

hormigón

**y ACERO**

*n.º 165*

*ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO.*

*DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77*

*INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)*

*APARTADO 19.002. COSTILLARES. CHAMARTIN.*

*28080 MADRID*

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de "Miembro Protector", a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de "Miembros Protectores" los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).— P° de la Habana, 14. 28036 Madrid.
- AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.— Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.
- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMENT".— Velázquez, 23. 28001 Madrid.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).— Orense, 10. 28020 Madrid.
- AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.— Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.
- AZMA, S.A.— P° de la Habana, 16. 28036 Madrid.
- BIGUETES, S.L.— Partida Altabix, s/n. 03000 Elche (Alicante).
- CAMARA, S.A.— Apartado 180. 36080 Pontevedra.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.— Grijalba, 9. 28006 Madrid.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.— C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Vicenç dels Horts (Barcelona).
- CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX). Gabinete de Información y documentación.— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A., C.T.T., S.A.— Aribau, 185. 08021 Barcelona.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.— Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
- COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS DE MADRID.— Almagro, 42. 28010 Madrid.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
- COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.— Barquillo, 12. 28004 Madrid.
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.— Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.
- CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.— Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.— Ayala, 42. 28001 Madrid.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Avda. de América, 24. 28028 Madrid.
- EMESA-TREFILERIA, S.A.— Apartado 451. 15080 La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento Obras Especiales.— Padilla, 46. 28006 Madrid.
- ENAGA, S.A.— Hermanos Fernández Calvajal, 31. 28023 Pozuelo de Alarcón (Madrid).
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.— Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
- ESTEYCO, S.A.— Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).— Arapiles, 14. 28015 Madrid.
- EUROCONSULT, S.A.— Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).
- FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- FREYSSINET, S.A.— General Perón, 24. 28020 Madrid.
- GRACE, S.A.— Apartado 523. 08080 Barcelona.
- HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.— Almogávares, 11 - 17. 08018 Barcelona.
- HISPANO-ALEMANA DE CONSTRUCCIONES, S.A.— Capitán Haya, 51. 28020 Madrid.
- HORMIGONES GERONA, S.A.— Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
- HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.— Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.

*(Continúa en el int. de contraportada)*

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO  
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO  
DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

# *hormigón y acero*

*n.º 165*

4.º trimestre 1987

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales) .....	4.500,— ptas.	40,— dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) .....	7.000,— ptas.	100,— dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) .....	12.000,— ptas.	200,— dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - COSTILLARES - CHAMARTIN - 28080 MADRID

Depósito Legal: M-853-1958  
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID  
ISSN: 0439-5689

**Comité de Redacción  
de la Revista  
Hormigón y Acero**

ARENAS, Juan José  
BARREDO, Carlos  
CUVILLO, Ramón del  
CHUECA, Rafael  
ELICES, Manuel  
FERNANDEZ DE VILLALTA, Manuel  
FISAC, Miguel  
GONZALEZ VALLE, Enrique  
JODAR, Juan  
JULIA, Manuel  
LLOMBART, José Antonio  
MANTEROLA, Javier  
MARIA TOME, Javier  
MURCIA, Juan  
PIÑEIRO, Rafael  
POZO VINDEL, Florencio J. del  
ROMERO, Rafael  
SANCHEZ CASTRO, Carlos  
SANCHEZ GALVEZ, Vicente  
SIEGRIST, Carlos

# hormigón y acero

**N. 165**

## índice

	<u>Pág.</u>
<b>457-0-120</b> <b>Análisis diferido en segundo orden de piezas comprimidas esbeltas de hormigón. Planteamiento en viscoelasticidad lineal, aproximaciones para considerar la fluencia y conclusiones de cara a la práctica . . . . .</b>	<b>9</b>
Analyse differé en deuxième ordre d'éléments comprimés élancés en béton. Formulation générale en viscoélasticité linéaire, approximations pour tenir compte du fluage et conclusions vers la pratique. Second order time-dependent analysis of concrete slender compressed members. Linear viscoelasticity formulation, approaches for creep consideration and practical conclusions. <i>J. Murcia.</i>	
<b>457-0-121</b> <b>Vectores de carga en barras de sección variable . . . . .</b>	<b>29</b>
Vecteurs de charge dans les barres de section variable. Load vector of non-uniform cross-section bars. <i>J.M. Arrieta y F.J. del Pozo Vindel.</i>	
<b>457-0-122</b> <b>Análisis de puentes de planta circular por el método de la lámina plegada . . . . .</b>	<b>39</b>
Analyse des ponts avec plan circulaire pour la méthode de la lame pliée. Analysis of circular in plan bridges by the folded plate method. <i>J.I. González Esteban y A. Samartín.</i>	

- 457-0-123 Reajuste de la ley de momentos flectores de dinteles, en la zona de empotramiento en los soportes de hormigón . . . . . 61.**  
 Ajustage de la loi de moments fléchissants des linteaux, dans les sections d'encastrement sur poteaux en béton.  
 Bending moments distribution in support zones of continuous beams.  
*R. Bernárdez.*
- 457-0-124 Diseño preliminar de mallas tesas . . . . . 77**  
 Calcul préliminaire des toitures suspendues.  
 Preliminary design of cable suspended roofs.  
*F. Hernández Rodríguez y A. Martín Navarro.*
- 457-8-114 Acciones térmicas de diseño en puentes cajón de hormigón . . . . . 113**  
 Actions thermiques pour le calcul des ponts en caisson de béton.  
 Thermal actions for the design of concrete box-girder bridges.  
*E. Mirambell y A. Aguado.*
- 457-8-115 Sobre el dimensionamiento y la comprobación, a la luz de la fluencia, de piezas comprimidas esbeltas de hormigón armado y pretensado. Métodos simplificados y normativa española actual . . . . . 157**  
 Sur le dimensionnement et la vérification des éléments comprimés élancés en béton armé et précontraint, compte tenu du fluage. Méthodes simplifiées et normative espagnole actuelle.  
 On the design and checking of reinforced and prestressed concrete compressed slender members, faced to creep. Simplified methods and spanish codes of practice.  
*J. Murcia.*

## NOTA IMPORTANTE A nuestros colaboradores

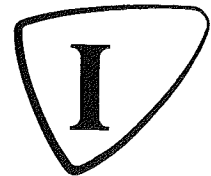
Se nos ha solicitado que, con el fin de que puedan ser incluídas las oportunas referencias bibliográficas en los "Abstracts" que se editan en diferentes países, todos los artículos que se publiquen en Hormigón y Acero vayan acompañados de un resumen, lo más breve posible, (no más de cien palabras) en español, francés e inglés. El título del artículo también debe figurar en los indicados tres idiomas.

Por consiguiente, rogamos encarecidamente a nuestros amables colaboradores tomen buena nota de estas nuevas normas, para su cumplimentación en el momento de preparar los trabajos que nos envíen para su publicación en nuestra Revista.

EL COMITE DE REDACCION

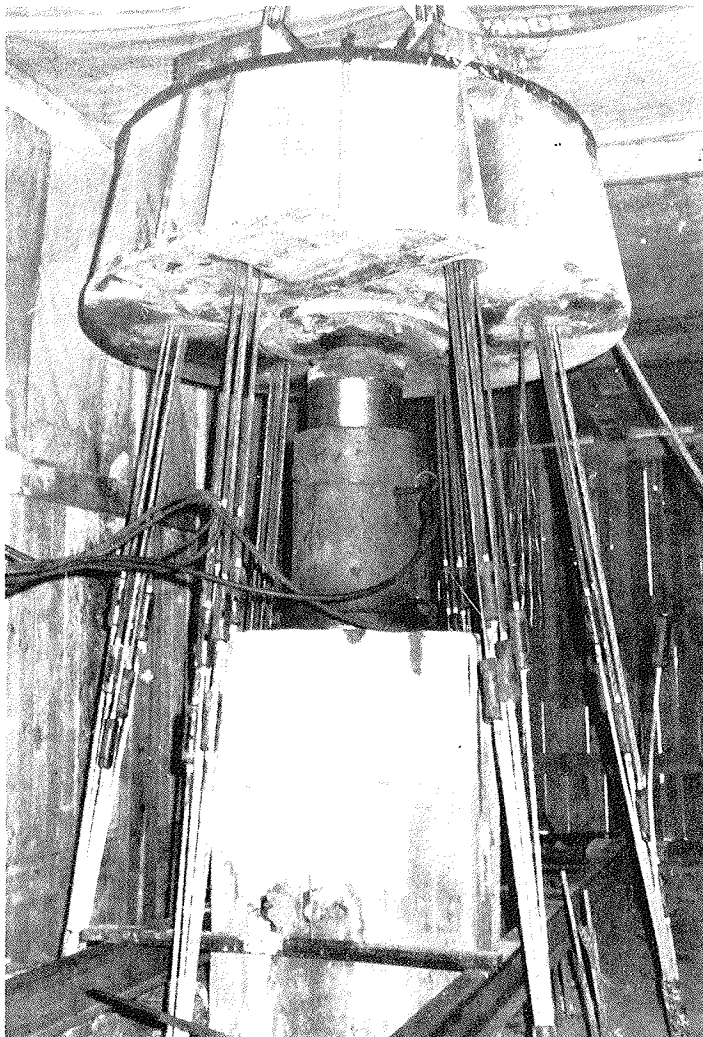
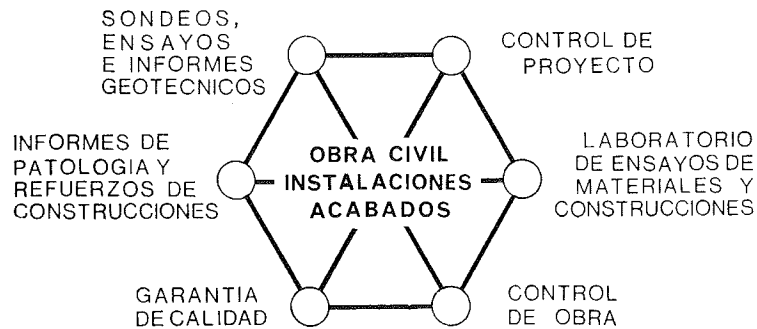
---

# INTEMAC



## INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES

---



Prueba de carga  
de un pilote.

---

### MADRID

Oficinas:  
Monte Esquinza, 30 - 4º D  
MADRID-4  
Tels. (91) 410 51 58/62/66

Laboratorio:  
Carretera de Loeches, 7  
TORREJON DE ARDOZ  
Tels. (91) 675 31 00/04/08

### BARCELONA

Pasaje Busquets, 37  
CORNELLA DE LLOBREGAT  
Tels. (93) 377 43 58/62

---

**RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".**

**ESPAÑA**

ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
ASOCIACION ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.—Barcelona.  
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.  
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislatá (Valencia).  
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.— Oviedo.  
CEYD TECNICA, S.A.— Oviedo  
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT. S.A.".— La Coruña.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.  
COLEGIO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Murcia.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Tarragona.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.— Palma de Mallorca.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE CANARIAS. Departamento de Laboratorios.— Santa Cruz de Tenerife.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
COMERCIAL Y COLOCADORA DE TEXSA, S.A.— Barcelona.  
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL GUADALQUIVIR. Biblioteca.—Sevilla.  
CONTROLEX.—Alicante.  
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ESCOLA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. Universidad Politécnica de Barcelona.— Tarrasa (Barcelona).  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Madrid.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Biblioteca.—Córdoba.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Córdoba.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.— León.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.— Burgos.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.—Manresa (Barcelona).  
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.  
EXCELENTISIMA DIPUTACION DE SALAMANCA.—Salamanca.  
EXCELENTISIMO AYUNTAMIENTO DE GRANADA. Area de Obras Públicas e Infraestructura.—Granada.  
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.

FERROVIAL, S.A.— Madrid.  
FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).  
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.— Madrid.  
GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).  
HORMADISA, S.L.—Puentecesures-Cordeiro (Pontevedra).  
HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.  
INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).  
INGENIERIA Y ECONOMIA DEL TRANSPORTE, S.A.— Centro de Documentación.— Madrid.  
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.  
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.— Madrid.  
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.  
J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).  
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.— Consejería de Fomento.— Valladolid.  
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Servicio de Obras Públicas.—Ávila.  
JUNTA DEL PUERTO DE VILLAGARCIA DE AROSA.—Villagarcía de Arosa (Pontevedra).  
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.  
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).  
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.  
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO.—DIRECCION GENERAL PARA LA VIVIENDA Y ARQUITECTURA, SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA BASICA Y TECNOLOGICA.—Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.  
POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.  
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.  
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.  
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.  
PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.  
RUBIERA, S.A.—León.  
SERINCO, S.A.— Madrid.  
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.  
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.— Gerona.  
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.  
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.  
SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.  
TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).  
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.—Madrid.  
TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Cantabria).  
TELEFONICA.—Departamento Inmobiliario.—Madrid.  
TERRATEST, S.A.—Madrid.  
TIGNUS, S.A.—Valencia.  
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).—Madrid.  
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.  
VIGUETAS MUBEMI.—Torrente (Valencia).



## EXTRANJERO

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).  
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).  
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de Angola).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE. Dirección de Bibliotecas.—Santiago de Chile (Chile).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.—Lima (Perú).  
SARET P.P.B. Cadre Technique.—Le Pontet (France).  
SCIENCE REFERENCE LIBRARY.—Londres (Inglaterra).  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.—Facultad de Ingeniería. Biblioteca. Caracas (Venezuela).  
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).  
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

## MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

\* \* \*

## AVISO IMPORTANTE

### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

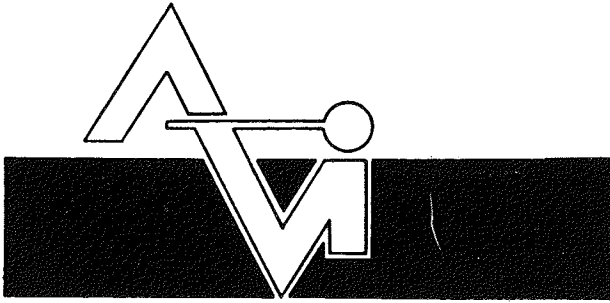
Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

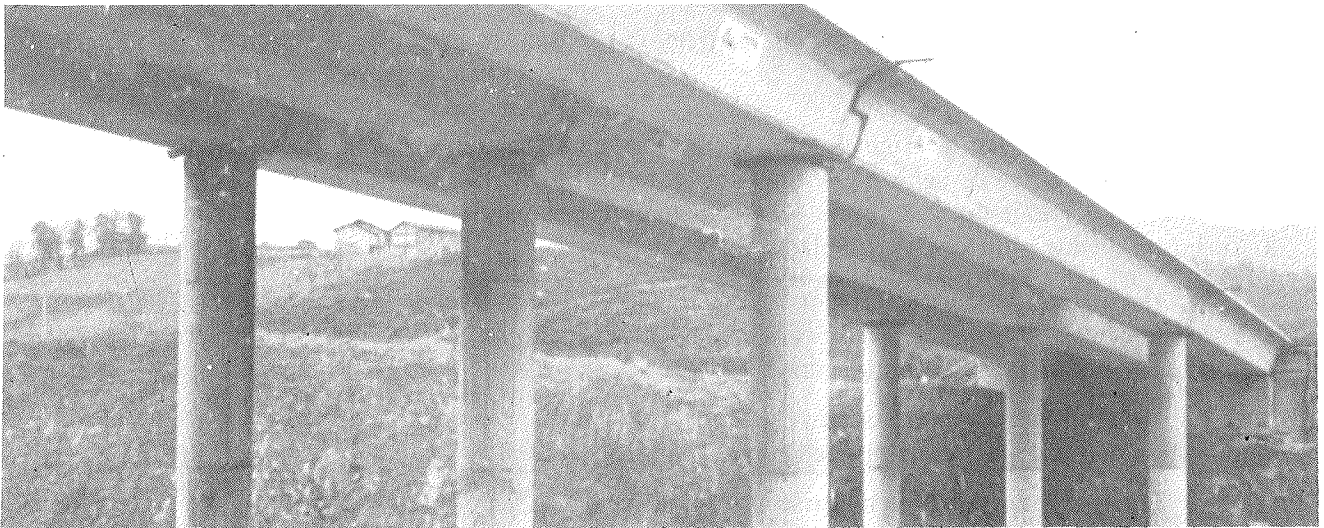


PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



**HUESCA:**

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA

Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON

Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

**MADRID**

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10

Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4 - 8 -  
TORREJON DE ARDOZ

Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

**ZARAGOZA**

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

# **Análisis diferido en segundo orden de piezas comprimidas esbeltas de hormigón. Planteamiento en viscoelasticidad lineal, aproximaciones para considerar la fluencia y conclusiones de cara a la práctica.**

Juan Murcia  
Dr. Ing. de Caminos  
Instituto de Ciencia de Materiales de Barcelona. CSIC

## **INTRODUCCION**

En las estructuras de hormigón en las que deban considerarse los efectos de segundo orden y donde existen acciones mantenidas (cargas permanentes, etc.) de cierta entidad, es preciso introducir en el análisis la fluencia del hormigón, porque ésta puede tener unos efectos apreciables, cuando no importantes.

Tratándose de una propiedad que afecta a la deformabilidad de la estructura en el tiempo, modifica también, por tanto, el equilibrio en segundo orden. Es más, en general, si existen esfuerzos iniciales de segundo orden, los aumenta a lo largo del tiempo. De aquí que pueda llegarse, con el transcurso del mismo, bien al agotamiento de la estructura por el material o bien a la inestabilidad, para niveles inferiores de las acciones en comparación con el caso instantáneo, esto es, sin fluencia.

Dada la interacción que se produce (la fluencia cambia los esfuerzos de la estructura que, a su vez, modifican la fluencia de la misma a lo largo del tiempo) y las leyes que rigen esta propiedad del hormigón, es sabido que, en general, no puede abordarse analíticamente el problema de forma global en el espacio y en el tiempo. Centrándose en el análisis general de estructuras lineales o de barras, ocurre que, en el caso de las hiperestáticas, a la mencionada interacción se une otra, también de tipo espacio-temporal y propia del análisis diferido (por lo que se da asimismo en primer orden), la existente en virtud del mantenimiento en todo instante de las condiciones de compatibilidad (4). En la práctica, como se verá en lo que sigue, las cosas no cambian demasiado aunque se suponga comportamiento lineal del material (tanto instantáneo como diferido) y ni siquiera para la pieza simple isostática.

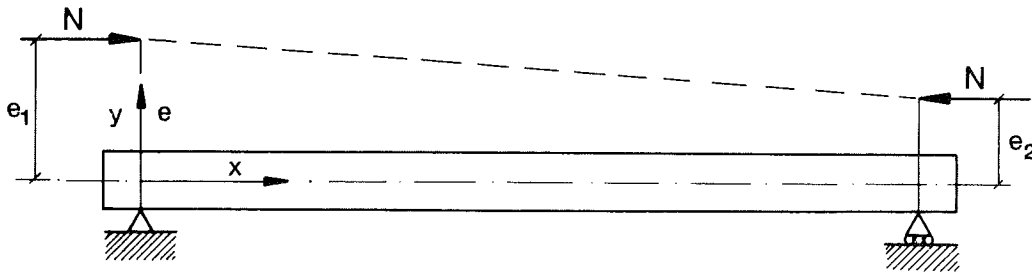
Se requiere, por tanto, un análisis de tipo paso a paso en el tiempo, en el que la fluencia puede introducirse dentro del comportamiento tenso-deformacional del material (5), lo que es más riguroso en teoría, o como acción geométrica virtual en el tiempo (dependiente del comportamiento anterior de la estructura) que se va imponiendo de forma incremental en cada paso del proceso (2).

## ANÁLISIS DE UNA PIEZA SIMPLE CON MATERIAL VISCOELÁSTICO LINEAL

Estudiaremos a continuación la pieza simple isostática en flexocompresión recta, que constituye normalmente la base de partida en la práctica del análisis y, sobre todo, del proyecto de estructuras lineales o de barras con piezas comprimidas esbeltas; al mismo tiempo, se tratará de incidir con ello, de manera concreta, en el fenómeno de la interacción de la fluencia del hormigón con los efectos de segundo orden, de cara a una mejor comprensión del mismo.

Se parte de la hipótesis de comportamiento lineal tanto instantáneo como diferido de la sección, por lo que no se entra a considerar la no linealidad instantánea del material o de la sección (así, en el hormigón armado, por fisuración de la misma y plastificación del hormigón y del acero). Eso significa que el material estructural es supuesto homogéneo, viscoelástico lineal y con igual comportamiento a compresión y a tracción.

Sea la pieza esbelta de luz  $\ell$  representada a continuación. Supondremos la inercia  $I$  y la rigidez,  $K = EI$ , constantes a lo largo de la misma.



Se hace asimismo la hipótesis de que la carga  $N$  se mantiene constante en el tiempo, a partir de su aparición en el instante  $t_0$ .

La función de fluencia del material es  $c(t, t_0) = [1 + \varphi(t, t_0)]/E$ , siendo  $\varphi(t, t_0)$  el coeficiente de fluencia; como se ve, se considera el envejecimiento del material (4), aunque, en principio, no a efectos instantáneos (lo que es habitual en la práctica para el hormigón):  $c(t, t) = c(t_0, t_0) = 1/E$ .

Por descontado, entre los diversos parámetros posibles, nos concentraremos en los momentos flectores, curvaturas y deformada. Es evidente que todas estas variables son funciones del espacio y del tiempo; esto es, respectivamente  $M(x, t)$ ,  $\gamma(x, t)$  e  $y(x, t)$ . No obstante, como se verá más tarde, es posible aquí casi siempre simplificar la notación sin inducir a error, por lo que en lugar de expresar así dichas variables las denotaremos por  $M(x)$ ,  $\gamma(x)$  e  $y(x)$ ; los valores iniciales, esto es, los existentes cuando  $t = t_0$ , los designaremos como  $M_0(x)$ ,  $\gamma_0(x)$  e  $y_0(x)$ . Lo mismo puede decirse respecto del coeficiente de fluencia  $\varphi(t, t_0)$ , por lo que, en general, utilizaremos simplemente  $\varphi$ .

## Planteamiento general

Como es sabido, en una estructura de material como el supuesto aquí, el comportamiento (mecánico-geométrico) de una sección genérica en el tiempo es idéntico al del material; más concretamente, la relación temporal entre el momento  $M$  y la curvatura  $\gamma$ , salvo un factor que es la inercia  $I$ , es la misma que la existente entre la tensión  $\sigma$  y la deformación  $\epsilon$  (4):

$$\gamma(x, t) = \frac{M(x, t_0)}{I} \cdot c(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{M_\tau(x, \tau)}{I} \cdot c(t, \tau) \cdot d\tau$$

Esta ley constituye, al estudiar ya la estructura longitudinalmente, el nexo de unión entre las condiciones de equilibrio y las de compatibilidad, haciendo el mismo papel que la relación tenso-deformacional o ecuación constitutiva del material en el análisis de la sección (3).

En la pieza objeto de análisis, las mencionadas condiciones de equilibrio y de compatibilidad vienen dadas, respectivamente, por:

$$* \quad M(x) = N \cdot e(x) = N \cdot [e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} - y(x)]$$

\*  $y(0) = y(\ell) = 0$ , siendo  $y(x)$ , deformada de la pieza, una función continua tal que  $y''(x) = \gamma(x)$  (con esta última igualdad se supone implícitamente la linealidad geométrica en sentido estricto (3), propia del ámbito de las pequeñas deformaciones, en que esa condición se cumple de forma muy aproximada).

Al combinarse las tres condiciones se llega a una expresión, en términos de la deformada  $y(x)$ , de tipo diferencial (en el espacio) e integral (en el tiempo), cuya solución no es en general abordable analíticamente y, de cualquier modo, no resulta práctica, aunque, en ciertos casos, puede transformarse en una ecuación en derivadas parciales.

Por ello, parece interesante tratar de simplificar la condición del material o ecuación constitutiva de la sección, que es la que introduce la mayor complejidad. En definitiva, es útil buscar aproximaciones en el análisis para el planteamiento de la fluencia. Esto es lo que se hará a continuación.

## Aproximaciones extremas

a)

Una primera puede consistir en reducir la fluencia únicamente a la debida a las tensiones iniciales, esto es, a los  $M_0(x)$ , aunque se sabe que los momentos varían con el tiempo.

Así,

$$\gamma(x) = \frac{M_0(x)}{E \cdot I} \cdot (1 + \varphi) + \frac{M(x) - M_0(x)}{E \cdot I} = \frac{M_0(x)}{K} \cdot \varphi + \frac{M(x)}{K}$$

Si bien la expresión anterior resulta bastante evidente al amparo de la hipótesis hecha, puede comprobarse a partir de la expresión original convenientemente ajustada (esto es, tomando  $c(t, \tau) = c(t, t) = 1/E$ ):

$$\begin{aligned}\gamma(x, t) &= \frac{M(x, t_0)}{I} \cdot c(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{M_r'(x, \tau)}{I} \cdot \frac{1}{E} \cdot d\tau = \\ &= \frac{M(x, t_0)}{E \cdot I} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{M(x, t) - M(x, t_0)}{E \cdot I}\end{aligned}$$

Combinando ahora la anterior con las condiciones de equilibrio y compatibilidad de la pieza, ya vistas, se llega a

$$K \cdot y''(x) + N \cdot y(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right) \cdot (1 + \varphi) - N \cdot y_0(x) \cdot \varphi$$

ecuación diferencial lineal, con condiciones de borde  $y(0) = y(\ell) = 0$ .

### Solución inicial

Antes de pasar a la resolución de esta ecuación diferencial ha de conocerse  $y_0(x)$ , por lo que se ha de considerar entonces en la misma el instante inicial  $t = t_0$ .

Para  $t = t_0$ ,  $\varphi = \varphi(t_0, t_0) = 0$  y la deformada es  $y_0(x)$ , por lo que se tiene

$$K \cdot y_0''(x) + N \cdot y_0(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial (con las mismas condiciones de borde, por supuesto), se llega a

$$y_0(x) = e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} + \frac{e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell - e_2}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x - e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x$$

o, poniéndola de otra forma,

$$y_0(x) = e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} - \frac{e_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) + e_2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell}$$

En esta última expresión se aprecia claramente que, como era de esperar, la deformada es simétrica para  $e_1 = e_2$  y antisimétrica para  $e_1 = -e_2$ . Por otra parte, es también patente que, cuando la carga  $N$  tiende al bien conocido valor de Euler ( $N = \pi^2 \cdot K/\ell^2$ ), las deformaciones se disparan sin límite (rebasando ya incluso el ámbito de las pequeñas deformaciones), resultando así ser la carga tope o crítica de la pieza. Además, puede comprobarse que, para sucesivos valores crecientes de  $N$ , la deformada ve modificarse la forma de su curva (aparte de hacerse ésta más acusada por aumentar las curvaturas), desplazándose así la posición de su valor (o valores) de máximo  $y$ , por tanto, ocurriendo lo mismo para los momentos (una excepción evidente a esto es el caso simétrico).

Por otra parte, es fácil comprobar que la ley de excentricidades iniciales  $e_0(x)$  es una senoide o, lo que es igual, una cosenoide pura. Dicha ley responde a la expresión

$$e_0(x) = e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} - y_0(x) = \frac{e_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) + e_2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell}$$

Al derivar la anterior e igualarla a cero se obtienen posiciones de máximo relativo de la excentricidad, cuya abscisa, que podemos llamar  $x_{m\acute{a}x}$ , cumple así la siguiente condición:

$$e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x_{m\acute{a}x}) = e_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x_{m\acute{a}x}$$

Sea ahora  $x'$  la abscisa que resulta al tomar precisamente como origen tal posición de máximo. Es evidente que  $x = x_{m\acute{a}x} + x'$ . Por consiguiente, se tiene

$$\begin{aligned} e_0(x) &= \frac{e_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x_{m\acute{a}x} - x') + e_2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (x_{m\acute{a}x} + x')}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} = \\ &= \frac{e_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x_{m\acute{a}x}) + e_2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \cdot x_{m\acute{a}x}}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x', \end{aligned}$$

habiendo tenido en cuenta la condición relativa a  $x_{m\acute{a}x}$  en el desarrollo anterior.

Se llega de esta manera a que la ley que define la excentricidad inicial es una cosenoide pura en función de la nueva abscisa  $x'$ , siendo, como es lógico, su coeficiente (esto es, la excentricidad en el nuevo origen,  $e_0(0)$ ) el valor de máximo de la misma.

Es evidente que la ley de curvaturas iniciales  $o$ , lo que es igual, la de  $y_0''(x)$ , así como la de momentos iniciales  $M_0(x)$ , tienen también esta misma propiedad, ya que se verifica que  $y_0''(x) = e_0(x) \cdot N/K = M_0(x)/K$ .

Es interesante destacar, no obstante, la situación singular que se produce para el caso en que  $e_1 = -e_2$ , cuando la carga toma su valor crítico, el de Euler,  $N = \pi^2 \cdot K/\ell^2$ . En efecto, en estas condiciones, la excentricidad  $e(x)$  es

$$e(x) = e_1 \cdot \left[ \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x - \frac{\cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell + 1}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x \right]$$

El límite del coeficiente del segundo término es nulo para dicha carga, lo que indica que para  $e(x)$  se obtiene una cosenoide pura,

$$e(x) = e_1 \cdot \cos \frac{\pi}{\ell} \cdot x$$

alcanzándose precisamente máximos relativos en los extremos (ahora  $x = x'$ ).

Parece así a primera vista que en este caso dicha carga no sería la crítica, pero lo que ocurre es que en realidad la solución vista no es única, puesto que también cumplen la ecuación diferencial la deformada y excentricidad siguientes:

$$y(x) = e_1 \cdot \frac{\ell - 2x}{\ell} - e_1 \cdot \cos \frac{\pi}{\ell} \cdot x + C \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} \cdot x; \quad e(x) = e_1 \cdot \cos \frac{\pi}{\ell} \cdot x - C \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} \cdot x$$

Como el coeficiente  $C$  puede tomar cualquier valor, resulta que la solución está indeterminada, existiendo infinitas (por supuesto, esto ocurre para dicha carga en todos los casos, lo que pasa es que en los demás ya se ha visto que, de todas maneras, la deformada aumenta sin límite al acercarse a ella); todo esto no ha de extrañar ya que, en tales condiciones, la pieza viene a ser equivalente a una de la misma luz y compresión centrada ( $e_1 = e_2 = 0$ ) que, como se sabe, experimenta idéntica situación para la misma carga.

A este respecto, puede comprobarse que la condición de máximo, antes deducida, es ahora

$$\cos \frac{\pi \cdot (\ell - x_{\text{máx}})}{\ell} = -\cos \frac{\pi}{\ell} \cdot x_{\text{máx}}$$

la cual se cumple para cualquier abscisa dentro de la pieza ( $0 \leq x_{\text{máx}} \leq \ell$ ), dado que  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

En definitiva, para este caso en que  $e_1 = -e_2$ , mientras la carga es inferior a la de Euler, los extremos de la pieza son precisamente puntos de máximo relativo de la excentricidad  $y$ , por otro lado, las curvas de  $y(x)$  y  $e(x)$  mantienen una forma antimétrica; pero al alcanzarse dicho valor se produce una indeterminación, el máximo relativo de  $e(x)$  se puede encontrar en cualquier lugar de la pieza y las curvas anteriores ya no son antimétricas.

### *Solución en el tiempo*

Una vez obtenida y estudiada la solución inicial, volvamos ya a la primitiva ecuación diferencial en  $y(x)$ . Esta ecuación queda entonces así:

$$K \cdot y''(x) + N \cdot y(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right) + \\ + N \cdot \varphi \cdot \left( e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x - \frac{e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell - e_2}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x \right)$$

o también, de otra forma,

$$K \cdot y''(x) + N \cdot y(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right) + \\ + N \cdot \varphi \cdot \frac{e_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) + e_2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell}$$



Resolviéndola, con sus condiciones de borde, resulta

$$\begin{aligned}
 y(x) = & e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} + \frac{e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell - e_2}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x - e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x + \\
 & + \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{N}{K}} \ell}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \left[ \frac{e_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell - e_1}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x + \right. \\
 & \left. + \frac{x}{\ell} \cdot (e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) - e_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x) \right] = y_0(x) + \bar{y}(x)
 \end{aligned}$$

o, de otra forma,

$$\begin{aligned}
 y(x) = & e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} - \frac{e_1 \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) + e_2 \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} + \\
 & + \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{N}{K}} \ell}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \left[ e_2 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x + e_1 \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) - \right. \\
 & \left. \frac{e_2 \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) + e_1 \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \right] = y_0(x) + \bar{y}(x)
 \end{aligned}$$

donde, al igual que en la solución inicial  $y_0(x)$ , se refleja con claridad la situación de simetría o antisimetría de la deformada para excentricidades extremas, respectivamente, iguales u opuestas; pero, por el contrario, se aprecia que la ley de excentricidades  $e(x)$  ya no es una cosenoide pura.

La carga crítica continúa siendo la de Euler,  $N_{\text{crit}} = \pi^2 \cdot K/\ell^2$ , puesto que al irse  $N$  acercando a dicho valor la deformada  $y(x)$  toma ya también valores muy grandes (saliéndose incluso, como en el instante inicial, del ámbito de las pequeñas deformaciones).

Por otro lado, la deformada  $y(x)$  se expresa como adición de un término inicial, que es precisamente  $y_0(x)$ , y de otro  $\bar{y}(x)$  que depende del tiempo, pero a través únicamente del coeficiente  $\varphi$ , el cual entra precisamente como multiplicador de un factor que sólo es ya función de la posición o abscisa  $x$ . Siendo esto así, puede pensarse, en principio, en una evolución temporal de la deformada similar a la de  $\varphi$ , pero ello es así únicamente de una manera, diríase, global y habría que matizar algo más al respecto.

Así, para una determinada sección de la pieza, esto es, fijado un valor de  $x$ , la deformada  $y(x)$  no varía en el tiempo igual que  $\varphi$ , ya que puede ocurrir que el segundo término sea de signo contrario al de  $y_0(x)$ , llegándose incluso a cambiar el signo de  $y(x)$  al ir creciendo el propio  $\varphi$ ; en esto resulta especialmente decisiva la relación  $e_2/e_1$ , siendo mayor la tendencia al cambio de sentido de la deformada cuanto más negativo es su valor. Además, la  $y(x)$  no evoluciona por igual en las distintas secciones de la pieza por lo que, aunque la carga  $N$  no varía, la curva de la deformada cambia su forma con el tiempo, por lo que la posición de su valor (o valores) máximo se va desplazando y, como es evidente, esto mismo ocurre también con los momentos (de nuevo, una excepción evidente es el caso simétrico). En cualquier caso, siempre que no se llegue a la carga crítica, al ser asintótico con el tiempo el coeficiente  $\varphi$ , es claro que la deformada y los momentos de la pieza también lo son.

### *Interacción de la fluencia y los efectos de segundo orden*

Analizaremos a continuación, sobre los resultados obtenidos, una cuestión de gran interés conceptual ya mencionada al comienzo: la interacción entre el comportamiento diferido del material, la fluencia del hormigón, y los efectos de segundo orden. A este fin, es pertinente realizar un seguimiento de la progresión de la deformada  $y(x)$  para distintos valores de  $N$ , por ejemplo aumentando desde cero hasta cerca de su valor crítico, al considerar un mismo tiempo de referencia  $t_0$ , lo que es igual, un mismo valor de  $\varphi$ . Con objeto de no complicar sin necesidad los cálculos, se tomará como pauta un caso muy sencillo, el simétrico ( $e_1 = e_2$ ).

Comencemos por analizar lo que ocurre para valores muy pequeños de  $N$ . Si, para simplificar, llamamos  $z$  a  $\sqrt{\frac{N}{K}} \cdot \ell$  se tendrá entonces que  $0 < z \ll 1$ , pudiéndose tomar aproximadamente  $\sin z = z$  y  $\cos z = 1 - z^2/2$ . Es fácil comprobar así que, para el caso elegido, resulta

$$y(x) = y_0(x) \cdot (1 + \varphi)$$

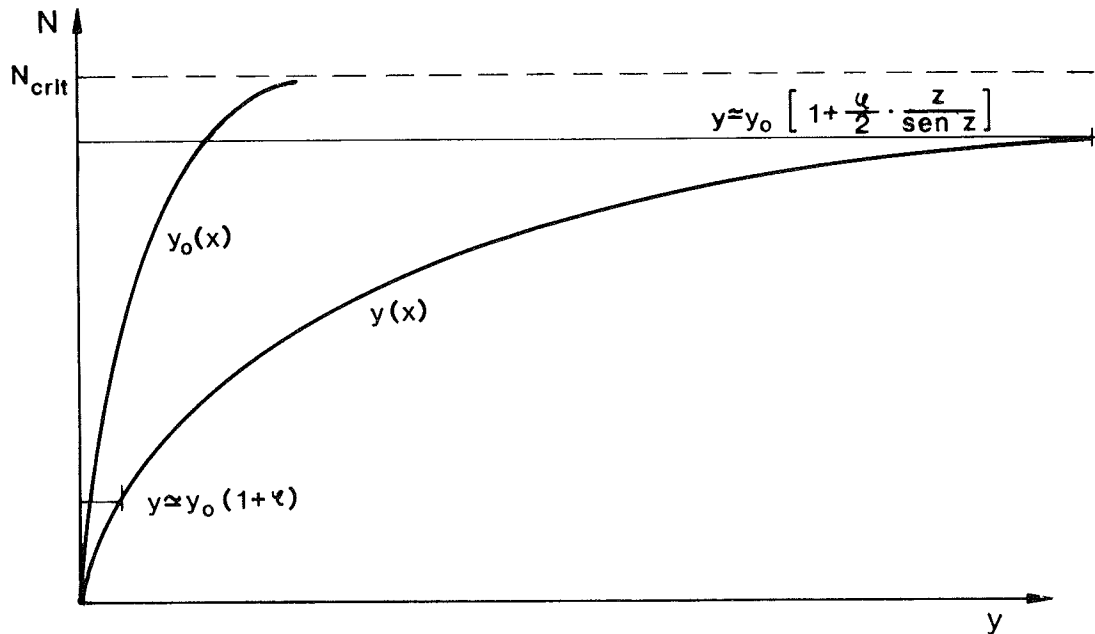
relación lineal idéntica a la que se deriva de un análisis similar en primer orden, lo que indica que la interacción entre la fluencia y los efectos de segundo orden es todavía prácticamente inexistente.

Al ir incrementando el valor de  $N$ , lo anterior deja ya de ser válido y la relación entre las deformadas actual e inicial va aumentando, en razón del crecimiento progresivo del factor  $z/\sin z$ , a partir del valor 1, en el término  $\bar{y}(x)$ . No es posible ahora expresar  $y(x)$ , como antes, como el producto de su valor inicial por un factor; pero, al seguir  $N$  aumentando y aproximándose a la carga crítica, y como consecuencia de la importancia que toman, sobre los demás, aquellos términos donde aparece  $\sin z$  en el denominador dentro de la expresión general de la deformada, se va perfilando para  $y(x)$  una progresión hacia una forma límite de esta clase:

$$y(x) = y_0(x) \cdot [1 + (\varphi/2) \cdot (z/\sin z)]$$

donde, por cierto, el propio factor que afecta al valor inicial, que ahora ya no sólo depende del tiempo (función de  $\varphi$ ) sino también de la carga (función de  $z$ ), crece asimismo cada vez más rápidamente y sin límite. De esta forma, y a diferencia de lo que ocurría para cargas muy pequeñas, la interacción entre la fluencia y los efectos de segundo orden es bien patente y va tomando una importancia creciente conforme se acerca la carga a su valor crítico.

Esta interacción se manifiesta en definitiva en una progresiva no linealidad de los resultados al crecer  $N$ ; si para la propia  $y_0(x)$  se sabe que esto ya sucede, cuando entra el tiempo, y la fluencia por tanto, en el análisis, esta no linealidad se ve multiplicada por un factor a su vez progresivamente no lineal: en conclusión, la no linealidad respecto a la carga  $N$ , propia del análisis en segundo orden, se ve magnificada por la fluencia y todo ello de forma progresiva al aproximarse a la carga crítica.



En casos distintos al tomado anteriormente como referencia, también se manifiesta en los resultados, por supuesto, este mismo fenómeno interactivo, aunque la deformada pueda incluso cambiar de sentido respecto a la inicial.

### Comentarios finales

Es evidente la posibilidad de continuar el análisis de los resultados que ofrece esta aproximación, extrayendo así conclusiones adicionales, pero ello redundaría muy probablemente en distracción y perjuicio de los objetivos básicos de este trabajo, por lo que se optará por pasar ya al estudio de una nueva aproximación.

A modo de conclusión, por ello, puede indicarse que, si bien se trata de una de las más sencillas que pueden plantearse analíticamente dentro del análisis diferido en segundo orden, la anterior aproximación ofrece ya unos resultados que plasman con claridad la interacción no lineal de la fluencia con los efectos de segundo orden, con la limitación de que no inciden sobre la carga crítica, la cual permanece inalterada con respecto al análisis instantáneo. Debe destacarse, además, que la misma proporciona en la pieza estudiada, de una manera global, cotas inferiores para los valores de las variables  $|y(x, t)|$  y  $M(x, t)$ , puesto que precisamente estos últimos crecen, globalmente también, en el tiempo y, sin embargo, sólo se toma en ella la fluencia debida a los momentos iniciales.

b)

Si, como contrapartida a la anterior aproximación, realizamos ahora un planteamiento de la fluencia tal que ésta afecte sólo a las tensiones actuales (o existentes en el instante  $t$  considerado), en lugar de hacerlo a las iniciales, se tiene, en términos de sección,

$$\gamma(x) = \frac{M(x)}{E \cdot I} \cdot (1 + \varphi) = \frac{M(x)}{K} \cdot (1 + \varphi)$$

por lo que, juntamente con las restantes condiciones del análisis para la pieza, se llega a

$$K \cdot y''(x) + N \cdot y(x) \cdot (1 + \varphi) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right) \cdot (1 + \varphi)$$

o bien, llamando  $K'$  a  $K/(1 + \varphi)$ ,

$$K' \cdot y''(x) + N \cdot y(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right)$$

ecuación diferencial formalmente idéntica a la planteada antes para  $y_0(x)$ , donde  $K'$  es función de  $\varphi$  y, por tanto, del tiempo y va decreciendo con éste.

En consecuencia, la expresión de la deformada en el tiempo es

$$y(x) = e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} - \frac{e_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K'}} (\ell - x) + e_2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K'}} x}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K'}} \ell}$$

cuya forma, lógicamente, también es idéntica a la de  $y_0(x)$  que se obtuvo en el análisis instantáneo inicial, por lo que se mantienen en principio las características allí comentadas.

Como ahora la rigidez  $K'$  es una función de  $\varphi$ , lo primero que se aprecia es que la carga crítica,  $N_{\text{crit}} = \pi^2 \cdot K'/\ell^2 = \pi^2 \cdot K/[\ell^2 \cdot (1 + \varphi)]$ , depende del tiempo, reduciéndose a lo largo del mismo; teniendo en cuenta los valores máximos que puede alcanzar  $\varphi$  en el hormigón, resulta que la carga crítica puede llegar a ser, para dicho material y según esta aproximación, del orden de la tercera o la cuarta parte de la correspondiente al instante inicial. Pero, además, de la variación de  $K'$  se deriva, aunque la carga  $N$  sea constante, la transformación de la forma de curva  $y(x)$  con el tiempo y, por tanto, el desplazamiento de la posición de su valor (o valores) de máximo, así como de la ley de momentos (el caso simétrico es, una vez más, una excepción a esto).

Con la disminución de  $K'$ , no obstante y al igual que en la aproximación anterior, aumentan con el tiempo globalmente las flechas y los momentos respecto a sus valores iniciales y, siempre que no se alcance la carga crítica, al ser asintótico con el tiempo el coeficiente  $\varphi$  lo son también la deformada y los momentos de la pieza. Por otro lado, se detecta también la interacción no lineal, progresiva con  $N$ , entre la fluencia y los efectos de segundo orden, aunque no se entrará ahora de nuevo en desarrollos cuantitativos para comprobarlo.

En definitiva, esta aproximación para la fluencia es muy sencilla, incide ya en el valor de la carga crítica, que va disminuyendo con el tiempo hasta llegar a un cierto límite, y sobrestima en conjunto los efectos de la fluencia del hormigón en la pieza, proporcionando

globalmente cotas superiores para los valores de las variables  $|y(x, t)|$  y  $M(x, t)$ , precisamente porque estos últimos crecen también en sentido global, a lo largo del tiempo; en efecto, la fluencia se introduce como si los momentos del instante  $t$  considerado hubieran sido constantes desde  $t_0$ , esto es, como si se hubiesen dado las condiciones de un caso "fluencia" (4); se explica así también el valor obtenido para la rigidez  $K'$ , puesto que, como es sabido, en tal situación el módulo de deformación equivalente, para un análisis formalmente instantáneo, es  $E' = E/(1 + \varphi)$ .

### Aproximaciones más ajustadas

c)

A la vista de que las dos aproximaciones anteriores, relativas a tomar la fluencia debida sólo, respectivamente, a los esfuerzos iniciales y a los actuales, representan los límites entre los que se mueve globalmente la solución real, cabe plantearse una aproximación intermedia en que la fluencia corresponda a una media ponderada de ambos esfuerzos:

$$\gamma(x) = \frac{M(x) \cdot \delta \cdot \varphi + M_0(x) \cdot (1 - \delta) \cdot \varphi}{E \cdot I} + \frac{M(x)}{E \cdot I}$$

esto es,

$$\gamma(x) = \frac{M(x)}{K} \cdot (1 + \delta \cdot \varphi) + \frac{M_0(x)}{K} \cdot (1 - \delta) \cdot \varphi$$

Combinando, como siempre, la anterior con las condiciones de equilibrio y compatibilidad de la pieza, resulta la ecuación diferencial siguiente:

$$K \cdot y''(x) + N \cdot (1 + \delta \cdot \varphi) \cdot y(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right) \cdot (1 + \varphi) - \\ - N \cdot y_0(x) \cdot (1 - \delta) \cdot \varphi$$

donde  $y_0(x)$  es una vez más la deformada inicial, independiente de la aproximación tomada.

Su resolución es, por supuesto, más compleja que la que se requiere en la primera aproximación, y lleva finalmente, si se define  $K^*$  como  $K/(1 + \delta \cdot \varphi)$ , a

$$y(x) = e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} + \\ + \frac{\delta - 1}{\delta} \cdot \left[ \frac{e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \cdot \ell - e_2}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x - e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K}} x \right] + \\ + \frac{1}{\delta} \cdot \left[ \frac{e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K^*}} \ell - e_2}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K^*}} \ell} \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K^*}} x - e_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{N}{K^*}} x \right]$$

Al examinar la forma de  $y(x)$ , se comprueba con facilidad que, llamando  $y^*(x)$  a la solución de la ecuación diferencial

$$K^* \cdot y''(x) + N \cdot y(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right)$$

esto es, la misma que resulta para el instante inicial pero con otra rigidez, la expresión de  $y(x)$ , obtenida un poco más arriba, puede ponerse en la forma

$$y(x) = \frac{\delta - 1}{\delta} \cdot y_0(x) + \frac{1}{\delta} \cdot y^*(x)$$

por lo que la solución de esta aproximación ponderada es una combinación lineal de la solución inicial (o del análisis instantáneo para  $t = t_0$ ) y de la solución formalmente idéntica a la anterior, pero con una rigidez  $K^*$  que depende de  $\delta$  y de  $\varphi$  y, por tanto, del tiempo.

Es obvio que el coeficiente  $\delta$  en la práctica tendrá un valor tal que  $0 < \delta < 1$ . No obstante, y a título de curiosidad, en el planteamiento de esta aproximación se aprecia que, para los valores extremos 0 y 1, se obtienen precisamente las dos anteriores, por lo que la última formulación de  $y(x)$  debería coincidir, al sustituir en ella dichos valores, con las soluciones obtenidas en el apartado precedente. Y así ocurre, en efecto, siendo evidente en el caso  $\delta = 1$ , pero no tanto para  $\delta = 0$ , puesto que, al depender  $y^*(x)$  de  $\delta$ , hay que calcular el límite de la expresión completa para  $\delta \rightarrow 0$ ; éste no es  $y_0(x)$ , como quizá podría pensarse a primera vista, sino precisamente la solución de la primera aproximación que, como se vio allí, puede ponerse si se desea en la forma  $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$ , entrando el coeficiente  $\varphi$  como factor en el segundo término.

Vista la solución, la cuestión que ahora se plantea para esta aproximación es el valor que debería tomar el coeficiente  $\delta$  o, lo que es igual, los pesos relativos de la ponderación inicial, de lo que todavía no se ha dicho nada. De entrada, parece evidente que ello depende de la forma concreta en que evolucionan los momentos, desde el instante inicial al actual; pero, en la práctica, tratar de ajustar exactamente el coeficiente  $\delta$  llevaría a conocer la solución exacta del problema, lo que no tiene sentido.

#### *Ajuste de la ponderación*

En este punto, sin embargo, cabe una salida a base de introducir una nueva simplificación. Las soluciones que nos ofrecen las dos primeras aproximaciones estudiadas, las cuales sabemos que (por su planteamiento de la fluencia) son límites, corresponden a deformadas que crecen globalmente y, al mismo tiempo, de forma asintótica; otro tanto sucede, en consecuencia, con los momentos. Siendo así, puede suponerse que las curvaturas y, en general, las deformaciones en la pieza, crecen de manera proporcional al coeficiente de fluencia  $\varphi$  (también creciente y asintótico en materiales viscoelásticos como el hormigón); esto, claro está, no es exacto, aunque sí aproximado de forma global, y permite resolver la cuestión planteada de manera bastante razonable y sencilla, puesto que tales procesos tenso-deformacionales en el tiempo, para materiales viscoelásticos lineales, resultan ser bien conocidos (1, 6).

En efecto, el planteamiento de esta aproximación ponderada para introducir la fluencia, visto más arriba, es lo que precisamente se obtiene cuando se parte de la formulación

tenso-deformacional correspondiente al llamado módulo efectivo del material, planteado para el hormigón (1). Si  $E''(t, t_0)$  es dicho módulo y sólo se consideran deformaciones de tipo tensional, esta formulación es, por definición, la siguiente (1, 6):

$$\sigma(t) - \sigma(t_0) = E''(t, t_0) \cdot \left[ \epsilon(t) - \epsilon(t_0) - \frac{\sigma(t_0)}{E} \cdot \varphi(t, t_0) \right]$$

o, lo que es igual,

$$\sigma(t) - \sigma(t_0) = E''(t, t_0) \cdot \left\{ \epsilon(t) - \frac{\sigma(t_0)}{E} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] \right\}$$

Al trasponerla ya a términos de sección, tal como se ha hecho antes repetidas veces, dicha formulación se convierte en

$$\gamma(x) = \frac{M(x) - M_0(x)}{E'' \cdot I} + \frac{M_0(x)}{E \cdot I} \cdot (1 + \varphi)$$

que, expresando  $E''$  en la forma clásica (1, 6),  $E'' = E/(1 + \chi \cdot \varphi)$ , se convierte en

$$\gamma(x) = \frac{M(x) - M_0(x)}{E \cdot I} \cdot (1 + \chi \cdot \varphi) + \frac{M_0(x)}{E \cdot I} \cdot (1 + \varphi)$$

esto es,

$$\gamma(x) = \frac{M(x)}{K} \cdot (1 + \chi \cdot \varphi) + \frac{M_0(x)}{K} \cdot (1 - \chi) \cdot \varphi$$

lo que coincide exactamente con el planteamiento ponderado de la fluencia si se sustituye  $\delta$  por  $\chi$ .

El módulo  $E''$ , para la hipótesis en que las deformaciones evolucionan proporcionalmente al coeficiente de fluencia  $\varphi$ , tiene un valor perfectamente definido, dependiente del tiempo, ocurriendo, por ello, lo mismo para  $\chi$  (1, 6):

$$E'' = \frac{E - r}{\varphi} \quad ; \quad \chi = \frac{E}{E - r} - \frac{1}{\varphi}$$

donde  $r$ , en realidad  $r(t, t_0)$ , es la función de relajación asociada a la de fluencia (4), verificándose que  $\chi < 1$ , a excepción de una situación límite que se comentará más adelante (6).

Por tanto, el coeficiente  $\delta$  que figura en el planteamiento original, al ser idéntico a  $\chi$ , queda también claramente definido y es función del tiempo, con lo que se concluye así todo lo relativo a esta aproximación ponderada de la fluencia, en cuanto a su completa definición analítica.

### *Comentarios finales*

Puede apreciarse, por una parte, la mayor complejidad matemática de esta aproximación respecto a las dos ya estudiadas, que, como se ha visto, quedan de algún modo englobadas en ella. La carga crítica se reduce en relación a la instantánea,

$$N_{\text{crit}} = \pi^2 \cdot K / [\ell^2 \cdot (1 + \delta \cdot \varphi)],$$

quedando en una situación intermedia entre las de ambas aproximaciones, las cuales proporcionaban globalmente resultados extremos en relación a la solución exacta. En lo que respecta a otras características de la solución, y al tratarse de una combinación lineal de las que resultan en la anterior y en la instantánea, puede recordarse lo indicado en su momento dentro del apartado que precede (no obstante, la excentricidad ya no es en general una cosenoide pura).

d) A la luz de todo lo anterior, es posible, entre otras que cabría plantear, una aproximación adicional, muy sencilla por otra parte: la que resulta precisamente de la formulación tenso-deformacional relativa al módulo global equivalente  $E^*$  (6):

$$\sigma(t) = E^*(t, t_0) \cdot \epsilon(t)$$

Una vez más, dicha formulación, en términos de sección, es

$$\gamma(x) = \frac{M(x)}{E^* \cdot I} = \frac{M(x)}{K^*}$$

lo que conduce a una ecuación diferencial similar a la de la segunda aproximación, esto es,

$$K^* \cdot y''(x) + N \cdot y(x) = N \cdot \left( e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} \right)$$

idéntica también formalmente a la del análisis instantáneo pero con una rigidez,  $K^* = E^* \cdot I$ , que depende asimismo del tiempo, como  $K'$ , aunque con un valor diferente.

En efecto, si se mantiene la hipótesis anterior, relativa a la proporcionalidad de las deformaciones con  $\varphi$ , y se pone el módulo  $E^*$  en la forma  $E/(1 + \alpha \cdot \varphi)$ , el coeficiente  $\alpha$  es, salvo una situación límite que se examinará más tarde, menor que la unidad en estos procesos temporales con deformabilidad creciente (6); la rigidez,  $K^* = K/(1 + \alpha \cdot \varphi)$ , es ahora por ello superior a la de la segunda aproximación,  $K' = K/(1 + \varphi)$ .

La deformada  $y(x)$  es, por tanto,

$$y(x) = e_1 \cdot \frac{\ell - x}{\ell} + e_2 \cdot \frac{x}{\ell} - \frac{e_1 \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K^*}} (\ell - x) + e_2 \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{N}{K^*}} x}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K^*}} \ell}$$

que tiene, por supuesto, una forma idéntica a la inicial  $y_0(x)$  y a la obtenida en la segunda aproximación, por lo que las características mencionadas en esos puntos siguen en principio vigentes. Se aprecia asimismo una similitud formal con la solución (si bien truncada por eliminación del primer término) de la aproximación ponderada anterior, pero con resultados diferentes puesto que los coeficientes  $\alpha$  y  $\delta$  son distintos; así, en general se cumple que  $\delta = \chi < \alpha$  (6).



Resulta así una aproximación de gran sencillez y que proporciona un ajuste bastante razonable, por cuanto tiene en cuenta, como la inmediatamente anterior de tipo ponderado, el hecho de que los esfuerzos son variables en el tiempo. Así, al igual que ésta y en lo que se refiere a la carga crítica, se obtiene también un valor intermedio entre las relativas a las dos primeras, esto es,  $N_{crit} = \pi^2 \cdot K / [\ell^2 \cdot (1 + \alpha \cdot \varphi)]$ .

Por lo demás, se mantienen cualitativamente otros resultados estudiados más arriba para las diversas soluciones. A título de ejemplo, y como sucede también en la segunda aproximación, puede apreciarse cómo, aun siendo la carga  $N$  constante, la forma de  $y(x)$  varía con  $\varphi$  al transcurrir el tiempo, de la misma manera que, como se vio en su momento, lo hace la deformada inicial  $y_0(x)$  con  $N$  para una serie de valores crecientes de dicha carga; al tener ambas variables expresiones idénticas y estar siempre en ellas la carga  $N$  y la rigidez en la forma  $\sqrt{N/K}$  o  $\sqrt{N/K^*}$ , es lo mismo que la primera no varíe y la segunda disminuya o que, por el contrario, la primera tome valores en aumento y la segunda sea constante; por otra parte, la ley de excentricidades  $e(x)$ , y con ella las de momentos y curvaturas, se mantienen siempre como cosenoides puras pero evolucionan en el tiempo, cambiando así también, en general, su forma y, con ella, la posición de sus valores máximos.

Existe, no obstante, en esta aproximación una contrapartida a sus ventajas, antes enunciadas: el módulo  $E^*$ , dentro de la misma hipótesis simplificativa para la forma de evolución de las deformaciones, no sólo es función del tiempo sino que, en general, depende también de otro parámetro  $\lambda$ , tal que  $1 + \lambda \cdot \varphi = \epsilon(t)/\epsilon(t_0)$ , ligado pues a la relación entre deformaciones actuales e iniciales (6); es necesario, por ello, ajustar el valor del módulo, lo cual es, por otra parte, perfectamente posible, como se verá a continuación.

#### *Ajuste del módulo $E^*$*

Para calcular el coeficiente  $\lambda$  debe obtenerse, por tanto, la relación  $y''(x)/y_0''(x)$ , si bien de una manera global, como se ha venido insistiendo anteriormente, lo que matemáticamente puede lograrse a través de los valores medios. Evaluaremos, entonces, las integrales de ambas variables a lo largo de la pieza:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell y_0''(x) \cdot dx &= \frac{N}{K} \cdot \int_0^\ell \frac{e_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} (\ell - x) + e_2 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} x}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot dx = \\ &= \sqrt{\frac{N}{K}} \cdot (e_1 + e_2) \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \end{aligned}$$

Como, en este caso,  $y(x)$  tiene la misma forma que  $y_0(x)$ , es evidente que

$$\int_0^\ell y''(x) \cdot dx = \sqrt{\frac{N}{K^*}} \cdot (e_1 + e_2) \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{K^*}} \ell}{\operatorname{sen} \sqrt{\frac{N}{K^*}} \ell}$$

De ahí que, merced a la definición de  $\lambda$  vista antes, pero referida ya a curvaturas de sección en valores medios, se tenga

$$1 + \lambda \cdot \varphi = \frac{\int_0^\ell y''(x) \cdot dx}{\int_0^\ell y_0''(x) \cdot dx} =$$

$$= \sqrt{1 + \alpha \cdot \varphi} \cdot \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{K^*}} \ell}{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \frac{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell}{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K^*}} \ell}$$

Por otra parte, el valor del módulo  $E^*$  (6) es

$$E^* = \frac{E}{1 + \alpha \cdot \varphi} = \frac{\lambda \cdot E + (1 - \lambda) \cdot r}{1 + \lambda \cdot \varphi}$$

de donde se obtiene

$$1 + \lambda \cdot \varphi = (1 + \alpha \cdot \varphi) \cdot \frac{r \cdot (1 + \varphi) - E}{r \cdot (1 + \alpha \cdot \varphi) - E \cdot [1 - (1 - \alpha) \cdot \varphi]}$$

Al igualar las dos expresiones independientes anteriores, funciones de  $\alpha$  y  $\lambda$ , se elimina este último parámetro y resulta

$$\sqrt{1 + \alpha \cdot \varphi} \cdot \frac{r \cdot (1 + \varphi) - E}{r \cdot (1 + \alpha \cdot \varphi) - E \cdot [1 - (1 - \alpha) \cdot \varphi]} =$$

$$= \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N(1 + \alpha \cdot \varphi)}{K}} \ell}{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \frac{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell}{\text{sen} \sqrt{\frac{N(1 + \alpha \cdot \varphi)}{K}} \ell}$$

expresión trascendente de donde se obtiene  $1 + \alpha \cdot \varphi$  y, directamente a continuación,  $E^*$ .

Se llega así a la definición completa de la aproximación que ahora se estudia. No obstante, antes de concluir con ella, es interesante añadir algunos aspectos de interés, especialmente práctico.

#### *Aplicación al análisis diferido implícito (formalmente instantáneo)*

Una característica esencial de esta aproximación es que, siendo de carácter ajustado (en el sentido antes indicado), se plantea a partir de un módulo global equivalente o, lo que viene a ser igual, de una formulación idéntica formalmente a la del análisis instantáneo (cosa que también ocurre por cierto en la segunda aproximación, con la diferencia de que, como se vio, no es tan ajustada). Ello le confiere, entre otras, la posibilidad de servir de base a un

análisis no lineal diferido de tipo simplificado, realizado con un diagrama tensión-deformación modificado (al multiplicar las deformaciones del original por un coeficiente mayor que la unidad) y procediendo como si fuese un análisis instantáneo (6).

Al tratarse este procedimiento de una extrapolación del análisis lineal al no lineal, en la que se pasa, en el diagrama tensión-deformación, de un módulo constante (en realidad un módulo de elasticidad) a uno variable, pero englobando ya en ambos el efecto de la fluencia, resulta lógico mantener en el análisis no lineal la relación entre deformaciones, considerando fluencia y no haciéndolo, del análisis lineal o, en definitiva, la relación entre el módulo real instantáneo y el global equivalente; de ahí que el factor magnificador de las deformaciones en el diagrama original sea precisamente  $1 + \alpha \cdot \varphi$  (6).

#### *Situaciones en que el envejecimiento es despreciable*

Otra cuestión, que resulta quizá especialmente adecuada para ser abordada aquí, es la relativa a la incidencia del instante inicial  $t_0$  en el análisis de la pieza, de la cual no se ha tratado hasta el momento. Este parámetro entra a través del coeficiente  $\varphi$ , que en realidad es  $\varphi(t, t_0)$ , introduciendo, como se indicó al comienzo, el fenómeno del envejecimiento diferido del material en cualquiera de las aproximaciones estudiadas. Lo mismo ocurre para ésta, por supuesto, pero al estar planteada precisamente a partir del módulo global equivalente  $E^*$ , puede afirmarse en el caso del hormigón que, para valores importantes de  $t_0$  e instantes finales o cercanos a ellos ( $t \rightarrow \infty$ ), situación en que el envejecimiento del mismo es ya despreciable, el coeficiente  $\alpha$  toma el valor 1 en la práctica (6), por lo que esta aproximación viene a coincidir, entonces y como es evidente, con la segunda; pero también ocurre lo mismo con la anterior ponderada ya que, en tales circunstancias,  $\chi$  toma el mismo valor (6), resultando así  $\delta = \chi = \alpha = 1$ .

## CONCLUSION

En este trabajo se ha realizado un estudio, en segundo orden y en el tiempo, de la pieza simple esbelta con material viscoelástico lineal, que puede representar al hormigón en situación de servicio, sometida a flexocompresión recta, con compresión  $N$  constante y excentricidades extremas cualesquiera, mediante una serie de planteamientos simplificados para la introducción de la fluencia en el análisis:

- fluencia debida a momentos iniciales,
- fluencia debida a momentos actuales,
- fluencia ponderada sobre los anteriores,
- fluencia considerada mediante el módulo global equivalente.

Se ha llegado con ello a otras tantas aproximaciones al comportamiento de la misma en tales condiciones, lo que lleva a un conocimiento bastante ajustado en conjunto del problema. Así, se detectan una serie de fenómenos, por supuesto no totalmente independientes, tales como

- la interacción no lineal, y progresiva con la carga axial, entre la fluencia del material y los efectos de segundo orden,
- la reducción paulatina con el tiempo, hasta un cierto límite, de la carga tope o crítica de la pieza,

- la evolución con el tiempo de las formas que toman la deformada y la ley de momentos y, por tanto y en general, el desplazamiento de posición de sus valores de máximo, llegando a estabilizarse cuando lo hace la fluencia.

Resulta destacable el hecho de que las cuatro aproximaciones estudiadas están, al menos formalmente, relacionadas entre sí, dándose la circunstancia de que casi todas vienen a coincidir en el límite cuando el envejecimiento del hormigón es ya despreciable.

