, tales como las de silos, núcleos de edificios de altura y otras análogas, excluyendo puentes.

Concluido el informe de los Presidentes de los distintos Grupos, se anunció que en el Simposio de la FIP que habrá de celebrarse en Jerusalem, en setiembre de 1988, los Miembros de la Comisión de Prefabricación Sres. Menegotro (Italia), Romanes (Nueva Zelanda) y Engstrom (Suecia), presentarán sendas Comunicaciones.

También se acordó que, coincidiendo con este Simposio, celebrará una de sus reuniones anuales la Comisión.

\* \* \*

## **Reunión de la Comisión de Prefabricación de la F.I.P.**

Del 11 al 13 de junio de 1987 celebró su primera reunión del presente año, en la Chalmers University of Technology, de Góteborgo (Suecia), la Comisión de Prefabricación de la FIP. A ella asistieron veintiún representantes de los diferentes Grupos Nacionales. Por parte de España participaron los Sres. Calavera y Piñeiro.

Al iniciarse la reunión, el Presidente Mr. Van Acker manifestó que, en virtud de las nuevas normas sobre el funcionamiento de las distintas Comisiones Técnicas de la FIP, han sido dados de baja en la de “Prefabricación”, algunos de los Miembros que a ella figuraban adscritos, por haber dejado de asistir a varias reuniones consecutivas, sin razones justificadas. Como contrapartida, se han incorporado nuevos Miembros en representación de los Grupos Nacionales de Francia, Brasil y Finlandia.

A continuación, los Presidentes de los diferentes Grupos de Trabajo integrados en la Comisión, informaron sobre el desarrollo de sus actividades. De estos informes, a continuación se detallan los puntos más importantes.

- El Grupo de Trabajo que estudia el tema “Losas aligeradas”, ha concluido un primer informe. La correspondiente publicación se encuentra actualmente en pruebas de imprenta.
- El Grupo que se ocupa de “Traviesas para vías férreas”, ha finalizado también un informe que ya está en imprenta y será publicado en fecha próxima. En la actualidad, el Grupo estudia el tema del cálculo de las traviesas bajo cargas dinámicas. Dada la escasa información que sobre este particular existe, se enviará a los diferentes Grupos Nacionales un cuestionario recabando datos sobre el método utilizado en los respectivos países para la realización de estos cálculos.

- El Grupo que estudia los “Elementos de paredes delgadas”, se ocupa actualmente de las particularidades que presenta el cálculo y la fabricación de estas piezas, utilizando hormigones que incorporan fibras metálicas o de vidrio.
- Sobre el tema de “Control y garantía de calidad de los elementos pretensados prefabricados” se presentó un primer borrador que será sometido a estudio y discusión en próximas reuniones.
- El Presidente del Grupo “Curado acelerado” ha cesado en sus actividades. En la actualidad se está buscando nuevo Presidente que se intenta represente a los fabricantes de cemento.
- El Grupo que se ocupa del estudio de la “Durabilidad del hormigón” ha suspendido, por el momento, sus actividades.
- El Presidente del Grupo Mixto FIP-CEB sobre “Estructuras prefabricadas”, presentó un primer borrador del informe que se está preparando.
- En relación con el Grupo de “Forjados a base de viguetas y bovedillas” que preside la representación española, se informó que después de varias gestiones ha quedado finalmente constituido por seis Miembros Activos, en representación de España (dos), Francia, Italia, Alemania y México, y dos Miembros Correspondientes (Suiza y Reino Unido).
- En relación con el XI Congreso de la FIP de 1990, en Hamburgo, se informó sobre la posibilidad de organizar algunas Sesiones dedicadas a “Posters”, presentados tanto por las distintas Comisiones de la FIP como por los participantes individuales en el Congreso. También se anunció que los Grupos Nacionales que lo deseen podrán presentar Informes sobre sus realizaciones y actividades en el campo de la técnica del pretensado. Asimismo, se informó que se está intentando que el importe de la cuota de inscripción al Congreso sea lo más económica posible. Por el momento, se estima que podría estar alrededor de los 1.000,— marcos (unas 70.000,— ptas.).
- Se acordó nombrar a Mr. Roger Lacroix, de Francia, Presidente del Comité Editorial que habrá de ocuparse de todo lo relacionado con las publicaciones que preparan las distintas Comisiones Técnicas de la FIP.
- La próxima reunión del Consejo se celebrará en París, en los primeros días de setiembre coincidiendo con el Simposio de la IABSE. Para la siguiente reunión, primera de 1988, aún no se ha fijado fecha ni sede. Se decidirá en la de París.

# Una formulación matemática para el estudio analítico de los tirantes

Ignacio Duque  
 Angel C. Aparicio  
 Cátedra de Puentes  
 E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona

## RESUMEN

En el presente artículo se exponen los aspectos más importantes de una formulación matemática completa, desarrollada para el estudio de los tirantes, realizada como parte de una tesis doctoral sobre puentes atirantados [17] en la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona. Así mismo, se pone de manifiesto la bondad de la misma por medio de ejemplos y se presenta su desarrollo completo en un anexo.

## 1. INTRODUCCION

Es bien conocido el comportamiento no lineal de los tirantes. Un cable sometido a una carga uniforme por unidad de longitud, como es su propio peso, adopta la forma de una catenaria (fig. 1). Cualquier incremento posterior de la tensión en el cable, produce un doble efecto: un alargamiento elástico del material y una disminución de la flecha de la catenaria, que tiende a aproximarse a la cuerda que une los extremos de la misma.

- S = longitud del tirante
- $S_0$  = longitud del cable a tensión nula
- $\Delta S$  = alargamiento del cable (elástico, por temperatura...)
- c = distancia entre anclajes (longitud de la cuerda)
- l = proyección horizontal del tirante
- h = proyección vertical del tirante
- f = flecha del tirante
- $\theta$  = ángulo que forma la cuerda con la horizontal
- $\alpha$  = ángulo de la tangente al tirante en un punto dado
- A = área
- E = módulo de deformación
- $\gamma$  = peso específico
- q = peso/longitud
- W = peso total del cable ( $W = q \cdot S_0$ )
- T = fuerza en el tirante en un punto dado
- H = proyección horizontal de T
- V = proyección vertical de T
- $\sigma$  = tensión ( $\sigma = T/A$ )
- r = valor adimensional ( $r = q \cdot 1/2 H$ )

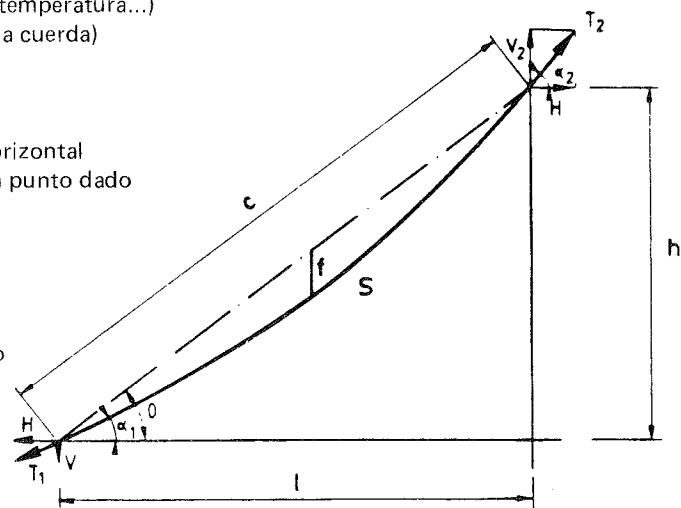


Fig. 1. Tirante y formulación empleada.

Teniendo en cuenta dicho “doble efecto”, Ernst [4] obtuvo la conocida fórmula del módulo de deformación aparente de los tirantes (fig. 2):

$$E_e = \frac{E}{1 + \frac{(\gamma l)^2}{12 \sigma^3} E} \quad (1)$$

representando dicha expresión la tangente a la curva tensión/deformación del tirante, en el punto en que éste trabaja. De esta forma, su comportamiento puede asimilarse al de una barra biarticulada.

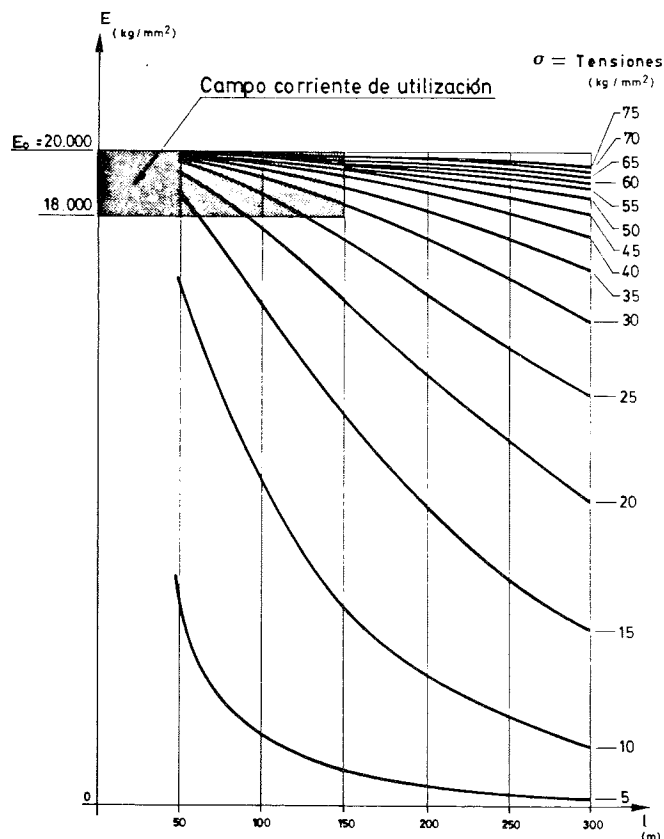


Fig. 2. Variación del módulo de elasticidad aparente de un tirante en función de su longitud y su tensión [8].

Expresiones prácticamente iguales a la obtenida por Ernst, aunque teóricamente “más rigurosas”, pueden encontrarse en [9, 10, 12, 16] o en el anexo.

Si las variaciones de tensión a que se ve sometido el cable son importantes, la precisión obtenida empleando una formulación tangente puede ser insuficiente, en cuyo caso se utilizan aproximaciones de tipo secante [12, 15]:

$$E_e = \frac{E}{1 + \frac{(\gamma l)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)}{24 \sigma_1^2 \sigma_2^2} E} \quad (2)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , son los valores inicial y final de la tensión en el cálculo considerado.

Esta fórmula se usa de modo iterativo: se parte de una posición inicial de la estructura (1) y se supone un estado final (2), con lo cual se hipotetiza el módulo de elasticidad secante. Efectuado el cálculo, obtenemos el valor de  $\sigma_2$ , para el módulo de deformación empleado; si no coincide con el valor supuesto, se corrige éste y se itera las veces precisas hasta convergencia [1].

Al utilizar este procedimiento, muy preciso a efectos del análisis, no hay que olvidar:

- Al considerar la fuerza en el cable según la secante y no según la tangente, se comete un error que puede repercutir en la precisión de las fuerzas de tesado de los tirantes [5]. Para compensarlo, debe introducirse en cada extremo del tirante el 50 por 100 del peso del mismo (fig. 3).

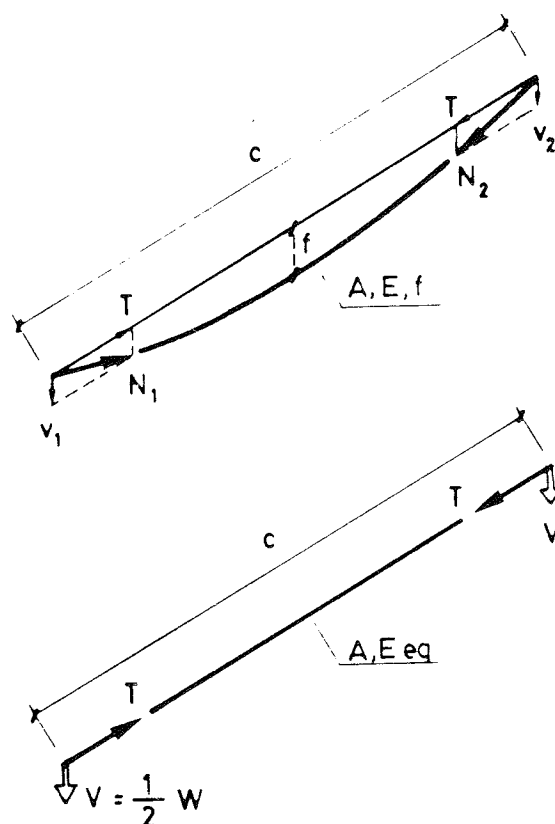


Fig. 3. Relación entre las fuerzas en los extremos de un tirante y en la barra equivalente.

- El módulo de elasticidad equivalente no tiene en cuenta la rigidez del tirante al someter uno de sus extremos a un desplazamiento perpendicular a su cuerda (efecto P-delta en las barras).
- Tampoco considera las variaciones de temperatura de una forma rigurosa. (Este efecto podría introducirse en la deducción del mismo, como una deformación adicional).

Por último, como ya sabemos, las matrices de rigidez tangente o secante son herramientas de cálculo que sólo parcialmente pueden sustituir a la ecuación intrínseca del elemento (del cable, en este caso).

## 2. FORMULACION PROPUESTA

Por nuestra parte, hemos desarrollado completamente una formulación relativa a los tirantes, de tal forma que su tratamiento es independiente del de las barras.

Esta formulación se basa en lo siguiente:

a) Un cable en reposo (por ejemplo, colocado sobre una superficie horizontal) y a la temperatura de referencia, tiene una determinada longitud  $S_0$ , a la cual llamamos "longitud del cable a tensión nula". Si este cable se tesa, pasará a tener una cierta longitud  $S$ , que se deberá, de una parte, a  $S_0$  y, de otra, al alargamiento del acero (alargamiento elástico; variación de temperatura; ...). Este hecho puede expresarse matemáticamente por la igualdad:

$$S = S_0 + \Delta s \quad (3)$$

lo que equivale, de una forma explícita a:

$$S_0 = c \left[ 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q c}{H} \right)^2 \cos^4 \theta \right] - \frac{Hc}{E A |\cos \theta|} = \text{cte} \quad (4)$$

Esta es la ecuación intrínseca del tirante y regula el comportamiento del mismo. Como concepto es utilizado en [2] y, más tarde, en [5 y 11]. Con todo, estos autores lo usan estrictamente como instrumento para llegar a una formulación tangente más o menos rigurosa, olvidando posteriormente su sentido físico y sus posibilidades prácticas.

b) A partir de (4) y siguiendo [9, 10, 11], obtenemos la relación entre la variación de la fuerza horizontal en los extremos del tirante y las variaciones de los desplazamientos, la temperatura y el peso por unidad de longitud del mismo, pues al ser:

$$S_0(H, \ell, h, q, t) = \text{cte} \quad (5)$$

diferenciando:

$$dS_0 = \frac{\delta S_0}{\delta H} dH + \frac{\delta S_0}{\delta \ell} d\ell + \frac{\delta S_0}{\delta h} dh + \frac{\delta S_0}{\delta t} dt + \frac{\delta S_0}{\delta q} dq = 0 \quad (6)$$

y de aquí se llega a:

$$dH = - \frac{\delta S_0 / \delta \ell}{\delta S_0 / \delta H} d\ell - \frac{\delta S_0 / \delta h}{\delta S_0 / \delta H} dh - \frac{\delta S_0 / \delta t}{\delta S_0 / \delta H} dt - \frac{\delta S_0 / \delta q}{\delta S_0 / \delta H} dq \quad (7)$$

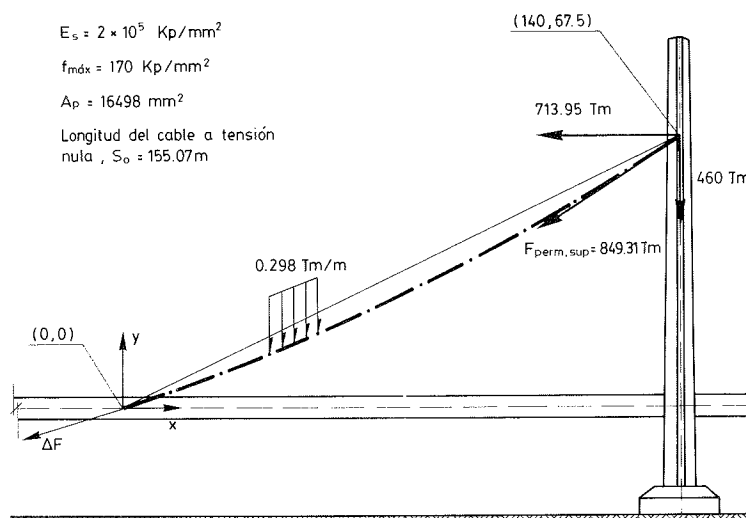
c) Conocida la relación entre  $V$  y  $H$  ( $V = H \cdot \text{tg } \alpha$ ), es inmediato hallar la relación de  $V$  con el resto de las variables ( $\ell, h, q, t$ ).

d) La obtención de la matriz de rigidez tangente en coordenadas globales a partir de las relaciones anteriores es inmediata (véase anexo). Basta entonces imponer un giro para pasar a coordenadas locales, y resulta:

$$K^L = \frac{E_c A}{c} \left\{ (1 - \alpha t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{H \ell}{E A c} \begin{pmatrix} \frac{\ell^4 + 4 h^2 \ell^2 - h^4}{c^2 \ell^2} & 1 - \frac{h^2}{\ell^2} \\ 1 - \frac{h^2}{\ell^2} & \frac{h^4 + 4 h^2 \ell^2 - \ell^4}{c^2 \ell^2} \end{pmatrix} + \\
& + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \begin{pmatrix} \frac{\ell^6 + (2 \ell^4 - h^4) (\ell^2 + 2 h^2)}{2 c^6} & - \frac{h \ell}{c^2} \\ - \frac{h \ell}{c^2} & \frac{\ell^2}{c^2} \end{pmatrix} \quad (8)
\end{aligned}$$

como vemos, esta matriz consta de tres sumandos: el primero, es la matriz de rigidez debida a Ernst; el segundo, tiene en cuenta el efecto P-delta; y, el tercero, la importancia de la catenaria.



**CUADRO 1**

**Respuesta del tirante a partir del estado permanente reflejado en el dibujo. Módulos de deformación y matrices de rigidez según Ernst, Manabu y autores**

Módulos de deformación (Ton/m<sup>2</sup>):

Ernst = 18248480.

Manabu = 18211458.

Autores = 18215642.

Matrices de rigidez en locales:

Ernst		Manabu		Autores	
1937,06	0,00	1933,13	0,00	1932,97	-0,21
0,00	0,00	0,00	3,31	-0,21	5,10

Matrices de rigidez en globales:

Ernst		Manabu		Autores	
1571,70	757,78	1569,14	754,95	1569,52	754,06
757,78	365,36	754,95	367,31	754,06	368,56

e) Si en (5), expresamos  $S_0$  en función exclusivamente de  $H$  y  $c$ , y derivamos, llegamos a la expresión del módulo de elasticidad aparente:

$$E' = \frac{1 + \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{H}{EA |\cos \theta|}}{1 + \frac{1}{3} r^2 \cos^2 \theta \frac{EA}{H} |\cos \theta|} E \quad (9)$$

Este método es el que se emplea en [2, 6, 12].

Un desarrollo matemático completo del tirante, aparece en el anexo. En él hemos partido de las expresiones de Dean [3], por su gran precisión.

En cuanto a la obtención de la matriz de rigidez tangente, digamos que el procedimiento es paralelo al utilizado en [11], si bien, al usar una formulación diferente e introducir menos simplificaciones, hemos podido obtener los términos de interacción entre la componente de la fuerza en el tirante, en el sentido de la cuerda que une sus extremos, y la componente en el sentido normal a dicha cuerda.

En el cuadro 1 pueden verse los valores de la matriz de rigidez tangente y el módulo de elasticidad equivalente, que se obtendrían empleando la formulación de Ernst; la de Manabu o la recogida en el anexo. Es evidente que la diferencia entre ellos es muy pequeña.

### 3. BONDAD DE LA FORMULACION PROPUESTA

Para verificar la validez de la formulación propuesta, hemos utilizado un ejemplo clásico en el estudio de los problemas no lineales [7]: se trata de un tirante al que se aplican una serie de cargas puntuales (fig. 4). Si el análisis se realiza por medio de barras, se discretiza el tirante en 12 elementos (13 nudos). En nuestro caso, y debido a que usábamos una formulación específica para los tirantes, sólo se han tomado como nudos intermedios aquellos puntos en que se aplicaba una carga puntual (4 nudos), que se corresponden con la numeración de los nudos 2, 4, 6 y 8 en el ejemplo original. El procedimiento de análisis ha sido:

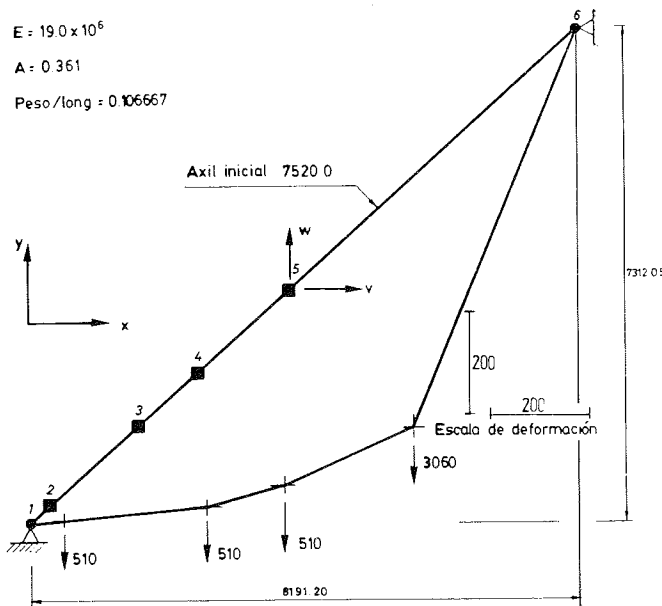


Fig. 4. Configuración de un tirante con cargas puntuales.



a) Definición del tirante (5 elementos diferentes). Se tesa imponiendo para cada elemento,  $S_0 = c \cdot (1 - P/E \cdot A)$  y las coordenadas de los distintos nudos son:

Nudo	x	y
1	0,000	0,000
2	306,049	273,201
3	1649,927	1472,843
4	2522,097	2251,404
5	3890,017	3472,507
6	8191,200	7312,050

En un principio, todos los nudos están alineados y empotrados.

b) Liberamos los nudos intermedios, pues al incluir el peso propio del tirante en la formulación utilizada, la forma que adoptará el mismo es la de una catenaria.

c) Imponemos las cargas puntuales indicadas en la figura, en una sola etapa de análisis, empleando como método de cálculo un algoritmo de Newton-Raphson.

Los desplazamientos obtenidos en el nudo 5 son:

	x	y
Formulación propuesta (5 elementos) . . . . .	242,36	-276,14
Kohnke (12 elementos) . . . . .	242,00	-276,00

#### 4. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado de forma completa la formulación matemática necesaria en el estudio de los tirantes.

Aunque numerosos autores han rechazado la expresión de la “longitud de los tirantes a tensión nula”  $S_0$ , o se han limitado a utilizarla como mero instrumento para llegar a obtener una formulación tangente de los tirantes, por nuestra parte, defendemos que dicha expresión es de una gran importancia pues:

- Tiene un claro sentido físico y no se reduce a una simple fórmula matemática.
- Al relacionar directamente la longitud  $S_0$  del tirante y su fuerza, permite trabajar de forma inmediata con ambos valores, lo cual puede ser de una enorme utilidad, como puede verse en [17].

Igualmente, y siempre a partir de dicho concepto, hemos obtenido una expresión muy exacta de la matriz de rigidez tangente de los tirantes, en la cual se diferencian la matriz de Ernst; el efecto P-delta; y, la influencia de la catenaria; y en la que aparece la interrelación entre las componentes de la fuerza en el tirante, en el sentido de la cuerda que une sus extremos, y en el sentido normal a la misma. También se ha obtenido una fórmula muy precisa del módulo de deformación aparente de los tirantes, aunque la diferencia con relación al módulo de Ernst es muy pequeña.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

El presente artículo es parte de una tesis doctoral [17] realizada en la Cátedra de Puentes de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, y que no habría sido posible sin la ayuda económica recibida del Ministerio de Educación y Ciencia a través de una beca F.P.I. durante los años 1983 a 1986. Igualmente, hemos de expresar nuestro agradecimiento

a la Generalitat de Catalunya por la concesión de un "Ajut per l'acabament de tesis doctorals", en 1984.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] ASTIZ, M.A. y MANTEROLA, J. The Non-Linear Structural Problem in Cable-Stayed Bridges Numerical Methods for Non-Linear Problems. Proceedings of the International Conference held at University College. Swansea, 2-5 SEP 1980, pp. 343-353.
- [2] CHU, Kuang-Han y MA, David Chia-Chiun. Nonlinear Cable and Frame Interaction. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 102, MAR 1976, proc. paper 12008, pp. 569-589.
- [3] DEAN, Donald L. Static and Dynamic Analysis of Guy Cables. Journal of the Structural Division, ASCE, ENE, 1961, proc. paper 2703, pp. 1-21.
- [4] ERNST, H.J. Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges. Der Bauingenieur, Vol 40, 1965, pp. 52-55.
- [5] GIMSING, Niels J. Cable supported. Bridges. Concept and design. John Wiley and Sons, Norwich, 1983.
- [6] JULIA VILARDELL, Manuel. Puentes de tramo recto atirantados, cables y anclajes. Hormigón y Acero No. 127, 1978. pp. 39-61.
- [7] KOHNKE, Peter C. Large Deflection Analysis of Frame Structures by Fictitious Forces. Int. J. for Num. Methods in Engineering. Vol. 12, 1978, pp. 1279-1294.
- [8] LEONHARDT, F. y ZELLNER, W. Cable-stayed Bridges: Report of latest developments. Canadian Structural Engineering Conference, 1970.
- [9] LIVESLEY, R.K. Métodos matriciales para cálculo de estructuras. Ed. Blume, Madrid, 1970 (Edición española).
- [10] LIVESLEY, R.K. Automatic Design of Guyed Masts Subject to Deflection Constraints. Int. J. for Num. Methods in Engineering. Vol. 2, 1970, pp. 33-43.
- [11] MAEDA, Yukio; HAYASHI, Masa y MAEDA, Ken-ichi. Analytical Calculation of Sagging Cable. Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No 257, ENE, 1977, pp. 123-126.
- [12] TANG, Man-Chung. Analysis of Cable-Stayed Girder Bridges. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, MAY 1971, proc. paper 8116, pp. 1481-1496.  
Erratas del artículo anterior en:  
Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, MAY 1972, pp. 1191.
- [13] Comentarios al mismo artículo por: LAZAR, Benjamín E. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, OCT 1971, pp. 2631-2633.
- [14] Task Committee on Cable-Suspended Structures of the Committee on Special Structures of the Committee on Metals of the Structural Division. Tentative Recommendations for Cable-Stayed Bridge Structures. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 103, MAY 1977, proc. paper 12933, pp. 929-939.
- [15] Task Committee on Cable-Suspended Structures of the Committee on Special Structures of the Committee on Metals of the Structural Division. Commentary on the Tentative Recommendations for Cable-Stayed Bridge Structures. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 103, MAY, 1977, proc. paper 12934, pp. 941-959.
- [16] Comentarios al artículo anterior por: ITO, Manabu y MAEDA, Yukio. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, FEB, 1978, pp. 372-374.
- [17] DUQUE, Ignacio. Análisis no lineal geométrico de puentes atirantados de hormigón y su aplicación al estudio de la influencia que diversos parámetros ejercen sobre su configuración geométrica y tensional. Tesis Doctoral. Barcelona. NOV, 1986.

## Anexo: FORMULACION DE LOS TIRANTES

### 1. ECUACION DEL CABLE

Un cable homogéneo sometido a una carga uniforme por unidad de longitud  $q$ , se dispone según una catenaria (Véase fig. 1).

Sea un trozo diferencial de cable:

$$V_1 = H_1 \frac{dy}{dx}$$

$$V_2 = H_2 \left( \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \delta x \right)$$

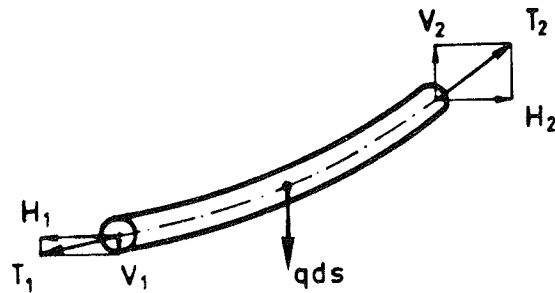


Fig. 1.

Por equilibrio:

$$H_1 = H_2 = H \quad (1)$$

$$V_2 - V_1 = q ds \rightarrow H \frac{d^2y}{dx^2} dx = q ds$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \left( \frac{q}{H} x + a_1 \right)$$

y resolviendo la ecuación se obtiene:

$$y = \frac{H}{q} \cosh \left[ \frac{q}{H} x + a_1 \right] + a_2 \quad (2)$$

Las constantes de integración  $a_1$  y  $a_2$  se obtienen imponiendo que la catenaria pase por los puntos  $(0, 0)$  y  $(\ell, h)$ :

$$a_2 = -\frac{H}{q} \cosh a_1$$

$$a_1 = \sinh^{-1} \left[ \frac{qh}{2H} \frac{1}{\sinh r} \right] - r \quad (3)$$

con:

$$r = \frac{q \ell}{2H} \quad (4)$$

## 2. LONGITUD DEL CABLE

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \frac{ds}{dx} dx \quad (5)$$

$$S = \int_0^{\ell} \frac{H}{q} \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int_0^{\ell} \cos h \left( \frac{q}{H} x + a_1 \right) dx = \frac{H}{q} \sin h \left( \frac{q \ell}{H} + a_1 \right) - \frac{H}{q} \sin h a_1$$

y teniendo en cuenta que es una suma de senos hiperbólicos:

$$S = \frac{2H}{q} \cos h (r + a_1) \sin h r$$

pero:

$$r + a_1 = \sin h^{-1} \frac{q h}{2H \sin h r}$$

$$S = 2 \frac{H}{q} \left[ 1 + \sin h \left( \sin h^{-1} \frac{q h}{2H \sin h r} \right) \right]^{1/2} \sin h r = \left[ 4 \frac{H^2}{q^2} \sin h^2 r + h^2 \right]^{1/2}$$

por ser  $|r| \ll 1$ , cabe hacer:

$$\sin h^2 r = r^2 + \frac{r^4}{3},$$

y sustituyendo r por su valor:

$$S = \left[ \ell^2 + \frac{4H^2}{q^2} \frac{r^4}{3} + h^2 \right]^{1/2} = c \left[ 1 + \frac{\ell^2}{12 c^2} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right]^{1/2}$$

El segundo término de la suma es muy pequeño, y puede hacerse:

$$(1 + x)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} x \text{ (por ser } |x| < 1)$$

$$S = c \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right] \quad (6)$$

## 3. ALARGAMIENTO DEL CABLE DEBIDO A UNA VARIACION DE TEMPERATURA

$$\Delta S_T = \alpha T S \quad (7)$$

con:  $\alpha$  = coef. de dilatación térmica  
 $T$  = incremento de temperatura.

