hormigón y ACERO

nº 172

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)
APARTADO 19.002 -- 28080 MADRID

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de **"Miembro Protector"**, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de **"Miembros Protectores"** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).— P° de la Habana, 14. 28036 Madrid.
AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.— Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.
AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMEN" .— Velázquez, 23. 28001 Madrid.
ALCAL.— Independencia, 4 - 4°. 24001 León.
ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).— Orense, 10. 28020 Madrid.
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.— Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.
BIGUETES, S.L.— Partida Altabix, s/n. 03000 Elche (Alicante).
CAMARA, S.A.— Apartado 180. 36080 Pontevedra.
CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.— Grijalba, 9. 28006 Madrid.
CEMENTOS MOLINS, S.A.— C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Vicenç dels Horts (Barcelona).
CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX). Gabinete de Información y Documentación.— Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A., C.T.T., S.A.— Aribau, 185. 08021 Barcelona.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Almagro, 42. 28010 Madrid.
COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.— Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.— Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.— Barquillo, 12. 28004 Madrid.
CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.— Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
CONSULTECO, S.L.— Pintor Lorenzo Casanova, 26. 03003 Alicante.
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.— Ayala, 42. 28001 Madrid.
DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.— Orense, 81. 28020 Madrid.
EMESA-TREFILERIA, S.A.— Apartado 451. 15080 La Coruña.
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento Obras Especiales.— Padilla, 46. 28006 Madrid.
ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.— Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.— Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
ESTEYCO, S.A.— Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.
ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).— Arapiles, 14. 28015 Madrid.
EUROCONSULT, S.A.— Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).
FERROVIAL, S.A.— Lagasca, 88. 28001 Madrid.
FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).— Avda. General Perón, 36. 28020 Madrid.
FREYSSINET, S.A.— General Perón, 24. 28020 Madrid.
GRACE, S.A.— Apartado 523. 08080 Barcelona.
HASA. Servicios Generales.— General Perón, 40 - C. 28020 Madrid.
HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.— Almogávares, 11 - 17. 08018 Barcelona.
HORMIGONES GERONA, S.A.— Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.— Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.

(Continúa en el int. de contraportada)

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO
DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

COMITE DE REDACCION

Director:
PIÑEIRO, Rafael

Vocales:
BARREDO, Carlos
JODAR, Juan
JULIA, Manuel
LLOMBART, José Antonio
ROMERO, Rafael
SANCHEZ-GALVEZ, Vicente

Censores:
ALCALA, Juan Luis
CUVILLO, Ramón del
ELICES, Manuel
GONZALEZ VALLE, Enrique
MANTEROLA, Javier
MORAN, Francisco
MORENO TORRES, Juan
MURCIA, Juan
POZO VINDEL, Florencio J. del
SIEGRIST, Carlos

hormigón y acero

n.172

3er trimestre 1989

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales)	6.000,– ptas.	45,– dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas)	15.000,– ptas.	100,– dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	30.000,– ptas.	200,– dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - 28080 MADRID - ☎ 202 04 40

Depósito Legal: M-853-1958
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID
ISSN: 0439-5689

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

hormigón y acero n. 172

índice

Págs.

457-0-135 **Sobre la convenicncia de considerar la acción térmica ambiental en el dimensionamiento de estructuras de hormigón frente a estados límites últimos** ..... 9 a 19
Sur la convenance de considérer l'action thérmique environnmentale dans le projet des structures en béton armé et en béton précontraint.
On the design of concrete structures under environmental thermal actions.
A.R. Marí y E. Mirambell.

457-0-136 **Cálculo de estructuras espacialmente periódicas. Aplicación a tableros de puente** ..... 21 a 40
Calcul des structures espaciallement périodiques. Application aux tabieaux des ponts.
Analysis of spatially periodic structures. Application to bridge deck analysis.
A. Samartín.

457-0-137 **Estructuras traslacionales en hormigón armado. Deformaciones de segundo orden** ..... 41 a 57
Structures traslationaux en béton armé. Deformations de deuxième ordre.
Umbraced structures in reinforced concrete. Second order deformations.
R. Bernárdez.

457-0-138 **Formulación global para el análisis de estructuras de hormigón pretensado con tendones adherentes y no adherentes** ..... 59 a 71
Formulation globale pour le calcul des structures en béton précontraint avec armatures adhérentes et non adhérentes.
Overall formulation for the analysis of prestressed concrete structures with bonded and unbonded tendons.
J. Murcia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Págs.

457-5-19 **El cálculo por resistencia a la fatiga en la nueva Norma Cubana** ..... 73 a 76
Le calcul de la résistance à la fatigue, dans le nouveau Code Cubaine.
The calculation of the fatigue strength, according the new Cuban Code.
J. Bellido.

457-5-20 **El cálculo por resistencia a la fatiga en secciones de hormigón armado y pretensado** ..... 77 a 82
Le calcul de la résistance à la fatigue des éléments de béton armé et béton précontraint.
The calculation of the fatigue strenght of the reinforced and prestressed concrete sections.
J. Bellido.

457-8-137 **Diagnóstico y evaluación de construcciones de hormigón dañadas por el fuego** ..... 83 a 98
Diagnose et évaluation des constructions en béton armé endommagées par l'incendie.
Diagnosis and evaluation of reinforced concrete construction submited to fire damage.
A. Delibes.

457-8-138 **Optimización de sistemas de anclaje para ensayo de fatiga de armaduras activas pretensadas (alambres y cordones)** ..... 99 a 104
Optimization du système d'ancrage pour les essais de fatigue des armatures de précontrainte (fils et torons).
Optimization of anchorage system for the fatigue testing procedure of steel wires and strands for the prestressing of concrete.
J.M. Varona Ruiz; F. Gutiérrez-Solana Salcedo, y J.J. González Martínez.

457-8-139 **Estudio experimental de la influencia de la ejecución en la resistencia a rasante de piezas en flexión** ..... 105 a 123
Etude expérimental de l'influence de l'exécution sur la résistance à l'effort tangent de glissement des pièces composées.
Experimental study on the influence of execution on the resistance to shear at the interface in composite concrete flexural members.
E. González Valle.

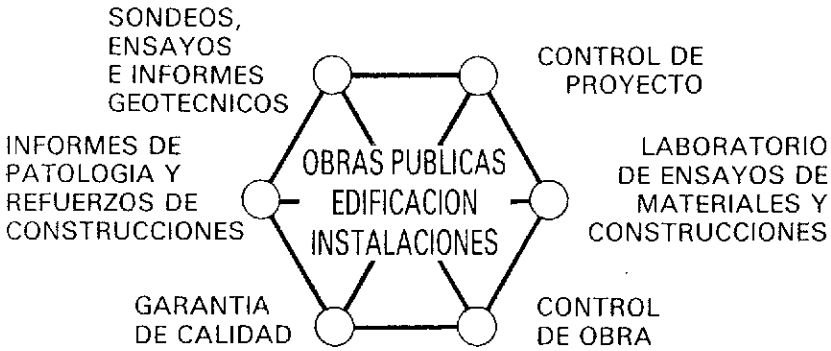
457-9-32 **Un modelo para el análisis de la transferencia tangencial de esfuerzos en vigas de hormigón armado reforzadas mediante bandas de acero encoladas** ..... 125 a 134
Un modèle pour l'analyse de la transférence tangentielle d'efforts dans poutres en béton armé renforcées au moyen de bandes d'acier collées.
A model for the analysis of transverse load transfer in reinforced concrete beams strengthened by means of glued steel plates.
A. del Río y J. Ortiz.

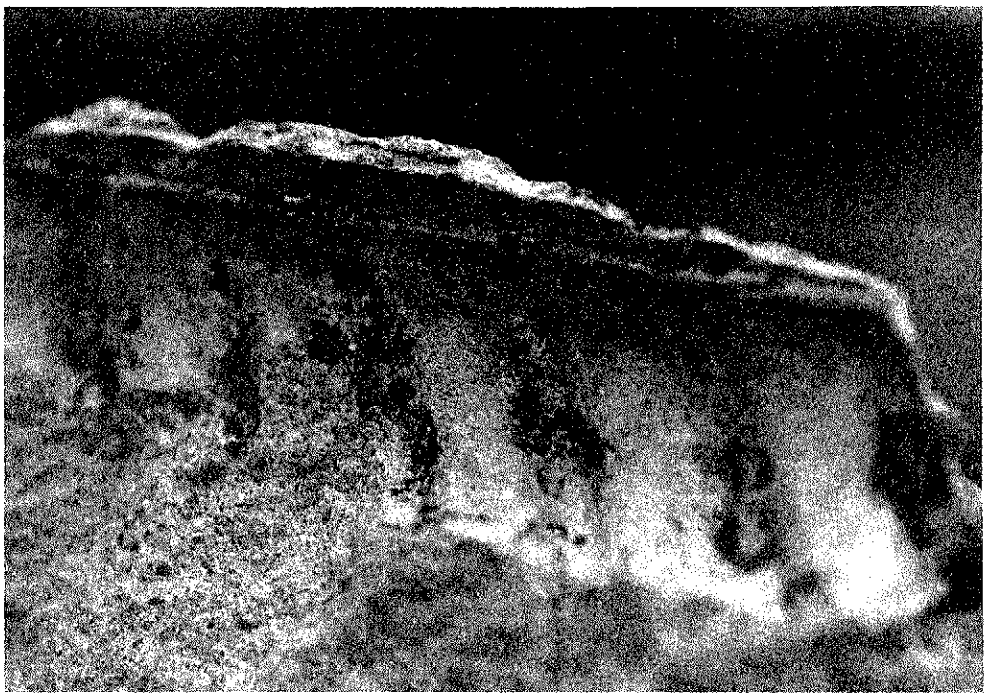
591-9-45 **Cuarenta años de la ATEP** ..... 135 a 147
Quarente ans de l'ATEP.
ATEP's forty years.
A. Páez.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