A efectos más cuantitativos, las dos últimas aproximaciones resultan ser las más ajustadas, por tener en cuenta el hecho de que los esfuerzos son variables en la introducción de la fluencia. De cara a la práctica se destaca quizá la segunda de éstas, basada en el módulo global  $E^*$ , por su gran sencillez, resultando ser en excentricidades una cosenoide pura, puesto que es formalmente idéntica a la del análisis instantáneo; esto último supone una ventaja adicional ya que por ello puede tomarse como base, al considerar ya la no linealidad del material, para ciertos tipos simplificados de análisis, formalmente instantáneos, donde la fluencia se introduce mediante un diagrama  $\sigma - \epsilon$  modificado (6).

De cualquier modo, debe subrayarse que, precisamente por la manifiesta no linealidad del problema, en general (pero, sobre todo, para cargas importantes en relación a las críticas teóricas que resultan de las aproximaciones más ajustadas), cuando se desee una gran exactitud se impone un análisis más riguroso de tipo paso a paso (5). Y ello, especialmente en la medida en que la situación real se aleje de las hipótesis tomadas aquí, como, por ejemplo, comportamiento no lineal (instantáneo y diferido) del material, fisuración del mismo, presencia de otros materiales con distintas propiedades (como supone la existencia de armaduras de acero u otro material), etc.; factores que, en su mayoría, magnifican aún más la no linealidad de manera global, por lo que los errores introducidos en análisis simplificados pueden llegar a ser muy importantes.

En el caso en que se produce fisuración y existen armaduras, propio del hormigón armado, es posible, no obstante, una simplificación que permite mantener, de manera razonable, la linealidad del comportamiento de la sección tal como se ha estudiado más arriba (4): puede suponerse, a efectos de obtener la inercia  $I$ , una sección eficaz correspondiente a la parte inicialmente comprimida en la misma y a las armaduras, homogeneizándolas mediante el coeficiente de equivalencia (relación entre su módulo de elasticidad y  $E^*$ ); como este último es variable con el tiempo, la inercia así calculada también lo es (si bien de forma normalmente poco acusada, en hormigón armado, al ser las cuantías de armadura generalmente pequeñas) y lo mismo la rigidez  $E^* \cdot I$ , esta vez a través de ambos factores. Se aprecia que este procedimiento lleva ya implícitamente al uso de la última aproximación, lo que podría agregarse a sus ventajas de tipo práctico.

En definitiva, para la situación más general posible, el análisis se aborda mediante un proceso de tipo paso a paso en el tiempo, de forma numérica en la práctica (en este análisis puede tener interés la utilización del módulo efectivo  $E''$ , citado más arriba (1, 6)); pero si se opta por una simplificación que elimine el proceso en el tiempo, a través de un análisis instantáneo con diagrama  $\sigma - \epsilon$  modificado, el factor multiplicador de las deformaciones debería ser  $1 + \alpha \cdot \varphi$ , ajustado tal como se vio en la última aproximación. En caso de que existan también acciones de tipo instantáneo  $q$ , y no se deseen separar en el análisis de las de carácter permanente  $g$ , se podría multiplicar el coeficiente  $\alpha$  por el factor  $g/(g + q)$ ; o, más correctamente, por idéntica relación entre las respectivas fuerzas axiales, aunque esto representa un ajuste lineal que, se sabe, dista de ser cierto en general.

## REFERENCIAS

1. BAŽANT, Z.P. Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method Journal of the American Concrete Institute, Vol. 69. Detroit, April 1972.
2. MURCIA, J. Análisis en el tiempo de estructuras hiperestáticas de hormigón pretensado. Monografía n° 325 del Instituto "Eduardo Torroja", CSIC. Madrid, 1975.
3. MURCIA, J. Reflexiones sobre las bases del análisis de estructuras. Revista de Obras Públicas n° 3178. Madrid, 1980.
4. MURCIA, J. Estudio analítico en el tiempo de estructuras de hormigón armado y pretensado por retracción y fluencia. Monografía n° 363 del Instituto "Eduardo Torroja", CSIC. Madrid, 1980.
5. CAROL, I. y MURCIA, J. Análisis paso a paso en el tiempo de estructuras reticulares planas de hormigón armado. Hormigón y Acero n° 160. Madrid, 1986.
6. MURCIA, J. Módulo de deformación global equivalente del hormigón. Aplicación al análisis de los efectos de la fluencia en el tiempo. Hormigón y Acero n° 164. Madrid, 1987.

## RESUMEN

En este artículo se realiza un análisis diferido en segundo orden de una pieza simple esbelta con material viscoelástico lineal, aplicable al hormigón en principio, en flexocompresión y excentricidades extremas cualesquiera, mediante varias hipótesis en los efectos de la fluencia (debida a momentos iniciales, a momentos actuales, ponderada para ambos, a través del módulo global equivalente  $E^*$ ); se derivan así diversas aproximaciones, que detectan fenómenos de interés (interacción no lineal entre fluencia y efectos de segundo orden, reducción de la carga crítica hasta que se estabiliza la fluencia, etc.), las cuales se analizan y comparan entre sí.

Entre las más ajustadas (que suponen ya los esfuerzos variables con el tiempo) se destaca la basada en el módulo  $E^*$ , muy sencilla y formalmente idéntica al análisis instantáneo, que sirve de base para evitar el análisis paso a paso, en que la fluencia se introduce mediante un diagrama  $\sigma - \epsilon$  modificado por el factor  $1 + \alpha \cdot \varphi$ ; es posible su utilización práctica para el hormigón armado, manteniendo la sección lineal pero considerando la fisuración y las armaduras, mediante el concepto de sección eficaz referida al módulo  $E^*$ .

Se destaca, en fin, que debido a la gran no linealidad del problema, más allá de las hipótesis tomadas aquí, siempre que se requiera un buen ajuste se impone ya en general un análisis riguroso de tipo paso a paso en el tiempo.

## RÉSUMÉ

Dans cet article on étudie un élément comprimé élané, de matériau viscoélastique linéaire, à flexocompression recte en deuxième ordre et dans le temps, pour appliquer au béton à travers quelques hypothèses sur les effets du fluage (du aux moments initiaux, aux moments actuels, pondéré pour tous les deux, utilisant le module global équivalent  $E^*$ ); on arrive tellement à des approximations que montrent des phénomènes intéressants (interaction non linéaire entre fluage et effets de deuxième ordre, réduction de la charge critique dans le temps, etc.), lesquelles sont analysées et comparées.

D'entre les plus ajustées (suposant la variation des efforts dans le temps) on peut remarquer celle basée sur le module  $E^*$ , très simple et formellement identique à l'analyse instantané, basique pour introduir le fluage par modification du diagramme  $\sigma - \epsilon$  à travers un facteur  $1 + \alpha \cdot \varphi$ , évitant un procès de calcul pas à pas; il est possible, à la pratique du béton armé, tenir compte de la fissuration et des armatures, maintenant la linéarité de la section, utilisant le concept de section efficace relative au module- $E^*$ .

On souligne, enfin, que donnée la très forte non linéarité du problème, si on veut une bonne exactitude, il faut en général un analyse ajusté du type pas à pas dans le temps.

## SUMMARY

In this paper a second order and delayed analysis of a slender member, composed by a linear viscoelastic material, in bending and compression, is made for applying to concrete; for that, different assumptions for creep effects (due to initial moments, due to present ones, wheighted for both, using an equivalent global modulus  $E^*$ ) are used, deriving from them several approaches, showing interesting phenomena (i.e., non linear interaction between creep and second order effects, critical load reduction with time, etc.), that are analyzed and compared.

Among the most accurate (taking into account that moments are time-dependent) is relevant the one based on the  $E^*$  modulus, very simple and formally identical to the instantaneous analysis, basical for considering creep by modifying  $\sigma - \epsilon$  diagram through a factor  $1 + \alpha \cdot \varphi$ , avoiding an step by step calculation; it is possible, in reinforced concrete practice, to take into account cracking and steel bars, maintaining the cross-section linearity, by the use of the effective cross-section concept relative to  $E^*$  modulus.

Concluding, it is underlined, when a good precision required, the general need of a more accurate step by step analysis along time, due to the high non linearity involved in the whole problem.

# Vectores de carga en barras de sección variable

José M<sup>a</sup> Arrieta Torrealba

Dr. Ingeniero de Caminos

Profesor de Cálculo de Estructuras de la E.T.S.I. Caminos C. y P.

Florencio J. del Pozo Vindel

Dr. Ingeniero de Caminos

Catedrático de Resistencia de Materiales de la E.T.S.I. Caminos C. y P.

## 1. INTRODUCCION

En un artículo anterior se expuso la formulación de la matriz de rigidez de estructuras reticuladas planas constituidas por piezas de sección variable, cuyas características elastomecánicas varían linealmente a lo largo de ellas. Mediante dicha matriz de rigidez puede abordarse el cálculo matricial de dicho tipo de estructuras, solicitadas por acciones en los nudos. En el presente artículo desarrollaremos las expresiones de las reacciones de empotramiento perfecto correspondientes a diferentes tipos de acciones en barra. Las cargas en barra que se van a considerar son:

- Fuerza puntual.
- Momento puntual.
- Carga repartida lineal.
- Variación térmica diferencial.

## 2. CALCULO DE LAS REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

Sea la barra 1-2 de la figura 1, sometida a una carga genérica  $q$ . Realizaremos el cálculo de las reacciones de empotramiento perfecto, mediante la descomposición en los estados de carga indicados en la figura 2.

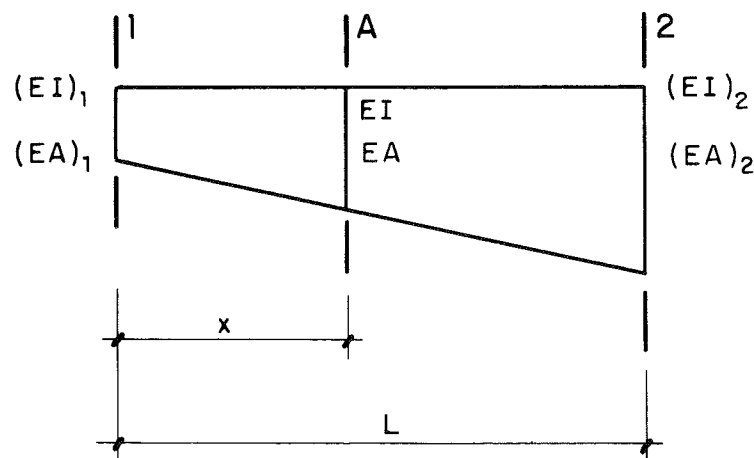
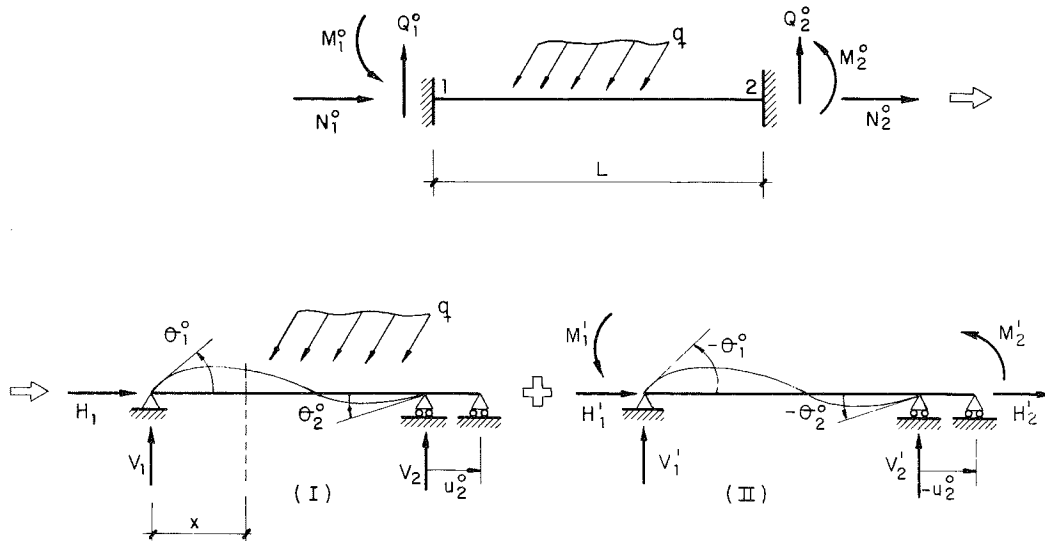


Fig. 1.



Los giros correspondientes al Estado I se calculan, en cada caso, aplicando los Teoremas de Mohr. Las expresiones generales de dichos giros son:

$$\Theta_1^0 = -1/L \cdot \int_0^L M_f \cdot (L-x)/(EI) \cdot dx \quad [1]$$

$$\Theta_2^0 = \int_0^L M_f/(EI) \cdot dx + \Theta_1^0 \quad [2]$$

donde  $M_f$  representa la ley de momentos flectores correspondiente al Estado I de carga, y  $(EI)$  la rigidez a flexión de una sección genérica.

El movimiento horizontal  $u_2^0$  tiene la siguiente expresión:

$$u_2^0 = \int_0^L N/(EA) \cdot dx \quad [3]$$

siendo  $N$  el esfuerzo axial de una sección genérica y  $(EA)$  su rigidez a esfuerzo axial.

Las reacciones de empotramiento perfecto, según se indica en la figura, son aquéllas que anulan los giros y el movimiento horizontal. Por tanto, aplicando las ecuaciones de estado de flexión y extensión, se obtienen los valores de dichas reacciones, es decir:

$$\begin{aligned} M_1^0 &= -K_1 \cdot (\Theta_1^0 + \gamma_2 \cdot \Theta_2^0) \\ M_2^0 &= -K_2 \cdot (\Theta_2^0 + \gamma_1 \cdot \Theta_1^0) \\ Q_1^0 &= V_1 + (M_1^0 + M_2^0) / L \\ Q_2^0 &= V_2 - (M_1^0 + M_2^0) / L \\ N_1^0 &= K_N \cdot u_2^0 - H_1 \\ N_2^0 &= -K_N \cdot u_2^0 \end{aligned} \quad [4]$$

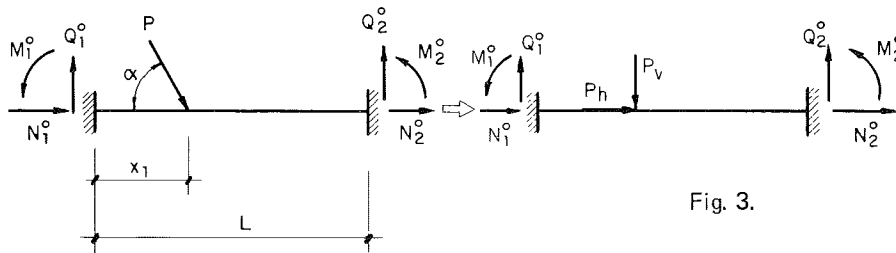
donde  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son los coeficientes de rigidez y transmisión de la barra a flexión y  $K_N$  es el coeficiente de rigidez a esfuerzo axial. Los esfuerzos cortantes  $Q_1^0$  y  $Q_2^0$ , así como el esfuerzo axial  $N_1^0$ , se han determinado aplicando condiciones de equilibrio.



### 3. FUERZA PUNTUAL

Sea la barra de la figura 3 sometida a una carga puntual,  $P$ , según una dirección genérica  $\alpha$ . Si proyectamos dicha carga según una dirección paralela a la directriz de la barra, y otra perpendicular a la misma, obtenemos las componentes  $P_h$  y  $P_v$ , respectivamente, cumpliéndose:

$$\begin{aligned} P_h &= P \cdot \cos \alpha \\ P_v &= P \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad [5]$$



Consideraremos las siguientes cantidades adimensionales:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= x_1 / L \\ \mu_2 &= (L - x_1) / L \end{aligned} \quad [6]$$

Las leyes de esfuerzos axiales y momentos flectores a lo largo de la barra, cuando se encuentra simplemente apoyada (Estado I de la figura 2), son:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq x_1 & \\ N &= P_h \\ M_f &= P_v \cdot x \cdot \mu_2 \\ x_1 \leq x \leq L & \\ N &= 0 \\ M_f &= P_v \cdot (L - x) \cdot \mu_1 \end{aligned} \quad [7]$$

Las reacciones en los apoyos, para el mencionado estado de carga, tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} V_1 &= P_v \cdot \mu_2 \\ V_2 &= P_v \cdot \mu_1 \\ H_1 &= -P_h \end{aligned} \quad [8]$$

Introduciendo las leyes de esfuerzos [7] en las expresiones de los giros [1] [2], y teniendo en cuenta la definición de la integral  $J(\alpha, n, \mu_0, \mu_1)$  realizada en el anterior artículo resulta:

$$\begin{aligned}\Theta_1^0 &= -P_v \cdot L^2 / (EI)_1 \cdot [\mu_1 \cdot (I_0^2 - 2 I_1^2 + I_2^2) + \mu_2 \cdot (I_1^2 - I_2^2)] \\ \Theta_2^0 &= P_v \cdot L^2 / (EI)_1 \cdot [\mu_1 \cdot (I_0^2 - I_1^2) + \mu_2 \cdot I_1^2] + \Theta_1^0 \\ u_2^0 &= P_h \cdot L / (EA)_1 \cdot A_0^1\end{aligned}\quad [9]$$

donde:

$$\begin{aligned}I_n^1 &= J(i, n, 0, \mu_1) \\ I_n^2 &= J(i, n, \mu_1, 1) \\ A_n^1 &= J(a, n, 0, \mu_1)\end{aligned}\quad [10]$$

Conocidos los movimientos y reacciones de la barra simplemente apoyada, se calculan fácilmente las reacciones de empotramiento perfecto, mediante las expresiones [4].

#### 4. MOMENTO PUNTUAL

Sea la barra de la figura 4 sometida a un momento puntual en la sección de abscisa  $x_1$ .

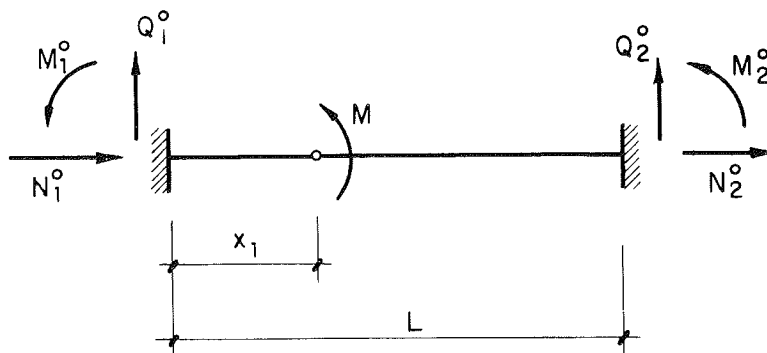


Fig. 4.

Consideraremos las siguientes cantidades adimensionales:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= x_1 / L \\ \mu_2 &= (L - x_1) / L\end{aligned}\quad [11]$$

Las leyes de esfuerzos, correspondientes a dicha barra simplemente apoyada en sus extremos, son las siguientes:

$$\begin{aligned}0 \leq x \leq x_1 & \\ N &= 0 \\ M_f &= M \cdot x / L \\ x_1 \leq x \leq L & \\ N &= 0 \\ M_f &= -M \cdot (L - x) / L\end{aligned}\quad [12]$$

Las reacciones en los apoyos, en el mencionado estado de carga, pueden expresarse por:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= M / L \\
 V_2 &= -M / L \\
 H_1 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Introduciendo las leyes de esfuerzos [12] en las expresiones de los giros [1] [2], y teniendo en cuenta la definición de la integral  $J(\alpha, n, \mu_0, \mu_1)$ , resulta:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1^0 &= -M \cdot L / (EI)_1 \cdot (I_1^1 - I_2^1 - I_0^2 + 2 I_1^2 - I_2^2) \\
 \Theta_2^0 &= M \cdot L / (EI)_1 \cdot (I_1^1 - I_0^2 + I_1^2) + \Theta_1^0 \\
 u_2^0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 I_n^1 &= J(i, n, 0, \mu_1) \\
 I_n^2 &= J(i, n, \mu_1, 1)
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Conocidos los movimientos y reacciones de la barra simplemente apoyada, se calculan fácilmente las reacciones de empotramiento perfecto, mediante las expresiones [4].

## 5. CARGA REPARTIDA LINEAL

Sea la barra de la figura 5 sometida a una carga  $q$ , distribuida linealmente, actuando según una dirección genérica  $\alpha$ . Si proyectamos dicha carga según una dirección paralela a la directriz de la barra y otra perpendicular a la misma, obtenemos las componentes  $q_h$  y  $q_v$ , respectivamente, cumpliéndose:

$$\begin{aligned}
 q_h &= q \cdot \cos \alpha \\
 q_v &= q \cdot \sin \alpha
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

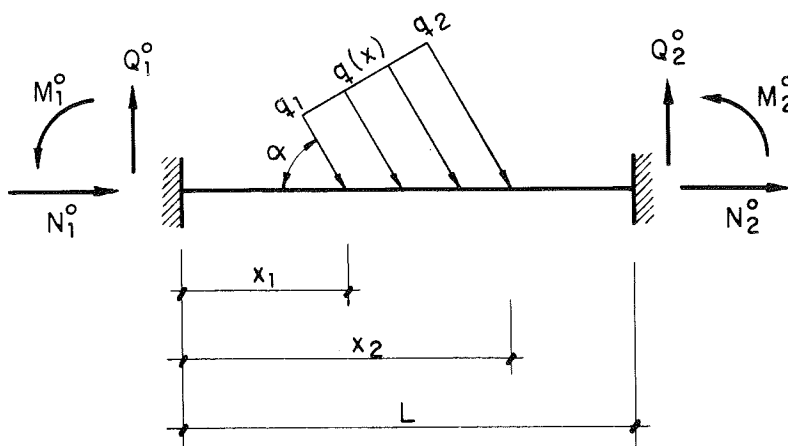


Fig. 5.

De la misma manera, definimos los siguientes valores de carga:

$$\begin{aligned}
 q_{h1} &= q_1 \cdot \cos \alpha \\
 q_{h2} &= q_2 \cdot \cos \alpha \\
 q_{v1} &= q_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\
 q_{v2} &= q_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\
 q_{h3} &= q_{h2} - q_{h1} \\
 q_{v3} &= q_{v2} - q_{v1}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Consideraremos las siguientes cantidades adimensionales:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= x_1 / L \\
 \mu_2 &= x_2 / L \\
 \mu_3 &= (\mu_1 + \mu_2) / 2 \\
 \mu_4 &= (\mu_1 + 2 \cdot \mu_2) / 3 \\
 \mu_5 &= 1 - \mu_3 \\
 \mu_6 &= 1 - \mu_4 \\
 \delta &= \mu_2 - \mu_1 \\
 \sigma_{h2} &= q_{h2} / q_{h1} \\
 \sigma_{h3} &= q_{h3} / q_{h1} \\
 \sigma_{v2} &= q_{v2} / q_{v1} \\
 \sigma_{v3} &= q_{v3} / q_{v1}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Las leyes de esfuerzos axiles y momentos flectores, a lo largo de la barra, cuando se encuentra simplemente apoyada (Estado I de la figura 2), son:

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq x_1 \\
 N &= q_{h1} \cdot L \cdot \beta_1 \\
 M_f &= q_{v1} \cdot L^2 \cdot \alpha_1 \cdot (x/L) \\
 \\
 x_1 \leq x \leq x_2 \\
 N &= q_{h1} \cdot L \cdot [\beta_2 \cdot (x/L)^2 + \beta_3 \cdot (x/L) + \beta_4] \\
 M_f &= q_{v1} \cdot L^2 \cdot [\alpha_2 \cdot (x/L)^3 + \alpha_3 \cdot (x/L)^2 + \alpha_4 \cdot (x/L) + \alpha_5] \\
 \\
 x_2 \leq x \leq L \\
 N &= 0 \\
 M_f &= q_{v1} \cdot L^2 \cdot [\alpha_6 \cdot (x/L) - \alpha_6]
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

donde las cantidades  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  tienen el siguiente significado:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \delta \cdot (\mu_5 + \sigma_{v3} \cdot \mu_6 / 2) \\
 \alpha_2 &= \sigma_{v3} / (6 \cdot \delta) \\
 \alpha_3 &= \sigma_{v3} \cdot \mu_1 / (2 \cdot \delta) - 1/2 \\
 \alpha_4 &= \mu_1 + \delta \cdot \mu_5 + \sigma_{v3} \cdot (\delta \cdot \mu_6 - \mu_1^2 / \delta) / 2 \\
 \alpha_5 &= [\sigma_{v3} \cdot \mu_1 / (6 \cdot \delta) - 1/2] \cdot \mu_1^2 \\
 \alpha_6 &= \delta \cdot (\mu_3 + \sigma_{v3} \cdot \mu_4 / 2) \\
 \beta_1 &= \delta \cdot (1 + \sigma_{h2}) / 2 \\
 \beta_2 &= \sigma_{h3} / (2 \cdot \delta) \\
 \beta_3 &= \sigma_{h3} \cdot \mu_1 / \delta - 1 \\
 \beta_4 &= \delta \cdot (1 + \sigma_{h2}) / 2 + \mu_1 \cdot [1 - \sigma_{h3} \cdot \mu_1 / (2 \cdot \delta)]
 \end{aligned} \tag{20}$$

Las reacciones en los apoyos, en el mencionado estado de cargas, resultan:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= q_{v1} \cdot L \cdot \alpha_1 \\
 V_2 &= q_{v1} \cdot L \cdot \alpha_6 \\
 H_1 &= -q_{h1} \cdot L \cdot \beta_1
 \end{aligned} \tag{21}$$

Introduciendo las leyes de esfuerzos [19] en las expresiones de los giros [1] [2] y movimiento horizontal [3], teniendo en cuenta la definición de la integral J ( $\alpha$ , n,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ), resulta:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1^0 &= -q_{v1} \cdot L^3 / (EI)_1 \cdot [\alpha_1 \cdot (I_1^1 - I_2^1) + \alpha_5 \cdot I_0^2 + \\
 &\quad + (\alpha_4 - \alpha_5) \cdot I_1^2 + (\alpha_3 - \alpha_4) \cdot I_2^2 - (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot I_3^2 + \alpha_2 \cdot I_4^2 + \\
 &\quad + \alpha_6 \cdot (I_0^3 - 2 \cdot I_1^3 + I_2^3)] \\
 \Theta_2^0 &= \Theta_1^0 + q_{v1} \cdot L^3 / (EI)_1 \cdot [\alpha_1 \cdot I_1^1 + \alpha_5 \cdot I_0^2 + \alpha_4 \cdot I_1^2 + \\
 &\quad + \alpha_3 \cdot I_2^2 - \alpha_2 \cdot I_3^2 + \alpha_6 \cdot (I_0^3 - I_1^3)] \\
 u_2^0 &= q_{h1} \cdot L^2 / (EA)_1 \cdot [\beta_1 \cdot A_0^1 + \beta_4 \cdot A_0^2 + \beta_3 \cdot A_1^2 - \beta_2 \cdot A_2^2]
 \end{aligned} \tag{22}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 I_n^1 &= J(i, n, 0, \mu_1) \\
 I_n^2 &= J(i, n, \mu_1, \mu_2) \\
 I_n^3 &= J(i, n, \mu_2, 1) \\
 A_n^1 &= J(a, n, 0, \mu_1) \\
 A_n^2 &= J(a, n, \mu_1, \mu_2) \\
 A_n^3 &= J(a, n, \mu_2, 1)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Conocidos los movimientos y reacciones de la barra simplemente apoyada, se calculan fácilmente las reacciones de empotramiento perfecto, mediante las expresiones [4].

## 6. VARIACION TERMICA DIFERENCIAL

Sea la barra de la figura 6, de directriz recta y canto variable linealmente, sometida a una variación de temperatura que, en su cara superior, tiene un valor  $T_s$  y en su cara inferior,  $T_i$ ; variando linealmente entre ambas caras.

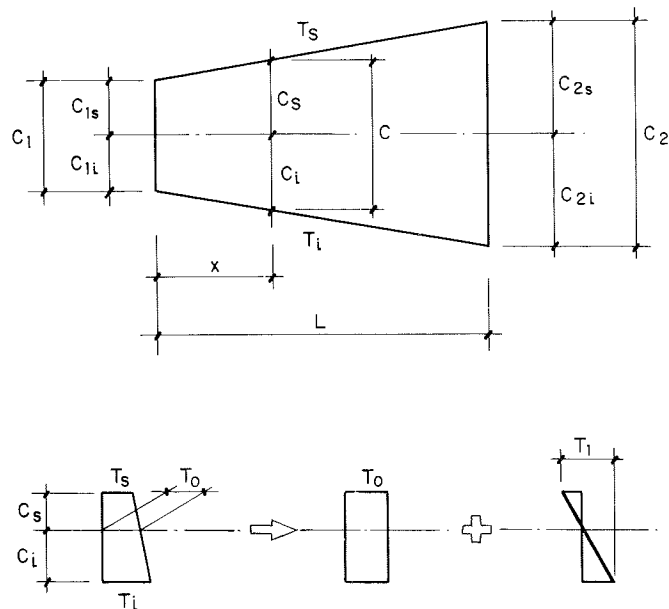


Fig. 6.

Las distancias del centro de gravedad a las fibras extremas, en una sección genérica serán:

$$\begin{aligned} c_s &= c_{1s} \cdot (1 + r_s \cdot x/L) \\ c_i &= c_{1i} \cdot (1 + r_i \cdot x/L) \end{aligned} \quad [24]$$

donde:

$$\begin{aligned} r_s &= (c_{2s} - c_{1s}) / c_{1s} \\ r_i &= (c_{2i} - c_{1i}) / c_{1i} \end{aligned} \quad [25]$$

El canto total de la pieza en una sección genérica, vendrá dado por la siguiente expresión:

$$c = c_1 \cdot (1 + r \cdot x/L) \quad [26]$$

donde:

$$r = (c_2 - c_1) / c_1 \quad [27]$$

siendo:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{1s} + c_{1i} \\ c_2 &= c_{2s} + c_{2i} \end{aligned} \quad [28]$$

Descomponemos dicha ley de variación de temperatura, en la suma de otras dos: una ley uniforme a lo largo de la sección, con una variación térmica  $T_0$  igual a la correspondiente al centro de gravedad, y otra lineal, con variación térmica nula en el centro de gravedad de la sección y diferencia entre fibras extremas, de  $T_1$ . Los valores de dichas variaciones térmicas serán:

$$\begin{aligned} T_0 &= (T_i \cdot c_s + T_s \cdot c_i) / c \\ T_1 &= T_i - T_s \end{aligned} \quad [29]$$

Los giros y movimiento horizontal, correspondientes a la pieza simplemente apoyada, sometida a la variación térmica diferencial (Estado I de la figura 2), vendrán dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \Theta_1^0 &= -\alpha \cdot T_1 / L \cdot \int_0^L (L-x) / c \cdot dx \\ \Theta_2^0 &= \Theta_1^0 + \alpha \cdot T_1 \cdot \int_0^L dx / c \\ u_2^0 &= \alpha \cdot \int_0^L T_0 \cdot dx \end{aligned} \quad [30]$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica lineal del material.

Las reacciones del mencionado estado adoptan los valores:

$$V_1 = V_2 = H_1 = 0 \quad [31]$$

Sustituyendo las variaciones térmicas  $T_0$ ,  $T_1$  y el canto  $c$ , por sus valores según [29] [26] en las expresiones de los movimientos [30] e integrando, resulta:

$$\begin{aligned} \Theta_1^0 &= -\alpha \cdot (T_i - T_s) \cdot L/c_1 \cdot (R_0 - R_1) \\ \Theta_2^0 &= \Theta_1^0 + \alpha \cdot (T_i - T_s) \cdot L / c_1 \cdot R_0 \\ u_2^0 &= \alpha \cdot L/c_1 \cdot [(T_i \cdot c_{1s} + T_s \cdot c_{1i}) \cdot R_0 + \\ &\quad + (T_i \cdot c_{1s} \cdot r_s + T_s \cdot c_{1i} \cdot r_i) \cdot R_1] \end{aligned} \quad [32]$$

donde:

$$R_n = J(r, n, 0, 1) \quad [33]$$

Conocidos los movimientos y reacciones de la barra simplemente apoyada, se calculan fácilmente las reacciones de empotramiento perfecto, mediante las expresiones [4].

## Próximo Simposio Internacional de la Federación Internacional del Pretensado. Israel 1988

El próximo Simposio Internacional de la FIP se celebrará en el Hotel Hilton de Jerusalem (Israel), del 4 al 9 de setiembre de 1988.

El programa técnico del Simposio incluye los siguientes temas:

- Durabilidad de las estructuras de hormigón armado y pretensado en ambientes cálidos y húmedos.
- Aceros y sistemas de pretensado.
- Aplicaciones prácticas del cálculo no lineal a las estructuras de hormigón pretensado.
- Las aplicaciones del hormigón pretensado en edificios de altura, en relación con la influencia de la temperatura, efectos sísmicos, colapso progresivo, etc.

De acuerdo con lo establecido para el desarrollo de los Simposios de la FIP, todas las Comunicaciones se expondrán en inglés y no habrá traducción simultánea. Con el fin de que todos los asistentes puedan participar en las Sesiones en las que habrán de discutirse los cuatro temas seleccionados para este Simposio y obtener así el mayor provecho de las reuniones, no se celebrarán sesiones simultáneas.

Para el viernes 9 de setiembre, una vez concluidas las Sesiones, se han programado visitas técnicas.

Habrà una exposición de fotografías y posters relacionados con las actividades de las diversas empresas, particulares y Grupos Miembros afiliados a la FIP, y se ha programado también la proyección de documentales.

Se ha preparado un amplio interesante programa de actividades sociales, tanto para los participantes en el Simposio como para sus acompañantes, en el que se incluirán visitas a los lugares históricos y a los puntos más interesantes del antiguo y moderno Israel.

Los dos volúmenes de los Proceedings en los que se recogerán los textos completos de todas las Comunicaciones presentadas en el Simposio se entregarán a los participantes con la documentación inicial.

Se han establecido las siguientes cuotas de inscripción:

HASTA EL 15 JUNIO 1988

A PARTIR DEL 16 DE JUNIO 1988

Participantes: 375,-- dólares USA

425 dólares USA

Acompañantes: 150,-- dólares USA

175,-- dólares USA

Mediante el pago de estas cuotas, los participantes tendrán derecho: a recibir los Proceedings y demás publicaciones del Simposio; a las cuatro comidas de trabajo, y a las invitaciones para los diversos actos sociales programados.

Las cuotas de los acompañantes les permitirán participar en todos los actos sociales y en tres excursiones, de media jornada, por diversos lugares de interés.

Para una más amplia información los interesados pueden dirigirse a:

SECRETARIA DE LA A.T.E.P.

Apartado 19.002

28080 MADRID

Tfno.: 202 04 40

o bien directamente a:

F.I.P. SYMPOSIA ISRAEL' 88

P.O. Box, 50006

TEL AVIV 61500, Israel



# Análisis de puentes de planta circular por el método de la lámina plegada

José I. González Esteban  
Avelino Samartín Quiroga  
Dres. Ingenieros de Caminos C. y Puertos

## RESUMEN

El comportamiento de los puentes de planta circular y sección transversal muy aligerada, presenta un problema complejo en cuanto a la distribución de esfuerzos, (interacción, flexión-torsión, distorsión, reparto de esfuerzos entre las distintas almas, etc.). Para poder realizar un correcto estudio del mismo es necesario disponer de un método de cálculo que analice globalmente el comportamiento de la estructura. El método de la Lámina Plegada constituye una herramienta de trabajo eficaz y de fácil utilización, válida para estructuras de sección transversal constante.

En este artículo se presenta una ampliación del método de la Lámina Plegada a este tipo estructural, así como un estudio paramétrico del comportamiento de un puente de sección cajón monocelular.

## 1. INTRODUCCION

En la situación actual de la técnica de proyecto de carreteras, el puente ha dejado de ser un elemento singular para integrarse en el trazado de la misma, lo que tiene como consecuencia la aparición de puentes de geometría irregular.

El tipo de puente de más frecuente utilización después del recto, es el de planta circular. Como consecuencia de la curvatura en planta, su estudio es bastante más complejo que el del recto, por lo que es necesario acudir, en general, a la utilización de métodos numéricos.

Los puentes de curvatura en planta variable, pueden ser más adecuadamente asimilados a un puente con planta circular con curvatura de valor medio, que a uno recto; razón que añade interés al estudio de este tipo de puentes.

## 1.1. Análisis de puentes curvos como Láminas Plegadas

Cuando la luz del puente supera los 30 metros, la sección transversal del tablero que mejor se adapta a las necesidades del puente curvo es la sección cajón, que presenta características idóneas, tanto para el trabajo de flexión como para el de torsión, al mismo tiempo que proporciona una buena economía de material.

En esta sección las hipótesis de la resistencia de materiales de deformación plana o de indeformabilidad de la sección transversal no son válidas. En efecto, la distorsión de la sección adquiere importancia debido a la deformación por cortante. Aunque es posible considerar los efectos de estos fenómenos mediante análisis aproximados, la complejidad del cálculo aconseja la introducción de un modelo estructural global que permita estudiar de forma directa el funcionamiento de este tipo de tableros; un eficaz método de análisis de este tipo estructural en el caso de sección transversal constante es el de la lámina plegada.

Se denomina lámina plegada a una estructura formada por elementos planos unidos entre sí, y cuya superficie media es desarrollable, estando apoyada sobre varias líneas de apoyo. En el caso de que sólo existan nudos en los apoyos extremos, la lámina plegada se denomina canónica (Fig. 1.1).

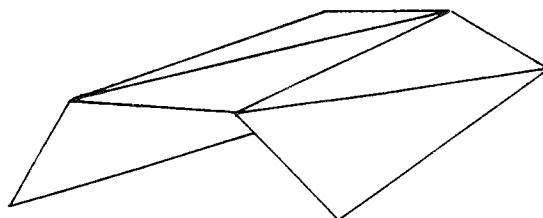


Fig. 1.1. Lámina Plegada canónica.

Aunque en el caso de tableros de puentes curvos no se puede hablar de láminas plegadas, al no ser planos los elementos que componen la estructura, por ser estas superficies de pequeña curvatura, se puede generalizar el método, realizándose su estudio de forma análoga al de las láminas plegadas rectas. (Fig. 1.2).

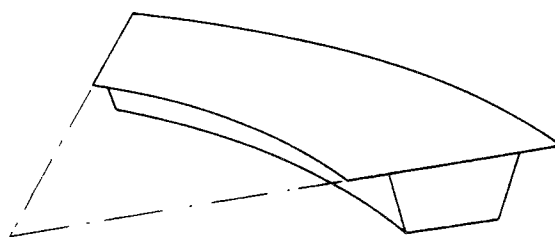


Fig. 1.2. Lámina Plegada curva.

Mediante este modelo es posible analizar en detalle los distintos esfuerzos que aparecen en este tipo de tableros. Los métodos de cálculo utilizados en la actualidad para el estudio de las láminas plegadas son: elementos finitos, bandas finitas y cálculo directo de la lámina plegada.

### A) Elementos Finitos

El método de los Elementos Finitos es un método general de cálculo que permite resolver gran variedad de problemas físicos y mecánicos.

Consiste en la descomposición de la estructura en un conjunto de elementos bi o tridimensionales, en cuyo dominio se supone que las deformaciones adoptan una forma predeterminada en función de los desplazamientos de un número limitado de puntos característicos de dicho elemento, llamados puntos nodales (Fig. 1.3).

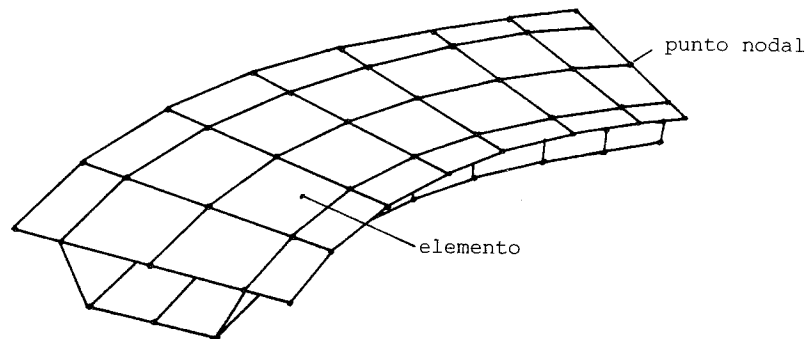


Fig. 1.3 Descomposición de una estructura en elementos finitos.

A partir de estas funciones de deformación, denominadas funciones de forma, y por medio de la teoría de la elasticidad, se obtienen valores de los esfuerzos y deformaciones en el elemento en función de los desplazamientos de los puntos nodales, y es posible formar, mediante métodos energéticos, una matriz de rigidez aproximada del elemento.

Este método de cálculo presenta la ventaja de poderse aplicar a tipos muy generales de estructuras con condiciones de apoyo arbitrarias. Presenta, sin embargo, algunos inconvenientes que limitan su utilización. Los principales son:

- Entrada de datos voluminosa y de tediosa elaboración.
- Necesidad de un gran volumen de cálculo y de almacenamiento en memoria, en comparación con otros métodos.
- Salida de resultados que requiere una elaboración posterior.

## B) Bandas Finitas

El método de las Bandas Finitas es un método derivado de el de los Elementos Finitos, y se emplea para el estudio de estructuras prismáticas apoyadas en dos bordes extremos, en especial para láminas plegadas.

Fue desarrollado por Cheung en 1968 (1) y aplicado a láminas plegadas de planta circular por Meyer (8) en 1970, siendo ampliado por Kabir a estructuras de varios vanos con apoyos intermedios flexibles, en 1974 (5).

El elemento básico de este método es una banda de ancho reducido que, en dirección longitudinal de la estructura, se extiende en toda la longitud de la misma. Las funciones de desplazamiento correspondientes a la dirección transversal son análogas a las desarrolladas para elementos finitos de tipo lámina y las funciones correspondientes a la dirección longitudinal se sustituyen por un desarrollo en serie de Fourier, realizándose un análisis de la estructura independiente para cada armónico.

La ventaja del método de las bandas finitas frente al de los elementos finitos para este tipo estructural se debe a la menor memoria de cálculo necesaria, así como al menor número de datos requeridos, obteniéndose los resultados en forma más fácilmente utilizable de forma directa.

Este método presenta, por otra parte, las limitaciones correspondientes a los análisis armónicos.

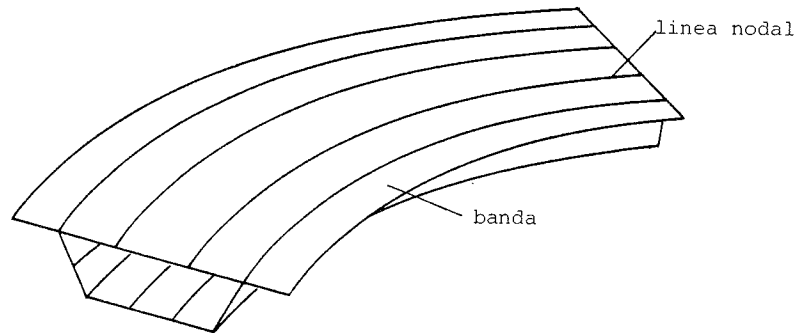


Fig. 1.4. Descomposición de una estructura en bandas finitas.

### C) Cálculo directo de la lámina plegada

El cálculo directo o exacto de la lámina plegada consiste en analizar cada una de las superficies que forman la estructura, por medio de la teoría de la elasticidad, y resolver la estructura de acuerdo con los métodos de cálculo matricial. No se realizan más simplificaciones que las generales de linealidad del análisis estructural.

Los métodos comunes de cálculo de láminas plegadas, se limitan al estudio de láminas plegadas rectas de sección constante; ésto es, los planos que contienen a los soportes son paralelos y normales a las aristas de la lámina, las secciones paralelas a éstos son iguales entre sí y las aristas longitudinales de la estructura son rectas; aunque existen algunos métodos específicos para el cálculo de láminas plegadas rectas no prismáticas.

El cálculo directo de la lámina plegada presenta, frente al de las bandas finitas, la ventaja de una mayor exactitud y de una menor necesidad de almacenamiento y tiempo de cálculo, ya que al obtenerse para cada lámina su solución exacta, el número de elementos en que hay que dividir la estructura para el cálculo está determinado únicamente por los quiebros, uniones de elementos, o cambios de espesor en la sección transversal, no necesiándose dividir cada lámina que compone la estructura en elementos menores por razones de limitar la dimensión transversal de cada elemento o por existir cargas aplicadas en la lámina, como ocurre con las Bandas Finitas. Presenta, sin embargo, el inconveniente de una mayor dificultad de planteamiento teórico y programación al tenerse que obtener la solución de la ecuación diferencial de la lámina para cada tipo de lámina que se presente; p.e. en el caso de puentes de planta circular es necesario resolver la lámina plana limitada por dos circunferencias y las láminas cónica y cilíndrica limitadas por dos planos horizontales; engendradas por los elementos horizontales, inclinados y verticales respectivamente. (Fig. 1.5).

### 1.2. Limitaciones y extensiones del método

La utilización del cálculo directo de la lámina plegada para el estudio de las estructuras de planta curva, y en particular, tableros de puentes de planta circular, reúne, junto a una muy buena exactitud de resultados, una limitada exigencia de capacidad de cálculo, así como una entrada simple con reducido número de datos. Sin embargo, presenta por

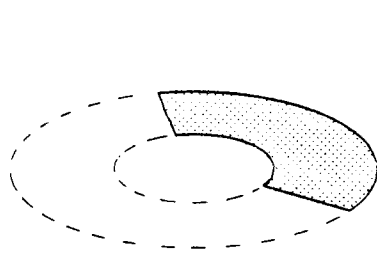


Lámina plana circular

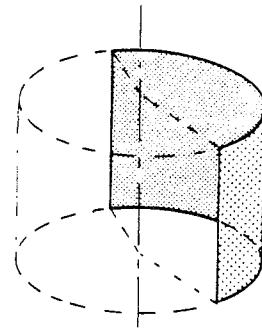


Lámina cilíndrica

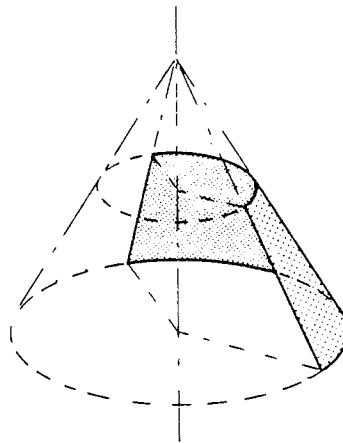


Lámina cónica

Fig. 1.5 Tipos de láminas presentes en el análisis de estructuras circulares.

otra parte las limitaciones comunes a todos los cálculos basados en el análisis armónico.

Las limitaciones más importantes son:

- El método es válido únicamente para estructuras de sección transversal constante.
- Para la obtención de una respuesta exacta frente a cargas concentradas en las proximidades del punto de aplicación de las mismas, es necesario un número de armónicos elevado.
- Las condiciones de sustentación en los extremos son de apoyo tímpano, esto es, simple apoyo a flexión y empotramiento a torsión.
- El método es inicialmente válido para estructuras de vano único, aunque fácilmente ampliable a estructuras continuas de varios vanos.

La limitación relativa a las condiciones de apoyo en los extremos, podría soslayarse realizando un desarrollo mediante funciones de Rayleigh en vez de utilizar series armónicas de Fourier. Aunque el apoyo simple es la sustentación normal en estribos, podría ser de interés para el análisis de estructuras evolutivas.

La extensión del método a estructuras continuas de varios vanos se puede realizar mediante el procedimiento desarrollado por Scordelis para el estudio de láminas plegadas rectas continuas (6), (11).

## 2. CALCULO MATRICIAL DE LAMINAS PLEGADAS PRISMATICAS

El método de cálculo matricial utilizado, corresponde al de equilibrio, que es un método genérico fácilmente aplicable a ordenador, y permite la resolución de cualquier lámina plegada con independencia de la forma de su sección transversal, admitiendo láminas de sección abierta o cerrada, con cualquier número de ellas incidiendo en cada arista.

Este método se basa en el desarrollado por De Fries-Skene y Scordelis (2) para el estudio de láminas plegadas rectas; utilizándose para el estudio longitudinal de la estructura una solución de tipo Levy, mediante desarrollo en serie de Fourier de todas las funciones que intervienen en el mismo.

Al tratarse de un método de análisis por armónicos, se realiza un estudio independiente para cada uno de éstos, obteniéndose el resultado final por suma de los resultados parciales correspondientes a cada armónico.

El estudio de cada armónico se reduce a un planteamiento en el que sólo intervienen las amplitudes máximas de cada variable, con lo que el mismo se reduce a un análisis bidimensional. Una vez obtenidas dichas amplitudes, se calculan en los puntos deseados, por medio de las funciones correspondientes, los valores de las distintas variables.

El análisis de la estructura siguiendo el esquema clásico del método de equilibrio, se divide en dos estados: (fig. 2.1).

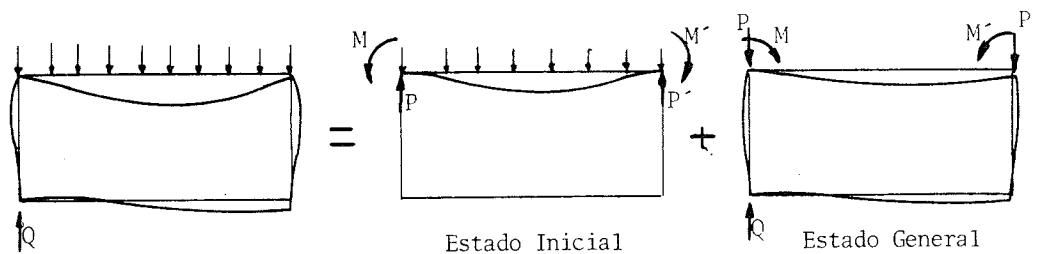


Fig. 2.1. Estados de análisis de la estructura. (Sección transversal).

– *Estado inicial.* En este estado se estudia la situación de cada lámina supuesta rígidamente empotrada en las aristas que la delimitan y sometida a la acción de las cargas que actúan en ella, obteniéndose simultáneamente las reacciones que aparecen en las aristas en esta situación.

Se trata de un estudio aislado de cada lámina, independiente de la forma de la estructura.

– *Estado general.* En este estado se estudia la respuesta de la estructura bajo la acción de las cargas aplicadas en las aristas y de las acciones en los bordes de las láminas obtenidas en el Estado inicial.

El cálculo del estado inicial consta de dos partes: (Fig. 2.2).

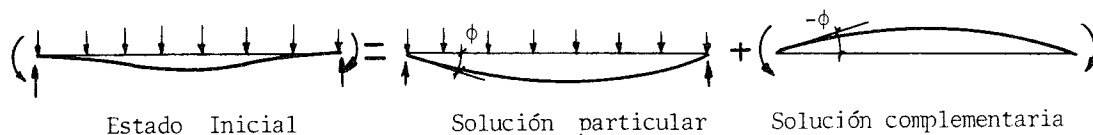


Fig. 2.2. Análisis del Estado Inicial.

- Solución particular, o estudio de los esfuerzos y deformaciones en la lámina bajo la acción de las cargas aplicadas en ella.
- Solución complementaria, o estudio de los esfuerzos que aparecen en la lámina al imponer en los bordes de la misma unos desplazamientos iguales y de signo contrario a los obtenidos en la Solución Particular, con el fin de obtener, por suma de ambos, la condición de empotramiento de la lámina en las aristas de borde.

El estado general se calcula mediante la obtención de la matriz de rigidez de cada lámina, es decir, la relación entre los movimientos en los bordes de cada lámina y las fuerzas que aparecen como consecuencia de estos.

Ensamblando las matrices de rigidez de cada lámina expresadas en coordenadas generales, se obtiene la matriz de rigidez de la estructura. El vector de cargas se forma a partir de las reacciones en los bordes de cada lámina, calculadas en el estado inicial, y de las cargas aplicadas en las aristas. Resolviendo el sistema se obtienen los desplazamientos de las aristas, a partir de los cuales se obtienen, para cada lámina, las constantes de integración correspondientes al estado general.

Sumando los resultados obtenidos en el estado inicial y en el general, se determina el valor de la amplitud de cada función correspondiente a la situación transversal deseada. La obtención del valor del esfuerzo o desplazamiento en una sección longitudinal cualquiera, para el armónico que se está calculando, se realiza mediante el desarrollo en serie correspondiente a dicha función, para el valor del ángulo en que se encuentre. El resultado final se obtiene por acumulación de los distintos armónicos.

### 3. ANALISIS DE LAS LAMINAS INDIVIDUALES

Para el estudio independiente de cada tipo de lámina se ha utilizado la Teoría de las Láminas Rebajadas, a partir del desarrollo realizado por Vlassov (12) y otros autores (3) (9).

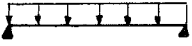

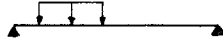
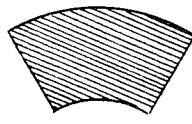
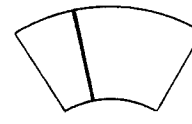
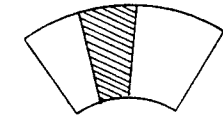
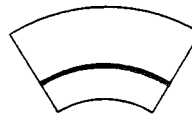
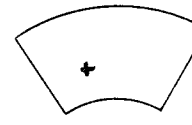

En la obtención de la solución de las ecuaciones correspondientes a cada lámina, se utiliza una solución de tipo Levy, es decir, mediante desarrollo de las distintas funciones que intervienen en el problema, en serie de Fourier en la dirección circunferencial de la misma, de la forma:

$$F(\alpha_1) = \sum_{n=0}^{n=N} F_n \left( \frac{\text{sen}}{\text{cos}} \right) \lambda_n \alpha_1$$

En el caso de lámina plana circular se utilizan, para la resolución de la ecuación homogénea, soluciones de tipo potencial; siendo necesario encontrar soluciones para las ecuaciones completas correspondientes a cada uno de los tipos de carga en el interior de la lámina que se quieran estudiar. Los casos de carga analizados en este trabajo corresponden a los recogidos en el cuadro adjunto y permiten estudiar los tipos más normales de carga que se presentan en puentes.

La distribución longitudinal de la carga repercute en el cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie; mientras que la distribución transversal obliga a la obtención de la correspondiente solución de las ecuaciones diferenciales.

En el caso de lámina cilíndrica se utilizan soluciones de tipo exponencial para la ecuación homogénea; estudiándose únicamente la ecuación completa para carga vertical uniforme, correspondiente al peso propio.

		Distribución Longitudinal		
				
Distribución Transversal	Uniforme			
	Concentrada			

Tipos de carga analizados en la lámina plana circular.

Las ecuaciones de estado de las láminas, particularizadas para el caso de lámina cónica, no tienen solución exacta que esté formada por un conjunto finito de funciones trascendentes elementales; por lo que es necesario recurrir a una solución aproximada.

Frente a la utilización de soluciones aproximadas formadas por una combinación lineal de polinomios ortogonales, que minimice determinadas funciones de error en el dominio de la lámina, se ha preferido una solución mediante funciones de desplazamiento del tipo de banda finita.

Al objeto de conseguir un elemento de banda finita lo más homogéneo posible con las soluciones exactas utilizadas para los demás tipos de lámina, se han utilizado funciones de desplazamiento de grado elevado. Con este fin, el elemento diseñado tiene tres líneas nodales, dos en las aristas extremas y una en el centro. En la formación de la matriz de rigidez y vector de cargas en aristas, se eliminan, mediante condensación estática, los movimientos y fuerzas correspondientes a la línea nodal central, con lo que las matrices quedan únicamente en función de los movimientos y fuerzas en las aristas extremas.

Las funciones de desplazamiento resultantes son polinomios de segundo grado para los movimientos en el plano tangente y de quinto grado para los movimientos normales al mismo.

### 3.1. Características del elemento de banda finita desarrollado para la lámina cónica

Por haberse utilizado funciones de forma de grado elevado, mediante la introducción de un punto nodal intermedio, el comportamiento del elemento es bastante análogo al de la lámina cónica, por lo que, como ha quedado puesto de manifiesto en los casos analizados, no es necesario introducir más de un elemento en el análisis de cada lámina.



La respuesta obtenida puede considerarse exacta en lo que respecta a los esfuerzos y desplazamientos de flexión; sin embargo, los esfuerzos en el plano de la lámina, y particularmente el esfuerzo tangencial  $T_{12}$ , presentan una respuesta menos ajustada. Para estos esfuerzos se obtienen distribuciones casi lineales en la dirección transversal de la lámina, de forma que la integral del esfuerzo se corresponde con el valor real.

En el caso de los esfuerzos axiales, su distribución en la dirección transversal de la lámina es, al no existir cargas puntuales aplicadas en el interior de la misma, prácticamente lineal, por lo que no aparecen en el cálculo errores significativos. El esfuerzo tangencial, sin embargo, presenta en la realidad una distribución parabólica, por lo que los resultados deducidos no se ajustan a la misma.

La obtención de los valores reales del esfuerzo tangencial, puede realizarse de dos formas: mediante la división de la lámina en varios elementos, o mediante el cálculo de dicha distribución a partir de los datos suministrados por el programa, esto es, los valores del mismo en las aristas de borde y su integral en el ancho de la lámina.

#### **4. COMPARACION ENTRE LA LAMINA PLEGADA, BANDAS FINITAS Y ELEMENTOS FINITOS**

Con el fin de estudiar la concordancia entre los tres métodos de cálculo que mejor se adaptan al análisis de puentes curvos de sección transversal distorsionable, esto es, lámina plegada, bandas finitas y elementos finitos, se ha realizado el estudio de un tablero de puente por los tres métodos.

El puente estudiado es un puente cajón de sección bicelular, de 30,48 m (100 pies) de luz, con un radio de 76,20 m (250 pies), (véase figura 4.1), sometido a la sobrecarga del camión estándar de la AASTHO situado en el centro de la luz, en dos posiciones transversales. El análisis mediante bandas finitas y elementos finitos ha sido tomado de Meyer (8) que ha utilizado dos programas especialmente diseñados para el análisis de puentes de planta circular, FINPLA 2 para elementos finitos y CURSTR para bandas finitas.

En el análisis mediante elementos finitos se ha utilizado una malla formada por 247 elementos; en el análisis mediante bandas finitas se han utilizado 15 elementos, y en el de lámina plegada únicamente 9 láminas. En estos dos últimos casos el número de armónicos ha sido de 50.

Los esfuerzos estudiados son: El esfuerzo normal longitudinal  $N_1$  y el momento transversal  $M_2$  en la sección de centro de la luz. Los resultados obtenidos por los tres métodos para el camión B se encuentran recogidos en la figura 4.2.

En la comparación de los resultados obtenidos, en cuanto a tensiones longitudinales, se pueden distinguir dos casos, las losas superior e inferior y las almas. En las losas la concordancia es bastante buena siendo las mayores diferencias del 7 por 100 y dando la lámina plegada generalmente valores intermedios a los obtenidos por los otros dos métodos. En las almas la concordancia es peor, llegándose a discrepancias del 27 por 100. Sin embargo, los valores obtenidos con el método de la lámina plegada en las losas y las almas son coherentes unos con otros, no siéndolo los valores obtenidos en los otros dos métodos. Estas discrepancias aparecidas en el análisis mediante el método de las bandas finitas y de los elementos finitos se explican, según Meyer, por el hecho de haber utilizado una malla poco tupida.

En cuanto a momentos flectores, las discrepancias en los valores obtenidos en la losa superior son inferiores al 8 por 100. En las almas las discrepancias vuelven a ser mayores, llegando a alcanzar el 46 por 100. Un análisis de los resultados obtenidos demuestra que en

el método de la lámina plegada existe equilibrio de momentos en las aristas en que confluyen las almas con la losa, equilibrio que no tiene lugar en los otros dos métodos, por lo que la fiabilidad del método de la lámina plegada es mayor. Aunque los errores relativos llegan a ser importantes, éstos tienen lugar en zonas en los que el valor del momento flector es bajo, por lo que los errores absolutos son pequeños no superando el 9 por 100 del momento máximo en la sección.

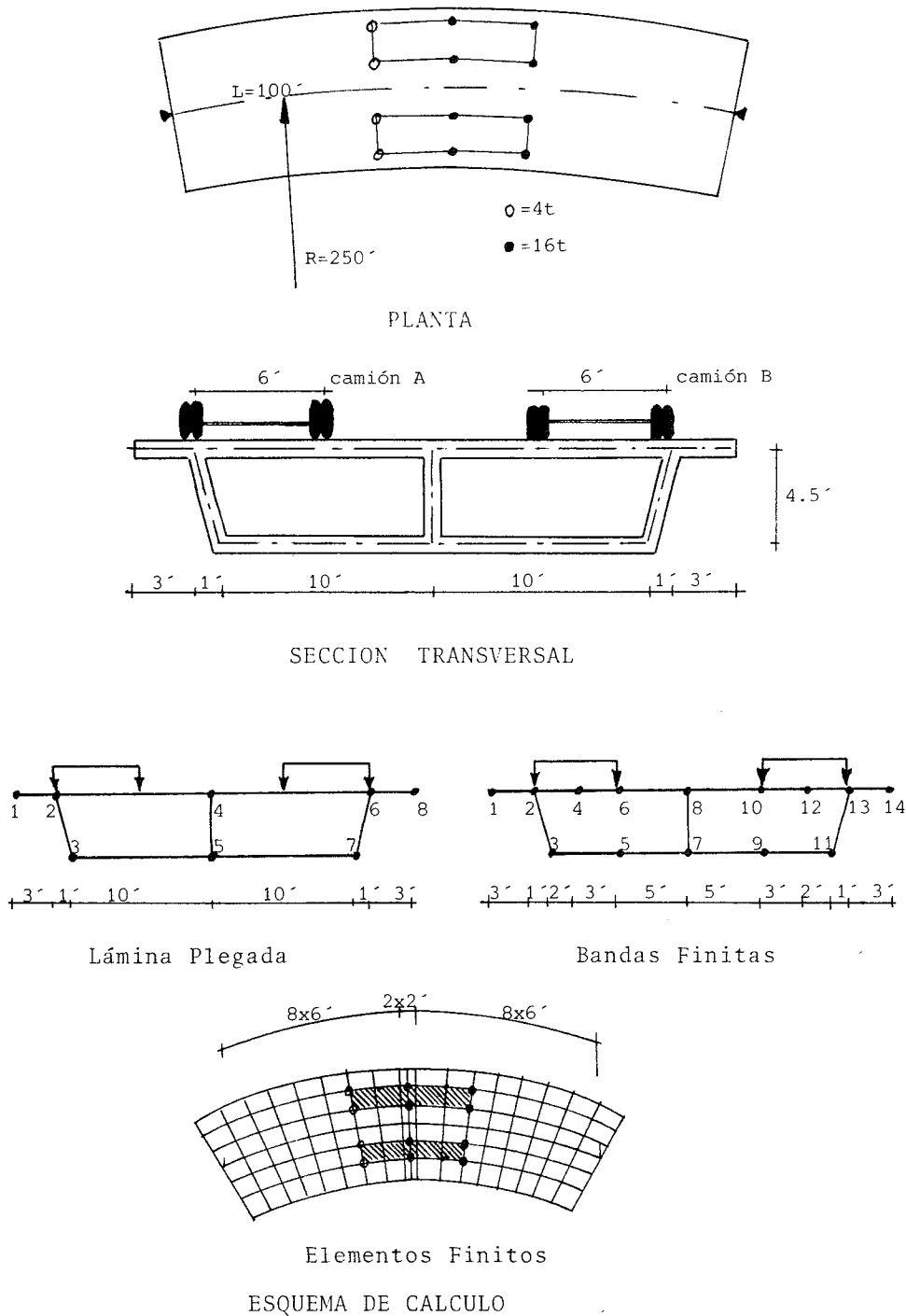


Fig. 4.1. Comparación entre Lámina Plegada, Bandas Finitas y Elementos Finitos. Estructura e hipótesis de carga.

En conclusión, se puede decir que la concordancia entre los tres métodos es aceptable desde el punto de vista práctico, siendo más fiables los resultados deducidos por el método de la lámina plegada; destacándose el hecho de que, en este método, el número de elementos en que se discretiza la estructura es el menor de los tres.