## 4. ALARGAMIENTO ELASTICO DEL CABLE

$$\Delta S_e = \int_A^B \epsilon ds = \int_A^B \frac{T}{EA} ds \quad (8)$$

siendo:

$$T = \frac{H}{\cos \theta} = \frac{H}{(dx/ds)}$$

$$\Delta S_e = \frac{H}{EA} \int_A^B \frac{(ds)^2}{dx} = \frac{H}{EA} \int_0^{\ell} [1 + (y')^2] dx$$

sustituyendo (y') y operando, se tiene:

$$\Delta S_e = \frac{H}{EA} \int_0^{\ell} \cosh^2 \left( \frac{q}{H} x + a_1 \right) dx$$

y efectuando la integral:

$$\Delta S_e = \frac{1}{2} \frac{H}{EA} \left[ \ell + \frac{H}{q} \sinh \left( \frac{q}{H} \ell + a_1 \right) \cosh \left( \frac{q}{H} \ell + a_1 \right) - \frac{H}{q} \sinh a_1 \cosh a_1 \right]$$

realizando la sustitución  $a_1 = A - r$  y desarrollando:

$$\sinh(x + y), \quad \cosh(x + y):$$

$$\Delta S_e = \frac{H}{2 EA} \left[ \ell + \frac{2H}{q} (\sinh^2 A + \cosh^2 A) \sinh r \cosh r \right]$$

pero:

$$\sinh^2 A + \cosh^2 A = 1 + 2 \sinh^2 A = 1 + 2 \left[ \frac{q h}{2 H \sinh r} \right]^2$$

$$\Delta S_e = \frac{H}{2 EA} \left[ \ell + \frac{2 H^2 \sinh^2 r + q^2 h^2}{q H} \operatorname{ctg} h r \right]$$

como en general  $r \ll 1$ , es admisible hacer:

$$(\sinh r)^2 = r^2 + \frac{r^4}{3}$$

$$\operatorname{ctg} h r = \frac{1}{r} + \frac{r}{3} = \frac{3 + r^2}{3 r}$$

sustituyendo:

$$\Delta S_e = \frac{H}{2 EA} \left[ \ell + \frac{2 H^2 [3 r^2 + 2 r^4]}{3 q r H} + \frac{q^2 h^2 [3 + r^2]}{3 q r H} \right]$$

y reemplazando r por su valor:

$$r = \frac{q \ell}{2 H}$$

$$\Delta S_e = \frac{H}{2 EA} \left[ \ell + \frac{2 H}{q} \left( \frac{q \ell}{2 H} \right) + \frac{4 H}{3 q} \left( \frac{q \ell}{2 H} \right)^3 + \frac{q h^2}{H (q \ell / 2 H)} + \frac{q h^2}{3 H} \left( \frac{q \ell}{2 H} \right) \right]$$

arreglando la expresión, se obtiene:

$$\Delta S_e = \frac{H \ell}{EA} \frac{h^2 + \ell^2}{\ell^2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right]$$

siendo:

$$\frac{h^2 + \ell^2}{\ell^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Delta S_e = \frac{H \ell}{EA} \frac{1}{\cos^2 \theta} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right] \quad (9)$$

## 5. ANGULOS EN LOS EXTREMOS DE LA CATENARIA

Partimos de las igualdades:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_2}{H} &= \operatorname{tg} \alpha_2 \\ \frac{V_1}{H} &= \operatorname{tg} \alpha_1 \end{aligned} \right\} V_2 - V_1 = H (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) \quad (10)$$

Pero  $V_2 - V_1 = W$  (peso total del cable), por tanto:

$$\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1 = \frac{W}{H}$$

Por otra parte, y a partir de las ecuaciones ya conocidas para la catenaria:

$$y'|_{x=0} = \operatorname{sh} a_1$$

$$y'|_{x=\ell} = \operatorname{sh} (a_1 + 2r)$$

llamando:

$$B = \frac{q h}{2 H \operatorname{sh} r} ; \quad a_1 = \operatorname{sh}^{-1} B - r$$

$$y'|_{x=0} = \operatorname{sh} (\operatorname{sh}^{-1} B - r)$$

$$y'|_{x=\ell} = \operatorname{sh} (\operatorname{sh}^{-1} B + r)$$

utilizando la igualdad:  $\operatorname{sh} (x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ , y haciendo:

$$\operatorname{ch} (\operatorname{sh}^{-1} B) = \sqrt{1 - B^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = B \operatorname{ch} r - \sqrt{1 - B^2} \operatorname{sh} r$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = B \operatorname{ch} r + \sqrt{1 - B^2} \operatorname{sh} r$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1 = 2 \sqrt{1 - B^2} \operatorname{sh} r$$

por tanto:

$$\sqrt{1 - B^2} \operatorname{sh} r = \frac{1}{2} \frac{W}{H}$$

y se llega a las expresiones:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = B \operatorname{ch} r - \frac{W}{2H}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = B \operatorname{ch} r + \frac{W}{2H}$$

sustituyendo B y haciendo:

$$\operatorname{cotg} h r = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r^2}{3} \right)$$

se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{\ell} \left( 1 + \frac{r^2}{3} \right) - \frac{W}{2H}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h}{\ell} \left( 1 + \frac{r^2}{3} \right) + \frac{W}{2H}$$

(11)

recordemos que:

$$r = \frac{q \ell}{2H}$$

## 6. LONGITUD DEL CABLE A TENSION NULA

La longitud de un tirante S, puede considerarse que se debe a diferentes factores:

$S_0$ : longitud del cable (tirante) antes de instalarse a la temperatura de referencia, esto es, cuando su alargamiento elástico es nulo.

$\Delta S_e$ : alargamiento elástico del acero.

$\Delta S_T$ : alargamiento (acortamiento) debido a variaciones de temperatura, en relación a la considerada de referencia.

Debido a las tensiones de trabajo de los tirantes no cabe considerar deformaciones de tipo plástico (relajación del acero, ...).

Por tanto, podemos hacer:

$$S = S_0 + \Delta S_e + \Delta S_T$$

que puede escribirse:

$$S_0 = S - \Delta S_e - \Delta S_T \quad (12)$$

lo importante es darse cuenta de que, una vez colocado el cable  $S_0$  no varía, con lo cual la ecuación anterior es, en realidad, la ecuación fundamental de equilibrio de un cable en régimen elástico (ecuación intrínseca).

Para los tirantes, las fórmulas deducidas son suficientemente exactas y se obtiene:

$$S_0 = (1 - \alpha t) c \left( 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell^2}{c H} \right)^2 \right) - \frac{H \ell}{EA} \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right)$$

expresión que cabe simplificar eliminando el segundo elemento del último sumando, con lo que queda:

$$S_0 = (1 - \alpha t) c \left( 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \cos^2 \theta \right) - \frac{H \ell}{EA} \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (13)$$

ecuación que, a efectos prácticos, puede considerarse exacta.

## 7. MODULO DE ELASTICIDAD APARENTE

Si asimilamos el tirante a una barra recta de longitud  $c$ , a la que sometemos a una deformación en el sentido longitudinal de la misma, es decir, según la recta que una sus extremos, su respuesta vendrá dada por la expresión:

$$\Delta F = \frac{E' A}{c} \Delta c$$

donde  $A$  es el área del tirante y  $E'$  el módulo de deformación equivalente, que tiene en cuenta que el comportamiento del tirante es marcadamente no lineal. Nuestra intención es, precisamente, obtener el valor de  $E'$  cuando el desplazamiento impuesto o la fuerza aplicada, en el caso alternativo, sean un valor muy pequeño (diferencial).

A partir de la expresión anterior podemos escribir:

$$E' = \frac{c}{A} \frac{dF}{dc} = \frac{c}{A \cos \theta} \frac{dH}{dc}$$

y diferenciando la expresión de  $S_0$  escrita en función de  $H$ ,  $c$ ,  $\theta$ , para el caso en que  $\theta = cte$  se tiene:

$$S_0 = c \left( 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q c}{H} \right)^2 \cos^4 \theta \right) - \frac{H c}{EA} \frac{1}{|\cos \theta|}$$

por ser  $S_0 = cte$ ,  $dS_0 = 0$

$$0 = c \left( 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q c}{H} \right)^2 \cos^4 \theta \right) dc + \frac{1}{12} \left( \frac{q c}{H} \right)^2 \cos^4 \theta dc - \frac{H}{EA |\cos \theta|} dc - \frac{c}{12} (q c)^2 \cos^4 \theta \frac{1}{H^3} dH - \frac{c}{EA |\cos \theta|} dH$$



pero:

$$\frac{q c \cos \theta}{2 H} = r$$

$$\frac{d H}{d c} = \frac{1 + \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{H}{E A |\cos \theta|}}{\frac{c}{E A |\cos \theta|} + \frac{1}{3} r^2 \cos^2 \theta \frac{c}{H}}$$

el módulo de elasticidad aparente es:

$$E' = \frac{1 + \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{H}{E A |\cos \theta|}}{1 + \frac{1}{3} r^2 \cos^2 \theta \frac{E A}{H} |\cos \theta|} E \quad (14)$$

si en esta expresión se eliminan del numerador aquellos sumandos cuyo valor es muy pequeño, se obtiene el conocido "módulo de Ernst".

## 8. MATRIZ DE RIGIDEZ DEL TIRANTE

Previamente hemos asimilado el tirante a una barra recta a la cual se imponía una deformación en el sentido longitudinal, y hemos visto que el símil es correcto siempre y cuando se utilice un "módulo de deformación aparente", en el cual se incluya el efecto de la no linealidad del tirante debido a la catenaria. El desarrollo matemático se ha realizado con una formulación tangente, esto es, para incrementos de desplazamientos (o de fuerzas) de tipo diferencial.

A continuación vamos a extender el razonamiento al caso en que este incremento pueda ser arbitrario según unos ejes globales de referencia y no necesariamente en la dirección de la cuerda que une los extremos del tirante. Incluiremos en la formulación una posible variación de temperatura o del peso por metro lineal del tirante.

Partiremos de:

$$S_0 = c (1 - \alpha t) \left( 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 (\ell/c)^2 \right) - \frac{H}{E A} \frac{c^2}{\ell}$$

siendo:

$$c^2 = h^2 + \ell^2 \Rightarrow \frac{\delta c}{\delta h} = \frac{h}{c}; \quad \frac{\delta c}{\delta \ell} = \frac{\ell}{c}$$

$$dS_0 = \frac{\delta S_0}{\delta H} dH + \frac{\delta S_0}{\delta \ell} d\ell + \frac{\delta S_0}{\delta h} dh + \frac{\delta S_0}{\delta t} dt + \frac{\delta S_0}{\delta q} dq = 0 \quad (15)$$

por ser  $S_0$  constante. Obtenemos ahora las derivadas parciales:

$$\frac{\delta S_0}{\delta H} = - \left[ (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \frac{q^2 \ell^4}{c H^3} + \frac{c^2}{\ell E A} \right] \quad (16.a)$$

$$\frac{\delta S_0}{\delta \ell} = (1 - \alpha t) \frac{\ell}{c} \left[ 1 + \frac{3c^2 + h^2}{24c^2} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \right] - \frac{H}{EA} \frac{\ell^2 - h^2}{\ell^2} \quad (16.b)$$

$$\frac{\delta S_0}{\delta h} = (1 - \alpha t) \frac{h}{c} \left[ 1 - \frac{1}{24} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \frac{\ell^2}{c^2} \right] - \frac{H}{EA} \frac{2h}{\ell} \quad (16.c)$$

$$\frac{\delta S_0}{\delta t} = -\alpha c \left( 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \frac{\ell^2}{c^2} \right) \quad (16.d)$$

$$\frac{\delta S_0}{\delta q} = (1 - \alpha t) c \frac{1}{24} \left( \frac{\ell^2}{cH} \right)^2 2q \quad (16.e)$$

Para ver cómo influyen estas variaciones en las fuerzas verticales, hay que tener en cuenta:

$V = H \operatorname{tg} \alpha$ , con:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\ell} \left( 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \right) \mp \frac{W}{2H}$$

y haremos:  $W = S_0 q$

$$dV = H d(\operatorname{tg} \alpha) + \operatorname{tg} \alpha dH \quad (17)$$

$$d \operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta H} dH + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta \ell} d\ell + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta h} dh + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta t} dt + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta q} dq$$

$$\frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta H} = -\frac{1}{6} \frac{q^2 \ell h}{H^3} \mp \frac{W}{2H^2}$$

$$\frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta \ell} = -\frac{h}{\ell^2} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta h} = \frac{1}{\ell} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta q} = \frac{1}{6} q \frac{\ell h}{H^2} \mp \frac{S_0}{2H}$$

tenemos por lo tanto:

$$dH = -\frac{\frac{\delta S_0}{\delta \ell}}{\frac{\delta S_0}{\delta H}} d\ell - \frac{\frac{\delta S_0}{\delta h}}{\frac{\delta S_0}{\delta H}} dh - \frac{\frac{\delta S_0}{\delta t}}{\frac{\delta S_0}{\delta H}} dt - \frac{\frac{\delta S_0}{\delta q}}{\frac{\delta S_0}{\delta H}} dq$$

$$dV = \left( H \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta H} + \operatorname{tg} \alpha \right) dH + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta \ell} d\ell + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta h} dh + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta t} dt + \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta q} dq \quad (18)$$

ahora bien:

$$H \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta H} + \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\ell} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right] = X \quad (19)$$

con lo que queda:

$$\begin{aligned} dH &= a_{11} d\ell + a_{12} dh + a_{13} dt + a_{14} dq \\ dV &= a_{21} d\ell + a_{22} dh + a_{23} dt + a_{24} dq \end{aligned} \quad (20)$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_{11} X + H \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta \ell} = \frac{\frac{\delta S_0}{\delta \ell} X + H \frac{X}{\ell} \frac{\delta S_0}{\delta H}}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}} = \\ &= \frac{X \left[ (1 - a t) \frac{\ell}{c} \left[ 1 + \frac{1}{24} \frac{c^2 + h^2}{c^2} \left( \frac{q \ell}{2H} \right)^2 \right] - \frac{2H}{EA} \right]}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}} = \\ &= \frac{\frac{h}{c} (1 - a t) \left[ 1 - \frac{1}{24} \frac{\ell^2}{c^2} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 - \frac{1}{12 \cdot 24} \frac{c^2 + h^2}{c^2} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^4 \right] - \frac{h}{\ell} \frac{2H}{EA} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right]}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}} = \\ &= -\frac{\frac{\delta S_0}{\delta h}}{\frac{\delta S_0}{\delta H}} \end{aligned}$$

es decir,  $a_{12} = a_{21}$  y la matriz de rigidez tangente es simétrica.

$$\begin{aligned} a_{22} &= -\frac{\frac{\delta S_0}{\delta h}}{\frac{\delta S_0}{\delta H}} X + H \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta h} = \frac{X \frac{\delta S_0}{\delta h} - H \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta h} \frac{\delta S_0}{\delta H}}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}} \\ a_{22} &= \frac{\left\{ (1 - \alpha t) \frac{h}{c} \left[ 1 - \frac{1}{24} \frac{\ell^2}{c^2} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right] - \frac{2H}{EA} \left\{ \frac{h}{\ell} \left( 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right) \right\} \right\}}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}} + \\ &+ \frac{\left[ (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{\ell^2}{c} + \frac{c^2 H^2}{\ell EA} \right] \frac{1}{\ell} \left( 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right)}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}} \end{aligned}$$

Agrupando términos y eliminando los de segundo orden (productos de dos términos muy pequeños), se obtiene:

$$a_{22} = \frac{(1 - \alpha t) \frac{h^2}{\ell c} \left[ 1 + \left( \frac{\ell^2}{h^2} - 1 - \frac{\ell^2}{2c^2} \right) \frac{1}{12} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \right] - \frac{H}{EA} \frac{\ell^2 - h^2}{\ell^2}}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}}$$

$$a_{23} = a_{13} X = \frac{\frac{\delta S_0}{\delta t} X}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}}$$

$$a_{23} = \frac{-\alpha t \frac{h}{\ell} \left[ 1 - \frac{2c^2 - \ell^2}{2c^2} \frac{1}{12} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \right]}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}}$$

$$a_{24} = a_{14} X + H \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta q} = \frac{\frac{\delta S_0}{\delta q} X - H \frac{\delta S_0}{\delta H} \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\delta q}}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}}$$

$$a_{24} = \frac{(1 - \alpha t) \frac{q}{12} \frac{h\ell^3}{cH^2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{q\ell}{H} \right)^2 \right] + \frac{qc^2h}{6EAH}}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}}$$

$$\mp \frac{(1 - \alpha t) \frac{1}{12} \frac{q^2 \ell^4}{cH^3} S_0 + \frac{c^2}{2\ell EA} S_0}{-\frac{\delta S_0}{\delta H}}$$

Evidentemente, se verifica:

$$(a_{24} - a_{44}) \Delta q = S_0 \Delta q = \Delta W$$

Los resultados obtenidos pueden expresarse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} dH \\ dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\ell \\ dh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix} dq$$

donde las  $a_{ij}$  son las ya obtenidas y las matrices están en coordenadas globales.

En ocasiones, puede ser útil tener las anteriores matrices en coordenadas locales, para lo que es suficiente proceder a un cambio de ejes.

Hay que mencionar que como  $\Delta q$  es según los ejes globales, no hemos obtenido su matriz en locales.

## 9. MATRIZ DE RIGIDEZ EN EJES LOCALES

Partimos de la ecuación:

$$dP^G = K^G dS^G + L^G dt$$

Sabemos que:

$$dP^L = T^t dP^G$$

$$dS^G = T dS^L$$

siendo:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

con lo que la ecuación anterior queda:

$$dP^L = T^t K^G T dS^L + T^t L^G dt$$

y podemos escribir:

$$K^L = T^t K^G T$$

$$L^L = T^t L^G$$

Operando se obtiene:

$$K^L = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

al ser  $a_{12} = a_{21}$ :

$$K^L = \begin{pmatrix} a_{11} \cos^2 \theta + 2 a_{12} \text{sen } \theta \cos \theta + a_{22} \text{sen}^2 \theta & (a_{22} - a_{11}) \text{sen } \theta \cos \theta + a_{12} (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \\ (a_{22} - a_{11}) \text{sen } \theta \cos \theta + a_{12} (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) & a_{11} \text{sen}^2 \theta - 2 a_{12} \text{sen } \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$L^L = \begin{pmatrix} a_{13} \cos \theta + a_{23} \text{sen } \theta \\ -a_{13} \text{sen } \theta + a_{23} \cos \theta \end{pmatrix}$$

con  $\cos \theta = \ell/c$ ;  $\text{sen } \theta = h/c$ .

Pasamos a continuación a obtener la forma explícita de las matrices anteriores:

$K^L$

$$K_{11}^L = a_{11} \cos^2 \theta + 2 a_{12} \text{sen } \theta \cos \theta + a_{22} \text{sen}^2 \theta = \frac{1}{\frac{\delta S_0}{\delta H}} (b_{11}^1 + b_{11}^2 + b_{11}^3)$$

$$b_{11}^1 = (1 - \alpha t) \frac{\ell \ell^2}{c c^2} + 2 (1 - \alpha t) \frac{h h \ell}{c c^2} + (1 - \alpha t) \frac{h^2 h^2}{\ell c c^2} = (1 - \alpha t) \frac{c}{\ell}$$

$$b_{11}^2 = (1 - \alpha t) \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \left\{ \frac{\ell}{c} \frac{3c^2 + h^2}{c^2} \frac{\ell^2}{c^2} - \frac{h}{c} \frac{\ell^2}{c^2} 2 \frac{\ell h}{c^2} + \frac{2\ell}{c} \left[ 1 - \frac{h^2}{\ell^2} - \frac{h^2}{2c^2} \right] \frac{h^2}{c^2} \right\} =$$

$$= (1 - \alpha t) \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{c \ell^6 + (2\ell^4 - h^4)(\ell^2 + 2h^2)}{c^6}$$

$$b_{11}^3 = -\frac{H}{EA} \left\{ \left( 1 - \frac{h^2}{\ell^2} \right) \frac{\ell^2}{c^2} + \frac{4h}{\ell} \frac{h \ell}{c^2} + \left( 1 - \frac{h^2}{\ell^2} \right) \frac{h^2}{c^2} \right\} =$$

$$= -\frac{H}{EA} \frac{(\ell^2 + h^2)(\ell^2 - h^2) + 4h^2 \ell^2}{\ell^2 c^2} = -\frac{H}{EA} \left[ 1 - \frac{h^2}{\ell^2} + \frac{4h^2}{c^2} \right]$$

$$K_{12}^L = K_{21}^L = (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta + a_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{1}{\delta S_0} (b_{12}^1 + b_{12}^2 + b_{12}^3) = \frac{1}{\delta H}$$

$$b_{12}^1 = (1 - \alpha t) \frac{h^2 - \ell^2}{\ell c} \frac{h \ell}{c^2} + \frac{h}{c} \frac{\ell^2 - h^2}{c^2} = 0$$

$$b_{12}^2 = (1 - \alpha t) \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \left\{ -(\ell^4 + 5h^2 \ell^2 + 2h^4) \frac{h}{c^5} + \frac{\ell^2 h}{c^3} \frac{h^2 - \ell^2}{c^2} \right\} =$$

$$= -2(1 - \alpha t) \frac{h}{c} \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2$$

$$b_{12}^3 = -\frac{H}{EA} 2 \frac{h}{\ell} \frac{\ell^2 - h^2}{c^2}$$

$$K_{22}^L = a_{11} \sin^2 \theta - 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta = \frac{1}{\delta S_0} (b_{22}^1 + b_{22}^2 + b_{22}^3) = \frac{1}{\delta H}$$

$$b_{22}^1 = (1 - \alpha t) \frac{\ell h^2}{c c^2} + (1 - \alpha t) \frac{h}{c} \frac{-2h \ell}{c^2} + (1 - \alpha t) \frac{h^2}{\ell c} \frac{\ell^2}{c^2} = 0$$

$$b_{22}^2 = (1 - \alpha t) \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \left\{ \frac{\ell}{c} \frac{3c^2 + h^2}{c^2} \frac{h^2}{c^2} + \frac{\ell^2}{c^2} \frac{h}{c} \frac{2h \ell}{c^2} + \frac{\ell}{c} \left[ 2 - \frac{2h^2}{\ell^2} - \frac{h^2}{c^2} \right] \frac{\ell^2}{c^2} \right\} =$$

$$= \frac{2\ell}{c} (1 - \alpha t) \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2$$

$$b_{22}^3 = -\frac{H}{EA} \left[ 1 - \frac{h^2}{\ell^2} \right] \frac{h^2}{c^2} - \frac{H}{EA} \frac{2h}{\ell} \frac{-2h \ell}{c^2} - \frac{H}{EA} \left( 1 - \frac{h^2}{\ell^2} \right) \frac{\ell^2}{c^2} =$$

$$= -\frac{H}{EA} \left\{ \frac{(\ell^2 - h^2)^2}{\ell^2 c^2} - 2 \frac{h^2}{\ell^2} \right\}$$

Considerando que:

$$-\frac{\delta S_0}{\delta H} = \frac{c^2}{\ell EA} \left\{ 1 + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{EA}{H} \frac{\ell^3}{c^3} \right\} = \frac{c^2}{\ell EA} F^*$$

la matriz de rigidez  $K^L$ , cabe escribirla como suma de tres matrices de la forma:

$$\begin{aligned}
 K^L = & \frac{1}{F^*} \frac{EA}{c} \left\{ (1 - \alpha t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\
 & + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \begin{pmatrix} \frac{\ell^6 + (2 \ell^4 - h^4)(\ell^2 + 2 h^2)}{2 c^6} & -\frac{h \ell}{c^2} \\ -\frac{h \ell}{c^2} & \frac{\ell^2}{c^2} \end{pmatrix} + \\
 & \left. + \frac{H \ell}{EA c} \begin{pmatrix} -\frac{\ell^4 + 4 h^2 \ell^2 - h^4}{c^2 \ell^2} & 1 - \frac{h^2}{\ell^2} \\ 1 - \frac{h^2}{\ell^2} & \frac{h^4 + 4 h^2 \ell^2 - \ell^4}{c^2 \ell^2} \end{pmatrix} \right\} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Puede verse que:

$$\frac{E}{F^*} = E_e$$

esto es, coincide con el módulo de deformación aparente obtenido por Ernst. Por tanto, la primera matriz es la matriz habitualmente utilizada en el estudio de los tirantes. La segunda considera básicamente la no linealidad debida al efecto de la catenaria:

$$\left( \text{factor } \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right)$$

y la tercera, el llamado efecto P-delta, pues el producto:

$$\frac{H \ell}{EA c} \frac{EA}{c} = \left( \frac{H \ell}{c} \right) \frac{1}{c} \simeq \frac{T_{med}}{c}$$

Estas matrices pueden igualmente expresarse en función de la longitud del cable a tensión nula  $S_0$ , y del ángulo  $\theta$ , con lo que se obtiene:

$$K^L = \frac{EA}{c} \frac{1}{1 + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{EA}{H} |\cos \theta|^3} K^*$$

con:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^* &= \frac{S_0}{c} + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \cos 2 \theta - \frac{H c}{EA \ell} (\sin^2 2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 K_{12}^* &= K_{21}^* = -\operatorname{tg} \theta \left\{ 2 \left( \frac{S_0}{c} - (1 - \alpha t) \right) + 4 \frac{H c}{EA \ell} \cos^4 \theta \right\} \\
 K_{22}^* &= 2 \left\{ \frac{S_0}{c} - (1 - \alpha t) \right\} + \frac{H c}{EA \ell} (1 + \sin^2 2 \theta) \quad (27)
 \end{aligned}$$

Hay que indicar que las funciones trigonométricas se toman con su signo en función del ángulo  $\theta$ . De esta forma, se considera el hecho de que la catenaria no es independiente de los ejes considerados.

Si utilizamos las expresiones obtenidas, en función de  $\ell$ ,  $c$  y  $h$ , hay que cambiar el signo de  $K_{12}$  y  $K_{21}$  para el caso en que:

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

El vector que tiene en cuenta las variaciones de temperatura es:

$L^L$ )

Ya hemos visto que:

$$\begin{aligned} L^L &= \begin{pmatrix} a_{13} \cos \theta + a_{23} \sin \theta \\ -a_{13} \sin \theta + a_{23} \cos \theta \end{pmatrix} \\ L_1^L &= a_{13} \frac{\ell}{c} + a_{23} \frac{h}{c} = a_{13} \left[ \frac{\ell}{c} + \frac{h}{c} X \right] = \\ &= a_{13} \left[ \frac{\ell}{c} + \frac{h}{c} \frac{h}{\ell} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right] \right] = \\ &= \frac{-\alpha c \left[ 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \left( \frac{\ell}{c} \right)^2 \right]}{(1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{\ell^2}{cH} + \frac{c^2}{\ell EA}} \left[ \frac{\ell}{c} + \frac{h}{c} \frac{h}{\ell} \left[ 1 - \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right] \right] \end{aligned}$$

operando y eliminando los términos de orden superior, se obtiene:

$$\begin{aligned} L_1^L &= \frac{-\alpha EA}{1 + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{EA}{H} \frac{\ell^3}{c^3}} \left[ 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{\ell^2 - 2h^2}{c^2} \right] \\ L_2^L &= -a_{13} \frac{h}{c} + a_{23} \frac{\ell}{c} = a_{13} \left[ -\frac{h}{c} + X \frac{\ell}{c} \right] = a_{13} \frac{h}{c} \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \right] \\ L_2^L &= \frac{\alpha EA}{1 + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{EA}{H} \frac{\ell^3}{c^3}} \frac{\ell h}{c^2} \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

en función del ángulo  $\theta$ :

$$L^L = \frac{-\alpha EA}{1 + (1 - \alpha t) \frac{1}{12} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \frac{EA}{H} \frac{\ell^3}{c^3}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \\ -\sin 2\theta \frac{1}{24} \left( \frac{q \ell}{H} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

y de esta forma se tiene la matriz de rigidez tangente y el vector que considera la variación de temperatura en un tirante en coordenadas locales.



## 10. RESUMEN

En el presente anexo se ha desarrollado completamente el tratamiento matemático de los tirantes, tanto en lo que se refiere a su ecuación intrínseca (12) como a una formulación de tipo tangente (15 y siguientes).

Conscientes de que lo verdaderamente importante y con sentido físico es el cumplimiento de la ecuación intrínseca, cabe utilizar una ecuación tangente menos rigurosa en el análisis. Este proceso elimina la necesidad de acudir a una formulación secante, más o menos simplificada.

En el desarrollo se consideran las fuerzas en los extremos del tirante según la tangente a los mismos y se ha incluido el efecto de un cambio diferencial de temperatura o peso por unidad de longitud.

\* \* \*

## XIII Congreso de la IABSE, en Helsinki (Finlandia), en 1988

La Asociación Internacional de Puentes y Estructuras (IABSE) celebrará en Helsinki (Finlandia), durante los días 6 al 12 de junio del próximo año 1988, su XIII Congreso Internacional para el estudio del tema "Desafíos a la Ingeniería Estructural".