INTEMAC

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES





ENSAYOS SOBRE LA INFLUENCIA DE LA OXIDACION Y MANCHAS DE MORTERO EN LA ADHERENCIA DE BARRAS CORRUGADAS

MADRID: Oficina: Monte Esquinza, 30, 4.º D - Teléfs.: (91) 410 51 58 - 62 -66 - Télex: 49987 INTEM E - Fax: 410 25 80 - 28010 MADRID
MADRID: Laboratorio: Carretera de Loeches, 7 - Teléfs.: (91) 675 31 00 - 04 - 08 - 28850 TORREJON DE ARDOZ (Madrid)
BARCELONA: Oficina y Laboratorio: Avda. de la Riera, 10, Nave 2, Pol. Ind. Tres Santos - Teléf.: (93) 372 83 00 - Fax: 473 03 09
08960 SANT JUST DESVERN (Barcelona)

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

ESPAÑA

ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).
ASOCIACIO ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.—Barcelona.
ASOCIACION DE LABORATORIOS HOMOLOGADOS DE LA COMUNIDAD VALENciana.— Valencia.
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.— Barcelona.
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.— Oviedo.
CEYD TECNICA, S.A.— Oviedo
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT. S.A.".— La Coruña.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.— Málaga.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.— La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.— La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Murcia.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.— Tarragona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.— Palma de Mallorca.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.
CONTROLEX.— Alicante.
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.
DITECO, S.L.—Valencia.
ENAGA, S.A.— Pozuelo de Alarcón (Madrid).
ESCOLA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. Universidad Politécnica de Barcelona.— Tarrasa (Barcelona).
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. Biblioteca.— San Sebastián.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.— Sevilla.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Biblioteca.—Córdoba.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.— Castro de Elviña (La Coruña).
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.— León.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.— Burgos.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.— Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.—Manresa (Barcelona).
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.
EXCELENTISIMO AYUNTAMIENTO DE GRANADA. Area de Obras Públicas e Infraestructura.—Granada.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.
FORJADOS DOL.— Esquivias (Toledo).
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.— Madrid.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

GIJON E HIJOS, S.A.— Motril (Granada).
GIRALDEZ OCAÑA CONTROL, S.L.— Chapela - Vigo (Pontevedra).
HORMADISA, S.L.— Puentecesures - Cordeiro (Pontevedra).
HORMIGONES GERONA, S.A.— Gerona.
INBADELCA, S.A.— Baracaldo (Vizcaya).
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).
INGENIERIA Y ECONOMIA DEL TRANSPORTE, S.A.— Centro de Documentación.— Madrid.
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.— Madrid.
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.
J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.— Consejería de Fomento.— Valladolid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Servicio de Obras Públicas.—Avila.
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.
LABORATORIO DE LA EDIFICACION.— Consejería de Obras Públicas.— Las Palmas de Gran Canaria.
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE INGÈNIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.
LIBRERIA RUBIÑOS.—Madrid.
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION GENERAL DE INFRAESTRUCTURA.— Madrid.
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO.—DIRECCION GENERAL PARA LA VIVIENDA Y ARQUITECTURA, SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA BASICA Y TECNOLOGICA.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.
POSTENSA, S.A.—Bilbao.
PRAINSA.—Barcelona.
PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.
PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.
RODIO. CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.— Madrid.
RUBIERA, S.A.— León.
SERINCO, S.A.— Madrid.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.— Barcelona.
SESTRA, S.A.L.— Andoain (Guipúzcoa).
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.— Madrid.
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.— Barcelona.
SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.
TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.—Madrid.
TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Cantabria).
TELEFONICA.—Departamento Inmobiliario.—Madrid.
TERRATEST, S.A.— Madrid.
TEXSA, S.A.— Barcelona.
TIGNUS, S.A.— Valencia.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).— Madrid.
UNIVERSIDAD CASTILLA-LA MANCHA.— Albacete.
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. Biblioteca Universitaria.— Santander.
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.— Valencia.
VIGUETAS MUBEMI.— Torrente (Valencia).
VISANFER, S.A.— Totana (Murcia).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

EXTRANJERO

ASSOCIAÇAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de Angola).
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU. Biblioteca Central.—Lima (Perú).
SARET P.P.B. Cadre Technique.— Le Pontet (Francia).
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

* * *

AVISO IMPORTANTE

DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Normas que deben cumplir los artículos que se envien para su publicación en "Hormigón y Acero"

1. CONDICIONES GENERALES

Los originales de los artículos que se desee publicar en "Hormigón y Acero", se enviarán a la Secretaría de la ATEP. Deberán cumplir rigurosamente las normas que a continuación se especifican. En caso contrario, serán devueltos a sus Autores para su oportuna rectificación.

Los que cumplan los requisitos exigidos pasarán al Comité de Redacción de la Revista el cual, previo informe y evaluación de su calidad por el correspondiente Cuerpo de Censores, decidirá si procede o no su publicación, sugiriendo eventualmente al Autor los cambios que, en su opinión, deben efectuarse para su final publicación en "Hormigón y Acero". Toda correspondencia en este sentido se mantendrá directamente con el Autor o primero de los Autores que figuren en el Artículo.

Los originales que por cualquier causa no fueran aceptados serán devueltos al Autor.

2. PRESENTACION DE ORIGINALES

Los originales se presentarán mecanografiados a doble espacio, por una sola cara, en hojas tamaño UNE A4. De cada artículo se enviará original y dos copias.

2.1. Título

El título, *en español, francés e inglés* deberá ser breve y explícito, reflejando claramente el contenido del artículo. A continuación se hará constar nombre y apellidos del Autor o Autores, titulación profesional y, si procede, Centro o Empresa en el que desarrolla sus actividades.

2.2. Resumen

Todo artículo deberá ir acompañado de un resumen, *en español e inglés*, de extensión no inferior a cien palabras (unas ocho líneas mecanografiadas) ni superior a ciento cincuenta palabras (doce líneas).

2.3. Gráficos y figuras

Los gráficos y figuras deberán ir numerados correlativamente en el orden en que se citen en el texto, en el cual deberá indicarse el lugar adecuado de su colocación.

Se presentarán delineados en tinta china negra sobre papel vegetal o sobre papel blanco, o en reproducibles de muy buena calidad. Todas las figuras llevarán su correspondiente pie explicativo.

Los rótulos, símbolos y leyendas deberán ser tales que, tras su reducción a la anchura de una o dos columnas de la Revista (setenta y dos o ciento cincuenta mm, respectivamente) queden letras de tañamo no inferior a 1,5 mm y sean, en todo caso, fácilmente legibles.

2.4. Fotografías

Se procurará incluir sólo las que, teniendo en cuenta la reproducción, sean realmente útiles, claras y representativas. Podrán presentarse en copias de papel opaco negro o en color, en negativo, o en diapositivas. Se tendrán en cuenta las normas sobre tamaño de rótulos y leyendas dadas en el punto 2.3 anterior. Irán numeradas correlativamente y llevarán su correspondiente pie explicativo.

2.5. Tablas y cuadros

Cumplirán las proporciones y dimensiones indicadas para las figuras. Llevarán numeración correlativa, citada en el texto, y un pie con la explicación adecuada y suficiente para su interpretación directa.

2.6. Unidades

Las magnitudes se expresarán, preferiblemente, en unidades del Sistema Internacional (S.I.) según las UNE 5001 y 5002.

2.7. Fórmulas, letras griegas, subíndices y exponentes

En las fórmulas se procurará la máxima calidad de escritura y emplear las formas más reducidas siempre que no entrañen riesgo de incomprensión. Para su identificación se utilizará, cuando sea necesario, un número entre paréntesis a la derecha de la fórmula.

Se cuidará especialmente que todas las letras griegas, subíndices y exponentes resulten perfectamente identificables, procurando evitar los exponentes complicados y letras afectadas simultáneamente de subíndices y exponentes.

Cualquier expresión que, por su complejidad, pueda dar lugar a interpretaciones equivocadas, se presentará manuscrita. Se diferenciarán claramente mayúsculas y minúsculas y aquellos tipos que puedan inducir a error (por ejemplo, la ℓ y el 1; la O y el cero; la K y la k, etc.).

2.8. Referencias bibliográficas

Las referencias bibliográficas citadas en el texto se recogerán al final del mismo dando todos los datos precisos sobre la fuente de publicación, para su localización.

Las citas en el texto se harán mediante números entre paréntesis. En lo posible, se seguirán las normas internacionales utilizadas generalmente en las diversas publicaciones, es decir:

Referencias de artículos publicados en revistas

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del artículo; nombre de la publicación; número del volumen y fascículo; fecha de publicación, y número de la primera y última de las páginas que ocupa el artículo al que se refiere la cita.

Referencias de libros

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del libro; edición; editorial, y lugar y año de publicación.

3. PRUEBAS DE IMPRENTA

De las primeras pruebas de imprenta se enviará una copia al Autor para que, una vez debidamente comprobadas y corregidas, las devuelva en el plazo máximo de quince días, con el fin de evitar el riesgo de que la publicación de su artículo tenga que aplazarse hasta un posterior número de "Hormigón y Acero".

En la corrección de pruebas no se admitirán modificaciones que alteren sustancialmente el texto o la ordenación del artículo original.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Sobre la conveniencia de considerar la acción térmica ambiental en el dimensionamiento de estructuras de hormigón frente a estados límites últimos

Antonio R. Marí
Enrique Mirambell
Dres. Ingenieros de Caminos
Dpto. de Ingeniería de la Construcción
E.T.S.I.C.C. y P. de Barcelona. U.P.C.

1. INTRODUCCION

La acción térmica ambiental introduce deformaciones impuestas en las estructuras de hormigón, las cuales pueden influir de forma significativa en su comportamiento estructural. En general, el dimensionamiento de las estructuras de hormigón armado y pretensado frente a la acción térmica se basa en un análisis lineal elástico de la estructura. Tal forma de proceder puede conducir a cuantías de acero inadecuadas, especialmente en situaciones próximas a rotura. De cara a evaluar, de una manera aproximada, pero realista, los efectos estructurales de la acción térmica ambiental sobre la respuesta térmica y tensional de las estructuras de hormigón, diferentes aspectos deben ser considerados en el proceso de análisis y dimensionamiento.