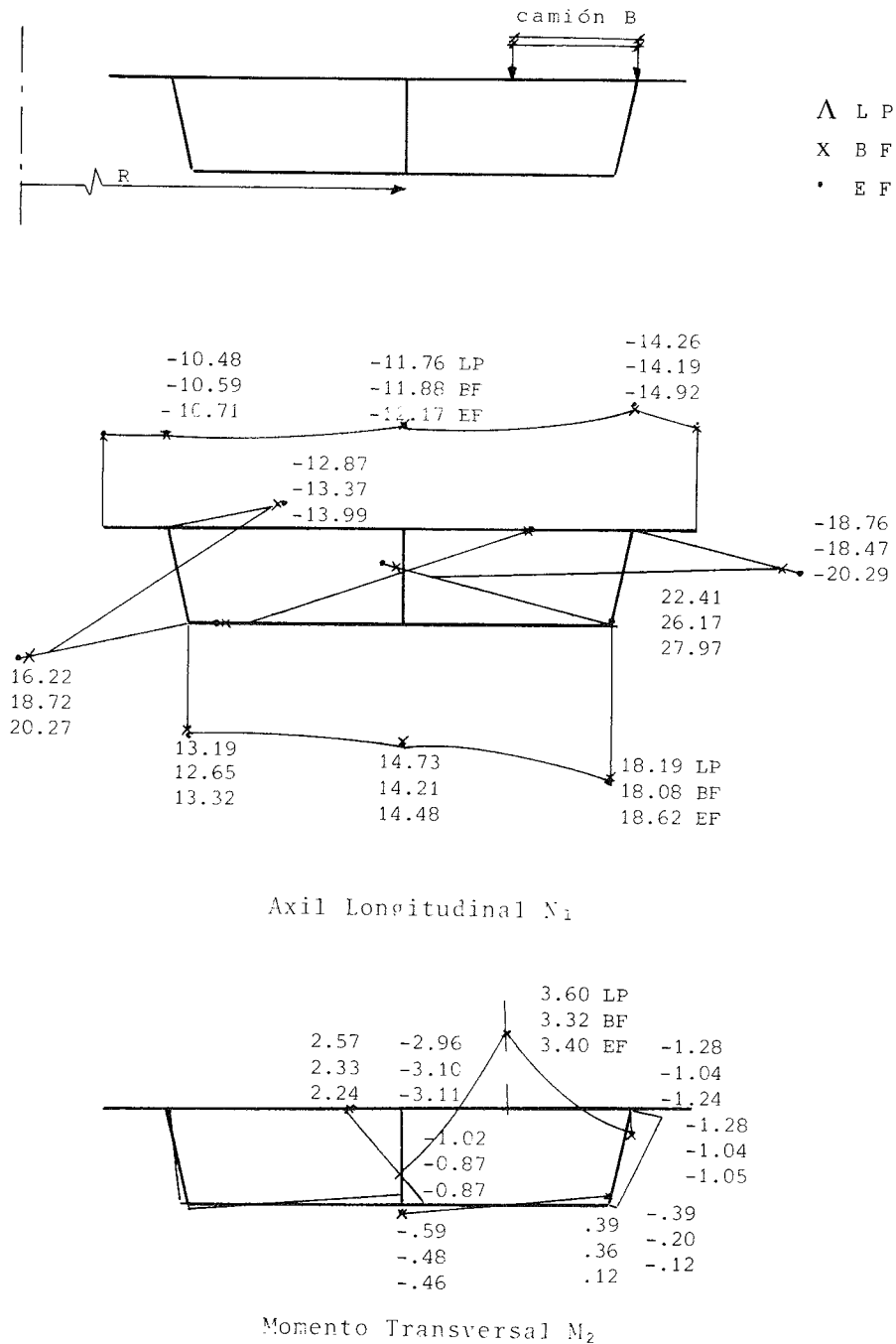


Fig. 4.2. Esfuerzos en la sección centro luz. Camión B. Comparación Lámina Plegada, Bandas Finitas, Elementos Finitos.

## 5. ANALISIS DE UN PUENTE DE DOS VANOS

Como ejemplo de aplicación se presenta el análisis de un puente curvo, de dos vanos de 50 metros de luz y 200 metros de radio; el apoyo en estribos se realiza mediante una riostra infinitamente rígida; el apoyo en la pila intermedia se materializa mediante dos apoyos situados bajo cada una de las almas. La sección transversal del tablero es la representada en la figura 5.1. El caso de carga estudiado corresponde a una carga uniformemente repartida en toda la superficie del tablero.

Al no estar preparado el programa desarrollado, para el cálculo de puentes con apoyos intermedios, el apoyo en la pila se ha materializado en el cálculo introduciendo bajo cada una de las almas una fuerza vertical que anule el desplazamiento debido a las cargas exteriores.

El puente carece de riostra sobre pila, lo que acentúa las concentraciones de esfuerzos que aparecen sobre los apoyos de la misma, por lo que los resultados presentados en este apartado deben de interpretarse teniendo en cuenta esta característica del puente estudiado.

En la figura 5.2 se han resumido algunos de los resultados obtenidos en el cálculo, presentándose para la sección de vano ( $0,4 L$ ) las flechas  $w$ , tensiones longitudinales  $\sigma_1$  y axiles transversales  $N_2$ ; para la sección de estribo se estudian las tensiones tangenciales  $\tau_{12}$  y para la sección de pila las tensiones longitudinales  $\sigma_1$  axiles transversales  $N_2$  y tensiones tangenciales  $\tau_{12}$  en las cercanías de la misma.

El análisis de las tensiones longitudinales permite comprobar la concentración de tensiones que aparece sobre los apoyos como consecuencia de la deformación originada por las tensiones tangenciales en las losas superior e inferior (shear lag).

En el estudio de las tensiones tangenciales, los valores obtenidos en el estribo son prácticamente coincidentes con los obtenidos en un cálculo como viga. Sin embargo, en las proximidades de la pila el efecto de las reacciones de los apoyos produce una concentración de esfuerzos en las esquinas inferiores del cajón, obteniéndose una distribución de tensiones tangenciales que difiere apreciablemente de la obtenida mediante el cálculo analítico.

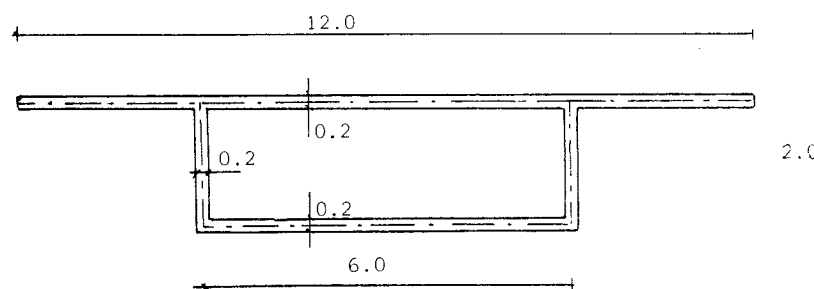
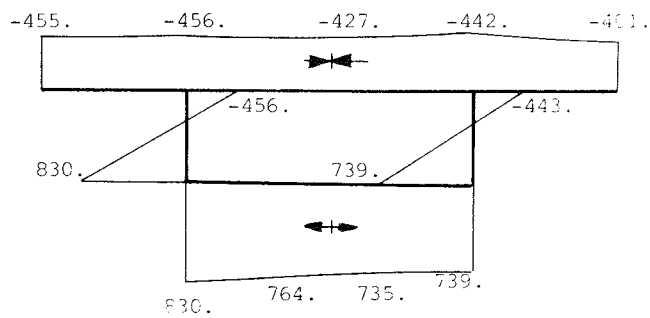


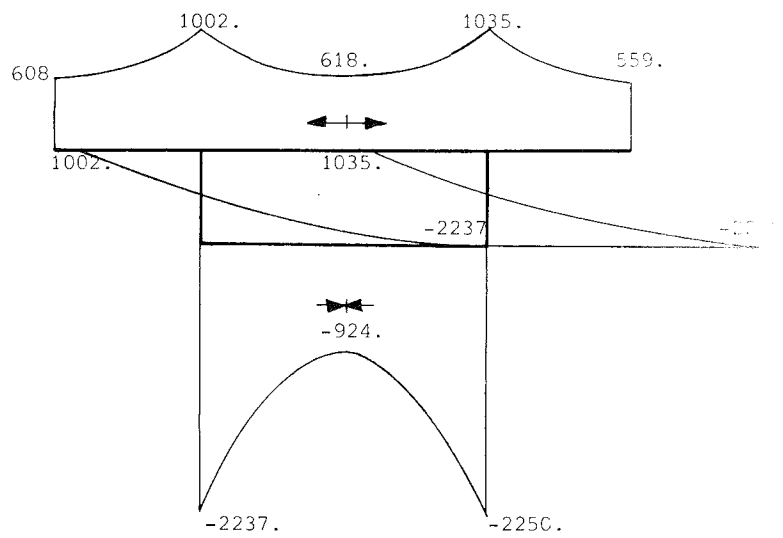
Fig. 5.1. Sección transversal.

En la sección a un canto del apoyo, se reducen los efectos originados por la reacción de la pila, siendo la distribución de tensiones tangenciales más parecida a la obtenida mediante un cálculo como viga.

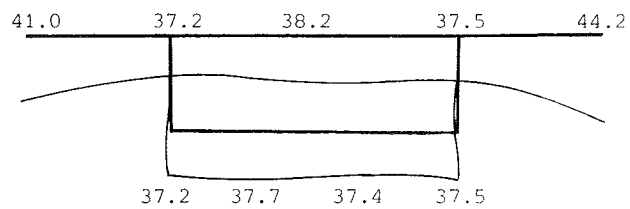
Presenta también interés el análisis de los esfuerzos axiles transversales, originados por la variación de tensiones tangenciales en la dirección longitudinal del puente, destacándose la difícil evaluación de este esfuerzo por métodos aproximados. En el ejemplo analizado se puede observar la importancia que este fenómeno puede tener, habiéndose obtenido sobre la pila tracciones de  $20 \text{ t/m}^2$  y compresiones de  $250 \text{ t/m}^2$ .



Tensiones Longitudinales  $\sigma_1$  en vano ( $x=20m$ )

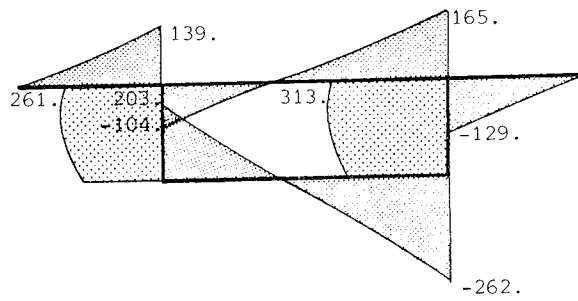


Tensiones Longitudinales  $\sigma_1$  en pila ( $x=50m$ )

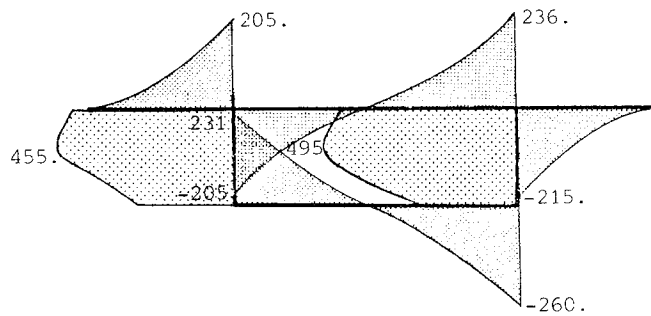


Flechas  $w$  en vano ( $x=20m$ )

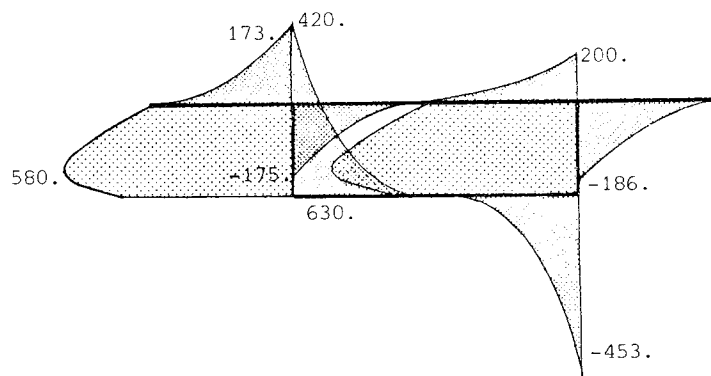
Fig. 5.2. (1) Puente de dos vanos. Tensiones Longitudinales y flechas.



Tensión Tangencial  $\tau_{12}$  en estribo ( $x=0$ )

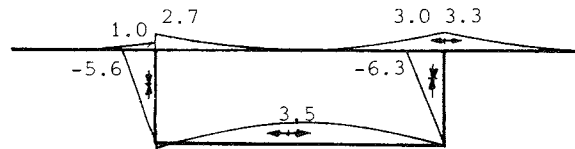


Tensión Tangencial  $\tau_{12}$  2m nila ( $x=48m$ )

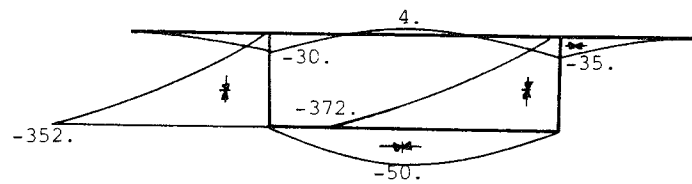


Tensión Tangencial  $\tau_{12}$  1m nila ( $x=49m$ )

Fig. 5.2. (2) Puente de dos vanos. Tensiones Tangenciales.



Axil transversal  $N_2$  en vano ( $x=20m$ )



Axil transversal  $N_2$  en pila ( $x=50m$ )

Fig. 5.2. (3) Puente de dos vanos. Axiles Transversales.

## 6. ESTUDIO PARAMETRICO DE UN PUENTE DE SECCION CAJON

El análisis de puentes curvos presenta mayores dificultades que el de los puentes rectos, no siendo fácil la determinación directa de los esfuerzos que aparecen en el tablero por efectos de la curvatura. Sin embargo, el conocimiento previo del orden de magnitud de dichos efectos tiene interés, tanto para la realización del predimensionamiento del puente, como en la determinación de la posibilidad de realizar un análisis simplificado del mismo, despreciando algunos de los efectos de la curvatura.

Con el fin de realizar una cuantificación del efecto de la curvatura sobre las funciones que se ven más afectadas por la misma, se ha realizado un estudio de tres series de tableros de 20, 40 y 100 m de longitud. Cada serie analizada consta de cuatro tableros, con radios de 100, 200, 1.000 y 10.000 metros, asimilándose este último caso al de puente recto.

La sección del tablero analizada, representada en la figura 5.1, es la misma que se ha utilizado en el ejemplo anterior.

Los casos de carga estudiados en cada uno de los tableros han sido tres:

- Sobrecarga uniforme de  $1 \text{ t/m}^2$  extendida en toda la superficie del tablero.
- Carga puntual de 100 t situada en el centro de la luz, sobre el alma exterior.
- Carga puntual de 100 t situada en el centro de la luz, sobre el alma interior.

A continuación se presentan gráficamente algunos de los resultados obtenidos. Estos se presentan en forma adimensional, para facilitar su aplicación práctica a diversas secciones transversales. Al ser la finalidad del estudio el obtener los valores de los esfuerzos a partir de los que aparecen en el tablero recto, se ha representado gráficamente la relación entre el esfuerzo que aparece en el tablero curvo y el que aparece en el tablero recto  $K = F(R_i)/F(R_\infty)$ .

Las funciones estudiadas han sido:

- Flecha en las almas, en el centro de la luz, representada en la figura 6.1.
- Tensión longitudinal en la losa superior, en el centro de la luz, figura 6.2.
- Tensión longitudinal en la losa inferior en el centro de la luz, figura 6.3.
- Tensión tangencial en las almas al nivel del centro de gravedad de la sección en apoyos, figura 6.4.

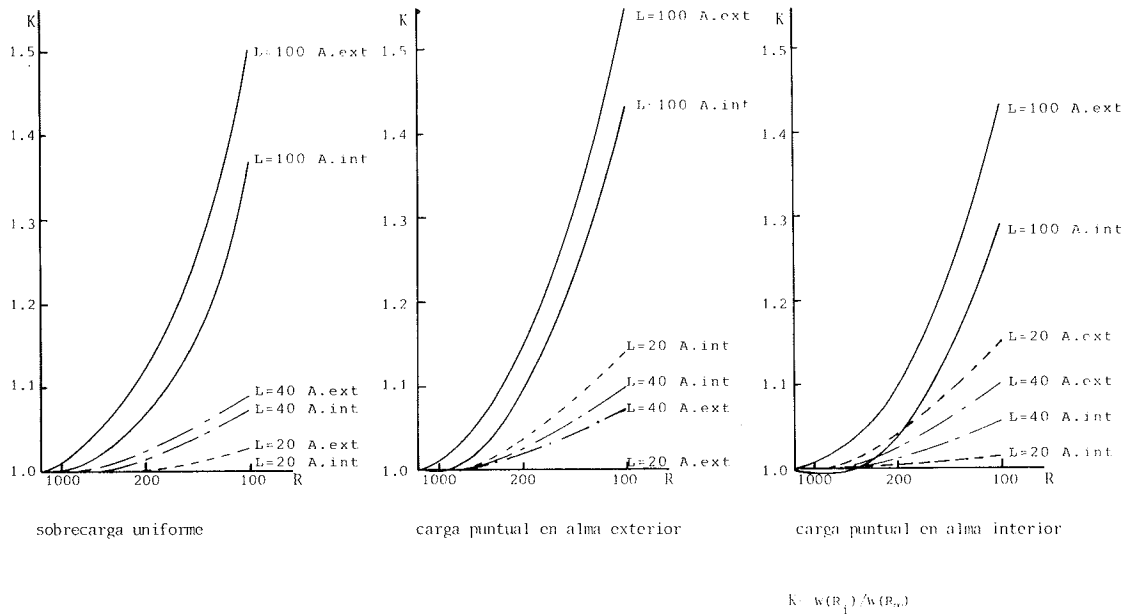


Fig. 6.1. Flecha en las almas,  $w$ .

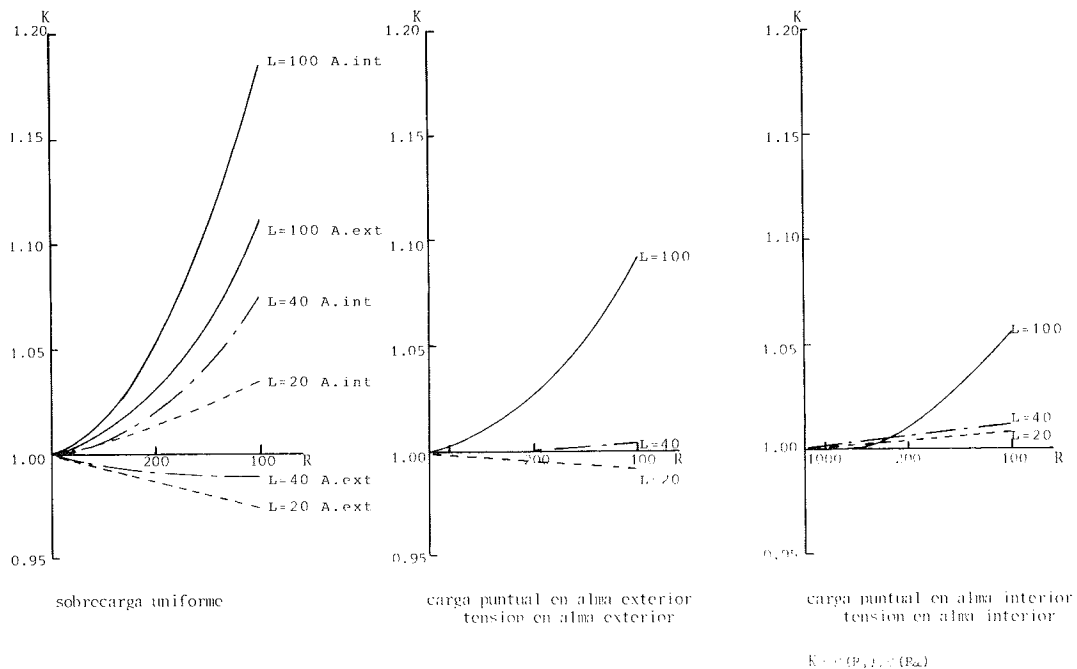


Fig. 6.2. Tensión longitudinal en losa superior,  $\sigma_{11}$ .



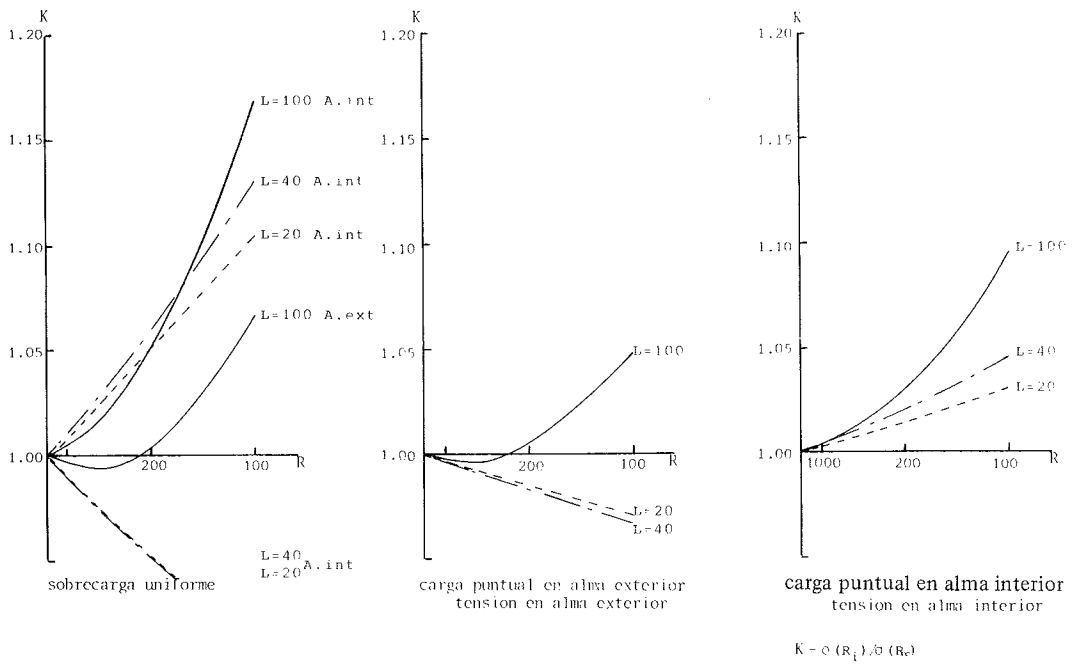


Fig. 6.3. Tensión longitudinal en losa inferior,  $\sigma_{11}$ .

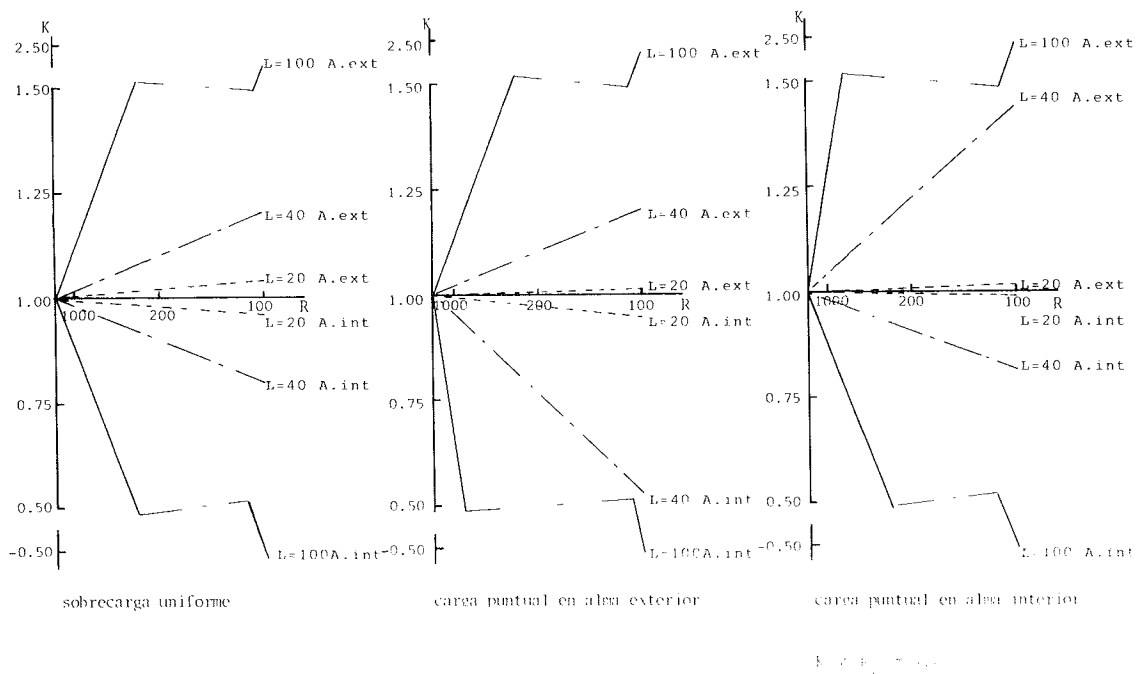


Fig. 6.4. Tensión tangencial en las almas,  $\tau_{12}$ .

## Apéndice 1: ANALISIS DE ESTRUCTURAS CONTINUAS

Como se ha indicado anteriormente, el método de cálculo directo de la Lámina Plegada no permite de forma inmediata el análisis de estructuras continuas. Sin embargo, es posible desarrollar un sistema mixto de cálculo con este fin.

El estudio de estructuras continuas puede efectuarse mediante una combinación del método de equilibrio utilizado para la estructura laminar y las estructuras de apoyo, y el de compatibilidad mediante el cual se obtienen las fuerzas de interacción entre lámina y apoyos que se tratan con incógnitas hiperestáticas.

El análisis se desarrolla según el siguiente esquema:

1. Se independiza la lámina plegada de las estructuras de apoyo (pilas con sus correspondientes diafragmas, etc), definiéndose los puntos de conexión en los que se exige compatibilidad de desplazamientos.
2. Se analiza la lámina sustentada en los apoyos extremos sometida a las cargas exteriores.
3. Se analiza la lámina bajo la actuación de fuerzas unitarias en los puntos de conexión con las estructuras de apoyo.
4. Se analizan, mediante programas generales de cálculo de estructuras reticuladas y/o elementos finitos, las estructuras de apoyo sometidas a fuerzas unitarias, iguales y contrarias a las aplicadas a la lámina en el apartado 3.
5. Planteamiento de las condiciones de compatibilidad de movimientos en los puntos de conexión a partir de los valores obtenidos en los apartados 2, 3 y 4 y resolución del sistema de ecuaciones resultante con la obtención de las fuerzas de interacción entre lámina y apoyos.
6. Obtención de los esfuerzos en la lámina y en las estructuras de apoyo sometidas a las acciones exteriores y a las fuerzas de conexión, mediante combinación lineal de los valores obtenidos en los apartados 2, 3 y 4 con los coeficientes resultantes en el apartado 5.

Los cálculos pueden realizarse directamente, mediante un programa que efectúe los pasos 5 y 6 a partir de los resultados, transmitidos mediante archivos de datos, generados en los pasos 2, 3 y 4 por el programa de Lámina Plegada y el de cálculo de estructuras reticuladas.

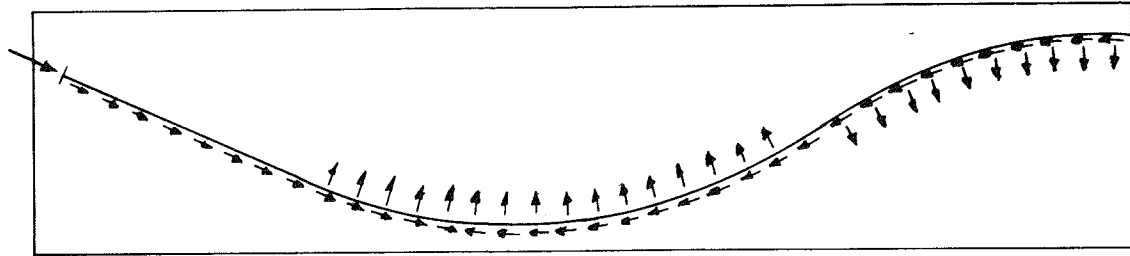
## Apéndice 2: ESTUDIO DE LOS ESFUERZOS ORIGINADOS POR EL PRETENSADO

El pretensado representa uno de los principales estados de carga a que se encuentran sometidos los puentes objeto de análisis con el método de la Lámina Plegada. Su actuación es en muchos aspectos contraria a la del resto de las cargas exteriores, por lo que algunos de los efectos originados por éstas quedan contrarrestados por el mismo.

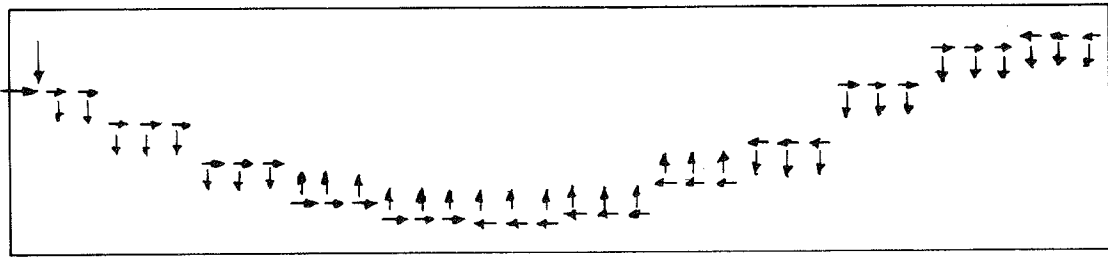
El estudio del pretensado plantea varios problemas, originados por la naturaleza de su forma de actuar. Las acciones que origina se pueden reducir a unas fuerzas concentradas en anclajes y unas fuerzas distribuidas a lo largo del tendón; estas últimas tienen una componente tangente al tendón debida al rozamiento y otra normal al mismo debida a la curvatura del trazado (fuerzas de desviación), actuando en una posición variable, tanto transversal co-

mo circunferencialmente [Fig. A2.1 (A)] por lo que su análisis no es abordable directamente.

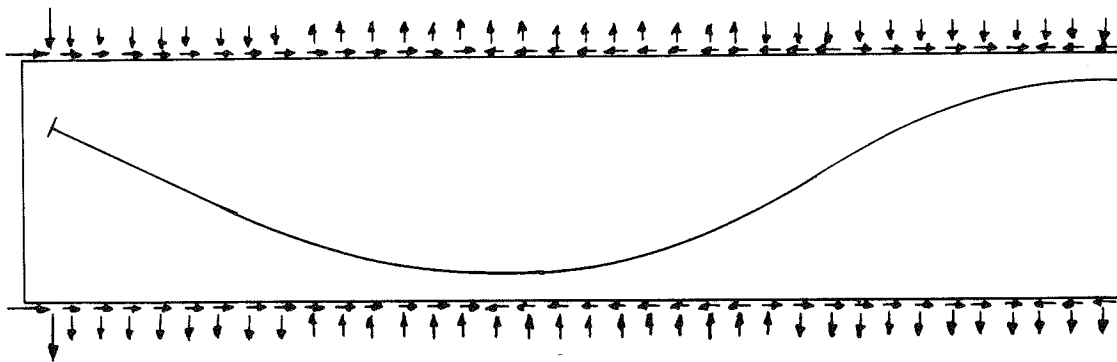
Un tratamiento del problema, puede ser la discretización del tendón en una serie de tramos. En cada tramo, y al nivel del centro de gravedad del tendón en el mismo, se sustituyen las cargas actuantes por dos cargas uniformes (horizontal y vertical) equivalentes [fig. A 2.1 (B)].



A) Acciones originadas por el pretensado.



B) Discretización mediante cargas en lámina.



C) Discretización mediante cargas en aristas.

Fig. A 2.1. Análisis de las acciones de pretensado.

Esta aproximación plantea dos problemas. El primero, es la necesidad de obtener la solución de las ecuaciones de las láminas con carga en un punto intermedio de la misma. Este problema que puede ser resuelto en el caso de lámina plana o cilíndrica, no tiene solución en el caso de lámina cónica, mediante la técnica de Bandas Finitas. El segundo problema radica en el hecho de aparecer gran número de cargas, ya que por cada tendón se introducen dos cargas por cada uno de los tramos en que se divide la estructura.

Un segundo método, consiste en sustituir las fuerzas repartidas calculadas según el método anterior, por parejas de fuerzas estáticamente equivalentes aplicadas en las aristas de la lámina [fig. A 2.1 (C)]. Este método evita el tener que resolver las ecuaciones de las láminas para las cargas aplicadas en el interior de la misma y reduce a cuatro el número de cargas que hay que aplicar en cada tramo, con independencia del número de tendones. Sin embargo, por este método no es posible analizar los esfuerzos locales, especialmente la introducción de las fuerzas concentradas en anclajes.

## CONCLUSIONES

A la vista del trabajo realizado, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- La resolución de las ecuaciones de las láminas rebajadas correspondientes a diversos casos particulares de láminas, permite la ampliación del método de las Láminas Plegadas al análisis de estructuras no rectas, como son, las estructuras de planta circular.
- La utilización de elementos de lámina “exactos”, es decir obtenidos por resolución analítica de las ecuaciones de las láminas rebajadas, permiten el análisis de estructuras con un número mínimo de elementos. El número de elementos se reduce a los necesarios para representar la geometría de la estructura analizada, con independencia de las dimensiones de los elementos resultantes y de la posición de las cargas.

En los casos en los que sea necesario introducir elementos de lámina cónica, se obtienen resultados correctos con la utilización de un único elemento de banda finita por cada lámina que hay que representar.

- Los elementos obtenidos por resolución directa de las ecuaciones de la lámina rebajada, permiten obtener exactamente, en cualquier punto de la lámina, todos los esfuerzos y desplazamientos que aparecen en la misma.

El elemento obtenido, en el caso de la lámina cónica, por el método de las bandas finitas, debido a haberse utilizado polinomios de quinto grado para los desplazamientos normales al plano tangente a la lámina, representan con suficiente exactitud los esfuerzos de flexión. Por haberse usado para los movimientos en el plano tangente polinomios de segundo grado, no es posible deducir exactamente la variación del esfuerzo tangencial  $T_{12}$  en el interior del elemento.

La obtención de la distribución exacta del esfuerzo tangencial en la dirección transversal de la lámina, se puede realizar a partir de los valores suministrados por el programa.

- La comparación del método de la lámina plegada curva con otros métodos de cálculo de estructuras espaciales de planta circular (elementos finitos y bandas finitas), permite demostrar la eficacia del mismo, tanto por la exactitud de sus resultados como por el reducido número de elementos necesarios para analizar la estructura.
- Es posible ampliar el método de la lámina plegada a estructuras de varios vanos, o que contengan elementos que no puedan ser analizados adecuadamente mediante el análisis como lámina.
- Se aporta un estudio de la influencia de la curvatura sobre los esfuerzos y deformaciones de un tablero tipo, para distintas luces. El estudio se ha realizado con un tablero de sección cajón monoceular, de 12 m de ancho, con luces comprendidas entre 20 y 100 m; lo que permite su aplicación al predimensionamiento de puentes de dimensiones normales.

## BIBLIOGRAFIA

1. Cheung Y.: "Folded plate structures by Finite Strip method". ASCE Structural Division, Dic. 1969.
2. De Fries-Skene A. y Scordelis A.C.: "Direct Stiffness solution for folded plates". ASCE Structural Division, Agosto 1964.
3. Goldenveizer A.L.: "Theory of Elastic Thin Shells". Pergamon Press, 1961.
4. González Esteban J.I. "Análisis de puentes de planta circular por el método de la lámina plegada". Tesis doctoral presentada en la ETSICCP de Santander, 1985.
5. Kabir A.F. y Scordelis A.C.: "Computer program for curved bridges on flexible bents". Report UCB-SESM 74-10. Universidad de California, en Berkeley, 1974.
6. Lin C.S. y Scordelis A.C., "Computer program for bridges on flexible bents". Report UCB-SESM 71-24 Universidad de California, en Berkeley, Diciembre 1971.
7. Manterola, J.: "Estudio sobre tableros de puentes, Parte II - La sección cajón". Hormigón y Acero, nº 139, 2º trimestre 1981.
8. Meyer C.: "Analysis and design of curved box girder bridges". Report UCB-SESM 70-22. Universidad de California, en Berkeley, 1970.
9. Novozhilov V.V. "Thin Shell Theory". Noordhoff, 1970.
10. Samartín A.: "Aplicación de los métodos matriciales al cálculo de puentes". Pub. Lab. Central de Ensayos, nº 192, 1967.
11. Scordelis A.C.: "Analysis of Continuous Box Girder Bridges". Report UCB-SESM 67-25. Universidad de California, en Berkeley, Nov. 1967.
12. Vlassov V.Z.; "General theory of Shells and its Applications in Engineering". N.A.S.A., 1964.

## RÉSUMÉ

### ANALYSE DES PONTS CIRCULAIRES EN PLAN, POUR LA MÉTHODE DE LA LAME PLIÉE

Le comportement des ponts circulaires en plan et de section transversal très allégée, pose un problème complexe en ce qui concerne à la répartition des efforts (interaction, flexion-torsion, distorsion, répartition des efforts parmi les différentes âmes, etc.). Pour pouvoir réaliser un correct étude de ce problème, il est nécessaire disposer d'une méthode de calcul capable d'analyser globalement le comportement de le structure. La méthode de la lame pliée est un outil de travail effectif et de facile utilisation, valable pour les structures de section transversal constante.

Dans cet article on présent une extension de la méthode de la lame pliée à cet type structurale, ainsi qu'un étude paramétrique du comportement d'un pont de section en caisson monucellulaire.

## SUMMARY

### ANALYSIS OF CIRCULAR IN PLAN BRIDGES BY THE FOLDED PLATE METHOD

The behavior of circular in plan box section bridges, presents a complex problem of stress distribution (bending-torsion interaction, distortion, stress distribution among the different webs, etc.). In order to make a correct study, it is necessary to have an analysis method that would be able to make a global approach to the structure behavior. The Folded Plate method is an effective and of easy utilization procedure, valid for constant section structures.

In this article an extention of the Folded Plate Method to this structural form is presented; also is included a parametric study of the behavior of a single cell box circular bridge.

## **Simposio Internacional sobre "Re-evaluación de las estructuras de hormigón"**

El Instituto Danés del Hormigón, con motivo de su X Aniversario, ha organizado un Simposio Internacional sobre "Re-evaluación de las estructuras de hormigón", que se celebrará en la Universidad Técnica de Dinamarca, Copenhagen-Lyngby, durante los días 13 a 15 de junio del próximo año 1988.

Antes de iniciarse el Simposio, en la tarde del domingo 12 de junio, se celebrará una recepción de bienvenida a los participantes y de conmemoración del X Aniversario del Instituto Danés del Hormigón.

El jueves, día 14, tendrá lugar la cena de clausura.

Se han programado varias visitas turísticas, para los acompañantes, a diversos lugares de los alrededores de Copenhagen.

El programa provisional del Simposio es el siguiente:

Lunes, 13 de junio de 1988:

9,30- 9,45: Apertura y registro de participantes.

9,45-10,30: Discurso de inauguración.

11,00-13,00: 1ª Sesión: "Comportamiento de las estructuras bajo las acciones ambientales".

14,30-17,30: 2ª Sesión: "Tipos de cargas reales y de cálculo".

Martes, 14 de junio de 1988:

9,30-12,00: 3ª Sesión: "Seguridad y fiabilidad".

13,30-17,30: 4ª Sesión: "Re-evaluación de las estructuras".

Miércoles, 15 de junio de 1988:

9,00-12,30: 5ª Sesión: "Re-diseño y rehabilitación".

12,30-12,45: Clausura.

14,00-18,00: Visita técnica, opcional, a una importante estructura de hormigón, en reparación. Se comentarán los métodos aplicados para la valoración de daños y re-evaluación de la estructura.

Los interesados en participar en este Simposio o recibir una más amplia información sobre el mismo, pueden dirigirse a:

RE-EVALUATION OF CONCRETE STRUCTURES – Symposium 1988.

Symposium Secretariat

BB Training

Strandvejen 266 B

DK-3070 Snekkersten

Dinamarca

# Reajuste de la ley de momentos flectores de dinteles, en la zona de empotramiento en los soportes de hormigón

Rodrigo Bernárdez  
Ingeniero Técnico Industrial  
Maquinista Naval  
Construcciones y Contratas, S.A.

## PRESENTACION DEL PROBLEMA

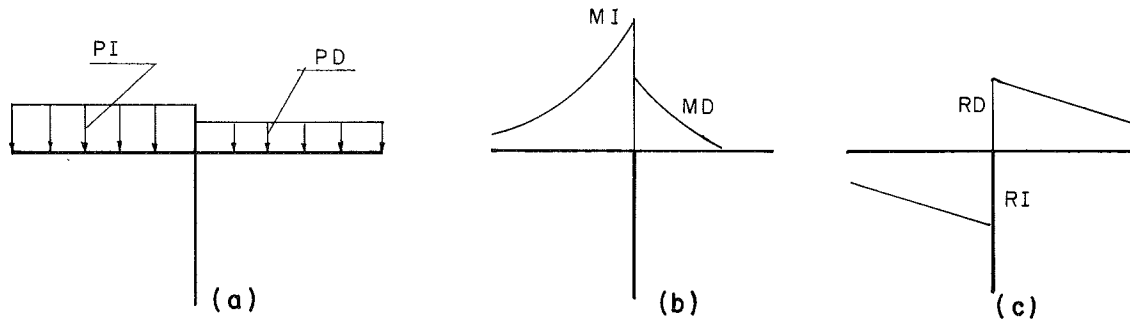
Cuando el dintel está empotrado en el soporte, se produce una diferencia de momentos a la izquierda y derecha de su eje, diferencia que es precisamente el momento que absorbe el soporte. Este momento es tanto mayor cuanto lo es la rigidez del soporte, la descompensación de las luces de los vanos que inciden en él y las cargas que soportan.

Entre otros autores, Carlos Fernández Casado trata el tema de la ley de momentos en el canto del soporte en su libro "Estructuras de edificios" y también lo hace José Calavera Ruiz en "Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón armado para edificios. Tomo I".

Ambos autores suponen un reparto uniforme en el ancho del soporte, de la reacción a que está sometido, con lo cual la ley de momentos flectores que esta carga produce es una parábola de eje vertical, tangente a las leyes de momentos flectores a ambos lados del eje del soporte en los puntos de intersección con las verticales trazadas por sus caras, y también tangente a la cuerda que une los puntos medios de los segmentos de tangentes a las anteriores leyes, comprendidos entre los puntos de tangencia y las intersecciones con el eje del soporte.

El presente trabajo enfoca el problema desde tres puntos de vista. El primero es una variante del expuesto por los anteriores autores; el segundo supone que la sección del pilar está en rotura y el tercero halla las reacciones del pilar en función de la deformación real que tiene de acuerdo con el diagrama parábola-rectángulo.

## 1. DETERMINACION ANALITICA DE LA CURVA DE ACUERDO



Supongamos un dintel con las cargas que se indican en (a) que las podemos considerar uniformemente repartidas en el entorno del pilar, y cuyas leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes son las que figuran en (b) y (c). Los esfuerzos que soporta el pilar estarán constituidos por el momento  $MI-MD$  y la reacción  $RI + RD$ , los cuales producirán un reajuste de las anteriores leyes en la zona comprendida entre los parámetros del pilar, como consecuencia de las tensiones que en él se originan. Este es el problema del redondeo, cuyo estudio analítico presenta dos casos en el reajuste de la ley de momentos flectores en el dintel.

### 1.1. Puede encajarse una única curva de acuerdo, convexa

Esto es posible en función de los valores relativos de  $MI$  y  $MD$ , de las pendientes de las leyes de flectores  $CI$  y  $CD$  y del canto  $C$  del pilar.

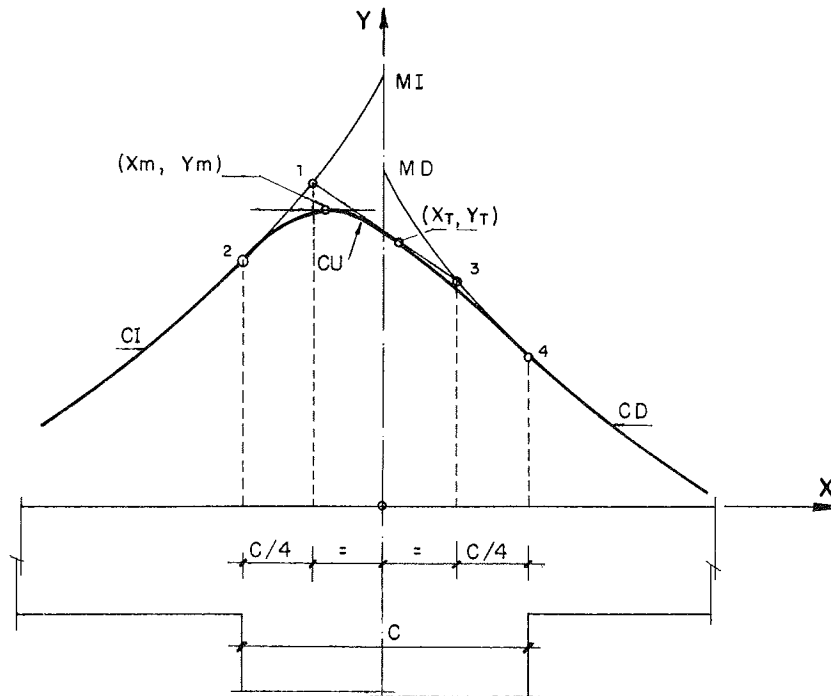


Fig. 1.



La curva de acuerdo CU se encaja de manera que sea tangente a las leyes de flectores en los puntos 2 y 4, y a la cuerda que une los puntos 1 y 3 definidos de la forma que a continuación se indica. Sean  $(X_T, Y_T)$  las coordenadas de este último punto de tangencia y  $(X_m, Y_m)$  las del máximo momento flector.

Las ecuaciones de las tres últimas curvas referidas son:

$$\text{Curva CI: } Y = MI + \left( \frac{PI}{2} x + RI \right) \cdot x$$

$$\text{Curva CD: } Y = MD + \left( \frac{PD}{2} x - RD \right) \cdot x$$

$$\text{Curva CU: } Y = A x^4 + B x^3 + D x^2 + E x + F$$

Habrà, por tanto, que determinar los coeficientes A, B, D, E y F. Representando por  $m_i$  a la pendiente en el punto i, los puntos base quedan definidos por las siguientes relaciones:

$$\text{Punto 1: } X_1 = -C/4$$

$$Y_1 = MI - \frac{C}{4} \left( RI - \frac{PI}{8} C \right)$$

$$\text{Punto 2: } X_2 = -C/2$$

$$Y_2 = MI - \frac{C}{2} \left( RI - \frac{PI}{4} C \right)$$

$$m_2 = RI - \frac{PI}{2} \cdot C$$

$$\text{Punto 3: } X_3 = C/4$$

$$Y_3 = MD + \left( \frac{PD}{8} \cdot C - RD \right) \cdot \frac{C}{4}$$

$$\text{Punto 4: } X_4 = C/2$$

$$Y_4 = MD + \frac{C}{2} \left( \frac{PD}{4} \cdot C - RD \right)$$

$$m_4 = \frac{PD}{2} \cdot C - RD$$

$$\text{Recta 1-3: } Y = m(x - x_1) + Y_1 \quad \text{siendo} \quad m = \frac{2(Y_3 - Y_1)}{C}$$

Las condiciones para definir la curva CU son las siguientes:

1. Pasa por el punto 2 y es tangente a la curva CI

$$Y_2 = A \cdot x_2^4 + B \cdot x_2^3 + D \cdot x_2^2 + E \cdot x_2 + F$$

$$m_2 = 4 A \cdot x_2^3 + 3 B \cdot x_2^2 + 2 D \cdot x_2 + E$$

2. Pasa por el punto 4 y es tangente a la curva CD

$$Y_4 = A \cdot x_4^4 + B \cdot x_4^3 + D \cdot x_4^2 + E \cdot x_4 + F$$

$$m_4 = 4 A \cdot x_4^3 + 3 B \cdot x_4^2 + 2 D \cdot x_4 + E$$

3. Es tangente a la recta 1-3 en el punto  $(X_T, Y_T)$

$$Y_1 + m \cdot x_T - m \cdot x_1 = A \cdot x_T^4 + B \cdot x_T^3 + D \cdot x_T^2 + E \cdot x_T + F \quad (I)$$

$$m = 4 A \cdot x_T^3 + 3 B \cdot x_T^2 + 2 D \cdot x_T + E$$

Operando con todas las ecuaciones salvo con la (I) se obtienen:

$$B = \frac{m_2 + m_4}{C^2} - \frac{2(Y_4 - Y_2)}{C^3}$$

$$E = \frac{3}{2} \frac{Y_4 - Y_2}{C} - \frac{m_2 + m_4}{4}$$

$$A = \frac{3 B \cdot x_T^2 + \frac{m_4 - m_2}{C} \cdot x_T + E - m}{(C^2 - 4 x_T^2) \cdot x_T} \quad \text{Válido si } x_T \neq 0 \text{ y } x_T \neq \pm \frac{C}{2}$$

$$F = \frac{Y_2 + Y_4}{2} - \frac{m_4 - m_2}{8} \cdot C + \frac{C^4}{16} \cdot A$$

$$D = \frac{m_4 - m_2}{2 C} - \frac{C^2}{2} \cdot A$$

Haciendo:

$$\alpha = \frac{m_4 - m_2}{2 C}$$

$$\beta = \frac{Y_2 + Y_4}{2} - \frac{C^2}{4} \cdot \alpha$$

Resulta:

$$A = \frac{(3 B \cdot x_T + 2 \alpha) \cdot x_T + E - m}{(C^2 - 4 \cdot x_T^2) \cdot x_T}$$

$$D = \alpha - \frac{C^2}{2} \cdot A$$

$$F = \beta + \frac{C^4}{16} \cdot A$$

Sustituyendo valores en la ecuación (I) y haciendo:

$$G = \frac{1}{2} \cdot B \cdot C^2 - 3(m - E)$$

$$H = -4 \left( Y_1 + m \frac{C}{4} - \beta \right)$$

$$I = \frac{C^2}{2} (m - E) - \frac{3}{16} \cdot C^4 \cdot B$$

$$K = C^2 \left( Y_1 + m \frac{C}{4} - \beta - \alpha \frac{C^2}{8} \right)$$

$$L = \frac{C^4}{16} (m - E)$$

se obtiene la función:

$$f(x_T) = B \cdot x_T^6 + 2\alpha \cdot x_T^5 + G \cdot x_T^4 + H \cdot x_T^3 + I \cdot x_T^2 + K \cdot x_T + L = 0$$

cuyo valor cero, comprendido en el intervalo  $\left[-\frac{C}{4}, \frac{C}{4}\right]$ , se puede calcular mediante la regla de Newton o la "Regula falsi".

Calculado  $x_T$ , el valor de  $Y_T$  es:

$$Y_T = m \left( x_T + \frac{C}{4} \right) + Y_1$$

El punto de tangente horizontal se obtiene de la función:

$$\varphi(x_m) = 4A \cdot x_m^3 + 3B \cdot x_m^2 + 2D \cdot x_m + E = 0$$

y calculado  $x_m$ , el máximo momento flector es:

$$Y_m = A \cdot x_m^4 + B \cdot x_m^3 + D \cdot x_m^2 + E \cdot x_m + F$$

Si  $x_T = 0$ , sustituyendo en la ecuación (I) se obtiene:

$$A = \frac{16}{C^4} \left( Y_1 + m \frac{C}{4} - \beta \right)$$

Si  $x_T \geq \frac{C}{4}$  ó  $x_T \leq -\frac{C}{4}$ , no hay solución con una curva convexa.

## 1.2. La curva de acuerdo presenta un punto de inflexión

La solución en este caso, consiste en plantear una curva convexo-cóncava con un punto de inflexión en  $(X_T, Y_T)$ .

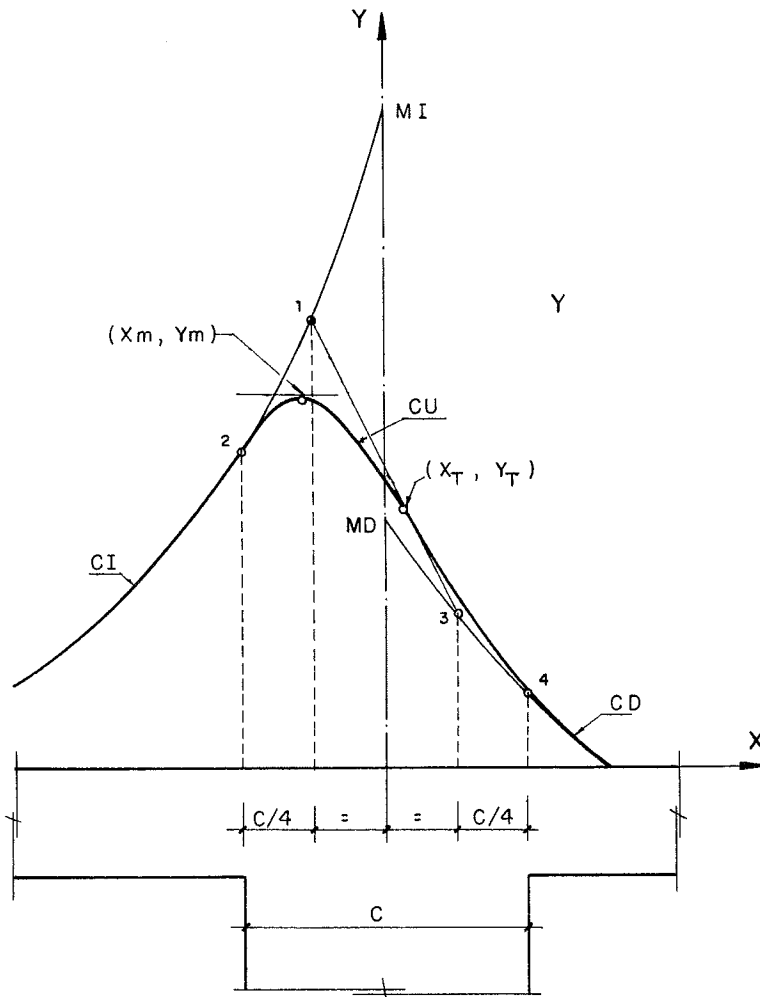


Fig. 2.

La ecuación de dicha curva es:

$$Y = A x^5 + B x^4 + D x^3 + E x^2 + F x + H$$

cuyas constantes se determinan por las siguientes condiciones:

1. Pasa por el punto 2 y es tangente a la curva CI

$$Y_2 = A \cdot x_2^5 + B \cdot x_2^4 + D \cdot x_2^3 + E \cdot x_2^2 + F \cdot x_2 + H$$

$$m_2 = 5 A \cdot x_2^4 + 4 B \cdot x_2^3 + 3 D \cdot x_2^2 + 2 E \cdot x_2 + F$$

2. Pasa por el punto 4 y es tangente a la curva CD

$$Y_4 = A \cdot x_4^5 + B \cdot x_4^4 + D \cdot x_4^3 + E \cdot x_4^2 + F \cdot x_4 + H$$

$$m_4 = 5 A \cdot x_4^4 + 4 B \cdot x_4^3 + 3 D \cdot x_4^2 + 2 E \cdot x_4 + F$$

3. Es tangente a la recta 1-3 en el punto  $(X_T, Y_T)$  que es de inflexión.

$$Y_1 + m \cdot x_T - m \cdot x_1 = A \cdot x_T^5 + B \cdot x_T^4 + D \cdot x_T^3 + E \cdot x_T^2 + F \cdot x_T + H \quad (\text{II})$$

$$m = 5 A \cdot x_T^4 + 4 B \cdot x_T^3 + 3 D \cdot x_T^2 + 2 E \cdot x_T + F$$

$$0 = 10 A \cdot x_T^3 + 6 B \cdot x_T^2 + 3 D \cdot x_T + E$$

Haciendo operaciones con todas las ecuaciones salvo con la (II), se obtienen las siguientes expresiones:

$$A (20 x_T^6 - 9 C^2 \cdot x_T^4 + \frac{3 C^4}{4} \cdot x_T^2 + \frac{C^6}{16}) = \frac{12}{C^2} (m_2 + m_4 - 2 \frac{Y_4 - Y_2}{C}) \cdot x_T^4 +$$

$$+ 8 \frac{m_4 - m_2}{C} \cdot x_T^3 + 12 (\frac{Y_4 - Y_2}{C} - m) \cdot x_T^2 - C^2 (\frac{3}{2} \frac{Y_4 - Y_2}{C} - \frac{m_2 + m_4}{4} - m)$$

$$B = - \frac{2}{12 x_T^2 - C^2} [(10 x_T^2 - \frac{3}{2} C^2) \cdot x_T \cdot A + \frac{3}{C^2} (m_2 + m_4 - 2 \frac{Y_4 - Y_2}{C}) \cdot x_T + \frac{m_4 - m_2}{2 C}]$$

$$D = \frac{m_2 + m_4}{C^2} - 2 \frac{Y_4 - Y_2}{C^3} - \frac{C^2}{2} \cdot A$$

$$E = \frac{m_4 - m_2}{2 C} - \frac{C^2}{2} \cdot B$$

$$F = \frac{3}{2} \frac{Y_4 - Y_2}{C} - \frac{m_2 + m_4}{4} + \frac{C^4}{16} \cdot A$$

$$H = \frac{Y_4 + Y_2}{2} - C \cdot \frac{m_4 - m_2}{8} + \frac{C^4}{16} \cdot B$$

Por la ecuación (II) se calcula el valor cero de la función:

$$f(x_T) = A \cdot x_T^5 + B \cdot x_T^4 + D \cdot x_T^3 + E \cdot x_T^2 + (F-m) \cdot x_T + H - Y_1 - m \frac{C}{4} = 0$$

Determinadas las constantes, el punto de tangente horizontal se calcula por la expresión:

$$\varphi(x_m) = 5 A \cdot x_m^4 + 4 B \cdot x_m^3 + 3 D \cdot x_m^2 + 2 E \cdot x_m + F = 0 \quad (*)$$

---

(\*) Las raíces exactas de esta ecuación de cuarto grado pueden obtenerse por el método clásico de Ferrari, que fue discípulo de Cardano, o por el método desarrollado por el autor de este trabajo y que actualmente está en fase de publicación. La ventaja de éste sobre el primero estriba en que es más rápida la obtención de las raíces y es fácilmente programable.

y el máximo momento flector es:

$$Y_m = A \cdot x_m^5 + B \cdot x_m^4 + D \cdot x_m^3 + E \cdot x_m^2 + F \cdot x_m + H$$

Para la aplicación de los dos métodos que siguen, es necesario que se verifiquen las hipótesis básicas que indica la Instrucción EH-82, para cálculo de secciones sometidas a sollicitaciones normales (Art. 36.1).

## 2. METODO SUPONIENDO EN ROTURA LA SECCION DEL PILAR

Los esfuerzos exteriores que actúan en la sección del pilar, se pueden reducir a los extremos de su canto, obteniéndose las expresiones:

$$R_A = R_I - P_I \cdot \frac{C}{2}$$

$$M_A = M_I + P_I \cdot \frac{C^2}{8} - R_I \cdot \frac{C}{2}$$

$$R_B = R_D - P_D \cdot \frac{C}{2}$$

$$M_B = M_D + P_D \cdot \frac{C^2}{8} - R_D \cdot \frac{C}{2}$$

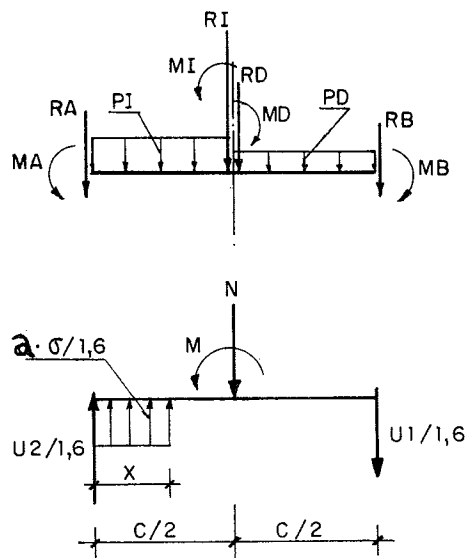


Fig. 3.

El pilar se dimensionará para los esfuerzos  $N$ ,  $M$  cuyos valores son:

$$N = R_I + R_D$$

$$M = M_I - M_D$$

Siendo "a" el ancho del pilar y suponiendo que éste reaccione mediante un diagrama rectangular de tensiones y adoptando como coeficiente de seguridad 1,6, de las ecuaciones de equilibrio entre los esfuerzos exteriores y los inducidos en la sección, se obtienen las siguientes expresiones:

$$x = C - \sqrt{C^2 - [1,6 (C \cdot N + 2 M) - 2 C \cdot U_2] / a \cdot \sigma}$$

$$U_1 = a \cdot \sigma \cdot x + U_2 - 1,6 N$$

siendo  $U_1$  y  $U_2$ , respectivamente, las capacidades mecánicas de las armaduras de tracción y compresión. Para  $\sigma$  puede tomarse el valor 0,7 fcd que adopta la Instrucción EH-82 en el método simplificado del momento tope (Art. 37).

Estas igualdades son válidas si

$$M \leq \frac{C}{2} \left( \frac{a \cdot C \cdot \sigma + 2 U_2}{1,6} - N \right)$$

En caso contrario, debe hacerse:

$$U_2 \geq 0,8 N + 1,6 \frac{M}{C} - \frac{a \cdot C \cdot \sigma}{2}$$

para poder aplicar las anteriores fórmulas.

Si fuera  $U_1 = U_2 = 0$ , de las ecuaciones de equilibrio se obtendría:

$$x = C - \frac{2 M}{N}$$

$$\sigma = \frac{1,6 N}{a \cdot x}$$

Definida la ley de reacción de la sección, por la Fig. 4, pueden calcularse los esfuerzos en las secciones intermedias del pilar, considerando a éste como si fuera un elemento de rigidez infinita en la dirección de su altura.

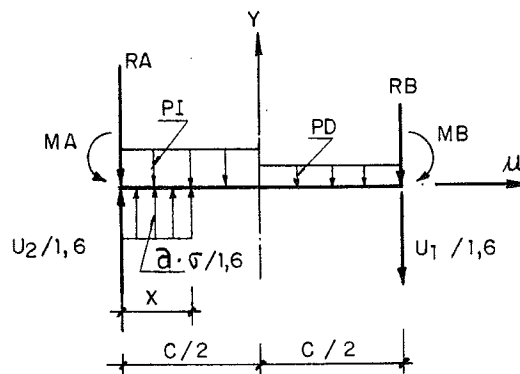


Fig. 4.

### 3. METODO BASADO EN LA CURVATURA QUE ADOPTA LA SECCION

El método que a continuación se expone se basa en el artículo "Diagramas axil-momento-curvaturas de una sección de hormigón armado solicitada por una flexo-compresión plana o biaxial" publicado en esta revista por Luis M. Villegas Cabredo y Juan J. Arenas de Pablo.\*

Aplicado a este caso, en esencia consiste en lo siguiente: Se define el diagrama axil-curvatura de la sección, en el que se distinguen los cuatro dominios de deformación en rotura que quedan comprendidos entre los puntos que se indican en la Fig. 5, con las deformaciones límites  $\epsilon_A$  y  $\epsilon_B$  de las fibras extremas de la sección. (Art. 36.2 de la Instrucción EH-82).