En el programa de este Congreso se incluyen los siguientes temas: La construcción de puentes desde el punto de vista de la población, de la tecnología y de la sociedad.— Aplicaciones de los nuevos materiales.— Respuesta estructural en circunstancias excepcionales.— Las estructuras en los países nórdicos.— Nuevas técnicas de fabricación y ejecución.— El empleo de ordenadores en ingeniería.— Calidad ambiental.— Influencia de los detalles en el comportamiento de las estructuras.— Conservación y reparación.— Estudios sobre modelos estructurales.— Estructuras de grandes luces.— Cómo resolver los problemas de cálculo.— Proyectos de edificios.— Técnicas de rehabilitación.

Están también programadas varias sesiones de "Posters", en relación con los siguientes temas: Nuevas estructuras de puentes.— Nuevas estructuras de edificios.— Nuevas estructuras especiales.— Estructuras en alta mar.— Estructuras excepcionales en los países nórdicos.— Estructuras mixtas.— La utilización de ordenadores en ingeniería.

Asimismo, habrá proyección de películas, visitas técnicas y una exposición de nuevos materiales y equipos técnicos.

Se está preparando un programa especial para los acompañantes y se organizarán distintos viajes post-congreso.

Los interesados en obtener mayor información sobre este Congreso, deberán dirigirse a:

IABSE Secretariat  
ETH-Hönggerberg  
CH-8093 Zurich, Switzerland



## **XI Congreso Internacional de la F.I.P. Hamburgo 1990**

El próximo Congreso Internacional de la F.I.P. se celebrará, en Hamburgo (República Federal de Alemania), durante los días 3 al 7 de junio de 1990.

En dicho Congreso, además de las acostumbradas Sesiones Técnicas, habrá otras dedicadas a la exhibición y discusión de "Posters" relativos a los trabajos que vienen desarrollando las distintas Comisiones Técnicas de la F.I.P. y los diferentes Grupos Nacionales. En casos especiales se admitirán también algunos "Posters" presentados por Miembros Individuales.

Durante el Congreso estará abierta una Exposición Técnica de materiales y equipos de pretensado. Los que deseen participar en esta Exposición deberán dirigirse, a la mayor brevedad posible, a:

Hamburg Messe und Congress GmbH (HMC)  
Jungiusstrasse 13  
Postfach 30 24 80  
D 2000 Hamburg 30  
Federal Republic of Germany.

Por otra parte, a principios del próximo año 1988 se distribuirá la Invitación Preliminar al Congreso, con los primeros datos sobre el programa previsto. Los interesados en recibir esta información deberán solicitarla dirigiéndose a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19002. 28080 Madrid.

# “Determinación del coeficiente [K] de longitud efectiva en columnas de segmentos espaciales de naves metálicas utilizando microcomputadoras”

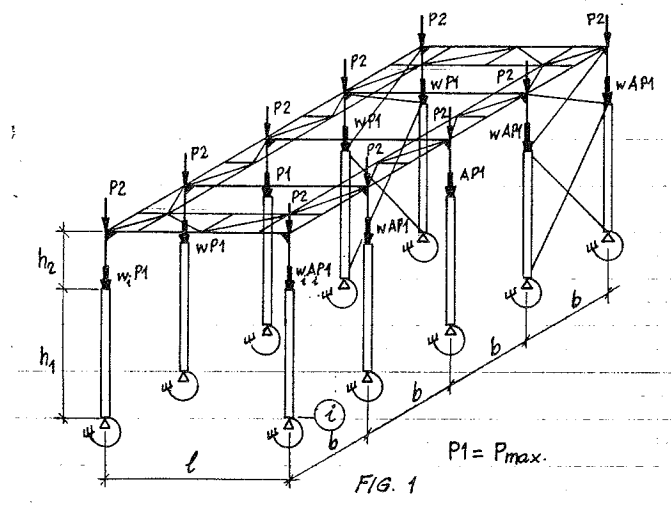
Ing. José M. Torres Pérez  
 Ing. Diana Botta Parapar  
 Facultad de Ingeniería Civil  
 I.S.P.J.A.E.  
 Marianao (Cuba)

## INTRODUCCION

El análisis de la estabilidad de los elementos en las estructuras metálicas es de suma importancia por ser éste un comportamiento característico de estas estructuras y estar asociado a muchas de las fallas que se presentan en las mismas.

Determinar la carga crítica de los elementos de una estructura expresada a través del coeficiente [k] de longitud efectiva del modo más preciso y rápido posible, ha sido por mucho tiempo una preocupación de muchos investigadores, ya que ello incide en la economía de las estructuras metálicas en lo que se refiere a consumo de material, además de establecerse con una mayor precisión la seguridad de la estructura.

Para la determinación del coeficiente [k] se ha utilizado el método de los desplazamientos considerando el trabajo espacial de la estructura, reduciendo cada segmento de la nave a la columna más cargada empotrada elásticamente en la base y apoyada elásticamente en el tope (véase fig. 1). En la solución se obtienen los valores propios de las matrices rigidez, por un método de tanteo.



En el trabajo se presenta un programa de computación que integra dos programas para la determinación del coeficiente  $[k]$  de longitud efectiva para el pandeo de columnas de segmentos espaciales de naves metálicas utilizando microcomputadoras.

## ANÁLISIS DEL ENTRAMADO ESPACIAL

Desde el punto de vista matemático, el problema de la estabilidad de un entramado espacial se reduce a determinar los valores propios de un sistema de ecuaciones homogéneo, derivándose determinantes de alto grado que requieren para su solución del auxilio de otras computadoras.

Para hacer más sencilla esta operatoria matemática, se simplificó el análisis de la estabilidad de estos segmentos de naves, reduciéndolo al análisis de la estabilidad del pórtico y columna más cargada en el segmento, apoyada elásticamente en el resto del sistema, a través del arriostramiento de la cubierta (véase fig. 2).

Limitándose al problema de la estabilidad de la nave y en el caso de carga axial solamente, la condición de estabilidad de todo el sistema se puede obtener en el pórtico transversal más cargado (véase fig. 2.c), tratándolo como apoyado elásticamente en el resto de los pórticos menos cargados, a través del entramado rígido de arriostramiento de la cubierta.

La rigidez al desplazamiento unitario del sistema rigidizador horizontal de la cubierta, se denominará  $C_{it}$ , (véase fig. 2.f), que está en función de la rigidez a la flexión del elemento y de la rigidez a un desplazamiento unitario de los pórticos transversales restantes (véase fig. 2.g).

En el caso de un sistema muy complicado, como, por ejemplo, de pórticos con columnas escalonadas, puede ser más útil la reducción a una columna (véase fig. 2.d), o a un tramo de ella, o incluso hasta un nudo (véase fig. 2.e).

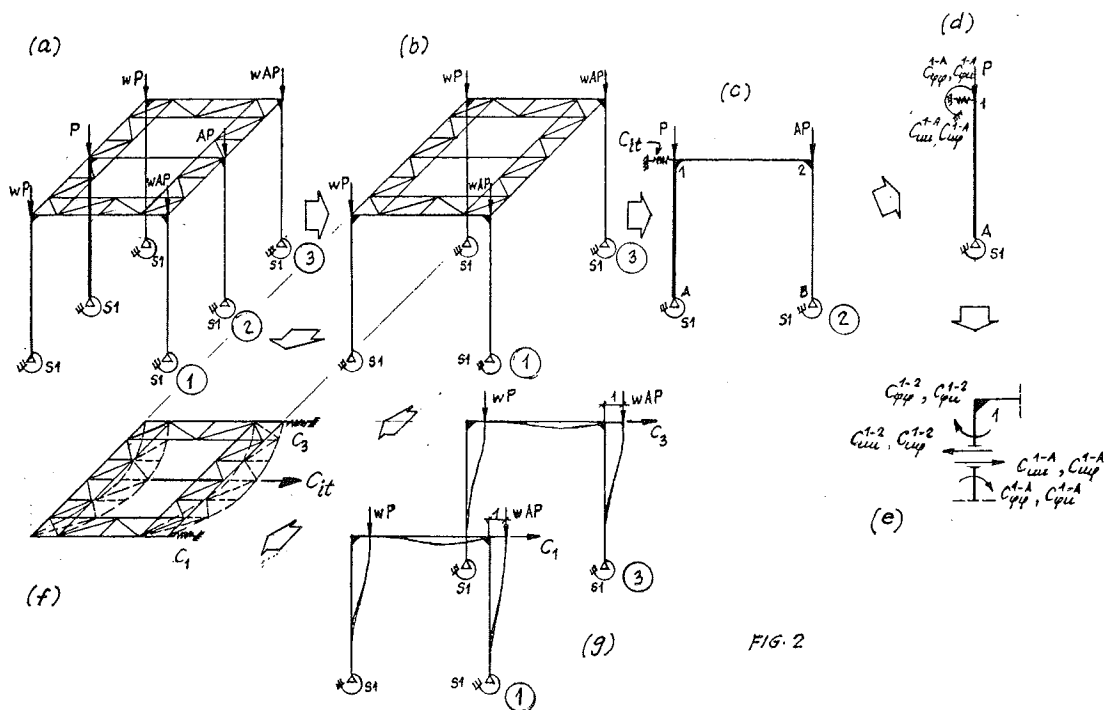


FIG. 2

## DETERMINACION DE LA RIGIDEZ AL DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE UN PORTICO

Para la determinación de la rigidez al desplazamiento unitario,  $C_i$ , de un pórtico, es decir, el valor de la fuerza horizontal necesaria para desplazar el mismo la unidad, se utiliza el método de los desplazamientos, considerando la fuerza axial en la deformación de las columnas.

Admitiendo que el pórtico es  $n$  veces hiperestático, siendo  $Z_n$  el desplazamiento horizontal del pórtico, y el valor de las incógnitas  $Z_i$  [ $i = 1, 2, \dots, n-1$ ], para  $Z_n = 1$ , se determinan las  $n-1$  ecuaciones canónicas siguientes:

$$\begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + \dots + r_{1n} &= 0, \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + \dots + r_{2n} &= 0, \\ \vdots & \\ r_{n-1,1} Z_1 + r_{n-1,2} Z_2 + \dots + r_{n-1,n} &= 0 \end{aligned}$$

La rigidez al desplazamiento horizontal  $C_i$  del pórtico  $i$ ésimo del segmento, será igual a la fuerza reactiva  $R_n$  y se obtiene de la ecuación siguiente:

$$C_i = R_n = r_{n1} \cdot Z_1 + r_{n2} \cdot Z_2 + \dots + r_{nn} \quad (1)$$

Los coeficientes  $r_{ij}$  que aparecen en las ecuaciones (1) y (2) se calculan para las columnas a compresión mediante las fórmulas dadas en las referencias (1), (2), (5), (6) o mediante las conocidas fórmulas de transformación del método de los desplazamientos para barras comprimidas.

## DETERMINACION DE LA RIGIDEZ AL DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DEL ENTRAMADO TRANSVERSAL RIGIDIZADOR DE LA CUBIERTA

El cálculo de la rigidez al desplazamiento horizontal del entramado transversal de la cubierta, se realiza por el método de los desplazamientos. La expresión de la rigidez  $C_{it}$  puede escribirse de la forma siguiente:

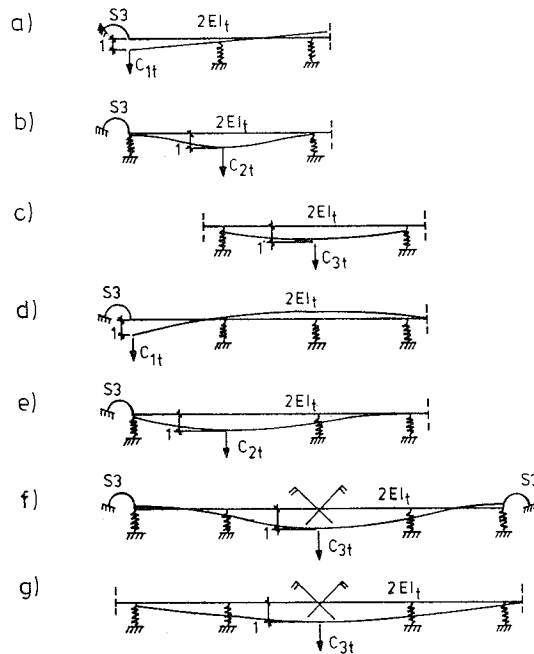
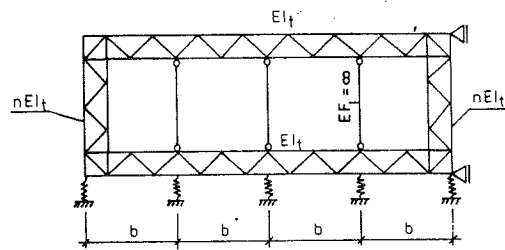
$$C_{it} = \sum_{j=1}^{2n} r_{ij} Z_j \quad (2)$$

donde  $Z_j = 1$  para  $j = i$ . Para  $j = 1$ ,  $Z_j$  se determina de las  $2n-1$  ecuaciones canónicas.

Con el objetivo de utilizar fórmulas compactas de la rigidez  $C_{it}$ , el esquema de análisis del entramado se sustituye por un aproximado de la viga continua, apoyado elásticamente, de dos, tres y cuatro luces (véase fig. 3).

La expresión de  $C_{it}$  se obtiene entonces igualando a la unidad la deformación en la viga al actuar la fuerza  $P$  aplicada en el lugar antes ocupado por el pórtico más cargado:

$$C_{it} = P \quad (i = 1) \quad (3)$$



## CONDICION DE ESTABILIDAD

La forma de plantear la condición de estabilidad depende del grado de reducción que se hace del sistema espacial. Si se reduce a un solo pórtico, entonces la determinación de la carga crítica se reduce al cálculo de la carga menor que cumple la condición siguiente:

$$C_i + C_{it} = 0 \quad (4)$$

Si el sistema espacial se reduce a una barra o un nudo, la ecuación de estabilidad se obtiene de las fórmulas de transformación para las barras, o del equilibrio del nudo (véase fig. 2.e).

$$(C^{1-A} + C^{1-2}) (C_{uu}^{1-A} + C_{uu}^{1-2}) - (C_u^{1-A} - C_u^{1-2})^2 = 0 \quad (5)$$

donde:

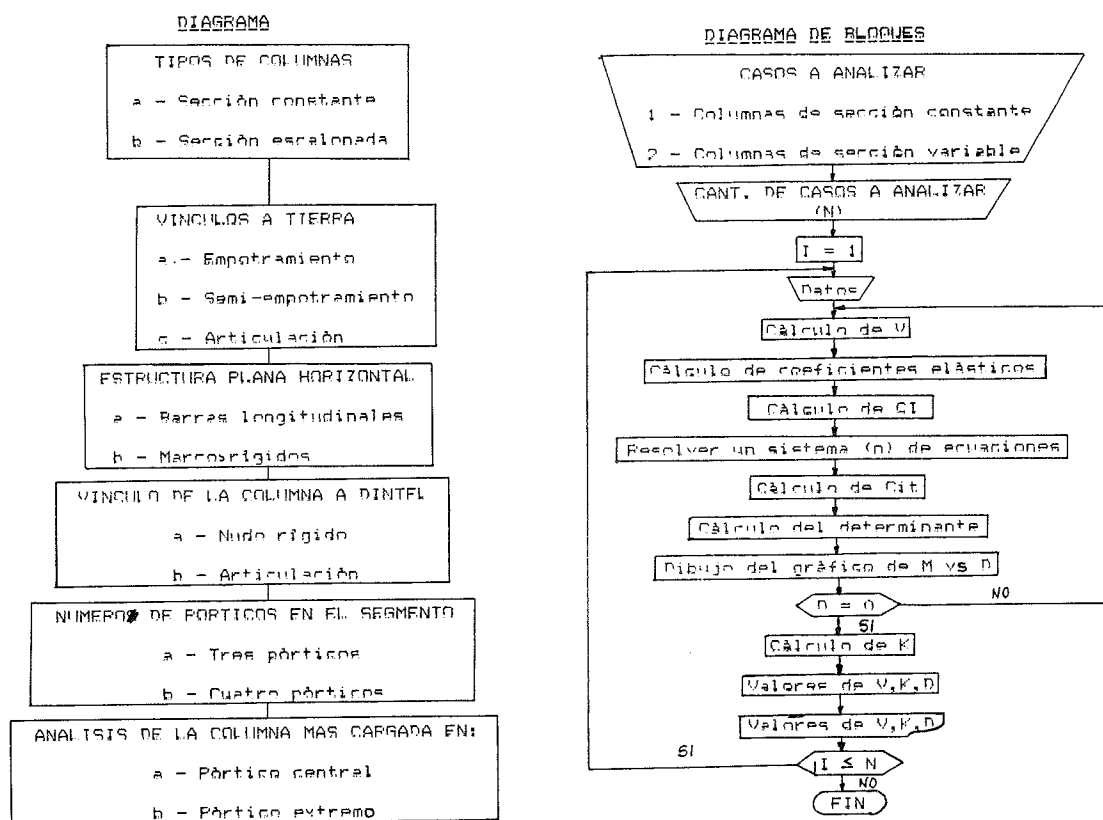
- C – Momento debido a un giro unitario del nudo.
- $C_u$  – Momento debido al desplazamiento unitario del nudo.
- $C_{uu}$  – Fuerza reactiva en la dirección del desplazamiento unitario.

## CARACTERISTICAS DEL PROGRAMA DE COMPUTACION

Se elaboró un programa de computación en lenguaje N 88 BASIC para microcomputadoras, para determinar el coeficiente [k] de reducción de la longitud real a la efectiva, para el pandeo en segmentos espaciales de naves industriales de tres y cuatro pórticos con columnas de sección constante y escalonadas, empotradas elásticamente en la base y unidas rígidamente o no al dintel.

Los casos que contempla el programa aparecen en el diagrama de la fig. 4.

El proceso de cálculo de [K] se muestra en el diagrama de bloque simplificado de la fig. 5.



Casos que resuelve el programa para el cálculo de [K], en los segmentos espaciales de naves industriales metálicas de una sola cruzía.

### DATOS GENERALES DEL PROGRAMA

L : Luz del pórtico.  
 h : Intercolumnio.  
 An : Coeficiente que relaciona las cargas de un pórtico

$$0 \leq An \leq 1$$

$W_n$  : Coeficiente que relaciona las cargas que actúan en las columnas con respecto a un pórtico que contiene la columna más cargada

$$0 \leq W_n \leq 1$$

A su vez, el coeficiente  $W_1$  define la posición del pórtico más cargado.

$W_1 < 1$  : Análisis del pórtico central.

$W_1 \geq 1$  Análisis del pórtico extremo.

$N$  : Número de casos que hay que analizar.

$N_1$  : Solución de cubierta.

$N_1 < 1$  Barras longitudinales.

$N_1 > 1$  Marco rígido en la cubierta.

$N_2$  : Número de pórticos de segmento.

$N_2 < 3$  Segmento de 3 pórticos.

$N_2 > 3$  Segmento de 4 pórticos.

$N_3$  : Vínculo de la columna en el tope.

$N_3 = 0$  Columnas empotradas en el tope.

$N_3 \neq 0$  Columnas articuladas en el tope.

$M$  : Valor inicial para el tanteo ( $\leq 620$ ); depende del caso de que se trate.

$$B = \frac{h_1}{h_2}$$

$$C = \frac{I_2 \times h_1}{I_1 \times h_2}$$

$I_1, I_2$  : Momento de inercia de la parte inferior y superior de las columnas, respectivamente.

$h_1, h_2$  : Altura de los tramos inferior y superior de la columna, respectivamente.

$$C_1 = \frac{I_3 \times h_1}{I_1 \times L}$$

$h_1$  : Altura del tramo inferior de la columna.

$I_1$  : Momento de inercia de la parte inferior de la columna.

$I_3$  : Momento de inercia de la viga.

$$G = \frac{P_1}{P_2}$$

$P_1$  : Fuerza concentrada aplicada en el tramo inferior de la columna más cargada.

$P_2$  : Fuerza concentrada aplicada en el tramo superior de la columna más cargada.

$S$  : Parámetro que depende de las condiciones de apoyo de las columnas, para tener en cuenta el efecto del suelo.

$S = 0$  : Empotramiento.

$S = 1$  : Semi-empotramiento.

$S = 1000$  : Articulación.

$$SR = \frac{I_1 \times h^3}{h_1^3 \times I_v^*}$$



- $I_l$  : Momento de inercia de la parte inferior de la columna.  
 $h_l$  : Altura del tramo inferior de la columna.  
 $I_v^*$  : Momento de inercia de vigas longitudinales, para el caso de marco rígido de la cubierta.  
 — Suma de los momentos de inercia de las vigas longitudinales, para el caso de la unión articulada entre vigas longitudinales y pórticos.  
 $h$  : Intercolumnio.

$$SL = \frac{I_{ch}^* \times h}{I_v^* \times L}$$

- $I_{ch}^*$  : Momento de inercia de las vigas del pórtico con respecto al plano horizontal.  
 $I_v^*$  : Momento de inercia de las vigas longitudinales con respecto al plano horizontal.

## CONCLUSIONES

El análisis de la estabilidad de los segmentos de naves espaciales, permite una mayor precisión en el cálculo de la carga crítica de la columna.

El programa de computación elaborado ofrece numerosos casos de segmentos espaciales para los que se puede calcular el coeficiente [k] y, además, facilita la elaboración de las diferentes soluciones.

Las normas actuales vigentes en nuestro país, ofrecen valores de coeficiente [k] superiores a los que es posible obtener con este programa, considerando el efecto espacial de la estructura y los sistemas de cargas desiguales en las columnas; lo que influye en la economía de material.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 — Kiseliov, V.A.: Mecánica de construcción. Curso especial de dinámica y estabilidad de las estructuras. Mr. MOSKU, 1980.
- 2 — Nowacki, W.: Mechanica budowli T. 1, T. 2 PWN. Warszawa 1960.
- 3 — NRM 013: 1980 Estructuras de acero. Normas de cálculo. Habana, 1980.
- 4 — Razzaq, Z. and M. Naim: Elastic instability of unbraced space frames. Journal Structural Division. ASCE. Vol 106. No. St. 7. July 1980.
- 5 — Poradnik projektanta konstrukcji; C2. I, Arkady 1980, C2. II Arkady 1982. Warszawa.
- 6 — Torres Pérez José M.: Praca doktorska p.t. "Sttecznosprzestrzennego układu jednonawowej stalowej hali przemysłowej". Wydział Budownictwa Politechniki Śląskiej. Gliwice, 1983.
- 7 — Torres Pérez José M. Estabilidad de las columnas de naves industriales metálicas considerando la cooperación del sistema espacial. IV Conferencia Científica de Ingeniería y Arquitectura I.S.P.J.A.E., Habana, Cuba, Diciembre 1984.
- 8 — Compumanual de N 88 BASIC.

**2º Congreso Iberoamericano de Soldaduras  
7ªs Jornadas Técnicas de Soldadura  
Madrid, 4, 5 y 6 de mayo de 1988**

Las Jornadas Técnicas de Soldadura se vienen convocando bianualmente por ADESOL, coincidiendo en 1988 su séptimo convocatoria con el compromiso del CENIM de organizar el 2º Congreso Iberoamericano de Soldadura. Por este motivo se han programado ambas actividades conjuntamente, lo que, obviamente, dará como resultado una reunión científico-técnica de mayor interés, por las posibilidades de intercambio y comunicación entre los participantes de los diversos países.

El objetivo de esta convocatoria es organizar una reunión entre los técnicos interesados por la soldadura y sus tecnologías afines, con el fin de intercambiar conocimientos y experiencias, dejando a los conferenciantes libertad para la elección del tema que presenten que, en todo caso, deberá ser esencialmente técnico.

En relación con la presentación de trabajos, se ha acordado lo siguiente:

- El tema será libre.
- Duración prevista de exposición: 20 minutos, seguida de coloquio.
- Plazo para presentación de trabajos:
  - a) Resumen, título y Autor: antes del 30 de noviembre de 1987.
  - b) Texto completo del trabajo (original y copia): antes del 1 de febrero de 1988. Junto con el texto, los autores indicarán los medios audiovisuales que prevean utilizar durante la exposición de su trabajo.

Los interesados en participar en estas reuniones deberán dirigirse a:

SECRETARIA 7ªs JORNADAS TECNICAS DE SOLDADURA:

ADESOL  
Príncipe de Vergara, 74-7º  
28006 Madrid (España).

o bien a: SECRETARIA 2º CONGRESO IBEROAMERICANO DE SOLDADURA.

CENIM  
Avda. Gregorio del Amo, 8  
Ciudad Universitaria  
28040 Madrid (España).

# Nuevas fórmulas aproximadas para el dimensionamiento de secciones de hormigón armado

Pedro Jiménez Montoya  
Dr. Ing. Construcción  
Francisco Morán Cabré  
Dr. Ing. de Caminos

## 1. INTRODUCCION

A pesar de la difusión cada vez mayor de los ordenadores, que permiten el cálculo de secciones de hormigón mediante métodos exactos, los métodos aproximados no han perdido vigencia. Son métodos que permiten efectuar tanteos rápidos e incluso obtener soluciones definitivas cuando no se dispone de un ordenador adecuado o del programa correspondiente al problema de que se trate. Un método de esta naturaleza debe ser simple y proporcionar resultados seguros y razonablemente económicos.

Como ejemplo de este tipo de métodos cabe citar el conocido Método del Momento Tope, original del Prof. E. Torroja, que fue recogido en la edición de 1964 de las Recomendaciones del CEB y sigue figurando en un anejo de la Instrucción EH-82 vigente. Este método tiene como principales ventajas la de cubrir todo el campo de sollicitaciones desde la flexión simple a la flexocompresión, y la de manejar conceptos y magnitudes de claro significado físico, por lo que muchos profesores y proyectistas siguen prefiriéndolo. A cambio, su aplicación está limitada a un tipo particular de distribución de armado, y sus resultados no se aproximan suficientemente a los proporcionados por el método patrón internacionalmente aceptado, que es el de la Parábola-Rectángulo.

Los métodos que se presentan en este trabajo han sido concebidos para satisfacer los siguientes requisitos:

- Sencillez.
- Generalidad.
- Buena aproximación al Método de la Parábola-Rectángulo.

Se pretende conseguir con ellos, en definitiva, una alternativa numérica al empleo de los diagramas adimensionales para el cálculo de secciones, tanto en flexión simple como en flexocompresión recta y en flexocompresión esviada.

## 2. DIMENSIONAMIENTO EN FLEXION SIMPLE

El dimensionamiento de secciones rectangulares de vigas (o losas, forjados, muros, etc) en flexión simple (véase la figura 1) es un problema relativamente sencillo. En términos adimensionales, se trata de establecer una fórmula aproximada que ligue el momento reducido  $\mu$  con la cuantía mecánica de la armadura en tracción  $\omega$ .

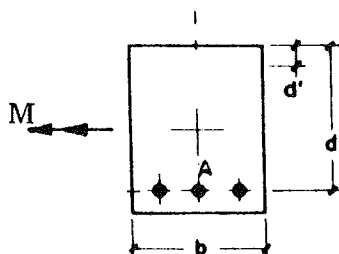


Fig.1 Flexión simple

La más conocida de estas fórmulas aproximadas es la siguiente, original de P.J. Montoya y recogida en el Manual Flexión-Compresión del CEB [1]:

$$\omega = \mu (1 + \mu)$$

siendo:

$\mu = M_d / (f_{cd} \cdot b \cdot d^2)$ , el momento reducido;

$\omega = A \cdot f_{yd} / (f_{cd} \cdot b \cdot d)$ , la cuantía mecánica de la armadura necesaria en tracción.

Esta fórmula, pese a su notable sencillez, tiene una buena precisión. El error, expresado en términos de la cuantía resultante comparada con la cuantía de acuerdo con el Método P.R., y en el campo de validez de la fórmula ( $\mu \leq 0,3$ ), es, como término medio, de un 1,5 por 100 del lado de la seguridad, con una desviación típica también igual al 1,5 por ciento.

Con alguna mayor complicación se consigue una mejor aproximación mediante la nueva fórmula:

$$\omega = \mu \frac{1 - 1,245 \mu}{0,983 - 1,687 \mu}$$

con la misma notación empleada en la anterior. Esta fórmula, en su campo de aplicación ( $\mu \leq 0,325$ ) presenta un error medio del 0,04 por 100 del lado de la seguridad, con una desviación típica de sólo el 0,07 por 100. A casi todos los efectos, esta fórmula puede emplearse como si fuera exacta.

## 3. DIMENSIONAMIENTO EN FLEXOCOMPRESION RECTA

El dimensionamiento de secciones rectangulares de soportes sometidos a flexocompresión recta (véase la figura 2) es más complejo, dada la cantidad de variables que intervienen: el límite elástico del acero, el recubrimiento, la disposición de las armaduras, el momento y el axil. Por ello, el empleo de diagramas de interacción, adimensionales, es

una solución favorita, aunque en general es preciso disponer de una colección relativamente amplia si se desea poder resolver de manera exacta el caso concreto de que se trate. Las fórmulas de F. Morán [2], recogidas también en el Manual Flexión-Compresión del CEB [1] proporcionan una alternativa numérica adecuada.

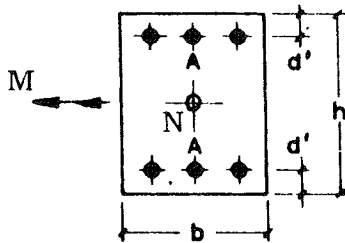


Fig.2 Flexocompresión recta

A continuación se propone una solución más sencilla y general, aunque requiere el empleo de una tabla de valores para los coeficientes, que se incluye.

$$\omega = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \mu}{1 - \alpha_3 \cdot \delta}$$

siendo:

$\nu = N_d/U_c$ , el axil reducido;

$\mu = M_d/(U_c \cdot h)$ , el momento reducido, referido al centro;

$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h$ , la capacidad mecánica del hormigón;

$\omega = A_s \cdot f_{yd}/U_c$ , la cuantía mecánica de la armadura total;

$\delta = d'/h =$  el recubrimiento relativo;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 =$  coeficientes numéricos dados en la tabla 1, en función del axil reducido.