En primer lugar, las distribuciones de temperatura en el interior de las secciones transversales de las estructuras de hormigón son, en general, no lineales. Debido a dicha no linealidad, y suponiendo que se verifique la hipótesis de Navier-Bernouilli, las secciones transversales de las estructuras que se van a analizar se ven sometidas a unas distribuciones de tensiones autoequilibradas, tanto longitudinalmente como transversalmente. Por otra parte, las distribuciones de temperaturas y de tensiones primarias, inducidas éstas por la no linealidad del campo térmico, dependen de las condiciones ambientales, del lugar de emplazamiento de la estructura y de las propiedades térmicas y mecánicas de los materiales que conforman la estructura. Así, pues, se hace necesario determinar de una forma más o menos precisa la magnitud de las acciones térmicas y de las distribuciones de tensiones autoequilibradas que se deben considerar en el proceso de dimensionamiento.

En segundo lugar, los efectos estructurales ocasionados por la actuación de una determinada acción térmica dependen, en gran medida, del estado de los materiales y de las condiciones de ductilidad de las estructuras de hormigón. Por ello se hace necesario llevar a cabo un análisis estructural que, teniendo en cuenta la no linealidad de los materiales —existencia de fisuración, plastificación de los materiales,...—, permitirá cuantificar la redistribución de esfuerzos a lo largo de la estructura analizada y la disipación de energía acumulada por la pieza cuando ésta se ve sometida a acciones indirectas, como es, en este estudio, la acción térmica ambiental.

2. ANALISIS TERMICO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON. ACCIONES TERMICAS DE DISEÑO Y DISTRIBUCIONES DE TENSIONES

2.1. Distribuciones de temperaturas

La ecuación diferencial que gobierna el fenómeno de la transmisión de calor en un medio anisótropo y en régimen transitorio es

$$\mathrm{div}\,(-\kappa \cdot \mathrm{grad}T) - \dot{q} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

en donde κ es el tensor de conductividad térmicas, $\dot{q}$ es la velocidad de generación interna de calor, ρc la capacidad calorífica del material y T la temperatura.

Admitiendo que el proceso de fraguado ha finalizado y considerando el hormigón como un medio continuo, homogéneo e isótropo, la ecuación anterior se transforma en

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2)$$

siendo $K = k / \rho c$ la difusividad térmica del hormigón.

Centrando el fenómeno físico de la transmisión de calor en las estructuras de hormigón expuestas a la intemperie, la condición general de contorno que hay que imponer en las superficies externas es la condición de Newmann:

$$k\left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \frac{\partial T}{\partial z} n_z\right) + aI + (h_c + h_r)(T - T_a) = 0 \qquad (3)$$

En dicha expresión, k es la conductividad térmica del hormigón, a es el factor de absorción solar, I es la intensidad de radiación solar incidente, h_c y h_r son los coeficientes de transferencia de calor por convección y por irradiación térmica, respectivamente, y T_a es la temperatura ambiente.

El desarrollo de modelos analíticos basados en la técnica de las diferencias finitas o de los elementos finitos permite resolver la ecuación diferencial (2) y obtener así la distribución del campo de temperaturas en función del tiempo [Emerson (5), Mirambell y Aguado (12), Polivka y Wilson (15), Priestley y Buckle (17)].

2.2 Distribuciones de tensiones autoequilibradas

Una vez resuelta la ecuación diferencial y habiendo obtenido las distribuciones de temperaturas en función del tiempo, se pueden determinar las distribuciones de tensiones autoequilibradas asociadas a dichas distribuciones térmicas, para cualquier instante. Tales distribuciones tensionales son independientes de las condiciones de vinculación de la estructura y aparecen siempre que la distribución de temperaturas existente sea no lineal. Adoptando la hipótesis de que el material sea lineal elástico, la distribución de tensiones autoequilibradas en el interior de la sección transversal de una determinada estructura de hormigón puede obtenerse a través de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= E[\epsilon_o + \psi_x y + \psi_y x - \alpha T(x, y)_{nl}] \\ \epsilon_o &= \alpha / A \int\int T(x, y)_{nl}\, dx\, dy \\ \psi_x &= \alpha / I_x \int\int T(x, y)_{nl}\, y\, dx\, dy \\ \psi_y &= \alpha / I_y \int\int T(x, y)_{nl}\, x\, dx\, dy \end{aligned} \qquad (4)$$

En dicha expresión, E es el módulo de elasticidad del hormigón, α su coeficiente de dilatación térmica, y ϵ_o, ψ_x y ψ_y son la deformación térmica media impuesta y las curvaturas térmicas impuestas según los planos principales de inercia de la sección transversal, las cuales permiten determinar el plano de deformaciones impuestas equivalente asociado a la distribución no lineal de temperaturas existente en la realidad.

La figura 1 muestra la distribución de tensiones longitudinales autoequilibradas de tracción que hay que considerar en diseño, a lo largo de los perímetros externo e interno de un puente cajón genérico, de hormigón, emplazado en la Península Ibérica [Mirambell (11)]. Para la obtención de esta distribución de tensiones de tracción, se ha desarrollado un programa numérico basado en el método de las diferencias finitas, el cual contempla las condiciones ambientales y climatológicas del lugar de emplazamiento del puente —radiación solar, temperatura ambiente, velocidad del viento,...—, el propio lugar de emplazamiento del puente y su orientación —latitud, altitud, azimut,...— y las propiedades térmicas y mecánicas de los materiales.

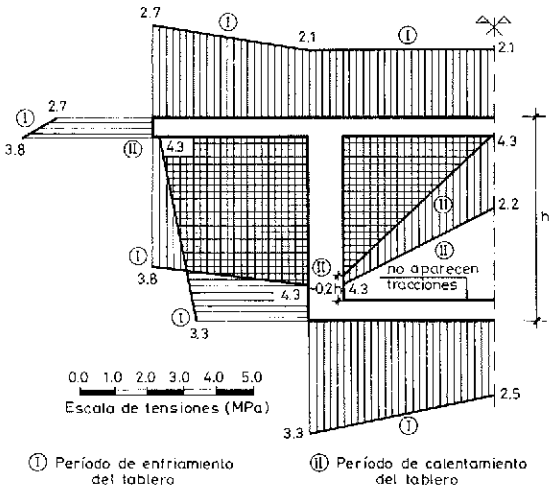


Fig. 1. Distribución de diseño de tensiones longitudinales primarias en puentes cajón de hormigón emplazados en España.

Esta distribución de tensiones de tracción que se presenta en la figura 1, debe entenderse como una envolvente de la magnitud de las distribuciones de tensiones longitudinales autoequilibradas de tracción inducidas por la no linealidad de la distribución de temperaturas en el interior de las secciones transversales de puentes cajón de hormigón emplazados en la Península Ibérica, y ha sido obtenida considerando las condiciones ambientales y climatológicas más desfavorables durante los períodos de enfriamiento y calentamiento del tablero del puente.

En lo referente a las distribuciones de tensiones contenidas en el plano de la sección transversal originadas por los efectos térmicos ambientales, cabe mencionar el hecho de que, en general, no son consideradas en el proceso de dimensionamiento. Sin embargo, en el caso de vigas cajón las diferencias de temperatura existentes entre el

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

interior de la célula y el ambiente exterior generan tensiones de tracción considerables con respecto a la resistencia a tracción del hormigón, las cuales pueden ocasionar avanzados estados de fisuración a lo largo de las almas de la viga cajón.

Este efecto, en la tipología de puentes cajón de hormigón, puede ser importante [Prakash Rao (16)], llegando incluso a la puesta fuera de servicio del puente [Leonhardt (6), Leonhardt et alt. (7)]. Dicho efecto todavía se hace más acusado cuando estemos en presencia de fuertes espesores de alas y almas y siempre que se produzcan cambios bruscos y repentinos de la temperatura ambiente en el lugar de emplazamiento del puente.

Después de haber llevado a cabo numerosos estudios paramétricos de hipotéticos puentes cajón de hormigón emplazados en la Península Ibérica [Mirambell (11)], se han podido cuantificar, con cierta aproximación, las diferencias de temperatura existentes entre el interior de las células y el ambiente exterior. Durante el período de enfriamiento del tablero la diferencia de temperatura que hay que considerar en diseño se encuentra próxima a los 14°C, mientras que durante el período de calentamiento dicha diferencia se encuentra en torno a los −6°C [Mirambell (11)]. Estas diferencias de temperatura son significativas y deben ser consideradas en el diseño de puentes cajón de hormigón y, en general, en el diseño de estructuras de hormigón con secciones transversales celulares, especialmente en condiciones de servicio.

2.3. Acciones térmicas de diseño

Desde un punto de vista de dimensionamiento, las acciones térmicas pueden obtenerse a partir de un plano de temperaturas, o de deformaciones, equivalente a la distribución no lineal de temperaturas existente en la realidad.

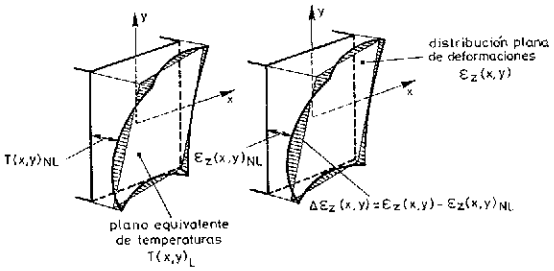


Fig. 2. Plano de temperaturas equivalente a la distribución no lineal de temperaturas. Plano de deformaciones asociado.