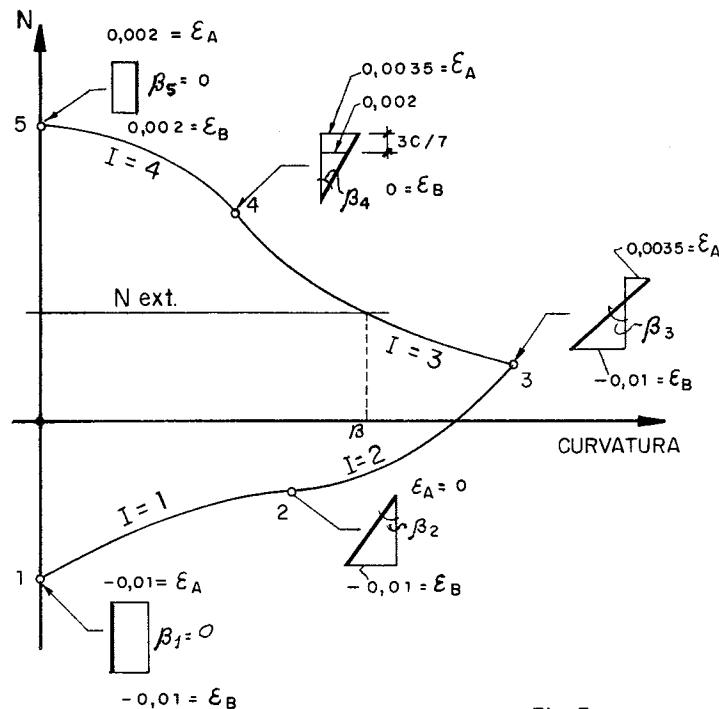


Fig. 5.

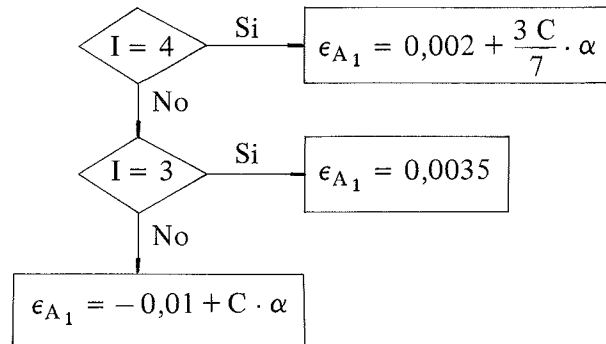
Para cada uno de ellos puede calcularse el axil de reacción de la sección, ya que con el diagrama tensión-deformación adoptado para el hormigón, que consideramos el parábola-rectángulo definido por la Instrucción EH-82, (Art. 26.6.a), se pueden integrar los esfuerzos generados por las tensiones correspondientes a cada deformación, a los que sumarán los que producen las armaduras comprimidas y traccionadas.

Definido el dominio de deformación en rotura, en el que está comprendido  $N_{ext}$ , axil soportado por el pilar, la curvatura  $\beta$  de la sección correspondiente a ese axil puede hallarse mediante interpolaciones sucesivas, variando la curvatura en ese intervalo hasta que el axil de reacción de la sección y el de sus armaduras sea igual al axil exterior. Así obtendremos también el momento  $M$  de reacción de la sección, con lo cual ya disponemos de un primer valor que relaciona el axil exterior, el acortamiento de la fibra más comprimida, la curvatura de la sección y el momento de reacción.

\* Hormigón y Acero N° 148, tercer trimestre de 1983. Págs. 61-86.



Si ahora consideramos una nueva curvatura  $\alpha = \beta/n$  siendo  $n$  un número suficientemente alto, y el acortamiento de la fibra más comprimida lo definimos de acuerdo con el siguiente organigrama:



se pueden calcular los axiles de reacción de la sección, correspondientes a las deformaciones extremas indicadas en el diagrama de la Fig. 6, e interpolando sucesivamente se puede obtener el acortamiento  $\epsilon_{A\alpha}$  de la fibra más comprimida que para la curvatura  $\alpha$  produzca un axil de reacción igual a  $N_{ext}$  y también su momento de reacción.

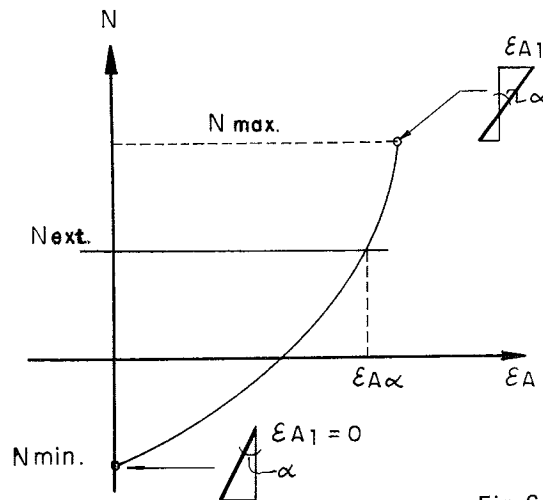


Fig. 6.

Finalmente, interpolando en el diagrama curvatura-momento de reacción de la sección (Fig. 7), podremos determinar la curvatura correspondiente a un momento de reacción igual al momento  $M_{ext}$ , soportado por el pilar, repitiendo los pasos descritos desde el organigrama hasta que consideremos admisible la aproximación entre el momento exterior y el de reacción de la sección.

Obtenida la deformación de la sección que equilibra a los esfuerzos exteriores, los esfuerzos finales en el dintel para las secciones intermedias del pilar, composición de los exteriores y los de reacción, se obtienen de forma análoga a la indicada en el 2º método, con la salvedad de que las tensiones en el hormigón no serán las debidas a un diagrama rectangular, sino al que se obtenga mediante el diagrama parábola-rectángulo para la deformación correspondiente a cada fibra activa del hormigón.

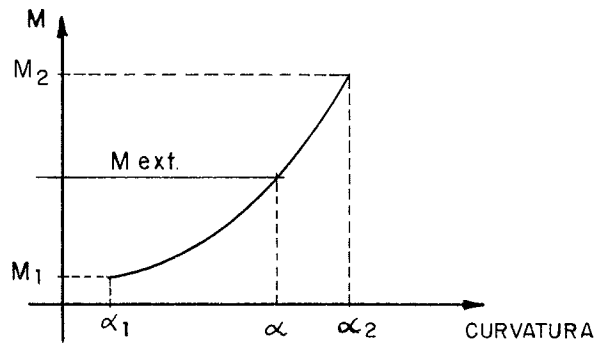


Fig. 7.

Un método de interpolación que se puede utilizar en las aproximaciones sucesivas que es necesario realizar en las curvas de las figuras 5, 6 y 7, es el siguiente: Dados los puntos 1 y 2 de la función  $V = f(\mu)$  cuya traza se desconoce, se calcula el nuevo valor de la función para  $\mu_c$  abscisa de la recta 1-2 para la ordenada C. Si este nuevo valor es  $VC_1$  en la siguiente aproximación se considera la recta 3-2 y si es  $VC_2$ , tomaríamos la recta 1-4. (Véase fig. 8).

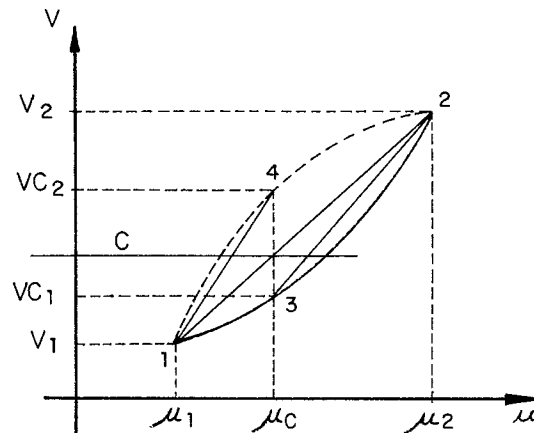


Fig. 8.

## CONCLUSION

Como aplicación de los métodos expuestos, se adjuntan tres ejemplos diversos, en los que se observa que son prácticamente iguales los reajustes de momentos que se obtienen al aplicar cada uno de ellos, y por lo tanto y como conclusión, podemos afirmar que para todos los casos estudiados, la aplicación del segundo método es suficiente y su simplicidad es manifiesta respecto de los otros dos.

En los ejemplos se calculan los momentos flectores para las secciones definidas respecto del eje del pilar, y en cada método se indican los siguientes valores:

1. Método curva de acuerdo: Coordenadas  $(X_T, Y_T)$  del punto de tangencia y  $(X_m, Y_m)$  de máximo momento. Con acuerdo tipo 1 se indica una curva de acuerdo convexa y con el tipo 2 la convexo-cóncava o viceversa. Se observa que el mayor porcentaje de reducción se obtiene con el acuerdo tipo 2.
2. Método hormigón en rotura: Capacidades mecánicas  $U_1$  y  $U_2$  de las armaduras trac-

Sustituyendo valores en la ecuación (I) y haciendo:

$$G = \frac{1}{2} \cdot B \cdot C^2 - 3(m - E)$$

$$H = -4 \left( Y_1 + m \frac{C}{4} - \beta \right)$$

$$I = \frac{C^2}{2} (m - E) - \frac{3}{16} \cdot C^4 \cdot B$$

$$K = C^2 \left( Y_1 + m \frac{C}{4} - \beta - \alpha \frac{C^2}{8} \right)$$

$$L = \frac{C^4}{16} (m - E)$$

se obtiene la función:

$$f(x_T) = B \cdot x_T^6 + 2\alpha \cdot x_T^5 + G \cdot x_T^4 + H \cdot x_T^3 + I \cdot x_T^2 + K \cdot x_T + L = 0$$

cuyo valor cero, comprendido en el intervalo  $\left[-\frac{C}{4}, \frac{C}{4}\right]$ , se puede calcular mediante la regla de Newton o la "Regula falsi".

Calculado  $x_T$ , el valor de  $Y_T$  es:

$$Y_T = m \left( x_T + \frac{C}{4} \right) + Y_1$$

El punto de tangente horizontal se obtiene de la función:

$$\varphi(x_m) = 4A \cdot x_m^3 + 3B \cdot x_m^2 + 2D \cdot x_m + E = 0$$

y calculado  $x_m$ , el máximo momento flector es:

$$Y_m = A \cdot x_m^4 + B \cdot x_m^3 + D \cdot x_m^2 + E \cdot x_m + F$$

Si  $x_T = 0$ , sustituyendo en la ecuación (I) se obtiene:

$$A = \frac{16}{C^4} \left( Y_1 + m \frac{C}{4} - \beta \right)$$

Si  $x_T \geq \frac{C}{4}$  ó  $x_T \leq -\frac{C}{4}$ , no hay solución con una curva convexa.

## 1.2. La curva de acuerdo presenta un punto de inflexión

La solución en este caso, consiste en plantear una curva convexo-cóncava con un punto de inflexión en  $(X_T, Y_T)$ .

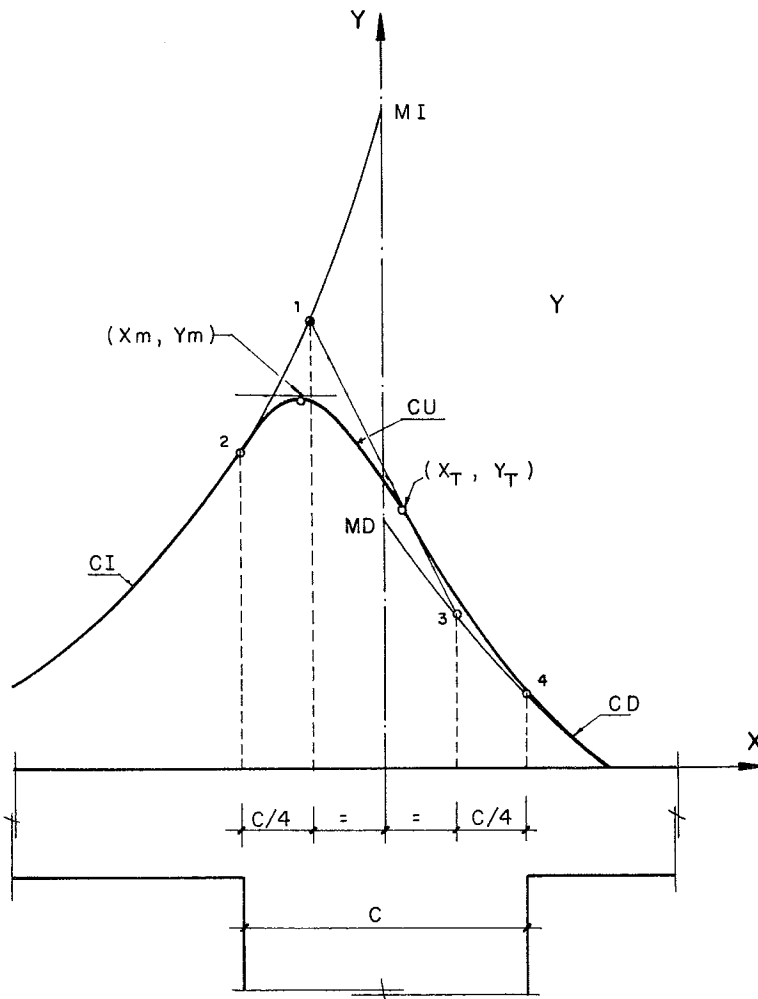


Fig. 2.

La ecuación de dicha curva es:

$$Y = A x^5 + B x^4 + D x^3 + E x^2 + F x + H$$

cuyas constantes se determinan por las siguientes condiciones:

1. Pasa por el punto 2 y es tangente a la curva CI

$$Y_2 = A \cdot x_2^5 + B \cdot x_2^4 + D \cdot x_2^3 + E \cdot x_2^2 + F \cdot x_2 + H$$

$$m_2 = 5 A \cdot x_2^4 + 4 B \cdot x_2^3 + 3 D \cdot x_2^2 + 2 E \cdot x_2 + F$$

2. Pasa por el punto 4 y es tangente a la curva CD

$$Y_4 = A \cdot x_4^5 + B \cdot x_4^4 + D \cdot x_4^3 + E \cdot x_4^2 + F \cdot x_4 + H$$

$$m_4 = 5 A \cdot x_4^4 + 4 B \cdot x_4^3 + 3 D \cdot x_4^2 + 2 E \cdot x_4 + F$$

3. Es tangente a la recta 1-3 en el punto  $(X_T, Y_T)$  que es de inflexión.

$$Y_1 + m \cdot x_T - m \cdot x_1 = A \cdot x_T^5 + B \cdot x_T^4 + D \cdot x_T^3 + E \cdot x_T^2 + F \cdot x_T + H \quad (\text{II})$$

$$m = 5 A \cdot x_T^4 + 4 B \cdot x_T^3 + 3 D \cdot x_T^2 + 2 E \cdot x_T + F$$

$$0 = 10 A \cdot x_T^3 + 6 B \cdot x_T^2 + 3 D \cdot x_T + E$$

Haciendo operaciones con todas las ecuaciones salvo con la (II), se obtienen las siguientes expresiones:

$$A (20 x_T^6 - 9 C^2 \cdot x_T^4 + \frac{3 C^4}{4} \cdot x_T^2 + \frac{C^6}{16}) = \frac{12}{C^2} (m_2 + m_4 - 2 \frac{Y_4 - Y_2}{C}) \cdot x_T^4 +$$

$$+ 8 \frac{m_4 - m_2}{C} \cdot x_T^3 + 12 (\frac{Y_4 - Y_2}{C} - m) \cdot x_T^2 - C^2 (\frac{3}{2} \frac{Y_4 - Y_2}{C} - \frac{m_2 + m_4}{4} - m)$$

$$B = - \frac{2}{12 x_T^2 - C^2} [(10 x_T^2 - \frac{3}{2} C^2) \cdot x_T \cdot A + \frac{3}{C^2} (m_2 + m_4 - 2 \frac{Y_4 - Y_2}{C}) \cdot x_T +$$

$$+ \frac{m_4 - m_2}{2 C}]$$

$$D = \frac{m_2 + m_4}{C^2} - 2 \frac{Y_4 - Y_2}{C^3} - \frac{C^2}{2} \cdot A$$

$$E = \frac{m_4 - m_2}{2 C} - \frac{C^2}{2} \cdot B$$

$$F = \frac{3}{2} \frac{Y_4 - Y_2}{C} - \frac{m_2 + m_4}{4} + \frac{C^4}{16} \cdot A$$

$$H = \frac{Y_4 + Y_2}{2} - C \cdot \frac{m_4 - m_2}{8} + \frac{C^4}{16} \cdot B$$

Por la ecuación (II) se calcula el valor cero de la función:

$$f(x_T) = A \cdot x_T^5 + B \cdot x_T^4 + D \cdot x_T^3 + E \cdot x_T^2 + (F-m) \cdot x_T + H - Y_1 - m \frac{C}{4} = 0$$

Determinadas las constantes, el punto de tangente horizontal se calcula por la expresión:

$$\varphi(x_m) = 5 A \cdot x_m^4 + 4 B \cdot x_m^3 + 3 D \cdot x_m^2 + 2 E \cdot x_m + F = 0 \quad (*)$$

---

(\*) Las raíces exactas de esta ecuación de cuarto grado pueden obtenerse por el método clásico de Ferrari, que fue discípulo de Cardano, o por el método desarrollado por el autor de este trabajo y que actualmente está en fase de publicación. La ventaja de éste sobre el primero estriba en que es más rápida la obtención de las raíces y es fácilmente programable.

y el máximo momento flector es:

$$Y_m = A \cdot x_m^5 + B \cdot x_m^4 + D \cdot x_m^3 + E \cdot x_m^2 + F \cdot x_m + H$$

Para la aplicación de los dos métodos que siguen, es necesario que se verifiquen las hipótesis básicas que indica la Instrucción EH-82, para cálculo de secciones sometidas a sollicitaciones normales (Art. 36.1).

## 2. METODO SUPONIENDO EN ROTURA LA SECCION DEL PILAR

Los esfuerzos exteriores que actúan en la sección del pilar, se pueden reducir a los extremos de su canto, obteniéndose las expresiones:

$$R_A = R_I - P_I \cdot \frac{C}{2}$$

$$M_A = M_I + P_I \cdot \frac{C^2}{8} - R_I \cdot \frac{C}{2}$$

$$R_B = R_D - P_D \cdot \frac{C}{2}$$

$$M_B = M_D + P_D \cdot \frac{C^2}{8} - R_D \cdot \frac{C}{2}$$

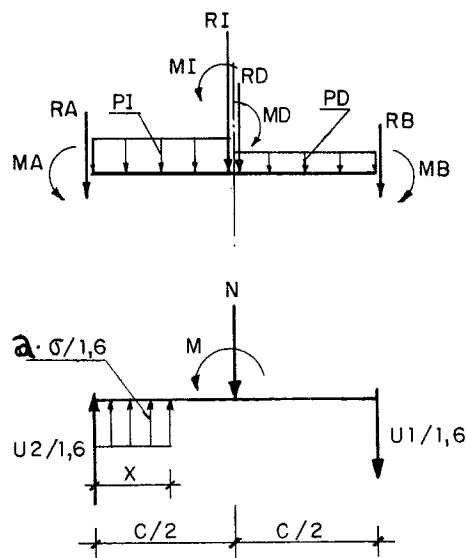


Fig. 3.

El pilar se dimensionará para los esfuerzos  $N$ ,  $M$  cuyos valores son:

$$N = R_I + R_D$$

$$M = M_I - M_D$$

Siendo "a" el ancho del pilar y suponiendo que éste reaccione mediante un diagrama rectangular de tensiones y adoptando como coeficiente de seguridad 1,6, de las ecuaciones de equilibrio entre los esfuerzos exteriores y los inducidos en la sección, se obtienen las siguientes expresiones:

$$x = C - \sqrt{C^2 - [1,6 (C \cdot N + 2 M) - 2 C \cdot U_2] / a \cdot \sigma}$$

$$U_1 = a \cdot \sigma \cdot x + U_2 - 1,6 N$$

siendo  $U_1$  y  $U_2$ , respectivamente, las capacidades mecánicas de las armaduras de tracción y compresión. Para  $\sigma$  puede tomarse el valor 0,7 fcd que adopta la Instrucción EH-82 en el método simplificado del momento tope (Art. 37).

Estas igualdades son válidas si

$$M \leq \frac{C}{2} \left( \frac{a \cdot C \cdot \sigma + 2 U_2}{1,6} - N \right)$$

En caso contrario, debe hacerse:

$$U_2 \geq 0,8 N + 1,6 \frac{M}{C} - \frac{a \cdot C \cdot \sigma}{2}$$

para poder aplicar las anteriores fórmulas.

Si fuera  $U_1 = U_2 = 0$ , de las ecuaciones de equilibrio se obtendría:

$$x = C - \frac{2 M}{N}$$

$$\sigma = \frac{1,6 N}{a \cdot x}$$

Definida la ley de reacción de la sección, por la Fig. 4, pueden calcularse los esfuerzos en las secciones intermedias del pilar, considerando a éste como si fuera un elemento de rigidez infinita en la dirección de su altura.

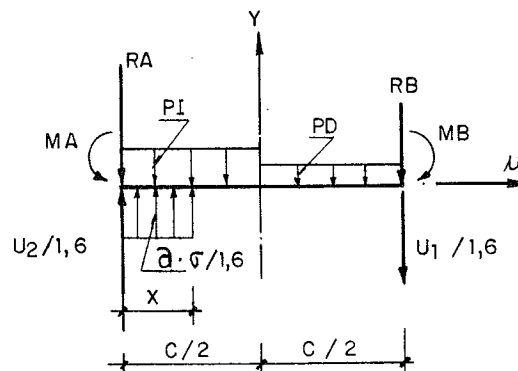


Fig. 4.

### 3. METODO BASADO EN LA CURVATURA QUE ADOPTA LA SECCION

El método que a continuación se expone se basa en el artículo "Diagramas axil-momento-curvaturas de una sección de hormigón armado solicitada por una flexo-compresión plana o biaxial" publicado en esta revista por Luis M. Villegas Cabredo y Juan J. Arenas de Pablo.\*

Aplicado a este caso, en esencia consiste en lo siguiente: Se define el diagrama axil-curvatura de la sección, en el que se distinguen los cuatro dominios de deformación en rotura que quedan comprendidos entre los puntos que se indican en la Fig. 5, con las deformaciones límites  $\epsilon_A$  y  $\epsilon_B$  de las fibras extremas de la sección. (Art. 36.2 de la Instrucción EH-82).

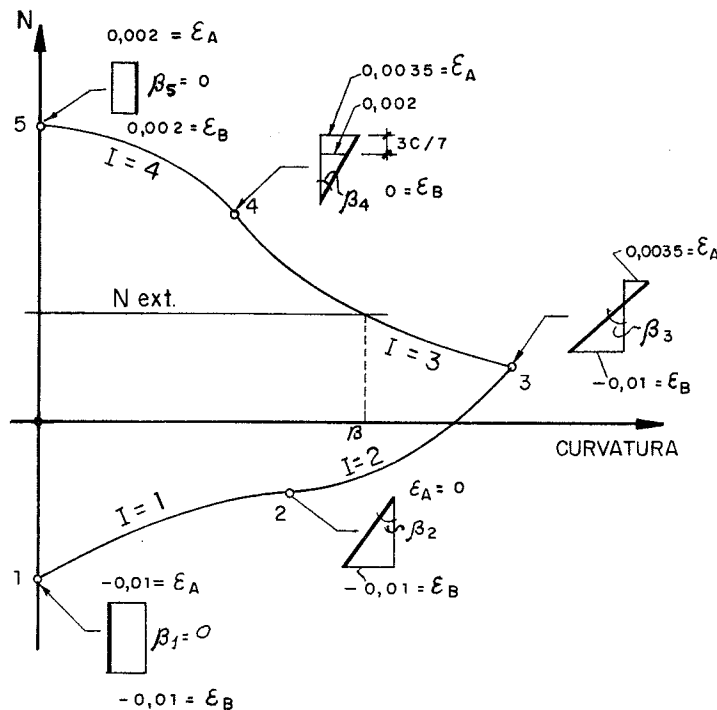


Fig. 5.

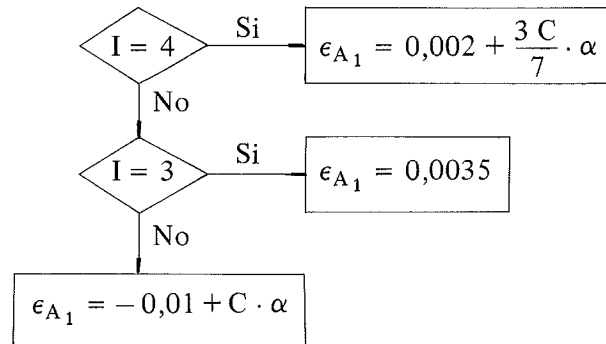
Para cada uno de ellos puede calcularse el axil de reacción de la sección, ya que con el diagrama tensión-deformación adoptado para el hormigón, que consideramos el parábola-rectángulo definido por la Instrucción EH-82, (Art. 26.6.a), se pueden integrar los esfuerzos generados por las tensiones correspondientes a cada deformación, a los que sumarán los que producen las armaduras comprimidas y traccionadas.

Definido el dominio de deformación en rotura, en el que está comprendido  $N_{ext.}$ , axil soportado por el pilar, la curvatura  $\beta$  de la sección correspondiente a ese axil puede hallarse mediante interpolaciones sucesivas, variando la curvatura en ese intervalo hasta que el axil de reacción de la sección y el de sus armaduras sea igual al axil exterior. Así obtendremos también el momento  $M$  de reacción de la sección, con lo cual ya disponemos de un primer valor que relaciona el axil exterior, el acortamiento de la fibra más comprimida, la curvatura de la sección y el momento de reacción.

\* Hormigón y Acero Nº 148, tercer trimestre de 1983. Págs. 61-86.



Si ahora consideramos una nueva curvatura  $\alpha = \beta/n$  siendo  $n$  un número suficientemente alto, y el acortamiento de la fibra más comprimida lo definimos de acuerdo con el siguiente organigrama:



se pueden calcular los axiles de reacción de la sección, correspondientes a las deformaciones extremas indicadas en el diagrama de la Fig. 6, e interpolando sucesivamente se puede obtener el acortamiento  $\epsilon_{A\alpha}$  de la fibra más comprimida que para la curvatura  $\alpha$  produzca un axil de reacción igual a  $N_{ext}$  y también su momento de reacción.

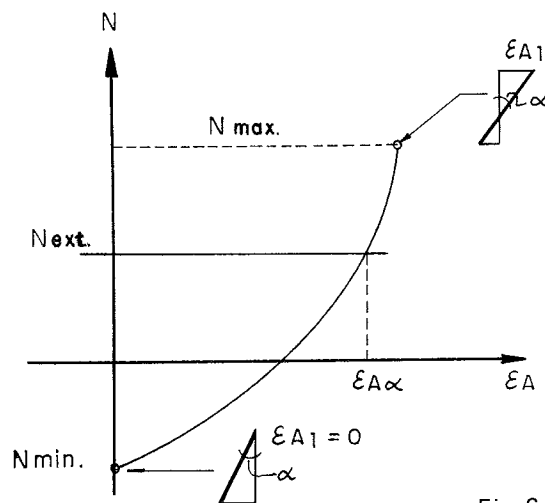


Fig. 6.

Finalmente, interpolando en el diagrama curvatura-momento de reacción de la sección (Fig. 7), podremos determinar la curvatura correspondiente a un momento de reacción igual al momento  $M_{ext}$ , soportado por el pilar, repitiendo los pasos descritos desde el organigrama hasta que consideremos admisible la aproximación entre el momento exterior y el de reacción de la sección.

Obtenida la deformación de la sección que equilibra a los esfuerzos exteriores, los esfuerzos finales en el dintel para las secciones intermedias del pilar, composición de los exteriores y los de reacción, se obtienen de forma análoga a la indicada en el 2º método, con la salvedad de que las tensiones en el hormigón no serán las debidas a un diagrama rectangular, sino al que se obtenga mediante el diagrama parábola-rectángulo para la deformación correspondiente a cada fibra activa del hormigón.

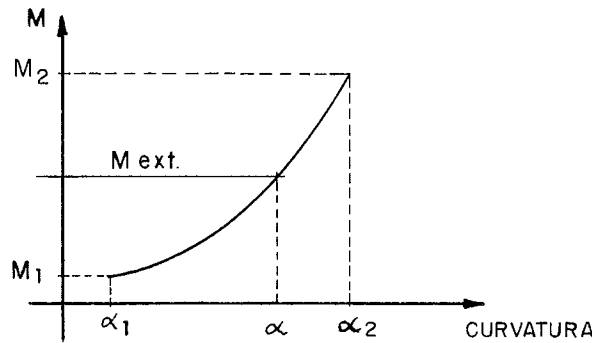


Fig. 7.

Un método de interpolación que se puede utilizar en las aproximaciones sucesivas que es necesario realizar en las curvas de las figuras 5, 6 y 7, es el siguiente: Dados los puntos 1 y 2 de la función  $V = f(\mu)$  cuya traza se desconoce, se calcula el nuevo valor de la función para  $\mu_c$  abscisa de la recta 1-2 para la ordenada  $C$ . Si este nuevo valor es  $VC_1$  en la siguiente aproximación se considera la recta 3-2 y si es  $VC_2$ , tomaríamos la recta 1-4. (Véase fig. 8).

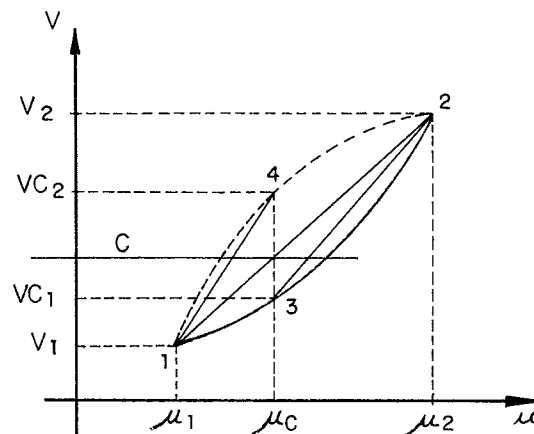


Fig. 8.

## CONCLUSION

Como aplicación de los métodos expuestos, se adjuntan tres ejemplos diversos, en los que se observa que son prácticamente iguales los reajustes de momentos que se obtienen al aplicar cada uno de ellos, y por lo tanto y como conclusión, podemos afirmar que para todos los casos estudiados, la aplicación del segundo método es suficiente y su simplicidad es manifiesta respecto de los otros dos.

En los ejemplos se calculan los momentos flectores para las secciones definidas respecto del eje del pilar, y en cada método se indican los siguientes valores:

1. Método curva de acuerdo: Coordenadas  $(X_T, Y_T)$  del punto de tangencia y  $(X_m, Y_m)$  de máximo momento. Con acuerdo tipo 1 se indica una curva de acuerdo convexa y con el tipo 2 la convexo-cóncava o viceversa. Se observa que el mayor porcentaje de reducción se obtiene con el acuerdo tipo 2.
2. Método hormigón en rotura: Capacidades mecánicas  $U_1$  y  $U_2$  de las armaduras trac-

cionadas y comprimidas, amplitud del diagrama rectangular de tensiones en el hormigón y tensión alcanzada por éste.

3. Método de curvatura de la sección: Capacidades mecánicas U1 y U2 de las armaduras, axil y momento de reacción de la sección que indica la bondad del método al compararle con las acciones exteriores, y deformaciones de las fibras más y menos comprimidas de la sección.

**PILAR K-16. PLANTA O PORTICO 6-16**

FCD = 1.333,3 T/M<sup>2</sup>. ANCHO DE LA SECCION = 1.250 M. CANTO = 0,530 M

PI = 26.487 T/M    RI = 91.815 T    MI = 105.580 MT  
 PD = 26.487 T/M    RD = 90.769 T    MD = 103.850 MT

Dist. al eje	METODO C. ACUERDO		METODO H EN ROTURA		METODO H EN ELASTICO	
	XT = 0,005 XM = - 0,013 ACUERDO TIPO 1	YT = - 92.822 YM = - 92.876	U1 = 0,00 AX = 0,511 TEN: 457.309	U2 = 0,00	U1 = 0,00 N = 182.585 0,000290	U2 = 0,00 M = 1.730 0,000230
-0,265	-82.179	-82.179	-82.179	-82.179		
-0,250	-83.414	-83.414	-83.414	-83.414		
-0,200	-86.990	-86.992	-86.992	-86.948		
-0,150	-89.724	-89.743	-89.743	-89.620		
-0,100	-91.611	-91.668	-91.668	-91.444		
-0,050	-92.650	-92.765	-92.765	-92.439		
-0,000	-92.847	-93.035	-93.035	-92.621		
0,050	-92.218	-92.479	-92.479	-92.007		
0,100	-90.783	-91.095	-91.095	-90.616		
0,150	-88.569	-88.885	-88.885	-88.464		
0,200	-85.612	-85.847	-85.847	-85.570		
0,250	-81.954	-81.985	-81.985	-81.950		
0,265	-80.726	-80.726	-80.726	-80.726		

**PILAR B-5. PLANTA 0. PORTICO 5**

FCD = 1.333,3 T/M<sup>2</sup>. ANCHO DE LA SECCION = 0,845 M. CANTO = 0,845 M

PI = 29.600 T/M    RI = 115.056 T    MI = 127.810 MT  
 PD = 29.600 T/M    RD = 76.536 T    MD = 89.160 MT

Dist. al eje	METODO C. ACUERDO	METODO H EN ROTURA		METODO H EN ELASTICO	
	XT = 0,175    YT = - 76.267 XM = - 0,187    YM = - 93.919 ACUERDO TIPO 2	U1 = 0,00    U2 = 0,00	AX = 0,442	U1 = 0,00    U2 = 0,00	N = 191.592    M = 38.675 0,000708    -0,000226
-0,422	-81.841	-81.841		-81.841	
-0,400	-84.046	-84.046		-84.016	
-0,350	-88.178	-88.213		-87.930	
-0,300	-91.198	-91.369		-90.652	
-0,250	-93.089	-93.515		-92.272	
-0,200	-93.883	-94.650		-92.888	
-0,150	-93.656	-94.774		-92.600	
-0,100	-92.515	-93.887		-91.510	
-0,050	-90.591	-91.990		-89.727	
-0,000	-88.032	-89.081		-87.361	
0,050	-84.991	-85.370		-84.528	
0,100	-81.624	-81.654		-81.344	
0,150	-78.074	-78.013		-77.932	
0,200	-74.467	-74.445		-74.418	
0,250	-70.904	-70.951		-70.926	
0,300	-67.449	-67.531		-67.506	
0,350	-64.126	-64.185		-64.160	
0,400	-60.904	-60.914		-60.888	
0,422	-59.465	-59.465		-59.440	

**PILAR E-9. PLANTA 0. PORTICO 9**

FCD = 1.333,3 T/M<sup>2</sup>. ANCHO DE LA SECCION = 0,530 M. CANTO = 1.250 M

PI = 31.590 T/M    RI = 90.231 T    MI = 107.230 MT  
 PD = 35.478 T/M    RD = 147.230 T    MD = 186.870 MT

Dist. al eje	METODO C. ACUERDO		METODO H EN ROTURA		METODO H EN ELASTICO	
	XT = - 0,166	YT = - 95.099	U1 = 45,66	U2 = 19,00	U1 = 45,66	U2 = 19,00
	XM = 0,286	YM = - 124.803		AX = 0,822	N = 237.461	M = 79.715
	ACUERDO TIPO 3		TEN = 933.310		0,000829	-0,000046
-0,625	- 57.006		- 57.006		- 56.931	
-0,600	- 58.750		- 59.491		- 59.416	
-0,550	- 62.199		- 64.521		- 64.446	
-0,500	- 65.723		- 69.630		- 69.541	
-0,450	- 69.432		- 74.818		- 74.652	
-0,400	- 73.391		- 80.085		- 79.730	
-0,350	- 77.627		- 85.431		- 84.723	
-0,300	- 82.130		- 90.856		- 89.584	
-0,250	- 86.857		- 96.360		- 94.263	
-0,200	- 91.743		-101.943		- 98.714	
-0,150	- 96.699		-107.264		-102.889	
-0,100	-101.617		-111.892		-106.744	
-0,050	-106.379		-115.826		-110.234	
0,000	-110.857		-119.067		-113.316	
0,050	-114.922		-121.618		-115.951	
0,100	-118.442		-123.485		-118.103	
0,150	-121.293		-124.668		-119.730	
0,200	-123.360		-125.167		-120.793	
0,250	-124.544		-124.981		-121.254	
0,300	-124.763		-124.111		-121.072	
0,350	-123.961		-122.557		-120.213	
0,400	-122.107		-120.319		-118.638	
0,450	-119.206		-117.397		-116.313	
0,500	-115.298		-113.790		-113.204	
0,550	-110.466		-109.500		-109.277	
0,600	-104.838		-104.525		-104.499	
0,625	-101.781		-101.781		-101.781	

## RESUMEN

### Reajuste de la ley de momentos flectores de dinteles, en la zona de empotramiento en los soportes de hormigón

Se presentan en este artículo tres métodos diferentes para redondear los momentos flectores en los dinteles, en las zonas de empotramiento en los pilares.

El primer método es puramente geométrico y con él se determina la ecuación polinómica representativa de la curva de acuerdo de las dos leyes de momentos flectores situadas a ambos lados de los paramentos del pilar.

Los métodos segundo y tercero se basan en las leyes de reacción de la sección del pilar sometida a las acciones que le induce el dintel; ambos se diferencian en los diagramas tensión-deformación supuestos en cada caso.

Finalmente, en una serie de ejemplos se comparan los esfuerzos que se obtienen aplicando los tres métodos.

## RÉSUMÉ

### Ajustage de la loi de moments fléchissants des linteaux, dans les sections d'encastrement sur poteaux de béton

Dans ce travail on montre trois méthodes différentes pour arrondir les moments fléchissants dans la section d'encastrement du linteau sur le poteau.

La première méthode est simplement géométrique et à partir de celle-ci on détermine l'équation polynomique représentative de la courbe d'accordement des deux lois des moments fléchissants placées aux deux cotés des paramètres du poteau.

La deuxième et troisième méthodes sont basées sur les lois de réaction de la section du poteau soumise aux actions provoquées par le linteau; les deux se différencient par les diagrammes tension-déformation supposés dans chaque cas.

Finalemment dans une serie d'exemples on compare les résultats obtenus en appliquent les trois méthodes.

## SUMMARY

### Bending moment distribution in support zones of continuous beams

Three different methods to round off the bending moment diagram in support zones of continuous beams or frames are shown in this paper.

The first method is based in geometrie, obtaining the polinomic equation of the transition curve between bending moment diagrams in both sides of the support.

Second and third methods are based in different reaction stress diagrams in the support under the action of the beam.

Finally, there is a comparation between the results of the three methods in several examples.

# Diseño preliminar de mallas tesas

F. Hernández Rodríguez  
Profesor de la E.T.S. de Ingenieros  
Industriales de Sevilla

A. Martín Navarro  
Catedrático de la E.T.S. de Ingenieros  
Industriales de Sevilla

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un método para el diseño preliminar de mallas tesas, cuyo ámbito de aplicación consiste en superficies con planta de proyección rectangular y bordes curvos o rectos. Asimismo se incluyen algunos ejemplos que validan el método propuesto.

## 1. INTRODUCCION

Se puede definir la malla tesa como aquel tipo estructural que está formado, fundamentalmente, por dos familias de cables dispuestas de tal manera que soportan todas las acciones mediante el trabajo a tracción de dichos cables.

El análisis de tales construcciones resulta ser bastante complejo [1-6], debido por un lado, al carácter no lineal del modelo resultante (grandes deformaciones), y, por otro lado, a la topología geométrica necesaria. Es por esto por lo que, durante mucho tiempo, esta técnica ha quedado relegada en favor de soluciones estructurales más pesadas.

El retorno que se ha producido en las últimas décadas hacia este tipo estructural está justificado por algunos factores que, sin duda, han modificado el parecer general sobre estas construcciones.

En primer lugar, la búsqueda de formas óptimas de trabajo de los materiales resistentes nos aboca inevitablemente hacia las tenso-estructuras, ya que éstas son las únicas capaces de agotar totalmente la sección de un material al trabajar siempre en tracción.

Como segundo factor, la aparición de materiales de muy alta resistencia permite realizar construcciones con este tipo estructural, de un peso propio muy inferior al necesario con otras alternativas.

Un tercer factor, que hay que tener en cuenta es la mayor fiabilidad de los métodos de construcción, así como las mejoras en los sistemas de cimentación para cargas de tracción, y la posibilidad de aplicar fuertes pretensados con precisión y seguridad.

También es significativo el avance en los métodos de cálculo con los que actualmente pueden diseñarse estas estructuras, en especial con el uso del computador.

Finalmente, un factor no menos importante que los anteriores es el derivado de los juegos de formas geométricas que pueden conseguirse con las tenso-estructuras, lo que unido a la posibilidad de cobertura de grandes luces, hace estas construcciones tremendamente atractivas a nivel arquitectónico y artístico.

A diferencia de lo que ocurre con otros tipos estructurales, las tenso-estructuras dependen muy fuertemente de la geometría adoptada, de tal manera que pequeñas modificaciones en las dimensiones, pueden comportar grandes cambios en los valores de los esfuerzos que hay que soportar, tanto en los cables, como en las estructuras que los soportan. Este efecto, hace que el predimensionado de una tensoestructura sea mucho más crítico y delicado que en los casos tradicionales. A ello hay que añadir una dificultad adicional, que se deriva de la complejidad de los modelos matemáticos que representan el comportamiento de las mallas tesas, de tal manera que es poco factible encontrar reglas sencillas para calcular aproximadamente dichas mallas.

El trabajo que aquí se presenta va encaminado a resolver la problemática apuntada, mediante la utilización de un método para el diseño preliminar de mallas tesas, basado en un modelo matemático simple, que permita predimensionar de manera ágil y sencilla este tipo de estructuras.

El método propuesto [6] se basa en los trabajos realizados por Szabó [7]. En ellos pueden encontrarse soluciones para el dimensionado de mallas tesas sujetas por contornos de planta elíptica. El trabajo aquí presentado amplía el ámbito de aplicación del método a contornos diversos de planta rectangular, muy apropiados sobre todo para naves industriales.

## 2. LA MALLA TESA

El comportamiento de una malla de cables está regido por las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Las primeras se obtienen de realizar el equilibrio de un elemento diferencial de malla [6].

$$H_x'' + (H_y \cdot n')' + p_x = 0 \quad (2.1.a)$$

$$(H_x \cdot v')' + H_y'' + p_y = 0 \quad (2.1.b)$$

$$[H_x (z + w)']' + [H_y \cdot (z + w)']' + p_z = 0 \quad (2.1.c)$$

Consideremos las siguientes hipótesis simplificativas:

- a) Las componentes u y v del desplazamiento de los puntos del cable son despreciables en comparación con el desplazamiento vertical w.
- b) Sólo actúan cargas verticales sobre la red. Además, una vez situados los cables en el plano vertical, ambas filas de cables transmiten únicamente fuerzas verticales una a otra.

Con estas hipótesis, las ecuaciones anteriores se reducen a la ecuación de equilibrio vertical:

$$(H_{ox} + \Delta H_x)(z'' + w'') + (H_{oy} + \Delta H_y)(z'' + w'') + Z = 0 \quad (2.2)$$



Por otro lado, las ecuaciones de compatibilidad expresan el hecho de que los valores del cambio en la longitud de los cables calculados a partir de la elongación (con la ayuda de la ley de Hooke) serán idénticos a los calculados a partir de las deflexiones (geoméricamente).

Así, para el cable en dirección-x, la ecuación resultante ([6], [7]), será:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta H_x}{EA_x} \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} (1 + z'^2) dx + \alpha_T \Delta T \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} \sqrt{1 + z'^2} dx = \\ = \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} \frac{z' w'}{\sqrt{1 + z'^2}} dx + \frac{1}{2} \int_{-\ell_x/2}^{\ell_x/2} \frac{w'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

Una ecuación similar puede obtenerse para los cables en dirección-y.

### 3. HIPOTESIS DE TRABAJO

Para poder realizar un cálculo sencillo, se hacen las siguientes hipótesis:

- Los cables son tensos.
- Las cargas son verticales y están uniformemente distribuidas (la distribución de la carga de viento puede sustituirse también por una carga uniforme equivalente).
- De la red de cables bidireccional sólo se incluye en el cálculo un cable representativo (o una banda por unidad de ancho), asumiendo que los demás cables paralelos a aquél soportan fuerzas de la misma magnitud.
- Las fuerzas internas y las deformaciones del contorno espacial se calculan sobre las bases de su proyección en planta. Se desprecia la compresión del contorno y sólo se tiene en cuenta la deformación de flexión.
- Para cargas simétricas, el cambio de geometría de la red no se tiene en cuenta, esto es, las fuerzas internas se calculan sobre la estructura indeformada. De esta forma, las ecuaciones serán lineales y el principio de superposición seguirá siendo válido.

En el caso de cargas antisimétricas es necesario tener siempre en cuenta el cambio de forma de la fila de cables en una dirección y, en otros casos, el de las dos filas de cables en ambas direcciones.

### 4. TIPOS DE CARGA

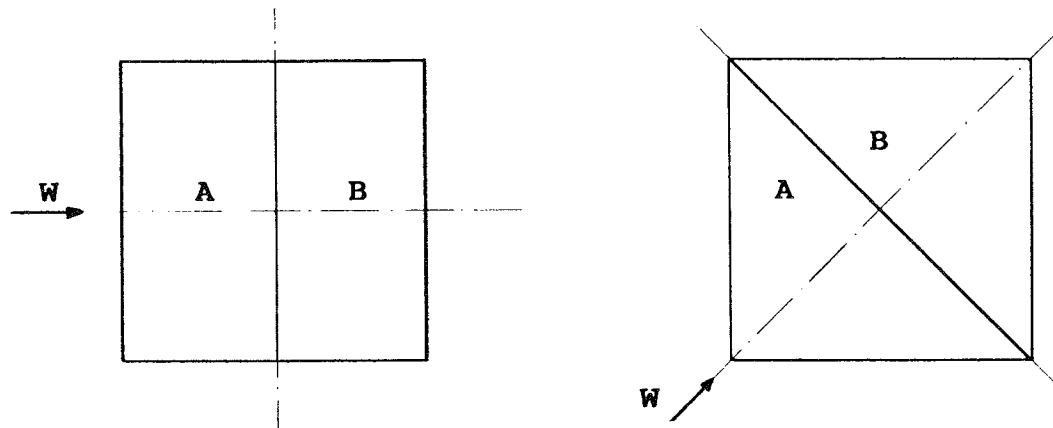
Los tipos de carga que se estudiarán son los siguientes:

- Peso propio (incluido el peso de la cubierta).
- Pretensado.
- Carga de viento.
- Carga de nieve.

De éstos, la carga de nieve y el peso propio (debido a la planitud de la red) pueden tomarse como distribuidas uniformemente sobre el plano de proyección.

La carga de viento, considerada como actuando verticalmente, se aproxima por cargas parciales uniformemente distribuidas. Se presentan dos posibilidades, cada una de ellas co-

respondiente a una de las direcciones en que se encuentran situados los cables, es decir, carga de viento en dirección  $-x$  y carga de viento en dirección  $-y$ . Asimismo, para la carga de viento en cada una de las direcciones, se ha dividido la superficie de la malla en dos zonas, como se muestra a continuación:



De esta forma QWXA significa carga de viento en dirección  $-X$  en la zona A. QWXB significa carga de viento en dirección  $-X$  en la zona B. Similar significado tiene QWYA y QWYB.

Esta carga de viento en cada dirección, que puede tener valores distintos en ambas zonas, se resuelve superponiendo dos cargas: una de ellas uniformemente distribuida sobre toda la superficie y la otra antisimétrica. Así, por ejemplo, se tendría:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline QWA & QWB \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{QWA + QWB}{2} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{QWA - QWB}{2} & -\frac{QWA - QWB}{2} \\ \hline \end{array}$$

Por consiguiente la red de cables debe resolverse para los siguientes casos de carga:

- a) Cargas uniformemente distribuidas.
- b) Pretensado.
- c) Cargas antisimétricas.

## 5. METODO DE SOLUCION

Se seguirá el siguiente proceso de cálculo:

En el primer paso, el contorno se considera como infinitamente rígido y se determina el efecto de cada tipo de carga sobre la red. Ya que sólo se tiene en cuenta una banda representativa de cables en ambas direcciones, el problema es, algunas veces, estáticamente indeterminado, y por lo tanto puede resolverse por el método de la fuerza.

En el segundo paso, se tiene en cuenta el hecho de que el contorno, de acuerdo con su rigidez real a flexión (finita), se deforma y las fuerzas sobre los cables y en el contorno cambian. Esto significa otra vez un problema estáticamente indeterminado, el cual se resuelve por el método del desplazamiento.

## 6. ANALISIS DE LA BANDA UNITARIA

Como se ha expuesto anteriormente, en el método que se va a utilizar sólo se tiene en cuenta un cable representativo en cada dirección. Por ello, a continuación se expondrá el comportamiento de un cable simple, considerando únicamente los cables tensos.

Se entiende por cable tenso aquél en el que la flecha es pequeña respecto a la cuerda, de forma que, por la escasa inclinación del cable, en todo punto pueda confundirse el peso por unidad de proyección horizontal con el peso unitario y constante del cable.

### 6.1. Ecuación del cable simple

Se estudia un cable sometido a una carga uniforme  $q_0$ , cuyos extremos están fijados en dos posiciones, distantes  $\ell$  una de otra.

La ecuación del cable es (Fig. 6.1):

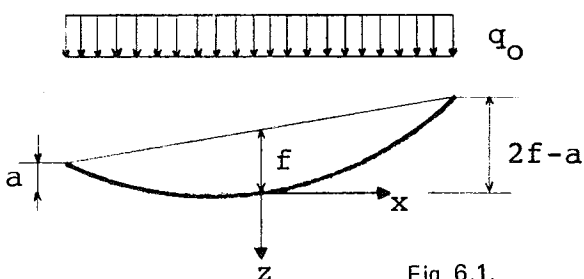
$$z = -\frac{q_0}{2H} x^2 + 2 \frac{a-f}{\ell} x$$


Fig. 6.1.

donde  $H = q_0 \frac{\ell^2}{8}$ , (6.1) es la magnitud de la componente horizontal del esfuerzo en el cable. Teniendo en cuenta esta última expresión, la ecuación del cable resulta:

$$z = -\frac{4f}{\ell^2} x^2 + 2 \frac{a-f}{\ell} x \quad (6.2)$$

### 6.2. Deformación de un cable bajo la acción de una carga funicular

Si al cable cargado de la figura anterior se le aumenta la carga en  $\Delta q$ , el efecto de la deformación se manifiesta de la siguiente forma (Fig. 6.2).

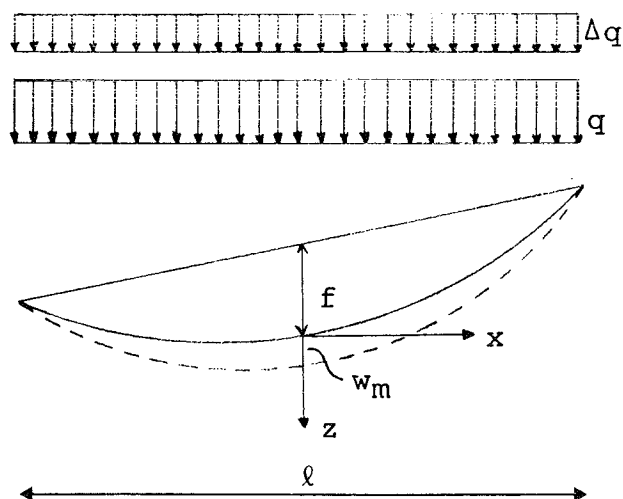


Fig. 6.2.

El alargamiento del cable se superpone al efecto del exceso de carga, y, en esta nueva posición, la flecha crece en  $w_m$  y el esfuerzo horizontal en  $\Delta H$ . De acuerdo con ésto, la ecuación (6.1) podría escribirse en la siguiente forma modificada:

$$(H_0 + \Delta H) f + H_0 w_m + \Delta H w_m = \frac{(q_0 + \Delta q) \ell^2}{8} \quad (6.3)$$

### 6.3. Deformación del cable debido a una carga distinta de la funicular

Si la carga no es la carga funicular de la forma inicial del cable, aparecen grandes deformaciones. Por lo tanto, la deformación del cable no puede despreciarse. En la fig. 6.3

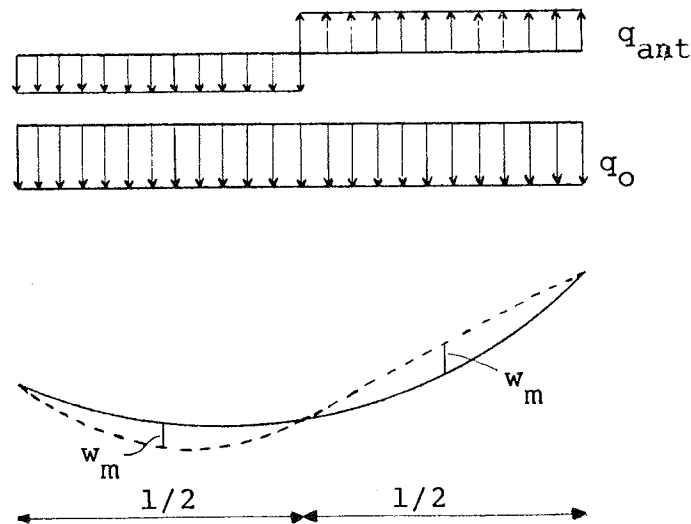


Fig. 6.3.

se representa un cable plano cargado con una carga uniforme  $q_0$  y sobre el cual se añade una carga antisimétrica  $q_{ant}$ . El esfuerzo  $H_0$ , que aparece en el cable debido a  $q_0$ , no cambia por el efecto de la carga antisimétrica; de este modo, el cable será capaz de soportar la carga  $q_{ant}$  sólo cambiando de forma. Asumirá la forma indicada por la línea punteada;  $w_m$  se determina por el requisito (referido a la ecuación 6.1):

$$H_0 = \frac{q_{ant} (\ell/2)^2}{8 w_m} \quad (6.4)$$

### 6.4. Desplazamientos horizontales de los puntos del cable

#### 6.4.1. Desplazamiento horizontal perpendicular al plano del cable

En el caso de cables situados en el plano vertical, el efecto de un desplazamiento  $v$ , perpendicular a dicho plano, es despreciable. Se considera un cable originalmente recto en el plano del terreno, el centro del cual se desplaza una cantidad  $v$  en dirección perpendicular al cable (Fig. 6.4).

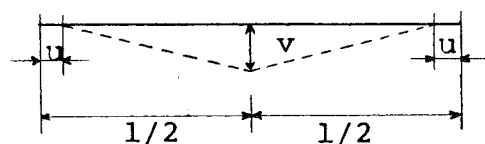


Fig. 6.4.

En el caso de un cable inextensible, el desplazamiento  $u$  del extremo, en la dirección del cable, puede expresarse en función del desplazamiento  $v$  de la siguiente manera:

$$u = \frac{\ell}{2} \sqrt{(\ell/2)^2 - v^2} = \frac{\ell}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{(\ell/2)^2}} \right] \approx \frac{\ell}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v^2}{2(\ell/2)^2} \right) \right] = \frac{v}{\ell} v \quad (6.5)$$

Esto es,  $u$  es  $v/\ell$  veces  $v$ . En la práctica  $v/\ell \ll 1$  (la aproximación usada en la fórmula sólo puede aplicarse en este caso); así, el desplazamiento  $u$ , que ocurre en el plano del cable debido al desplazamiento  $v$ , es sustancialmente menor que  $v$ . Por tanto, el efecto de  $v$  es despreciable.

#### 6.4.2. Desplazamiento horizontal de los extremos del cable

Una característica adicional de las redes de cables es que la deformación de los bordes provoca una deflexión considerable en los cables. Un camino simple para ilustrar esto es desplazar uno de los extremos del cable mostrado en la figura 6.5, hacia el centro, una cantidad  $\Delta\ell$  y tratar el cable como inextensible.

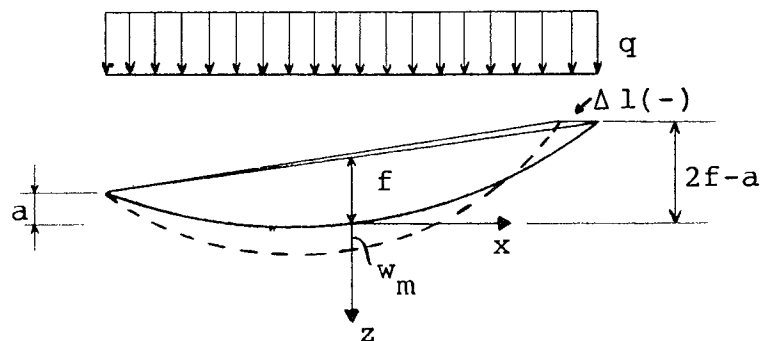


Fig. 6.5.

La longitud del arco de un cable es aproximadamente:

$$S = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sqrt{1 + z'^2} dx \approx \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left( 1 + \frac{z'^2}{2} \right) dx = \ell \left( 1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{\ell^2} + 2 \frac{(a-f)^2}{\ell^2} \right) \quad (6.6)$$

El desplazamiento  $\Delta\ell$  del soporte, provoca un incremento  $w_m$  en la flecha. Una forma sencilla de relacionar ambas cantidades es tener en cuenta el hecho de que la longitud del cable permanece constante.

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial f} - \frac{\partial s}{\partial a} \right) w_m + \frac{\partial s}{\partial \ell} \Delta\ell = 0$$

esto es:

$$w_m = - \frac{1}{\frac{16}{3} \frac{f}{\ell} - 8 \frac{a-f}{\ell}} \left( 1 - \frac{8}{3} \frac{f^2}{\ell^2} - 2 \frac{(a-f)^2}{\ell^2} \right) \Delta \ell \quad (6.7)$$

### 6.5. Cambio en la flecha cuando la carga sobre el cable se incrementa en $\Delta q$

Este problema puede resolverse por medio de las ecuaciones de equilibrio (ec. 6.3):

$$(H + \Delta H) f + H w_m + \Delta H w_m = \frac{(q + \Delta q) \ell^2}{8}$$

y de compatibilidad (ec. 2.3):

$$\frac{\Delta H}{EA} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (1 + z'^2) dx = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} z' w' dx + \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} w'^2 dx$$

De la ecuación del cable se obtiene:

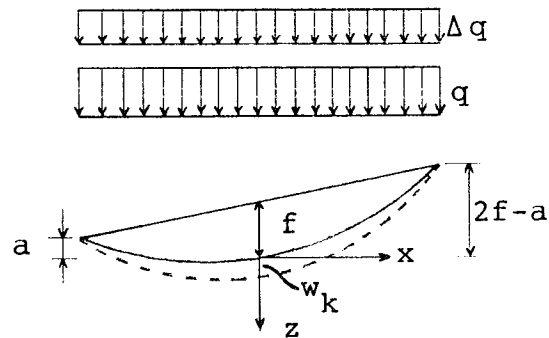
$$z' = - \frac{8f}{\ell^2} x + 2 \frac{a-f}{\ell}$$

Ahora es necesario obtener la ecuación de la deformada del cable:

$$z + w = Ax^2 + Bx + C$$

$$\text{En } x = 0, \quad z + w = w_k = C$$

$$\text{En } x = \ell/2, \quad z + w = -2f + a = A \frac{\ell^2}{4} + B \frac{\ell}{2} + C$$



$$\text{En } x = -\ell/2, \quad z + w = -a = A \frac{\ell^2}{4} - B \frac{\ell}{2} + C$$

En definitiva:

$$w = w_k \left( 1 - 4 \frac{x^2}{\ell^2} \right) \quad (6.8)$$

y, por consiguiente:

$$w' = - \frac{8 w_k}{\ell^2} x$$

La ecuación de compatibilidad resulta entonces:

$$\frac{\Delta H \ell}{EA} = \frac{16}{3} \frac{f w_k}{\ell} + \frac{8}{3} \frac{w_k^2}{\ell} \quad (6.9)$$

De acuerdo con la hipótesis de que el cambio de geometría de la red no se tiene en cuenta, los términos multiplicados por  $w_k$  en la ecuación de equilibrio y el término que contiene a  $w_k^2$  en la ecuación de compatibilidad, se omiten. Por tanto, se tiene:

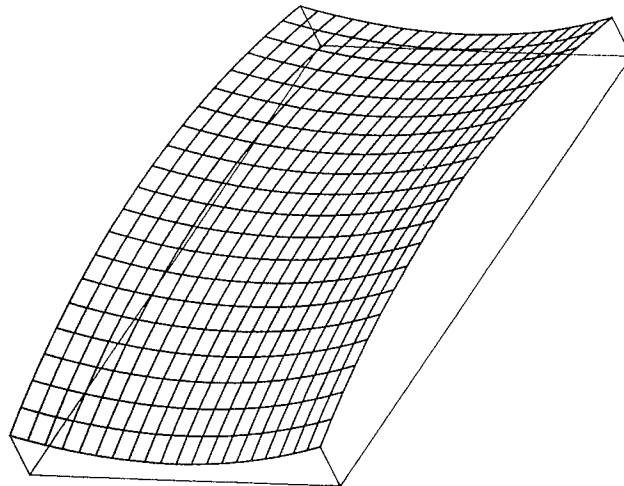
$$\Delta H = \Delta q \frac{\ell^2}{8 f} \quad (6.10)$$

Resultado que sustituido en la ecuación de compatibilidad proporciona:

$$w_k = \Delta q \frac{3}{128} \frac{\ell^4}{f^2 EA} \quad (6.11)$$

donde A indica el área de la banda de cables por unidad de ancho.

## 7. CONTORNO RECTANGULAR PLANO. LADOS PARABOLICOS



La geometría de la cubierta corresponde a la representada en la figura 7.1. La ecuación de la superficie será:

$$z = \frac{4 f_x}{\ell_x^2} x^2 - \frac{4 f_y}{\ell_y^2} y^2 \quad (7.1)$$

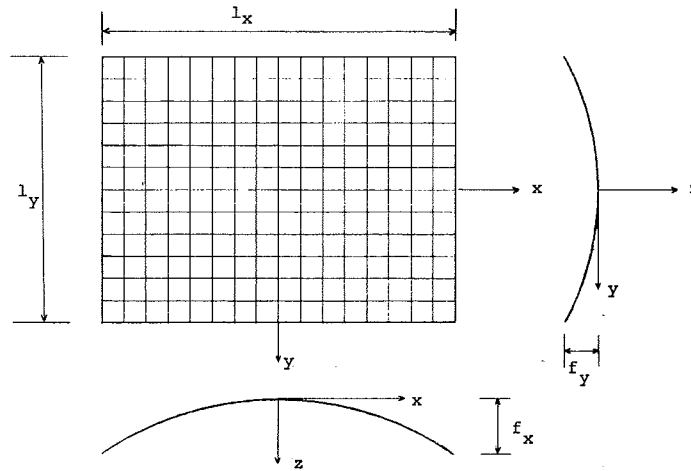


Fig. 7.1.

El contorno espacial se aproximará en el cálculo por su proyección sobre el plano horizontal.

## 7.1. Fuerzas debidas a una carga uniforme

### 7.1.1. Fuerzas sobre el cable

Para determinar cómo se distribuye la carga  $q$  entre ambas filas de cables, disponemos de dos ecuaciones.

La primera de ellas es:

$$q = q_x + q_y \quad (7.2)$$

La segunda hace referencia al hecho de que la deflexión de ambas filas de cables en su punto de intersección ha de ser la misma:

$$q_x \frac{3}{128} \frac{l_x^3 s_x}{f_x^2 (EA_1)_x} = q_y \frac{3}{128} \frac{l_y^3 s_y}{f_y^2 (EA_1)_y} \quad (7.3)$$

Las ecuaciones (7.2) y (7.3) proporcionan  $q_x$  y  $q_y$  y éstas, por medio de (6.1), permiten obtener  $n_{xq}$  y  $n_{yq}$ .

### 7.1.2. Deformación del contorno

Como ya se mencionó, sólo se tiene en cuenta la deformación de flexión.

En primer lugar se determinarán los esfuerzos  $n_{xr}$  y  $n_{yr}$  que actúan sobre el contorno, necesarios para producir unas deformaciones  $\Delta l_x$  e  $\Delta l_y$  del mismo (véase figura 7.2).