TABLA 1

Flexocompresión recta

Tabla para el dimensionamiento de soportes rectangulares

AXIL $\nu$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
0,10	-0,09	2,01	2,00	-0,14	2,42	1,96	-0,14	2,55	1,95
0,20	-0,15	1,99	2,06	-0,22	2,61	1,97	-0,22	2,67	2,03
0,30	-0,19	2,00	2,00	-0,26	2,65	1,99	-0,27	2,71	2,20
0,40	-0,20	1,96	2,19	-0,27	2,66	2,02	-0,28	2,76	2,18
0,50	-0,18	2,05	2,17	-0,22	2,53	2,29	-0,23	2,63	2,38
0,60	-0,15	2,15	2,03	-0,19	2,62	2,17	-0,19	2,67	2,32
0,70	-0,11	2,26	1,89	-0,15	2,73	2,06	-0,16	2,78	2,17
0,80	-0,05	2,30	1,76	-0,09	2,74	1,94	-0,09	2,80	2,01
0,90	0,03	2,31	1,62	-0,01	2,75	1,82	-0,01	2,81	1,86
1,00	0,12	2,31	1,49	0,07	2,74	1,71	0,07	2,81	1,71
1,10	0,21	2,32	1,38	0,16	2,73	1,60	0,16	2,80	1,58
1,20	0,30	2,32	1,27	0,25	2,72	1,51	0,25	2,80	1,47
1,30	0,39	2,33	1,18	0,34	2,71	1,42	0,35	2,79	1,36
1,40	0,48	2,33	1,10	0,43	2,70	1,33	0,44	2,78	1,27
1,50	0,58	2,33	1,03	0,53	2,69	1,25	0,54	2,77	1,19

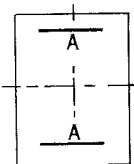
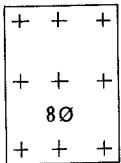
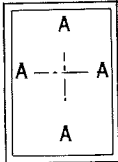
El campo de aplicación de esta fórmula es el siguiente:

- Aceros de dureza natural, con límite elástico característico comprendido entre 400 y 500 MPa, ambos inclusive.
- Distribuciones de armado con armaduras iguales en dos caras opuestas; con ocho barras; y con armaduras iguales en las cuatro caras;
- Recubrimientos relativos  $\delta$  comprendidos entre el 5 por 100 y el 15 por 100.

Los valores de los coeficientes  $\alpha$  se han obtenido para un valor intermedio del límite elástico, por lo que las cuantías resultantes tienden a quedar ligeramente del lado de la seguridad para el acero AEH-400-N, y ligeramente del lado contrario para el acero AEH-500-N.

En la tabla 2 se presentan los resultados de un estudio de errores de la aplicación de esta fórmula, en comparación con los que resultan de la aplicación de las antiguas fórmulas de F. Morán. En este estudio se ha comparado el axil actuante  $N_d$  en una sección, que se dimensiona por la fórmula considerada, con el axil realmente resistido  $N_u$ , calculado por un método exacto y correspondiente a la misma excentricidad que el  $N_d$ . Los errores se expresan como porcentajes del axil actuante  $N_d$ . Es decir, el error se toma igual a  $100 \cdot (N_u - N_d)/N_d$ .

**TABLA 2**  
Errores en flexocompresión recta

Disposición de armado	Errores en axiles (%)	Fórmulas antiguas	Nueva propuesta
	Error medio Desv. típica	0,6 1,3	0,1 0,7
	Error medio Desv. típica	No aplicable	0,4 1,7
	Error medio Desv. típica	No aplicable	0,5 1,6

En el estudio de errores citado se han considerado los siguientes casos:

- Aceros de dureza natural AEH-400-N y AEH-500-N.
- Recubrimientos relativos  $\delta$  del 5, 10 y 15 por 100.

- Axiles reducidos  $\nu$  de 0,1 a 1,5 (15 valores).
- Momentos reducidos  $\mu$  de 0,1 a 0,4 (4 valores).

Como puede verse, la aproximación es especialmente buena en el caso de armaduras iguales en dos caras opuestas, en el que se reducen, tanto el error medio como la desviación típica. En los casos de 8 barras iguales y de armaduras iguales en las cuatro caras no se puede establecer la comparación, puesto que las fórmulas antiguas no cubrían estos casos.

#### 4. DIMENSIONAMIENTO EN FLEXOCOMPRESION ESVIADA

El dimensionamiento de secciones rectangulares en flexocompresión esviada u oblicua (véase la figura 3) es un problema bastante más complejo que el del dimensionamiento en flexión recta. Además de todas las variables que intervienen en éste, aparecen dos momentos en lugar de uno sólo, lo que hace que los algoritmos para el dimensionamiento exijan una iteración doble en lugar de una sencilla, presentando a veces problemas de convergencia y, en cualquier caso, requiriendo mayores tiempos de cálculo.

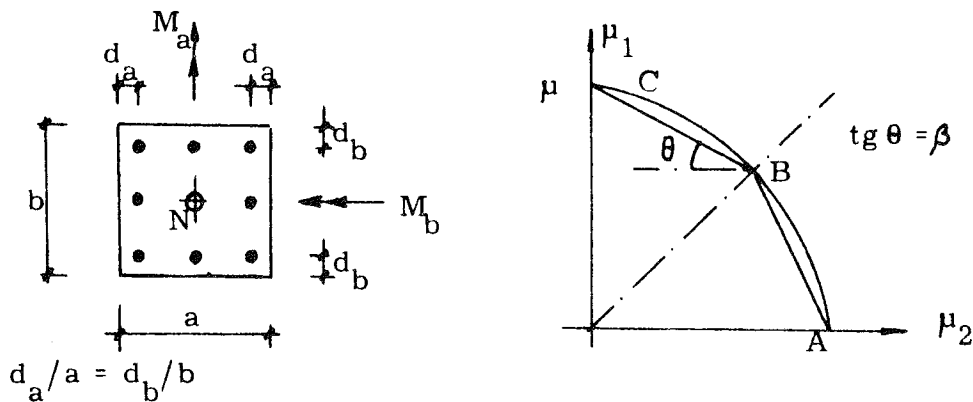


Fig.3 Flexocompresión esviada

En la práctica habitual se usan colecciones voluminosas de diagramas de interacción (rosetas), a veces preparadas a una escala insuficiente, por lo que son de lectura molesta y propensa a errores. Por otra parte, suele ser necesario interpolar entre los resultados de varios diagramas.

Para la resolución numérica se han propuesto muchos métodos aproximados, entre los que se pueden citar los de Bresler [3], Parme [4], Jakobsen [5], van Langendonck [6], Modesto dos Santos [7], etc.

En España, el método más usual consiste en la reducción del problema de flexocompresión esviada a otro de flexocompresión recta. Para ello se aplica la conocida fórmula de P.J. Montoya, incluida en la Instrucción EH-82 y en el Manual Flexión-Compresión del CEB [1]:

$$\mu = \mu_1 + \beta \cdot \mu_2 ,$$

siendo:

$$\mu_a = M_a / (U_c \cdot a) = \text{momento reducido para el canto } a;$$

- $\mu_b = M_b / (U_c \cdot b)$  = momento reducido para el canto b;  
 $U_c = f_{cd} \cdot a \cdot b$  = capacidad mecánica del hormigón;  
 $\mu_1$  = el mayor de los momentos  $\mu_a$  y  $\mu_b$ ;  
 $\mu_2$  = el menor de los momentos  $\mu_a$  y  $\mu_b$ ;  
 $\mu$  = el momento reducido equivalente en flexocompresión recta a la pareja  $\mu_a$  y  $\mu_b$ ;  
 $\beta$  = un coeficiente numérico, igual a la tangente del ángulo que forma la cuerda de la curva equirresistente con el eje x (véase fig. 3).

La interpretación geométrica consiste en la sustitución de la curva equirresistente ABC (véase fig. 3) por la pareja de rectas AB y BC, lo que debe quedar del lado de la seguridad si el coeficiente  $\beta$  se determina correctamente en función de los datos del problema.

La Instrucción EH-82 proporciona la tabla 3 para los valores del coeficiente  $\beta$  en función del axil reducido  $\nu = N_d / U_c$ :

**TABLA 3**  
Coeficientes  $\beta$  de la EH-82

$\nu$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\geq 1,0$
$\beta$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,5

Los valores anteriores del coeficiente  $\beta$  deben incrementarse en 0,1 para cuantías altas ( $\omega > 0,6$ ). Por el contrario, para cuantías bajas ( $\omega < 0,2$ ) dichos valores pueden disminuirse en 0,1.

El método anterior, muy simple, proporciona resultados normalmente del lado de la seguridad. Sin embargo, al hacer depender el coeficiente  $\beta$  sólo del axil reducido, se obtienen a veces errores importantes que conducen a soluciones antieconómicas.

La Norma Brasileña NB-1 [8] adopta la misma fórmula que la Instrucción Española, pero afina más los valores de  $\beta$  al establecer, para este coeficiente, una tabla de doble entrada en función del axil reducido  $\nu$  y de la cuantía mecánica  $\omega$  (tabla 4).

**TABLA 4**  
Coefs.  $\beta$  de la NB  
Valores de 100  $\beta$

$\omega \backslash \nu^*$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	$\geq 1,5$
0	***	31	46	53	57	57	51	41	40	40	40	40	40	40	40	40
0,25	42	57	69	76	76	67	61	55	50	42	40	40	40	40	40	40
0,50	57	66	79	85	83	73	68	63	58	52	48	40	40	40	40	40
0,75	66	74	83	88	86	78	73	68	63	60	55	51	47	40	40	40
1,00	72	80	87	91	89	80	76	72	69	65	61	58	53	50	46	40



Esta tabla de la Norma Brasileña proporciona resultados bastante más ajustados que la de la Instrucción Española; pero adolece de dos inconvenientes:

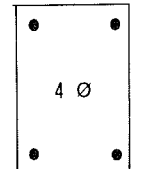
- no tiene en cuenta la distribución de armaduras;
- en el dimensionamiento exige tanteos, al no conocerse el valor de la cuantía.

En base a lo anterior se realiza aquí una nueva propuesta, que consiste en utilizar la misma fórmula, pero tomando el coeficiente  $\beta$  de las tablas 5 y 6.

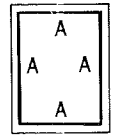
TABLAS 5 y 6

Nuevos valores de  $\beta$  propuestos

VALORES DE  $\beta$  PARA ARMADURA FORMADA POR CUATRO BARRAS IGUALES

$\mu_1 + 0,6 \mu_2$	$\nu$														
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,10	0,40	0,50	0,53	0,56	0,57	0,54	0,48	0,45	0,37	0,34	0,26	0,23	0,20	0,20	0,20
0,15	0,47	0,61	0,64	0,65	0,63	0,60	0,56	0,51	0,47	0,41	0,35	0,30	0,27	0,24	0,20
0,20	0,57	0,69	0,76	0,74	0,68	0,64	0,60	0,56	0,52	0,47	0,42	0,35	0,34	0,32	
0,25	0,64	0,74	0,82	0,78	0,72	0,68	0,63	0,59	0,56	0,52	0,46	0,46	0,44		
0,30	0,67	0,80	0,84	0,81	0,73	0,69	0,65	0,62	0,59	0,56	0,54	0,52			
0,35	0,71	0,84	0,87	0,83	0,74	0,70	0,67	0,65	0,63	0,61					
0,40	0,75	0,87	0,88	0,85	0,76	0,72	0,70	0,67							
0,45	0,80	0,89	0,92	0,89	0,78	0,74									

VALORES DE  $\beta$  PARA ARMADURAS IGUALES EN SUS CUATRO CARAS

$\mu_1 + 0,6 \mu_2$	$\nu$														
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,10	0,50	0,50	0,55	0,56	0,56	0,54	0,50	0,50	0,44	0,44	0,43	0,42	0,40	0,40	0,40
0,15	0,57	0,57	0,60	0,65	0,62	0,58	0,56	0,54	0,51	0,50	0,47	0,44	0,43	0,42	0,42
0,20	0,60	0,63	0,67	0,69	0,66	0,62	0,58	0,56	0,54	0,52	0,50	0,47	0,47	0,46	0,45
0,25	0,62	0,65	0,68	0,71	0,69	0,64	0,60	0,58	0,56	0,54	0,53	0,52	0,50		
0,30	0,63	0,66	0,68	0,72	0,69	0,66	0,63	0,60	0,58	0,56	0,54				
0,35	0,64	0,67	0,70	0,72	0,70	0,66	0,64	0,60							
0,40	0,64	0,67	0,70	0,72	0,70										

Estas tablas permiten tener en cuenta las tres variables principales que determinan el valor del coeficiente  $\beta$ : el axil reducido  $\nu$ , la cuantía  $\omega$ , y el número de barras de la armadura. Este último parámetro se tiene en cuenta utilizando la tabla 5 para cuatro barras en las esquinas, y la tabla 6 para ocho o más barras distribuidas en las caras.

Como puede verse, las tablas son de doble entrada, con las variables  $\nu$  y  $\mu_1 + 0,6 \cdot \mu_2$ . Este último parámetro está ligado a la cuantía mecánica desconocida  $\omega$ . De esta forma se hace depender  $\beta$  de la cuantía, de una forma indirecta.

Para preparar las tablas se ha procedido de una forma iterativa. Se ha partido de cada

pareja de valores  $\nu$  y  $\mu_1 + 0,6 \cdot \mu_2$ , determinando la cuantía correspondiente en flexocompresión recta,  $\omega$ . Con este valor se ha calculado el verdadero coeficiente  $\beta$ . A continuación se repite el proceso partiendo de la pareja de valores:

$$\nu \text{ y } (\mu_1 + 0,6 \cdot \mu_2) \cdot (1 + \beta) / 1,6 ,$$

obteniéndose nuevos valores de  $\omega$  y de  $\beta$ .

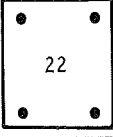
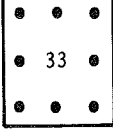
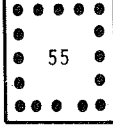
Las tablas han sido preparadas para un recubrimiento relativo del 10 por 100 y un acero natural de límite elástico intermedio entre 400 y 500 MPa. Por ello, su campo de aplicación se supone, en principio, limitado de la siguiente forma:

- Acero de dureza natural, de límite elástico característico comprendido entre 400 y 500 MPa.
- Recubrimientos relativos comprendidos entre el 6 y el 10 por 100, e iguales en ambas direcciones.
- Armaduras iguales en las cuatro esquinas, o en las cuatro caras (incluyendo en este caso el de ocho barras iguales).

En la tabla 7 se presentan los resultados de un estudio de errores de la aplicación de las tablas 5 y 6, comparativamente con los que resultan de la aplicación de la tabla incluida en la EH-82.

En este estudio de errores se ha comparado el axil actuante  $N_d$  de una sección, que se dimensiona por el método aproximado considerado, con el axil realmente resistido  $N_u$ , calculado por un método exacto y correspondiente a las mismas excentricidades que el  $N_d$ . Los errores se expresan como porcentajes del axil actuante. Es decir, el error se toma igual a  $100 \cdot (N_u - N_d) / N_d$ .

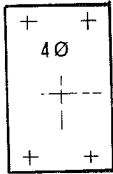
**TABLA 7**  
Errores en flexocompresión esviada

Disposición de armado	Errores resultantes en % de axil actuante	Fórmula EH-82			Nuevas propuestas				
		Flexión diagonal	Flexión intermedia	Total	Flexión diagonal	Rectas		Hiperelipses	
						Flexión interm.	Total	Flexión interm.	Total
 22	Error medio desv. típica	2,1 3,1	4,4 2,5	3,3 3,0	0,0 1,9	3,2 2,5	1,6 2,7	0,7 1,9	0,3 1,9
 33	Error medio desv. típica	5,2 5,2	6,8 4,4	6,0 4,9	0,7 2,2	3,9 2,5	2,3 2,9	0,8 1,8	0,8 2,0
 55	Error medio desv. típica	5,3 5,2	6,9 4,6	6,1 5,0	0,8 2,0	4,0 2,6	2,4 2,8	0,9 1,7	0,8 1,9
Err. medios		4,2	6,0	5,1	0,5	3,7	2,1	0,8	0,6

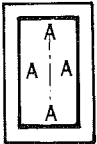
TABLAS 8 y 9

Coefficientes  $\alpha$  para las hiperelipses

VALORES DE  $\alpha$  PARA ARMADURA FORMADA POR CUATRO BARRAS IGUALES

$\mu_1 + 0,6 \mu_2$	Axil reducido $\nu$														
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,10	2,06	1,71	1,63	1,56	1,54	1,61	1,77	1,87	2,20	2,37	3,00	3,35	3,80	3,80	3,80
0,15	1,80	1,46	1,40	1,38	1,42	1,47	1,56	1,68	1,80	2,02	2,31	2,64	2,90	3,22	3,80
0,20	1,54	1,32	1,23	1,25	1,34	1,40	1,47	1,56	1,66	1,80	1,98	2,31	2,37	2,50	
0,25	1,40	1,25	1,16	1,20	1,28	1,34	1,42	1,49	1,56	1,66	1,83	1,83	1,90		
0,30	1,35	1,18	1,14	1,17	1,26	1,32	1,38	1,44	1,49	1,56	1,61	1,66			
0,35	1,29	1,14	1,11	1,15	1,25	1,31	1,35	1,38	1,42	1,46	1,46				
0,40	1,24	1,11	1,10	1,13	1,23	1,28	1,31	1,35							
0,45	1,18	1,09	1,06	1,09	1,20	1,25									

VALORES DE  $\alpha$  PARA ARMADURAS IGUALES EN LAS CUATRO CARAS

$\mu_1 + 0,6 \mu_2$	Axil reducido $\nu$														
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,10	1,71	1,71	1,58	1,56	1,56	1,61	1,71	1,71	1,90	1,90	1,94	1,98	2,06	2,06	2,06
0,15	1,54	1,54	1,47	1,38	1,44	1,52	1,56	1,61	1,68	1,71	1,80	1,90	1,94	1,98	1,98
0,20	1,47	1,42	1,35	1,32	1,37	1,44	1,52	1,56	1,61	1,66	1,71	1,80	1,80	1,83	1,87
0,25	1,44	1,38	1,34	1,29	1,32	1,40	1,47	1,52	1,56	1,61	1,63	1,66	1,71		
0,30	1,42	1,37	1,34	1,28	1,32	1,37	1,42	1,47	1,52	1,56	1,61				
0,35	1,40	1,35	1,31	1,28	1,31	1,37	1,40	1,47							
0,40	1,40	1,35	1,31	1,28	1,31										

Se han considerado los siguientes casos:

- Aceros de dureza natural AEH-400-N y AEH-500-N.
- Recubrimientos relativos  $\delta$  del 6 y del 10 por 100.
- Axiles reducidos  $\nu$  de 0,1 a 1,5 (15 valores).
- Momentos reducidos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  entre 0,0 y 0,4.
- Dos valores de la relación  $\mu_2/\mu_1$ : 1 (flexión diagonal) y 0,5 (flexión intermedia).

Puede verse que los errores de la nueva propuesta son bastante menores que los del método de la EH-82, sobre todo en el caso de la flexión diagonal, en que tanto el error medio como su desviación típica se reducen notablemente.

No sucede lo mismo, sin embargo, con el caso de la flexión intermedia, lo que debe atribuirse a la diferencia que existe entre la curva equirresistente real y su aproximación por la cuerda.

Por ello parece conveniente hacer una propuesta alternativa en la que, en vez de utilizar la recta, se emplee una fórmula aproximada que sustituya la curva equirresistente por una curva adecuada. De entre las curvas propuestas en la bibliografía, después de varios ensayos, los autores han encontrado que las más adecuadas son las *hiperelipses* de Parme [4]:

$$\mu = (\mu_a^\alpha + \mu_b^\alpha)^{1/\alpha},$$

siendo

$\alpha$  = exponente que es función del coeficiente  $\beta$  definido anteriormente:

$\alpha = \log(2)/\log(1 + \beta)$ , y que por tanto dependerá de los mismos parámetros de los que dependía  $\beta$ .

Los valores de  $\alpha$  se dan en las tablas 8 y 9 para los mismos casos de las tablas 5 y 6, respectivamente.

En la tabla 7 se incluye asimismo un resumen comparativo de los errores que se producen al aplicar esta fórmula con los coeficientes de las tablas 8 y 9. Como puede verse, se reducen ahora todos los errores de una manera significativa, siendo los errores medios, en todos los casos, inferiores al 1 por 100, y las desviaciones típicas inferiores al 2 por 100, en términos de axiles.

## 5. EJEMPLOS

5.1. Dimensionar la sección de una viga de  $b \times h = 40 \times 25$  cm (viga plana) sometida a un momento flector de cálculo  $M_d = 4,12$  mt. Materiales:  $f_{ck} = 175$  kp/cm<sup>2</sup>;  $f_{yk} = 4100$  kp/cm<sup>2</sup>. Coeficientes de seguridad:  $\gamma_c = 1,5$ ;  $\gamma_s = 1,1$ .

Suponiendo un recubrimiento mecánico de 3 cm, la capacidad mecánica del hormigón será:

$$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot d = 1750/1,5 \cdot 0,4 \cdot 0,22 = 102,7 \text{ t}$$

El momento reducido será:

$$\mu = M_d/(U_c \cdot d) = 4,12/(102,7 \cdot 0,22) = 0,1823$$

La cuantía mecánica necesaria será:

$$\omega = \mu \cdot (1 - 1,245 \mu) / (0,983 - 1,687 \mu) = 0,209$$

Y la capacidad mecánica de la armadura:

$$U = A \cdot f_{yd} = \omega \cdot U_c = 0,209 \cdot 102,7 = 21,5 \text{ t}$$

5.2. Dimensionar la sección de un soporte de  $b \times h = 30 \times 60$  cm sometida a los esfuerzos  $N_d = 86,4$  t;  $M_d = 27$  mt. Hormigón H-200. Acero y coeficientes como en el ejemplo anterior.

Capacidad mecánica del hormigón:

$$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h = 2000 \cdot 0,9/1,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 216 \text{ t}$$

Esfuerzos reducidos:

$$\nu = N_d / U_c = 86,4 / 216 = 0,4 ;$$

$$\mu = M_d / (U_c \cdot h) = 27 / (216 \cdot 0,6) = 0,208$$

Se supone armadura en las cuatro caras y un recubrimiento del 10 por 100. Entrando en la tabla 1 se obtienen los coeficientes:

$$\alpha_1 = -0,28 ; \quad \alpha_2 = 2,76 ; \quad \alpha_3 = 2,18$$

La cuantía necesaria será:

$$\begin{aligned} \omega &= (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \mu) / (1 - \alpha_3 \cdot \delta) = \\ &= (-0,28 + 2,76 \cdot 0,208) / (1 - 2,18 \cdot 0,1) = 0,376 \end{aligned}$$

La capacidad mecánica total de la armadura:

$$U = A_s \cdot f_{yd} = \omega \cdot U_c = 0,376 \cdot 216 = 81,2 \text{ t} < > 12 \phi 16$$

5.3. Dimensionar la sección del soporte anterior sometido a las solicitaciones  $N_d = 86,4 \text{ t}$ ;  $M_h = 16 \text{ mt}$ ;  $M_b = 8 \text{ mt}$ .

Los esfuerzos reducidos valdrán:

$$\nu = 0,4 ;$$

$$\mu_h = 16 / (216 \cdot 0,6) = 0,123 ;$$

$$\mu_b = 8 / (216 \cdot 0,3) = 0,123 .$$

Este caso corresponde, por tanto, a  $\mu_1 = \mu_2$  (flexión diagonal), por lo que puede aplicarse la fórmula más sencilla (aproximación recta), que dará el mismo resultado que la hiperelipse. Para ello se entra en la tabla 6 con:

$$\nu = 0,4 \quad \text{y} \quad \mu_1 + 0,6 \cdot \mu_2 = 1,6 \cdot 0,123 = 0,197$$

obteniéndose un coeficiente  $\beta = 0,69$ . El problema de flexión recta equivalente tendrá como esfuerzos reducidos:

$$\nu = 0,4$$

$$\mu = \mu_1 + \beta \cdot \mu_2 = 0,123 + 0,69 \cdot 0,123 = 0,208$$

La solución, por consiguiente, es la misma obtenida en el caso anterior, es decir,  $U = 81,2 \text{ t} < > 12 \phi 16$ .

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] CEB/FIP: Manual on Bending and Compression. Boletín CEB n. 141. The Construction Press. London, 1982.
- [2] MORAN, F.: Cálculo de secciones de hormigón armado, sometidas a solicitaciones normales, en el estado límite último. Monografía n. 304 del Instituto E. Torroja. Madrid, 1972.
- [3] BRESLER, B.: Design Criteria for R.C. Columns under Axial Load and Biaxial Bending. ACI Journal, Proceedings V. 57 n. 5, noviembre 1960.

- [4] PARME, A.: Rectangular Columns subjected to Biaxial Bending. ACI Journal, Proceedings, septiembre 1966.
- [5] AAS-JAKOBSEN, A.: Biaxial eccentricities in the ultimate load design. ACI Journal. Proceedings V. 61 n. 3, marzo 1964.
- [6] LANGENDONCK, T.V.: Flexão Composta Obliqua de Concreto Armado - Boletim Técnico n. 79 da Associação Brasileira de Cimento Portland - São Paulo, 1980.
- [7] MODESTO DOS SANTOS, L.: Cálculo de Concreto Armado volume 2. Editora LMS. São Paulo, 1981.
- [8] ABNT, ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS: Norma Brasileira NB-1/78 - Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado - São Paulo, 1978.

## RESUMEN

Se presentan nuevas fórmulas aproximadas para el dimensionamiento de secciones de vigas y soportes de hormigón armado.

Estas fórmulas vienen expresadas en términos adimensionales, y permiten resolver, con buena precisión, el dimensionamiento de secciones rectangulares en flexión simple, en flexocompresión recta y en flexocompresión esviada, empleando para ello, en algunos casos, coeficientes numéricos cuyos valores se ofrecen tabulados.

## RESUME

On présente de nouvelles formules approchées pour le calcul des armatures des sections de poutres et poteaux en béton armé, selon le Code Modèle du CEB.

Cettes formules sont non-dimensionnelles et permettent, avec une bonne précision, de calculer les armatures des sections rectangulaires en flexion simple, en flexion-compression droite et en flexion-compression déviée, en employant des coefficients numériques dont les valeurs sont donnés en forme tabulaire.

## SUMMARY

New approximate formulae for the design of reinforced concrete cross-sections of beams and columns are presented. This design is made in accordance with the CEB Model Code.

These formulae are non-dimensional, and allow a precise design of the reinforcement of rectangular cross-sections in simple bending, in bending and compression and in biaxial bending and compression. Some numerical coefficients are used, which are presented in tabular form.

## Pandeo con fluencia

Eduardo Pedoja  
Ingeniero Civil  
Montevideo - Uruguay

### RESUMEN

En el presente artículo se estudia el problema del pandeo con fluencia o más exactamente la teoría de segundo orden con fluencia.

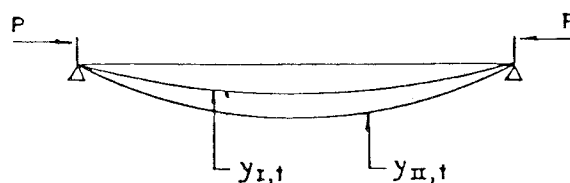
Se corrige una fórmula propuesta por algunos autores y luego se deduce la misma fórmula corregida, por un camino completamente distinto.

Por último, en un ejemplo numérico, se muestra la importancia que puede tener este fenómeno en el dimensionamiento de pilares esbeltos.

### 1. SOLUCION APROXIMADA

#### 1.1. Fórmula de Dischinger

Consideremos una barra simplemente apoyada, con carga excéntrica.



De acuerdo con la teoría de primer orden, en  $t = 0$  tendrá una cierta elástica que llamaremos  $y_{I,0}$ . Si en la barra actúa la fluencia, la elástica en función del tiempo será:

$$y_{I,t} = y_{I,0} (1 + \varphi)$$

Debido al efecto de segundo orden provocado por la carga  $P$ , esta flecha va a aumentar, y será, según la fórmula aproximada propuesta por Dischinger:

$$y_{II,t} = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu - 1} e^{\frac{\varphi}{\nu - 1}} \quad ; \quad \nu = \frac{P_{cr}}{P}$$

(véase ecuación (8.37) en la referencia (1) o ecuación (104) en la referencia (2)).

Para estudiar su validez proponemos los siguientes valores, comunes en la práctica:

$$\nu = \frac{P_{cr}}{P} = 10 \quad ; \quad \varphi = 2$$

De acuerdo con la teoría de primer orden resultará:

$$y_{I,t} = y_{I,0} (1 + \varphi) = 3 y_{I,0} \quad ;$$

y en teoría de segundo orden:

$$y_{II,t} = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu - 1} e^{\frac{\varphi}{\nu - 1}} = 1,39 y_{I,0}$$

La teoría de segundo orden nos da una deformación que es menos de la mitad que la deformación según la teoría de primer orden. Este resultado es evidentemente incorrecto.

## 1.2. Modificación de la Fórmula de Dischinger

Para modificar la fórmula de Dischinger seguiremos paso a paso el razonamiento desarrollado en la referencia (1) sección 8.3.

La deformación en el intervalo  $dt$ , resulta de la suma de la deformación debida a la fluencia  $dy_k$  y de la deformación elástica  $dy_e$ :

$$dy = dy_k + dy_e \quad (8.33)$$

en la que  $dy_e$  es producida por  $dy_k$  según la siguiente ecuación:

$$dy_e = dy_k \frac{1}{\nu - 1} \quad \text{ó} \quad dy_k = dy_e (\nu - 1) \quad (8.34)$$

También es válida esta otra ecuación:

$$dy_k = y_e d\varphi \quad (8.35)$$

Combinando ambas tenemos la ecuación diferencial del problema:

$$dy_e = y_e d\varphi \frac{1}{\nu - 1} \quad (8.36)$$



Como para  $t = 0$  resulta  $y_e = y_{II,0}$ , la solución es la siguiente:

$$y_e = y_{II,0} e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu-1} e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} \quad (8.37)$$

En el numeral (8.37) se establece además:

$$y_e = y_{II,t} \quad (8.37)$$

lo cual es incorrecto porque se está identificando la deformación total con la parte elástica de la deformación, en contradicción con la integral de la ecuación (8.33):

$$y_{II,t} = y_e + y_k$$

A partir de este punto proseguiremos el razonamiento por nuestra cuenta.