Dicho planteamiento presenta varias ventajas y son, por un lado, un conocimiento algo más directo de la acción térmica por parte del proyectista y, por otro, una mayor facilidad a la hora de introducir la acción térmica como acción que se tiene que considerar en el análisis estructural. En cualquier caso, diferentes normativas internacionales ya preconizan en sus recomendaciones la adopción de diversas distribuciones térmicas no lineales para su consideración en el análisis y dimensionamiento de puentes de hormigón [Bri-

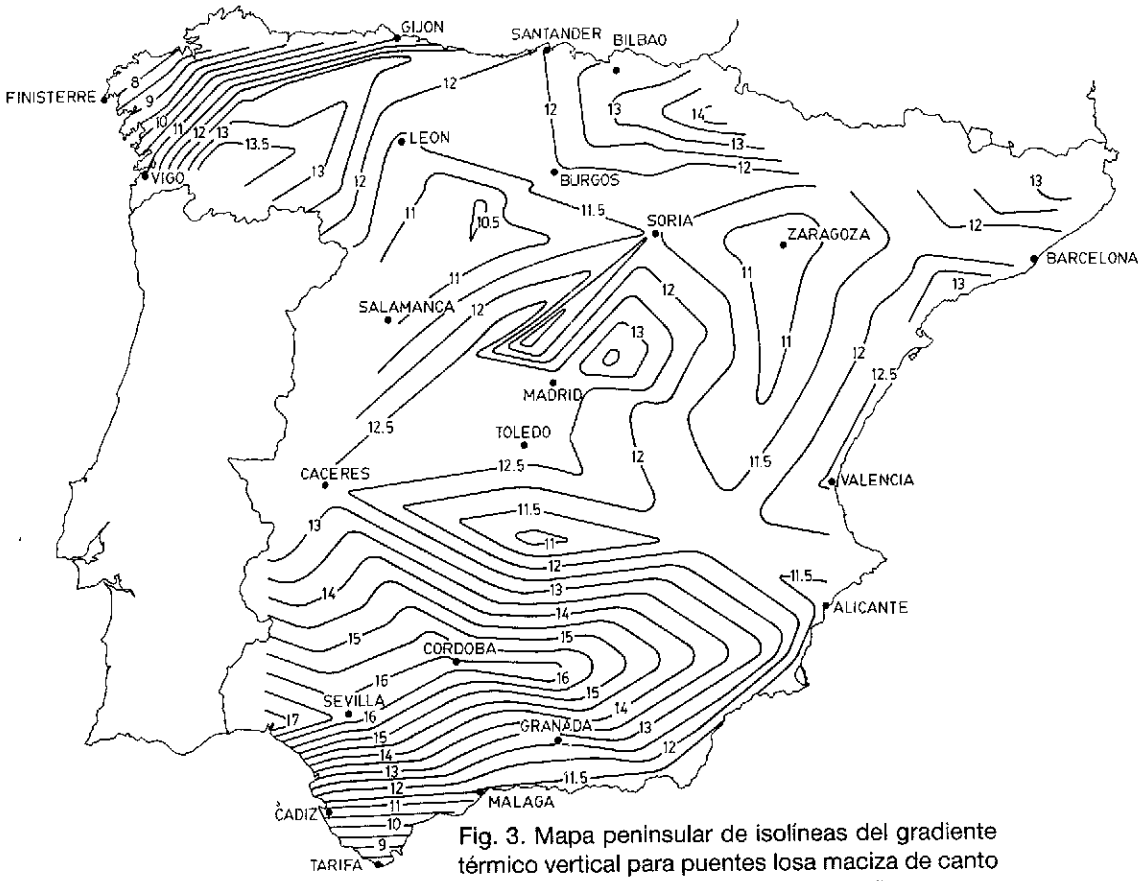


Fig. 3. Mapa peninsular de isolíneas del gradiente térmico vertical para puentes losa maciza de canto 0,60 m., emplazados en España.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

tish Standards Institution. BS 5400 (1), Ministry of Works and Development. New Zealand (10), National Association of Australian State Road Authorities (14)]. Partiendo de los resultados derivados de estudios paramétricos ya existentes, es posible determinar las acciones térmicas que hay que considerar en el proceso de dimensionamiento de las estructuras de hormigón, contemplando la influencia de los efectos térmicos ambientales de una manera simple, realista y suficientemente aproximada.

En la tipología estructural de los puentes de hormigón, por ejemplo, los resultados del gradiente térmico vertical derivados de los análisis térmicos pertinentes, muestran que el valor de esta acción térmica se encuentra fuertemente correlacionado con la intensidad de radiación solar incidente sobre el tablero. A modo de ejemplo, la figura 3 muestra el mapa peninsular de isolíneas del gradiente térmico vertical para puentes losa de hormigón, de canto 0,60 m, emplazados en la Península Ibérica.

Dicho mapa ha sido obtenido tras el procesamiento de datos referentes a radiación solar, temperatura ambiente y velocidad del viento, recogidos en diversas publicaciones del Instituto Nacional de Meteorología.

3. ANALISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON SOMETIDAS A LA ACCION TERMICA

3.1. Estructuras de hormigón armado

La distribución de los esfuerzos internos inducidos en estructuras hiperestáticas de hormigón armado por la actuación de acciones de carácter indirecto, como es la acción térmica, depende de forma significativa del estado de los materiales (fisurado, plastificado,...) y de la variación de rigidez a lo largo de la estructura.

Si una estructura se ve sometida a acciones indirectas —deformaciones o desplazamientos impuestos— la demanda ineludible no es de tipo mecánico sino geométrico, puesto que la estructura busca acomodar las deformaciones resultantes, satisfaciendo la continuidad y la compatibilidad con los enlaces, y por supuesto, manteniendo el equilibrio. Los esfuerzos que puedan aparecer en la estructura originados por la actuación de una determinada acción indirecta, dependen de la propia rigidez de la estructura por lo que el armado, obtenido a partir de aquéllos, será muy sensible a la fidelidad con que se haya evaluado dicha rigidez.

En relación a este proceso, parece lógico apuntar que el dimensionamiento de estructuras frente a acciones de carácter indirecto debe basarse en la garantía de una capacidad de deformación suficiente que acomode la acción indirecta, y no en la obtención de una cuantía de armadura para resistir unos esfuerzos internos, autogenerados por la propia rigidez de la estructura [Marí et alt. (9)].

Sea una viga biempotrada como la que se presenta en la figura 4, sometida a una carga uniformemente repartida. El dimensionamiento de la armadura se ha llevado a cabo suponiendo la actuación de, únicamente, dicha carga repartida. Los diagramas momento-curvatura en las secciones de apoyo y centro de vano se muestran en la figura 4. La distribución de momentos flectores viene representada en dicha figura a través de la línea r_1. Suponiendo que para las cargas mayoradas se forman rótulas plásticas en los empotramientos de la viga, entonces el comportamiento de la estructura es similar al de una viga simplemente apoyada, siempre y cuando se asegure la

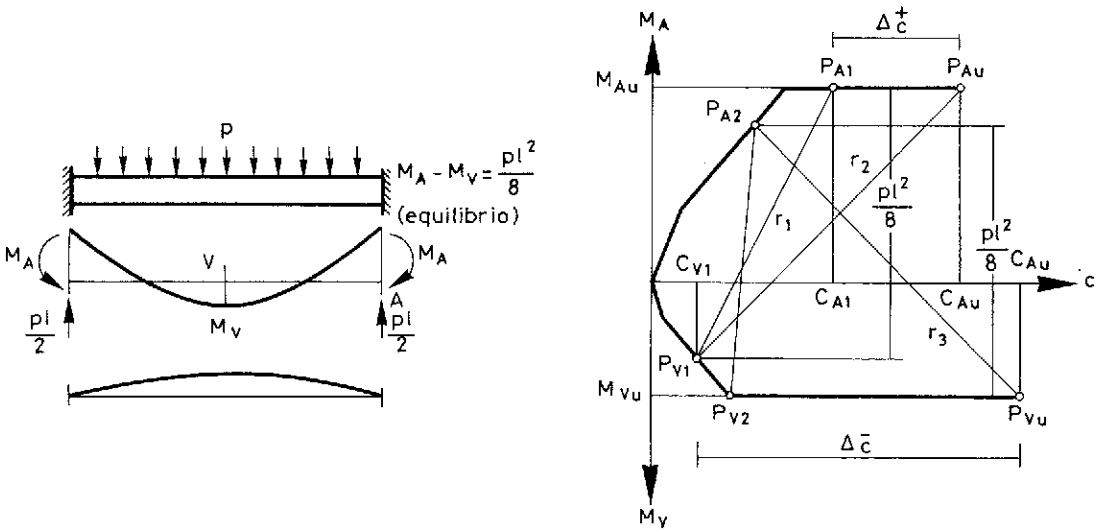


Fig. 4. Curvaturas residuales en las secciones críticas de la viga analizada.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

suficiente capacidad de rotación en las rótulas plásticas.

Si, a partir de esta situación, la estructura se ve sometida a una determinada acción térmica, según la cual la fibra inferior de la viga incrementa su temperatura, las líneas solución del problema en función de los momentos y curvaturas resultantes pivotan alrededor del punto P_{v1}, hasta llegar al punto P_{Au}, punto del diagrama M – c de la sección de apoyos para el cual se alcanza la curvatura última de dicha sección. Por consiguiente, en este supuesto, la viga acomoda la deformación impuesta sin que varíen los momentos flectores que solicitan las secciones críticas. La máxima curvatura térmica impuesta es $\Delta C = C_{Au} - C_{A1}$ y, por lo tanto, el máximo gradiente térmico que puede acomodar la pieza es $\text{grad}T = \Delta C / \alpha$, siendo α el coeficiente de dilatación térmica del material. El razonamiento seguido es idéntico para el caso en el que la fibra de la sección que incrementa su temperatura sea la fibra superior de la viga analizada.