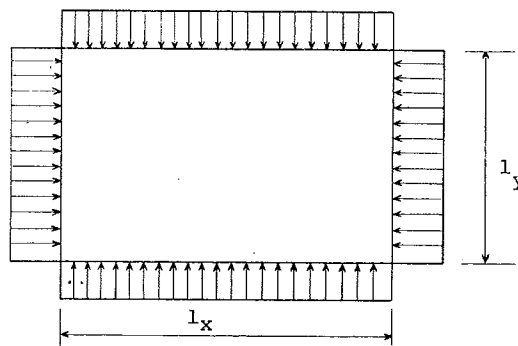
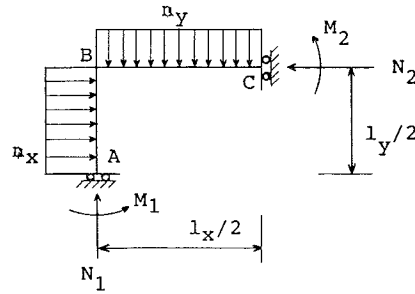


Fig. 7.2.



Resolver esto equivale a resolver el siguiente problema:



Se obtiene:

$$N_1 = n_y \frac{l_x}{2} \quad (7.4)$$

$$N_2 = n_x \frac{l_y}{2} \quad (7.5)$$

$$M_1 = \frac{\frac{1}{12} n_y l_x^3 - \frac{1}{24} n_x l_y^3 - \frac{1}{8} n_x l_y^2 l_x}{l_x + l_y} \quad (7.6)$$

$$M_2 = \frac{-\frac{1}{12} n_x l_y^3 + \frac{1}{24} n_y l_x^3 + \frac{1}{8} n_y l_x^2 l_y}{l_x + l_y} \quad (7.7)$$

$$M_B = -\frac{\frac{1}{12} n_y l_x^3 + \frac{1}{12} n_x l_y^3}{l_x + l_y} \quad (7.8)$$

En cuanto a las deformaciones se tiene:

$$\Delta l_y = \frac{1}{48 EI (l_x + l_y)} \left( n_x l_x^2 l_y^3 - n_y \frac{l_x^5 + 5l_x^4 l_y}{4} \right) \quad (7.9)$$

$$\Delta l_x = \frac{1}{48 EI (l_x + l_y)} \left( -n_x \frac{l_y^5 + 5l_y^4 l_x}{4} + n_y l_x^3 l_y^2 \right) \quad (7.10)$$

El sistema de fuerzas sobre el contorno necesario para producir esta deformación, se obtiene a partir de las ecuaciones (7.9) y (7.10). El sistema de ecuaciones que hay que resolver es el siguiente:

$$-n_{xr} \frac{l_y^5 + 5l_y^4 l_x}{4} + n_{yr} l_x^3 l_y^2 = 48 (l_x + l_y) EI \Delta l_x \quad (7.11)$$

$$n_{xr} l_x^2 l_y^3 - n_{yr} \frac{l_x^5 + 5l_x^4 l_y}{4} = 48 (l_x + l_y) EI \Delta l_y \quad (7.12)$$

donde las incógnitas son  $n_{xI}$  y  $n_{yI}$ . Resolviendo, se obtiene:

$$n_{xI} = - \frac{192 (\ell_x + \ell_y) EI}{10 \ell_x^5 \ell_y^5 + 5 \ell_x^6 \ell_y^4 + 5 \ell_x^4 \ell_y^6} \{ (\ell_x^5 + 5 \ell_x^4 \ell_y) \Delta \ell_x + 4 \ell_x^3 \ell_y^2 \Delta \ell_y \} \quad (7.13)$$

$$n_{yI} = - \frac{192 (\ell_x + \ell_y) EI}{10 \ell_x^5 \ell_y^5 + 5 \ell_x^6 \ell_y^4 + 5 \ell_x^4 \ell_y^6} \{ 4 \ell_x^2 \ell_y^3 \Delta \ell_x + (\ell_y^5 + 5 \ell_y^4 \ell_x) \Delta \ell_y \} \quad (7.14)$$

La determinación de las fuerzas sobre los cables, que aparecen por las deformaciones  $\Delta \ell_x$  y  $\Delta \ell_y$  impuestas sobre la red de cables, es un problema estáticamente indeterminado. Si se separan las dos filas de cables, de manera que sean capaces de deformarse libremente, las deformaciones que aparecen vienen dadas por:

$$w_x^I = \frac{3}{16} \frac{\ell_x}{f_x} \Delta \ell_x \quad (7.15)$$

$$w_y^I = - \frac{3}{16} \frac{\ell_y}{f_y} \Delta \ell_y \quad (7.16)$$

Para que los cables permanezcan juntos, es preciso introducir un sistema de fuerzas verticales,  $p$ , uniformemente distribuido en sentido opuesto a las dos filas de cables. Debido a  $p$  aparecen unos desplazamientos verticales:

$$w_x^{II} = - p \frac{3}{128} \frac{\ell_x^3 s_x}{f_x^2 (EA_1)_x} \quad (7.17)$$

$$w_y^{II} = p \frac{3}{128} \frac{\ell_y^3 s_y}{f_y^2 (EA_1)_y} \quad (7.18)$$

La condición para que los cables se junten es:

$$w_x^I + w_x^{II} = w_y^I + w_y^{II} \quad (7.19)$$

que permite obtener  $p$  como función de  $\Delta \ell_x$  y  $\Delta \ell_y$ :

$$p = \frac{8 \left( \frac{\ell_x}{f_x} \Delta \ell_x + \frac{\ell_y}{f_y} \Delta \ell_y \right)}{\frac{\ell_x^3 s_x}{f_x^2 (EA_1)_x} + \frac{\ell_y^3 s_y}{f_y^2 (EA_1)_y}} \quad (7.20)$$

De aquí, se obtienen las fuerzas sobre los cables:

$$n_{xc} = p \frac{\ell_x^2}{8 f_x} \quad (7.21.a)$$

$$n_{yc} = p \frac{\ell_y^2}{8 f_y} \quad (7.21.b)$$

Finalmente, la estructura entera debe experimentar unas deformaciones  $\Delta \ell_x$  y  $\Delta \ell_y$

de tal magnitud que las fuerzas requeridas para ello  $n_r$  y  $n_c$  sean iguales a la originada por la carga  $n_q$ .

$$n_{xq} = n_{xr} - n_{xc} \quad (7.22.a)$$

$$n_{yq} = n_{yr} - n_{yc} \quad (7.22.b)$$

Estas dos últimas ecuaciones permiten calcular  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$ ; entonces, con ayuda de (7.13), (7.14) y (7.21.a y b) se obtienen las fuerzas correspondientes al contorno y a los cables, respectivamente. La magnitud de las fuerzas finales sobre los cables es:

$$n_{xc\text{final}} = n_{xq} + n_{xc} \quad (7.23.a)$$

$$n_{yc\text{final}} = n_{yq} + n_{yc} \quad (7.23.b)$$

## 7.2. Análisis bajo cargas antisimétricas

Sólo se van a estudiar dos tipos de distribución de carga, los cuales se muestran en la figura (7.3). Las cargas, de intensidad  $q$ , se consideran verticales.

Cuando se investiga el efecto de la carga uniforme y el pretensado, se podría empezar a partir de la geometría inalterada de la red, porque es una superficie funicular para la carga uniforme. En esta forma original, sin embargo, la red es incapaz de equilibrar una carga antisimétrica; de este modo, se debe asumir una nueva configuración, es decir, la de la superficie funicular para carga antisimétrica que sea capaz de equilibrar la carga por medio de fuerzas bidimensionales únicamente, sin esfuerzo cortante.

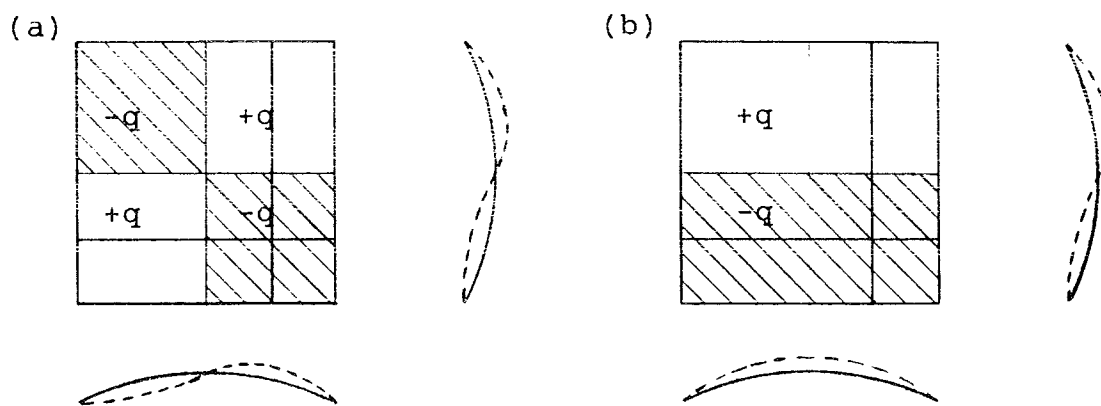


Fig. 7.3.

En primer lugar, deben elegirse dos cables “característicos” (cada uno consistente en una banda de cables de 1 m de ancho) en ambas direcciones, y estos se consideran como base para el cálculo. (No es posible empezar ahora a partir del centro de los cables, porque no aparecen fuerzas sobre ellos). Es conveniente considerar como base aquellos cables que intersectan entre sí en sus puntos “cuartos”.

### 7.2.1. Carga de viento cuadriculada (Fig. 7.3.a)

Para este tipo de carga se encuentra que los cables cambian su forma sin elongación, de acuerdo con las líneas punteadas indicadas en la figura, equilibrando la carga antisimétrica con fuerzas inalteradas. Debido a ésto, no actúan nuevas fuerzas sobre el contorno; por lo tanto, éste no sufre ninguna deformación y puede considerarse como infinitamente rígido bajo esta carga.

Por consiguiente, sólo hay que igualar las deflexiones  $w_x$  y  $w_y$  de los cables en su punto de intersección, para obtener la proporción de carga tomada por los cables, es decir,  $q_x$  y  $q_y$ , así como las deflexiones:

$$q_x + q_y = q \quad (7.24)$$

$$w_x = q_x \frac{\left(\frac{\ell_x}{2}\right)^2}{8 n_x} \quad (7.25.a)$$

$$w_y = q_y \frac{\left(\frac{\ell_y}{2}\right)^2}{8 n_y} \quad (7.25.b)$$

$n_x$  y  $n_y$  representan las fuerzas sobre los cables, debidas a las cargas previas.

### 7.2.2. Carga de viento antisimétrica (Figura 7.3.b)

Sólo el cable en dirección-y es capaz de cambiar de forma sin elongación, mientras que el cable en dirección-x está obligado a alargarse. Considerando el contorno infinitamente rígido, se calculan las deflexiones de los cables por separado, y, entonces, se determinan la distribución de cargas, el cambio en la fuerza sobre el cable en dirección-x, así como la deflexión común.

Para el cable en dirección-y:

$$w_y = \frac{q_y \left(\frac{\ell_y}{2}\right)^2}{8 n_y} \quad (7.26)$$

Para el cable en dirección-x, la deflexión en el punto cuarto es:

$$w_x = \frac{3}{4} q_x \frac{3}{128} \cdot \frac{\ell_x^4}{f_x^2 (EA_1)_x} = \frac{9}{512} q_x \frac{\ell_x^4}{f_x^2 (EA_1)_x} \quad (7.27)$$

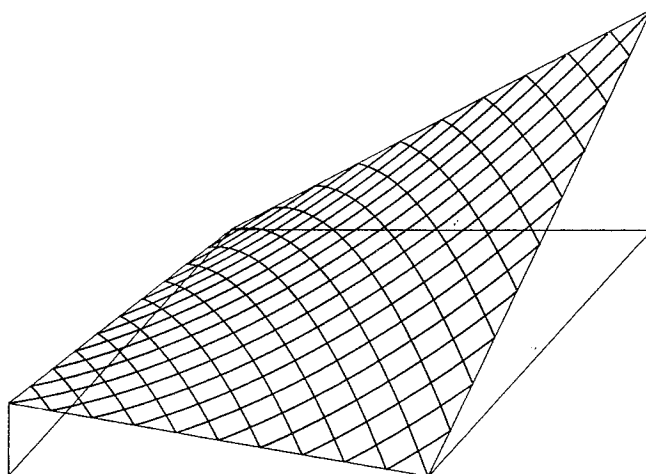
Además:

$$q = q_x + q_y \quad (7.28)$$

Igualando  $w_x$  y  $w_y$ , se obtienen  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $w_x$ ,  $w_y$ , y el incremento de fuerza sobre el cable en dirección-x

$$\Delta H = \Delta q \frac{\ell_x^2}{8 f_x}$$

## 8. CONTORNO RECTANGULAR INCLINADO. LADOS RECTOS



La geometría de este tipo de contorno corresponde a la representada en la figura (8.1). La ecuación de la superficie viene dada por:

$$z = -\frac{c-d}{2} \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) - \frac{c+d}{ab} xy \quad (8.1)$$

Puesto que los cables siguen la dirección de las diagonales, es conveniente expresar la ecuación de la superficie según un sistema de ejes que siga dichas direcciones. En tal sistema, la ecuación de la superficie resulta ser:

$$z = -\frac{c+d}{\ell^2} (x'^2 - y'^2) - \frac{c-d}{\ell} x' \quad (8.2)$$

donde:  $\ell^2 = a^2 + b^2$ .

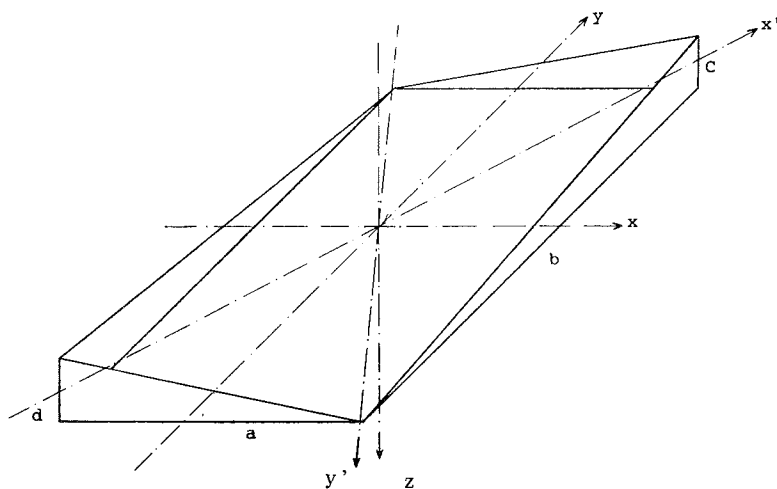


Fig. 8.1.

A partir de (8.2) se pueden obtener las ecuaciones de los cables en una y otra dirección:

Para el cable en dirección-x':

$$z = -\frac{c+d}{\ell^2} x'^2 - \frac{c-d}{\ell} x' \quad (8.3)$$

Para el cable en dirección-y':

$$z = \frac{c+d}{\ell^2} y'^2 \quad (8.4)$$

Ambos cables están representados en la figura (8.2) y se comportan en la forma ya descrita anteriormente.

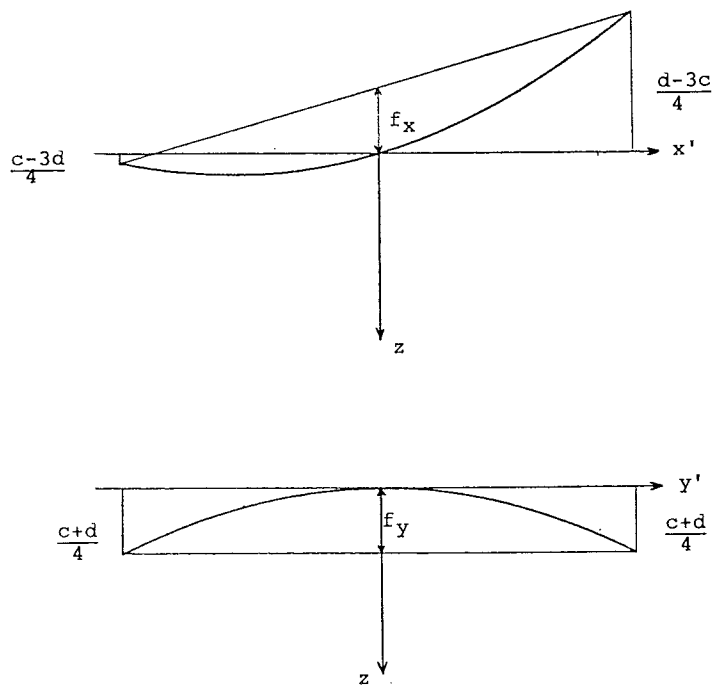


Fig. 8.2.

## 8.1. Fuerzas debidas a una carga uniforme

### 8.1.1. Fuerzas sobre el cable

La carga  $q$  se distribuye entre las dos filas de cables:

$$q = q_x + q_y \quad (8.5)$$

Además, ambas filas de cables han de sufrir la misma deflexión:

$$\frac{3}{8} q_x \frac{\ell^3 s_x}{(c+d)^2 (EA_1)_x} = \frac{3}{8} q_y \frac{\ell^3 s_y}{(c+d)^2 (EA_1)_y} \quad (8.6)$$

siendo:

$$s_x = \ell \left( 1 + \frac{(c-d)^2}{2\ell^2} + \frac{(c+d)^2}{6\ell^2} \right) \quad (8.7.a)$$

$$s_y = \ell \left( 1 + \frac{(c+d)^2}{6\ell^2} \right) \quad (8.7.b)$$

Por medio de estas ecuaciones pueden obtenerse  $q_x$  y  $q_y$ .

### 8.1.2. Deformación del contorno

Sólo se tiene en cuenta la deformación de flexión.

En primer lugar, se determinarán las fuerzas que deben actuar sobre el contorno para producir unas deformaciones  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$  del mismo. Estas deformaciones están medidas sobre las diagonales (Fig. 8.3).

Este sistema de fuerzas se puede considerar como la superposición de dos estados distintos, uno de ellos simétrico y el otro antisimétrico (6). Superponiendo los dos estados, simétrico y antisimétrico, se tiene:

$$\Delta\ell_x = \Delta\ell_{xs} + \Delta\ell_{xa} = \frac{1}{EI} \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{\ell} \left( \frac{n_x + n_y}{384} - \frac{n_x - n_y}{24} \right)$$

$$\Delta\ell_y = \Delta\ell_{ys} + \Delta\ell_{ya} = \frac{1}{EI} \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{\ell} \left( \frac{n_x + n_y}{384} + \frac{n_x - n_y}{24} \right)$$

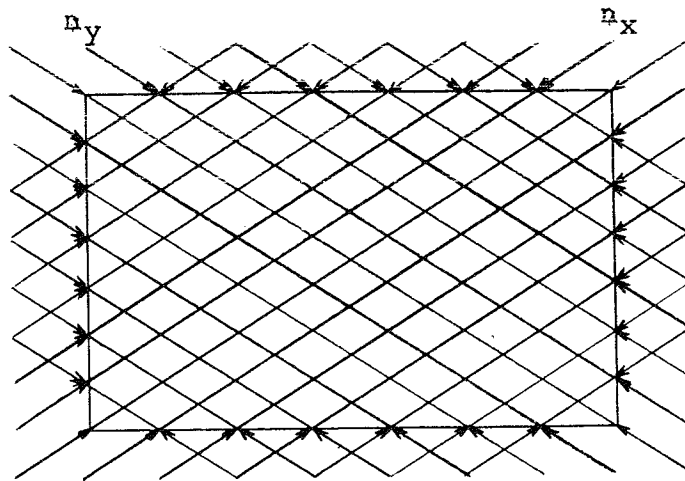


Fig. 8.3.

Operando se obtiene:

$$\Delta\ell_x = \frac{1}{EI} \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{384 \ell} (-15 n_x + 17 n_y) \quad (8.8.a)$$

$$\Delta\ell_y = \frac{1}{EI} \frac{a^2 b^3 + a^3 b^2}{384 \ell} (17 n_x - 15 n_y) \quad (8.8.b)$$

Resolviendo estas ecuaciones en  $n_x$  y  $n_y$  se obtienen las fuerzas que han de actuar sobre el contorno para provocar unas deformaciones  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$  de las diagonales del mismo.

$$-15 n_{xI} + 17 n_{yI} = \frac{384 \ell EI}{a^2 b^3 + a^3 b^2} \Delta\ell_x$$

$$17 n_{xI} - 15 n_{yI} = \frac{384 \ell EI}{a^2 b^3 + a^3 b^2} \Delta\ell_y$$

Resolviendo estas dos ecuaciones se llega a:

$$n_{xI} = \frac{6 \ell EI}{a^2 b^3 + a^3 b^2} (15 \Delta\ell_x + 17 \Delta\ell_y) \quad (8.9.a)$$

$$n_{yI} = \frac{6 \ell EI}{a^2 b^3 + a^3 b^2} (15 \Delta\ell_y + 17 \Delta\ell_x) \quad (8.9.b)$$

Ahora han de determinarse las fuerzas sobre los cables debidas a las deformaciones  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$  impuestas sobre la red.

Si se deja que ambas filas de cables se deformen libremente, aparecen unas deflexiones:

$$w_x^I = -\frac{3}{8} \frac{\ell}{2c-d} \Delta\ell_x \quad (8.10.a)$$

$$w_y^I = \frac{3}{16} \frac{\ell}{f_y} \Delta\ell_y = \frac{3}{4} \frac{\ell}{c+d} \Delta\ell_y \quad (8.10.b)$$

Los cables han de permanecer unidos, por lo que se introduce un sistema de fuerzas verticales,  $p$ , uniformemente distribuido, en sentido opuesto a las dos filas de cables. Debido a  $p$ :

$$w_x^{II} = -\frac{3}{8} p \frac{\ell^3 s_x}{(c+d)^2 (EA_1)_x} \quad (8.11.a)$$

$$w_y^{II} = \frac{3}{8} p \frac{\ell^3 s_y}{(c+d)^2 (EA_1)_y} \quad (8.11.b)$$

La condición para que los cables se junten es que:

$$w_x^I + w_x^{II} = w_y^I + w_y^{II} \quad (8.12)$$

De aquí se obtiene  $p$  como función de  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$ :

$$p = -2 \frac{(c+d)^2}{\ell^2} \frac{\frac{\Delta\ell_x}{4c-2d} + \frac{\Delta\ell_y}{c+d}}{\frac{s_x}{(EA_1)_x} + \frac{s_y}{(EA_1)_y}} \quad (8.13)$$

A partir de  $p$  se calculan las fuerzas sobre los cables:

$$n_{xc} = p \frac{\ell^2}{2(c+d)} \quad (8.14.a)$$



$$n_{y_c} = p \frac{\ell^2}{2(c+d)} \quad (8.14.b)$$

Las deformaciones  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$  de la estructura, han de ser tales que se cumpla:

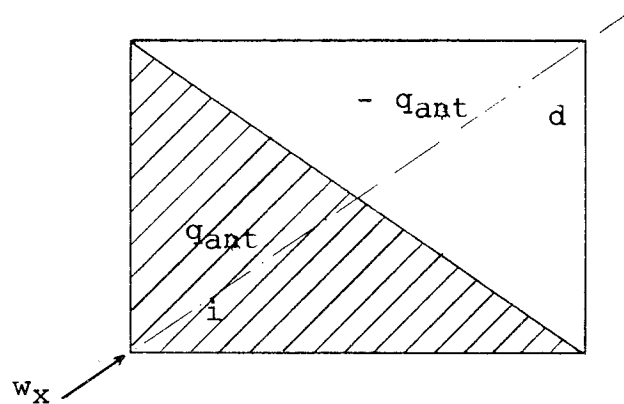
$$n_{x_q} = n_{x_r} - n_{x_c} \quad (8.15.a)$$

$$n_{y_q} = n_{y_r} - n_{y_c} \quad (8.15.b)$$

Las ecuaciones (8.15.a) y (8.15.b) permiten calcular  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$ , y a partir de ellos se obtienen las fuerzas correspondientes al contorno y a los cables.

## 8.2. Análisis bajo cargas antisimétricas

### 8.2.1. Carga de viento antisimétrica en dirección-x.



Los cables en dirección-x se deforman sin que varíe la tensión a la que previamente estaban sometidos.

La ecuación de la deformada, para carga antisimétrica, viene dada por:

$$w_i = -\frac{q_{ant}}{2H} x^2 - \frac{q_{ant}}{4H} \ell x$$

$$w_d = \frac{q_{ant}}{2H} x^2 - \frac{q_{ant}}{4H} \ell x$$

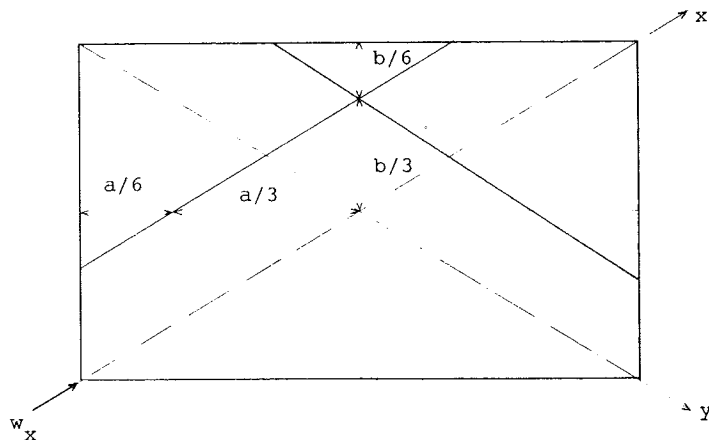
cuyos máximos son:

$$\frac{dw_i}{dx} = -\frac{q_{ant}}{H} x - \frac{q_{ant}}{4H} \ell = 0 \Rightarrow x = -\frac{\ell}{4} \Rightarrow w_{i_{max}} = \frac{1}{32} \frac{q_{ant} \ell^2}{H}$$

$$\frac{dw_d}{dx} = \frac{q_{ant}}{H} x - \frac{q_{ant}}{4H} \ell = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell}{4} \Rightarrow w_{d_{max}} = -\frac{1}{32} \frac{q_{ant} \ell^2}{H}$$

En cuanto a los cables en dirección-y, se deforman y además aumenta la fuerza a que estaban sometidos.

Si se estudian dos cables que se cruzan en sus puntos cuartos, se tiene la siguiente situación:



Para el cable en dirección-x se tiene:

$$\ell_x = \frac{2}{3} \ell \Rightarrow w_x = \frac{1}{32} q_x \frac{4}{9} \ell^2 = \frac{1}{72} q_x \frac{a^2 + b^2}{H} \quad (8.16)$$

Para el cable en dirección-y se tiene:

$$\ell_y = \frac{2}{3} \ell \Rightarrow w_y = \frac{9}{512} q_y \frac{\ell_y^3 s_y}{f_y^2 (EA_1)_y} \quad (8.17)$$

Ahora es preciso calcular  $f_y$ :

$$f_y = z \left| \begin{array}{c} -z \\ y=0 \\ x=\ell/6 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} y=\ell/3 \\ x=\ell/6 \end{array} \right|$$

$$z \left| \begin{array}{c} y=0 \\ x=\ell/6 \end{array} \right| = -\frac{c+d}{\ell^2} \frac{\ell^2}{36} - \frac{c-d}{\ell} \frac{\ell}{6} = \frac{5d-7c}{36}$$

$$z \left| \begin{array}{c} y=\ell/3 \\ x=\ell/6 \end{array} \right| = -\frac{c+d}{\ell^2} \frac{\ell^2}{36} - \frac{c-d}{\ell} \frac{\ell}{6} + \frac{c+d}{\ell^2} \frac{\ell^2}{9} = \frac{3d-c}{12}$$

En definitiva:

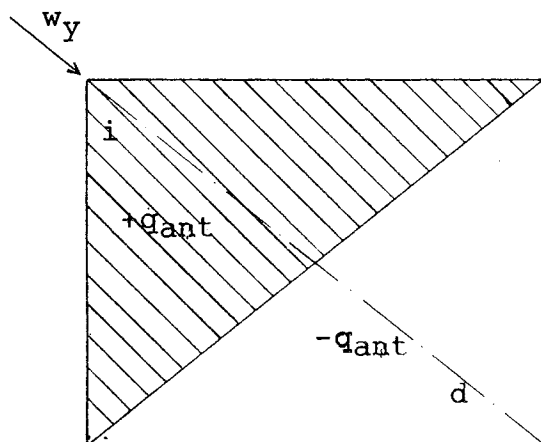
$$f_y = \frac{c+d}{9}$$

Además:

$$s_y = \ell_y \left( 1 + \frac{8}{3} \frac{f_y^2}{\ell_y^2} \right)$$

La proporción de carga que soporta cada fila de cables se obtiene de igualar las deflexiones (ecuaciones 8.16 y 8.17) y de tener en cuenta que  $q = q_x + q_y$ .

### 8.2.2. Carga de viento antisimétrica en dirección-y



Los cables en dirección-y absorben la carga antisimétrica, únicamente deformándose (no sufren elongación).

La ecuación de la deformada para carga antisimétrica, para los cables en dirección-y es:

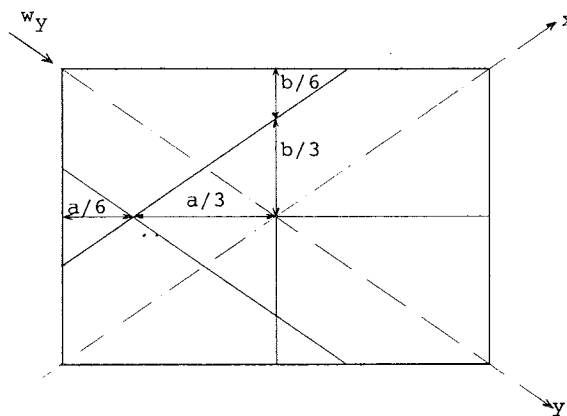
$$w_i = -\frac{q_{ant}}{2H} y^2 - \frac{q_{ant}}{4H} l \cdot y$$

$$w_d = +\frac{q_{ant}}{2H} x^2 - \frac{q_{ant}}{4H} l \cdot y$$

que tienen sus máximos en  $-\ell/4$  y  $\ell/4$ , respectivamente, siendo los valores de dichos máximos:

$$\frac{1}{32} \cdot q_{ant} \frac{\ell^2}{H}, \quad -\frac{1}{32} q_{ant} \frac{\ell^2}{H}$$

En cuanto a los cables en dirección-x, se deforman y se alargan, por lo que la fuerza a que están sometidos aumenta. La situación en este caso es la siguiente:



Como en la sección 8.2.1, aquí, también  $\ell_x = \ell_y = \frac{2}{3} \ell$ .

Para el cable en dirección-y, se tiene:

$$w_y = \frac{1}{32} q_y \frac{\frac{4}{9} \ell^2}{H} = \frac{1}{72} q_y \frac{\ell^2}{H} \quad (8.18)$$

Para el cable en dirección-x:

$$w_x = \frac{9}{512} q_x \frac{\frac{8}{27} \ell^3 s_x}{f_x^2 (EA_1)_x} \quad (8.19)$$

Es preciso calcular  $f_x$ :

$$f_x = z \begin{vmatrix} x = -\ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} - \frac{z \begin{vmatrix} x = \ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} x = -\ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix}}{2}$$

siendo:

$$z \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} = \frac{c + d}{36}$$

$$z \begin{vmatrix} x = \ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} = \frac{-15c + 9d}{36}$$

$$z \begin{vmatrix} x = -\ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} = \frac{9c - 15d}{36}$$

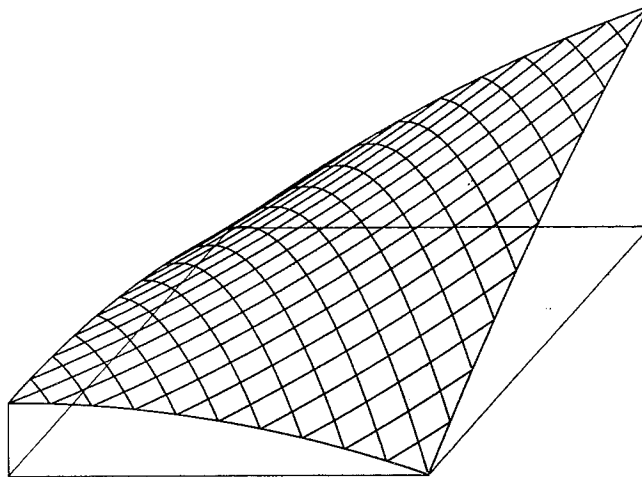
En definitiva  $f_x = \frac{c + d}{9}$ , y además:

$$s_x = \ell_x \left( 1 + \frac{(4 f_x - 2 d_x)^2}{2 \ell_x^2} + \frac{8}{3} \frac{f_x^2}{\ell_x^2} \right)$$

siendo  $d_x = \frac{2}{3} d$ .

Teniendo en cuenta que  $q = q_x + q_y$ , e igualando las deflexiones de ambas filas de cables, se obtienen  $q_x$  y  $q_y$ .

## 9. CONTORNO RECTANGULAR INCLINADO. LADOS PARABOLICOS



La geometría de este contorno corresponde a la que se representa en la figura 9.1. La ecuación de la superficie viene dada por:

$$z = -\frac{c+d}{ab}xy - \frac{c-d}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + d\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (9.1)$$

ecuación que, expresada según unos ejes que sigan la dirección de las diagonales, queda:

$$z = -\frac{c-d}{\ell^2}x'^2 - \frac{c-d}{\ell}x' + \frac{c+3d}{\ell^2}y'^2 \quad (9.2)$$

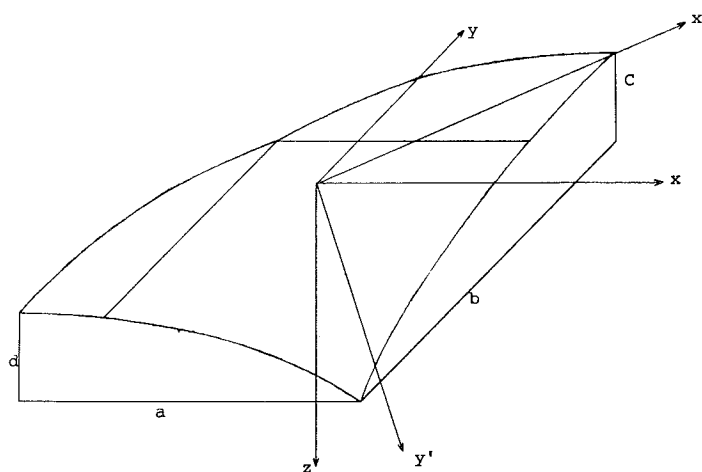


Fig. 9.1.

De la ecuación (9.2) se obtienen las ecuaciones de los cables en una y otra dirección.

En dirección-x':

$$z = -\frac{c-d}{\ell^2} x'^2 - \frac{c-d}{\ell} x' \quad (9.3)$$

y en dirección-y':

$$z = \frac{c+3d}{\ell^2} y'^2 \quad (9.4)$$

Ambos cables se representan en la figura 9.2.

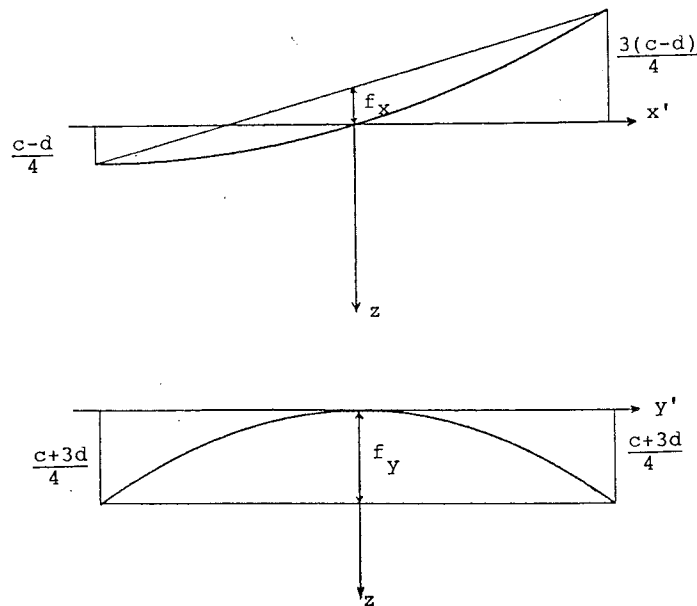


Fig. 9.2.

## 9.1. Fuerzas debidas a una carga uniforme

### 9.1.1. Fuerzas sobre el cable

La carga  $q$  se distribuye entre las dos filas de cables:

$$q = q_x + q_y \quad (9.5)$$

Además, la deflexión de ambas filas de cables ha de ser la misma:

$$\frac{3}{8} q_x \frac{\ell^3 s_x}{(c-d)^2 (EA_1)_x} = \frac{3}{8} q_y \frac{\ell^3 s_y}{(c+3d)^2 (EA_1)_y} \quad (9.6)$$

siendo:

$$s_x = \ell \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{(c-d)^2}{\ell^2} \right) \quad (9.7.a)$$

$$s_y = \ell \left( 1 + \frac{(c+3d)^2}{6 \ell^2} \right) \quad (9.7.b)$$

### 9.1.2. Deformación del contorno

Puesto que la deformación del contorno se analiza sobre la base de su proyección sobre el plano horizontal, la determinación de las fuerzas que han de actuar sobre el mismo para producir una deformación caracterizada por  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$ , medidas sobre las diagonales, es idéntica a la de la sección 8.1.2.

Las fuerzas que han de actuar sobre el contorno serán:

$$n_{x_I} = \frac{6\ell EI}{a^2 b^3 + a^3 b^2} (15 \Delta\ell_x + 17 \Delta\ell_y) \quad (9.8 a)$$

$$n_{y_I} = \frac{6\ell EI}{a^2 b^3 + a^3 b^2} (17 \Delta\ell_x + 15 \Delta\ell_y) \quad (9.8.b)$$

Ahora se han de determinar las fuerzas sobre los cables, debidas a las deformaciones  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$  impuestas sobre la red. Si se deja que ambas filas de cables se deformen libremente, aparecen unas deflexiones:

$$w_x^I = -\frac{3}{16} \frac{\ell}{c-d} \Delta\ell_x \quad (9.9.a)$$

$$w_y^I = \frac{3}{16} \frac{\ell}{f_y} \Delta\ell_y = \frac{3}{4} \frac{\ell}{c+3d} \Delta\ell_y \quad (9.9.b)$$

Para que los cables permanezcan juntos, se introduce un sistema de fuerzas verticales,  $p$ , uniformemente distribuidas, en sentido opuesto a ambas filas de cables, el cual hace que aparezcan unas deflexiones:

$$w_x^{II} = -\frac{3}{8} p \frac{\ell^3 s_x}{(c-d)^2 (EA_1)_x} \quad (9.10.a)$$

$$w_y^{II} = \frac{3}{8} p \frac{\ell^3 s_y}{(c+3d)^2 (EA_1)_y} \quad (9.10.b)$$

Se tiene que cumplir, para que los cables se junten:

$$w_x^I + w_x^{II} = w_y^I + w_y^{II} \quad (9.11)$$

ecuación de la que se obtiene  $p$  como función  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$ :

$$p = -\frac{2}{\ell^2} \frac{\frac{\Delta\ell_x}{4(c-d)} + \frac{\Delta\ell_y}{c+3d}}{\frac{s_x}{(c-d)^2 (EA_1)_x} + \frac{s_y}{(c+3d)^2 (EA_1)_y}} \quad (9.12)$$

A partir de  $p$  se calculan las fuerzas sobre los cables:

$$n_{x_c} = p \frac{\ell^2}{2(c-d)} \quad (9.13.a)$$

$$n_{y_c} = p \frac{\ell^2}{2(c+3d)} \quad (9.13.b)$$

Las deformaciones  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$  de la estructura, han de ser tales que:

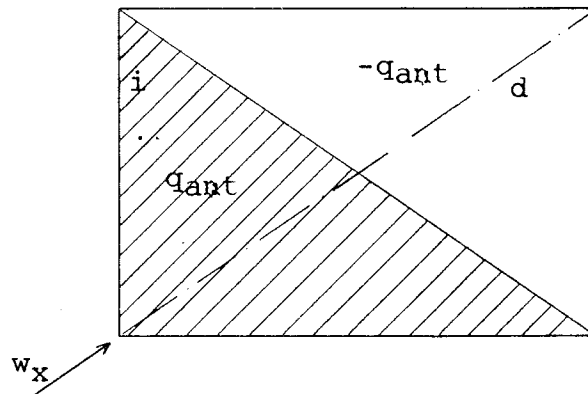
$$n_{x_q} = n_{x_r} - n_{x_c} \quad (9.14.a)$$

$$n_{y_q} = n_{y_r} - n_{y_c} \quad (9.14.b)$$

Estas dos últimas ecuaciones permiten calcular  $\Delta\ell_x$  y  $\Delta\ell_y$  y a partir de ellos se obtienen las fuerzas correspondientes al conorno y a los cables.

## 9.2. Análisis bajo cargas antisimétricas

### 9.2.1. Carga de viento antisimétrica en dirección-x



Como en el capítulo anterior, la deformada del cable en dirección-x viene dada por la ecuación:

$$w_i = -\frac{q_{ant}}{2H} x^2 - \frac{q_{ant}}{4H} \ell x$$

$$w_d = \frac{q_{ant}}{2H} x^2 - \frac{q_{ant}}{4H} \ell x$$

cuyos máximos son:

$$\frac{dw_i}{dx} = -\frac{q_{ant}}{H} x - \frac{q_{ant}}{4H} \ell = 0 \Rightarrow x = -\frac{\ell}{4} \Rightarrow w_i = \frac{1}{32} q_{ant} \frac{\ell^2}{H}$$

$$\frac{dw_d}{dx} = \frac{q_{ant}}{H} x - \frac{q_{ant}}{4H} \ell = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell}{4} \Rightarrow w_d = -\frac{1}{32} q_{ant} \frac{\ell^2}{H}$$

En cuanto a los cables en dirección-y, se deforman y se alargan, por lo que la fuerza que actúa sobre ellos aumenta.

Siguiendo el procedimiento seguido en la sección 8.2.1, se tiene:

Para el cable en dirección-x:

$$w_x = \frac{1}{32} q_x \frac{\ell_x^2}{H} = \frac{1}{72} q_x \frac{(a^2 + b^2)}{H} \quad (9.15)$$



Para el cable en dirección-y:

$$w_y = \frac{9}{512} q_y \frac{\ell_y^3 s_y}{f_y^2 (EA_1)_y} \quad (9.16)$$

siendo:  $\ell_y = \frac{2}{3} \ell$ .

Ahora hay que calcular  $f_y$ :  $f_y = z \left| \begin{array}{c} -z \\ y = \ell/3 \\ x = \ell/6 \end{array} \right|_{y=0}^{x=\ell/6}$

$$z \left| \begin{array}{c} y = 0 \\ x = \ell/6 \end{array} \right| = -\frac{7}{36} (c-d) \quad z \left| \begin{array}{c} y = \ell/3 \\ x = \ell/6 \end{array} \right| = \frac{3c - 19d}{36}$$

Por tanto

$$f_y = \frac{c + 3d}{9}$$

Además

$$s_y = \ell_y \left( 1 + \frac{8}{3} \frac{f_y^2}{\ell_y^2} \right)$$

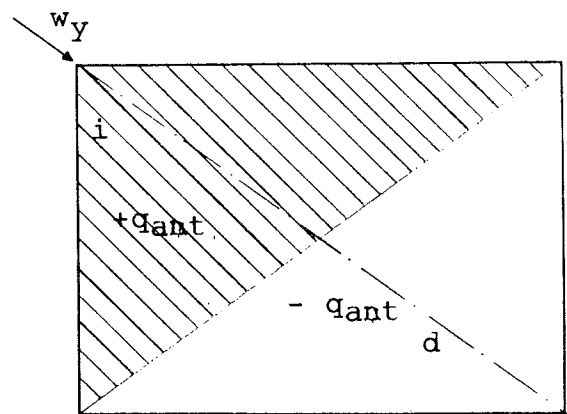
Igualando ambas deflexiones y teniendo en cuenta que  $q = q_x + q_y$ , se obtiene la proporción de carga que soporta cada fila de cables.

El incremento de fuerza en el cable, en dirección-y, viene dado por:

$$\Delta H = q_y \frac{\ell_y^2}{8 f_y}$$

### 9.2.2. Carga de viento antisimétrica en dirección-y

Este caso corresponde al mostrado en la figura siguiente:



La deformada del cable en dirección-y viene dada por:

$$w_i = -q_{ant} \frac{y^2}{2H} - q_{ant} \frac{\ell \cdot y}{4H}$$

$$w_d = q_{ant} \frac{y^2}{2H} - q_{ant} \frac{\ell \cdot y}{4H}$$

que tiene sus máximos en  $-\ell/4$  y  $+\ell/4$ , siendo los valores de dichos máximos:

$$\frac{1}{32} q_{ant} \frac{\ell^2}{H}, \quad -\frac{1}{32} q_{ant} \frac{\ell^2}{H}$$

respectivamente.

De igual forma a como se hizo en la sección 8.2.2 en este caso se tiene:

Para el cable en dirección-y:

$$w_y = \frac{1}{32} q_y \frac{\frac{4}{9} \ell^2}{H} = \frac{1}{72} q_y \frac{\ell^2}{H} \quad (9.17)$$

Para el cable en dirección-x:

$$w_x = \frac{9}{512} q_x \frac{\frac{8}{27} \ell^3 s_x}{f_x^2 (EA_1)_x} \quad (9.18)$$

Hay que calcular  $f_x$ :

$$f_x = \frac{z \begin{vmatrix} x = \ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} x = -\ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix}}{2} - \left( z \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} x = -\ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} \right)$$

siendo:

$$z \begin{vmatrix} x = \ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} = \frac{-15c + 19d}{36}$$

$$z \begin{vmatrix} x = -\ell/3 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} = \frac{9c - 5d}{36}$$

$$z \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = -\ell/6 \end{vmatrix} = \frac{c + 3d}{36}$$

Por consiguiente:

$$f_x = \frac{c - d}{9}$$

y además:

$$s_x = \ell_x \left( 1 + \frac{32}{3} \frac{f_x^2}{\ell_x^2} \right); \quad \ell_x = \frac{2}{3} \ell$$

Igualando las dos deflexiones (ecuaciones 9.17 y 9.18) y teniendo en cuenta que  $q = q_x + q_y$ , se obtiene la proporción de carga que soporta cada fila de cables.

El incremento de fuerza en el cable en dirección-x es:

$$\Delta H = q_x \frac{\ell_x^2}{8 f_x}$$

## 10. PRETENSADO

Existen dos posibilidades en cuanto al pretensado: o bien se aplica sobre los cables el mínimo pretensado necesario para evitar su aflojamiento, o bien se impone un pretensado de valor arbitrario.

Para la primera posibilidad es necesario determinar en qué situación se produce la máxima "compresión" en los cables. Para ello, en primer lugar se determinan las fuerzas sobre los cables debidas al peso propio. En función del signo de dichas fuerzas (+ significa tracción y - significa compresión) se estudia qué combinación de carga es la que produce la máxima "compresión" en los cables, en alguna dirección. Esta será la magnitud de la fuerza de tracción que habrá que aplicar sobre los cables, en dicha dirección, para prevenir su aflojamiento.

Tanto si se aplica el mínimo pretensado como si el pretensado que hay que aplicar es impuesto, el proceso que se debe seguir a continuación es el mismo.

Si, por ejemplo, se pretensan los cables en dirección-x con una fuerza  $n_{xp}$ , la cual es constante para todos los cables en dicha dirección, de acuerdo con (6.1), aparecen unas fuerzas verticales:

$$p = n_{xp} \frac{8 f_x}{\ell_x^2} \quad (10.1)$$

que se transfieren a los cables en dirección -y, de modo que sobre ellos aparecen unas fuerzas:

$$n_{yp} = p \frac{\ell_y^2}{8 f_y} = n_{xp} \frac{f_x}{f_y} \frac{\ell_y^2}{\ell_x^2} \quad (10.2)$$

Si, por el contrario, se pretensan los cables en dirección -y, con una fuerza  $n_{yp}$ , sobre los cables en dirección -x aparecerán unas fuerzas:

$$n_{xp} = n_{yp} \frac{f_y}{f_x} \frac{\ell_x^2}{\ell_y^2} \quad (10.3)$$

Así pues, el pretensado de la malla se realizará sobre la dirección más desfavorable, de tal forma que el valor de pretensado transferido a la otra dirección, sea igual o superior al mínimo necesario, o bien al valor impuesto.

Dado que las fuerzas en los cables (10.2) o (10.3) se obtienen exclusivamente con ayuda de la ecuación de equilibrio (6.1), se cumplirá que  $n_{xp}$ ,  $n_{yp}$ , y todas las fuerzas sobre

los cables y el contorno, serán independientes de la rigidez (y, por tanto, de la deformación) del contorno.

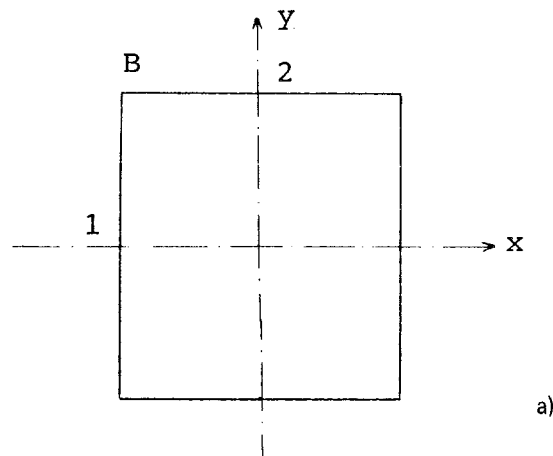
Finalmente, los valores de estas expresiones, para los distintos casos considerados, se obtendrán directamente, sin más que sustituir en ellas los parámetros correspondientes de cada uno de dichos casos.

## 11. EJEMPLOS

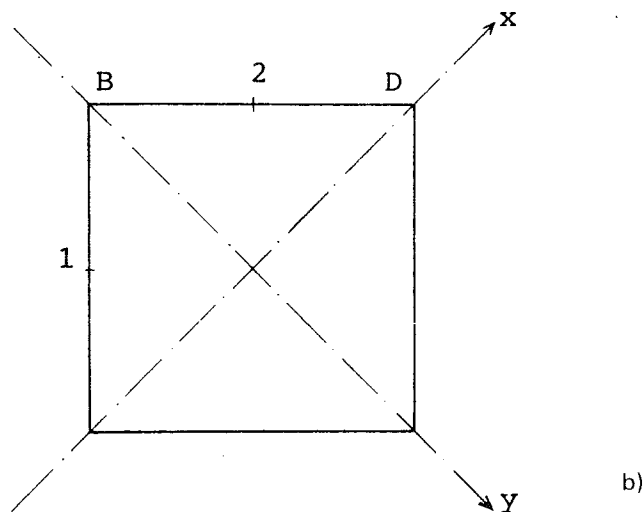
A continuación se muestran los resultados obtenidos de aplicar la teoría anteriormente expuesta, a tres ejemplos que corresponden, respectivamente, a cada uno de los casos estudiados.

Es necesario puntualizar que, cuando, en los resultados se hace referencia a distintos puntos del contorno, éstos se corresponden con los de las figuras siguientes:

a) Contorno rectangular plano.



b) Contornos rectangulares inclinados.



La geometría correspondiente a los ejemplos cuyos datos y resultados se listan a continuación, puede contemplarse en los capítulos que hacen referencia a cada uno de los casos estudiados (caps. 7, 8 y 9 respectivamente). A ellos puede acudir para comprobar a qué magnitud se refiere cada uno de los datos mostrados.

## EJEMPLO 1. CONTORNO RECTANGULAR PLANO. LADOS PARABOLICOS

### DATOS GEOMETRICOS Y PROPIEDADES FISICAS

Longitud del cable en dirección X (m) .....	44,500
Longitud del cable en dirección Y (m) .....	57,600
Flecha del cable en dirección X (m) .....	3,500
Flecha del cable en dirección Y (m) .....	6,500
Módulo de elasticidad del cable en dirección X (kN/m <sup>2</sup> ) .....	150 E6 $\equiv$ 150 x 10 <sup>6</sup>
Módulo de elasticidad del cable en dirección Y (kN/m <sup>2</sup> ) .....	150 E6 $\equiv$ 150 x 10 <sup>6</sup>
Diámetro del cable en dirección X (m) .....	0,017
Diámetro del cable en dirección Y (m) .....	0,021
Módulo de elasticidad del contorno (kN/m <sup>2</sup> ) .....	27,5 E6 $\equiv$ 27,5 x 10 <sup>6</sup>
Momento de inercia del contorno (m <sup>4</sup> ) .....	1,350

### CARGAS

Peso propio (kN/m <sup>2</sup> ) .....	0,300
Carga de nieve (kN/m <sup>2</sup> ) .....	0,800
Carga de viento en dirección-XA (kN/m <sup>2</sup> ) .....	-0,640
Carga de viento en dirección-XB (kN/m <sup>2</sup> ) .....	-0,640
Carga de viento en dirección-YA (kN/m <sup>2</sup> ) .....	-0,720
Carga de viento en dirección-YB (kN/m <sup>2</sup> ) .....	0,160

### FUERZAS DE PRETENSADO IMPUESTAS

En dirección X (kN/m) .....	0,000
En dirección Y (kN/m) .....	0,000

### RESULTADOS

#### FUERZAS DE PRETENSADO QUE HAY QUE APLICAR

En el cable en dirección X (kN/m) .....	29,905
En el cable en dirección Y (kN/m) .....	26,978

#### ESFUERZOS EN EL CONTORNO DEBIDOS AL PRETENSADO

#### MOMENTOS FLECTORES

En el punto 1 (mkN) .....	5797,201
En el punto 2 (mkN) .....	73,193
En el punto b (mkN) .....	-6604,817

### COMPRESIONES

En el punto 1 (kN) .....	-600,271
En el punto 2 (kN) .....	-861,251

### DEFORMACIONES

En dirección X (m) .....	-0,042
En dirección Y (m) .....	0,007
Desplazamiento vertical del punto central (m) .....	0,051

### LA COMBINACION DE CARGA MAS DESFAVORABLE HACIA ABAJO ES PESO PROPIO + NIEVE

Fuerza sobre el cable en dirección X (kN/m) .....	21,127
Fuerza sobre el cable en dirección Y (kN/m) .....	89,243
Momento en el punto 1 del contorno (mkN) .....	-952,274
Momento en el punto 2 del contorno (mkN) .....	12376,429
Momento en el punto B del contorno (mkN) .....	-9714,008
Compresión en el punto 1 del contorno (kN) .....	-1985,657
Compresión en el punto 2 del contorno (kN) .....	-608,454
Deformación del contorno según X (m) .....	0,095
Deformación del contorno según Y (m) .....	-0,123
Desplazamiento vertical del punto central (m) .....	0,413

### LA COMBINACION DE CARGA MAS DESFAVORABLE HACIA ARRIBA ES PESO PROPIO + VIENTO-X

Fuerza sobre el cable en dirección x (kN/m) .....	32.618
Fuerza sobre el cable en dirección y (kN/m) .....	7.733
Momento en el punto 1 del contorno (mkN) .....	7883.403
Momento en el punto 2 del contorno (mkN) .....	-3729.625
Momento en el punto B del contorno (mkN) .....	-5643.794
Compresión en el punto 1 del contorno (kN) .....	-172.060
Compresión en el punto 2 del contorno (kN) .....	-939.389
Deformación del contorno según x (m) .....	-0,085
Deformación del contorno según y (m) .....	-0,123
Desplazamiento vertical del punto central (m) .....	0,413

## EJEMPLO 2. CONTORNO RECTANGULAR INCLINADO. LADOS RECTOS

### DATOS GEOMETRICOS Y PROPIEDADES FISICAS

Longitud del lado A (m) .....	50,000
Longitud del lado B (m) .....	50,000
Longitud de la cota C (m) .....	15,000
Longitud de la cota D (m) .....	15,000
Módulo de elasticidad del cable en dirección X ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	$150 \text{ E6} \equiv 150 \times 10^6$
Módulo de elasticidad del cable en dirección Y ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	$150 \text{ E6} \equiv 150 \times 10^6$
Diámetro del cable en dirección X (m) .....	0,021
Diámetro del cable en dirección Y (m) .....	0,017
Módulo de elasticidad del contorno ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	$27,5 \text{ E6} \equiv 27,5 \times 10^6$
Momento de inercia del contorno ( $\text{m}^4$ ) .....	1,350

### CARGAS

Peso propio ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	0,300
Carga de nieve ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	0,800
Carga de viento en dirección-XA ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	-0,720
Carga de viento en dirección-XB ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	0,160
Carga de viento en dirección-YA ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	-0,640
Carga de viento en dirección-YB ( $\text{kN/m}^2$ ) .....	-0,640

### FUERZAS DE PRETENSADO IMPUESTAS

En dirección X ( $\text{kN/m}$ ) .....	0,000
En dirección Y ( $\text{kN/m}$ ) .....	0,000

### RESULTADOS

#### FUERZAS DE PRETENSADO QUE HAY QUE APLICAR

En el cable en dirección X ( $\text{kN/m}$ ) .....	39,744
En el cable en dirección Y ( $\text{kN/m}$ ) .....	39,744

#### ESFUERZOS EN EL CONTORNO DEBIDOS AL PRETENSADO

##### MOMENTOS FLECTORES

En el punto 1 (mkN) .....	4140,039
En el punto B (mkN) .....	-8280,078
En el punto D (mkN) .....	-8280,078

### COMPRESIONES

En el punto 1 (kN) .....	-1405,176
En el punto 2 (kN) .....	-1405,176

### DEFORMACIONES

En dirección X (m) .....	0,031
En dirección Y (m) .....	0,031
Desplazamiento vertical del punto central (m) .....	-0,129

### LA COMBINACION DE CARGA MAS DESFAVORABLE HACIA ABAJO ES PESO PROPIO + NIEVE

Fuerza sobre el cable en dirección X (kN/m) .....	91,667
Fuerza sobre el cable en dirección Y (kN/m) .....	0,000
Momento en el punto 1 del contorno (mkN) .....	4774,306
Momento en el punto B del contorno (mkN) .....	-38194,444
Momento en el punto D del contorno (mkN) .....	19097,222
Compresión en el punto 1 del contorno (kN) .....	-1252,952
Compresión en el punto 2 del contorno (kN) .....	-1252,952
Deformación del contorno según X (m) .....	-0,870
Deformación del contorno según Y (m) .....	0,948
Desplazamiento vertical del punto central (m) .....	1,644

### LA COMBINACION DE CARGA MAS DESFAVORABLE HACIA ARRIBA ES PESO PROPIO + VIENTO-Y

Fuerza sobre el cable en dirección X (kN/m) .....	23,696
Fuerza sobre el cable en dirección Y (kN/m) .....	52,029
Momento en el punto 1 del contorno (mkN) .....	3943,993
Momento en el punto B del contorno (mkN) .....	966,181
Momento en el punto D del contorno (mkN) .....	-16742,153
Compresión en el punto 1 del contorno (kN) .....	-1452,227
Compresión en el punto 2 del contorno (kN) .....	-1452,227
Deformación del contorno según X (m) .....	0,310
Deformación del contorno según Y (m) .....	-0,252
Desplazamiento vertical del punto central (m) .....	-0,677

### EJEMPLO 3. CONTORNO RECTANGULAR INCLINADO. LADOS PARABOLICOS

#### DATOS GEOMETRICOS Y PROPIEDADES FISICAS

Longitud del lado A (m) .....	50,000
Longitud del lado B (m) .....	50,000



Longitud de la cota C (m) .....	15,000
Longitud de la cota D (m) .....	5,000
Módulo de elasticidad del cable en dirección X (kN/m <sup>2</sup> ) .....	150 E6 $\equiv$ 150 x 10 <sup>6</sup>
Módulo de elasticidad del cable en dirección Y (kN/m <sup>2</sup> ) .....	150 E6 $\equiv$ 150 x 10 <sup>6</sup>
Diámetro del cable en dirección X (m) .....	0,021
Diámetro del cable en dirección Y (m) .....	0,017
Módulo de elasticidad del contorno (kN/m <sup>2</sup> ) .....	27,5 E6 $\equiv$ 27,5 x 10 <sup>6</sup>
Momento de inercia del contorno (m <sup>4</sup> ) .....	1,350

### CARGAS

Peso propio (kN/m <sup>2</sup> ) .....	0,300
Carga de nieve (kN/m <sup>2</sup> ) .....	0,800
Carga de viento en dirección-XA (kN/m <sup>2</sup> ) .....	-0,720
Carga de viento en dirección-XB (kN/m <sup>2</sup> ) .....	0,160
Carga de viento en dirección-YA (kN/m <sup>2</sup> ) .....	-0,640
Carga de viento en dirección-YB (kN/m <sup>2</sup> ) .....	-0,640

### FUERZAS DE PRETENSADO IMPUESTAS

En dirección X (kN/m) .....	0,000
En dirección Y (kN/m) .....	0,000

### RESULTADOS

#### FUERZAS DE PRETENSADO QUE HAY QUE APLICAR

En el cable en dirección X (kN/m) .....	262,509
En el cable en dirección y (kN/m) .....	87,503

#### ESFUERZOS EN EL CONTORNO DEBIDOS AL PRETENSADO MOMENTOS FLECTORES

En el punto 1 (mkN) .....	18229,817
En el punto B (mkN) .....	-91149,083
En el punto D (mkN) .....	18229,817

### COMPRESIONES

En el punto 1 (kN) .....	-6187,405
En el punto 2 (kN) .....	-6187,405

## DEFORMACIONES

En dirección X (m) . . . . .	-0,999
En dirección Y (m) . . . . .	1,285
Desplazamiento vertical del punto central (m) . . . . .	1,864

### LA COMBINACION DE CARGA MAS DESFAVORABLE HACIA ABAJO ES PESO PROPIO + NIEVE

Fuerza sobre el cable en dirección X (kN/m) . . . . .	275,000
Fuerza sobre el cable en dirección Y (kN/m) . . . . .	0,000
Momento en el punto 1 del contorno (mkN) . . . . .	14322,917
Momento en el punto B del contorno (mkN) . . . . .	-114583,333
Momento en el punto D del contorno (mkN) . . . . .	57291,667
Compresión en el punto 1 del contorno (kN) . . . . .	-7125,061
Compresión en el punto 2 del contorno (kN) . . . . .	-7125,061
Deformación del contorno según X (m) . . . . .	-2,038
Deformación del contorno según Y (m) . . . . .	2,230
Desplazamiento vertical del punto central (m) . . . . .	3,856

### LA COMBINACION DE CARGA MAS DESFAVORABLE HACIA ARRIBA ES PESO PROPIO + VIENTO-Y

Fuerza sobre el cable en dirección X (kN/m) . . . . .	258,649
Fuerza sobre el cable en dirección Y (kN/m) . . . . .	114,550
Momento en el punto 1 del contorno (mkN) . . . . .	19437,404
Momento en el punto B del contorno (mkN) . . . . .	-83905,769
Momento en el punto D del contorno (mkN) . . . . .	6156,154
Compresión en el punto 1 del contorno (kN) . . . . .	-5897,584
Compresión en el punto 2 del contorno (kN) . . . . .	-5897,584
Deformación del contorno según X (m) . . . . .	-0,678
Deformación del contorno según Y (m) . . . . .	0,992
Desplazamiento vertical del punto central (m) . . . . .	1,249

## REFERENCIAS

1. Krishna, P. Cable Suspended Roofs. McGraw-Hill, 1978.
2. Irvine, H.M. "Statics of Suspended Cables". J. Eng. Mech. Div. ASCE Vol 101, June 1975.
3. Maier, Gr-Contro, R. "Energy Approach to Inelastic Cable-Structure Analysis". J. Eng. Mech. Div. ASCE Vol. 101, Oct. 1975.
4. Chisalita, A. "Finite Deformation Analysis of Cable Networks" J. Eng. Mech. Div. Vol. 110, Febr. 1984.
5. Godbole, P.N., Krishna, P., Jain, J.K. "Boundary Effects in Suspended Cable Roofs". J. Struct. Eng. ASCE, May 1984.
6. Hernández, F. "Análisis de Mallas Tetas como Sistema de Cobertura en Edificios Industriales". P.F.C., E.S. Ingenieros Industriales de Sevilla. Cátedra de Construcciones Industriales, 1986.
7. Szabó, J., Kollar, L. "Structural Design of Cable Suspended Roofs". Ellis Horwood Limited, 1984.