Para la parte elástica de la deformación, en virtud de lo anteriormente expuesto se tendrá:

$$y_e = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu-1} e^{\frac{\varphi}{\nu-1}}$$

La deformación debida a la fluencia es, según (8.35):

$$dy_k = y_e d\varphi$$

o sea:

$$dy_k = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu-1} e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} d\varphi$$

Integrando y estableciendo que  $y_k = 0$  para  $\varphi = 0$  tenemos:

$$y_k = y_{I,0} \nu (e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} - 1)$$

De acuerdo con (8.33) la deformación total,  $y_{II,t}$ , es:

$$y_{II,t} = y_e + y_k = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu-1} [1 + \nu (e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} - 1)]$$

Considerando que:

$$y_{II,0} = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu-1}$$

obtenemos la fórmula de Dischinger modificada:

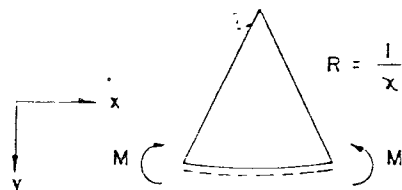
$$y_{II,t} = y_{II,0} [1 + \nu (e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} - 1)]$$

En el capítulo siguiente volveremos a obtener esta ecuación aproximada, por un camino diferente.

## 2. SOLUCION EXACTA

### 2.1. Ecuación de Euler-Bernoulli con fluencia

Consideremos una barra sometida a la acción de un momento  $M$ :



Si no hay fluencia, la curvatura vale:

$$-\chi = \frac{M}{EI}$$

Si hay fluencia y el momento  $M$  es constante, vale:

$$-\chi = \frac{M}{EI} (1 + \varphi)$$

Si hay fluencia y el momento  $M$  depende de ella, hay que plantear la ecuación en diferenciales con respecto a  $\varphi$ :

$$-d\chi = \frac{I}{EI} M d\varphi + \frac{I}{EI} dM$$

En el segundo miembro, el término  $\frac{I}{EI} M d\varphi$  es el incremento de curvatura debido a la fluencia de la barra y el término  $\frac{I}{EI} dM$  es la variación elástica de la curvatura debida a la variación del momento.

Dividiendo por  $d\varphi$ :

$$-\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{I}{EI} \left( M + \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)$$

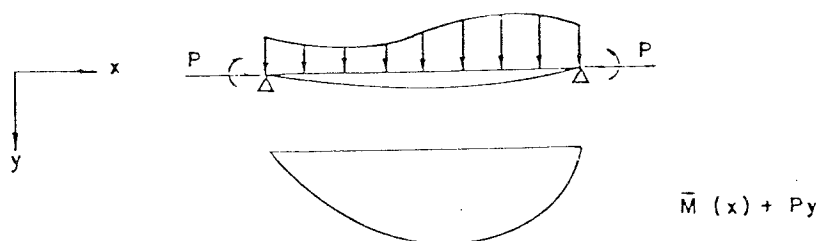
Sustituyendo  $\chi = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , obtenemos la ecuación diferencial de la flexión sometida a fluencia:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial \varphi \partial x^2} = -\frac{I}{EI} \left( M + \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)$$

Aplicaremos esta ecuación a la solución de problemas de segundo orden.

## 2.2. Flexión sin Fluencia

Consideremos la barra simplemente apoyada de la figura:



Planteamos estas dos ecuaciones:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{M}{EI}$$

$$M = \bar{M}(x) + Py$$

de las cuales deducimos la ecuación diferencial de la elástica:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + k^2 y = - \frac{I}{EI} \bar{M}(x) \quad ; \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

que resolveremos por series de Fourier desarrollando  $\bar{M}(x)$ , e "y" en serie de senos:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell}$$

$$\bar{M}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell}$$

Los  $b_n$  son conocidos y los  $\sigma_n$  no lo son.

Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos  $\sigma_n$  en función de  $b_n$ :

$$\sigma_n = \frac{1}{P} \frac{b_n}{n^2 \nu - 1} \quad ; \quad \nu = \frac{P \ell^2}{EI}$$

Llamando  $y = y_{II,0}$  y sustituyendo, llegamos a la serie que define la flecha antes de que comience la fluencia:

$$y_{II,0} = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 \nu - 1} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell}$$

### 2.3. Flexión con fluencia

Consideremos otra vez la barra simplemente apoyada de la figura. De las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial \varphi \partial x^2} = -\frac{I}{EI} \left( M + \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)$$

$$M = \bar{M}(x) + P y$$

obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k^2 y \right] + k^2 y = -\frac{\bar{M}(x)}{EI}$$

que al igual que el caso anterior resolveremos por series de Fourier, desarrollando "y" y  $\bar{M}(x)$  en serie de senos:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\varphi) \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell}$$

$$\bar{M}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell}$$

siendo los coeficientes  $\mu_n(\varphi)$  funciones de  $\varphi$ .

Sustituyendo estas dos series en la ecuación diferencial de la elástica, podemos escribir, para el término enésimo, la siguiente ecuación diferencial en  $\varphi$ :

$$\frac{d \mu_n}{d \varphi} - \frac{1}{n^2 \nu - 1} \mu_n = \frac{1}{n^2 \nu - 1} \frac{b_n}{P}$$

cuya solución general es:

$$\mu_n(\varphi) = A_n e^{\frac{\varphi}{n^2 \nu - 1}} - \frac{b_n}{P}$$

Recordando que para  $\varphi = 0$  la elástica  $y(x, \varphi)$  debe coincidir con la elástica  $y_{II,0}$  anteriormente deducida, llegamos a la condición de borde:

$$\mu_n(0) = \sigma_n = \frac{1}{P} \frac{b_n}{n^2 \nu - 1}$$

que nos determina  $\mu_n(\varphi)$ :

$$\mu_n(\varphi) = \frac{1}{P} \frac{b_n}{n^2 \nu - 1} \left[ 1 + n^2 \nu \left( e^{\frac{\varphi}{n^2 \nu - 1}} - 1 \right) \right]$$

La elástica  $y = y_{II,t}$  vale, en consecuencia:

$$y_{II,t} = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 \nu - 1} \left[ 1 + n^2 \nu \left( e^{\frac{\varphi}{n^2 \nu - 1}} - 1 \right) \right] \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell}$$

Puede verse un desarrollo similar en la referencia (3).

## 2.4. Nueva deducción de la fórmula de Dischinger modificada

Puede observarse fácilmente que las series que definen  $y_{II,0}$  e  $y_{II,t}$  convergen con rapidez, por lo que en general basta con tomar el primer término:

$$y_{II,0} \cong \frac{b_1}{P} \frac{1}{\nu - 1} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$y_{II,t} \cong \frac{b_1}{P} \frac{1}{\nu - 1} [1 + \nu (e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} - 1)]$$

Sustituyendo  $y_{II,0}$  en  $y_{II,t}$ :

$$y_{II,t} = y_{II,0} [1 + \nu (e^{\frac{\varphi}{\nu-1}} - 1)]$$

obtenemos la fórmula de Dischinger modificada.

## 2.5. Simplificación de la fórmula de Dischinger modificada

Desarrollando  $e^{\frac{\varphi}{\nu-1}}$  en serie de potencias y tomando solamente el primer término, obtenemos una fórmula muy simple:

$$y_{II,t} = y_{II,0} \left(1 + \frac{\nu}{\nu - 1} \varphi\right) \quad \text{ó} \quad y_{II,t} = \frac{\nu}{\nu - 1} y_{I,0} \left(1 + \frac{\nu}{\nu - 1} \varphi\right)$$

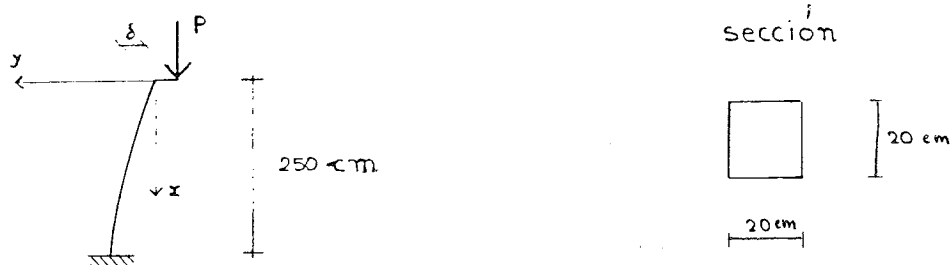
que es formalmente idéntica a la que gobierna la fluencia sin carga axial:

$$y_{I,t} = y_{I,0} (1 + \varphi)$$

Si bien con esta simplificación se obtienen valores inferiores, su uso en la práctica puede ser aceptable.

## 3. EJEMPLO

### 3.1. Pilar cargado excéntricamente



módulo de elasticidad:	$E = 260.000 \text{ daN/cm}^2$
inercia:	$I = 13.333 \text{ cm}^2$
luz de pandeo:	$\ell = 500 \text{ cm}$
excentricidad de la carga:	$\delta = 10 \text{ cm}$
coeficiente de fluencia:	$\varphi = 2$
carga:	$P = 15.000 \text{ daN}$

carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = 136.855 \text{ daN}$$

coeficiente de seguridad al pandeo:

$$\nu = \frac{P_{cr}}{P} = 9,12$$

flecha máxima inicial:

$$y_{I,0} = \frac{P \ell^2 \delta}{8 EI} = 1,35 \text{ cm}$$

flecha máxima en el instante t ( $\varphi = 2$ ) según:

teoría de 1<sup>er</sup> orden:

$$y_{I,t} = y_{I,0} (1 + \varphi) = 5,41$$

fórmula de Dischinger:

$$y_{II,t} = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu - 1} e^{\frac{\varphi}{\nu - 1}} = 2,20$$

fórmula de Dischinger modificada:

$$y_{II,t} = y_{I,0} \frac{\nu}{\nu - 1} [1 + \nu (e^{\frac{\varphi}{\nu - 1}} - 1)] = 7,71$$

solución exacta:

$$y_{II,t} = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 \nu - 1} [1 + n^2 \nu (e^{\frac{\varphi}{n^2 \nu - 1}} - 1)] \text{sen} \frac{n \pi x}{\ell} = 7,78$$

$$b_n = \frac{4 P \delta}{n \pi} \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

fórmula simplificada:

$$y_{II,t} = \frac{\nu}{\nu - 1} y_{I,0} (1 + \frac{\nu}{\nu - 1} \varphi) = 6,63$$

momentos en la base del pilar en el instante t ( $\varphi = 2$ ) según:

teoría de 1er orden sin fluencia:

$$M = P \delta = 150.000 \text{ daN cm}$$

fórmula de Dischinger:

$$M = P (\delta + y_{II,t}) = 183.000 \text{ daN cm}$$

fórmula de Dischinger modificada:

$$M = P (\delta + y_{II,t}) = 256.000 \text{ daN cm}$$

solución exacta:

$$M = P (\delta + y_{II,t}) = 267.000 \text{ daN cm}$$

fórmula simplificada:

$$M = P (\delta + y_{II,t}) = 250.000 \text{ daN cm}$$

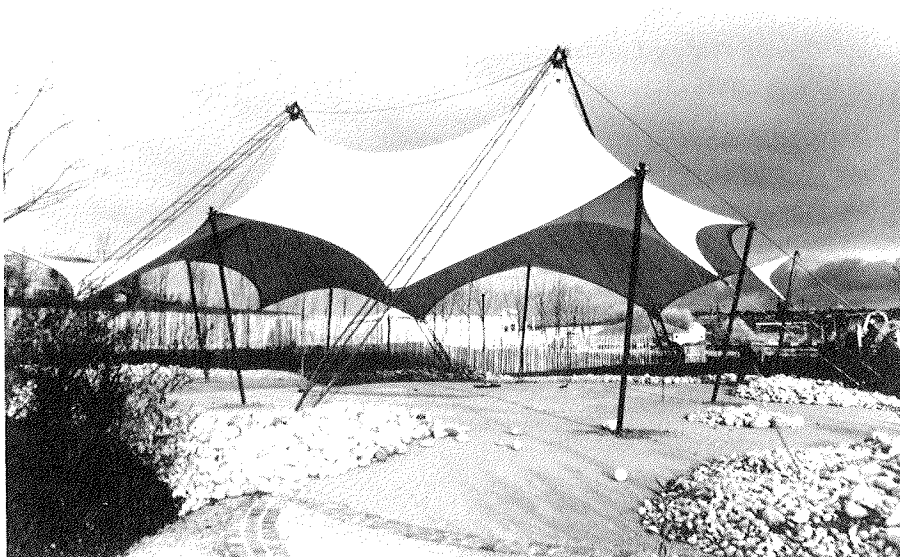
## REFERENCIAS

- (1) HORMIGON ARMADO Y HORMIGON PRETENSADO, tomo II. Rüsck-Jungwirth. (CECSA).
- (2) DAfStb. Heft 220.
- (3) CALCULO LIMITE DE VIGAS Y ESTRUCTURAS APORTICADAS DE HORMIGON ARMADO, SEGUN LA NORMA DIN 1045. Alberto Hugo Puppo. (INSTITUTO ARGENTINO DEL CEMENTO PORTLAND).

## Nuevo tipo de cubiertas y marquesinas para usos múltiples

Una Empresa británica ha diseñado y fabricado una serie de marquesinas de erección rápida y sencilla, para usos diversos, tales como escenarios, quioscos de música, bares y cafeterías, aparcamientos, exposiciones y pabellones de ferias comerciales.

Estas estructuras de tela tesa que se suministran listas para montaje inmediato, pueden obtenerse en tipos diversos que incluyen el 003, de tres mástiles y en tres tamaños y el 005 de dos picos.



Los tres tamaños normalizados del tipo 003 cubren superficies aproximadas de 60 m<sup>2</sup>, 90 m<sup>2</sup> y 125 m<sup>2</sup>, suficientes para alojar un máximo de cien personas; mientras que el tipo 005, que cubre una superficie de 208 m<sup>2</sup>, sirve para unas doscientas personas.

El material de estas marquesinas, que es impermeable y está fabricado de manera que sea capaz de soportar vientos fuertes y cargas de nieve, es de poliéster de 680 g/m<sup>2</sup>, revestido con cloruro polivinílico, o de tela de fibra de vidrio y revestimiento de politetrafluoroetileno (PTFE), que es mucho más duradero.

El tipo 003, que se erige fácilmente en una o dos horas por un par de hombres y se desmonta en 30 minutos, cuenta con mástiles sustentadores, de celosía de acero de 4-4,5 m de altura. La marquesina puede suministrarse en una amplia gama de colores y con los nombres y emblemas que se desee, mientras que los mástiles y guarniciones pueden llevar acabado de pintura de polvo de poliéster, en diferentes colores. Si bien este tipo de marquesina no cuenta con lonas laterales enganchables, se pueden suministrar pantallas autónomas, que proporcionan protección en los laterales.

La estructura se fija al suelo con clavijas de acero si se trata de terrenos con césped, o con pernos de anclaje en el caso de suelos duros; para uso permanente, por regla general, se recomienda cimientos de hormigón. La estructura cuenta con cables de alambre de 5-10 mm, revestidos con cloruro de polivinilo.

La cubierta tipo 005, que la montan en un día cuatro hombres, proporciona una cobertura espectacular en conciertos, exposiciones y festivales para unas doscientas personas. Se halla sostenida por dos mástiles internos diagonales o, para dejar un espacio interior totalmente libre, por bastidores exteriores triangulares de celosía. Resulta asimismo posible la adición de paredes laterales de tela poliestérica revestida de cloruro polivinílico, paneles de aluminio de forma especial o paneles transparentes de policarbonato, con ventanas y puertas, si así se desea.

La fijación al suelo se hace de manera similar a la del modelo 003, con cables metálicos revestidos de CPV, de 6-16 mm y los correspondientes accesorios.

Existe también el modelo 004, de estilo similar al 003, que cubre una superficie aproximada de 52 m<sup>2</sup>. Este modelo puede ser utilizado, asimismo, sobre una red modular de mástiles, para proporcionar amplias zonas de sombra.

La empresa suministradora ofrece un servicio de diseño especializado, así como un servicio general de almacenamiento, mantenimiento y montaje.

Los interesados en recibir mayor información pueden dirigirse a:

ARCHITEN LTD.  
7 Unity Street  
Bristol  
BS 1 5HH  
Reino Unido.



# Módulo de deformación global equivalente del hormigón. Aplicación al análisis de los efectos de la fluencia en el tiempo

Juan Murcia  
Dr. Ingeniero de Caminos  
Instituto de Ciencia de  
Materiales de Barcelona. C.S.I.C.

## INTRODUCCION

La utilización de un módulo de deformación equivalente para considerar la fluencia del hormigón en diferentes procesos tenso-deformacionales, que se producen en el análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado, es muy antigua.

Aún suponiendo un comportamiento definido por la teoría de la viscoelasticidad lineal, que admite la superposición en el tiempo, la historia tenso-deformacional anterior influye en el proceso, por lo que no resulta posible, en general, emplear en el análisis modelos sencillos, del tipo de módulo equivalente, que sean a la vez ajustados. Sin embargo, en ciertos procesos con crecimientos monótonos de deformaciones o tensiones, puede introducirse, de manera muy ajustada, un modelo de gran sencillez a partir de un módulo equivalente o efectivo del hormigón, que resulta muy indicado para análisis paso a paso en el tiempo, de tipo numérico (2), (6).

En este artículo, y para dichos procesos monótonos, se hace un estudio del módulo global equivalente del hormigón, diferente del anterior, cubriendo los diferentes casos posibles (incluyendo los casos elementales o experimentales, como son los de fluencia y relajación). La utilización de este módulo ofrece ventajas ya que no hay que discretizar el tiempo (o, si se hace, es sólo porque interesan resultados a tiempos parciales determinados) en el análisis, bien sea de tipo abordable analíticamente (viscoelasticidad lineal, por ejemplo) o de tipo numérico (por ejemplo, instantáneos no lineales) introduciendo la fluencia a base de una modificación del diagrama tensión-deformación del hormigón, lo que requiere conocer la relación entre el módulo global equivalente y el módulo real instantáneo.

## PROCESOS MONOTONOS DE EVOLUCION TENSO-DEFORMACIONAL EN EL TIEMPO. MODULO DE DEFORMACION GLOBAL EQUIVALENTE

### Algunos resultados de la teoría de viscoelasticidad lineal

Es bien sabido que, según la teoría de la viscoelasticidad lineal, si  $c(t, t_0)$  y  $r(t, t_0)$  son, respectivamente, las funciones de fluencia (deformación para tensión unitaria constante en el tiempo) y de relajación (tensión para deformación unitaria) del material, la deformación  $\epsilon$  y la tensión  $\sigma$  en el tiempo, que experimenta dicho material, vienen dadas por las expresiones

$$\epsilon(t, t_0) = \sigma(t_0) \cdot c(t, t_0) + \int_{t_0}^t c(t, \tau) \cdot \sigma'(\tau) \cdot d\tau$$

$$\sigma(t, t_0) = \epsilon(t_0) \cdot r(t, t_0) + \int_{t_0}^t r(t, \tau) \cdot \epsilon'(\tau) \cdot d\tau$$

en donde  $t$  es el tiempo actual y  $t_0$  el de comienzo del proceso. Al hacer depender las funciones de  $t_0$ , es posible considerar el fenómeno del envejecimiento o variación del comportamiento del material con su propia edad.

Si se integra por partes, las expresiones anteriores resultan ser

$$\epsilon(t, t_0) = \sigma(t) \cdot c(t, t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \cdot c'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau$$

$$\sigma(t, t_0) = \epsilon(t) \cdot r(t, t) - \int_{t_0}^t \epsilon(\tau) \cdot r'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau$$

Es habitual, en el caso del hormigón, expresar la función de fluencia en forma aditiva, separando la deformación instantánea de la diferida:

$$c(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$$

siendo  $E(t_0)$  el módulo de deformación instantáneo y  $\varphi(t, t_0)$  el coeficiente de fluencia ( $\varphi(t_0, t_0) = 0$ ). Tal como viene expresada  $c(t, t_0)$ , puede ser tenido en cuenta el envejecimiento, tanto en lo que afecta a las deformaciones instantáneas como diferidas. En la práctica, suele referirse la deformación diferida, y por tanto el coeficiente  $\varphi(t, t_0)$ , a un módulo fijo convencional  $E$  (para el hormigón, el correspondiente a la edad de 28 días (3), (5), (7)); por lo que, entonces,

$$c(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E}$$

De la misma forma, es posible también expresar aditivamente la función de relajación, como

$$r(t, t_0) = E(t_0) - \mathcal{R}(t, t_0)$$

donde  $\mathcal{R}(t, t_0)$  son las pérdidas de relajación ( $\mathcal{R}(t_0, t_0) = 0$ ).

Dada una función de fluencia  $c(t, t_0)$ , puede obtenerse la función de relajación correspondiente, reproduciendo las condiciones que, por definición, son inherentes a la misma (esto es,  $\epsilon(t, t_0) = 1$ ). En tal situación,  $\sigma(t)$  sería la función de relajación del material, que

puede designarse ahora como  $\sigma(t, t_0)$ , denominándola función de relajación asociada a  $c(t, t_0)$ :

$$\epsilon(t, t_0) = 1 = \sigma(t, t_0) \cdot c(t, t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau, t_0) \cdot c'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau$$

siendo ahora  $\sigma(t, t_0) = r(t, t_0)$ , por definición, por lo que se tiene

$$1 = r(t, t_0) \cdot c(t, t) - \int_{t_0}^t r(\tau, t_0) \cdot c'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau$$

y se llega a la expresión

$$r(t, t_0) = \frac{1}{c(t, t)} \cdot [1 + \int_{t_0}^t r(\tau, t_0) \cdot c'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau]$$

o bien

$$r(t, t_0) = E(t) \cdot [1 + \int_{t_0}^t r(\tau, t_0) \cdot c'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau]$$

De la misma forma, y teniendo en cuenta la perfecta dualidad existente en todas estas expresiones, resulta que la función de fluencia  $c(t, t_0)$  asociada a la de relajación  $r(t, t_0)$ , si ésta es la única función conocida en principio, es

$$c(t, t_0) = \frac{1}{r(t, t)} [1 + \int_{t_0}^t c(\tau, t_0) \cdot r'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau]$$

o bien

$$c(t, t_0) = \frac{1}{E(t)} [1 + \int_{t_0}^t c(\tau, t_0) \cdot r'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau]$$

Si se obtiene la función asociada, es posible ya resolver cualquier problema mediante integración simple, utilizando la expresión que interesa en cada caso, bien sea la de  $\epsilon(t, t_0)$  o la de  $\sigma(t, t_0)$ , en función, respectivamente, de la historia tensional o deformacional anterior (esto es, desde  $t_0$  a  $t$ ).

En la mayoría de las situaciones reales a las que se aplica la teoría que se acaba sumariamente de exponer, la historia tenso-deformacional a que se ve sometido el material no es conocida a priori (piénsese, al respecto, en efectos estructurales tales como el hiperestatismo o el equilibrio en segundo orden, aunque las acciones sí estén definidas en el tiempo).

Ello implica un proceso de análisis incremental o paso a paso en el tiempo, lo que impide, en general, un proceso de cálculo sencillo y rápido.

### Evolución tenso-deformacional de los casos contemplados

Sin embargo, existe un conjunto de situaciones particulares que, como se explicará más adelante, puede tener bastante interés en la práctica y corresponde a los casos en que

la deformación evoluciona proporcionalmente al coeficiente de fluencia, a partir de un cierto instante inicial  $t_0$ :

$$\epsilon(t, t_0) = a + b \cdot \varphi(t, t_0)$$

Veamos cómo lo hace, entonces, la tensión. Esto fue estudiado y demostrado por primera vez en (2). Lo que sigue es una demostración más directa, en función de lo visto hasta ahora, y que, de hecho, viene a coincidir con lo que se muestra de otra manera en (6).

Teniendo en cuenta que  $c(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$ , resulta que  $\epsilon(t, t_0) = a + b \cdot [E(t_0) \cdot c(t, t_0) - 1]$ .

Por otro lado, se ha visto más arriba que

$$\sigma(t, t_0) = \epsilon(t) \cdot r(t, t) - \int_{t_0}^t \epsilon(\tau) \cdot r'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau$$

por lo que, sustituyendo en la anterior la expresión de la deformación, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(t, t_0) &= [a + b (E(t_0) \cdot c(t, t_0) - 1)] \cdot r(t, t) - \\ &- \int_{t_0}^t [a + b (E(t_0) \cdot c(\tau, t_0) - 1)] \cdot r'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau \end{aligned}$$

La última integral puede resolverse, directamente, a partir de la ya vista relación entre las funciones asociadas  $c(t, t_0)$  y  $r(t, t_0)$ :

$$c(t, t_0) = \frac{1}{r(t, t)} \left[ 1 + \int_{t_0}^t c(\tau, t_0) \cdot r'_\tau(t, \tau) \cdot d\tau \right]$$

Con lo que, finalmente, se llega a

$$\begin{aligned} \sigma(t, t_0) &= [a + b (E(t_0) \cdot c(t, t_0) - 1)] \cdot r(t, t) - (a - b) [r(t, t) - r(t, t_0)] - \\ &- b \cdot E(t_0) [c(t, t_0) \cdot r(t, t) - 1] = (a - b) \cdot r(t, t_0) + b \cdot E(t_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, en estas condiciones, la tensión que resulta evoluciona proporcionalmente a la función de relajación, con los coeficientes que se muestran en la expresión que precede. Resulta claro que la inversa también es cierta, realizando el proceso de cálculo al contrario. Cabe aquí citar, como comentario, que las expresiones anteriores permiten seguir considerando el envejecimiento del material tanto instantáneo como diferido.

Naturalmente, y a modo de comprobación, el caso particular que corresponde a la función de fluencia, esto es,  $\epsilon(t, t_0) = c(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$ , donde  $a = b = \frac{1}{E(t_0)}$ , lleva a  $\sigma(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} \cdot E(t_0) = 1$ . De la misma manera, el relativo a la función de relajación  $\sigma(t, t_0) = r(t, t_0)$ , para el cual  $a = 1$  y  $b = 0$ , supone que  $\epsilon(t, t_0) = 1$ .

Veamos a continuación las dos posibilidades o situaciones generales que se pueden dar dentro del conjunto de casos que estamos examinando.

La primera corresponde a la existencia de una deformación instantánea inicial  $\epsilon(t_0)$  o, lo que es igual,  $a \neq 0$ . Entonces,  $\epsilon(t, t_0) = \epsilon(t_0) \cdot [1 + \lambda \cdot \varphi(t, t_0)]$  (por tanto,  $a = \epsilon(t_0)$  y  $b = \lambda \cdot \varphi(t_0)$ ), con lo que

$$\sigma(t, t_0) = \epsilon(t_0) \cdot [(1 - \lambda) \cdot r(t, t_0) + \lambda \cdot E(t_0)]$$

Como ya se ha indicado, dentro de esta situación general se encuentran los casos correspondientes a las funciones de relajación ( $\epsilon(t_0) = 1$  y  $\lambda = 0$ ) y de fluencia ( $\epsilon(t_0) = \frac{1}{E(t_0)}$  y  $\lambda = 1$ ).

La segunda posibilidad se da cuando  $\epsilon(t_0) = a = 0$ . Así,  $\epsilon(t, t_0) = b \cdot \varphi(t, t_0)$  y

$$\sigma(t, t_0) = b [E(t_0) - r(t, t_0)] = b [E(t_0) - E(t_0) + \mathcal{R}(t, t_0)] = b \cdot \mathcal{R}(t, t_0)$$

con lo que la tensión evoluciona proporcionalmente a las pérdidas de relajación.

### *Módulo diferido global equivalente*

En estos procesos en el tiempo donde interviene la fluencia, un dato que con frecuencia interesa conocer en la práctica es el módulo de deformación global equivalente (como si el proceso fuera instantáneo) para un instante determinado. Esto es, por definición,  $E^*(t, t_0) = \frac{\sigma(t, t_0)}{\epsilon(t, t_0)}$ , que no hay que confundir con el módulo  $E''(t, t_0)$  que se toma en (2) y (6), sobre el que más adelante volveremos.

De los valores de  $E^*(t, t_0)$ , suele interesar especialmente el que resulta al final del proceso (esto es, para  $t \rightarrow \infty$ ).

Repasemos esta variable para las situaciones y casos citados anteriormente:

1.- Deformación inicial no nula:

$$E_1^*(t, t_0) = \frac{\sigma(t, t_0)}{\epsilon(t, t_0)} = \frac{(1 - \lambda) \cdot r(t, t_0) + \lambda \cdot E(t_0)}{1 + \lambda \cdot \varphi(t, t_0)} = E_1^*(\lambda)$$

– Caso función de relajación:

$$E_{1r}^*(t, t_0) = E_1^*(\lambda = 0) = r(t, t_0)$$

– Caso función de fluencia:

$$E_{1c}^*(t, t_0) = E_1^*(\lambda = 1) = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)}$$

2.- Deformación inicial nula:

$$E_2^*(t, t_0) = \frac{\sigma(t, t_0)}{\epsilon(t, t_0)} = \frac{E(t_0) - r(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)} = \frac{\mathcal{R}(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)}$$

Por otro lado, debe observarse que  $E_2^*(t, t_0) = E_1^*(\lambda \rightarrow \infty)$ . También ha de indicarse que este  $E_2^*(t, t_0)$  coincide con el  $E''(t, t_0)$  definido en (2) y (6).

Comparemos ahora los valores anteriores. Evidentemente, todo depende de las relaciones existentes entre las funciones de fluencia (a través de  $E(t_0)$  y  $\varphi(t, t_0)$ ) y de relajación  $r(t, t_0)$  del material.

Vamos a detenernos para analizar algo estas relaciones. Para ello conviene recordar aquí que las funciones que normalmente definen la fluencia del hormigón, esto es, las  $c(t, t_0)$  o, si se prefiere más estrictamente, las  $\varphi(t, t_0)$ , son crecientes con  $t$  y asintóticas para  $t \rightarrow \infty$ . A partir de ahora se supondrá un material con este tipo de función de fluencia.

Con tal hipótesis, se considere o no el fenómeno del envejecimiento, se cumple siempre que  $c(t, t_0) > c(t, \tau)$ , para  $\tau > t_0$  y  $t \geq \tau$ , excepto para el caso límite  $t \rightarrow \infty$  sin envejecimiento, en que  $c(t, t_0) = c(t, \tau)$  por alcanzarse el valor asintótico que, entonces, es único por no depender de la edad del material.