El nivel de tensiones inducido por la acción térmica depende del nivel de tensiones existente debido a la actuación de acciones previas (peso propio, carga muerta, sobrecarga de uso,...). En condiciones de servicio, la pieza mantiene en gran medida su rigidez estructural y, por ello, cuando las condiciones de vinculación no son compatibles con las deformaciones impuestas, se inducen tensiones de continuidad. No obstante, en situaciones próximas a rotura, cuando ya se han desarrollado las rótulas plásticas, el gradiente térmico introduce unas curvaturas impuestas compatibles con las condiciones de enlace de la estructura para ese nivel de solicitación y, por consiguiente, no se originan tensiones térmicas adicionales. En cualquier caso, el máximo gradiente térmico que la estructura puede acomodar en situaciones próximas a rotura es independiente de la trayectoria seguida durante el proceso de carga, siempre y cuando se satisfagan las condiciones de servicio [Mirambell y Marí (13)].

3.2. Ejemplo 1

Sea la viga biempotrada de hormigón armado que se presenta en la figura 5, la cual se ve sometida a la acción de una carga uniforme repartida y a la acción de un gradiente térmico. Atendiendo a un proceso clásico de dimensionamiento, los flectores que hay que considerar para la obtención de la armadura pasiva en las secciones críticas serían los siguientes:

Sección apoyo: $M_{Ad} = \gamma(M_p + M_T) =$

$$= \gamma\left(\frac{pl^2}{12} + \frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot EI}{h}\right) = 245.8\text{kNm}$$

Sección vano: $M_{Vd} = \gamma M_p = \gamma \cdot \left(\frac{pl^2}{24}\right) = 96\text{kNm}$

Si se considera que el gradiente térmico en estado límite último no origina ningún tipo de esfuerzos internos sino únicamente deformaciones impuestas, los momentos de cálculo en las secciones críticas serán:

Sección apoyo: $M_{Ad} = 192\text{kNm}$

Sección vano: $M_{Vd} = 96\text{kNm}$

Las áreas de armadura pasiva obtenidas para ambos dimensionamientos se presentan en la tabla 1.

TABLA I

Dimensionamiento de armadura pasiva	Sección apoyos	Sección centro vano
1. Considerando acción térmica	$A_{sup} = 18.66\ \text{cm}^2$	$A_{inf} = 6.30\ \text{cm}^2$
2. Sin considerar acción térmica	$A_{sup} = 13.57\ \text{cm}^2$	$A_{inf} = 6.30\ \text{cm}^2$

Tabla 1.-Areas de armadura pasiva atendiendo a ambos dimensionamientos, considerando y sin considerar la acción térmica.

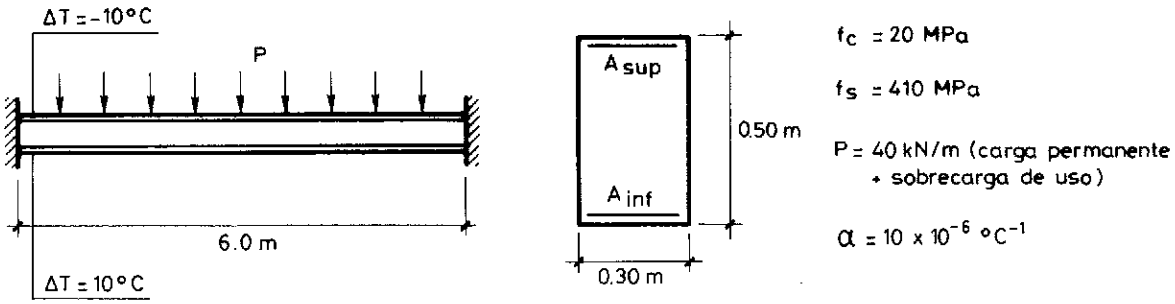


Fig. 5. Viga biempotrada de hormigón armado analizada bajo la actuación de un gradiente térmico.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Posteriormente, se ha llevado a cabo el análisis no lineal de dicha viga considerando ambos esquemas de armado. El modelo de análisis utilizado contempla las relaciones no lineales $\sigma - \epsilon$ del hormigón (diagrama de Sargin con rama descendente) y del acero (diagrama bilineal sin endurecimiento) y, lógicamente, la existencia de fisuración [Marí (8)].

En un primer paso, se introduce, de forma incremental, la totalidad de las cargas gravitatorias y, posteriormente, también de forma incremental, la acción térmica. En la figura 6 se presenta la evolución de los momentos flectores en la sección de apoyo y de centro de vano, para ambos dimensionamientos de la armadura pasiva.

$\epsilon_{su} = 4{,}12 \cdot 10^{-3}$), siempre al margen de posibles daños causados en la estructura por efecto de la alta temperatura.

En cualquier caso, deberá llevarse a cabo la verificación de los estados límites de servicio, como fisuración y deformabilidad, con las cuantías de armadura obtenidas en el dimensionamiento frente a estados límites últimos. En este caso, para la viga dimensionada sin considerar la acción térmica, el ancho característico de fisura, calculado de acuerdo con el Código Modelo CEB-FIP (2) resulta ser de 0,2 mm, ancho éste aceptable para unas condiciones ambientales medias.

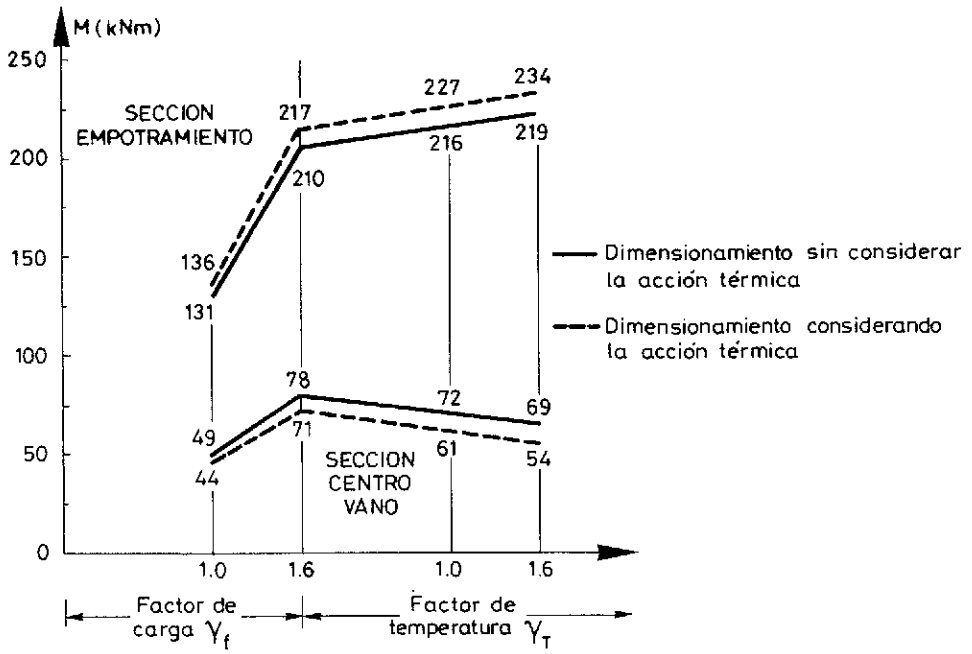


Fig. 6. Evolución del momento flector en las secciones críticas bajo un proceso incremental de las acciones.

En base a los resultados derivados de los análisis, se deduce que la viga biempotrada, con un dimensionamiento de la armadura que no contempla la existencia del gradiente térmico, presenta en las secciones críticas de apoyo una capacidad de rotación plástica que permite que la estructura se acomode a las deformaciones impuestas originadas por el gradiente térmico. Ello se consigue sin necesidad de incrementar la armadura en la sección de apoyos para resistir la flexión causada por el gradiente, y sin que se alcance el momento último de dicha sección.

Por otra parte, el análisis no lineal de tal estructura predice que la deformación última en las secciones críticas se alcanza bajo la totalidad de las cargas gravitatorias y bajo la actuación de un gradiente térmico de 68°C ($\epsilon_{cu} = -3{,}53 \cdot 10^{-3}$,

3.3. Estructuras de hormigón pretensado

En la mayoría de los casos, el diseño de las estructuras de hormigón pretensado se basa en la no aparición de tensiones de tracción en situación de servicio. De cara a conseguir este objetivo, se requiere un alto grado de pretensado, especialmente si se considera la influencia de los efectos térmicos ambientales en la obtención de la fuerza de pretensado.

Como ya se ha comentado anteriormente, cuando sobre una estructura inciden acciones de carácter indirecto, como la acción térmica, las leyes de esfuerzos inducidos dependen de la rigidez estructural. Por consiguiente, puede ser de interés el utilizar la técnica del pretensado parcial con el objetivo de reducir los esfuerzos origina-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

dos por la acción térmica. En cualquier caso, será necesario disponer la suficiente cuantía de armadura pasiva para controlar la fisuración del hormigón en condiciones de servicio [Cooke et al. (3), Elbadry y Ghali (4), Leonhardt (6)]. A continuación, se presenta un ejemplo en el cual se analiza una estructura de hormigón, con pretensado parcial y pretensado total, y se estudia la capacidad para resistir las cargas gravitatorias exteriores y para acomodar las deformaciones impuestas inducidas por la acción térmica.

3.4. Ejemplo 2

Sea el puente continuo de hormigón pretensado, de tres vanos, que se presenta en la figura 7. El hipotético puente se ubica en la ciudad de Barcelona y tiene una longitud total de 74 m, siendo su sección transversal una losa maciza, de hormigón pretensado, con canto constante de 0,9 m.

tracción en ningún punto de la estructura, mientras que la combinación de la totalidad de las cargas exteriores gravitatorias y del gradiente térmico induce fisuración en las fibras inferiores de la sección centro luz del vano central.

De cara a limitar, en situación de servicio, el ancho de fisura ocasionado por el gradiente térmico, se debe evaluar el incremento de tensión de los tendones de pretensado en las secciones críticas. Puesto que dicho incremento es muy pequeño, el ancho de fisura estimado es menor que 0,1 mm. Por lo tanto, para controlar la fisuración, únicamente será necesario disponer una cuantía mínima de armadura pasiva.