# Acciones térmicas de diseño en puentes cajón de hormigón

Enrique Mirambell  
Antonio Aguado  
Dres. Ingenieros de Caminos  
Cátedra de Hormigón. Departamento de Estructuras  
E.T.S.I.C.C. y P. de Barcelona U.P.C.

## RESUMEN

En el presente artículo se analiza, de forma paramétrica, la influencia de diversas variables de diferente índole sobre la respuesta térmica de los tableros de puentes cajón unicelulares y multicelulares de hormigón. La aplicación de una metodología general de obtención de acciones térmicas de diseño al caso de puentes cajón emplazados en el territorio peninsular, permitirá conocer el rango anual de la temperatura media del puente, los gradientes térmicos y demás solicitaciones térmicas. Los resultados derivados de este estudio se analizan comparativamente con los obtenidos mediante la aplicación de lo preconizado por la normativa nacional vigente. Asimismo, se incide de forma especial en las posibles solicitaciones transversales por temperatura y en la influencia de la inercia variable sobre la respuesta térmica del puente cajón.

## 1. INTRODUCCION

En un principio, cabe mencionar que el presente artículo es una continuación del artículo ya publicado en la revista "Hormigón y Acero", nº 163, relativo al comportamiento de los puentes losa de hormigón frente a los efectos térmicos ambientales. Ambos artículos son resumen de algunos de los trabajos realizados por E. Mirambell en el desarrollo de su tesis doctoral (1).

Así pues, no se incidirá en este artículo en aspectos generales, ya desarrollados en el artículo anterior, como son el estudio de la influencia de algunos parámetros sobre la respuesta térmica de los tableros de puentes cajón de hormigón o el desarrollo de la metodo-

logía general de obtención de las acciones térmicas de diseño. Sí se incidirá en aspectos propios de la tipología transversal de los tableros cajón, como son la influencia de algunos parámetros geométricos y de la inercia variable sobre la respuesta térmica del puente y la importancia que puede adquirir en esta tipología la sollicitación transversal por temperatura. Recordemos que la sollicitación térmica transversal fue una de las razones desencadenantes, sino la principal, de la puesta fuera de servicio del puente de Jagst en Untergriesheim, en Alemania. En una inspección rutinaria de dicho puente, de sección transversal en cajón, pudo apreciarse la formación de una grieta de 5 a 6 mm de espesor. Una investigación posterior, realizada por Leonhardt, Kolbe y Peter (2), mostró que una de las causas decisivas que dieron lugar a la aparición de la grieta fue un brusco y repentino descenso de la temperatura ambiente exterior que generó una diferencia de temperaturas de aproximadamente 30°C entre la cara interior y la cara exterior del alma de la sección cajón.

## 2. LA RESPUESTA TERMICA EN TABLEROS DE PUENTES CAJON UNICELULARES. ESTUDIOS PARAMETRICOS

El estudio básico de referencia, punto de partida de los diversos estudios paramétricos, viene definido por los valores de las propiedades estructurales, condiciones ambientales y climatológicas y condiciones de emplazamiento que se presentan en la tabla 1. Los valores adoptados por las variables ambientales y climatológicas son los correspondientes al lugar de emplazamiento del puente –Calgary, Canadá– pudiendo encontrarse éstos en las referencias de Elbadry y Ghali (3), (4). Asimismo, en la figura 1 se presenta la sección cajón contemplada, correspondiente a un puente cajón de hormigón pretensado, emplazado en la citada localidad canadiense, y la pertinente discretización en diferencias, empleada en los estudios numéricos.

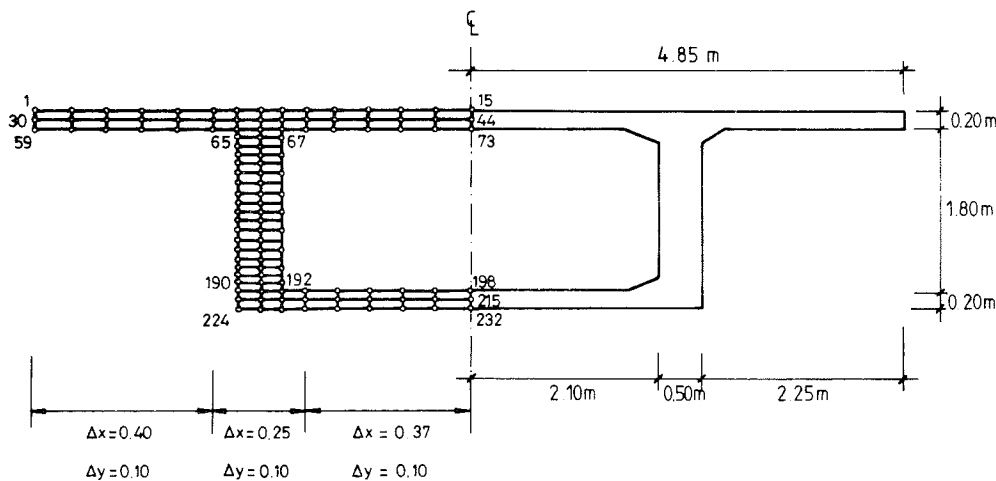


Fig. 1. Sección cajón unicelular sobre la que se llevan a cabo los diferentes estudios paramétricos. Discretización en diferencias finitas.

Los resultados derivados del análisis térmico de los puentes losa de hormigón, permite centrar el estudio paramétrico general en la influencia de determinados parámetros que se citan a continuación:

- Propiedades físicas, térmicas y estructurales:
  - Factor de absorción
  - Espesor de capa asfáltica.

**TABLA 1**

**Valores de los parámetros contemplados en el estudio de referencia, relativos a puentes cajón de hormigón**

Propiedades térmicas y estructurales	Conductividad (W/m°C)	1,5
	Calor específico (J/kg°C)	960,0
	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2.400,0
	Absorción solar hormigón	0,5
	Emisividad hormigón	0,88
	Coef. dilatación térmica (°C <sup>-1</sup> )	8 x 10 <sup>-6</sup>
	Módulo de elasticidad (Kp/cm <sup>2</sup> )	273.860,0
	Capa asfáltica de rodadura	—
Condiciones ambientales	Temperatura ambiente media (°C)	-5,0
	Rango variación temp. amb. (°C)	20,0
	Velocidad viento (m/seg)	1,0
	Factor de turbidez	1,8
	Día analizado	21 Marzo 81
Localización y orientación	Latitud (°N)	51,03
	Altitud (m)	1.050,0
	Azimut (°)	eje E - O = 0

- Condiciones ambientales y climatológicas:
  - Rango diario de la temperatura ambiente
  - Velocidad del viento
  - Factor de turbidez
  - Día del año.
- Localización y orientación del puente:
  - Latitud
  - Azimut.

Debido a las propias características geométricas de la sección transversal en cajón, se analizan también diversas relaciones de índole geométrico que pueden incidir a priori en los resultados obtenidos de las distribuciones de temperaturas y de las acciones térmicas. Las variables contempladas son las siguientes:

- Geometría del tablero:
  - Relación espesor ala-alma
  - Relación longitud de voladizo-canto del alma
  - Variación de canto de la sección cajón
  - Existencia de cartelas.

En lo referente a los tres primeros grandes grupos de parámetros —propiedades físicas, térmicas y estructurales, condiciones ambientales y climatológicas y condiciones de emplazamiento—, los resultados obtenidos (Mirambell (1)) muestran que todos los parámetros actúan en el mismo sentido en el que lo hacen en tableros de puentes losa de hormigón, a excepción de lo obtenido para la velocidad del viento.

Debido a ello, los resultados que se presentan en este artículo son los referentes a dicho parámetro climatológico y a las variables de índole geométrico citadas anteriormente, remitiendo al lector a la propia tesis doctoral (Mirambell (1)), para el conocimiento de la respuesta térmica de los tableros de puentes cajón en función de los restantes parámetros analizados.

Dada la propia configuración geométrica de la sección cajón, se cree oportuno el presentar las distribuciones térmicas según varios ejes verticales y observar así la diferente respuesta térmica según el eje que se contemple. Por otra parte, también se presentan gráficas relativas a la evolución de la temperatura en el interior de las células y a la diferencia de temperaturas existente entre el exterior y el interior de la sección cajón, lo cual será de sumo interés de cara a evaluar la magnitud de las tensiones térmicas transversales, contenidas en el plano de la sección.

## 2.1. Velocidad del viento

Este parámetro influye en el fenómeno de la transmisión de calor a través de los valores que adopta el coeficiente de transferencia de calor por convección para las diferentes superficies expuestas. Los coeficientes propuestos por Kehlbeck (5) son los utilizados en el estudio paramétrico (tabla 2).

**TABLA 2**  
Coeficientes de transferencia de calor por convección, en las diferentes superficies expuestas de un tablero cajón (Kehlbeck (5))

Velocidad del viento (m/seg)	Coeficiente de transferencia de calor por convección $h_c$ ( $W/m^2 \text{ } ^\circ C$ )		
	Superficie superior	Superficie inferior	Superficie exterior lateral
1,0	8,5	6,0	7,5
2,0	12,3	9,8	11,3
3,0	16,2	13,7	15,2
4,0	20,0	17,5	19,0
5,0	23,8	21,3	22,8
6,0	27,7	25,2	26,7
8,0	35,3	32,8	34,3
10,0	43,0	40,5	42,0
11,0	46,8	44,3	45,8

Las velocidades de viento contempladas son 1, 3, 5, 7 y 9 m/seg. Dichas velocidades son consideradas como velocidades medias a lo largo del día analizado y reflejan, con suficiente aproximación, la situación en la que se encuentra inmerso el puente en lo que se refiere a la incidencia de esta variable climatológica.

La figura 2 muestra las distribuciones térmicas según el eje vertical de simetría del alma y según el eje vertical de simetría de la sección, correspondientes a los instantes en que, para cada uno de los valores asignados a la velocidad del viento, se inducen las máximas curvaturas térmicas impuestas, o lo que es lo mismo, los máximos gradientes térmicos.

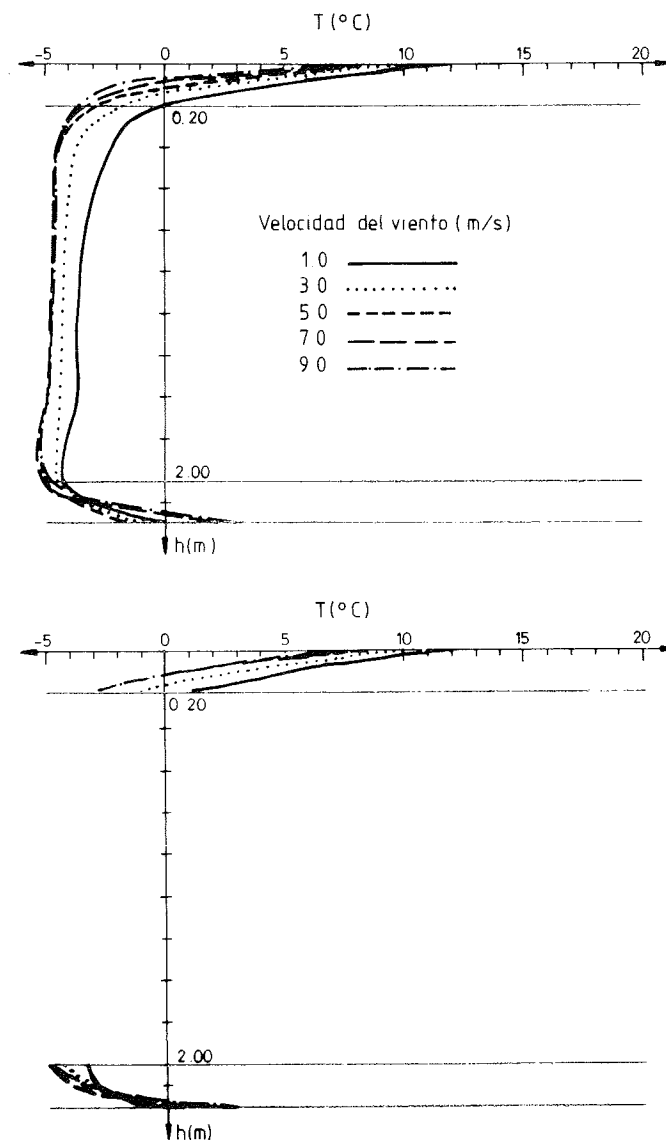


Fig. 2. Distribuciones de temperaturas, según el eje vertical de simetría del alma y según el eje de simetría de la sección, correspondientes al instante de máximo gradiente térmico, para diferentes velocidades de viento.

En dicha figura puede apreciarse que la temperatura en la fibra superior del tablero desciende a medida que aumenta la velocidad del viento, puesto que las pérdidas de calor por convección son más elevadas. Las distribuciones de temperaturas son sensiblemente diferentes entre sí, debido a que la temperatura en las fibras intermedias disminuye al aumentar la velocidad del viento.

En la figura 3 se muestra la evolución diaria del gradiente térmico vertical y de la temperatura media del puente analizado, para las diferentes velocidades de viento. En ella puede apreciarse la evolución periódica de ambas funciones y el desfase horario existente entre los máximos gradientes térmicos y las máximas temperaturas medias.

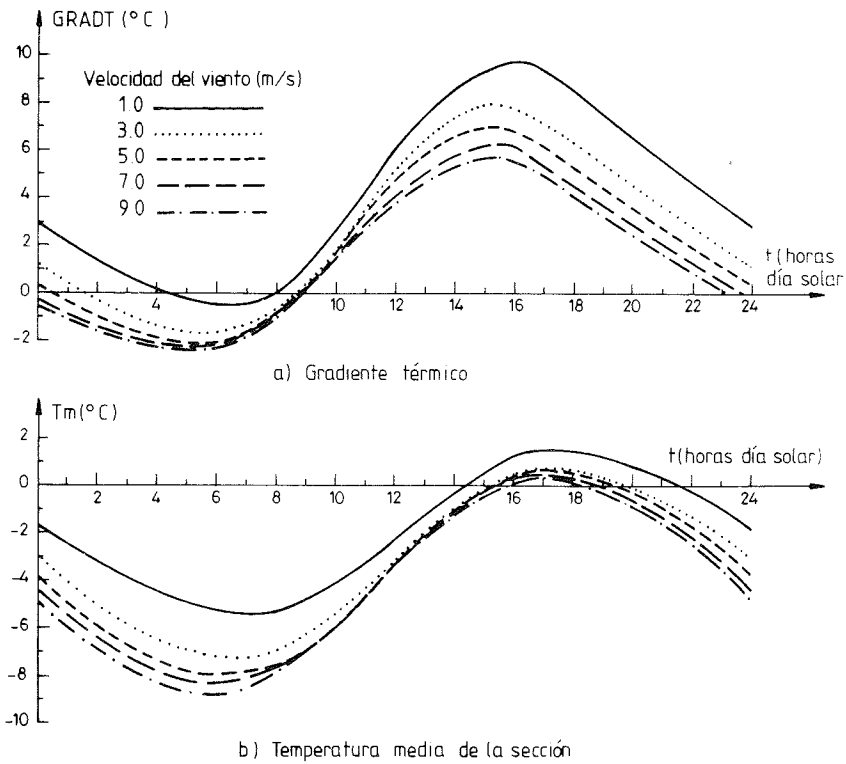


Fig. 3. Evoluciones diarias del gradiente térmico y de la temperatura media, para diferentes velocidades de viento.

Asimismo, puede observarse que la oscilación diaria del gradiente térmico es mayor a medida que disminuye la velocidad del viento. En cuanto a la evolución de la temperatura media del puente puede apreciarse que, cuanto mayor es la velocidad del viento, dicha temperatura media, para cualquier instante del día, se hace menor, aumentando su rango diario. Este último hecho, opuesto al observado en puentes losa, viene originado por la inercia térmica que introduce la existencia de aire en la célula, el cual no se ve afectado por el fenómeno de convección calorífica. La figura 4 refleja la influencia del parámetro analizado, sobre los gradientes verticales máximos y los rangos diarios de la temperatura media obtenidos para cada una de las velocidades de viento contempladas en el estudio paramétrico.

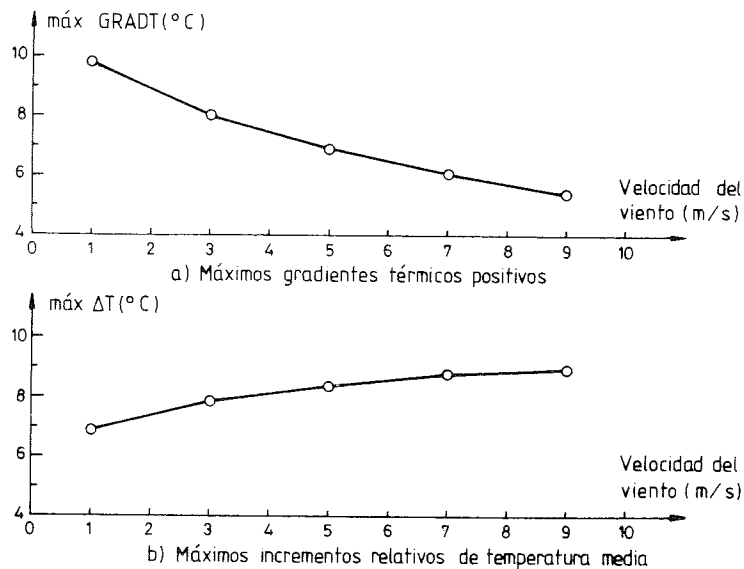


Fig. 4. Influencia de la velocidad del viento sobre el gradiente térmico máximo y sobre el rango diario de la temperatura media del puente.



Las evoluciones diarias de la temperatura en el interior de la célula así como las evoluciones de la diferencia de temperaturas existente entre el interior de la célula y el ambiente exterior para las distintas velocidades de viento se muestran en la figura 5.

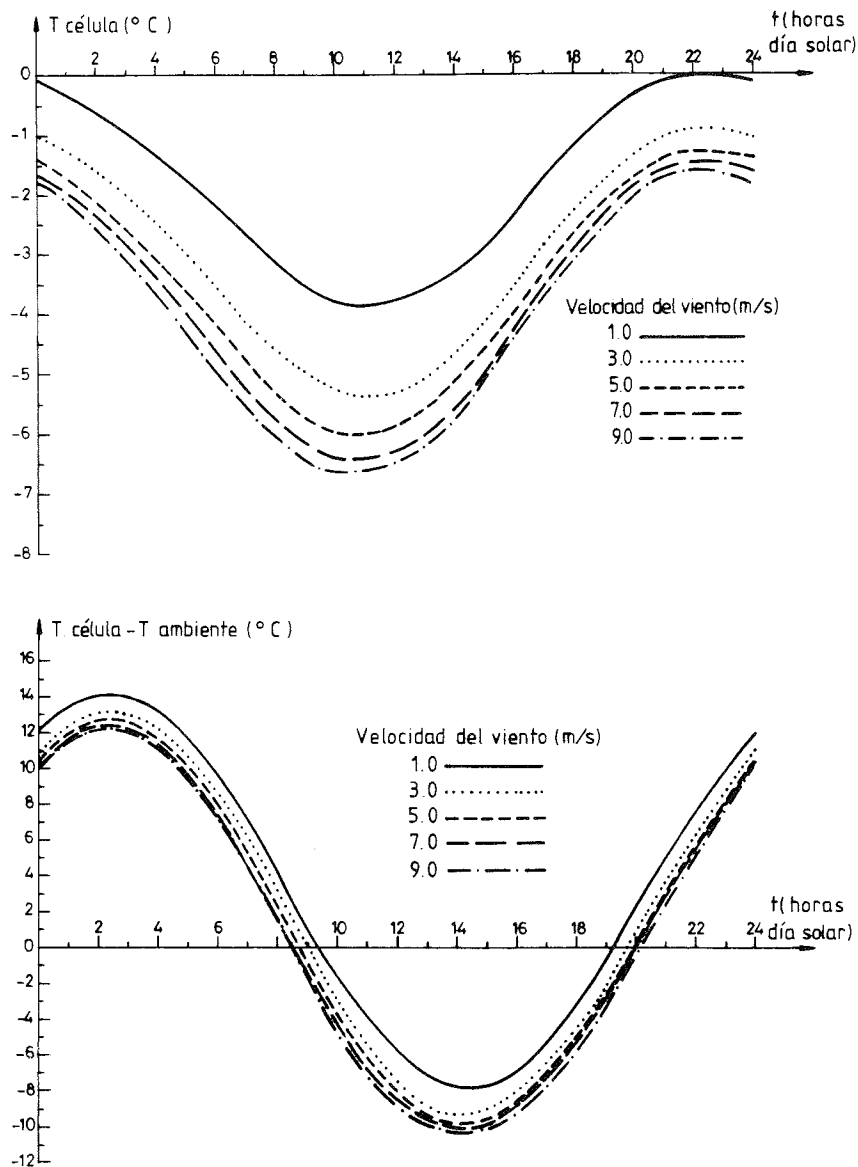


Fig. 5. Evoluciones diarias de la temperatura en el interior de la célula y de la diferencia de temperaturas entre el interior de la célula y el ambiente exterior, para diferentes velocidades de viento.

En la primera de dichas figuras queda reflejado el desfase temporal de la temperatura en el interior de la célula, con respecto a la temperatura media del puente (aproximadamente 4 horas). En la segunda figura puede apreciarse que el rango de variación diaria de la diferencia de temperaturas entre el interior y el exterior permanece constante, independientemente del valor adoptado por el parámetro, y se mueve en torno a un valor aproximado de  $22^{\circ}\text{C}$  para el puente analizado. Puede observarse también que las máximas diferencias positivas (la temperatura del aire de la célula es mayor que la temperatura ambiente) tienen lugar a las 2 horas solares de la madrugada, disminuyendo ligeramente de valor a medida que aumenta la velocidad del viento, mientras que las máximas diferencias negativas ocurren a las 14 horas solares aumentando, de forma leve, al aumentar la velocidad del viento.

En ambas situaciones, ya sea en fase de enfriamiento o de calentamiento del tablero, las diferencias de temperaturas existentes no son despreciables y pueden inducir tensiones transversales de cierta consideración. Obsérvese que dichas diferencias alcanzan valores próximos a los  $13^{\circ}\text{C}$  y a los  $-9^{\circ}\text{C}$ .

## 2.2. Relación espesor ala superior - espesor alma

El estudio paramétrico de esta relación de espesores se ha llevado a cabo analizando las tres secciones transversales que se presentan en la figura 6.

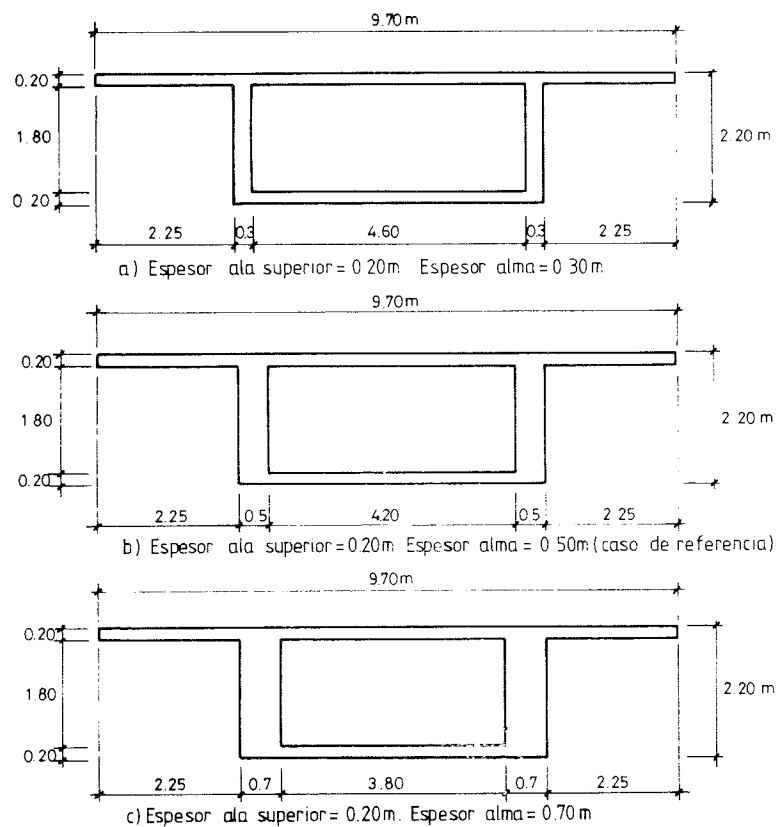


Fig. 6. Secciones transversales analizadas en el estudio paramétrico de la relación espesor ala superior-espesor alma.

Los resultados relativos a las evoluciones diarias del gradiente térmico, temperatura media, temperatura en la célula y diferencia de temperaturas entre el interior y el exterior, correspondientes a las diferentes secciones contempladas, se muestran en la figura 7. A la vista de los resultados obtenidos puede concluirse que la relación de espesores analizada tiene poca incidencia en la respuesta térmica.

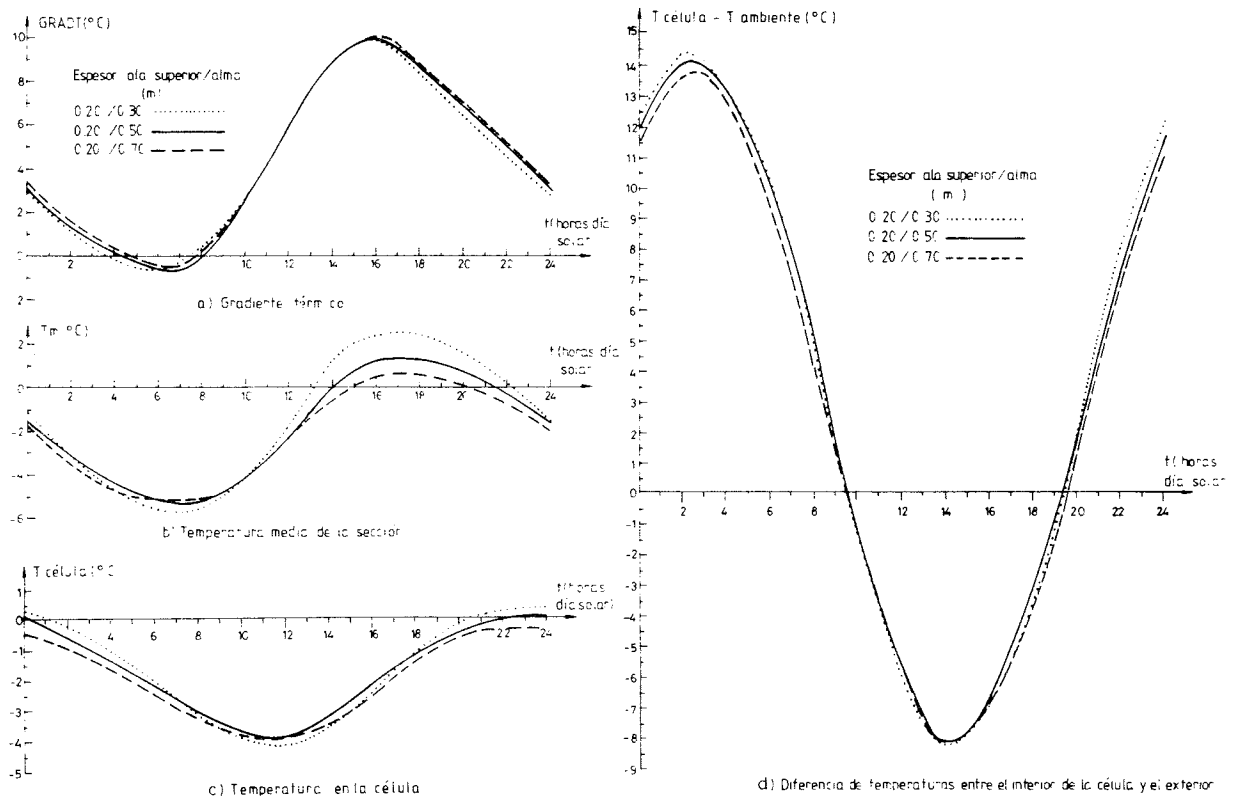


Fig. 7. Evoluciones diarias del gradiente térmico, de la temperatura media, de la temperatura en la célula y de la diferencia de temperaturas entre el interior y el ambiente exterior, para las diferentes secciones transversales analizadas.

### 2.3. Relación longitud de voladizo - canto de alma

El estudio paramétrico referente a esta relación geométrica, tiene por objetivo fundamental el visualizar y cuantificar la influencia de la longitud de los voladizos sobre la radiación solar incidente en los paramentos laterales exteriores de las almas y, por lo tanto, sobre las acciones térmicas, especialmente, el gradiente térmico transversal. Para ello se han llevado a cabo los análisis térmicos correspondientes a las tres secciones cajón que se muestran en la figura 8.

En la figura 9 puede observarse la influencia de la relación longitud del voladizo - canto del alma, sobre los gradientes térmicos verticales máximos y sobre los rangos diarios de la temperatura media de la sección. En ambas gráficas se observa que cuanto mayor es la longitud del voladizo mayores son los máximos gradientes verticales y los rangos diarios de la temperatura media del puente.

La figura 10 muestra las evoluciones diarias del gradiente térmico transversal en función de la relación geométrica analizada, así como los máximos alcanzados por dicho gradiente para cada una de las secciones transversales contempladas en el estudio.

En las gráficas presentadas en esta figura, queda reflejada de forma clara la influencia de la longitud del voladizo sobre el gradiente térmico transversal. Así, para el caso en el que la longitud del voladizo es de 2,75 metros, éste arroja sombra sobre todo el paramento lateral exterior del alma, no existiendo en ningún instante del día radiación solar incidente sobre el alma. Para las otras secciones analizadas existe radiación solar incidente sobre las almas. Como puede observarse, la magnitud del gradiente transversal aumenta a medida que disminuye la longitud de voladizo.

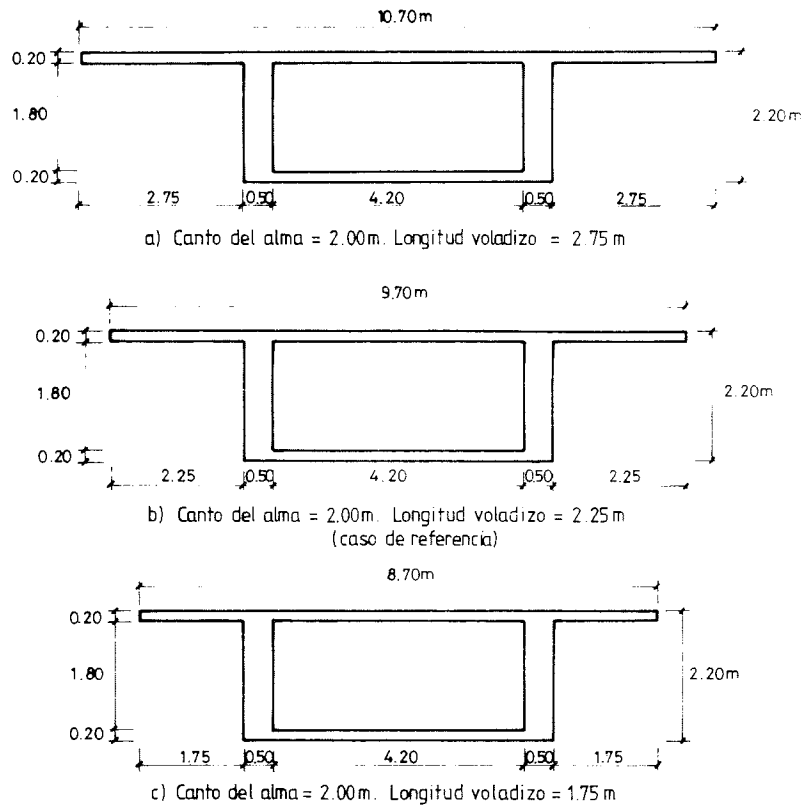


Fig. 8. Secciones transversales analizadas en el estudio paramétrico de la relación longitud de voladizo-canto de alma.

Así pues, como resumen de los resultados obtenidos en este estudio paramétrico, cabe destacar el hecho de que cuanto menor es la longitud de los voladizos menor es la superficie en sombra de las almas, apreciándose claramente un aumento de los gradientes térmicos transversales y, en concreto, de los máximos. Sin embargo, el disponer voladizos de pequeña longitud no siempre es desfavorable desde un punto de vista térmico ya que, en este caso, se reducen los gradientes verticales y los rangos diarios y anuales de la temperatura media del puente.

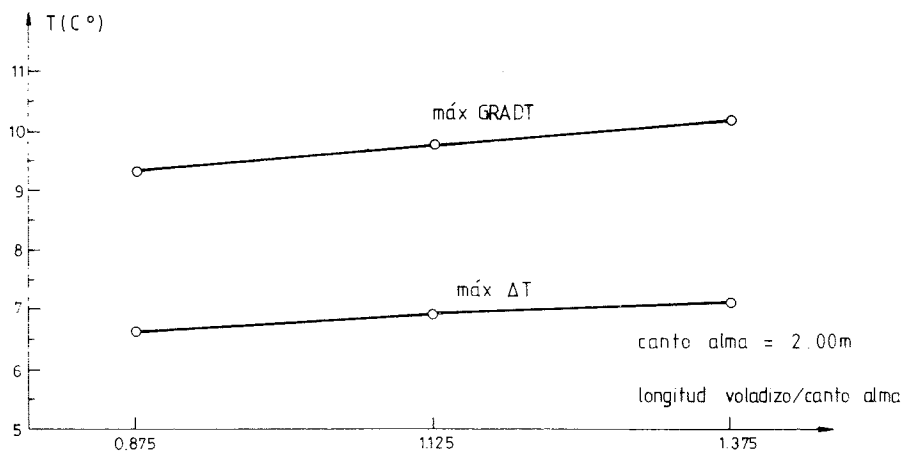


Fig. 9. Influencia de la relación longitud de voladizo-canto de alma, sobre el gradiente térmico máximo y sobre el rango diario de la temperatura media del puente.

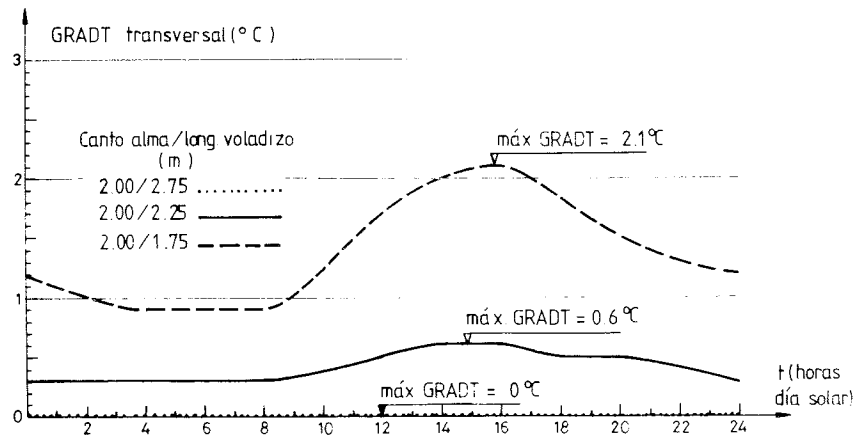


Fig. 10. Evoluciones diarias del gradiente transversal, para las diferentes secciones transversales analizadas. Gradiientes transversales máximos.

## 2.4. Existencia de cartelas

En lo que se refiere a los efectos térmicos ambientales, puede decirse que la respuesta térmica y tensional de los puentes cajón según la dirección longitudinal, no se ve afectada de forma significativa por la existencia de tales cartelas, siendo las variaciones de las acciones térmicas prácticamente nulas. No obstante, tales variaciones dependerán siempre del volumen de los regresamientos y cuando éste sea importante, ello deberá ser contemplado en la obtención de la respuesta térmica a nivel seccional.

Desde el punto de vista de la flexión transversal del tablero, la influencia de los acartelamientos de alas y almas en su zona de unión, sobre la respuesta tensional contenida en el plano de la sección es significativa. En efecto, las diferencias de temperatura existentes entre el aire de la célula y el ambiente exterior, solicitan transversalmente la sección cajón, generándose tensiones de tracción en las fibras exteriores de alas y almas si la temperatura en el interior es mayor que en el exterior y tracciones en las fibras interiores si ocurre lo contrario. Analicemos a continuación el marco cajón doblemente simétrico que se presenta en la figura 11.

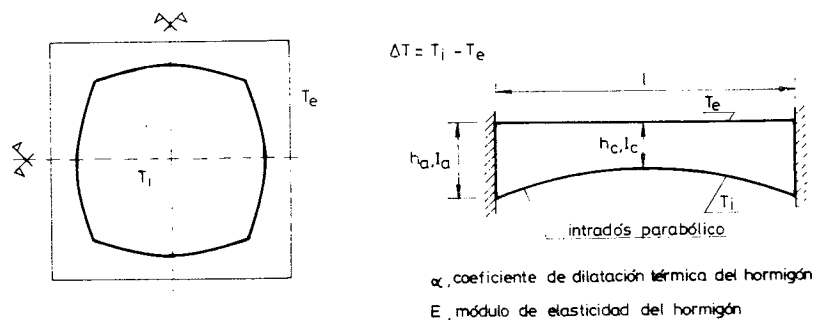


Fig. 11. Marco cajón genérico analizado, para la obtención de las tensiones térmicas transversales, inducidas por la diferencia de temperaturas existente entre el interior y el ambiente exterior.

Al ser el marco perfectamente simétrico, ninguno de los nudos gira, comportándose cada elemento barra que conforma la estructura como una viga biempotrada de inercia variable sometida a un gradiente de temperaturas  $\Delta T = T_i - T_e$ . El momento de flexión que solicita la estructura marco es:

$$M = \frac{\alpha \Delta T E I_c}{h_c} \cdot \frac{f}{2} \cdot \frac{\text{arc tg } \sqrt{\frac{h_a}{h_c} - 1}}{\sqrt{\frac{h_a}{h_c} - 1}} \quad (1)$$

siendo  $f$  un coeficiente de forma que depende de la propia geometría de la pieza de inercia variable. Para este caso —elemento barra de canto variable— se verifica siempre que:

$$f \cdot \frac{\text{arc tg } \sqrt{\frac{h_a}{h_c} - 1}}{\sqrt{\frac{h_a}{h_c} - 1}} > 2 \quad (2)$$

Ello quiere decir que alas y almas con cartelas en sus extremos, se ven solicitadas a mayores momentos de flexión que en el caso en el que no se diseñaran aquéllas.

Es evidente que siempre es recomendable el disponer cartelas para facilitar el procedimiento constructivo y el recorrido de las trayectorias de tensiones originadas por la carga de tráfico. No obstante, de cara a los efectos estructurales inducidos por la sollicitación térmica transversal, es conveniente diseñar cartelas con una transición muy gradual y no plantear uniones de elementos de fuerte espesor con elementos de pequeño espesor, para conseguir así un reparto tensional más equilibrado.

El marco que se ha analizado corresponde a un caso de variación parabólica del intradós de alas y almas y, aunque dicha variación no suele ser utilizada en diseño, las condiciones obtenidas son perfectamente extrapolables a toda tipología de cartelas. Hay que hacer constar también que, en cualquier caso, el reparto transversal siempre dependerá de las rigideces relativas de alas y almas, las cuales influyen de forma directa en los momentos transversales que solicitan los elementos barra que conforman el marco.

## 2.5. Variación del canto de la sección en puentes de inercia variable

Es constatable desde un punto de vista teórico, que para luces importantes el peso propio del tablero de un puente representa una fracción considerable de la totalidad de la carga a soportar por la estructura. Ello conduce, en general, al diseño de tableros de canto variable, mediante la disposición de acartelamientos en zonas de apoyos o proyectando para el intradós del tablero curvas continuas parabólicas. Por otra parte, la sección cajón es una de las tipologías transversales que mejor se adapta a la construcción de puentes de hormigón pretensado y, en particular, a los construídos por voladizos sucesivos. Ambas razones nos llevan a realizar el estudio paramétrico relativo al canto de la sección en puentes cajón de inercia variable.

Para ello se analizan tres secciones transversales de un puente hipotético, de hormigón pretensado, con una luz de vano de 100 metros. Las condiciones ambientales y de exposi-

ción a las que se ve sometido el puente son las mismas que las adoptadas en el estudio de referencia (véase tabla 1), siendo la sección en clave la de dicho estudio (véase figura 1). El perfil y sección longitudinal del puente, así como las tres secciones transversales analizadas, se presentan en la figura 12.

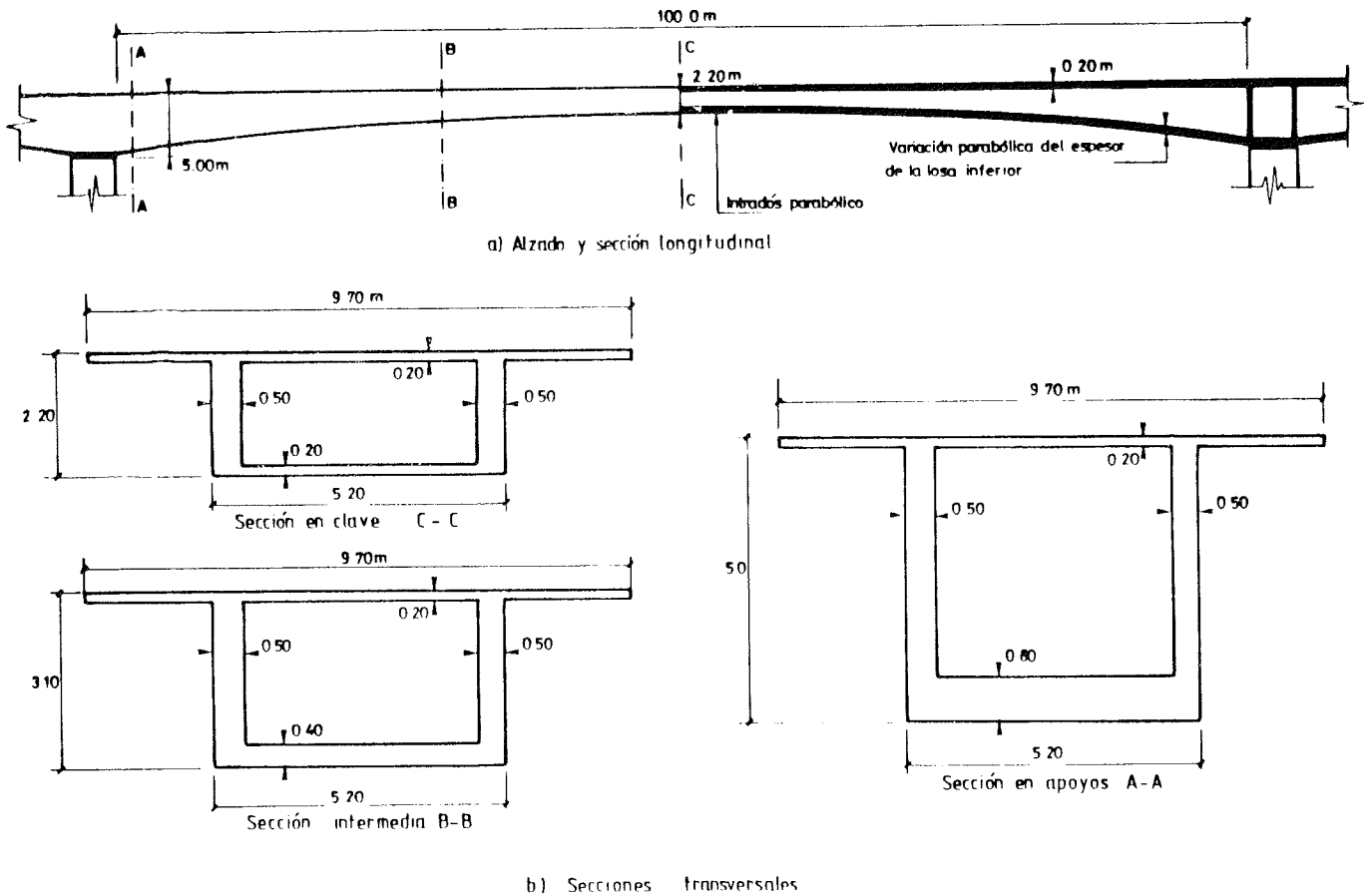


Fig. 12. Perfil y sección longitudinal del puente de inercia variable analizado en el estudio. Secciones transversales analizadas.

La figura 13 muestra las distribuciones de temperaturas correspondientes a los instantes en los que se induce el máximo gradiente térmico para cada una de las secciones transversales analizadas. Tales distribuciones se presentan según diferentes ejes verticales, para poder visualizar la distinta respuesta térmica según el eje vertical que se contemple.

A la vista de los resultados presentados en esta figura, puede apreciarse que la temperatura en el tercio central del eje vertical de simetría del alma permanece prácticamente constante, aumentando de valor tanto más cuanto mayor es el canto de la sección analizada. Dicha respuesta térmica viene originada por el hecho de que cuanto mayor es el canto, menor es la superficie en sombra de las almas, apareciendo así fuentes de calor en el contorno lateral de la sección que hacen que aumente la temperatura en sus proximidades. Este efecto también puede apreciarse, aunque de forma mucho más leve, al comparar las distribuciones térmicas en las alas inferiores de las tres secciones analizadas.

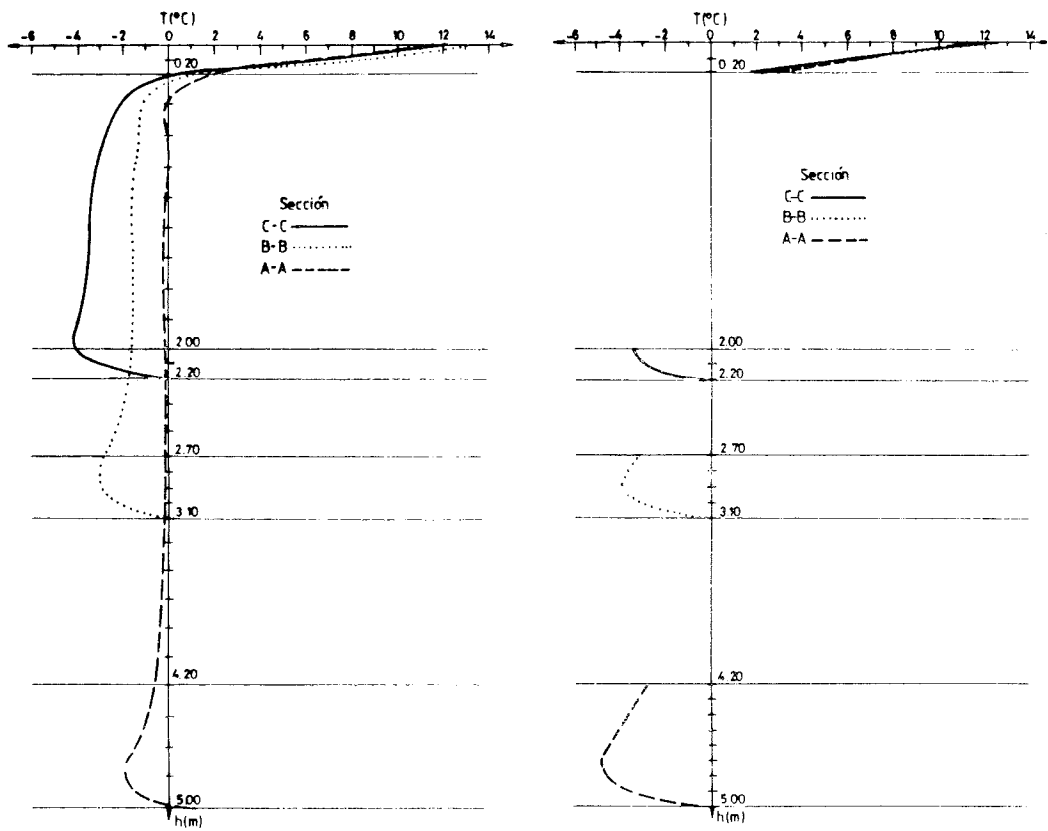


Fig. 13. Distribuciones de temperaturas, según el eje vertical de simetría del alma y según el eje de simetría de la sección, correspondientes al instante de máximo gradiente térmico, para las diferentes secciones transversales contempladas en el estudio.

La figura 14 muestra los valores máximos alcanzados por los gradientes térmicos verticales y los rangos diarios de la temperatura media. En ambas gráficas puede apreciarse que, en secciones próximas a los apoyos intermedios, tanto los gradientes máximos como los incrementos relativos diarios de temperatura media son menores, verificándose siempre que la sección crítica frente a la acción térmica ambiental, es decir, aquella que se ve sometida a los máximos gradientes y a las máximas expansiones unitarias diarias, es la sección de clave del puente (la de menor canto).

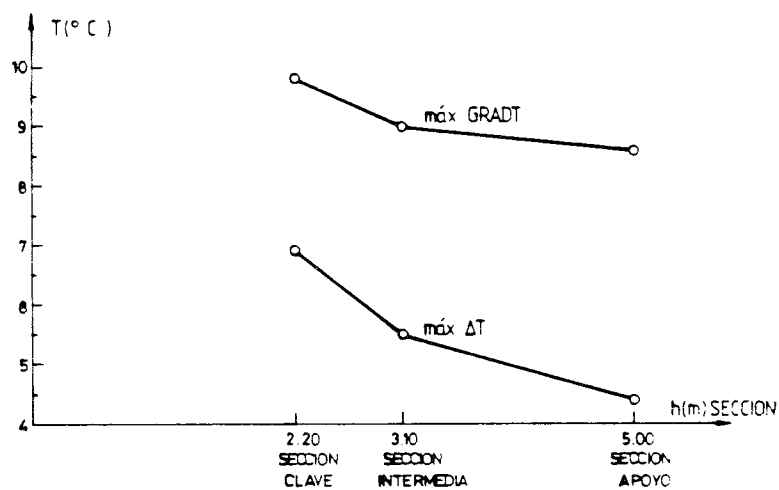


Fig. 14. Influencia del canto sobre el gradiente térmico máximo y sobre el rango diario de la temperatura media de la sección.



En lo relativo a los gradientes térmicos transversales se observa que éstos adquieren mayor importancia en secciones próximas a los apoyos intermedios. En dichas secciones los cantos son muy elevados y, a pesar de que los voladizos arrojan sombra sobre los paramentos exteriores de las almas, éstas se encuentran expuestas a radiación solar en gran parte de su superficie, lo que hace que la diferencia de temperaturas entre las almas de la sección cajón induzca gradientes transversales de una magnitud considerable.

La figura 15 muestra la evolución diaria de los gradientes transversales para cada una de las secciones analizadas, así como los máximos gradientes inducidos. En dicha figura puede apreciarse que cuanto mayor es el canto de la sección, el gradiente térmico transversal máximo aumenta de forma muy considerable, siendo el instante para el cual se generan dichos máximos el mismo para las tres secciones analizadas —las 15,50 horas solares— y próximo al instante en el que se inducen los máximos gradientes térmicos verticales.

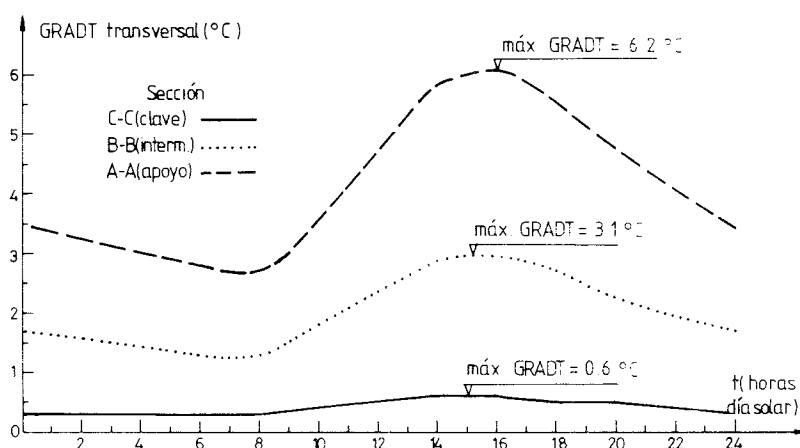


Fig. 15. Evoluciones diarias del gradiente térmico transversal, para las diferentes secciones transversales analizadas. Gradientes transversales máximos.

El haber obtenido la respuesta térmica de tres secciones transversales de un vano central de un puente cajón de inercia variable permite, por otra parte, analizar y cuantificar la posible influencia del flujo de calor según la dirección longitudinal del puente.

La figura 16 muestra la evolución diaria de la temperatura en diferentes nodos de las secciones transversales analizadas. La temperatura reflejada en las gráficas es la que se obtiene en dichos nodos mediante la adopción de un plano de temperaturas equivalente a la distribución no lineal de temperaturas.

Puede apreciarse que la diferencia de temperaturas existente a lo largo de una misma fibra longitudinal entre la sección de clave y la sección de apoyo, distantes entre sí 50 metros, es poco significativa, siendo la máxima diferencia del orden de los 3,5°C. Tal diferencia máxima tiene lugar en aquellas fibras pertenecientes al alma sobre la cual incide radiación solar. Para dichas fibras la temperatura es algo más elevada en las secciones cercanas a la zona de apoyos intermedios. De ahí que las líneas de flujo llevarían el sentido de apoyos hacia clave, con lo cual un resultado inmediato sería la disminución del gradiente térmico transversal en las zonas de apoyo y, por consiguiente, una mayor uniformidad a lo largo de la directriz, en lo que se refiere a la magnitud de esta acción térmica. No obstante, como se puede constatar en las gráficas presentadas en la figura 16, dicho flujo siempre será de poca entidad.

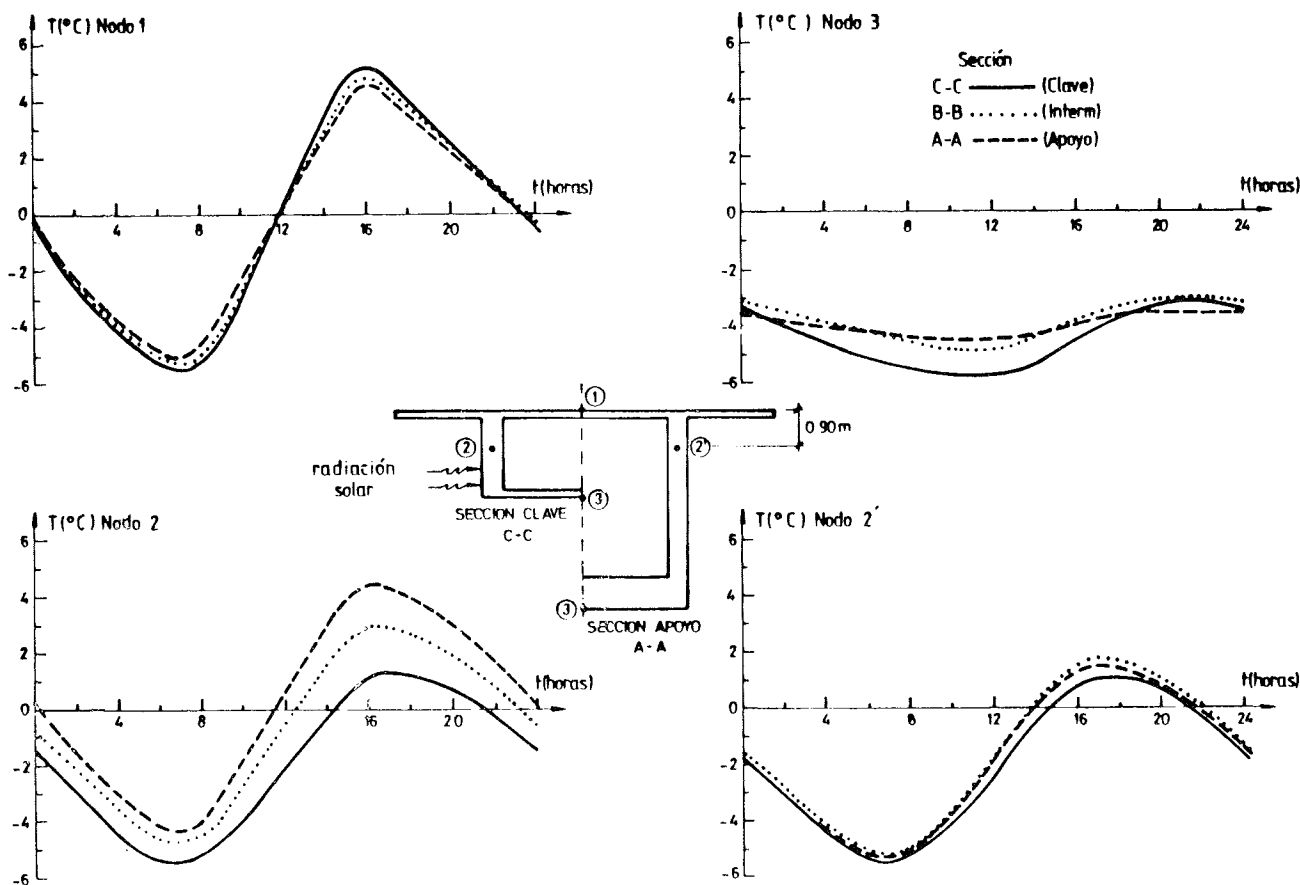


Fig. 16. Evoluciones diarias de la temperatura, en diferentes nodos de las secciones transversales analizadas.

### 3. LA RESPUESTA TERMICA EN TABLEROS DE PUENTES CAJON MULTICELULARES

El objetivo de este apartado es realizar un análisis comparativo de la respuesta térmica, a nivel sección, de los puentes cajón unicelulares y multicelulares, frente a los efectos térmicos ambientales. Se cree oportuno señalar previamente que no se entra en este apartado en la discusión sobre la elección de la tipología transversal en base a aspectos resistentes o de ejecución, sino que se atiende únicamente al comportamiento y respuesta térmica de ambas tipologías. El estudio comparativo se basa en el análisis de dos secciones cajón, de dos y tres almas, con un mismo ancho de tablero, de 14 metros, ancho para el cual parecen adaptarse de forma idónea ambas tipologías (Mathivat (6)).

Las secciones cajón analizadas, con canto y ancho de tablero iguales, se muestran en la figura 17. El criterio de elección del espesor de las almas se ha basado en el supuesto de que las dos vigas cajón sean equivalentes desde el punto de vista de su resistencia a cortante (deducidos los diámetros de las vainas de un pretensado genérico, alojadas en cada una de las almas).

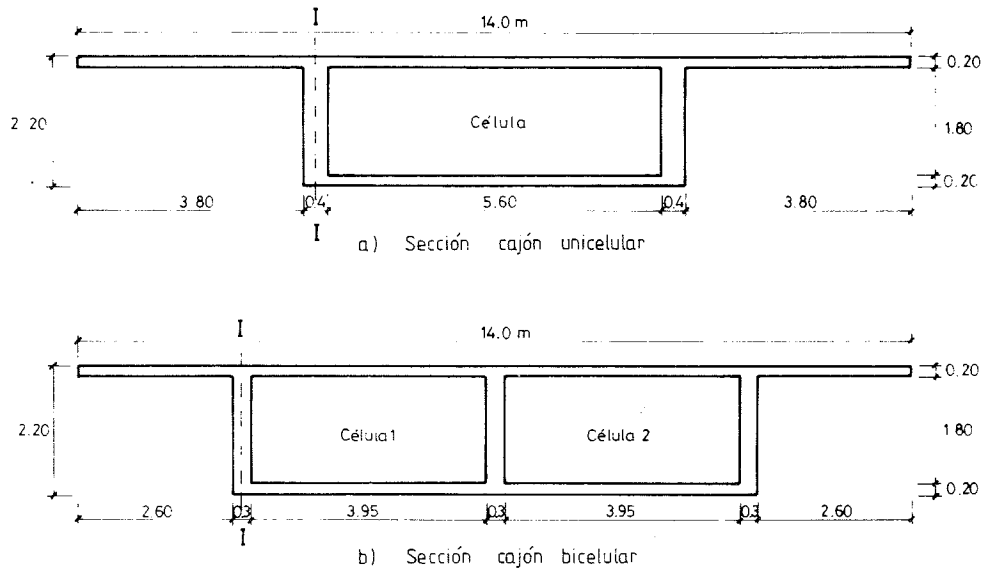


Fig. 17. Secciones cajón, unicelular y bicelular, analizadas.

Las condiciones ambientales y de emplazamiento para llevar a cabo el análisis comparativo de la respuesta térmica de ambas tipologías transversales son las correspondientes al estudio de referencia (puentes emplazados en Calgary,  $51,03^{\circ}\text{N}$ , azimuts nulos, rangos de variación de la temperatura ambiente de  $20^{\circ}\text{C}$  y analizados ambos el día 21 de Marzo) (el resto de condiciones físicas y estructurales puede verse en la tabla 1).

La figura 18 muestra las evoluciones diarias del gradiente térmico y de la temperatura media, para las diferentes secciones, unicelular y bicelular, analizadas. En ella puede observarse que ambas funciones evolucionan de forma periódica a lo largo del día, visualizándose el siempre existente desfase temporal entre los instantes para los cuales se generan los mínimos y máximos de dichas funciones (próximo a las 2 horas).

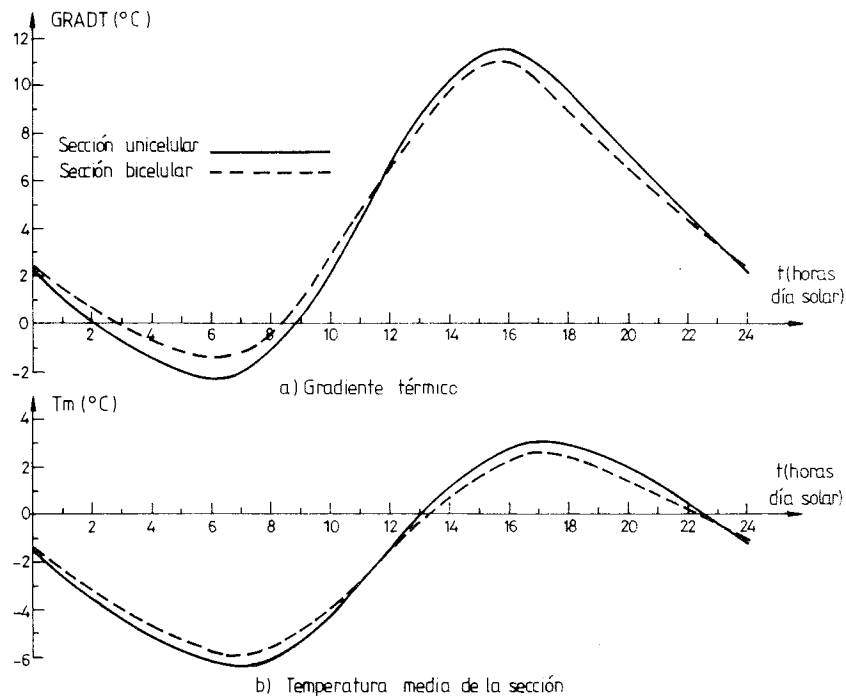


Fig. 18. Evoluciones diarias del gradiente térmico y de la temperatura media, para las secciones cajón, unicelular y bicelular, analizadas.

Por otra parte, puede apreciarse que los rangos diarios del gradiente y de la temperatura media son ligeramente superiores en la sección unicelular. Ello no es debido al hecho de que la sección presente una única célula sino a que la relación ancho de tablero-ancho de losa inferior es, en general, mayor en la sección unicelular que en la bicelular. Ello acentúa el efecto de la radiación solar sobre el tablero y provoca, a su vez, un aumento de los máximos gradientes térmicos.

A continuación, en la tabla 3 se presentan los valores máximos alcanzados por las diferentes sollicitaciones térmicas en las secciones cajón unicelular y bicelular analizadas.