Al tener en cuenta el envejecimiento (y aunque se suponga, como a menudo se hace, que no existe envejecimiento para deformaciones instantáneas:  $E(\tau)$  es constante e igual a  $E(t_0)$ ) la desigualdad  $c(t, t_0) > c(t, \tau)$ , para  $\tau > t_0$ , y  $t \geq \tau$ , es todavía más acusada, puesto que los valores de  $c(t, \tau)$  son ahora inferiores a los mismos sin envejecimiento; en el caso límite  $t \rightarrow \infty$ ,  $c(t, t_0) > c(t, \tau)$  puesto que, si bien se alcanza el valor asintótico, éste no es ya único, disminuyendo con la edad  $\tau$  (1), (4).

Establezcamos una vez más las condiciones para determinar la función de relajación  $r(t, t_0)$  asociada a  $c(t, t_0)$ . Se sabe que

$$1 = \epsilon(t, t_0) = \sigma(t_0) \cdot c(t, t_0) + \int_{t_0}^t c(t, \tau) \cdot \sigma'(\tau) \cdot d\tau,$$

donde, por definición,  $\sigma(t) = r(t, t_0)$ . En esta situación la variable  $\sigma'(t)$  tiene siempre valor negativo, mientras que el resto de las que aparecen en la expresión anterior son positivas. En el segundo miembro, el primer término es positivo y el segundo, la integral, negativo.

Como consecuencia de todo lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= \sigma(t_0) \cdot c(t, t_0) + \int_{t_0}^t c(t, \tau) \cdot \sigma'(\tau) \cdot d\tau > \sigma(t_0) \cdot c(t, t_0) + \\ &+ c(t, t_0) \cdot \int_{t_0}^t \sigma'(\tau) \cdot d\tau = \sigma(t) \cdot c(t, t_0) \\ r(t, t_0) = \sigma(t) &< \frac{1}{c(t, t_0)} = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \end{aligned}$$

excepto para  $t \rightarrow \infty$ , no considerando el envejecimiento, en que, si se llama  $\varphi_\infty$  al valor asintótico único de  $\varphi(t, t_0)$ , resulta  $r(t \rightarrow \infty, t_0) = r_\infty = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi_\infty}$ .

Como es lógico, la desigualdad anterior es tanto más acusada cuanto más importante sea el envejecimiento. En el caso de no tener en cuenta este fenómeno, la desigualdad se va atenuando conforme crece el tiempo  $t$ , derivando en igualdad para  $t \rightarrow \infty$ . En la práctica, para valores importantes de  $t$  puede tomarse ya como igualdad.

Volviendo ahora a los módulos equivalentes  $E^*$  anteriores, resulta ya inmediata su comparación.

La situación general corresponde a  $r(t, t_0) < \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)}$ .

Por tanto,  $E_{1r}^*(t, t_0) = E_1^*(\lambda = 0) < E_{1c}^*(t, t_0) = E_1^*(\lambda = 1)$ .

Además,  $E_1^*(t, t_0)$  va creciendo continuamente con  $\lambda$  hasta alcanzar un máximo, para  $\lambda \rightarrow \infty$ , que, como se ha visto ya, es precisamente  $E_2^*(t, t_0)$ .

En efecto,

$$E_2^*(t, t_0) = \frac{E(t_0) - r(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)} > \frac{E(t_0) \left(1 - \frac{1}{1 + \varphi(t, t_0)}\right)}{\varphi(t, t_0)} = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)}$$

Por tanto,

$$E_2^* = E_1^*(\lambda \rightarrow \infty) > E_1^*(\lambda > 1) > E_{1c}^* = E_1^*(\lambda = 1) > E_{1r}^* = E_1^*(\lambda = 0)$$

siendo estas desigualdades tanto más fuertes cuanto más lo es la desigualdad original o, en definitiva, la importancia del envejecimiento del material.

La excepción a lo anterior, como ya se sabe, corresponde al caso  $t \rightarrow \infty$  (y, en la práctica, también a valores importantes de  $t$ ), cuando no se considera el envejecimiento:

$$r(t, t_0) = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi_\infty}$$

Entonces,

$$E_{1r}^*(t, t_0) = \frac{(1 - \lambda) \cdot r(t, t_0) + \lambda \cdot r(t, t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]}{1 + \lambda \cdot \varphi(t, t_0)} = r(t, t_0)$$

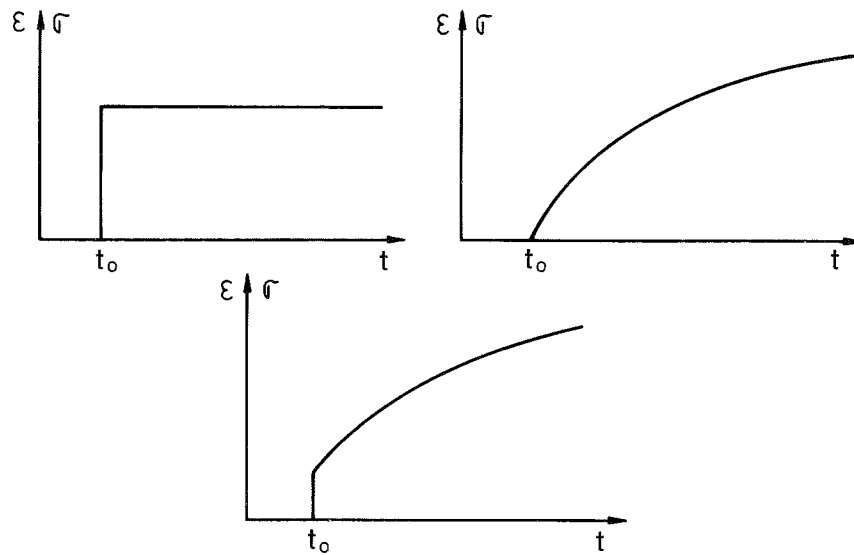
$$E_2^*(t, t_0) = \frac{r(t, t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] - r(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)} = r(t, t_0)$$

Por tanto, en tales condiciones,

$$E_2^* = E_1^* = E_{1c}^* = E_{1r}^* = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi_\infty}$$

Pues bien, de lo que precede se concluye que, cuando el envejecimiento del material, que es un fenómeno que se da siempre en mayor o menor medida en el hormigón, es pequeño (lo que ocurre, por ejemplo, en el hormigón para valores de  $t_0$  suficientemente grandes),

el valor del módulo global equivalente,  $E^*(t, t_0)$ , en los casos en que  $t - t_0$  sea ya importante, prácticamente es independiente de la forma en que crece la deformación (o la tensión): bruscamente y manteniéndose después, creciendo de manera continua a partir de 0 y proporcionalmente a  $\varphi(t, t_0)$  (o a  $\mathcal{R}(t, t_0)$ ), o bien una combinación de ambo tipos.



### Módulo global equivalente del hormigón $E_c^*$

Los resultados que acaban de ser examinados son, evidentemente, aplicables al hormigón, en el ámbito en que es admisible su consideración como material viscoelástico lineal (3), (4).

Una forma clásica de representar el módulo equivalente del hormigón, que incluya el efecto de la fluencia, consiste en expresarlo como una fracción del módulo instantáneo  $E_c$ . En un principio, esta forma se utilizó para calcular la deformabilidad de las estructuras de hormigón en el tiempo, en procesos en los que ésta es la que variaba de manera más importante (1), (7).

De la misma manera, el módulo  $E''$ , al que se ha hecho referencia más arriba, se expresa en la forma

$$E''(t, t_0) = \frac{E(t_0)}{1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0)}, \text{ donde } \chi \text{ es un coeficiente (2), (5), (6).}$$

Otro tanto puede hacerse con el módulo  $E^*$  para el hormigón, el cual puede definirse como

$$E_c^*(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \alpha \cdot \varphi(t, t_0)}$$

siendo  $\alpha$  otro coeficiente.

Veamos a continuación qué rango de variación tiene este coeficiente  $\alpha$ .

Evidentemente, si referimos los diferentes procesos posibles comprendidos aquí al valor del parámetro  $\lambda$ , como ya se hizo anteriormente, la gradación u ordenación del valor de  $\alpha$  en función de  $\lambda$  es inversa a la del módulo  $E^*$  (ahora  $E_c^*$ ):

$$\alpha(\lambda \rightarrow \infty) < \alpha(\lambda > 1) < \alpha_c = \alpha(\lambda = 1) < \alpha_r = \alpha(\lambda = 0)$$



donde, por supuesto,  $\alpha_c$  y  $\alpha_r$  son, respectivamente, los valores para los casos fluencia y relajación. Como es inmediato comprobar que  $\alpha_c = 1$ , resulta que, de entrada, puede decirse que  $\alpha$  toma valores que oscilan en torno a la unidad.

Se sabe, no obstante, que en teoría existe una situación límite, la relativa a no existencia de envejecimiento y  $t \rightarrow \infty$ , en que el valor de  $E^*$  es único, con independencia del tipo de proceso o, lo que es igual, de  $\lambda$ . Por tanto, en tales condiciones, al valor de  $\alpha$  le ocurre exactamente lo mismo, siendo además precisamente  $\alpha = 1$ , como también es inmediato comprobar.

En el hormigón, el fenómeno del envejecimiento tiene siempre una mayor o menor incidencia. No obstante, para edades  $t_0$  del orden de muy pocos años es ya, en general, prácticamente inapreciable, incluso para las deformaciones diferidas (para las instantáneas esto ocurre mucho antes, por lo que  $E_c(t_0)$  se toma muchas veces como constante). De aquí que en casos, quizá no muy frecuentes en la práctica pero que pueden darse, donde la edad del hormigón al comienzo del proceso es ya importante, el coeficiente  $\alpha$  puede tomarse como la unidad, para valores de  $t - t_0$  también apreciables (pero tanto más pequeños cuanto mayor sea  $t_0$ ) y, por supuesto, para el valor  $t \rightarrow \infty$ , instante que siempre es de interés en el análisis (valores finales de las variables); y ello, con independencia de la forma en que evolucionan las deformaciones y tensiones.

Conforme el envejecimiento va teniendo más importancia en el proceso, y ello ocurre a medida que decrece la edad del hormigón  $t_0$  al comienzo del mismo, el margen de variación del módulo  $E_c^*$ , en función de  $\lambda$ , al igual que el coeficiente  $\alpha$ , es cada vez más amplio.

Evaluemos los extremos de dicho margen para  $\alpha$ .

Puesto que el valor máximo del módulo  $E_c^*$  (para  $\lambda \rightarrow \infty$ ) es

$$E_c^*(t, t_0) = \frac{E_c(t_0) - r(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)}$$

resulta que el valor mínimo de  $\alpha$  viene dado por

$$\alpha_{\text{mín}} = \frac{E_c(t_0)}{E_c(t_0) - r(t, t_0)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} = \frac{E_c(t_0)}{R(t, t_0)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)}$$

que, dadas las funciones de fluencia que se suelen ajustar al hormigón (y sus correspondientes asociadas de relajación) oscila entre un valor del orden de 0,6 e incluso menor y otro muy próximo a 1, como se acaba de indicar (en la práctica se puede llegar a tomar 1).

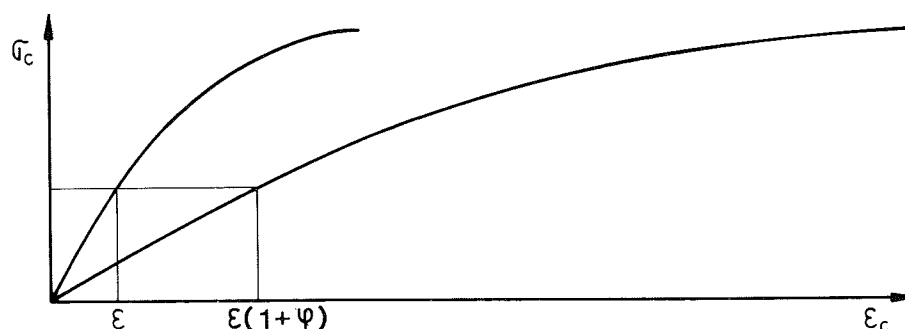
El valor máximo de  $\alpha$ , para el espectro de procesos contemplados ( $0 \leq \lambda < \infty$ ), y dado que el mínimo de  $E_c^*$  es igual a  $r(t, t_0)$ , es

$$\alpha_{\text{máx}} = \left[ \frac{E_c(t_0)}{r(t, t_0)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\varphi(t, t_0)}$$

que, desde un valor muy próximo pero mayor que 1 (aunque en la práctica puede también tomarse 1), puede llegar a valores del orden de 3 o incluso superiores.

### Aproximación de la fluencia por reajuste del diagrama $\sigma_c - \epsilon_c$ instantáneo, a partir del módulo global $E_c^*$

Un procedimiento muy sencillo que se suele utilizar para tener en cuenta la fluencia del hormigón en el análisis (no lineal ya, en general) de forma que éste se lleve a cabo como instantáneo (evitando así de hecho un proceso en el tiempo) consiste en modificar el diagrama  $\sigma_c - \epsilon_c$  del hormigón, multiplicando, en el original instantáneo, las deformaciones por el factor  $1 + \varphi(t, t_0)$ .



Evidentemente, esto sería exacto si, en condiciones de linealidad del material, las tensiones durante el proceso fueran constantes (caso fluencia); pero esta situación no puede tomarse precisamente como general.

De resultados de la definición de  $E_c^*$  como  $E_c(t_0)/1 + \alpha \cdot \varphi(t, t_0)$ , es obvio que lo más correcto, si se emplea este procedimiento, es multiplicar las deformaciones por el factor  $1 + \alpha \cdot \varphi(t, t_0)$ , esto es, la relación entre el módulo instantáneo y el global equivalente diferido, teniendo en cuenta que el conjunto de casos estudiado cubre de hecho todas las situaciones de crecimiento deformacional monótono en el tiempo.

En este sentido, en los casos en que  $E_c^*$  depende de  $\lambda$ , lo más conveniente resulta ser la realización de un análisis lineal directo en el tiempo, a partir del cual se ajusta el valor de  $\lambda$  comparando la deformabilidad actual del instante considerado y la deformabilidad inicial del proceso. A partir de  $\lambda$  puede ya conocerse el módulo global equivalente  $E_c^*$  y, en consecuencia, evaluar finalmente el factor indicado más arriba. Ello conduce a un proceso iterativo sencillo, en general, especialmente si se parte de un  $\lambda$  adecuado en función de la situación previsible.

Por tanto, debe hablarse siempre de un factor modificador, de la forma ya indicada ( $1 + \alpha \cdot \varphi(t, t_0)$ ), en lugar del más simplista  $1 + \varphi(t, t_0)$ , que figura en la literatura e incluso en algunas normativas (3). En los procesos en que la tensión es variable, actuar así implica suponer que la fluencia es la debida a la tensión actual del momento, por lo que se sobrestima la fluencia si las tensiones son crecientes, y viceversa.

En realidad, y no olvidando que la fluencia afecta a las acciones con carácter de permanencia (g), y no a las instantáneas (q), en un caso general, como así se realiza normalmente, hay que introducir este efecto adicional a través de la relación entre las acciones permanentes y las totales,  $\frac{g}{g+q}$ , o, más propiamente, entre sus respectivos esfuerzos (3).

En consecuencia, el factor final que debe introducirse es

$$1 + \frac{g}{g+q} \cdot \alpha \cdot \varphi(t, t_0)$$

En todo caso, y considerando que este procedimiento simplificado se suele aplicar para análisis no lineal, habría de evaluarse hasta qué punto deja de cumplirse la hipótesis de linealidad en la fluencia, mantenida aquí desde un principio, a la vista de las tensiones que resultan de las acciones con carácter de permanencia. En general, no obstante, puede darse como buena tal hipótesis en la práctica, no teniendo que ir a consideraciones de fluencia no lineal que, además, no tendrían mucho sentido en análisis simplificados como el que se ha tratado aquí.

### Planteamiento del análisis a partir de $E_c^*$ y comparación con otros módulos

En las páginas anteriores se han examinado con detenimiento las bases en que se funda y la práctica en que se utiliza el módulo global equivalente  $E_c^*$ , en el análisis diferido.

Dada su definición, en términos globales, este módulo tiene un significado físico muy claro, extrapolación al tiempo del módulo instantáneo, y su aplicación es, también por ello, totalmente directa, abarcándose una amplia gama de casos, en función del coeficiente  $\lambda$ , lo que le confiere un carácter muy general. Es, así, muy adecuado para cálculos globales (para  $t \rightarrow \infty$  o algún tiempo intermedio) de cualquier tipo (incluso manual, por supuesto), que resultan bastante rápidos y directos; y todo ello, con la única condición de ajustar, en su caso, el parámetro  $\lambda$ , con lo que la exactitud que puede conseguirse es muy alta. Este mismo carácter global hace que sea un medio adecuado para definir el factor corrector de las deformaciones en el diagrama  $\sigma_c - \epsilon_c$  del hormigón ( $1 + \alpha \cdot \varphi(t, t_0)$ ) para el análisis en que el tiempo, y la fluencia por tanto, se toman implícitamente.

En definitiva, la relación que, así, entra en el análisis es la más simple posible:

$$\sigma(t) = E_c^*(t, t_0, \lambda) \cdot \epsilon(t)$$

El módulo equivalente  $E''(t, t_0)$  que se define en (2) no tiene este carácter global, sino que es de tipo incremental en las variables; en efecto, de hecho, su definición se puede resumir en la expresión siguiente:

$$\sigma(t) - \sigma(t_0) = \Delta\sigma(t) = E''(t, t_0) \left[ \Delta\epsilon(t) - \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} \cdot \varphi(t, t_0) \right]$$

siendo  $\Delta\epsilon(t) = \epsilon(t) - \epsilon(t_0)$  y no figurando en lo anterior más que deformaciones de tipo tensional que involucran a la fluencia.

Si dicho módulo se pone en la ya conocida forma (2)

$$E''(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0)}$$

es sencillo comprobar que se obtiene, para la deformación en el tiempo  $\epsilon(t)$ , la siguiente expresión:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0)]$$

que es la expresión original utilizada clásicamente (1), (3), en función de las tensiones inicial y actual del proceso, que en definitiva sirvió de base en (2) para la definición del módulo  $E''$  y, para los mismos casos aquí estudiados, obtención de su valor:

$$E''(t, t_0) = \frac{E_c(t_0) - r(t, t_0)}{\varphi(t, t_0)},$$

que, como ya se dijo, coincide con  $E_2^* = E^* (\lambda \rightarrow \infty)$ .

Resulta inmediato establecer que  $\alpha > \chi$ , salvo en el caso en que no exista envejecimiento y  $t \rightarrow \infty$ , circunstancia en que no sólo  $E'' = E^*$ , como ya se indicó, sino que  $\chi = \alpha = 1$ , como quedó demostrado (y se comprueba en (2), por los valores muy cercanos a la unidad obtenidos numéricamente para  $\chi$ , con edades  $t_0$  importantes).

El carácter y la aplicación del módulo  $E''$  son, como puede apreciarse, bien distintos que en el caso de  $E^*$ , no teniendo un significado físico directo y aplicándose a procesos de cálculo de tipo incremental o paso a paso en el tiempo, normalmente numéricos, para los que es muy adecuado y proporciona un ajuste muy bueno, con la contrapartida de no depender más que de la función de fluencia y su asociada de relajación.

Una expresión formalmente idéntica a la expresada más arriba para  $\epsilon(t)$  resulta si se supone que las tensiones en el tiempo evolucionan proporcionalmente a una potencia cualquiera del coeficiente de fluencia  $\varphi(t, t_0)$  y, además, la función de fluencia es del tipo plasticidad diferida (modelo de DISCHINGER), con envejecimiento diferido total (1), (4). La demostración se desarrolla al final en el *anejo*. Existe, no obstante, una diferencia importante: mientras que en lo anterior  $\chi$  es un coeficiente que depende del tiempo, en esta última situación  $\chi$  es una constante.

## CONCLUSION

El interés del análisis del conjunto de casos estudiados reside, precisamente, en que existen una serie de situaciones en las estructuras de hormigón a las que se ajustan de forma bastante precisa. Así, los procesos que se derivan de la interacción entre la fluencia del hormigón y otros efectos estructurales; por ejemplo, los efectos de segundo orden en piezas comprimidas, el hiperestatismo estructural en cualquiera de sus variantes, la propia retracción del hormigón, el pretensado mediante armaduras tesas, etc.

Por tanto, el hecho de utilizar el módulo  $E_c^*$  global equivalente permite realizar un análisis sencillo y directo en el tiempo, sin necesidad de discretizarlo. La expresión del módulo depende del material (función de fluencia y asociada de relajación), pero también de  $\lambda$  en ciertos casos, lo que, si es así, los cálculos arrastrarán este parámetro; es preciso entonces realizar previamente un muy simple proceso iterativo, en general, para ajustar  $E_c^*$ , en función de los resultados iniciales y actuales (en el instante considerado; finales, por tanto, si  $t \rightarrow \infty$ ) de las deformaciones estructurales obtenidas (recuérdese la definición de  $\lambda$ ).

En casos similares, pero cuando ya se precisa un análisis no lineal por el material, es interesante utilizar el diagrama  $\sigma_c - \epsilon_c$  corregido para la fluencia (corrección cuya forma habitual resulta, en general, un tanto imprecisa), introduciendo el factor  $1 + \alpha \cdot \varphi(t, t_0)$ , relación entre los módulos instantáneo  $E_c$  y global equivalente diferido  $E_c^*$ , como multiplicador de las deformaciones del diagrama original instantáneo.

## BIBLIOGRAFIA

1. C.E.B. (M.A. CHIORINO et al.) Manuel de Calcul "Effets structuraux du fluage et des déformations différées du béton". Bulletin d'information N° 80. Comité Européen du Béton. Paris, 1972.
2. BAZANT, Z.P. Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. Journal of the American Concrete Institute, Vol. 69. Detroit, April 1972.
3. C.E.B. - F.I.P. Código modelo C.E.B. - F.I.P. para las estructuras de hormigón. Comité Euro-International du Béton. Paris, 1978.
4. MURCIA, J. Estudio analítico en el tiempo de estructuras de hormigón armado y pretensado por retracción y fluencia. Monografía n° 363 del Instituto "Eduardo Torroja". C.S.I.C. Madrid, 1980.
5. C.E.B. (M.A. CHIORINO et al.) Manuel de Calcul "Effets structuraux du fluage et des déformations différées". Bulletin d'information N° 136. Comité Euro-International du Béton. Paris, 1980.
6. BAZANT, Z.P. Mathematical Models for Creep and Shrinkage of Concrete, en BAZANT, Z.P. & WITTMAN, F.H. (Editors) "Creep and Shrinkage in Concrete Structures". John Wiley and Sons. New York, 1982.
7. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. EH-82: Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. MOPU. Madrid, 1982.

## ANEJO

Se supone que:

$$\sigma(t) = a + b \cdot [\varphi(t, t_0)]^K, \text{ con } \varphi(t, t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0) \text{ y } c(t, t_0) = \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E}$$

De aquí, sucesivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon(t, t_0) &= \sigma(t_0) \cdot c(t, t_0) + \int_{t_0}^t c(t, \tau) \cdot \sigma'(\tau) \cdot d\tau = \\ &= \sigma(t_0) \cdot c(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{1 + \varphi(t) - \varphi(\tau)}{E} \cdot b \cdot K \cdot [\varphi(\tau) - \varphi(t_0)]^{K-1} \cdot \varphi'(\tau) \cdot d\tau = \\ &= \sigma(t_0) \cdot c(t, t_0) + \frac{1 + \varphi(t) - \varphi(t_0)}{E} \cdot b \cdot [\varphi(t) - \varphi(t_0)]^K - \frac{b \cdot K}{E \cdot (K + 1)} \cdot [\varphi(t) - \varphi(t_0)]^{K+1} = \\ &= \frac{1 + \varphi(t) - \varphi(t_0)}{E} \{a + b [\varphi(t) - \varphi(t_0)]^K\} - \frac{b \cdot K}{E \cdot (K + 1)} \cdot [\varphi(t) - \varphi(t_0)]^{K+1} = \\ &= \sigma(t) \cdot c(t, t_0) - \frac{b \cdot K}{E \cdot (K + 1)} \cdot [\varphi(t) - \varphi(t_0)]^{K+1} \end{aligned}$$

Pero también, desarrollando lo anterior, resulta:

$$\epsilon(t, t_0) = \frac{a}{E} [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{b}{E} [\varphi(t, t_0)]^K + \frac{b}{E} [\varphi(t, t_0)]^{K+1} - \frac{b \cdot K}{E \cdot (K + 1)} [\varphi(t, t_0)]^{K+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{E} [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{b}{E} [\varphi(t, t_0)]^K + \frac{1}{K+1} \cdot \frac{b}{E} [\varphi(t, t_0)]^{K+1} = \\
&= \frac{a + b [\varphi(t, t_0)]^K}{E} \cdot [1 + \frac{\varphi(t, t_0)}{K+1}] + \frac{a}{E} \cdot \frac{K}{K+1} \varphi(t, t_0) = \\
&= \frac{\sigma(t)}{E} [1 + \frac{\varphi(t, t_0)}{K+1}] + \frac{\sigma(t_0)}{E} \cdot \frac{K}{K+1} \cdot \varphi(t, t_0) = \\
&= \frac{\sigma(t)}{E} \cdot [1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t_0)}{E} (1 - \chi) \cdot \varphi(t, t_0) = \\
&= \frac{\sigma(t_0)}{E} [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0)],
\end{aligned}$$

si se define  $\chi = \frac{1}{K+1}$ .

## RESUMEN

La utilización de un módulo equivalente de deformación del hormigón en procesos temporales, para considerar la fluencia de este material, es bien conocida. En este artículo se estudia, dentro de la teoría de la viscoelasticidad lineal, dicho módulo, en su variante global (y no parcial como la propuesta por otros autores para análisis numéricos), para una serie de procesos tenso-deformacionales monótonos en el tiempo, asimilables a bastantes situaciones reales en las estructuras de hormigón, cubriendo toda la gama de casos posibles que van desde la situación de fluencia pura a la de relajación; el conocer este módulo global es muy interesante para el análisis, tanto de tipo analítico (lineal, normalmente) como numérico (no lineal, etc.), con objeto de que no se requiera discretizar el tiempo.

## RÉSUMÉ

L'utilisation d'un module équivalent de déformation du béton en procès temporels, afin d'avoir en considération le fluage de ce materiau, est bien connue. Dans cet article on étudie, au sein de la théorie de la viscoélasticité linéaire, ce module, bien qu'à sa version globale (et pas partielle comme celle proposée par des autres auteurs pour des calculs numériques), pour une série de procès monotones dans le temps des contraintes et déformations, qu'on peut assimiler à beaucoup de situations réelles aux structures en béton, qui vont du cas de pur fluage à celui de relaxation; en connaissant ce module-là, il ne faut pas discretiser le temps aux analyses des structures, bien du type analytique (linéaire, normalement) ou bien numérique (non linéaire, etc.).

## SUMMARY

The use of an equivalent modulus of concrete in time-dependent analysis, for taking creep into account is very well known. In this paper, a revision of such a modulus, in a global version (and not in the partial one corresponding to the effective modulus proposed by some others authors for numerical analysis), is presented for a set of monotonical stress-strain processes, suitable to be applied to many real situations in concrete structures, covering all the cases, from pure creep to relaxation one. The knowledge of this global effective modulus is very interesting for all kind of structural analysis, either analytical (linear approach, normally) or numerical (non linear, etc.), in which no time discretization is required.

## Constitución del Comité Latinoamericano de Estructuras (CLAES)

Promovido por el Secretario de Obras Públicas del Ministerio de Obras Públicas y Servicios Públicos de la República Argentina, se celebró en la ciudad de Buenos Aires, durante los días 5, 6 y 7 de noviembre de 1986, la Reunión Constituyente del Comité Latinoamericano de Estructuras.

En la resolución oficial autorizando y promoviendo la organización de esta Reunión Constituyente, se exponen los "CONSIDERANDOS" que la justifican, entre los cuales cabe destacar los siguientes:

- Que distintas Entidades de países latinoamericanos, vinculadas con el quehacer de la construcción, han expresado la conveniencia de elaborar criterios comunes para la preparación de normas y reglamentos relativos a estructuras de las obras civiles.
- Que tal propósito favorece el intercambio de los servicios de ingeniería y consultoría y de las empresas constructoras, que pueden responder a las demandas de los sectores público y privado sobre la base de reglamentos técnicos uniformes.
- Que la adopción de un lenguaje técnico común facilitará las uniones o consorcios de empresas nacionales de los países latinoamericanos, con el consiguiente intercambio de conocimientos tecnológicos y la posibilidad de unir sus esfuerzos y medios para exportar a terceros países.
- Que una iniciativa como la referida constituye un modo eficaz de impulsar la integración de los países latinoamericanos y tiene fines coincidentes con los proyectos que en materia de consultoría y de construcción promueve la Asociación Latinoamericana de Integración.
- Que en razón de lo expuesto, se considera de gran importancia contribuir a la creación de un foro latinoamericano para la discusión y elaboración de normas y reglamentos sobre estructuras de obras civiles.

En la Asamblea General Constituyente, celebrada el 7 de noviembre, se designaron los distintos miembros de los Organos Directivos, se decidió cuáles son las Comisiones de Trabajo que, inicialmente habrán de crearse y se aprobaron los Estatutos del Comité.

Por aclamación quedaron designados:

- Presidente del CLAES: Victorio Cisaruk (Argentina).
- Vicepresidente Primero: Péricles Brasiliense Fusco (Brasil).
- Vicepresidente segundo: José Chacón Toral (Ecuador).

Por mayoría de votos, el Consejo de Administración quedó constituido de la siguiente manera:

### TITULARES

- 1.- José Chacón Toral (Ecuador).
- 2.- Péricles Brasiliense Fusco (Brasil).
- 3.- Enrique del Valle Calderón (México).
- 4.- Victorio Cisaruk (Argentina).
- 5.- Eli Abadi Tagger (Venezuela).
- 6.- Emilio Puente Cortez (El Salvador).
- 7.- Fernando Yañez (Chile).

## SUPLENTES

- 1.— Julio Ricaldoni (Uruguay).
- 2.— Mario Galindo (Bolivia).
- 3.— Luis Meyer (Paraguay).
- 4.— Julio Alvarez (Paraguay).
- 5.— Angel del Castillo (Uruguay).
- 6.— Enrique de Luca (Argentina).
- 7.— Paulo R. Helene (Brasil).

Las Comisiones de Trabajo que inicialmente se crean son las siguientes:

- 1.— Notación y Simbología.
- 2.— Acciones y Seguridad.
- 3.— Sismo.
- 4.— Cáscaras.
- 5.— Hormigón Armado y Hormigón Pretensado.
- 6.— Métodos de Ensayo.