Para el caso del dimensionamiento de la estructura con pretensado parcial, debe considerarse la posibilidad de disponer armadura pasiva para satisfacer el estado límite último frente a solicitaciones normales, sin considerar ningún esfuerzo interno inducido por la acción térmica.

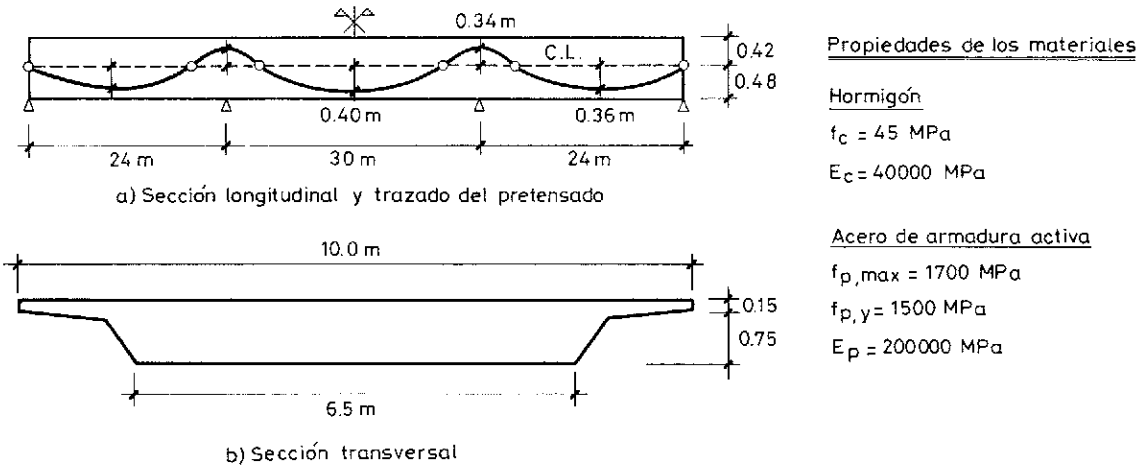


Fig. 7. Puente de hormigón pretensado analizado bajo la actuación de carga permanente y sobrecarga de uso, y gradiente térmico.

El puente se ve sometido a la acción de su peso propio y de la sobrecarga de uso (carga uniformemente repartida y carro). Asimismo, el gradiente térmico que actúa sobre la estructura es 9,8°C. Dicho gradiente ha sido obtenido a partir del mapa de isolíneas de la figura 3, modificando su valor a través de un coeficiente corrector que contempla la influencia del canto del tablero.

Manteniendo el mismo trazado de los tendones de la armadura activa, el puente se dimensiona con dos grados de pretensado diferentes. En el primer caso, el puente se dimensiona con pretensado total, siendo la fuerza de pretensado de 34600 kN. En el segundo dimensionamiento, se opta por un pretensado parcial de la estructura, siendo la fuerza de pretensado de 28000 kN. En este último caso, la actuación del peso propio y de la sobrecarga de uso no genera tensiones de

Como resultado de este análisis, se ha podido constatar que para este caso no es necesario disponer armadura pasiva suplementaria para resistir las cargas mayoradas en estado límite último.

A continuación, se ha llevado a cabo el análisis no lineal de la estructura del puente, considerando ambos dimensionamientos del pretensado. De nuevo, el modelo de análisis no lineal utilizado se basa en el método de los elementos finitos, contemplando la existencia de fisuración del hormigón y las relaciones tenso-deformaciones no lineales de los materiales. Asimismo, se ha llevado a cabo el análisis del comportamiento estructural, tanto en situación de servicio como frente al estado límite último de agotamiento por solicitaciones normales. La figura 8 muestra la malla de elementos finitos adoptada en el análisis y las acciones que solicitan la estructura del puente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

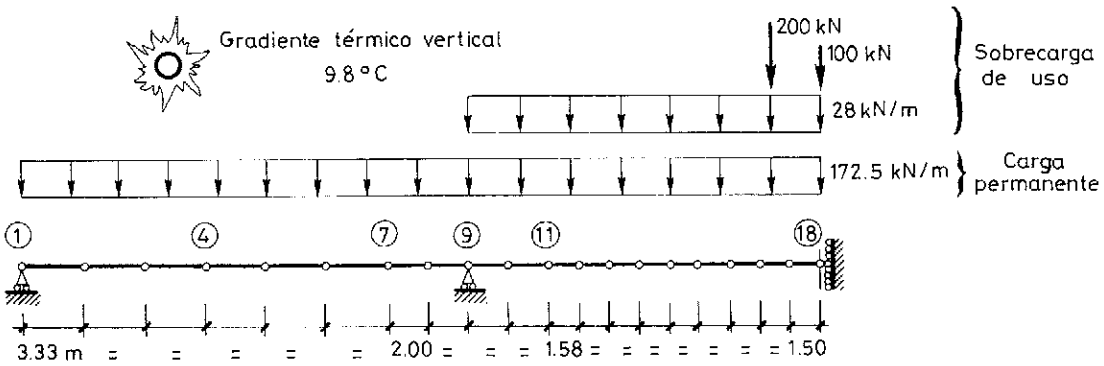
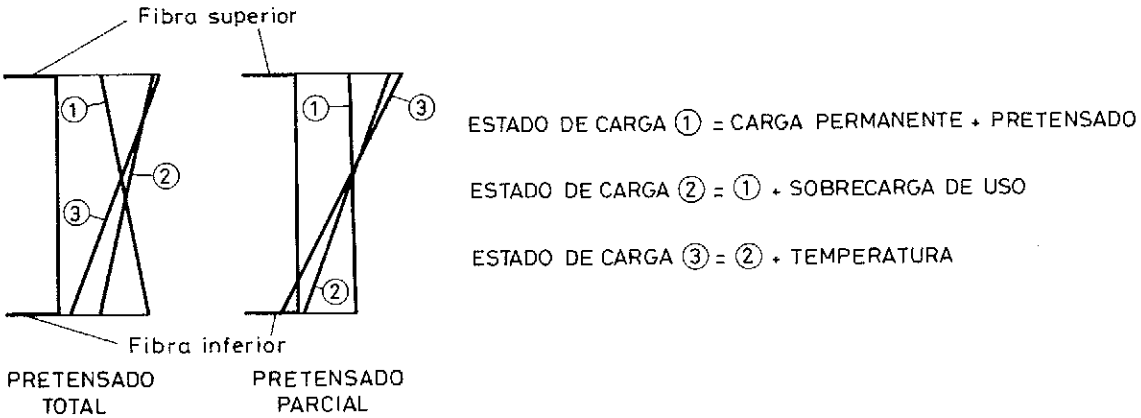


Fig. 8. Acciones exteriores actuantes sobre el tablero del puente y discretización de la estructura.

3.4.1. Análisis de la estructura en condiciones de servicio

En la figura 9 se presentan los planos de deformaciones totales en la sección centro luz del vano central del puente, bajo diferentes estados de carga y para ambos dimensionamientos del pretensado. Las tensiones en la armadura activa de pretensado y las flechas en la sección de simetría del tablero del puente se presentan en la figura 10.



GRADO DE PRETENSADO	FIBRA SUPERIOR			FIBRA INFERIOR		
	1	2	3	1	2	3
PRETENSADO TOTAL	-8.97	-18.1	-19.0	-17.2	-8.03	-2.2
PRETENSADO PARCIAL	-9.89	-18.9	-20.7	-10.9	-1.63	+2.23

Deformaciones totales × 10^{-5}

Fig. 9. Distribuciones de deformaciones totales en la sección central del puente bajo diferentes estados de carga.

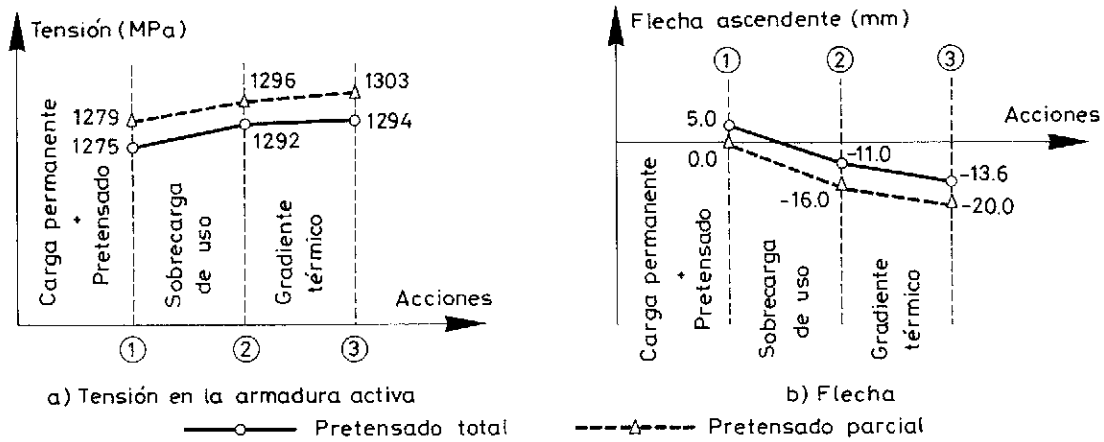


Fig. 10. Tensión en la armadura activa y flecha obtenida en la sección central del puente analizado, en situación de servicio.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Los resultados obtenidos confirman que no es necesario disponer armadura pasiva suplementaria para controlar adecuadamente la fisuración. Por otra parte, la máxima flecha obtenida en la sección central del puente, en el caso de pretensado parcial, es de 20 mm, lo cual representa una flecha menor que l/300. Por consiguiente, el puente dimensionado con pretensado parcial satisface las condiciones de servicio.