**TABLA 3**  
Solicitaciones térmicas máximas, en las secciones cajón unicelular y bicelular analizadas

Solicitaciones térmicas (°C)	Sección cajón unicelular	Sección cajón bicelular
Máximo gradiente vertical	11,5 (a las 15,50 horas)	10,9 (a las 15,50 horas)
Máximo gradiente transversal	0,0	0,1 (a las 2,5 horas)
Incremento relativo diario de temperatura media de la sección	$T_m \text{ máx} - T_m \text{ mín} = 2,9$ (a las 17,0 horas) $- (-6,4)$ (a las 7,0 horas) = 9,3	$T_m \text{ máx} - T_m \text{ mín} = 2,4$ (a las 17,0 horas) $- (-5,8)$ (a las 7,0 horas) = 8,2
Máxima diferencia de temperaturas entre el aire de la célula y el ambiente exterior	14,4 (a las 2,0 horas)	14,4 (célula 1) 14,2 (célula 2) (a las 2,0 horas)

La observación de dichos resultados permite concluir que las diferencias son poco significativas y que si éstas existen son de carácter cuantitativo y se deben únicamente al diferente valor que adopta la relación ancho de tablero-ancho de losa inferior y no al hecho de estar en presencia de una sección cajón uni o bicelular. En general, y en base al valor que adopta dicha relación geométrica, los puentes cajón multicelulares se verán sometidos a menores gradientes térmicos verticales que los unicelulares y son más susceptibles de verse sollicitados con gradientes térmicos transversales. Por otra parte, el sentido en el que actúan todos los parámetros y variables que influyen en el fenómeno de la transmisión de calor es el mismo para puentes cajón unicelulares y multicelulares.

#### 4. PUENTES CAJON UNICELULARES. ACCIONES TERMICAS DE DISEÑO

La metodología de obtención de las acciones térmicas de diseño en puentes cajón es idéntica a la utilizada en el caso de puentes losa, y se expone con todo detalle en Mirambell y Aguado (7). La aplicación de dicha metodología al caso de puentes cajón de hormigón emplazados en la Península Ibérica, permitirá obtener las diferentes acciones térmicas —rango anual de la temperatura media del puente, gradientes térmicos verticales y transversales y sollicitaciones térmicas transversales— que hay que considerar en el diseño. Recordemos que dichas acciones térmicas vienen definidas mediante su valor característico asociado a un nivel de confianza en el entorno del 5 por 100. Esta forma de actuar presenta la venta-

ja de mostrar una coherencia teórica con lo propugnado por las normativas vigentes en nuestro país, en lo que se refiere a la definición de las acciones que hay que considerar en proyecto y a las posteriores combinaciones de acciones.

Para la determinación de las acciones térmicas de diseño se hace necesario conocer datos relativos a diversos parámetros climatológicos y ambientales en el lugar de emplazamiento del puente, los cuales se pueden encontrar en las diferentes publicaciones del Instituto Nacional de Meteorología. El número de estaciones meteorológicas principales contempladas en el estudio es de 58 y con ellas se cubre ampliamente la geografía peninsular y la diversidad de climas existente en nuestro país (Mirambell y Aguado (7)).

Un estudio exhaustivo de la tipología transversal de tableros cajón, llevaría consigo el analizar múltiples secciones transversales, con lo cual la casuística existente sería muy extensa y la interpretación de resultados sería muy farragosa. Ello dificultaría la tarea de poder definir, de forma más o menos simplificada, pero con rigor científico, unas reglas de diseño útiles para el proyectista de puentes de hormigón.

Así pues, se procede a adoptar una sección de referencia, que se presenta en la figura 19, la cual se estima es representativa de los puentes cajón, realizándose sobre ella diferentes estudios relativos a puentes unicelulares emplazados en las estaciones meteorológicas principales de nuestro país.

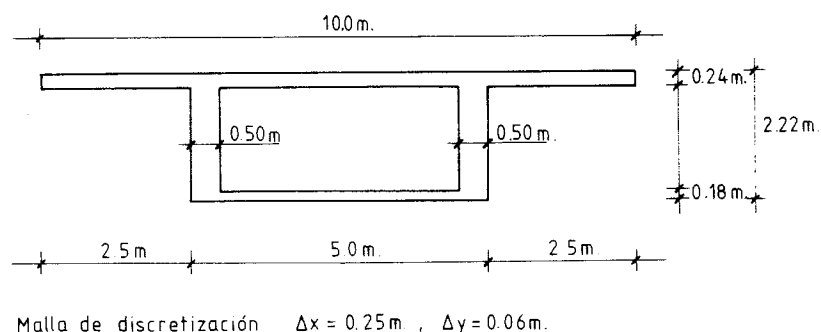


Fig. 19. Sección transversal de referencia, adoptada para la determinación del valor característico de las acciones térmicas en tableros de puentes cajón emplazados en nuestro país.

Con posterioridad, los resultados obtenidos se corrigen en base a determinados factores de corrección que contemplan la influencia de diversos parámetros sobre la respuesta térmica de los puentes cajón unicelulares.

#### 4.1. Rango anual de la temperatura media

##### 4.1.1. Rango de referencia

El rango anual de la temperatura media del puente, viene definido por la diferencia entre la temperatura media máxima y la temperatura media mínima del puente, a lo largo del año, en el lugar de emplazamiento considerado y depende fundamentalmente del rango anual de la temperatura ambiente existente en dicho lugar de emplazamiento.

Las temperaturas ambientes adoptadas en los diferentes emplazamientos, correspondientes a cada una de las estaciones meteorológicas analizadas, pueden encontrarse en Mirambell (1).

Los resultados obtenidos para el rango anual de la temperatura media del puente cajón analizado, se presentan de forma gráfica en la figura 20.

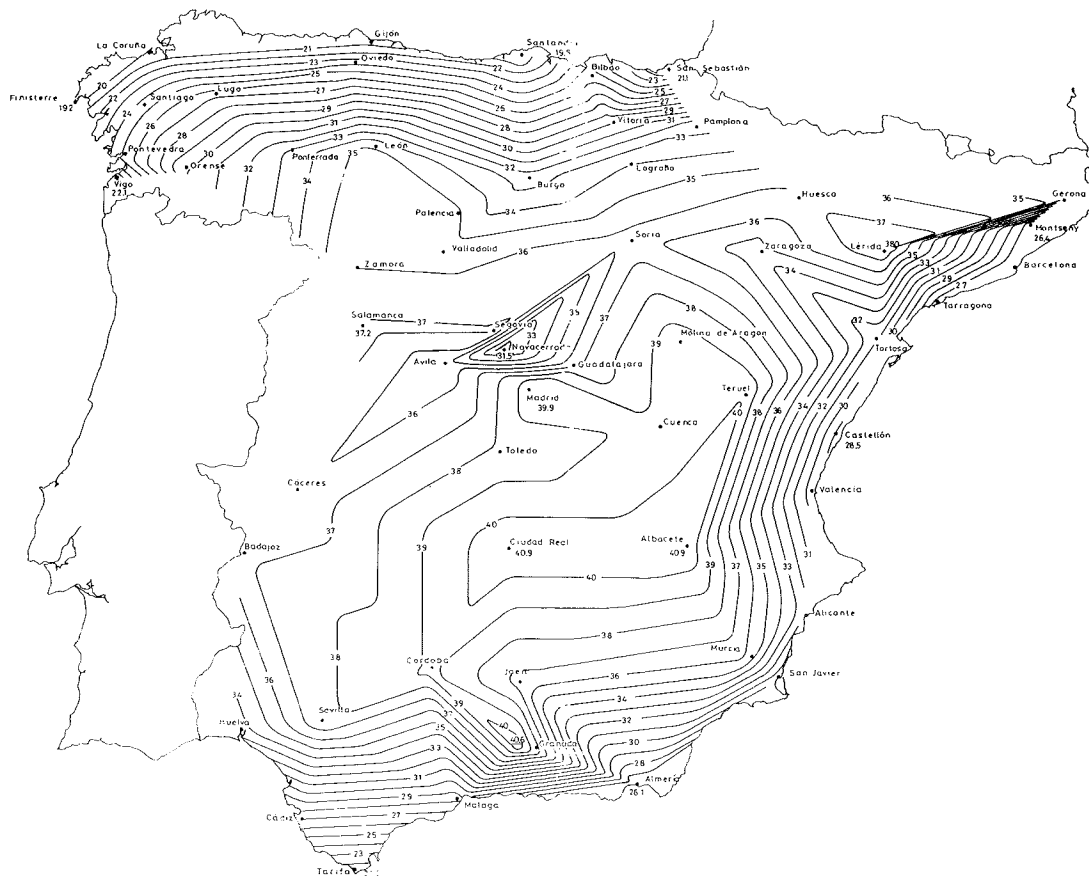


Fig. 20. Mapa peninsular de isótermas del rango anual de referencia de la temperatura media en puentes cajón (sección transversal de referencia en figura 19).

Si comparamos dichos resultados con los obtenidos para puentes losa maciza (Mirambell y Aguado (7)), se observa que los valores de los rangos anuales para ambas tipologías se encuentran muy próximos, siendo ligeramente superiores para la tipología de tablero cajón (se verifica aproximadamente que  $\Delta T_{\text{puente cajón}} = 1,03 \div 1,04 \Delta T_{\text{puente losa maciza}}$ ).

En el caso de que se desearan conocer los rangos anuales de la temperatura media para ambas tipologías transversales a través de la fórmula propugnada por la normativa española vigente (EP-80), se obtendría para el puente cajón unicelular un rango anual de  $30,3^{\circ}\text{C}$ , y para el puente losa maciza un rango de  $29,5^{\circ}\text{C}$ , lo que da una relación entre ambos valores de 1,03. Ello permite afirmar que la corrección introducida en la expresión de la normativa, relativa al espesor ficticio de la pieza, se ajusta a lo obtenido mediante métodos más sofisticados. No obstante, también es claro que las variaciones anuales de la temperatura media obtenidas mediante la aplicación de dicha expresión, distan de las obtenidas en este estudio. Tales diferencias son debidas a la no consideración del rango anual de la temperatura ambiente en el lugar de emplazamiento del puente.

En el mapa de isótermas de la figura 20 se aprecian, al igual que ocurría en la tipología de tablero losa, cuatro regiones claramente diferenciadas:

- Las vertientes cantábrica y atlántica.
- La zona sur.
- El levante.
- La meseta.

Los rangos más elevados de la temperatura media del puente se presentan en la zona de la meseta, siendo las ciudades de Ciudad Real y Albacete las que muestran el valor máximo absoluto de 40,9°C. Los valores de las isólinas disminuyen a medida que nos acercamos al litoral peninsular, encontrándose los mínimos en la vertiente atlántica y cantábrica –Finisterre, 19,2°C, La Coruña, 20,2°C, Santander, 19,8°C, Gijón, 20,9°C–.

#### 4.1.2. Factores de corrección

Del conjunto de variables no contempladas en el análisis de forma intrínseca, sólo se analizará la influencia del canto total del tablero, ya que los restantes parámetros no influyen de forma significativa sobre la respuesta térmica (Mirambell (1)). Para poder determinar el valor de dicho factor corrector se estudian diversas secciones transversales de puentes cajón unicelulares, con diferentes cantos de tablero. Los espesores de alas y el canto del alma varían en sus dimensiones de forma proporcional a como varía el canto total del tablero con respecto al canto de la sección de referencia (véase figura 19). Los análisis térmicos de dichas secciones transversales se han llevado a cabo en diferentes estaciones meteorológicas del país, cubriendo de forma sobrada la geografía y climatología de la Península Ibérica. Los resultados obtenidos permiten definir de forma gráfica el factor de corrección  $k_1$ , relativo al canto total del tablero cajón (figura 21). Para valores intermedios puede realizarse una simple interpolación lineal.

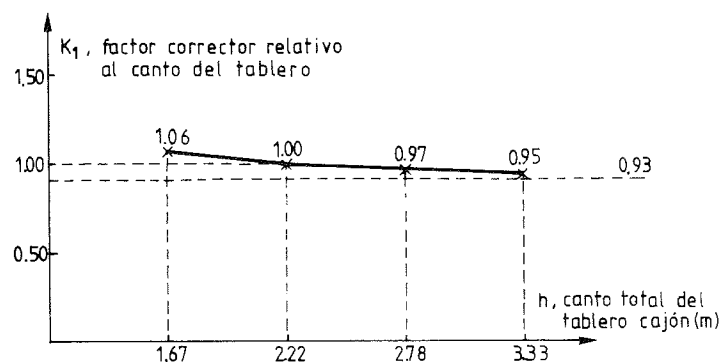


Fig. 21. Factor de corrección  $k_1$ , relativo al canto del tablero, para determinar el rango anual de diseño de la temperatura media, en puentes cajón.

#### 4.1.3. Método de obtención

El método que hay que seguir de cara a la obtención del rango anual de la temperatura media de un puente cajón unicelular es el siguiente:

- Situación del lugar de emplazamiento del puente.
- Obtención, para dicho lugar, del rango anual de referencia de la temperatura media del puente, en base a lo representado en el mapa peninsular de isólinas de la figura 20.
- Obtención del factor de corrección  $k_1$ , relativo al canto del tablero, a partir de la gráfica de la figura 21.
- El rango anual de la temperatura media del puente que hay que considerar en diseño es:

$$\Delta T = k_1 \cdot \Delta T_{\text{referencia}} \quad (3)$$

## 4.2. Gradiente térmico vertical positivo

### 4.2.1. Gradiente de referencia

La determinación del valor característico de dicha acción térmica depende, fundamentalmente, de la radiación solar global media mensual máxima existente en el lugar de emplazamiento del puente. Los valores de la radiación adoptados en este estudio pueden encontrarse en Mirambell (1).

Los resultados obtenidos para los gradientes térmicos se muestran, de forma gráfica, en la figura 22, en donde se representa un mapa peninsular de isolíneas del gradiente térmico para puentes cajón unicelulares con un canto de tablero de 2,22 metros.

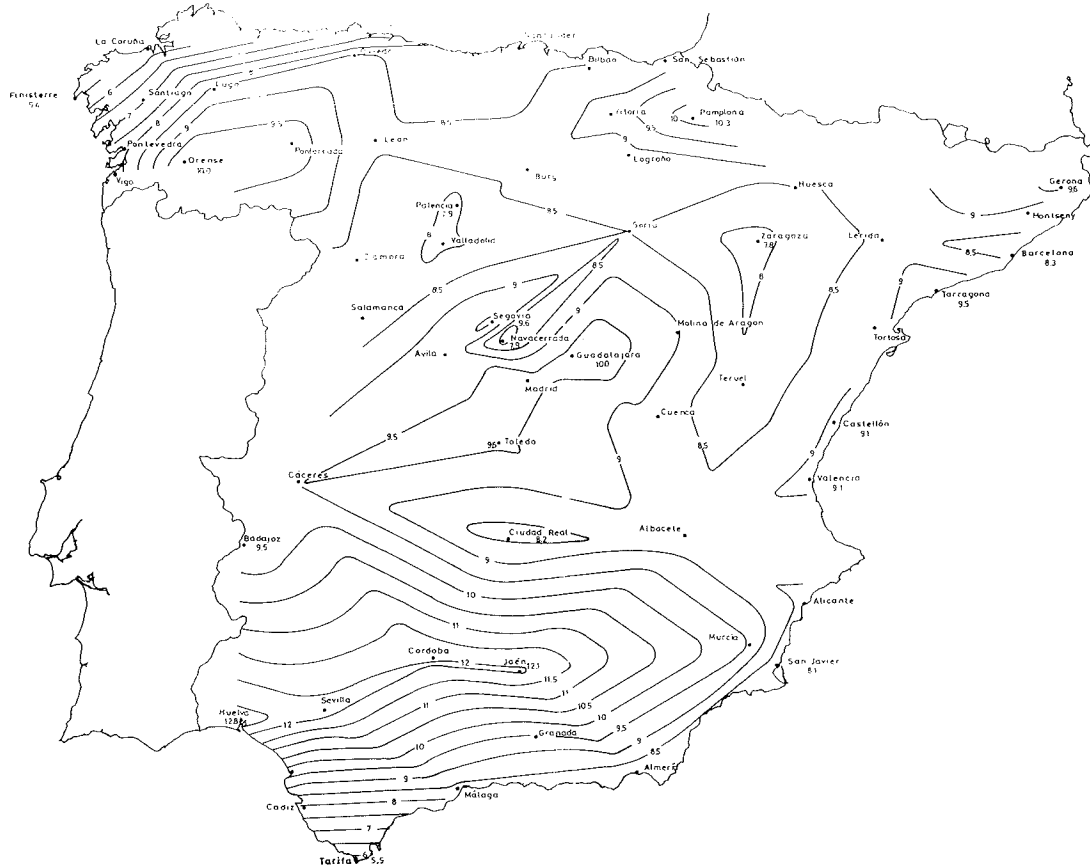


Fig. 22. Mapa peninsular de isolíneas del gradiente térmico de referencia, en puentes cajón (sección transversal de referencia en figura 19).

En esta figura puede observarse que las zonas geográficas en donde los gradientes térmicos de diseño son más elevados son la cuenca del río Guadalquivir —gradientes en torno a los 12°C—, en la zona centro cercana a las provincias de Madrid, Toledo y Guadalajara —gradientes en torno a los 10°C— y en determinadas estaciones meteorológicas, como son las de Orense y Ponferrada —gradientes de 10°C—.

Las zonas de mínimos se sitúan próximas al litoral, a excepción de la provincia de Huelva, presentándose tales mínimos en las estaciones meteorológicas de Finisterre, 5,4°C, La Coruña, 5,6°C y Tarifa, 5,9°C.



A la vista de lo observado en esta figura y si comparamos los resultados obtenidos con los obtenidos para tableros de puentes losa (Mirambell y Aguado (7)), puede afirmarse que no existen diferencias cualitativas substanciales entre la respuesta térmica de ambas tipologías, en lo que se refiere a la obtención de los gradientes térmicos de diseño.

Sin embargo, desde un punto de vista cuantitativo, se aprecian diferencias notables que se traducen en una disminución del valor del gradiente térmico de diseño de los puentes cajón unicelulares con respecto al de los puentes losa maciza. Dicha reducción puede situarse, para todas las estaciones meteorológicas contempladas y como término medio, próxima a un 26 por 100 y es atribuible, fundamentalmente, a la influencia del canto total del tablero. Recordemos que la sección de referencia de la tipología transversal de puentes losa maciza presentaba un canto total de 0,60 metros, mientras que la sección de referencia de la tipología transversal de puentes cajón unicelulares presenta un canto total de 2,22 metros. Ello prueba, una vez más, la influencia de dicho parámetro geométrico sobre el valor del gradiente térmico que hay que considerar en el diseño de los puentes de hormigón.

#### 4.2.2. Factores de corrección

En lo referente a los parámetros geométricos de la sección cajón se tendrá en cuenta, inicialmente, la influencia del canto total del tablero, vista la importancia de los resultados presentados en el subapartado 2.5 de este artículo. Para ello, se han llevado a cabo diferentes análisis térmicos de tableros cajón unicelulares, de canto 1,67 metros, 2,78 metros y 3,33 metros, emplazados en diferentes estaciones meteorológicas, las cuales cubren la variada climatología existente en nuestro país. En base a los resultados obtenidos (Mirambell (1)) es posible definir un factor corrector  $k_2$  que tenga en cuenta la influencia del canto del tablero y cuyo valor puede obtenerse a partir de la gráfica presentada en la figura 23.

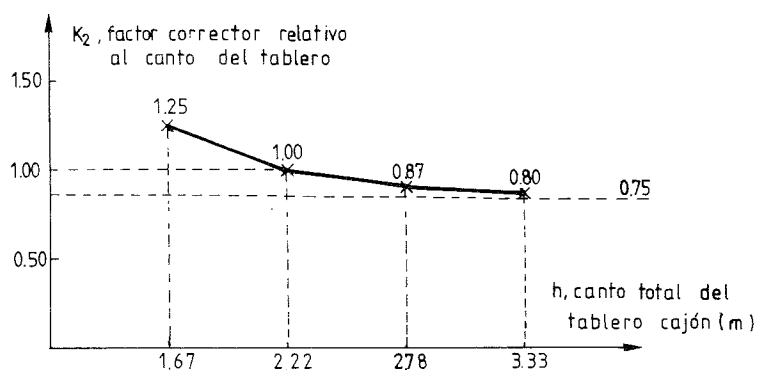


Fig. 23. Factor de corrección  $k_2$ , relativo al canto del tablero, para determinar el gradiente térmico de diseño en puentes cajón.

Otro parámetro geométrico que hay que considerar en la determinación del gradiente térmico de diseño en puentes cajón unicelulares es la relación ancho de tablero-ancho de losa inferior. Efectivamente, cuanto mayor es la longitud de los voladizos, manteniendo constante el canto del alma o el ancho de la losa inferior del tablero, mayor es el gradiente térmico vertical. Ello es debido a la influencia que tiene un aumento de la temperatura en los voladizos, como consecuencia de la radiación solar incidente. Para poder definir el factor corrector relativo a este parámetro se ha procedido a obtener la respuesta térmica de puentes cajón unicelulares, con diferente longitud de voladizo —1,15 metros, 2,50 metros, 3,85 metros y 5,20 metros—.

A tenor de los resultados obtenidos (Mirambell (1)) y habiendo sido comprobado que los valores que adopta el factor de corrección  $k_3$  correspondiente a esta relación geométrica son independientes del canto total del tablero, es posible definir dicho factor a través de una única gráfica la cual se presenta en la figura 24.

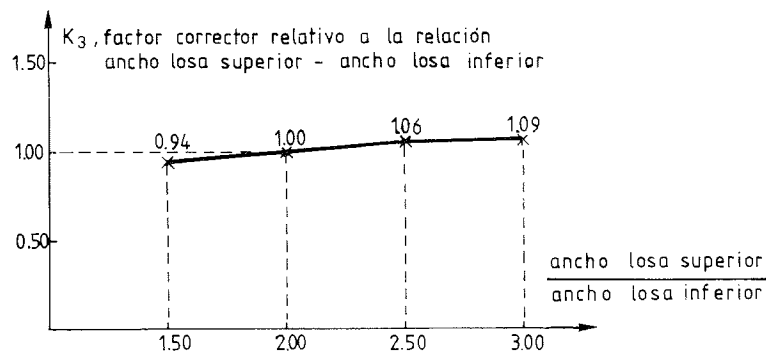


Fig. 24. Factor de corrección  $k_3$ , relativo a la relación ancho losa superior del tablero-ancho losa inferior, para determinar el gradiente térmico de diseño en puentes cajón.

Del resto de parámetros contemplados en el fenómeno de la transmisión de calor en puentes de hormigón, únicamente el espesor de capa asfáltica de rodadura muestra una influencia apreciable sobre el valor del gradiente térmico inducido en puentes cajón unicelulares.

En efecto, al igual que ocurría en las tipologías de losa maciza o aligerada, se llega a la conclusión de que cuanto menor sea el espesor de asfalto mayor es el valor del gradiente térmico. Por otra parte, un análisis de los resultados derivados de los estudios paramétricos de la sección cajón, permite apreciar la existencia de un cierto espesor por encima del cual los gradientes térmicos inducidos son inferiores al gradiente inducido en el caso en que no se dispusiera capa asfáltica de rodadura (Mirambell (1)).

Para la obtención del factor corrector relativo a este parámetro se han llevado a cabo diversos análisis térmicos de puentes cajón unicelulares, con diferente canto de tablero y diferente espesor de capa asfáltica, emplazando aquéllos en distintas estaciones meteorológicas, representativas de la variada climatología existente en nuestro país.

En base a los resultados obtenidos es posible definir un factor corrector  $k_4$ , relativo al espesor de capa asfáltica de cara a la determinación del gradiente térmico inducido en puentes cajón unicelulares; dicho factor varía de forma paramétrica con el canto total del tablero, debido a la interdependencia que existe entre ambos (figura 25).

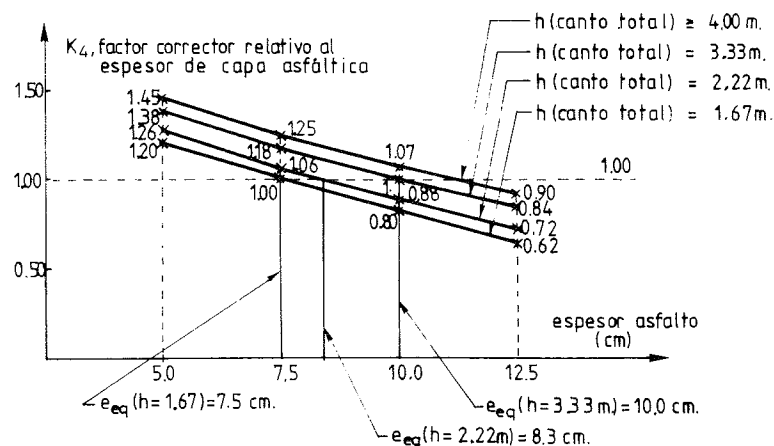


Fig. 25. Factor de corrección  $k_4$ , relativo al espesor de capa asfáltica de rodadura, para determinar el gradiente térmico de diseño en puentes cajón.

### 4.2.3. Método de obtención

El método que hay que seguir para la obtención del gradiente térmico de diseño en puentes cajón unicelulares es el siguiente:

- Situación del lugar de emplazamiento del puente.
- Obtención, para dicho lugar, del gradiente térmico de referencia, en base a lo representado en el mapa peninsular de isolíneas de gradiente, mostrado en la figura 22.
- Obtención del factor de corrección  $k_2$ , relativo al canto del tablero, a partir de la gráfica mostrada en la figura 23.
- Obtención del factor de corrección  $k_3$ , relativo a la relación ancho losa superior tablero-ancho losa inferior, a partir de la gráfica mostrada en la figura 24.
- Obtención del factor de corrección  $k_4$ , relativo al espesor de capa asfáltica de rodadura, si ésta existe, a partir de las gráficas mostradas en la figura 25.
- El gradiente térmico que hay que considerar en diseño es:

$$\text{GRAD} = (k_2 \cdot k_3 \cdot k_4) \text{GRAD}_{\text{referencia}} \quad (4)$$

## 4.3. Otras acciones térmicas

### 4.3.1. Gradiente térmico vertical negativo

Los mayores gradientes térmicos negativos (o inversos) aparecen en meses de invierno y tienen lugar en horas próximas a las 6 horas solares, bajo unas condiciones de baja intensidad de radiación solar, un rango diario de temperatura ambiente elevado y una alta velocidad de viento.

A lo largo del desarrollo de los estudios paramétricos de la sección cajón y de los estudios relativos a la definición del gradiente térmico y del rango anual de la temperatura media, no se han observado gradientes negativos cuyo valor absoluto fuera superior a los  $1,5^\circ\text{C}$ . No obstante, para poder definir con mayor rigor el gradiente vertical negativo de diseño en puentes cajón unicelulares, se ha procedido al estudio de la respuesta térmica de un puente cajón unicelular, adoptando como sección transversal la de referencia (véase figura 1) y emplazando éste en una estación meteorológica que proporcione unas condiciones de temperatura y radiación similares a las mencionadas en el párrafo anterior. Dicha estación puede ser la de Vitoria para la cual, en el mes de Diciembre, se registra un mínimo número medio mensual de horas de sol, una mínima radiación solar global media mensual y un rango de temperatura ambiente elevado. Los resultados de este estudio muestran que el máximo gradiente vertical negativo acaece a las 6,16 horas solares y su valor es de  $-2,2^\circ\text{C}$ .

Por consiguiente, y conociendo que esta acción térmica puede correlacionarse con diversos parámetros, aunque dichas correlaciones no son fácilmente visibles, parece idóneo adoptar un gradiente vertical negativo de diseño de  $-2^\circ\text{C}$ . Cabe comentar, por último, que, si se dispone capa asfáltica de rodadura, no es necesaria la consideración en diseño de esta acción térmica.

$$\begin{aligned} \text{GRAD}_{\text{negativo}} &= -2,0^\circ\text{C} \\ \text{GRAD}_{\text{negativo}} &= 0^\circ\text{C} \text{ (si existe capa asfáltica)} \end{aligned} \quad (5)$$

### 4.3.2. Gradiente térmico transversal

El considerar esta acción térmica en diseño, sólo tiene sentido si existe la certeza de que vaya a incidir radiación solar directa sobre los paramentos laterales de la sección cajón. Ello genera fuentes de calor en dichos paramentos que hacen que la respuesta térmica, según un eje horizontal, no sea simétrica y que, por lo tanto, la integral de los momentos de las temperaturas de cada uno de los filamentos en los que se ha discretizado la sección transversal, induzca una curvatura térmica impuesta horizontal no nula.

Asimismo, un análisis de los resultados derivados de los estudios paramétricos (Mirambell (1)) permite concluir que cuanto más próximos nos situemos en el tiempo al solsticio de invierno, mayores son los gradientes térmicos transversales inducidos, debido a que la inclinación de los rayos solares con respecto a un plano tangente a la superficie terrestre es menor.

Es evidente que este hecho también se presenta en puentes losa maciza pero, debido a la propia tipología de estos puentes, la influencia de la radiación solar incidente sobre los paramentos laterales en el valor del gradiente transversal es mínima. Ello no es así en puentes cajón, en donde la masa de hormigón según un eje horizontal se concentra alrededor de las dos almas, viéndose una de ellas sometida a mayor temperatura que la otra y generándose así gradientes térmicos transversales de cierta relevancia.

Los resultados relativos a la respuesta térmica de un puente cajón unicelular con sección transversal la de referencia (véase figura 1), emplazado en una latitud elevada de la Península Ibérica y con unas condiciones ambientales y climatológicas apropiadas para obtener el máximo gradiente térmico transversal, muestran que éste acaece en el mes de Diciembre y su valor es de  $2,5^{\circ}\text{C}$  (Mirambell (1)).

Como ya se ha comentado con anterioridad, el gradiente transversal depende de la inclinación de los rayos solares, es decir, de la altitud solar. Sabiendo que esta coordenada angular varía entre  $0^{\circ}$  y  $90^{\circ}$ , dependiendo del día del año, de la hora del día y de la latitud, puede adoptarse para dicha coordenada un valor medio de  $\beta = 45^{\circ}$ . Bajo esta condición de altitud solar, parece idóneo el adoptar la hipótesis de que, cuando el paramento lateral se encuentre en sombra en un 50 por 100 de su longitud como mínimo, se desprece la influencia de la radiación solar incidente en el paramento lateral de la sección cajón, y viceversa.

Así, y en base a estos comentarios y a los resultados obtenidos a lo largo de los estudios paramétricos realizados, pueden establecerse los siguientes valores de diseño para el gradiente térmico transversal:

$$\begin{aligned} \text{GRAD}_{\text{transversal}} &= 2,5 \div 3^{\circ}\text{C} \quad (\text{long}_{\text{voladizo}} \leq 0,5 \text{ canto}_{\text{alma}}) \\ \text{GRAD}_{\text{transversal}} &= 0^{\circ}\text{C} \quad (\text{long}_{\text{voladizo}} > 0,5 \text{ canto}_{\text{alma}}) \end{aligned} \quad (6)$$

Conviene señalar que, en puentes cajón de inercia variable, la primera de las dos condiciones geométricas presentadas en la expresión (6) se verifica con suma facilidad en secciones próximas a los apoyos intermedios, generándose gradientes transversales que pueden incluso superar los  $3^{\circ}\text{C}$ . No obstante, hay que tener presente que, para estos casos, la curvatura térmica impuesta horizontal no es constante a lo largo de la directriz sino que es máxima en zonas cercanas a los apoyos intermedios y mínima, e incluso nula en algunos casos, en secciones próximas a la sección de clave del vano. Por ello, parece lógico adoptar en estos casos un gradiente constante a lo largo de la directriz, igual al que se propone en la expresión (6).

Asimismo, es importante destacar la influencia del azimut sobre el valor del gradiente térmico transversal. En el caso de que el azimut del puente se encuentre comprendido entre  $-22,5^\circ$  y  $+22,5^\circ$ , es decir, el puente presente una dirección Este-Oeste o próxima a ésta, es claro que únicamente incidirá radiación solar directa en uno de los dos paramentos laterales del puente. En este caso tiene sentido el definir un gradiente transversal y adoptar como valor de diseño el propuesto en (6). Sin embargo, para otras orientaciones del puente, puede incidir radiación solar sobre ambos paramentos laterales. Aunque dicha incidencia no ocurre simultáneamente, puede conservarse la existencia de un cierto equilibrio térmico según el eje horizontal y es por ello por lo que, para tales orientaciones del puente, se puede prescindir de los efectos originados por el gradiente térmico transversal.

#### 4.3.3. *Solicitud térmica transversal*

Los efectos originados por la solicitud térmica transversal se ven recogidos de forma global si lo que se define como acción térmica es la diferencia de temperaturas existente entre el interior de la célula y el ambiente exterior.

El seguimiento hora a hora de dicha diferencia de temperaturas, permite visualizar los instantes críticos para los cuales la solicitud térmica transversal es más desfavorable. A lo largo del desarrollo de los estudios paramétricos, se observa que las máximas diferencias positivas entre la temperatura de la célula y la del ambiente exterior acaecen en instantes próximos al de mínima temperatura ambiente, mientras que las máximas diferencias negativas tienen lugar en instantes próximos al de máxima temperatura ambiente que, en este caso, se sitúa en el tiempo, próximo al instante de máximo gradiente térmico (Mirambell (1)).

Por consiguiente, es interesante destacar que el análisis tensional transversal no se puede limitar al estudio de la diferencia de temperaturas entre célula y ambiente exterior en instantes cercanos al de máximo gradiente térmico sino que también debe ser contemplado el instante para el cual el gradiente vertical es mínimo (Mirambell (1), Prakash Rao (8)).

Realizando un repaso a los resultados derivados de los estudios paramétricos, presentados en la tesis doctoral de E. Mirambell (1), relativos a cada una de las variables analizadas, se llega a la conclusión de que las diferencias de temperatura entre el interior de la célula y el ambiente exterior, dependen fundamentalmente del día del año, del rango diario de la temperatura ambiente y de la velocidad de viento en el lugar de emplazamiento del puente, observándose que tales diferencias, positivas y negativas, son máximas en meses de verano de máxima intensidad de radiación solar (Junio y Julio).

Diversos análisis de puentes emplazados en estaciones meteorológicas de nuestro país en donde se han registrado alta radiación solar, baja velocidad de viento y un elevado rango diario de temperatura ambiente, condiciones éstas que propician las mayores diferencias térmicas entre el interior y el exterior del puente cajón, han dado como resultados una máxima diferencia positiva de  $14,2^\circ\text{C}$  y una máxima diferencia negativa de  $-6,1^\circ\text{C}$ .

En base a todo lo expuesto con anterioridad, se recomienda considerar en diseño, de cara a la obtención de las tensiones térmicas transversales en puentes cajón, las siguientes diferencias de temperatura entre el interior de la célula y el ambiente exterior:

$$\begin{aligned} T_{\text{célula}} - T_{\text{ambiente}} &= 14,0^\circ\text{C} \text{ (enfriamiento del tablero)} \\ T_{\text{célula}} - T_{\text{ambiente}} &= -6,0^\circ\text{C} \text{ (calentamiento del tablero)} \end{aligned} \quad (7)$$

Dichos valores deben ser especialmente considerados en aquellos lugares de emplazamiento en donde se hayan registrado aumentos o descensos repentinos de la temperatura ambiente exterior.

## 5. PUENTES CAJON MULTICELULARES. ACCIONES TERMICAS DE DISEÑO

La observación de los resultados derivados de los estudios paramétricos relativos a esta tipología transversal, permite afirmar que los rangos diarios y anuales de la temperatura media de los puentes cajón multicelulares son ligeramente inferiores a los correspondientes a puentes cajón unicelulares con igual ancho de tablero e igual canto. No obstante, dichas diferencias son muy poco significativas de cara al diseño.

Con respecto a los gradientes térmicos verticales, a igualdad de anchos de losa superior del tablero y del canto total, dicha acción térmica es ligeramente inferior en puentes cajón multicelulares. Las diferencias obtenidas, de carácter cuantitativo, se encuentran íntimamente relacionadas con la relación geométrica ancho de losa superior del tablero-ancho de losa inferior. En general, tal relación es menor en puentes cajón multicelulares y es por ello por lo que éstos se ven sometidos a menores gradientes térmicos verticales. No obstante, no es necesario introducir ningún coeficiente corrector relativo a la tipología de tablero cajón multicelular, puesto que dicha relación geométrica ya se contempla en el factor de corrección  $k_3$  (véase figura 24) definido a la hora de determinar el gradiente térmico de diseño en puentes cajón unicelulares.

En cuanto al resto de acciones térmicas que hay que considerar en diseño, no aparecen diferencias apreciables en función del número de células, si bien puede señalarse que, en general, los puentes cajón multicelulares son más susceptibles de verse solicitados con gradientes térmicos transversales que los puentes cajón unicelulares. No obstante, los valores de diseño propuestos para esta última tipología (expresión (6)) cubren sobradamente el rango de gradientes transversales al que pueden verse sometidos los puentes cajón multicelulares.

En resumen, los valores de diseño, mapas de isolíneas y expresiones de diseño citadas en el apartado anterior de este artículo, y aplicables en un principio a puentes cajón unicelulares, son perfectamente extrapolables a los puentes cajón multicelulares, sin necesidad de introducir ningún nuevo coeficiente corrector.

## 6. INFLUENCIA DE LA INERCIA VARIABLE SOBRE LAS ACCIONES TERMICAS DE DISEÑO

Para visualizar la influencia de la inercia variable sobre los valores adoptados por las acciones térmicas de diseño —rango anual de la temperatura media del puente y gradiente térmico— se analiza la respuesta térmica del puente cajón unicelular de inercia variable que se presenta en la figura 12 de este artículo. Dicho análisis se centra en la respuesta térmica, a nivel seccional, de tres secciones transversales —sección de apoyo, sección intermedia próxima a cuartos de la luz y sección de clave—.

El puente genérico se emplaza en diversas estaciones meteorológicas del país y los resultados relativos al gradiente térmico y al rango anual de la temperatura media, para las tres secciones transversales, se presentan en la tabla 4.

TABLA 4

Gradientes térmicos máximos y rangos anuales de temperatura media, en diferentes secciones transversales de un puente genérico de inercia variable (véase figura 12), emplazado en distintas estaciones metereológicas del país

Estación metereológica	Acciones térmicas: Gradientes verticales (°C) y variaciones anuales de la temperatura media (°C)					
	Sección clave		Sección intermedia		Sección apoyo	
	GRAD	ΔT	GRAD	ΔT	GRAD	ΔT
Lugo	10,1	27,5	9,2	26,2	7,6	24,8
Finisterre	6,3	19,4	5,7	18,4	4,7	17,5
Santander	9,4	20,1	8,3	19,0	6,8	18,0
León	9,8	35,7	9,3	34,1	7,9	32,7
Burgos	10,0	32,7	9,2	31,3	7,8	29,9
Salamanca	9,6	37,4	9,1	35,7	7,8	34,2
Barajas	10,9	40,2	10,1	38,4	8,6	36,9
Ciudad Real	9,5	41,2	9,1	39,5	7,9	37,9
Albacete	10,1	41,1	9,6	39,4	8,2	37,7
Badajoz	10,8	37,0	10,1	35,4	8,7	33,7
Pamplona	11,6	32,7	10,6	31,2	8,9	29,8
Zaragoza	8,9	34,6	8,4	33,2	7,2	31,8
Montseny	9,8	26,5	8,8	25,2	7,3	24,0
Tortosa	10,1	31,5	9,2	30,0	7,7	28,6
San Javier	9,0	30,5	8,3	29,2	7,0	27,9
Córdoba	13,4	39,4	12,3	37,5	10,3	35,7
Granada	10,8	40,9	10,1	39,1	8,7	37,5
Huelva	14,2	33,7	12,8	31,8	10,7	29,9
Tarifa	6,6	21,2	6,1	20,2	5,2	19,3
Teruel	9,4	40,2	8,9	38,4	7,7	37,0

Los resultados referentes a la variación anual de la temperatura media en las tres secciones transversales contempladas, muestran que las diferencias máximas, las cuales aparecen, lógicamente, entre la sección de apoyo y la sección de clave, son pequeñas. Por otra parte, se ha podido comprobar en este análisis que las temperaturas medias máximas alcanzadas en dichas secciones transversales son muy similares, no observándose diferencias superiores a los 3,3°C. Para las temperaturas medias mínimas, dichas diferencias son incluso más reducidas, no alcanzándose, para ninguna de las estaciones metereológicas analizadas, una diferencia superior a los 0,8°C.

Así pues, en lo que se refiere a la determinación del rango anual de la temperatura media del puente y a la obtención de los esfuerzos de continuidad debido a la posible hiperestaticidad de la estructura, dicha acción térmica será preciso evaluarla, únicamente, en la sección de clave del vano. El rango anual de dicha sección será considerado como rango anual de la temperatura media del puente, quedando dicho valor del lado de la seguridad, puesto que la sección de clave de un puente de inercia variable es aquella sección para la cual la temperatura media máxima es más alta y la temperatura media mínima es más baja.

En cuanto al gradiente térmico, los resultados muestran que la influencia de la inercia variable es significativa. Para algunos de los puentes emplazados en diversas estaciones metereológicas, se aprecian diferencias del 27 por 100 entre los gradientes térmicos inducidos en la sección de clave y en las secciones de apoyos intermedios.

Mathivat (6) obtiene, para diferentes puentes cajón de inercia constante e inercia variable, la tensión máxima de tracción en la fibra inferior de la sección de clave del puente, generada por la actuación de un gradiente térmico. En base a los resultados obtenidos, llega a la conclusión de que un puente de inercia variable es aproximadamente una vez y media más sensible a dicha acción térmica que un puente de inercia constante. Esta conclusión es válida si se supone que el gradiente térmico es constante a lo largo del tablero, hecho éste que, como se ha demostrado con anterioridad, no se verifica en la realidad.

Planteando el problema en su forma más general, puede obtenerse un gradiente equivalente, constante a lo largo de la directriz del puente de inercia variable, que induce el mismo momento de empotramiento perfecto que induciría la ley de gradientes a la que se ve sometida la estructura del puente. Dicho gradiente equivalente viene definido mediante la siguiente expresión:

$$\text{Grad}_{\text{equiv}} = \frac{\int_0^{\ell/2} \frac{\text{Grad}(x)}{h(x)} dx}{\int_0^{\ell/2} \frac{dx}{h(x)}} \quad (8)$$

La integral del denominador, para una variación parabólica del canto, tiene la siguiente solución analítica:

$$\int_0^{\ell/2} \frac{dx}{h(x)} = \frac{\ell}{2 h_c} \frac{\text{arc tg } \sqrt{\frac{h_a}{h_c} - 1}}{\sqrt{\frac{h_a}{h_c} - 1}} \quad (9)$$

siendo  $\ell$  la luz del vano y  $h_a$  y  $h_c$  los cantos de la sección de apoyo y de la sección de clave, respectivamente.

En la tabla 5 se presentan los valores de la expresión (9), correspondientes a diferentes puentes cajón, de inercia variable, con variación parabólica del canto, construidos en Francia y en España.

A la vista de los resultados presentados en esta tabla, puede adoptarse un valor medio de dicha integral igual a 18,0. En cualquier caso, la integral de la expresión (9) puede afrontarse, de forma sencilla, desde un punto de vista numérico o analítico.

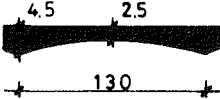
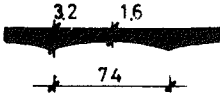
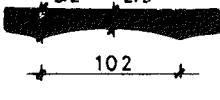
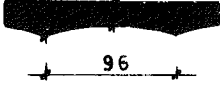
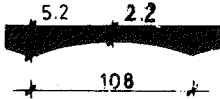
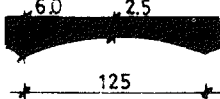
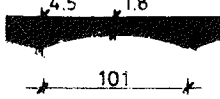
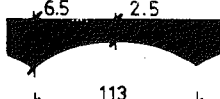
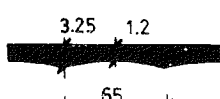
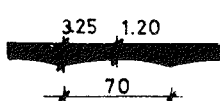
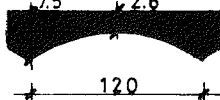
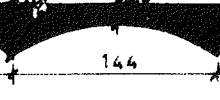
En cuanto a la integral que aparece en el numerador de la expresión (8), ésta no es integrable analíticamente, a no ser que, para cada caso, se obtuviera una ley analítica de la distribución de gradientes a lo largo de la directriz. Ello es realmente complejo y, por lo tanto, la forma de abordar el problema es hacerlo desde un punto de vista numérico, obteniendo valores del gradiente en una serie de puntos discretos a lo largo de la directriz del puente y llevando a cabo posteriormente una integración numérica —trapecio, Simpson...—.

Sin embargo, en diseño, el problema puede simplificarse. La figura 26 muestra los perfiles cualitativos de las leyes de gradientes y cantos, y la del cociente entre ambos, para un puente genérico de inercia variable.



TABLA 5

Valores de la integral  $\int_0^{l/2} dx/h(x)$ , para diferentes puentes cajón, de inercia variable, construídos en Francia y España

Puente	Dimensiones	$h_a/h_c$	$\int_0^{l/2} \frac{dx}{h(x)}$
Viaducto de la Fuente del Azufre		1,8	21,2
Puente de los Vados		2,0	18,2
Puente de Woippy		2,1	15,8
Puente de Ascó sobre el Ebro		2,1	14,2
Puente de Joinville		2,4	18,1
Puente de Molins		2,4	18,4
Puente en Castejón sobre el Ebro		2,5	20,3
Puente de Orleans		2,6	16,1
Viaducto de Frieira sobre el Miño		2,7	19,0
Viaducto del Barranco de Priego		2,7	20,5
Viaducto de Magnan		2,7	15,1
Viaducto de Catoira sobre el Ulla		3,0	19,5

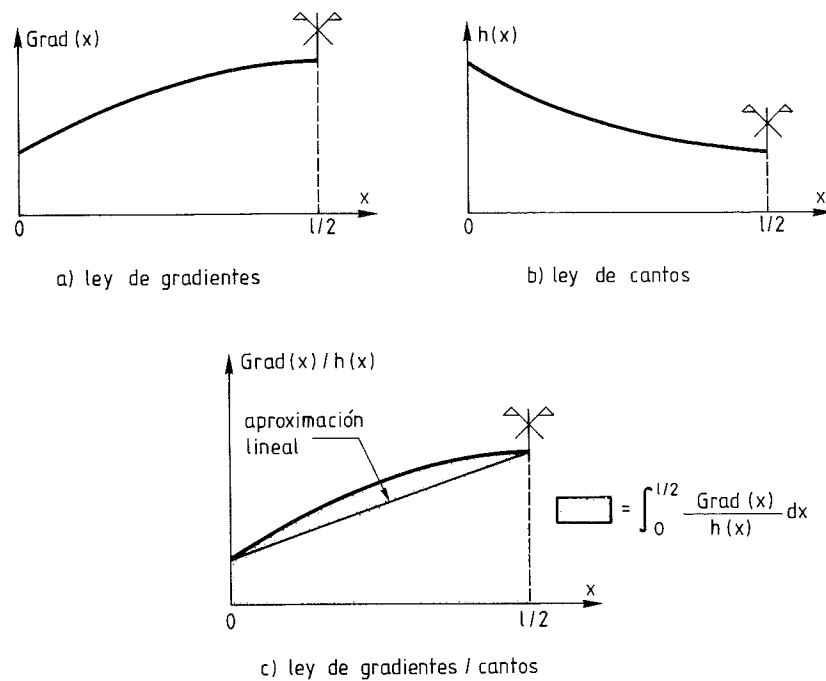


Fig. 26. Perfiles cualitativos de las leyes del gradiente térmico, del canto y del cociente entre ambos, para tramos simétricos de puentes de inercia variable.

La ley  $\text{Grad}(x)/h(x)$  tiene el mismo perfil cualitativo, independientemente de la forma en como varía la tipología del puente de inercia variable a lo largo de su directriz. Aproximando el área rayada de la figura 26.c por el área del trapecio, se obtiene que

$$\int_0^{l/2} \frac{\text{Grad}(x)}{h(x)} dx = \frac{\frac{\text{Grad}_c}{h_c} + \frac{\text{Grad}_a}{h_a}}{2} \frac{l}{2} \quad (10)$$

Lógicamente, dicha aproximación queda del lado de la inseguridad, aunque no de forma excesiva debido a que la función  $\text{Grad}(x)/h(x)$  suele ser muy tendida para la gran mayoría de los puentes de hormigón de inercia variable.

Así pues, y teniendo en cuenta la aproximación llevada a cabo para la integral del denominador de la expresión (8), el gradiente equivalente de diseño podrá determinarse, en un primer paso, a través de la siguiente expresión:

$$\text{GRAD} = \frac{1}{72} \left( \frac{\text{Grad}_c}{h_c} + \frac{\text{Grad}_a}{h_a} \right) l \quad (11)$$

Ahora bien, si se desea aproximar, con mayor precisión, dicho gradiente equivalente, éste puede determinarse a través de la media de sus dos valores extremos, a saber, el gradiente en clave y el gradiente definido en la expresión (11)

$$\text{GRAD} = \frac{1}{2} \left[ \text{Grad}_c + \frac{1}{72} \left( \frac{\text{Grad}_c}{h_c} + \frac{\text{Grad}_a}{h_a} \right) l \right] \quad (12)$$

Dicha expresión de diseño permite obtener un gradiente equivalente, constante a lo largo de la directriz del puente, que queda, en la gran mayoría de los casos, del lado de la seguridad. En la tabla 6 puede apreciarse que dicho gradiente equivalente, obtenido mediante la expresión (12), se encuentra próximo al gradiente térmico existente en la sección transversal situada a cuartos de la luz del vano. El valor obtenido para el gradiente de diseño, siempre es superior al gradiente térmico que se obtendría como media aritmética de los gradientes existentes en las secciones de clave y apoyos.

**TABLA 6**  
**Gradientes térmicos de diseño, en puentes cajón de inercia variable (véase figura 12),  
emplazados en diferentes estaciones metereológicas**

Estación metereológica	Gradientes térmicos en puentes de inercia variable (°C)			
	Gradiente sección clave	Gradiente sección a L/4	Gradiente sección apoyos	Gradiente de diseño
Lugo	10,1	9,2	7,6	9,3
Finisterre	6,3	5,7	4,7	5,8
Santander	9,4	8,3	6,8	8,6
León	9,8	9,3	7,9	9,1
Burgos	10,0	9,2	7,8	9,3
Salamanca	9,6	9,1	7,8	8,9
Barajas	10,9	10,1	8,6	10,1
Ciudad Real	9,5	9,1	7,9	8,9
Albacete	10,1	9,6	8,2	9,7
Badajoz	10,8	10,1	8,7	10,0
Pamplona	11,6	10,6	8,9	10,7
Zaragoza	8,9	8,4	7,2	8,3
Montseny	9,8	8,8	7,3	9,0
Tortosa	10,1	9,2	7,7	9,3
San Javier	9,0	8,3	7,0	8,3
Córdoba	13,4	12,3	10,3	12,4
Granada	10,8	10,1	8,7	10,0
Huelva	14,2	12,8	10,7	13,1
Tarifa	6,6	6,1	5,2	6,1
Teruel	9,4	8,9	7,7	8,8

## 7. EJEMPLOS

A continuación se exponen diferentes ejemplos en los que se muestra la metodología que se debe seguir para la determinación de las acciones térmicas de diseño, en diversos puentes cajón de hormigón ya construídos y emplazados en la Península Ibérica.

### 7.1. Viaductos de acceso al puente de Rande

Estos viaductos presentan una tipología transversal de tablero cajón unicelular, de canto constante e igual a 2,32 metros (ATEP. Realizaciones españolas (9)).

Rango anual de la temperatura media del puente:

Mapa de isolíneas (figura 20) . . . . .	$\Delta T_{ref} = 22,1^{\circ}\text{C}$
Factor corrector, relativo al canto (figura 21) . . . . .	$k_1 = 0,99$
Rango anual de temperatura media de diseño (expresión (3)) . . . . .	$\Delta T = 21,9^{\circ}\text{C}$

Gradiente térmico:

Mapa de isolíneas (figura 22) . . . . .	$GRAD_{ref} = 7,9^{\circ}\text{C}$
Factor corrector, relativo al canto (figura 23) . . . . .	$k_2 = 0,98$
Factor corrector, relativo a la relación ancho losa superior - ancho losa inferior (figura 24) . . . . .	$k_3 = 1,05$
Factor corrector, relativo al espesor de asfalto (figura 25):	
–sin asfalto . . . . .	$k_4 = 1,00$
–espesor = 7,0 cms . . . . .	$k_4 = 1,11$
Gradiente térmico de diseño (expresión (4)):	
–sin asfalto . . . . .	$GRAD = 8,1^{\circ}\text{C}$
–espesor = 7,0 cms . . . . .	$GRAD = 9,0^{\circ}\text{C}$

Gradiente térmico inverso:

Gradiente térmico inverso de diseño (expresión (5)):	
–sin asfalto . . . . .	$GRAD_{neg} = - 2^{\circ}\text{C}$
–espesor = 7,0 cms . . . . .	$GRAD_{neg} = 0^{\circ}\text{C}$

Gradiente térmico transversal:

Gradiente térmico transversal de diseño (expresión (6)) . . . . .	$GRAD_{transv} = 0^{\circ}\text{C}$
---	-------------------------------------

Solicitaciones térmicas transversales:

Solicitaciones térmicas transversales de diseño (expresión (7)) . . . . .	$T_{cel} - T_{amb} = 14^{\circ}\text{C}$
	$T_{cel} - T_{amb} = - 6^{\circ}\text{C}$

## 7.2. Puente Ingeniero Carlos Fernández Casado

Este es un puente atirantado, cajón tricelular, de canto constante igual a 2,40 metros (Manterola y Fernández Troyano (10)).

Rango anual de la temperatura media del puente:

Mapa de isolíneas (figura 20) . . . . .	$\Delta T_{ref} = 28,0^{\circ}\text{C}$
Factor corrector relativo al canto (figura 21) . . . . .	$k_1 = 0,99$
Rango anual de la temperatura media de diseño (expresión (3)) . . . . .	$\Delta T = 27,7^{\circ}\text{C}$

Gradiente térmico:

Mapa de isolíneas (figura 22) . . . . .	$GRAD_{ref} = 8,6^{\circ}\text{C}$
Factor corrector relativo al canto (figura 23) . . . . .	$k_2 = 0,96$
Factor corrector relativo a la relación ancho losa superior - ancho losa inferior (figura 24) . . . . .	$k_3 = 0,94$
Factor corrector relativo al espesor de asfalto (figura 25):	
–sin asfalto . . . . .	$k_4 = 1,00$
–espesor = 7,0 cms . . . . .	$k_4 = 1,12$
Gradiente térmico de diseño (expresión (4)):	
–sin asfalto . . . . .	$GRAD = 7,8^{\circ}\text{C}$
–espesor = 7,0 cms . . . . .	$GRAD = 8,7^{\circ}\text{C}$

Gradiente térmico inverso:

Gradiente térmico inverso de diseño (expresión (5)):

–sin asfalto .....  $GRAD_{neg} = -2^{\circ}C$   
–espesor = 7,0 cms .....  $GRAD_{neg} = 0^{\circ}C$

Gradiente térmico transversal:

Gradiente térmico transversal de diseño (expresión (6)) .....  $GRAD_{trans} = 0^{\circ}C$

Solicitaciones térmicas transversales:

Solicitaciones térmicas transversales de diseño (expresión (7)) ...  $T_{cel} - T_{amb} = 14^{\circ}C$   
 $T_{cel} - T_{amb} = -6^{\circ}C$

### 7.3. Puente de Molins de Rey

Es un puente cajón unicelular, de inercia variable, de 125 metros de luz de vano y canto variable de 2,50 metros en clave a 6,0 metros en apoyos (ATEP. Realizaciones españolas (9)).

Rango anual de la temperatura media del puente:

Mapa de isolíneas (figura 20) .....  $\Delta T_{ref} = 26,4^{\circ}C$   
Factor corrector relativo al canto (figura 21) .....  $k_1 = 0,985$   
Rango anual de temperatura media de diseño (expresión (3)) .....  $\Delta T = 26,0^{\circ}C$

Gradiente térmico:

Mapa de isolíneas (figura 22) .....  $GRAD_{ref} = 8,4^{\circ}C$   
Sección clave:  
Factor corrector relativo al canto (figura 23) .....  $k_2 = 0,94$   
Factor corrector relativo a la relación ancho losa superior - ancho losa inferior (figura 24) .....  $k_3 = 0,99$   
Factor corrector relativo al espesor de asfalto (figura 25):  
–sin asfalto .....  $k_4 = 1,00$   
–espesor = 7,0 cms .....  $k_4 = 1,13$   
Gradiente en clave (expresión (4)):  
–sin asfalto .....  $GRAD_{clave} = 7,8^{\circ}C$   
–espesor = 7,0 cms .....  $GRAD_{clave} = 8,8^{\circ}C$   
Sección apoyos:  
Factor corrector relativo al canto (figura 23) .....  $k_2 = 0,75$   
Factor corrector relativo a la relación ancho losa superior - ancho losa inferior (figura 24) .....  $k_3 = 0,99$   
Factor corrector relativo al espesor de asfalto (figura 25):  
–sin asfalto .....  $k_4 = 1,00$   
–espesor = 7,0 cms .....  $k_4 = 1,29$   
Gradiente en apoyos (expresión (4)):  
–sin asfalto .....  $GRAD_{apoyos} = 6,2^{\circ}C$   
–espesor = 7,0 cms .....  $GRAD_{apoyos} = 8,0^{\circ}C$   
Gradiente térmico de diseño (expresión (12)):  
–sin asfalto .....  $GRAD = 7,5^{\circ}C$   
–espesor = 7,0 cms .....  $GRAD = 8,6^{\circ}C$

Gradiente térmico inverso:

Gradiente térmico inverso de diseño (expresión (5)):

–sin asfalto .....  $GRAD_{neg} = - 2^{\circ}C$   
–espesor = 7,0 cms .....  $GRAD_{neg} = 0^{\circ}C$

Gradiente térmico transversal:

Gradiente térmico transversal de diseño (expresión (6)) .....  $GRAD_{trans} = 0^{\circ}C$

Solicitaciones térmicas transversales:

Solicitaciones térmicas transversales de diseño (expresión (7)) ...  $T_{cel}-T_{amb} = 14^{\circ}C$   
 $T_{cel}-T_{amb} = - 6^{\circ}C$

## 8. ANALISIS COMPARATIVO PRESENTE ESTUDIO-NORMATIVA

En la tabla 7 se recogen, de forma resumida, las diferencias más significativas entre lo derivado del presente estudio y lo preconizado por la normativa nacional vigente, en lo que se refiere a la cuantificación de las acciones térmicas de diseño en puentes cajón de hormigón.

Conviene señalar, en primer lugar, que la normativa nacional vigente trata la problemática de los efectos térmicos ambientales en puentes de hormigón, con excesiva simplicidad, no contemplando diversos factores ambientales, geométricos y estructurales, que influyen de forma significativa en los valores de las acciones térmicas que se deben considerar en el diseño de los puentes cajón de hormigón.

Los parámetros contemplados de forma intrínseca en el presente estudio son:

- El lugar de emplazamiento del puente.
- El rango diario y anual de la temperatura ambiente en dicho lugar de emplazamiento.
- La velocidad del viento.
- La radiación solar.

Los parámetros no contemplados de forma directa en el análisis, pero que son considerados en el estudio a través de los correspondientes factores de corrección, atienden a:

- La tipología transversal del tablero, fundamentalmente el canto y la relación geométrica ancho de la losa superior del tablero - ancho de la losa inferior.
- El espesor de la capa asfáltica de rodadura.

De nuevo, al igual que ocurre en la tipología transversal de puentes losa (Mirambell y Aguado (7)), puede observarse que la corrección relativa al espesor ficticio de la pieza, en la expresión que preconiza la normativa nacional vigente de cara a la obtención del incremento y decremento uniforme de la temperatura media del puente, refleja de forma fidedigna la influencia de la tipología y canto del tablero. No obstante, las variaciones ocasionadas por la propia diversidad de la climatología existente en nuestro país son mucho más acusadas.

En lo referente a la definición del gradiente térmico de diseño en puentes cajón, se observa que éste, definido mediante su valor característico, difícilmente alcanza el valor de  $10^{\circ}C$  preconizado por la normativa, ocurriendo ello únicamente para aquellos puentes cajón

**TABLA 7**

**Valores de las acciones térmicas de diseño, en puentes cajón, según la normativa nacional vigente y según el presente estudio**

Acciones térmicas de diseño en puentes cajón de hormigón (°C)		
Rango anual de la temperatura media del puente	Normativa	$\Delta T = \pm (20 - 0,75 \sqrt{e})$ <p>La única variable considerada es el espesor ficticio. No se parte de ninguna información climatológica. La temperatura de 20°C parece atender a un valor medio anual peninsular.</p>
	Presente estudio	$\Delta T = k_1 \cdot \Delta T_{ref}$ <p>Se considera el canto del tablero y las condiciones ambientales y climatológicas existentes en el lugar de emplazamiento del puente.</p>
Gradiente térmico	Normativa	$GRAD = 10,0$ <p>Queda a juicio del proyectista. No considera ninguna variable.</p>
	Presente estudio	$GRAD = k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot GRAD_{ref}$ <p>Se considera la tipología transversal del tablero, –canto y relación ancho losa superior-ancho losa inferior–, el espesor de capa asfáltica de rodadura y la climatología existente en el lugar de emplazamiento del puente.</p>
Gradiente térmico inverso	Normativa	-----
	Presente estudio	$GRAD_{neg} = -2,0$ <p>Si se dispone capa asfáltica de rodadura, no es necesaria su consideración en diseño.</p>
Gradiente térmico transversal	Normativa	-----
	Presente estudio	$GRAD_{transv} = 2,5 \div 3,0$ <p>(Si longitud<sub>voladizo</sub> ≤ 0,5 canto<sub>alma</sub>)                      Si la longitud del voladizo es mayor que la mitad del canto del alma, no es necesaria su consideración en diseño.                      Para azimuts &lt; -22,5° y azimuts &gt; 22,5°, no es necesaria su consideración en diseño.</p>
Solicitud térmica transversal	Normativa	-----
	Presente estudio	$T_{célula} - T_{ambiente} = 14,0$ (enfriamiento tablero) $T_{célula} - T_{ambiente} = -6,0$ (calentamiento tablero) Debe ser especialmente considerada en emplazamientos con descensos repentinos de la temperatura ambiente.
Influencia de la inercia variable	Normativa	-----
	Presente estudio	Únicamente significativa en el valor del gradiente térmico. $GRAD_{equiv.} = \frac{1}{2} \left[ Grad_c + \frac{1}{72} \left( \frac{Grad_c}{h_c} + \frac{Grad_a}{h_a} \right) \cdot luz \right]$

emplazados en la cuenca del río Guadalquivir y en determinadas localidades, de forma puntual.

Asimismo, es de destacar la importancia que adquieren otras acciones térmicas, como son las solicitaciones transversales por temperatura y el gradiente transversal, las cuales, en algunos casos, han sido la razón desencadenante de diversas patologías observadas en puentes cajón de hormigón. A tales acciones térmicas la normativa no hace ninguna alusión.