Por último, a continuación se reproducen, para general información, los Artículos de los Estatutos, o parte de ellos, que se considera pueden resultar de mayor interés.

### ARTICULO 2.º OBJETO

El CLAES tendrá por objeto promover una activa vinculación entre los diferentes países de Latinoamérica tendente a la definición de principios, criterios y lineamientos comunes que puedan servir de base para la redacción de reglamentos, normas y especificaciones de orientación unificada, relativos al cálculo, proyecto, construcción, reparación, mantenimiento, preservación y demolición de las estructuras de obras civiles.

Las tareas enumeradas precedentemente, se realizarán en forma permanente, incorporando los avances científicos y técnicos en la materia.

En el cumplimiento de su objeto el CLAES propenderá a:

- a) Obtener una mayor integración entre los países de América Latina.
- b) Reducir los obstáculos al intercambio entre dichos países.
- c) Favorecer el desarrollo y autonomía tecnológica de los países miembros.
- d) Promover el mejor aprovechamiento de la capacidad técnica existente, estimular la complementación y coadyuvar al desarrollo tecnológico.
- e) Fomentar la cooperación y la elevación de los niveles de capacitación profesional.
- f) Establecer normativas comunes que faciliten las uniones o consorcios de las empresas constructoras y de las firmas consultoras nacionales de los países de la Región, en la satisfacción de las demandas de los sectores públicos y privados.

Para el mejor logro de sus fines el CLAES mantendrá una estrecha comunicación y vinculación con las Asociaciones Técnicas e Institutos especializados de los países de América Latina y con las de terceros países e internacionales, de reconocida solvencia técnica.



#### **ARTICULO 4.º MIEMBROS. DELEGADOS NACIONALES**

El Comité Latinoamericano de Estructuras es una Asociación integrada por especialistas de los países de Latinoamérica actuando en representación de organizaciones públicas o privadas de reconocido prestigio interesadas en el proceso de normalización o dedicadas a la investigación, la enseñanza o actividades profesionales de la ingeniería estructural de sus respectivos países. Estos Delegados Nacionales titulares no podrán ser más de cuatro, pudiendo contar con igual número de suplentes. La admisión de los Delegados Nacionales titulares y suplentes será efectuada por la Asamblea General por propuesta dirigida al Consejo de Administración con, por lo menos, seis meses de anticipación a la fecha fijada para esta admisión, respetadas las disposiciones transitorias.

Los Delegados suplentes reemplazarán a los titulares en caso de renuncia o ausencia justificada de éstos.

Se tratará, en lo posible, que los Delegados titulares y suplentes sean elegidos en proporciones similares entre los ingenieros especialistas:

- De la investigación y la enseñanza;
- De la reglamentación y del cálculo, y
- Del proyecto y de la ejecución.

Además, deberán ejercer sus actividades en los referidos dominios, en entes públicos o privados de sus respectivos países.

#### **ARTICULO 5.º OTROS MIEMBROS**

Además de los Delegados Nacionales pueden ser admitidos como miembros participantes de las Comisiones Técnicas del CLAES todos los especialistas que tengan interés en colaborar con las finalidades del CLAES.

#### **ARTICULO 6.º ORGANOS DIRECTIVOS**

Son Organos Directivos del CLAES:

- La Asamblea General.
- El Consejo de Administración.

#### **ARTICULO 7.º ASAMBLEA GENERAL**

La Asamblea General es el órgano supremo de decisión y representación. Constituyen la Asamblea General todos los Delegados Nacionales titulares. Cualquier miembro de la Asamblea puede delegar, por escrito, su representación en otro Delegado.

La Asamblea General se reunirá con carácter ordinario, como mínimo, una vez al año, en el lugar establecido en la Asamblea anterior.

Con carácter extraordinario podrá reunirse para tratar toda clase de asuntos de su competencia tantas veces como fuera convocada al efecto por el Consejo de Administración.

## **ARTICULO 14.º CONSEJO DE ADMINISTRACION**

El Consejo de Administración es el órgano encargado del gobierno inmediato del CLAES según normas subordinadas a las de la Asamblea General ante la cual responderá de su gestión.

## **ARTICULO 20.º COMISIONES DE TRABAJO**

La Asamblea General, a propuesta del Consejo de Administración, resolverá sobre la creación y constitución de las Comisiones de Trabajo necesarias para la consecución del objeto del Comité señalado en el Artículo 2.º.

Las Comisiones de Trabajo tendrán como misión el desarrollo de aquellos temas específicos para los que fueron creadas, realizando para ello los trabajos oportunos y elaborando la documentación correspondiente.

Cada Delegado titular deberá estar adscrito a alguna Comisión de Trabajo, pero no a más de tres de ellas de manera simultánea.

Dentro de cada Comisión de Trabajo se elegirá un Presidente y un Secretario, que no podrán serlo de más de una. Su designación, así como su eventual sustitución, será refrendada por el Consejo de Administración a propuesta de la Comisión.

Podrán integrar también las Comisiones de Trabajo los Delegados suplentes. Así mismo, el Presidente de la Comisión podrá proponer a la Asamblea General la participación en ella de expertos reconocidamente competentes en temas específicos de su cometido, aún cuando estos expertos no pertenezcan a un país con Delegados Nacionales en el CLAES.

El Consejo de Administración propondrá a la Asamblea General, cada tres años, después de su renovación, la revisión de la composición de cada Comisión de Trabajo sobre la base de las proposiciones que le hayan sido presentadas por los diversos Delegados y aprobadas por el Presidente de la Comisión correspondiente.

El Presidente de la Comisión podrá solicitar al Consejo de Administración, el reemplazo de los miembros que no hayan participado regularmente de las reuniones y actividades de la Comisión, el que deberá incluirlo en el orden del día de la próxima Asamblea General Ordinaria, para su tratamiento.

## **ARTICULO 21.º IDIOMAS OFICIALES**

Serán considerados idiomas oficiales del CLAES el portugués y el español.

# Estudio experimental de la influencia de las condiciones de curado inicial en la resistencia de probetas moldeadas de hormigón

Jaime Fernández Gómez  
Dr. Ingeniero de Caminos  
INTEMAC

## 1. INTRODUCCION

El control de la resistencia del hormigón en obra, implica la realización de las actividades siguientes:

- Toma de muestras de hormigón fresco.
- Fabricación de probetas moldeadas.
- Conservación inicial de las probetas en obra.
- Transporte a laboratorio.
- Desmoldeo de las probetas.
- Curado en cámara estándar ( $T = 20 \pm 2^\circ\text{C}$  y  $HR \geq 95$  por 100).
- Ensayo a compresión.

Todas estas operaciones están reguladas por las normas UNE 7240 y UNE 7242. Actualmente existen ya las normas UNE 83300 y 83301 que definirán la realización de las actividades mencionadas, y entrarán en vigor en la próxima revisión de la Instrucción EH-82.

Ha habido un cambio básico en cuanto a las condiciones exigibles en el curado inicial de las probetas en obra: mientras la norma UNE 7240 especifica un plazo máximo de conservación de las probetas en obra de 24 horas, debiendo estar durante este tiempo protegidas de la desecación y de las temperaturas extremas, la norma UNE 83301 admite un plazo de conservación de 48 o 72 horas en casos excepcionales, pero limita la temperatura de conservación al rango de  $16-27^\circ\text{C}$ . Este rango de temperaturas coincide con el especificado por ASTM C-31, que añade que la regulación puede hacerse, mediante ventilación o evaporación de agua, arena o arpillera humedecidas, o empleando aparatos calefactores.

Existen zonas geográficas y épocas del año en las cuales es muy difícil cumplir tal especificación, salvo que se tomen medidas especiales para la conservación de las probetas en obra.

Para estudiar la influencia de las condiciones de conservación (temperatura y plazo) de las probetas durante el curado inicial, se ha desarrollado, en el Laboratorio Central del Instituto Técnico de Materiales y Construcciones, el Plan de Investigación que a continuación se describe.

## 2. VARIABLES EN ESTUDIO

### 2.1. Cemento empleado

Se han realizado dos series de ensayos, con los siguientes tipos de cemento:

- Serie I: Cemento PA-350, con adicción de puzolana.
- Serie II: Cemento PA-350, con adicción de escoria siderúrgica.

### 2.2. Tiempo de curado inicial

Una vez fabricadas, las probetas han sido mantenidas en las condiciones de curado inicial durante:

- 24 horas
- 48 horas
- 72 horas

### 2.3. Temperatura ambiente de curado inicial

La temperatura ambiente alrededor de las probetas durante el curado inicial ha sido:

- $\pm 0^{\circ}$  C
- $+ 20^{\circ}$  C
- $+ 40^{\circ}$  C

### 2.4. Condiciones de fabricación de las amasadas

a) En la serie I, se controló la temperatura de los materiales componentes del hormigón, para conseguir las siguientes temperaturas en estado de suministro:

- $+ 8^{\circ}$  C
- $+ 20^{\circ}$  C
- $+ 40^{\circ}$  C

b) En la serie II, los materiales componentes del hormigón se han mantenido, durante las 72 horas anteriores a la realización de las amasadas, a la temperatura del curado inicial correspondiente.

## 3. FABRICACION DEL HORMIGON

El hormigón ha sido fabricado en el Laboratorio Central de INTEMAC, en una amasadora planetaria TEKA, de 375 l de capacidad. (Véase fotografía nº 1). La dosificación utilizada, expresada en peso de los componentes y referida a 1 m<sup>3</sup> de hormigón, ha sido la siguiente:

– Grava 5/20 mm	995 Kg.
– Arena 0/5 mm	815 Kg.
– Cemento PA-350	360 Kg.
– Agua (asiento de cono: 6 cm)	195 l.

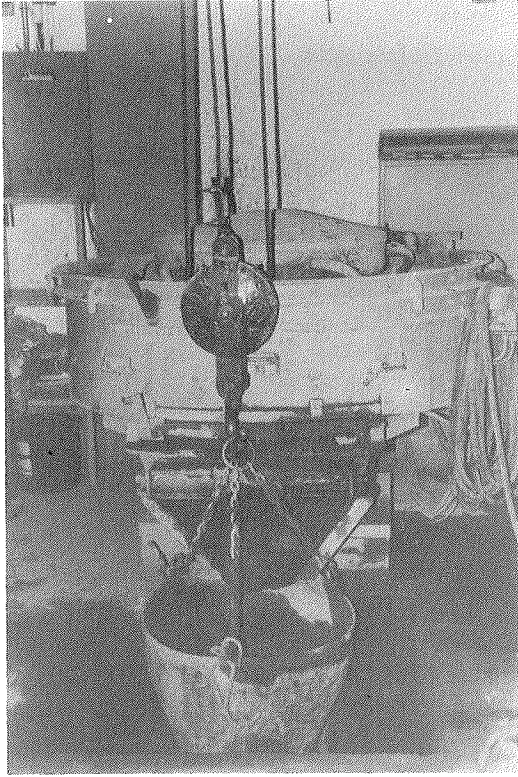


Foto 1. Amasadora marca TEKA, de 375 l de capacidad, utilizada para la fabricación del hormigón.



Foto 2. Fabricación de probetas mediante compactación por vibrado.



Foto 3. Determinación de la consistencia.



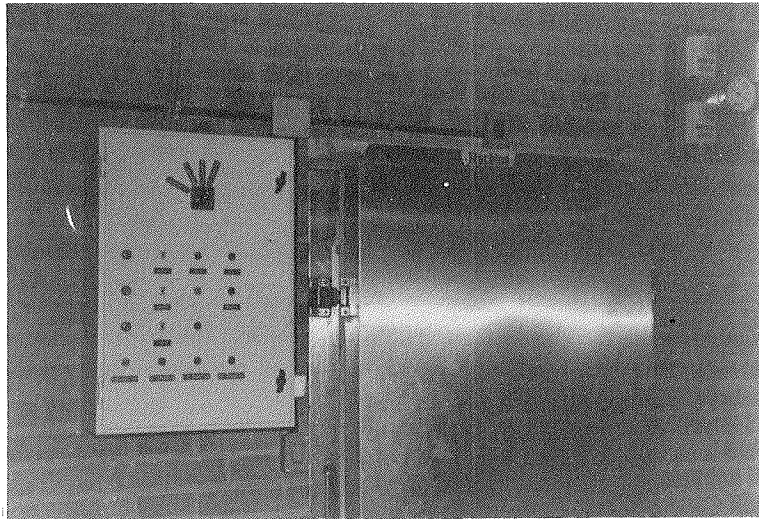


Foto 4. Cámara de curado especial. Cuadro de instrumentos.



Foto 5. Probetas en la cámara especial de curado.



Foto 6. Probetas en la cámara de curado estándar.

Durante el período de curado inicial, las probetas permanecieron en sus moldes, con una arpillera húmeda en su cara superior y dentro de una bolsa de plástico.

## 6. ENSAYO A COMPRESION

A la edad correspondiente, las probetas fueron ensayadas a compresión en una prensa AMSLER con capacidad de 100 t, de acuerdo con la norma UNE 7242. La mencionada prensa posee un cadenciómetro para regular la velocidad de carga, la cual se mantuvo constante hasta rotura, con un valor de 6 Kp/cm<sup>2</sup>/seg.

## 7. RESULTADOS DE ENSAYO

### 7.1. Serie I

En los Cuadros números 2, 3 y 4 se exponen los resultados obtenidos. En el cuadro nº 5 se presenta un resumen de los mismos, incluyendo la media de resultados correspondientes a todas las temperaturas del hormigón fresco.

En las figuras números 1 y 2 se ha representado la comparación entre las resistencias relativas a los 28 días de edad, para cada una de las temperaturas del hormigón fresco ( $T_H$ ), en el primer caso, y para cada plazo de curado inicial en el segundo.

En la figura nº 3 se puede ver la evolución de resistencias con el tiempo, en función de las condiciones de curado inicial.

**CUADRO 2**  
Resultados de Ensayo. Serie I  
(Tensiones de rotura – Kp/cm<sup>2</sup>)

Temperatura del hormigón fresco $T_H = 8^{\circ}\text{C}$	Temperat. de curado inicial	Tiempos de curado inicial					
		24 horas		48 horas		72 horas	
		7 días	28 días	7 días	28 días	7 días	28 días
$t = 0^{\circ}\text{C}$		175	261 266	175	262 255	162	268 284
	Valor medio		264	Valor medio	258	Valor medio	276
$t = 20^{\circ}\text{C}$		216	290 291	208	286 285	213	300 291
	Valor medio		290	Valor medio	286	Valor medio	296
$t = 40^{\circ}\text{C}$		212	276 265	210	278 276	202	259 251
	Valor medio		270	Valor medio	277	Valor medio	255



**CUADRO 3**  
**Resultados de Ensayo. Serie I**  
**(Tensiones de rotura – Kp/cm<sup>2</sup>)**

Temperatura del hormigón fresco T <sub>H</sub> = 20°C	Temperat. de curado inicial	Tiempos de curado inicial					
		24 horas		48 horas		72 horas	
		7 días	28 días	7 días	28 días	7 días	28 días
t = 0°C		172	238 235	186	241 242	173	232 245
	Valor medio		236	Valor medio	242	Valor medio	238
t = 20°C		199	272 278	194	278 277	196	278 271
	Valor medio		275	Valor medio	278	Valor medio	274
t = 40°C		184	249 229	171	254 244	195	267 266
	Valor medio		239	Valor medio	249	Valor medio	266

**CUADRO 4**  
**Resultado de Ensayo. Serie I**  
**(Tensiones de rotura – Kp/cm<sup>2</sup>)**

Temperatura del hormigón fresco T <sub>H</sub> = 40°C	Temperat. de curado inicial	Tiempos de curado inicial					
		24 horas		48 horas		72 horas	
		7 días	28 días	7 días	28 días	7 días	28 días
t = 0°C		196	236 238	186	261 261	204	265 260
	Valor medio		237	Valor medio	261	Valor medio	262
t = 20°C		203	268 269	205	276 274	215	282 287
	Valor medio		268	Valor medio	275	Valor medio	284
t = 40°C		183	251 258	206	257 259	185	252 252
	Valor medio		254	Valor medio	258	Valor medio	252

NOTA: Se toma como resistencia de referencia en cada caso la media correspondiente a los tres plazos de curado inicial a 20 °C

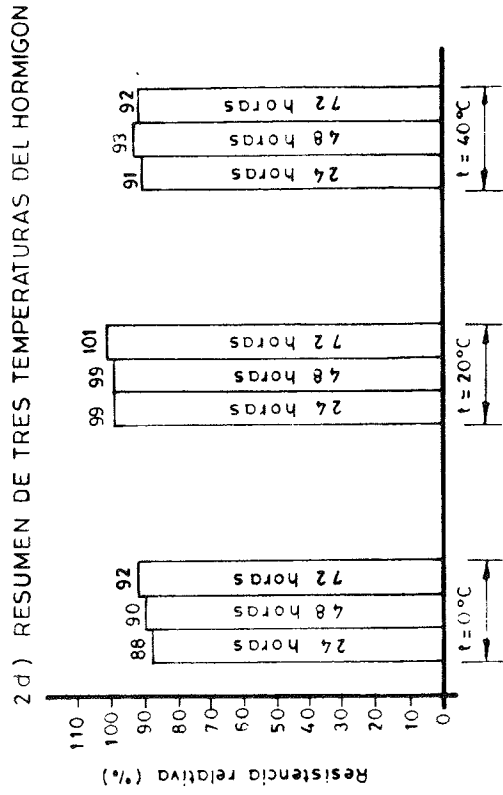
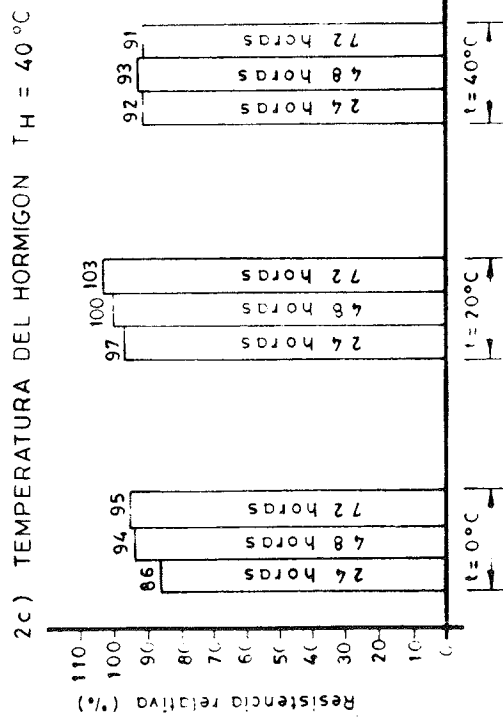
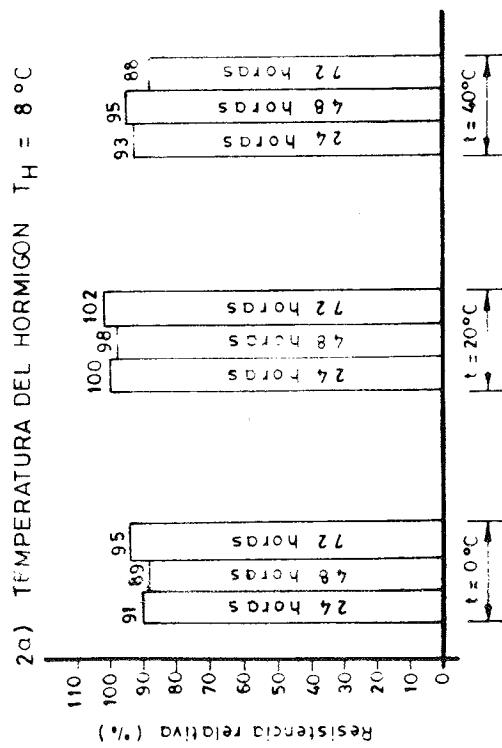
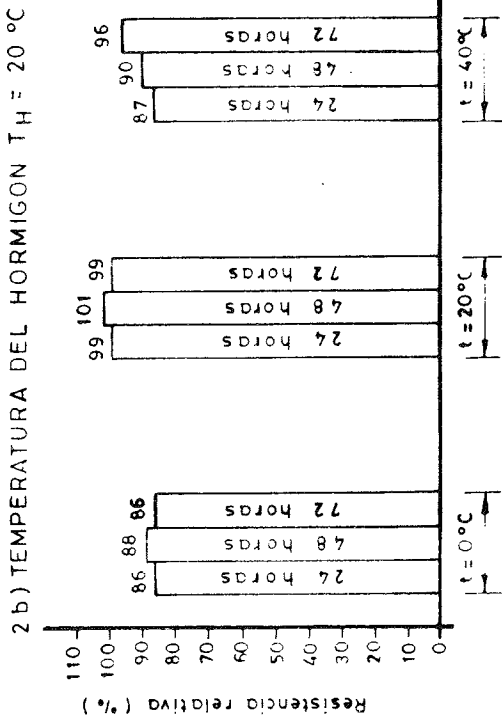
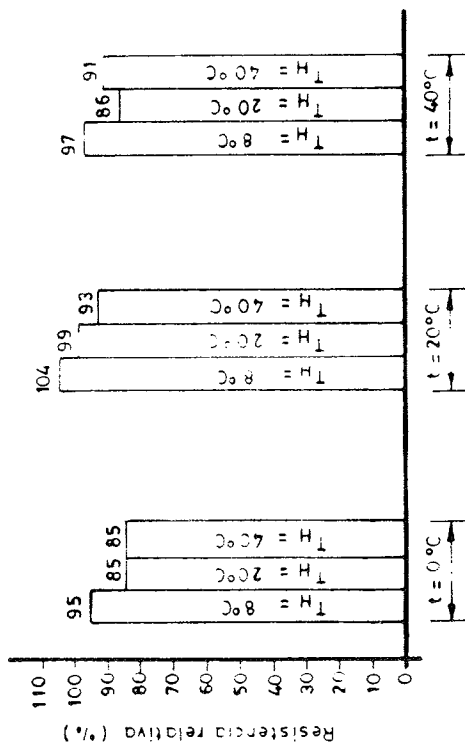


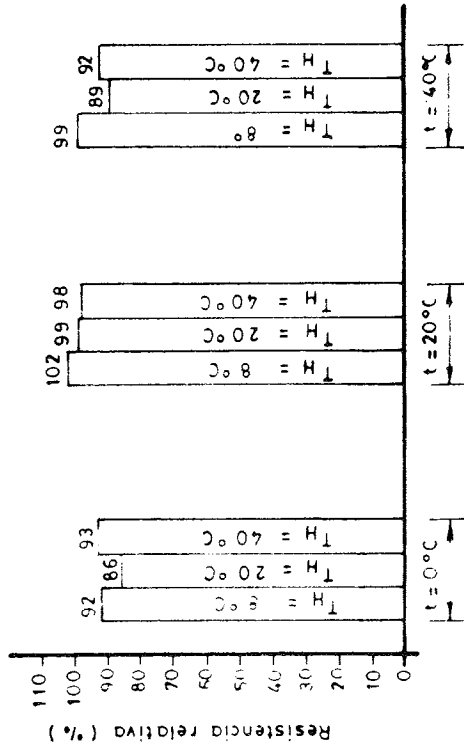
Fig. 1. Comparación entre las resistencias relativas a los 28 días de edad. Serie I.

NOTA: Se toma como resistencia de referencia en cada caso la media correspondiente a las tres temperaturas del hormigón en el curado inicial a 20°C

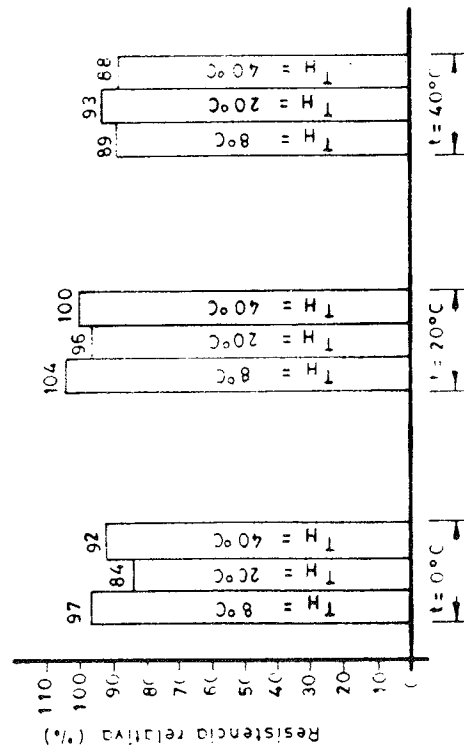
1a) TIEMPO DE CURADO INICIAL: 24 horas



1b) TIEMPO DE CURADO INICIAL: 48 horas



1c) TIEMPO DE CURADO INICIAL: 72 horas



1d) RESUMEN DE TRES TIEMPOS DE CURADO INICIAL

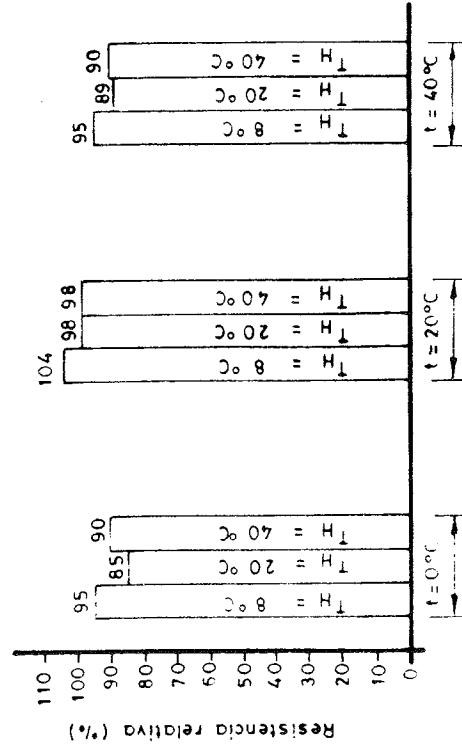
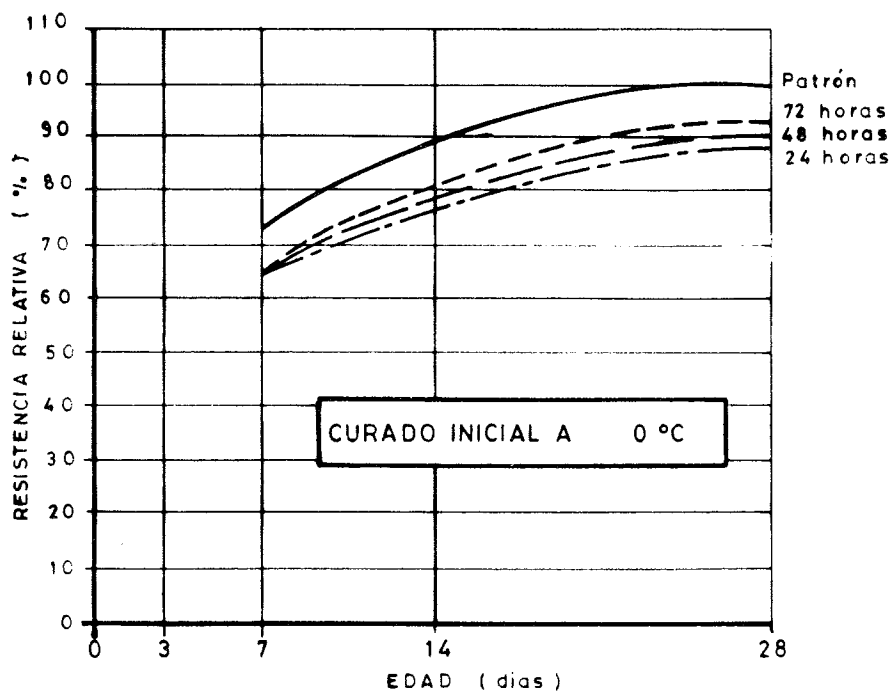


Fig. 2. Comparación entre las resistencias relativas a los 28 días de edad. Serie I.

3 a)



3 b) NOTA: Se adopta como referencia la evolución de resistencias con curado inicial a 20°C, y media de tres plazos.

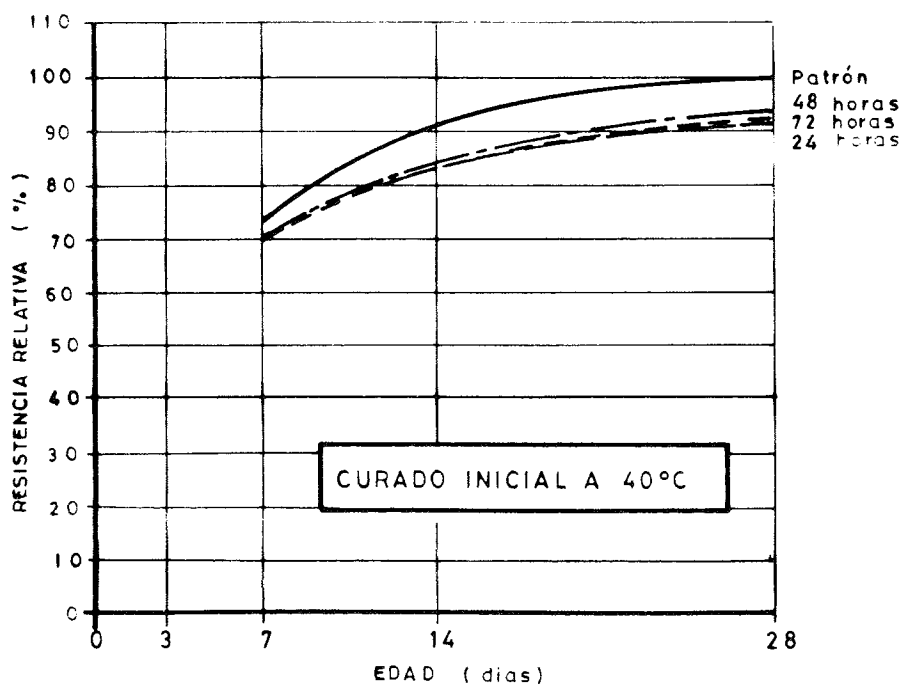


Fig. 3. Evolución de las resistencias en función de las condiciones de curado inicial. Serie I.