3.4.2. Análisis de la estructura en estado límite último

Para estudiar el comportamiento estructural en estado límite último, se ha llevado a cabo el análisis no lineal de la estructura con ambos dimensionamientos del pretensado, incrementando las cargas exteriores y el gradiente térmico hasta que éstos alcanzan sus valores mayorados. La figura 11 muestra la evolución del momento flector en la sección central del puente bajo el proceso incremental de carga.

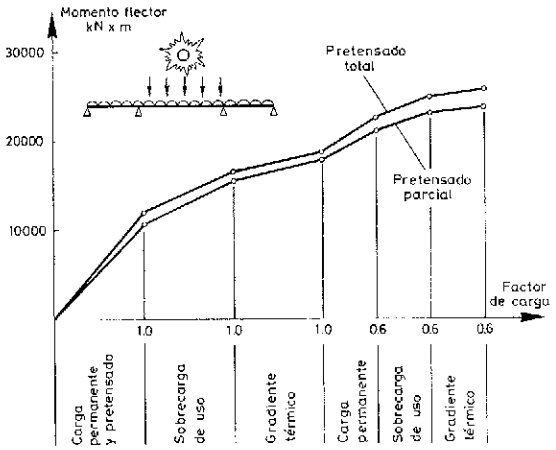


Fig. 11. Evolución del momento flector en la sección central del puente.

Para ambos dimensionamientos del pretensado, el momento flector en la sección crítica (sección central del tablero) es inferior al momento último. Así, para este ejemplo particular, el puente dimensionado con pretensado parcial, sin contemplar la influencia de la acción térmica en el valor de la fuerza de pretensado en situación de servicio y en el dimensionamiento de armadura pasiva en estado límite último, es capaz de resistir las cargas exteriores mayoradas y de acomodar las deformaciones térmicas impuestas factorizadas.

4. CONCLUSIONES

De los resultados derivados del presente estudio, pueden extraerse algunas conclusiones:

— Para obtener una respuesta estructural realista frente a acciones térmicas, es necesario determinar de una forma más o menos precisa la distribución de deformaciones térmicas impuestas existente en las estructuras de hormigón. Las distribuciones de temperatura son, en general, no lineales, y dependen del propio lugar de emplazamiento de la estructura, de las condiciones ambientales existentes en él, de las propiedades de los materiales y de la geometría de la estructura.

— Partiendo de un procesamiento de datos de los parámetros mencionados en el párrafo anterior, es posible determinar, para una área geográfica particular, las acciones térmicas y las distribuciones de tensiones primarias (autoequilibradas) que se deben considerar en el diseño de las estructuras de hormigón, las cuales pueden verse modificadas en función de las características geométricas de la estructura, fundamentalmente.

— Los métodos actuales de dimensionamiento de la armadura pasiva, frente a estados límites últimos, tienden a sobrestimar los esfuerzos internos inducidos por la acción térmica, lo cual conduce, en general, a cuantías excesivas de acero. Un dimensionamiento más adecuado y económico de la armadura pasiva se basaría en la consideración de, únicamente, los esfuerzos inducidos por las cargas exteriores gravitatorias, frente a estado límite último, asegurando que las secciones críticas de la estructura posean la suficiente ductilidad para acomodar las rotaciones plásticas ocasionadas por efectos térmicos.

— En la tipología de puentes de hormigón, el dimensionamiento con pretensado total parece ser excesivo de cara a resistir los esfuerzos internos inducidos por las cargas exteriores y las deformaciones impuestas, en estado límite último. El pretensado parcial, frente a acciones de carácter indirecto como la acción térmica, resulta ser una técnica más económica y razonable, puesto que permite que la estructura satisfaga las condiciones de servicio, así como resistir las cargas exteriores gravitatorias en estado límite último y acomodar las deformaciones impuestas debidas a efectos térmicos.

— En cualquier caso, debe comprobarse si hay que disponer armadura pasiva suplementaria para verificar las condiciones de fisuración en situación de servicio o para verificar el estado límite último frente a solicitaciones normales.

— Por último, de cara a extraer conclusiones generales de diseño al respecto, se debería proceder a realizar estudios paramétricos de

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

diferentes tipologías estructurales de hormigón, a través de los cuales se pudiera cuantificar la influencia de diversos parámetros de diseño sobre el comportamiento estructural (por ejemplo, para la tipología de puentes, las luces de vanos, los diferentes grados de pretensado y las diferentes combinaciones de acciones).

REFERENCIAS

1. BRITISH STANDARDS INSTITUTION. BS 5400: «Steel, Concrete and Composite Bridges. Part 2: Specification for loads». British Standards Institution. United Kingdom. 1978.

2. CEB-FIP: «Código modelo CEB-FIP para estructuras de hormigón». CEB-FIP. Noviembre 1976.

3. COOKE, N., PRIESTLEY, M. J. N., THURSTON, S. J.: «Analysis and Design of Partially Prestressed Concrete Bridges under Thermal Loading». PCI Journal. May-June 1984.

4. ELBADRY, M., GHALI, A.: «Thermal Stresses and Cracking of Concrete Bridges». ACI Journal. November-December 1986.

5. EMERSON, M.: «The Calculation of the Distribution of Temperature in Bridges». TRRL Report LR 561. Department of the Environment. Transport and Road Research Laboratory. Crowthorne, Berkshire, United Kingdom. 1973.

6. LEONHARDT, F.: «Cracks and Crack Control in Concrete Structures». PCI Journal. July-August 1988.

7. LEONHARDT, F., KOLBE, G., PETER, J.: «Temperaturuntershiede gefährden Spannbetonbrücke». Beton und Stalhbetonbau, Vol. 60, No. 7. July 1965.

8. MARI, A. R.: «Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Three Dimensional Frames». UC-SESM Report No. 84-12. Division of Structural Engineering and Structural Mechanics. University of California, Berkeley. June 1984.

9. MARI, A., MIRAMBELL, E., MURCIA, J.: «Dimensionamiento de estructuras de hormigón armado frente a acciones directas e indirectas». Colloquia 88. Vol. 1. Análisis de Estructuras. Madrid. Mayo 1988.

10. MINISTRY OF WORKS AND DEVELOPMENT. NEW ZEALAND: «Highway Bridge Design Brief». Civil Division Publication CDP 701/D. Ministry of Works and Development. New Zealand. September 1978.

11. MIRAMBELL, E.: «Criterios de diseño en puentes de hormigón frente a la acción térmica ambiental». Tesis Doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona. Marzo 1987.

12. MIRAMBELL, E., AGUADO, A.: «Modelo de obtención de distribuciones de temperaturas y tensiones longitudinales autoequilibradas en puentes de hormigón». Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 3, No. 2. Abril 1987.

13. MIRAMBELL, E., MARI, A.: «Structural Behaviour of Reinforced and Prestressed Concrete Structures under Environmental Thermal Effects». International Symposium. Re-evaluation of Concrete Structures. Reliability and Load Carrying Capacity. Danish Concrete Institute. Copenhagen, Denmark. June 1988.

14. NATIONAL ASSOCIATION OF AUSTRALIAN STATE ROAD AUTHORITIES. AUSTRALIA: «Bridge Design Specification». National Association of Australian State Road Authorities. Australia. 1976.

15. POLIVKA, R. M., WILSON, E. L.: «Finite Element Analysis of Nonlinear Heat Transfer Problems». UC-SESM Report No. 76-2. Division of Structural Engineering and Structural Mechanics. University of California, Berkeley. June 1976.

16. PRAKASH RAO, D. S.: «Temperature Distributions and Stresses in Concrete Bridges». ACI Journal, Title No. 83-52. August 1986.

17. PRIESTLEY, M. J. N., BUCKLE, I. G.: «Ambient Thermal Response of Concrete Bridges». Road Research Unit, Bulletin No. 42. National Roads Board. Wellington, New Zealand. 1979.

RESUMEN

En este artículo se presenta un estudio de la influencia de los efectos térmicos ambientales sobre el comportamiento tenso-deformacional de las estructuras de hormigón armado y hormigón pretensado. Dicho estudio se basa en trabajos previos de investigación de los autores, relacionados con las distribuciones no lineales de temperatura y sus efectos sobre el comportamiento de las estructuras de hormigón y con el análisis de estructuras de hormigón, considerando la no linealidad de los materiales.

Como resultado de estudios previos de investigación se presentan, a modo de ejemplo, las acciones térmicas y las distribuciones de tensiones longitudinales autoequilibradas, inducidas por la no linealidad del campo de temperaturas, que hay que considerar en el dimensionamiento de puentes de hormigón. Asimismo, se analizan diversas estructuras de hormigón armado y hormi-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

gón pretensado sometidas a la acción térmica ambiental, centrándose el estudio en aquellos aspectos relacionados con las condiciones de ductilidad y con la elección del grado de pretensado, respectivamente.

SUMMARY

In the present paper, the influence of environmental thermal actions on the behaviour of reinforced and prestressed concrete structures is analysed. Such study is based on previous research works of the authors, related to nonlinear temperature distributions and its effects on the behaviour of concrete structures as well as on nonlinear material analysis of concrete structures. Thermal actions and primary stress distributions to be considered in design in some concrete structures are presented. In addition, several reinforced and prestressed concrete structures under environmental thermal effects are analyzed, focusing on ductility conditions and on the choice of the level of prestressing, respectively.

NUEVA PUBLICACION

El Hormigón Pretensado en Ingeniería y en Arquitectura

Alfredo Páez Balaca
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor Emérito
Catedrático de la asignatura "Hormigón armado y pretensado" de la U.P.C.

El libro, con un total de 1.150 páginas, se divide en 11 capítulos. En el primero, el autor presenta los esfuerzos creados por la acción del pretensado, como unas cargas exteriores que, por estar artificialmente introducidas, las podemos graduar a nuestro antojo, haciéndolas que sean iguales y contrarias a las cargas actuantes. Este particular aspecto del pretensado se considera como el más fecundo planteamiento a la hora del diseño de una pieza.