## 9. CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados derivados del presente estudio, pueden extraerse las siguientes conclusiones relativas a la respuesta térmica de los tableros cajón y a las acciones térmicas que hay que considerar en diseño:

- La obtención de unas distribuciones de temperaturas en tableros de puentes cajón de hormigón, acordes con la realidad física del problema, pasa necesariamente por la consideración de dominios bidimensionales y flujos caloríficos bidireccionales y por la consideración de la evolución de la temperatura en el interior de las células.
- Los parámetros geométricos que muestran una mayor influencia sobre la respuesta térmica del tablero y sobre las acciones térmicas que hay que considerar en diseño son el canto del tablero y la relación ancho de losa superior-ancho de losa inferior.
- Es de destacar la importancia que adquiere la solicitación térmica transversal originada por la diferencia de temperaturas existente entre el ambiente exterior y el interior de las células. Asimismo, en algunos casos, cobra especial importancia el gradiente transversal. Cuanto mayor es la relación canto del alma-longitud del voladizo, mayor es el valor de dicha acción térmica. Ello ocurre, fundamentalmente, en secciones cercanas a apoyos intermedios, en puentes de inercia variable.
- En puentes cajón de inercia constante, el flujo longitudinal de calor es prácticamente nulo. En puentes cajón, de inercia variable, el flujo longitudinal de calor es prácticamente despreciable, estimándose que en vanos de una longitud próxima a los 100 metros, la diferencia de temperaturas existente a lo largo de una misma fibra, entre la sección de apoyos y la sección de clave, no supera los 4°C.
- En puentes cajón de inercia variable, la sección que se ve sometida al máximo gradiente vertical y a la máxima solicitación térmica transversal es la sección de clave, mientras que la sección de apoyo es la que se ve sometida, en un principio, a los máximos gradientes térmicos transversales.
- La respuesta térmica de los puentes multicelulares es prácticamente idéntica a la de los puentes unicelulares, observándose que el sentido en el que actúan todos los parámetros analizados es el mismo para ambas tipologías.
- La diversidad de climas existente en nuestro país, se traduce en unas variaciones anuales de la temperatura media del puente cajón más acusadas que las que provienen de la influencia de la tipología y del canto del tablero.
- La presencia de una capa asfáltica de rodadura, confiere una menor susceptibilidad del puente a verse sometido a gradientes térmicos inversos.
- Para puentes cajón se ha observado que, salvo en determinadas zonas geográficas, difícilmente se alcanza el gradiente de diseño de 10°C preconizado por la normativa vigente. Este hecho, diametralmente opuesto al mostrado en el estudio del comportamiento de los puentes losa frente a la acción térmica ambiental, evidencia de for-



- ma meridiana la influencia del canto del tablero sobre el valor del gradiente térmico inducido.
- La influencia de la inercia variable sobre los valores de diseño del rango anual de la temperatura media del puente, del gradiente térmico inverso, del gradiente transversal y de la sollicitación transversal por temperatura, es poco significativa.
  - La influencia de la inercia variable sobre el valor del gradiente térmico, sí es significativa, apreciándose diferencias del orden del 25 por 100, entre los gradientes térmicos inducidos en la sección de clave y en la sección de apoyos intermedios. En diseño, puede adoptarse un gradiente térmico equivalente, el cual viene definido en la expresión (12) del presente artículo. El valor de dicho gradiente se encuentra próximo al existente en una sección transversal, a cuartos de la luz, y es sensiblemente superior a la media aritmética de los gradientes de clave y de apoyos.

## REFERENCIAS

1. MIRAMBELL, E.: "Criterios de diseño en puentes de hormigón frente a la acción térmica ambiental". Tesis doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, Marzo, 1987.
2. LEONHARDT, F., KOLBE, G., PETER, J.: "Temperaturunterschiede gefährden Spannbetonbrücke" (Temperature Differences endanger Prestressed Concrete Bridges). Beton-und Stahlbetonbau, Vol. 60, No. 7. July, 1965.
3. ELBADRY, M.M., GHALI, A.: "Temperature Variations in Concrete Bridges". Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 10. October, 1983.
4. ELBADRY, M.M., GHALI, A.: "Nonlinear Temperature Distribution and its Effects on Bridges". IABSE Proceedings P-66/83. August, 1983.
5. KEHLBECK, F.: "Einfluss der Sonnenstrahlung bei Brückenbauwerken" (Effect of Solar Radiation on Bridge Structures). Werner-Verlag. Düsseldorf, 1975.
6. MATHIVAT, J.: "Construcción de puentes de hormigón pretensado por voladizos sucesivos". Editores Técnicos Asociados, S.A. Barcelona, 1980.
7. MIRAMBELL, E., AGUADO, A.: "Estudio del comportamiento de puentes losa de hormigón frente a la acción térmica ambiental. Criterios de diseño". Hormigón y Acero, No. 163. Abril, 1987.
8. PRAKASH RAO, D.S.: "Temperature Distributions and Stresses in Concrete Bridges". ACI Journal, Title No. 83-52. August, 1986.
9. ATEP: "Hormigón Pretensado. Realizaciones españolas". Instituto Eduardo Torroja de la construcción y del cemento. Asociación Técnica Española del Pretensado. Mayo, 1970.
10. MANTEROLA, J., FERNANDEZ TROYANO, L.: "Autopista Campomanes-León. Los puentes". Hormigón y Acero, No. 151. Abril, 1984.

## RÉSUMÉ

Dans cet exposé, nous analysons, sous forme paramétrique, l'influence de quelques facteurs de différentes caractéristiques sur la réponse thermique des ponts caisson unicellulaires et multicellulaires en béton. L'application d'une méthodologie générale pour obtenir les actions thermiques pour le calcul dans le cas des ponts caisson situés dans le territoire péninsulaire nous permettra connaître l'évolution annuelle de la température moyenne du pont, les gradients thermiques et aussi d'autres actions thermiques. Les résultats dérivés de cette étude seront analysés et comparés aux résultats obtenus de l'application des normes nationales en cours. Ainsi donc, nous étudions de façon spéciale les possibles actions transversales de la température et l'influence de l'inertie variable sur la réponse thermique des ponts caisson en béton.

## SUMMARY

In the present paper, the influence of different parameters on the thermal response of concrete box girder bridges is analyzed. The application of a general methodology in order to determine the thermal actions to be considered in design of concrete bridges allows to know the effective temperature range of the deck, thermal gradients and thermal transverse loads in concrete box girder bridges located on the Iberian Peninsula. The results derived from this study are compared with those obtained by means of several expressions existing in national codes. Likewise, the influence of variable deck superstructure depth on the thermal response of concrete box girder bridges is analyzed.

## II Conferencia Internacional sobre "Aplicaciones de los ordenadores en la tecnología del hormigón"

Organizada por el Instituto del Hormigón de Singapore y el Instituto Tecnológico Nanyang, se celebrará en Singapore, durante los días 28 y 29 de marzo del próximo año 1988, la II Conferencia Internacional sobre "Aplicaciones de los Ordenadores en la Tecnología del Hormigón".

El objetivo fundamental de esta Conferencia es ofrecer un foro internacional para discutir los últimos avances logrados en la aplicación de los ordenadores a la tecnología del hormigón y dar a conocer cómo se han utilizado en las distintas fases del proyecto y construcción de las estructuras. Se trata también de reunir a los técnicos que desarrollan sus actividades en los diferentes campos de utilización del cemento y el hormigón (por ejemplo, arquitectura, ingeniería estructural, investigación, control de calidad, etc.) con los especialistas en tecnología de ordenadores. Se espera que los participantes en esta Conferencia puedan así obtener una amplia perspectiva de todas las posibilidades que ofrece la aplicación de los ordenadores en las actividades relacionadas con el hormigón, estimulando así su utilización, con el fin de incrementar la productividad y mejorar la calidad y fiabilidad de las construcciones.

Los interesados en recibir mayor información sobre esta Conferencia, deberán dirigirse a:

THE CONCRETE CENTRE  
193A Goldhill Centre  
Thomson Road  
Singapore 1130

## Reunión de la Comisión N<sup>o</sup> 2 de la FIP "Aceros y Sistemas de Pretensado"

R. Martí

Los pasados días 22 y 23 de septiembre tuvo lugar en Gouda (Holanda) una nueva reunión de la Comisión n<sup>o</sup> 2 de la FIP, "Prestressing Steels and systems".

Los principales acuerdos tomados fueron los siguientes:

- a) "Durability - case histories": El Grupo de Trabajo solicita a los proyectistas sistemas y autoridades, envíen el mayor número posible de ejemplos, con el fin de poder redactar un informe sobre ello. Todos los ejemplos enviados serán tratados con el más absoluto carácter confidencial.
- b) "Stress corrosion test": Este documento está ya listo para su publicación, lo que se hará a primeros de año; y existe la intención de incluir este ensayo en varios Códigos europeos y, lo que es más importante, en el nuevo Código CEB/FIP, en la parte concerniente a los aceros de pretensado.
- c) Lectura y aprobación de la propuesta de Código CEB/FIP para aceros de pretensado y sistemas.
- d) "Comportamiento bajo tracción desviada": Se distribuyeron resultados de los ensayos realizados en diferentes laboratorios, llegándose a la conclusión de que pequeñas variaciones en el ángulo del mandril de ensayo o en el ángulo del cable, pueden ocasionar importantes dispersiones en los resultados obtenidos.
- e) "Nuevos materiales para el pretensado, distintos del acero": El Grupo de Trabajo encargado de este tema, comentó los requisitos que se exigirán a los nuevos materiales y presentó el índice del documento que elaborará.
- f) "Pretensado exterior": Se presentó el borrador del documento que va a publicarse, en febrero del próximo año, sobre el estado actual de conocimientos de este tema.

Finalmente, se decidió crear dos nuevas Comisiones: Una que revise el actual documento sobre aceros e incorpore un nuevo capítulo sobre vainas, y otra que tratará de las recomendaciones para la aceptación de anclajes para puentes atirantados.

## Reunión del Consejo de la F.I.P.

Durante los días 1 y 2 de septiembre y coincidiendo con el Simposio de la IABSE sobre "Estructuras de hormigón para el futuro", se celebró en París y Versalles (Francia) la segunda reunión correspondiente al presente año 1987, del Consejo de la FIP. En representación de los diversos Grupos Nacionales integrados en la Federación, participaron en esta reunión treinta y un delegados. La A.T.E.P. estuvo representada por el Sr. Piñeiro.

De entre los temas tratados, correspondientes al amplio Orden del Día previsto, destacaremos en este breve comentario, por su interés, los siguientes:

- En el curso de la discusión relativa al estado actual de las finanzas de la F.I.P., se comentaron las dificultades surgidas como consecuencia del cambio de la Secretaría de la FIP, que antes llevaba la Cement and Concrete Association, a la Institution of Civil Engineers. Debido a ello, las cuotas de algunos de los Grupos nacionales aún no han llegado a la Institution of Civil Engineers, lo que ha creado ciertas dificultades. Se expusieron las medidas adoptadas para solucionar el problema y se espera que para el próximo año sea posible recuperar la normalidad. Debe señalarse que el Grupo nacional español no ha tropezado con ningún inconveniente en relación con este asunto, y su situación está perfectamente normalizada.
  - M. Miehlsbradt, que es el encargado de las relaciones FIP-CEB, informó de la reunión celebrada recientemente en Treviso (Italia) por el CEB y del estado actual de las relaciones entre ambas Organizaciones. Hizo constar que se está haciendo todo lo posible para intensificar la colaboración FIP-CEB y que, de acuerdo con este criterio, existe la posibilidad de que en el próximo Congreso de la FIP, en Hamburgo, en 1990, se dedique un día a informar y comentar cómo se viene desarrollando esta colaboración y cómo se piensa actuar en el futuro.
  - M. Shimoni, Delegado de Israel, presentó y comentó el programa final del Simposio de la FIP que, en Jerusalem, se celebrará del 4 al 9 de septiembre de 1988. De este programa, próximamente se hará una amplia difusión entre todos los Grupos nacionales. Coincidiendo con este Simposio, tanto el Consejo de la FIP como la casi totalidad de sus Comisiones Técnicas, celebrarán en Jerusalem su segunda reunión anual de 1988. El Consejo se reunirá el sábado día 3.
  - Los Presidentes de las Comisiones de la FIP informaron sobre la marcha de la labor que tienen encomendada y sobre cómo se van reorganizando dichas Comisiones con el fin de prescindir de aquellos Miembros que llevan tiempo sin asistir a las reuniones ni colaborar en los trabajos que se realizan y a los que, sin embargo, se les siguen enviando las Actas correspondientes y todos los textos de las publicaciones que se editan. Esto representa un gasto excesivo que, realmente, no tiene ninguna justificación. Por todo ello, se decidió que los Presidentes envíen a la Secretaría de la FIP una relación actualizada de cuáles de los Miembros de sus respectivas Comisiones son los efectivamente activos. Con éstos será con los únicos con quienes se mantendrán las mismas relaciones que hasta el presente.
- Cabe destacar también que según informó M. Walther, Presidente de la Comisión 3 "Práctica de cálculo", recientemente constituida, y que consta ya de 12 Miembros, se han iniciado los trabajos para preparar un Manual de la FIP sobre "Cálculo de los puentes construidos por voladizos sucesivos". Por otra parte, el Presidente de la Comisión 6 "Estructuras marítimas de hormigón", dió cuenta de que el Grupo de trabajo que se venía ocupando de las estructuras flotantes, en el futuro lo hará también de los barcos de hormigón.
- Se acordó que la próxima reunión del Consejo se celebrará, en Hamburgo, en los primeros días de la semana del 7 al 13 de marzo de 1988.

## Reunión de la Comisión N<sup>o</sup> 8 de la F.I.P. "Depósitos de hormigón"

R. Martí

El pasado 29 de septiembre tuvo lugar, en Edimburgo, una nueva reunión de la Comisión n<sup>o</sup> 8 de la FIP "Concrete Storage Vessel Systems".

Los aspectos más importantes tratados en la misma fueron los siguientes:

Potenciación de un nuevo Grupo de Trabajo que se dedique al estudio de los depósitos para aceite.

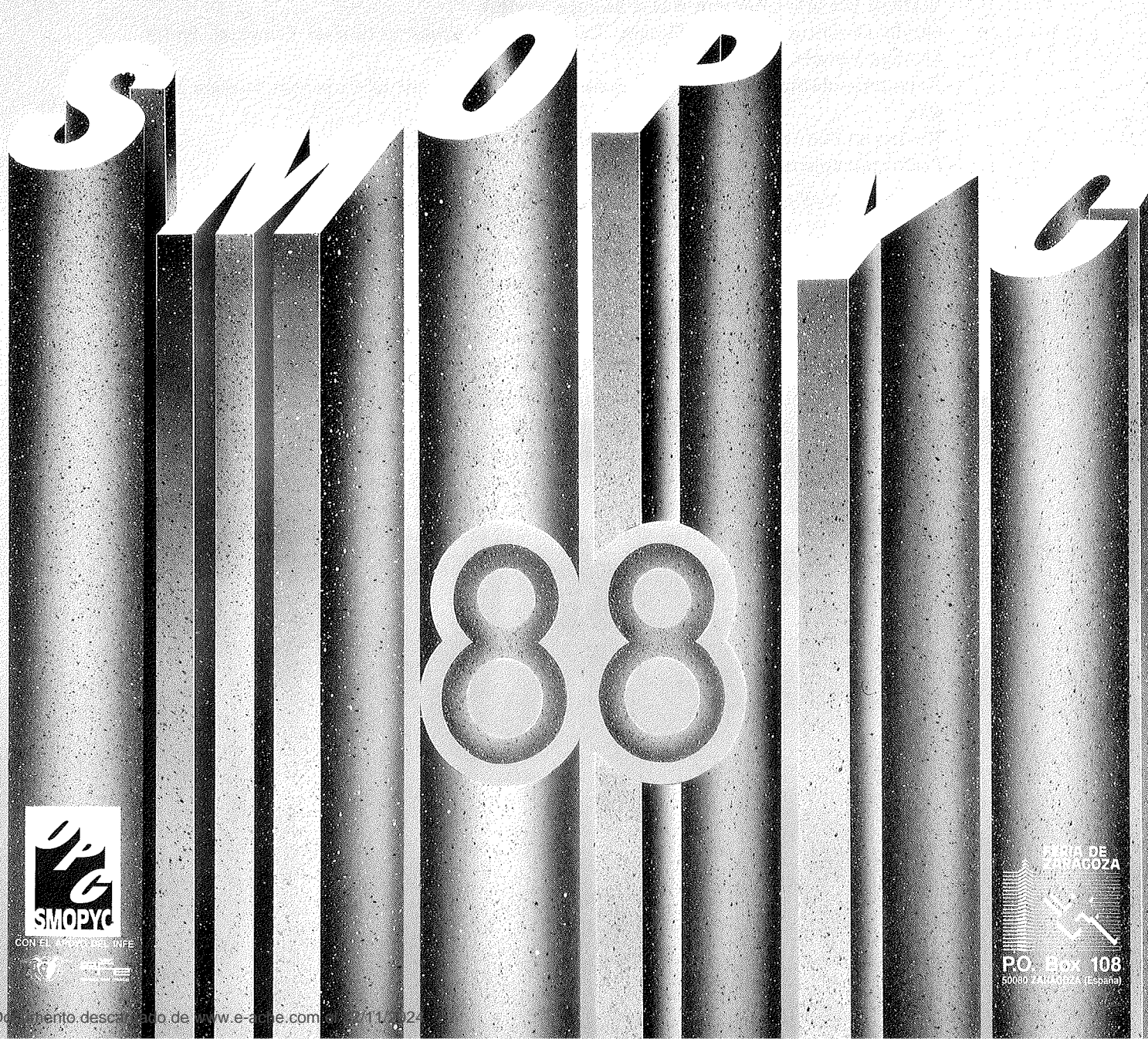
La Comisión, en este momento, tiene en activo cuatro Grupos de Trabajo, cuyos cometidos son los siguientes:

- 1) "Performance and design Criteria". Este Grupo de Trabajo está preparando una guía para el diseño de depósitos para materiales tóxicos y explosivos, con especial énfasis en "RLG tanks". El trabajo está previsto que se finalice en 1990.
- 2) "Water storage". Este Grupo tiene actualmente cinco trabajos en estudio. Todos ellos serán entregados el próximo año y sus títulos son:
  - State of the art: Concrete Water Storage Vessels.
  - Guide to Good Practice: Design, Detailing and Construction of Concrete Water Storage Vessels.
  - Recommendations: Inspection, maintenance and repair of Concrete Storage Vessels.
  - Review of National Codes and Standards.
  - Performance and testing.
- 3) "Silo Design". Este Grupo ha realizado un primer trabajo consistente en el estudio de dos tipos de silos, según diferentes Códigos. Los resultados del mismo se publicaron en diciembre de 1986. En base a este estudio y a la gran disparidad de resultados obtenidos, se procedió al inicio de un documento sobre el diseño de silos de hormigón. Hasta el momento, ha sido ya elaborada la parte relativa a las cargas que hay que considerar y, actualmente, se están estudiando aspectos de cálculo tales como asentamiento, influencia de la temperatura, etc.
- 4) "Structural protective systems for large scale plants". Los accidentes recientemente ocurridos, propiciaron la creación de este Grupo de Trabajo, cuyo objetivo es demostrar que el hormigón pretensado es un material que debe tenerse en cuenta en el diseño de las plantas industriales. El Grupo no ha empezado aún su trabajo y está en fase de creación. Se invita a los Ingenieros con experiencia en el diseño de estructuras, especialmente en lo relativo al efecto de cargas dinámicas, a que colaboren en este nuevo Grupo de Trabajo.

# Salón Internacional de Maquinaria para

# OBRAS PUBLICAS Y CONSTRUCCION

19.23/02/1988 ZARAGOZA (España)



# **Sobre el dimensionamiento y la comprobación, a la luz de la fluencia, de piezas comprimidas esbeltas de hormigón armado y pretensado. Métodos simplificados y normativa española actual**

Juan Murcia  
Dr. Ingeniero de Caminos.  
Instituto de Ciencia de Materiales de Barcelona. CSIC

## **INTRODUCCION**

La fluencia del hormigón es un factor de gran importancia en el comportamiento de las estructuras de hormigón con piezas comprimidas esbeltas. Sin embargo, en la práctica, se emplean con asiduidad procedimientos que introducen esta propiedad de forma muy simplificada.

Por otro lado, en nuestro país esta situación viene además condicionada por una normativa que, en su articulado relativo a pandeo, no considera explícitamente dicho factor (7) o lo hace de una manera un tanto simplista (4), sin tener en cuenta la acusada interacción no lineal que el mismo produce cuando, como aquí, se requiere un planteamiento en segundo orden.

En este artículo, ligado en buena parte a otro (11) que figura en este mismo número de "Hormigón y Acero" y de modo más remoto a un tercero (10) publicado en el número anterior, se propone un sistema más ajustado de considerar la fluencia en dichos métodos; pero también se apunta una forma muy simple y práctica de utilización, para cálculos o tanteos rápidos, del conocido como de la deformada senoidal. En lo que se refiere al articulado de pandeo de la normativa española, se realizan una serie de comentarios relativos al problema general del aislamiento de una pieza dentro de un entramado y al planteamiento de base para los soportes aislados de hormigón armado, concluyendo, entre otras, en la conveniencia de una investigación aplicada, perfectamente abordable hoy, que sirva para la mejora global, y no sólo respecto de la fluencia, de tal articulado. Se comenta también el marcado desequilibrio existente en el tratamiento de estos aspectos entre la norma de hormigón pretensado (4) y la de hormigón armado (7), sugiriendo la revisión de ello en la primera para hacerla más acorde con la segunda.

De cualquier modo, se previene sobre la necesidad de proceder a priori siempre con cautela, y en lo posible con rigor, en todo aquello (investigaciones de base incluidas, por supuesto) que se dirija hacia la práctica, más allá de predimensionamientos o comprobaciones no definitivas, de estas estructuras donde la conjunción, acusadamente no lineal, de una serie de efectos puede llevar a grandes errores en uno u otro sentido.

## CONSIDERACIONES SOBRE LOS METODOS SIMPLIFICADOS DE ANALISIS DE PIEZAS COMPRIMIDAS ESBELTAS DE HORMIGON

El relación con el dimensionamiento y la comprobación de elementos comprimidos esbeltos de hormigón, existen una serie de métodos simplificados de análisis, cuyo punto de partida común consiste en suponer que la forma que toma la deformada, o alguna otra variable geométrica directamente relacionada con ella, es conocida a priori.

Así, el método de la columna modelo (2), para piezas simples empotradas y libres (o, lo que es igual, con excentricidades extremas iguales), que parte de que la deformada  $y(x)$  es una senoide o cosenoide pura, según donde se tome el origen; o bien el llamado de la deformada senoidal (5), que en realidad parte de la hipótesis de que la ley de excentricidades, y no la  $y(x)$ , es una senoide o cosenoide pura (por lo que más bien debería llamarse de la excentricidad senoidal).

Una vez hecha tal hipótesis, es posible conocer, mediante cálculos estrictamente geométricos, la relación existente, para la sección crítica de la pieza, entre la excentricidad  $e$  (del esfuerzo o fuerza axial  $N$ ) y la curvatura  $\gamma$ ; como el comportamiento de las secciones se suele expresar en forma de diagrama momento-curvatura ( $M - \gamma$ ) o, lo que es inmediato al conocer  $N$ , excentricidad-curvatura ( $e - \gamma$ ), si se hace esto para la misma sección crítica resulta posible, al superponer y confrontar las curvas que representan ambas relaciones, conocer su estado de equilibrio en función de la forma en que aquellas interaccionan (corte, tangencia o no contacto).

A la vista de lo expuesto es quizá interesante realizar un repaso de la forma en que, procediendo así, se cumplen las distintas condiciones del análisis (3):

- Las condiciones de compatibilidad, puramente geométricas, se introducen precisamente al suponer la deformada, o la variable de ella dependiente, como una función continua conocida y que se ajusta a las condiciones de borde, constituyendo la base para la definición de un diagrama o curva, correspondiente a la sección crítica, conocida como directriz geométrica (8) pero que también podría ser llamada “actuación”.
- Las condiciones del material (o materiales) entran en el análisis a través de la relación, diagrama o curva que representa el comportamiento mecánico-geométrico de la sección crítica; suele ser denominada directriz mecánica (8), aunque, según lo que acaba de indicarse, el calificativo no sea quizá el adecuado en sentido estricto (3), por lo que también, y como es habitual, puede llamarse simplemente “respuesta”.
- Las condiciones de equilibrio se consiguen, para la sección crítica evidentemente, cuando las dos curvas anteriores se tocan o cortan.

Así, en estos métodos, que genéricamente podrían ser llamados “actuación-respuesta”, intervienen efectivamente los tres tipos de condiciones, pero de una manera limitada, ya que su vinculación sólo se establece en un punto de la estructura, la sección crítica, no ocurriendo necesariamente así para los demás. Es un procedimiento de gran interés para comprobación y dimensionamiento (5), muy práctico por simplificar el análisis, especialmente cuan-



do éste es más complejo, como en el caso de material no lineal (9) y otros; pero, precisamente estos casos suponen una extrapolación, más allá de las situaciones en que la condición geométrica de partida es cierta: hay que recordar que su fundamento se encuentra en que el análisis instantáneo en segundo orden de la pieza simple con material lineal ofrece como resultado, entre otros, que la ley de excentricidades  $e(x)$ , tomando como origen su valor de máximo, es una cosenoide pura (11).

Por tanto, y como se verá más adelante, tal procedimiento resulta correcto para material lineal (cuya respuesta en los ejes  $e-\gamma$  es una recta de pendiente  $K/N$  que pasa por el origen). Al no existir un ajuste global de las condiciones del análisis, el problema puede aparecer cuando, como es habitual según se acaba de indicar, se extrapola ya a otras situaciones distintas (no linealidad del material, análisis diferido, etc.), donde esa propiedad geométrica no es necesariamente cierta.

De ello que, en lo que aquí nos ocupa, la cuestión estriba en saber hasta qué punto sigue siendo válida su utilización para el análisis en el tiempo, cuando se considera la fluencia del hormigón. Debe recordarse al respecto que lo normal es proceder de la misma forma, si bien modificando la respuesta al tomar un diagrama  $\sigma - \epsilon$  del hormigón derivado del original al multiplicar las deformaciones de éste por el factor  $1 + \varphi$ , siendo  $\varphi$  el coeficiente de fluencia (2, 5).

Tratando de responder a aquella cuestión, lo primero que puede decirse es que, en principio, el análisis diferido de la pieza no conduce ya en general a excentricidades con ley cosenoidal pura (11). No obstante, existen aproximaciones para considerar la fluencia que, precisamente por mantener una formulación idéntica a la instantánea (inicial en el análisis diferido), conservan aquella propiedad (11) aunque la rigidez varíe con el tiempo; pero entonces, para lograr un cierto ajuste, dicha rigidez habría de ser la instantánea dividida por el factor  $1 + \alpha \cdot \varphi$  (con  $\alpha < 1$ ) en lugar de  $1 + \varphi$ , ya que esto supone una aproximación peor (10, 11).

Por todo ello, en general, si se desea seguir utilizando este procedimiento para análisis diferido y efectuar la extrapolación a otras situaciones (no linealidad, etc.), parece lógico pensar que, como se haría al utilizar otros (11), el factor modificador del diagrama  $\sigma - \epsilon$  podría seguir siendo  $1 + \alpha \cdot \varphi$ ; dicho factor o, si se prefiere, el coeficiente  $\alpha$ , se obtiene de la resolución de una expresión trascendente, a la que se llega en la ya citada referencia 11, dentro de este mismo número de "Hormigón y Acero", y que es

$$\sqrt{1 + \alpha \cdot \varphi} \cdot \frac{r(1 + \varphi) - E}{r(1 + \alpha \cdot \varphi) - E \cdot [1 - (1 - \alpha) \cdot \varphi]} = \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{N(1 + \alpha \cdot \varphi)}{K}} \ell}{1 - \cos \sqrt{\frac{N}{K}} \ell} \cdot \frac{\text{sen} \sqrt{\frac{N}{K}} \ell}{\text{sen} \sqrt{\frac{N(1 + \alpha \cdot \varphi)}{K}} \ell}$$

lo que en la práctica conduce a la realización de un sencillo proceso iterativo (al que se hacía ya mención en la referencia 10) tanto más rápido cuanto, como es lógico, mejor sea el valor inicial de tanteo; a estos efectos, debe recordarse también (10) que, en situaciones como la ahora en estudio, el valor de  $\alpha$  se mueve normalmente entre 0,6 y 1.

No obstante, en muchos casos, para valores pequeños del término

$$\sqrt{\frac{N(1 + \alpha \cdot \varphi)}{K}} \cdot \ell$$

con relación a  $\pi$  (y, en cualquier caso, de manera que se cumpla que

$$N \cdot \ell^2 \cdot (1 + \alpha \cdot \varphi) / K \ll 6,$$

lo que normalmente se da en la práctica con facilidad para el hormigón), puede evitarse la resolución iterativa: se calcula directamente el factor  $1 + \alpha \cdot \varphi$ , aunque de forma aproximada, con una fórmula derivada de la expresión anterior, mediante desarrollo en serie de senos y cosenos, que es

$$1 + \alpha \cdot \varphi = A - \sqrt{A^2 - B}$$

en la que

$$A = \frac{6}{z^2} + \frac{E(\varphi - H)}{2(E - r)}$$

$$B = \frac{6E(2\varphi - H)}{z^2(E - r)}$$

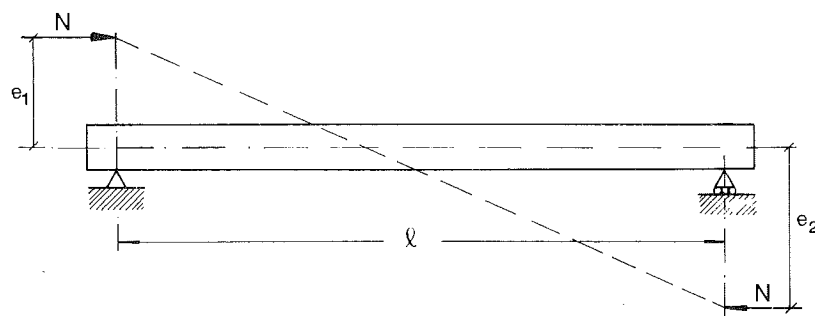
siendo  $z = \sqrt{\frac{N}{K}}$   $\ell$ , E y r, respectivamente, el módulo de deformación y la función de relajación del hormigón (10, 11) y

$$H = \left[ \varphi - \frac{E - r}{E} \cdot (1 + \varphi) \right] \cdot \frac{12 - z^2}{6 - z^2}$$

Como situación singular, no obstante, existe un conjunto de casos, cuando puede despreciarse ya el envejecimiento del hormigón e interesan valores de tipo final o cercanos (10, 11), en que  $\alpha \simeq 1$ ; por otro lado, en esas mismas condiciones, el valor de  $\varphi$  es (7) bastante constante y del orden de 0,4 por lo que puede tomarse siempre un factor de valor 1,4 aproximadamente, esto es, un módulo global equivalente (10)  $E^* \simeq 0,7.E$ .

Con todo lo visto hasta aquí, entonces, quedaría definida la adecuación del procedimiento en cuestión al análisis diferido por lo que se refiere a la *respuesta* de la sección crítica.

En lo que atañe a la antes llamada *actuación* para la sección crítica, es claro que nada cambia respecto al conocido procedimiento y sigue siendo válida la relación general excentricidad-curvatura, obtenida por cálculos puramente geométricos (5), sin que sea preciso hacer intervenir para nada otras variables, ya no estrictamente geométricas (como, por ejemplo, la fuerza axial N o la rigidez K), que entran en las expresiones de la deformada y de la excentricidad cuando se conjugan en el análisis los tres tipos de condiciones a lo largo de toda la pieza (11).



La expresión general es (5)

$$\gamma = \frac{e}{\ell^2} \cdot \left( \arccos \frac{e_2}{e} - \arccos \frac{e_1}{e} \right)^2$$

si se llama sin más e y  $\gamma$ , respectivamente, a la excentricidad y la curvatura de la sección de máximo o crítica. Supondremos, como viene siendo habitual (5, 7, 8), que  $e_2$  es la excentricidad extrema de la pieza con mayor valor absoluto.

Interesa concentrarse en los casos en que la excentricidad máxima (siempre en valor absoluto) se encuentra ya en el interior de la pieza, dado que, si no es así, la máxima será siempre  $e_2$ . En tal situación, que corresponde a la región  $e \geq e_2$ , es quizá mejor utilizar, de una vez por todas,

$$\gamma = \frac{e}{\ell^2} \cdot \left( \arccos \frac{e_2}{e} + \arccos \frac{e_1}{e} \right)^2$$

para así tomar siempre como positivos los dos términos entre paréntesis y evitar posibles confusiones: como ocurre que  $z = \cos x = \cos(-x)$ , la función  $\arccos z$  admite, dentro del rango que aquí nos interesa, los valores opuestos  $\pm x$ , por lo que debe especificarse el signo de su valor.

Si se define el parámetro  $\beta$  como  $\beta = e_1/e_2$  (con lo que  $-1 \leq \beta \leq 1$ ), se tiene

$$\gamma = \frac{e}{\ell^2} \cdot \left( \arccos \frac{e_2}{e} + \arccos \beta \cdot \frac{e_2}{e} \right)^2$$

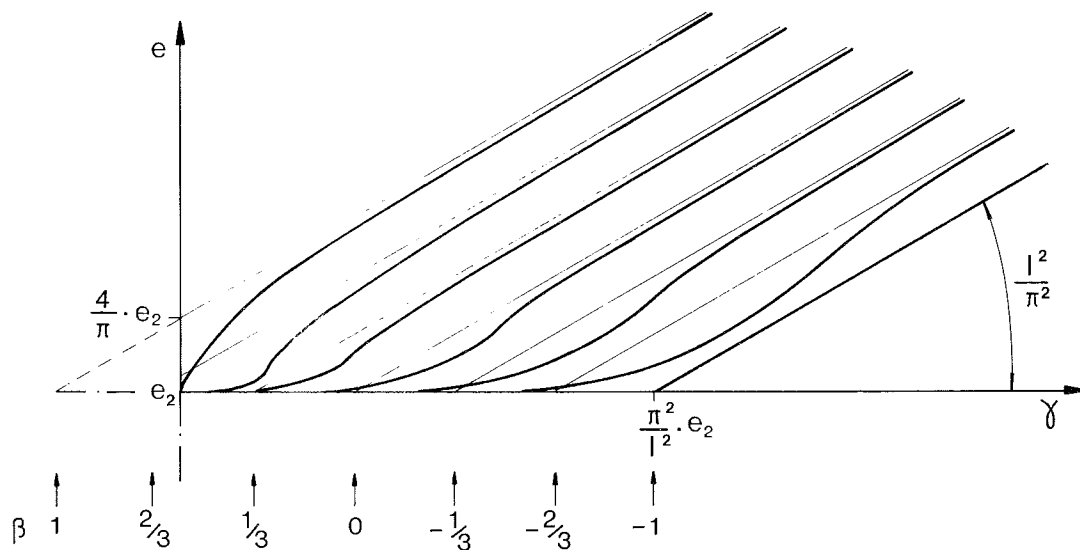
En la línea preconizada por algunos autores (8), estudiemos ahora la familia de curvas correspondiente a la expresión anterior, la cual viene representada más adelante para la zona en estudio.

De entrada, se puede comprobar la existencia de varias propiedades, expuestas por lo demás en otro lugar (5):

- Para  $\beta = 1$  la curva tiene, en su arranque ( $\gamma = 0$ ,  $e = e_2$ ), una pendiente de valor  $\ell^2/8$  y presenta toda ella curvatura hacia abajo, con lo que se encuentra por entero debajo de su asíntota.
- Para  $\beta = -1$  se obtiene una recta,  $e = \ell^2 \cdot \gamma/\pi^2$ , que pasa por el origen, la que corresponde también al caso particular  $e_1 = e_2 = 0$ .
- Todas las curvas son asíntóticas y la pendiente de las asíntotas es siempre la misma,  $\ell^2/\pi^2$ ; evidentemente, en los casos del punto anterior, curva (recta) y asíntota coinciden.

Según se avanzó con anterioridad, para un análisis instantáneo con material lineal este procedimiento proporciona resultados correctos: todas estas curvas, al ser confrontadas con la respuesta, recta por el origen de pendiente  $K/N$ , se cortan con ella y mantienen una situación de equilibrio estable decreciendo la pendiente de esta última, hasta que  $K/N = \ell^2/\pi^2$ . Así, resulta que la carga  $N$  crítica es la misma que la obtenida de forma analítica (11), esto es, la de Euler; para los casos, ya citados, en que la curva es una recta que pasa por el origen, se aprecia para dicha carga la existencia de una indeterminación, esto es, infinitas posibilidades de equilibrio o soluciones, puesto que aquella se superpone exactamente a la respuesta, lo que también coincide con los resultados analíticos (11).

Analicemos algo más esta familia de curvas, cuya representación esquemática (y no exacta, lo que es importante resaltar) se muestra en la figura adjunta. La correspondiente a  $\beta = 1$ , como se dijo ya, presenta curvatura negativa (mirando hacia abajo) y su asíntota va por encima de ella; pero ocurre también que en su punto de arranque, donde la pendiente es positiva como se vio más arriba, la curvatura es precisamente nula. Por debajo de dicho



valor de  $\beta$ , la pendiente en arranque es nula, excepto para  $\beta = -1$ , y la curvatura es ya positiva desde dicho punto, pero más arriba, y para valores cada vez mayores de  $e$  conforme desciende  $\beta$ , se anula (punto de inflexión) y cambia de signo, manteniéndose negativa hasta su valor asintótico; no obstante, la asintota permanece por encima de la curva hasta que  $\beta = 0,327 \approx 1/3$ , en que asintota y curva se cortan, precisamente en el punto de arranque. Para valores de  $\beta$  progresivamente inferiores a partir del anterior, ese punto de corte se produce para valores de  $e$  cada vez más altos hasta que, finalmente, curva y asintota se confunden cuando  $\beta = -1$  (y también  $e_1 = e_2 = 0$ ). Así, los valores extremos de  $\beta$  representan, por distintos motivos, situaciones totalmente singulares.

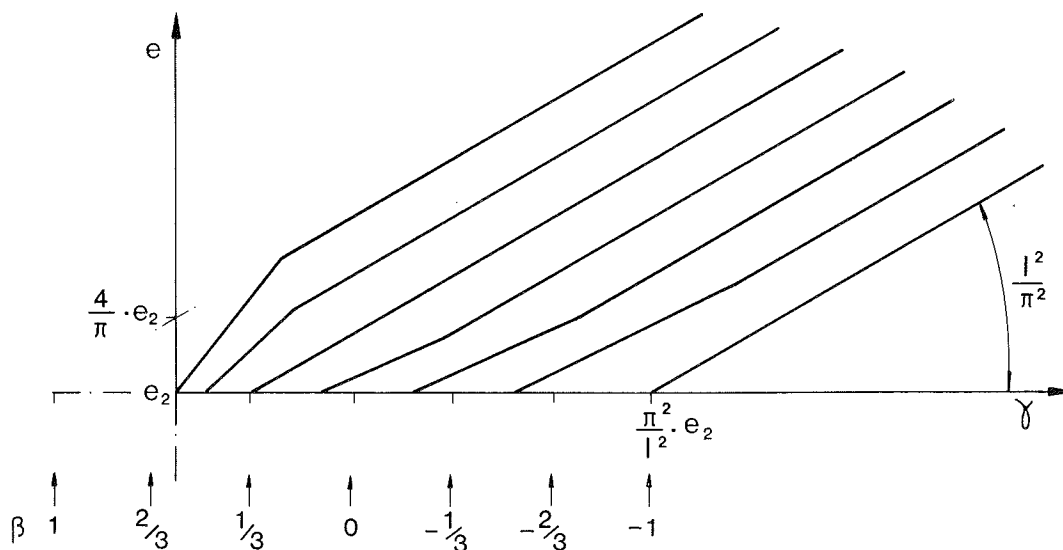
Del análisis que precede se deduce la posibilidad de simplificar las curvas, con vistas a la práctica y quedándose del lado de la seguridad (cuando se confrontan con las respuestas), mediante su aproximación por segmentos de recta, de la manera que a continuación se expone.

En principio, un criterio general para ello puede ser la sustitución de cada curva por dos segmentos de recta cercanos a ella:

1. El que corresponde a la recta que une el punto de arranque con el de inflexión.
2. La asintota,  $e = (\ell^2/\pi^2) \cdot \gamma + 2 \cdot (1 + \beta) \cdot e_2/\pi$ , a partir de su punto de corte con la recta anterior.

Para  $\beta = 1$ , como es lógico y se podría comprobar más adelante en la expresión general relativa a este criterio, el primer segmento corresponde a su tangente en el arranque, hasta que corta a la asintota.

Pero sucede que, para valores de  $\beta$  por encima de 0,327 (no, claro está, para 1), el primer segmento corta dos veces a la curva antes de acabar en la asintota, por lo que existe una zona en que va por debajo de la primera. En ese intervalo de  $\beta$  conviene, entonces, emplear como primer segmento el que corresponde a la recta tangente a la curva desde el arranque, la que también coincide, al igual que con el criterio anterior, con la tangente en el mismo para  $\beta = 1$ ; para  $\beta = 0,327$  esa tangente es la propia asintota, por lo que, con este nuevo criterio, la aproximación es esta recta y no una línea quebrada.



En conclusión, tendremos las siguientes aproximaciones (en esquema, en la figura adjunta) a las curvas:

\*  $\beta = 1$ :

$$1. \quad e = \frac{\varrho^2}{8} \cdot \gamma + e_2 \quad 2. \quad e = \frac{\varrho^2}{\pi^2} \cdot \gamma + \frac{4}{\pi} \cdot e_2$$

\*  $1 > \beta > 0,327 \simeq 1/3$ :

$$1. \quad e = \frac{\varrho^2}{D} \cdot \gamma + e_2 \cdot \left(1 - \frac{(\arcsin \beta)^2}{D}\right)$$

donde

$$D = 1,486 \left[ (\arcsin \beta)^2 + 2 \cdot (1 + \beta) (\pi - 1 - \beta) + 2 (1 + \beta) \cdot \sqrt{(\pi - 1 - \beta)^2 - (\arcsin \beta)^2} \right] \cdot \left[ (1 - \beta) + \frac{\beta - 0,327}{\sqrt{(\pi - 1 - \beta)^2 - (\arcsin \beta)^2}} \right]$$

La expresión anterior es una aproximación adecuada para valores no muy lejanos de  $\beta = 0,327$  (siendo exacta para éste), corregida a posteriori de forma que se ajuste de manera progresiva a  $\beta = 1$ . También podría usarse una simplificación de D, como interpolación lineal entre los valores 8 ( $\beta = 1$ ) y  $\pi^2$  ( $\beta = 0,327$ ).

$$2. \quad e = \frac{\varrho^2}{\pi^2} \cdot \gamma + \frac{2 \cdot (1 + \beta)}{\pi} \cdot e_2$$

\*  $\beta = 0,327 \simeq 1/3$ :

$$1 \text{ y } 2. \quad e = \frac{\varrho^2}{\pi^2} \cdot \gamma + 0,845 \cdot e_2$$

\*  $0,327 \simeq 1/3 > \beta > -1$ :

$$1. \quad e = \varrho^2 \cdot \frac{e_i - e_2}{e_i \left( \arccos \frac{e_2}{e_i} + \arccos \beta \frac{e_2}{e_i} \right)^2 - e_2 \cdot (\arccos \beta)^2} \cdot \left[ \gamma - \frac{e_2}{\varrho^2} (\arccos \beta)^2 \right] + e_2$$

donde  $e_i$  es la ordenada del punto de inflexión ( $e'' = 0$  o, lo que es más sencillo aquí,  $\gamma'' = 0$ ) que cumple la condición

$$\arccos \frac{e_2}{e_i} + \arccos \beta \frac{e_2}{e_i} = \frac{\left( \frac{1}{\left[ \left( \frac{e_i}{e_2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} + \frac{\beta}{\left[ \left( \frac{e_i}{e_2} \right)^2 - \beta^2 \right]^{1/2}} \right)^2}{\frac{1}{\left[ \left( \frac{e_i}{e_2} \right)^2 - 1 \right]^{3/2}} + \frac{\beta^3}{\left[ \left( \frac{e_i}{e_2} \right)^2 - \beta^2 \right]^{3/2}}}$$

de la cual se obtiene mediante una sencilla iteración

$$2. \quad e = \frac{\varrho^2}{\pi^2} \cdot \gamma + \frac{2(1 + \beta)}{\pi} \cdot e_2$$

Es interesante destacar el papel que puede jugar el punto del codo o quiebro en este último intervalo de  $\beta$ , ya que en ciertos casos puede determinar, por lo que afecta a la llamada actuación, situaciones de inestabilidad semejantes a las que, por parte de la respuesta, configuran ciertos puntos similares (8).

Evidentemente, y dadas las circunstancias comentadas al principio para los casos en que se rebasa ya el análisis instantáneo con material lineal, la anterior simplificación debería limitarse en general a predimensionamientos y comprobaciones no definitivas.

## COMENTARIOS SOBRE EL TRATAMIENTO DE LAS PIEZAS COMPRIMIDAS ESBELTAS DE HORMIGÓN EN LA ACTUAL NORMATIVA ESPAÑOLA

En lo que sigue vamos a efectuar unas reflexiones sobre diversos puntos relativos al dimensionamiento y a la comprobación de piezas simples comprimidas de hormigón, ciñéndonos a la normativa española (4, 7) e incidiendo en principio sobre los aspectos más relacionados con la fluencia.

Se ha de adelantar, por descontado, las importantes mejoras introducidas en los últimos tiempos para el hormigón armado, por lo que supone el paso de la EH-73 a la EH-80 (más tarde EH-82), en el articulado referente a pandeo (6).

De modo previo, se ha de hacer notar la subsistencia de un problema general importante, al menos en el nivel que, dentro de la práctica, representa la normativa y que por ello también afecta a la española (7): no parece bien resuelto todavía el, por decirlo de algún modo, aislamiento de una pieza simple dentro de una estructura de hormigón de tipo reticular o

entramado, para ser tratada de forma independiente; ello es de gran interés en la práctica, pero siempre que se tenga en cuenta de algún modo el hecho de que la pieza no está nunca aislada.

Así, y refiriéndonos ya al planteamiento concreto de la EH-82 (7), los ábacos de Jackson y Moreland, que se utilizan en ella como base del citado aislamiento, responden a un criterio eminentemente geométrico, distancia entre puntos consecutivos de momento nulo en el entramado, con las siguientes particularidades:

- de entrada, tal criterio se deriva de un análisis en primer orden que no tiene en cuenta la modificación que sufre la deformada, en segundo orden, al progresar las fuerzas axiales de las piezas, lo que afecta entre otras cosas a las referidas distancias entre puntos de momento nulo.
- por otra parte, dicho análisis se establece sobre un material elástico lineal, lo que no se corresponde bien con la realidad del hormigón estructural, especialmente del armado;

las cuales, entre otras de menor importancia, representan objeciones de fondo. De hecho, con la primera se viene a cuestionar el concepto de longitud de pandeo, que no puede suponerse fija.

Pero, además y ligado en parte a lo anterior, ocurre que dichos ábacos sirven para aislar una pieza ideal, sin tener presente que en el interior de la misma, en la mayoría de los casos, existe una interacción real con el resto de la estructura, que continuamente restringe el comportamiento de la pieza.

En relación también con el mismo problema, es claro que, se aisle como se haga, queda la duda de hasta qué punto puede detectarse una situación de inestabilidad global de la estructura al proceder así; es evidente que sí se puede detectar la inestabilidad local, así como la global que sea debida a la conjunción de varias locales (por ejemplo, las de todos los soportes de una misma planta), pero no va más allá.

Pasando ya, dentro de la misma norma, a comentar la pieza simple, esto es, el tratamiento del articulado de pandeo para soportes aislados (7), lo primero que quizá llama la atención, al menos bajo el enfoque que aquí subyace, es que un fenómeno como la fluencia del hormigón, tan acusadamente interactivo con los efectos de segundo orden (11), no figure explícitamente por ninguna parte.

Se sabe, no obstante, que la fórmula base de dimensionamiento y comprobación de estos soportes cubre ya normalmente los efectos de la fluencia (6, 7). Ahora bien, tratándose de unos efectos posiblemente importantes que además, en líneas generales, son desfavorables, ¿no valdría la pena tratar de pasar ya a un tratamiento, por muy conservador que fuera, en que la fluencia figurase de manera explícita?

Al razonamiento anterior se une otra consideración: la mencionada fórmula base para soportes aislados, con independencia de que no incluya la fluencia de forma explícita, es el resultado de una serie de estudios experimentales y teóricos (1) que se remontan ya prácticamente a hace 25 años. En el transcurso de ese tiempo se ha progresado mucho en la materia, existiendo en la actualidad información acumulada disponible, de un lado, y medios de análisis muy ajustados, de otro, para abordar el problema sin excesiva complicación ni dar un salto en el vacío.

Si esto se llevase a cabo, sería preciso, entre otras, tener presente una cosa muy importante: la exactitud que proporcionan las simplificaciones que se hicieran a priori en el análisis.

sis que sirviese de base para ello. Existe una gran no linealidad progresiva entre los efectos de la fluencia y los que se derivan del equilibrio en segundo orden, incluso con material lineal (11), por lo que esta situación se ve aún más exagerada a causa de la no linealidad del hormigón (incluyendo en ella, en su caso, la fisuración) y del acero; por todo ello, los errores que se pueden ir acumulando al ir introduciendo simplificaciones en el análisis, sobre todo para cargas fuertes (y en ese rango estarán normalmente las que produzcan los estados límites últimos ligados a esto), pueden ser muy considerables; y, de cualquier modo, difíciles de acotar. En caso de simplificar por el lado de la seguridad, de ser ello posible siempre, es muy probable la obtención de resultados excesivamente conservadores, siendo inadmisibles, como es lógico, en el caso contrario; como no siempre podrá conocerse esa tendencia de cara a la seguridad, quedará entonces la incertidumbre sobre la cuantía, posiblemente importante, y el sentido de los errores introducidos.

Se impone así un análisis de base muy ajustado, con un tratamiento riguroso de los distintos factores implicados (la mayoría de ellos ya mencionados más arriba), *para efectuar a posteriori las posibles simplificaciones* necesarias de cara a la práctica, cuyos errores sí pueden entonces ser acotados más fácilmente. Tal análisis es hoy, para la pieza simple de hormigón armado (o pretensado) con excentricidades extremas cualesquiera, perfectamente factible y, por supuesto, habría de ser sancionado por experimentación, tanto la ya disponible en las diversas fuentes de información como quizá alguna de tipo "ad hoc" complementaria; en definitiva, se plantearía en principio en un nivel similar al de la vigente EH-82 pero estudiando a fondo la influencia, además de la esbeltez y los valores de las de excentricidades extremas, de otros parámetros (cuantía e incluso distribución de armaduras, calidad de los materiales, etc.). Todo ello constituiría así una investigación aplicada, muy dirigida hacia unos objetivos concretos, con un seguro y considerable interés económico en sus resultados, y fundamentada sobre unas bases prácticamente resueltas.

Subsiste así todavía el problema del aislamiento de la pieza, de gran importancia práctica (como es evidente y fue ya indicado); afortunadamente, existe investigación en curso sobre esto en nuestro país y probablemente proseguirá al menos a medio plazo. Los objetivos y el interés son también aquí muy claros pero, a diferencia de la investigación mencionada en el párrafo anterior, existen quizá en ésta ciertos aspectos básicos que deben ser resueltos dentro de ella, sobre todo teniendo en cuenta que parece obligado respetar las mismas consideraciones genéricas anteriores, en lo que atañe a las posibles simplificaciones apriorísticas del análisis de base.

Por lo que se refiere a la EP-80 (4), relativa al hormigón pretensado, parece deseable por coherencia que el articulado relativo a pandeo tuviera una forma más acorde conceptualmente con el de la EH-82, si bien adaptándose como es lógico a sus tipologías más frecuentes.

En este sentido, se podría quizá comenzar precisamente por indicar de qué forma influye el propio pretensado en el comportamiento en segundo orden de una pieza (esto es, como efecto activo, en la medida de la libertad de movimiento de los tendones respecto del hormigón y, como efecto pasivo o en la respuesta, al igual que cualquier compresión e incorporando a la vez una armadura adherente, en su caso, a las secciones); o, como mínimo, las consecuencias prácticas de ello. Algo tal vez elemental pero que quizá no estuviera de más incluir en esta norma, al menos por ahora, como sucede con otras cuestiones conceptuales sencillas y bien conocidas.

Por lo demás, y dada la relativa juventud de la EP-80, al ser el articulado en cuestión de contenido escueto y de planteamiento simple (simplista incluso, en lo que toca a los aspectos diferidos, aún si se aplicase al ámbito del equilibrio en primer orden), es verosímil que con todo hubiera de procederse a la total revisión del mismo.



## CONCLUSION

Este artículo se ha enfocado principalmente hacia la problemática práctica relacionada con la consideración de la fluencia en las estructuras de hormigón con piezas esbeltas comprimidas. Pero esta propiedad, factor importante en tales estructuras, es difícil de aislar de otros aspectos también importantes en la práctica, por lo que el alcance del artículo va más allá del primero.

Así, si de entrada se ha indicado una forma, más ajustada que la habitual, para introducir la fluencia en los métodos simplificados de tipo actuación-respuesta, utilizados normalmente para dimensionamiento y comprobación, también se ha propuesto una simplificación práctica para la utilización, en cálculos o tanteos rápidos, del conocido como de la deformada senoidal, al sustituir la curva que representa la actuación por dos segmentos de recta.

En lo que se refiere a la normativa, se han realizado una serie de reflexiones relativas al problema general del aislamiento de una pieza dentro del entramado en las estructuras reticulares, que, al menos a este nivel, no parece bien resuelto; así, para la EH-82 en particular, se ha efectuado una crítica razonada sobre lo que supone la utilización de los ábacos de Jackson y Moreland. Se estima necesaria una reconsideración de este problema, y en general del concepto de longitud de pandeo, sobre bases rigurosas, alentando a las investigaciones en profundidad sobre esta importante problemática, que afortunadamente se han emprendido no hace mucho en nuestro país.

Dentro de esta misma norma, se considera totalmente superada, para el estado actual del conocimiento y de las técnicas de análisis en la materia, la fórmula básica para los soportes aislados de hormigón armado (y no sólo porque no incluya explícitamente la fluencia), concluyendo en la conveniencia de una investigación aplicada, hoy perfectamente abordable sobre bases resueltas, que sirva para la mejora global del articulado correspondiente, incluyendo por descontado al hormigón pretensado.

Se constata la existencia de un marcado desnivel de la norma de hormigón pretensado EP-80, con relación a la de hormigón armado, en el articulado de pandeo y se anima a su total reconsideración.

De cualquier modo, se previene sobre la necesidad de proceder siempre con cautela, y en lo posible con rigor, evitando simplificaciones a priori de alcance no bien acotado, en todo aquello que se dirija hacia la práctica (fuera de tanteos o cálculos no definitivos, en general) de estas estructuras, donde la conjunción, fuertemente no lineal, de una serie de efectos puede conducir a grandes errores en uno u otro sentido; en esto no se excluyen, por supuesto, las investigaciones de base (como, por ejemplo, las acabadas de citar).

Las reflexiones anteriores, y otras posibles en torno a la conveniencia de nuevas o más profundas investigaciones sobre estos problemas, cobran posiblemente una particular actualidad a la vista de la inminente puesta en marcha del primer Plan Nacional de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico, pudiendo en su caso inscribirse dentro de los Programas Sectoriales relacionados con la construcción en hormigón, especialmente en el campo de la edificación.

## REFERENCIAS

1. VAN LEEUWEN, I.J. & VAN RIEL, A.C. Ultimate-Load Design of Axially and Eccentrically Compressed Structural Members. Heron n° 2. Delft, 1963.

2. C.E.B. — F.I.P. CEB-FIP Manual of Buckling and Instability. Bulletin d'information n° 123, Comité Euro-International du Béton. The Construction Press. Lancaster, 1978.
3. MURCIA, J. Reflexiones sobre las bases del análisis de estructuras. Revista de Obras Públicas n° 3178. Madrid, 1980.
4. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. EP-80: Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado. MOPU. Madrid, 1980.
5. ARENAS, J.J. Cálculo de soportes de hormigón armado en teoría de segundo orden. Editores Técnicos Asociados. Barcelona, 1980.
6. MORAN, F. y CORRES, H. El pandeo en la Instrucción EH-80. Informes de la Construcción n° 331. Madrid, 1981.
7. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. EH-82: Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. MOPU. Madrid, 1982.
8. CORRES, H. y MORAN, F. Dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado. 1ª Parte. Método de las curvaturas de referencia. Hormigón y Acero n° 147. Madrid, 1983.
9. CAROL, I. y MURCIA, J. Análisis paso a paso en el tiempo de estructuras reticulares planas de hormigón armado. Hormigón y Acero n° 160. Madrid, 1986.
10. MURCIA, J. Módulo de deformación global equivalente del hormigón. Aplicación al análisis de los efectos de la fluencia en el tiempo. Hormigón y Acero n° 164. Madrid, 1987.
11. MURCIA, J. Análisis diferido en segundo orden de piezas comprimidas esbeltas de hormigón. Planteamiento en viscoelasticidad lineal, aproximaciones para considerar la fluencia y conclusiones de cara a la práctica. Hormigón y Acero n° 165. Madrid, 1987.

## RESUMEN

La fluencia es un factor muy importante en las estructuras de hormigón con elementos comprimidos esbeltos, aunque es frecuente que, para su dimensionamiento y comprobación, se empleen al respecto, tanto en métodos como en normativas, simplificaciones excesivas.

En este artículo se propone una forma más ajustada de considerar la fluencia en dichos métodos, así como una simplificación, para cálculos rápidos, del dimensionamiento y comprobación de piezas simples. Se analiza el problema general, aún subsistente, del aislamiento de una pieza en un entramado, de cara al articulado de pandeo de la norma EH-82 (hormigón armado) y, dentro del mismo, se destaca la perfectibilidad, no sólo por la fluencia, de la fórmula base para soportes aislados, cosa hoy factible sin dificultad; por ello, se sugiere emprender y proseguir, en estas cuestiones, investigaciones aplicadas hacia la normativa. Por fin, se constata el gran desnivel que hay en esto entre la EH-82 y la EP-80 (hormigón pretensado) y la conveniencia de subsanarlo.

En definitiva, se previene sobre las simplificaciones a priori y la necesidad de proceder siempre con cautela, y en lo posible con rigor, en todo lo que se oriente a la práctica de estas estructuras, investigaciones de base incluidas, donde la conjunción fuertemente no lineal de varios efectos hace que pueda llegarse a grandes errores en uno u otro sentido.

## RÉSUMÉ

Le fluage est un facteur important aux structures en béton avec des éléments comprimés élancés, bien que normalement on emploie, à la pratique du dimensionnement et de la vérification, et même à la normative, des méthodes très simplifiées pour en tenir compte.

Dans cet article, une voie plus précise pour introduire le fluage dans ces méthodes, ainsi qu'une simplification du dimensionnement et la vérification des éléments isolés pour des

calculs rapides, sont proposés; On étudie aussi le problème general de l'usolément d'une pièce dans une ossature, envisagé à la norme espagnole de béton armé EH-82, et on souligne la possibilité d'améliorer sans difficulté sa formule de base pour les poteaux simples; en conséquence, on encourage à entreprendre et continuer des recherches appliquées vers la normative dans ces problèmes. On commente aussi le déséquilibre existant dans ces matières entre la EH-82 et celle de béton précontraint EP-80.

Enfin, on prévient sur les simplifications a priori et la nécessité de procéder toujours avec précaution, et si possible avec rigueur, à tout ce qu'on adresse vers la pratique de ces structures, même les recherches de base, dans lesquelles la conjonction fortement non linéaire d'une série d'effets origine la possibilité d'arriver à des erreurs considérables.

## SUMMARY

Creep is a very important factor in concrete structures having compressed slender members, although very simplified approaches are often used for designing and checking in normal methods and codes of practice.

In this paper, an appropriate way to consider creep in these methods and also a simplification of simple supports design and check, for rapid calculations, are presented. The general problem of properly isolating a member from a frame, subsisting into the Spanish reinforced concrete code (EH-82), is revised and, for the same part of this code, comments on the basic formula for simple supports, that appears to be deeply improved nowadays without any difficulty, are made. So, applied research faced to this code topics is suggested to be undertaken or gone on. Finally, the big level difference, dealing with this matter, between both the EH-82 code and the Spanish prestressed concrete one (EP-80) is underlined.

In conclusion, caution is always needed, and rigorous approaches if possible recommended, when making a priori simplifications in everything, basic research included, leading to these structures practice, where the highly nonlinear conjunction of a different effects set makes possible big errors in practical results.

## NUEVA PUBLICACION DEL C.S.I.C.

**Es inminente la aparición del libro "FUNDAMENTOS PARA EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO", cuyo autor es el Prof. Juan Murcia**

Se trata de un libro de carácter básico y orientación formativa, que recoge una visión de síntesis de una línea de investigación y de docencia (de postgrado, fundamentalmente) sobre análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado, basada en un planteamiento o enfoque teórico desarrollado por el autor desde su tesis doctoral (1972).

Comienza su primera parte por una revisión de las bases conceptuales del análisis estructural en general, para estructuras lineales o de barras, donde entre otros, se enmarcan aspectos tales como las acciones geométricas, particularmente las de tipo deformación, y el pretensado, que se desarrollan después. Así y en relación con ellos, por un lado se estudia la posibilidad de tratar con deformaciones elementales, lo que lleva a la generalización del concepto de línea de influencia para todas las acciones y efectos; y, por otro, se estudian las propiedades del pretensado, y sus consecuencias, en el análisis estructural (incluyendo el de segundo orden), de una manera general aunque orientada ya a las técnicas normales en hormigón pretensado.

En la segunda parte se entra ya de lleno en el desarrollo de los aspectos fundamentales del análisis de las estructuras de hormigón armado y pretensado, procediéndose de una manera progresiva: características de los materiales, particularmente de la fluencia del hormigón dentro de la teoría de la viscoelasticidad lineal; análisis, tanto instantáneo como diferido, de las secciones; análisis de la estructura (diferido lineal, instantáneo no lineal y diferido no lineal) en primer orden; análisis de la estructura (instantáneo y diferido, ambos con material lineal y no lineal) en segundo orden.

Se eluden, en general, descripciones o desarrollos que se encuentran normalmente en la literatura sobre la materia. Como importante complemento para concretar lo abstracto, se incluyen bastantes ejemplos, también valiosos por sí mismos en muchos casos, bien por las pautas para abordar ciertas situaciones en la práctica o por los propios resultados, unas y otros de interés, que ofrecen.

El libro se dirige principalmente a los profesionales del proyecto y la construcción en hormigón (preocupados quizá por recapitular parte de sus conocimientos básicos), a investigadores y profesores (a quienes pueda interesar algún aspecto de su planteamiento y desarrollos) y a estudiantes universitarios (de los últimos cursos y de postgrado, dentro del área Estructuras-Construcción, en las carreras superiores y técnicas de Arquitectura e Ingeniería).

**Título: FUNDAMENTOS PARA EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO.**

**Autor: Juan Murcia Vela. Profesor de Investigación del CSIC (I. de Ciencia de Materiales de Barcelona) y Catedrático de Hormigón de la UPC (E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona) en excedencia.**

**Editor: Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC).**

**Distribución y venta: Servicio de Publicaciones del CSIC y sus distribuidores habituales. Librerías Medinaceli (Madrid) y Egipcíaques (Barcelona), Centre d'Informació i Documentació Acadèmica (Palma de Mallorca) y librerías en general.**

**Páginas: 300. Precio de venta: 4.500 pesetas.**

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

*(Continuación de Int. Portada)*

- HUARTE Y CIA, S.A. Departamento Técnico.— Profesor Waksman, 14. 28036 Madrid.
- IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.— Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.— Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).— Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
- IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.— Plaza Gala Placidia, 5-7. 08006 Barcelona.
- INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.— Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
- INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPSA).— General Díaz Porlier, 49-51. 28001 Madrid.
- INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).— Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
- INGENIERO JEFE DE LA SECCION DE PUENTES Y ESTRUCTURAS. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Dirección General de Carreteras.— Pº de la Castellana, 67. 28071 Madrid.
- INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES.— Velázquez, 11 - 3.º izda. 28001 Madrid.
- INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).— Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
- INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA). Biblioteca.— Orense, 70. 28020 Madrid.
- JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.— Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
- LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- MECANOGUMBA, S.A.— Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
- NUEVA MONTAÑA QUIJANO, S.A.— Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
- OBRAS Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES, S.A. (OCISA).— Princesa, 3 - 7º. 28008 Madrid.
- PACADAR, S.A.— Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
- PRENSOLAND, S.A.— Calle Industria, s/n. 08529 Sant Marti de Centelles (Barcelona).
- PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.— Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
- SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.— Avda. del Triunfo, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
- SIKA, S.A.— Carretera Madrid-Irún, Km. 14,500. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
- SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA BBR (S.A.E. BBR).— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
- SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SECEGSA).— Estébanez Calderón, 3 - 1º A. 28020 Madrid.
- TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).— Velázquez, 105. 28006 Madrid.
- TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.— Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
- TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).— Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente, su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.



**asociación técnica  
española del pretensado**