**CUADRO 5**  
**Resumen de Resultados. Serie I**

Temperatura de curado inicial	Tiempos de curado inicial					
	24 horas		48 horas		72 horas	
	7 días	28 días	7 días	28 días	7 días	28 días
t = 0°C	175	261	175	262	182	268
		266				255
	172	238	186	241	173	232
		235				242
196	236	186	261	204	265	
	238				261	
Valor medio	181	246	182	254	180	259
t = 20°C	216	290	208	286	213	300
		291				285
	199	272	194	278	196	278
		278				277
203	268	205	276	215	282	
	269				274	
Valor medio	206	278	202	279	208	285
t = 40°C	212	276	210	278	202	259
		265				276
	184	249	171	254	195	267
		229				244
183	251	206	257	185	252	
	258				259	
Valor medio	193	255	196	261	194	258

## 7.2. Serie II

En el Cuadro n° 6 se recogen los resultados de ensayo, obtenidos.

En la figura n° 4 se ha representado la comparación entre las resistencias a los 28 días de edad, para las diferentes condiciones de curado. En la figura n° 5 se puede ver la evolución de resistencias con el tiempo, en función de las condiciones de curado inicial.

**CUADRO 6**  
**Resultados de Ensayo. Serie II**

Amasada	Condiciones de curado inicial		Resistencia a la edad de (Kp/cm <sup>2</sup> ) (*)		
	Temperatura (°C)	Tiempo (horas)	3 días	7 días	28 días
1	20	24	231	320	399
		48	196	306	403
		72	222	306	414
	0	24	182	272	324
		48	158	305	390
		72	100	289	422
2	20	24	199	256	326
		48	220	247	315
		72	203	259	316
	40	24	231	248	300
		48	235	251	297
		72	255	264	294

(\*) En base al resultado de una probeta a las edades de 3 y 7 días, y al resultado de dos probetas a la edad de 28 días.

NOTA: Se toma como resistencia de referencia en cada caso la media de los tres plazos de curado inicial a 20°C. Para t = 20°C se toma la media además de las dos amasadas

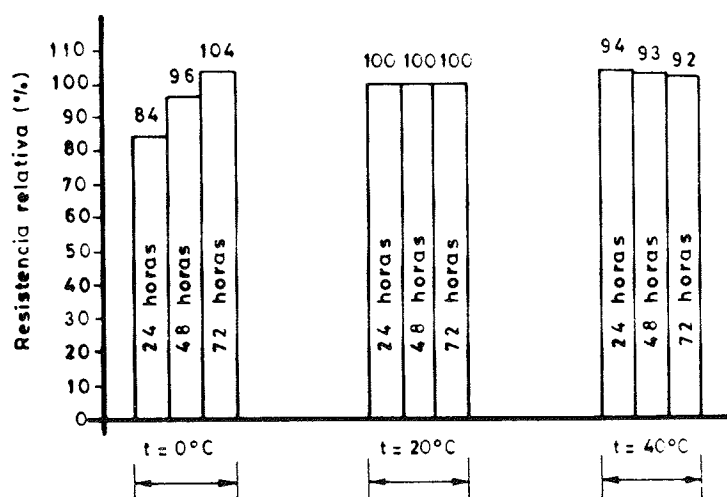
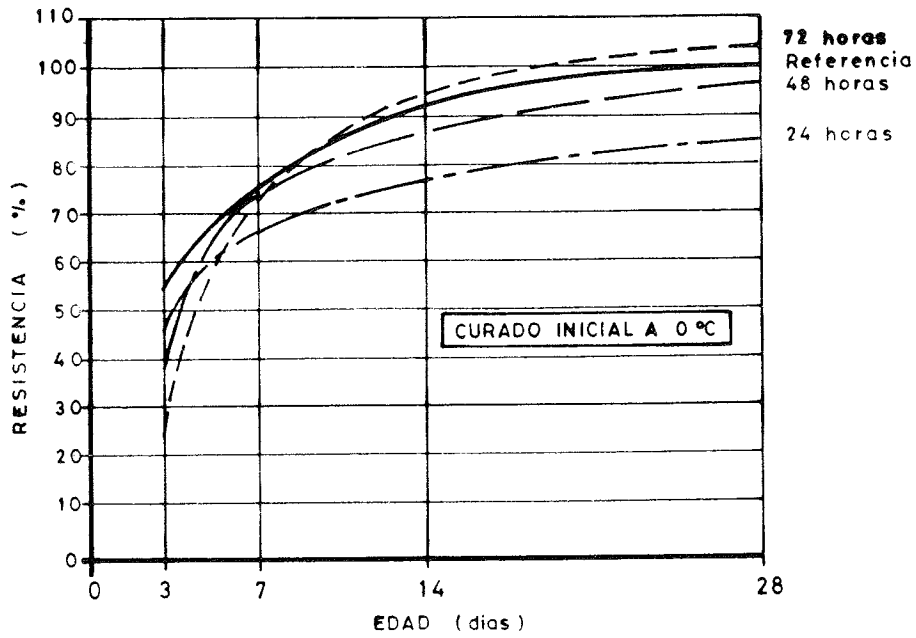


Fig. 4. Comparación entre las resistencias a los 28 días de edad. Serie II.

5 a )



NOTA : Se adopta como Referencia el resultado medio correspondiente a los 3 plazos de curado inicial, con temperatura de 20 °C

5 b )

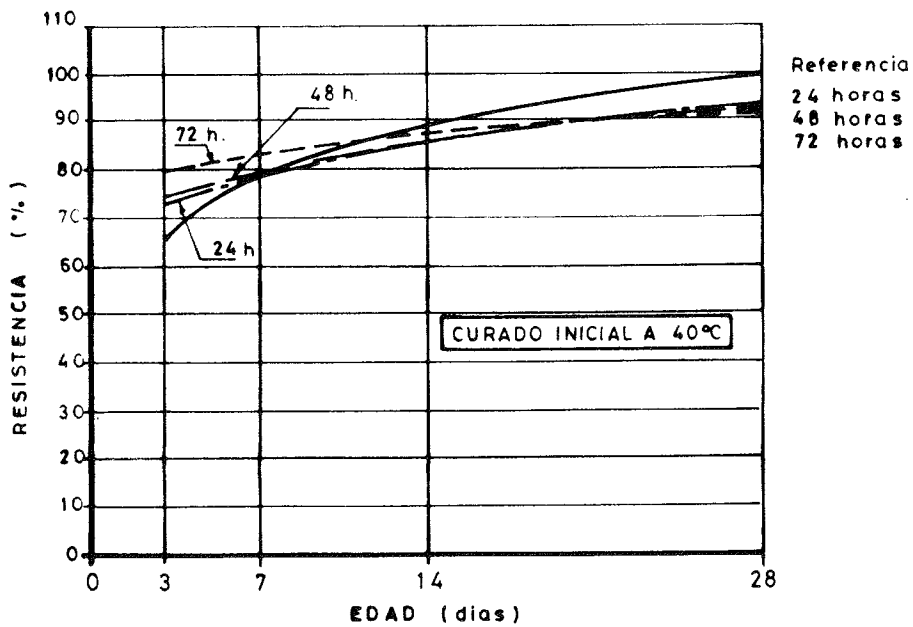


Fig. 5. Evolución de las resistencias en función de las condiciones de curado inicial. Serie II.

## 8. INTERPRETACION DE RESULTADOS

### 8.1. Serie I. Cemento PA-350 con adición de Puzolana

#### a) *Influencia de la temperatura del hormigón fresco*

No parece existir una relación clara entre la temperatura del hormigón y la resistencia obtenida a los 28 días de edad. En general, se obtienen resultados más altos con temperatura del hormigón fresco de 8° C que con temperaturas superiores.

#### b) *Influencia del plazo de curado*

No existen diferencias notables entre la resistencia a los 28 días de edad del hormigón, para los distintos plazos de curado inicial.

Si nos fijamos en la figura 2 d, vemos que la máxima diferencia de resistencia entre los diferentes plazos de curado es del 4 por 100 (temperatura de curado inicial 0° C). También se observa del análisis de la mencionada figura que el aumentar el plazo de curado inicial hasta 48 o 72 horas no es perjudicial.

#### c) *Influencia de la temperatura de curado*

La evolución de resistencias para curados iniciales con temperatura de 0 ó 40° C, resulta inferior a la obtenida con curado a 20° C. La pérdida de resistencia relativa que se obtiene en ambos casos es similar, sin apenas influencia del plazo de curado inicial, y del orden del 10 por 100 a los 28 días de edad.

### 8.2. Serie II. Cemento PA-350 con adición de escoria siderúrgica

#### a) *Influencia del plazo de curado inicial*

Para curados iniciales a 20° C y a 40° C, no existen diferencias apreciables entre los resultados obtenidos con los diferentes plazos de curado. A 0° C existe una dependencia importante entre el plazo de curado inicial, y la resistencia obtenida, la cual aumenta al aumentar aquél, obteniéndose la mayor resistencia con el plazo de curado inicial de 72 horas.

El aumentar el plazo de curado inicial hasta 72 horas no supone, en cualquier caso, una pérdida de resistencia sensible.

#### b) *Influencia de la temperatura de curado inicial*

Se aprecia una gran dependencia entre la temperatura de curado inicial y la evolución de las resistencias. Con curado inicial a 40° C se obtienen, a primeras edades, resistencias superiores a las obtenidas a 20° C, y a 28 días valores inferiores, del orden de un 7 por 100, y prácticamente independientes del plazo de curado inicial.

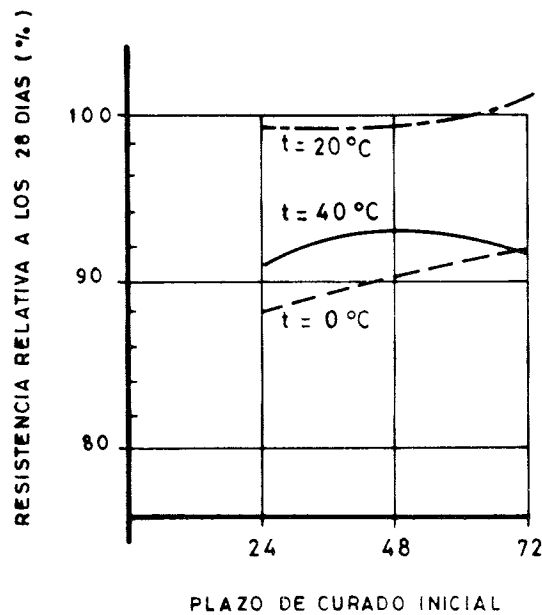
La evolución de resistencias con curado inicial de 0° C depende mucho del plazo. A primeras edades, las resistencias conseguidas son inferiores a la de referencia, y a 28 días oscilan entre un 84 por 100 y un 104 por 100 de dicha resistencia.



### 8.3. Influencia del tipo de cemento

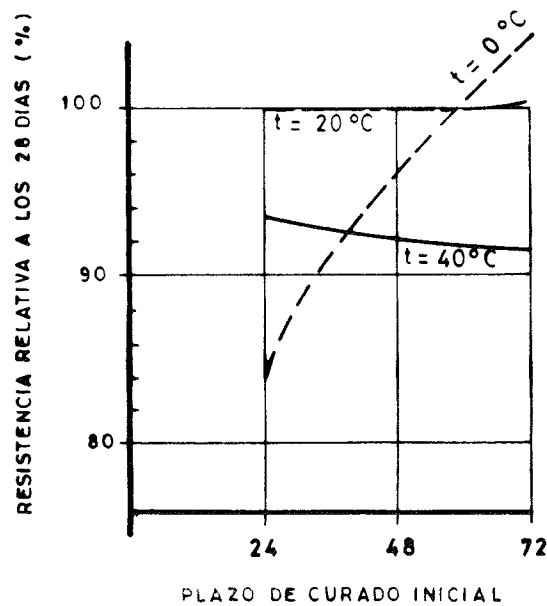
En la figura 6 se ha representado un resumen con los resultados de ensayo obtenidos para cada uno de los cementos ensayados. Con curado inicial de 20° C, en ambos casos no se aprecia influencia del plazo de curado inicial. Con curado inicial de 40° C, las resistencias relativas obtenidas son similares, también, en ambos casos, no siendo importante la influencia del plazo de curado inicial.

6 a )



CEMENTO CON ADICION  
PUZOLANA

6 b )



CEMENTO CON ADICION DE  
ESCORIA SIDERURGICA

Fig. 6. Resumen de resultados.

A 0° C de curado inicial, existe una diferencia notable en el comportamiento de los hormigones de las dos series ensayadas. El hormigón fabricado con cemento de adicción de escoria siderúrgica es muy sensible al plazo de curado inicial, llegando incluso, con 72 horas de curado inicial, a superar la resistencia patrón. El hormigón fabricado con cemento de adicción puzolana no presenta de forma tan acusada este fenómeno, no llegando en ningún caso la resistencia obtenida a superar a la de referencia. En ambos casos, al aumentar el plazo de curado inicial de 24 a 72 horas, aumenta la resistencia obtenida.

Como resumen, puede afirmarse que el comportamiento de ambos hormigones es semejante para temperaturas de curado inicial comprendidas entre 20°C y 40°C, y bastante diferente para 0° C, en la cual el hormigón fabricado con cemento de adicción de escoria siderúrgica es muy sensible al período de curado inicial. Salvo para este último caso (temperatura de curado inicial 0° C) la resistencia a 28 días no se ve afectada, de forma apreciable, por el período de curado inicial. En ambos casos depende de la temperatura de curado.

## 9. CONCLUSIONES

Partiendo de la base de que somos conscientes de que el establecimiento de unas conclusiones definitivas al respecto, implicaría la necesidad de realizar ensayos complementarios a los que han sido expuestos, entendemos como conclusiones del presente estudio las siguientes:

- 1ª) El tiempo habitual de permanencia en obra de las probetas fabricadas en fines de semana o vísperas de días festivos (48 ó 72 horas) no representa, de acuerdo con los resultados de nuestro trabajo, una merma de la resistencia del hormigón.
- 2ª) A temperatura de curado inicial de 40° C, se registran descensos de la resistencia a compresión inferiores al 10 por 100 de la patrón.
- 3ª) Con temperatura de curado inicial de 0° C, el comportamiento de los hormigones depende del cemento utilizado. Se registran pérdidas de resistencias máximas, del orden de un 16 por 100. (Plazo de curado inicial de 24 horas). Para plazos de curado inicial superiores a 24 horas, la pérdida máxima de resistencia es del orden del 10 por 100. Es conveniente, por tanto, alargar el plazo de curado inicial con bajas temperaturas.
- 4ª) A pesar del diferente comportamiento a bajas temperaturas de los hormigones fabricados con diferentes tipos de cemento, y siempre que con curados iniciales a temperaturas bajas se mantengan las probetas en obra más de 24 horas, dentro del rango de temperaturas de curado 0° C - 40° C no se detectan pérdidas de resistencia superiores al 10 por 100.
- 5ª) Parece posible aumentar el rango de temperaturas de curado inicial de 16° C - 27° C, especificado por UNE 83301, sin sufrir una merma de resistencia importante.

## 10. COMENTARIOS

Respecto de la conclusión n° 4 expuesta en el apartado anterior, hay que señalar que en un estudio realizado por MEININGER (1983) con motivo de la revisión de ASTM C 31, en el cual se ensayaron probetas sometidas durante 24 ó 48 horas a 16°C y 27°C, en ambos casos curados al aire y por inmersión en agua con moldes estancos, se encontraron diferencias en las resistencias a compresión, del mismo orden que las obtenidas en este mismo trabajo (10 por 100), para un rango de temperatura menor.

Por otro lado, la limitación 16° C - 27° C es difícil de cumplir estrictamente, y obligaría a la disposición en obra de cámaras de curado especial dotadas, no sólo de calefacción, sino también de refrigeración, para combatir las altas temperaturas del verano. Entendemos que la especificación recogida en UNE 83301, puede ampliarse hasta valores que hagan más fácil su cumplimiento, sin perjudicar de manera sensible la resistencia del hormigón.

## 11. BIBLIOGRAFIA

- 1) IRANOR - UNE 7240. Fabricación y conservación de probetas de hormigón.
- 2) IRANOR - UNE 83301. Ensayo de rotura de probetas de hormigón. Fabricación y conservación de probetas.
- 3) ASTM C-31-83. Standard Method of Making and Curing Concrete Test Specimens in the Field.
- 4) ASTM. Committee C-9. Revised 1983. Manual of Aggregate and concrete Testing.
- 5) BS 1881, Part 3. Methods of Making and Curing Test Specimens (1970).
- 6) BS 1881. Part 1. Methods of Sampling fresh Concrete (1970). (En revisión, 1984).
- 7) RILEM CPC-3 (1975). Making and Curing of Concrete Specimens.
- 8) DIN 1048 (1973). Ensayos de hormigón.
- 9) Richard Meininger. "Effects of Initial Field Curing on Standard 28 Day Cylinder Strengths". Cement, Concrete and Aggregates, CCAGDP. Vol. 5, N° 2, Winter 1983, pp. 137-141.

\* \* \*

## Ultimas Publicaciones de INTEMAC

Bajo el título "MUROS DE CONTENCIÓN Y MUROS DE SOTANO" acaba de publicarse un libro del Prof. José Calavera, Dr. Ingeniero de Caminos.

El libro está dedicado, tanto a los muros habituales en obras públicas y obras industriales, tales como los muros de gravedad, muros ménsula de hormigón armado, muros de contrafuertes, de bandejas, etc., como a los muros pantalla y muros de sótano, de uso hoy frecuente, tanto en obras públicas como en edificación.

Aunque dedicado fundamentalmente al cálculo estructural de los muros (campo en el que el autor introduce aportaciones importantes, en especial por lo que se refiere al establecimiento de los coeficientes de seguridad), al proceso de construcción y detalles constructivos, también el tema del cálculo de empujes recibe un extenso tratamiento. Debe destacarse, en especial, el amplio número de casos de acciones considerado, tales como cargas sobre el relleno debidas a cimentaciones próximas, carreteras y vías de ferrocarril, oleaje, acciones sísmicas, etc.

El libro se completa con colecciones estándar de muros ménsula de hasta 10 m de altura, que contienen, completamente proyectados y medidos, los casos de muros ménsula con puntera y talón, muros sin puntera y muros sin talón, respectivamente. También se incluyen cuatro colecciones de muros de uno y dos sótanos para distintos casos de carga en coronación, ya proyectados y medidos, para las variantes de muros con zapata centrada y con zapata de medianería. Las siete colecciones contemplan diversas presiones admisibles sobre el suelo.

El libro constituye uno de los estudios más completos realizados hasta hoy sobre el tema.

\* \* \*

Acaba de publicarse la 2ª Edición del libro "CALCULO DE ESTRUCTURAS DE CIMENTACION" del Prof. José Calavera, Dr. Ingeniero de Caminos.

Publicada la primera edición en 1982, el libro, que constituye hoy una publicación fundamental sobre el tema, estaba agotado hace varios años y, debido al trabajo del autor en otros libros, no había sido reeditado hasta ahora.

Esta nueva edición, orientada en la misma línea que la primera, es decir, en el estudio de los cimientos considerados como estructuras, pasa revista a los distintos tipos de cimientos siendo de destacar, en especial, el exhaustivo estudio de las zapatas de medianería y esquina, así como el realizado con las zapatas combinadas y vigas de cimentación.

El libro contiene además una valiosa colección de zapatas, ya proyectadas y medidas, que, en función de la carga del muro o pilar cimentado y de la presión admisible sobre el suelo, proporciona directamente las dimensiones de la zapata y la armadura necesaria, así como las correspondientes mediciones de hormigón y acero, todo ello para los casos de zapatas corridas, zapatas cuadradas y zapatas rectangulares.

Esta nueva edición actualiza además la primera de acuerdo con los cambios de la Instrucción EH-82 respecto a la EH-80 y recoge los resultados de las investigaciones realizadas sobre el tema en los últimos años.

\*\*\*

Con el título "TECNOLOGIA Y PROPIEDADES MECANICAS DEL HORMIGON", se ha publicado un libro de Adolfo Delibes, Dr. Ingeniero de Caminos.

Trata inicialmente la dosificación de hormigones, desde un punto de vista práctico, así como su comportamiento durante el fraguado y las deformaciones de retracción y fluencia, exponiendo y comentando los métodos más adecuados de cálculo. Aporta interesantes consideraciones sobre la influencia de propiedades especiales de los componentes: aditivos y adiciones, áridos ligeros, cementos especiales, o procedimientos de puesta en obra, como el bombeo.

Estudia las propiedades mecánicas del hormigón, aportando gran profusión de datos experimentales recientes para deducir la influencia de distintos factores en la resistencia del hormigón a compresión, tracción, cansancio, fatiga, etc... Entre ellos, analiza detalladamente las variaciones de resistencia atribuibles a la velocidad de carga, tamaño de probetas, edad y proceso de curado, cargas previas, etc.

Expone con claridad y una cierta extensión los más modernos criterios sobre el daño y la fractura del hormigón.

Finalmente, trata los aspectos superficiales del hormigón en un capítulo dedicado a los hormigones vistos.

Todos los temas se complementan, no sólo con una apreciable cantidad de datos experimentales sino también con una valiosa relación de bibliografía que lo hacen interesante como libro de consulta.

\*\*\*

Estos tres libros los distribuye INTEMAC, Monte Esquinza nº 30 - 28010 MADRID.

## **Simposio Internacional Grandes proyectos en una Europa vertebrada**

Organizado por el Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Cataluña y, con el patrocinio del Departamento de Política Territorial y Obras Públicas de la Generalitat de Cataluña, se celebrará en Barcelona, durante los días 9, 10 y 11 del próximo mes de diciembre, un Simposio Internacional sobre "Grandes proyectos en una Europa vertebrada".

Paralelamente a la realización de estas Jornadas está previsto la organización de:

- Exposición de Grandes Proyectos europeos (del 4 al 20 de diciembre de 1987).
- Exposición de Empresas e Instituciones relacionadas con las Obras Públicas (9, 10 y 11 de diciembre de 1987).
- Visita facultativa a obras en Cataluña (8 de diciembre de 1987).
- Visita a la Barcelona Olímpica (12 de diciembre de 1987).
- Programa de acompañantes.

El programa provisional de las Jornadas Técnicas, que tendrán lugar en el Palacio de Congresos de Barcelona, es el siguiente:

Miércoles día 9 de diciembre

Mañana:

- 09.00 - Recogida de documentación.
- 09.30 - Acto Inaugural.

### **Europa Espacio de Planificación**

- 09.45 - Europa espacio de planificación del transporte. Jean Duquesne. Director de Transportes de la CEE/O.N.U.
- 10.30 - Pausa.
- 11.00 - La red española de carreteras en la red europea. Enrique Balaguer. Director General de Carreteras del M.O.P.U. y Presidente del Colegio Nacional de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- 12.00 - Los ejes de comunicación regional en Cataluña. Joaquim Tosas. Secretario General del Departamento de Política Territorial y Obras Públicas de la Generalitat de Cataluña.
- 13.00 - Coloquio.
- 14.00 - Comida de trabajo.

Tarde

### **Permeabilidad fronteriza**

- 15.30 - Las Comunicaciones a través del Arco Alpino. Franz Kranebitter. Dip. Ing. Presidente de la Comisión I Arge Alp.
- 16.15 - Conexión fija escandinava. Henrik Baasch. Director General de "Scandinavian Link Consortium", y K.H. Ostfeld. Consultor Internacional.

- 17.30 – Pausa.
- 18.00 – Una propuesta de permeabilidad pirenaica. Albert Serratosa. Coordinador de la Comisión de Comunicaciones Pirenaicas.
- 18.45 – Coloquio.
- 21.30 – Cena ofrecida por el Ayuntamiento de Barcelona.

Jueves, día 10 de diciembre

Mañana

#### **Proyectos singulares**

- 09.30 – Túnel del Canal de la Mancha. C. Kirkland. Director Técnico de “Eurotunnel”.
- 10.30 – Pausa.
- 11.00 – Estrecho de Mesina. M. Gilardini. Consejero Delegado de “Stretto di Messina SpA”.
- 12.00 – Estrecho de Gibraltar. F. Javier Manterola. Catedrático de Puentes de la Universidad Politécnica de Madrid, y J. Manuel Serrano. Director Técnico de SECEGSA (Sociedad Española de Estudios para la Comunicación Fija a Través del Estrecho de Gibraltar, S.A.).
- 13.00 – Coloquio.
- 14.30 – Comida de trabajo.

Tarde

#### **Sistema aeroportuario**

- 15.30 – Sistema aeroportuario en Cataluña: el caso de Barcelona. Robert Ramírez. Director General de Transportes de la Generalitat de Cataluña.
- 16.30 – El sistema aeroportuario en la Europa comunitaria. Jhon R. Wiley. Asesor de Dirección de “Nederland Airport C.O.”.
- 17.30 – Pausa.
- 18.00 – Modelos de aeropuertos para el año 2000. Luis Marquina. Catedrático de Aeropuertos de la E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid.
- 19.00 – Coloquio.
- 21.30 – Cena ofrecida por la Generalitat de Cataluña.

Viernes día 11 de diciembre

Mañana

#### **Nuevas tecnologías. Ferrocarriles de alta velocidad**

- 09.30 – El futuro del ferrocarril en Europa. Eduardo Peña. Director General de Transportes de la C.E.

- 10.00 – Incidencia de la alta velocidad en las relaciones internacionales por ferrocarril. Andrés López Pita. Catedrático de Ferrocarriles de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Cataluña.
- 10.30 – El ferrocarril español y la alta velocidad. Gonzalo Martín Baranda. Director de Ingeniería y Equipamiento de RENFE.
- 11.15 – Pausa.
- 11.30 – El desarrollo de la alta velocidad en los ferrocarriles italianos. Mauricio Cavagnaro. Director de Alta Velocidad de F.S.
- 12.15 – La rentabilidad de la alta velocidad: la experiencia francesa. Philippe Roumequere. Director General de l'Equipement de la SNCF.
- 13.00 – Conexión a la red ferroviaria europea. Albert Vilalta. Presidente de Ferrocarrils de la Generalitat de Cataluña.
- 13.45 – Coloquio.
- 14.30 – Comida de trabajo.

Tarde

#### **Proyecto olímpico**

- 16.00 – Proyectos para la Barcelona Olímpica.
- 17.15 – Efectos económicos de los juegos olímpicos. Josep Maria Bricall. Catedrático de Economía y Hacienda de la Universidad de Barcelona, y Ricard Frigola. Director Técnico del Centro de Estudios de Planificación.
- 18.00 – Pausa.
- 18.15 – Análisis sociológico del interés colectivo de los grandes proyectos. Antonio Marzal. Profesor de la Escuela Superior de Administración y Dirección de Empresas, ESADE.

Clausura:

- 20.00 – Conclusiones y Acto de Clausura.
- 21.00 – Cóctel ofrecido por el Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Cataluña.

Las cuotas de inscripción son:

- 35.000 ptas., hasta el día 30 de octubre de 1987.
- 40.000 ptas., a partir del 1 de noviembre.
- 10.000 ptas., por acompañante.

Los idiomas oficiales serán: catalán, castellano, francés e inglés. Habrá un servicio de traducción simultánea.

La inscripción al Simposio incluye: Publicaciones, comidas de trabajo, visitas facultativas y recepciones.

Los interesados en recibir información suplementaria, deberán dirigirse a:

Secretaría del Simposio e Información  
Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
(Srtas. Montserrat Bernaus y Maribel Mateu)  
C/ Calatrava, 19  
08017 BARCELONA.

\* \* \*

## **Simposio Internacional sobre "Nuevas Aplicaciones de las Láminas y las Formas Espaciales"**

Durante los días 21 al 25 de noviembre de 1988, se celebrará en Bangalore, India, un Simposio Internacional para el estudio de las "Nuevas Aplicaciones de las Láminas y las Formas Espaciales".

Este Simposio ha sido organizado por la IASS (Asociación Internacional de Láminas y Estructuras Espaciales), la Asociación de Constructores de la India, el Instituto del Hormigón de la India, el Centro de Investigación de Ingeniería Estructural y el Instituto de Arquitectos de la India. Está patrocinado por el Instituto Asiático de Tecnología, de Bangkok, y el Centro de Investigación de Estructuras Espaciales, de la Universidad de Surrey, Reino Unido.

En el curso de las Sesiones Técnicas se expondrán los nuevos campos de aplicación de este tipo especial de estructuras y la utilización de nuevos materiales, nuevas formas y nuevas técnicas constructivas.

Cada uno de estos temas se estudiará, tanto desde el punto de vista del ingeniero como del arquitecto, y se dividirá en los siguientes apartados: 1.—Proyecto y cálculo; 2.—Trabajos teóricos y experimentales; 3.—Teoría y práctica de los nuevos métodos utilizados en la fabricación y la construcción, y 4.—Reseña histórica de algunos proyectos destacados.

Además de las normales Sesiones Técnicas, habrá proyección de películas documentales y audiovisuales y una exposición de materiales y equipos de construcción.

Los interesados en participar en este Simposio deberán dirigirse a:

MR. R. Sundaram.  
Chairman, IASS Organising Committee.  
"Annapurna", 384, 13th Main Road, Rajamahal Vilas Extensión.  
Bangalore — 560 080 India.



## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

*(Continuación de Int. Portada)*

- HUARTE Y CIA, S.A. Departamento Técnico.**— Profesor Waksman, 14. 28036 Madrid.
- IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.**— Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.**— Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).**— Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
- IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.**— Plaza Gala Placidia, 5-7. 08006 Barcelona.
- INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**— Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
- INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPESA).**— General D'áz Porlier, 49-51. 28001 Madrid.
- INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).**— Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
- INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Dirección General de Carreteras.**— P° de la Castellana, 67. 28071 Madrid.
- INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES.**— Velázquez, 11 - 3.º izda. 28001 Madrid.
- INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).**— Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
- INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA). Biblioteca.**— Orense, 70. 28020 Madrid.
- JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.**— Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
- LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- MECANOGUMBA, S.A.**— Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
- NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.**— Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
- OBRAS Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES, S.A. (OCISA).**— Princesa, 3 - 7°. 28008 Madrid.
- PACADAR, S.A.**— Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
- PRENSOLAND, S.A.**— Calle Industria, s/n. 08529 Sant Martí de Centelles (Barcelona).
- PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.**— Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
- SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.**— Avda. del Triunfo, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
- SIKA, S.A.**— Carretera Madrid-Irún, Km. 14,500. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
- SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA BBR (S.A.E. BBR).**— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SEGECSA).**— Estébanez Calderón, 3 - 1° A. 28020 Madrid.
- TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**— Velázquez, 105. 28006 Madrid.
- TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.**— Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
- TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).**— Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente, su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.



**asociación técnica  
española del prefensado**