El capítulo 2 comprende la obligada descripción de los sistemas más comúnmente empleados para retener un alambre o cordón de acero de alta resistencia. Para eludir nombres comerciales, se citan y agrupan los diferentes sistemas en base a los principios mecánicos que los determinan (retención por adherencia, por cuña, por remache, por rosca). Para completar esas descripciones, el capítulo 2 termina con una rápida información sobre la maquinaria auxiliar más frecuentemente utilizada (equipos de inyección, empujadora de tendones, grúas de suspensión de los gatos, etc.).

En el capítulo 3 no solo se recopilan los diagramas tensión-deformación de los alambres y cordones comerciales más frecuentes, sino también sus características resistentes. En las tablas 3-3 a 3-9 (pág. 157) se presentan las capacidades mecánicas y diámetros de las vainas de los tendones de alambres o de cordones más usuales, a modo de un intento de tipificación, por ser los más comunes en los catálogos comerciales. Con esta base de partida, más adelante, en las tablas 10-6 y 10-7 (pág. 818), se definen las separaciones entre tendones y demás dimensiones geométricas necesarias para determinar la amplitud de la culata o cara dorsal donde se sitúan las placas de retención de los distintos tendones. Por tratarse de un capítulo donde se consignan las propiedades mecánicas de los materiales, junto con los fenómenos de fatiga, se tratan los comportamientos del hormigón y de las armaduras bajo temperaturas extremas, así como las pérdidas de tensión motivadas, tanto por los rozamientos como por las deformaciones diferidas.

El capítulo 4 está dedicado a la ejecución: disposición de las armaduras, tesado, inyección y curado. El análisis que se desarrolla en cuanto al significado de los alargamientos registrados durante el tesado de la armadura activa, permite deducir un procedimiento práctico para una directa valoración de las pérdidas instantáneas tratadas en el capítulo anterior. El problema de los tesados sucesivos, se establece en base a medidas directas tomadas en la obra.

Los capítulos 5 y 6 están dedicados al estudio de la distribución tensional en las diferentes secciones de la pieza. Mientras que en el capítulo 5

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

se plantea el problema en base al criterio de las tensiones admisibles, el capítulo 6 analiza el problema del agotamiento resistente de la sección, bien sea como consecuencia de alcanzarse unos acortamientos límites en el hormigón, bien como a causa de una simultánea acción de flexiones longitudinales y transversales acompañadas por esfuerzos tangenciales o cortantes, a veces también combinadas con momentos torsores. El hecho de que se hayan podido recopilar centenares de ensayos con sus variables perfectamente definidas, ha permitido establecer principios y proponer métodos prácticos de cálculo, cuyos resultados teóricos se comparan con los obtenidos en los ensayos, a fin de comprobar, no sólo su ajuste a la realidad experimental, sino su menor dispersión respecto a los restantes métodos.

En el capítulo 7 se aborda el tema relativo a los pretensados parciales. Una vez expuestos los criterios generales mantenidos por diferentes autores, se analizan, no solo las diversas definiciones de "grados de pretensado" sino también la incongruencia de toda comparación económica entre soluciones que no ofrecen un mismo margen de seguridad. El tema de los tendones sin adherencia, ya iniciado en capítulos precedentes, resurge de nuevo en esta modalidad.

El tema de las estructuras hiperestáticas pretensadas, se trata en el capítulo 8 con la intención de buscar la más fácil comprensión, junto con el máximo aprovechamiento práctico. El estudio de las soluciones más apropiadas a la viga continua de tramos simétricos, constituye uno de los objetivos principales de este capítulo.

El creciente desarrollo comercial de las piezas prefabricadas, ha inducido a reservar todo el capítulo 9, más que a su fabricación, a los problemas que se derivan del transporte y colocación de todo tipo de piezas, así como a las ventajas e inconvenientes que supone la fragmentación en dovelas o segmentos parciales. A tales efectos, y tras un análisis de las secciones-tipo más frecuentes, se estudian las particulares condiciones de los apoyos y secciones extremas. Por razones inherentes al proceso constructivo, se inician en este capítulo, para desarrollarse con más amplitud en el siguiente, los temas relativos a los efectos de la retracción diferencial en las piezas que, para facilitar su ejecución, se hormigonan en diferentes fases.

El capítulo 10 se inicia con el estudio del apropiado trazado de los tendones, tanto en las secciones críticas, como, muy especialmente, en las secciones extremas de retención y apoyo. Las tablas 10-6 y 10-7, resumen las propiedades geométricas de las culatas de anclaje en base a los tendones comercialmente más generalizados. Los problemas relativos a la fatiga, a la fisuración, a la valoración de las flechas previsibles, a las alteraciones tensionales producidas por el hormigonado en fases sucesivas, a la incidencia de estas fases en las pérdidas diferidas, y los debidos a la posible inestabilidad lateral de las vigas, son temas que se tratan en este penúltimo capítulo dedicado a las vigas.

Finalmente, en el capítulo 11 se resumen las causas que pueden motivar la decisión de pretensar un determinado tipo de estructura. Las cubiertas de edificios singulares, los depósitos de agua con su variada tipología, los depósitos para almacenar gas natural licuado con sus especiales problemas de seguridad estructural, los depósitos para hidrocarburos en general, y las plataformas marinas en sus diversas modalidades, son temas que se desarrollan en este resumen final de las posibilidades que el pretensado ofrece.

Este libro, editado por la "Librería Editorial Bellisco", de Madrid, constituye una completísima fuente de información para todos los interesados en la técnica del pretensado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Cálculo de estructuras espacialmente periódicas. Aplicación a tableros de puente

A. Samartín
Dr. Ing. C.C. y P.
Catedrático de la E.T.S. de
Ing. de Caminos C. y P. de Madrid

1. INTRODUCCION

Consideraciones relacionadas con la eficiencia constructiva, la idealización estructural, la estática o las ventajas mecánicas y resistentes son algunos de los factores que pueden motivar el proyecto o el cálculo de estructuras compuestas de elementos idénticos encadenados entre sí. Se pueden clasificar estas estructuras espacialmente periódicas en dos grupos: estructuras cíclicas y estructuras periódicas abiertas. En el primer grupo el último elemento de la cadena se une al primero, y todos los elementos están situados de tal forma que un observador cíclico permanece sin modificación cuando la estructura gira alrededor de su eje de simetría un ángulo $2\pi/n$, en donde n, es el número de elementos idénticos. En el segundo grupo los elementos se sitúan en serie abierta, de modo que se puede distinguir el primero y el último elemento. Este segundo grupo de estructuras periódicas, se pueden extender de modo que incluya la periodicidad en una, dos o tres dimensiones, denominándose estructuras periódicas lineales, bilineales o trilineales.

El objetivo de este artículo es obtener un procedimiento de cálculo de la estructura completa que tenga en cuenta su naturaleza periódica, sometida, sin embargo, a un conjunto de cargas arbitrarias no necesariamente periódicas. De este modo, se comprueba que es posible efectuar este cálculo como una combinación de cálculos más simples de estructuras de dimensión igual a la del elemento idéntico que se repite y, por consiguiente, reducir de un modo importante el esfuerzo computacional necesario.

A continuación, se exponen algunos procedimientos de cálculo de las características citadas que son aplicables a los dos tipos de estructuras periódicas, cíclicas y abiertas lineales.

2. ESTRUCTURAS CON SIMETRIA CICLICA

2.1. Definiciones e hipótesis

Una estructura se define como cíclicamente simétrica de orden n con respecto a un eje 0 de rotación, si el aspecto elasto-estático que presenta respecto a un observador cíclico, permanece invariable por rotación de la estructura, alrededor de 0, un ángulo $2\pi/n$. El aspecto elasto-estático comprende todas las propiedades de topología, geometría, elasticidad y coacciones que son esenciales a un cálculo lineal de la estructura [1].

Una estructura con simetría cíclica, no necesariamente posee un plano de simetría; por ejemplo, en la cúpula de Brno que es cíclica simétricamente, de orden 128, no existe un plano de simetría debido a las conexiones de las barras [2].

En esquema, se puede considerar una estructura con simetría cíclica como un conjunto de n elementos idénticos unidos entre sí en forma de cadena circular (Figura 1). Los elementos en sí pueden tener una geometría, propiedades y apoyos arbitrarios, pero la estructura como un todo contiene características periódicas. Ejemplos de este tipo de estructuras son los casos de las torres de refrigeración apoyadas en soportes aislados, cúpulas sobre planta poligonal regular, estructuras espaciales de revolución constituidas por barras, etc. Algunas se muestran en la figura 2. Todas ellas pueden ser calculadas bajo la acción de cargas arbitrarias de un modo sistemático, utilizando las características mecánicas de las subunidades que constituyen el sistema. A continuación se consideran estructuras que pueden ser descritas mediante un número finito de grados de libertad. El número de unidades que componen la estructura es n. Cada unidad se designa por un número j ($j = 0, 1, 2, ..., n-1$) y está conectada mediante q grados

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

de libertad comunes, a cada una de las unidades adyacentes. Estos grados de libertad (g d l) de cada interfaz entre los elementos j y j + 1 (eventualmente n−1 y 0) se denominan con el índice j (eventualmente n−1).

Se supone que cada unidad se discretiza en elementos finitos y/o barras, y está caracterizada por la matriz de rigidez k y las cargas equivalentes p_0 en los nudos. Mediante condensación de los grados de libertad interiores, y conservando únicamente los q(g d l) de cada una de las dos interfaces, se obtiene la siguiente relación fuerzas-movimientos para el elemento j:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Se ha designado por el índice 1 ó 2, respectivamente, a los grados de libertad de la interfaz del elemento j comunes con el anterior o posterior.

p_α y d_α ($\alpha = 1,2$) representan los vectores fuerzas sobre el elemento y los movimientos según los grados de libertad de la interfaz α. La dimensión de estos vectores es qx1.

$k_{\alpha\beta}$ es la submatriz de rigidez de dimensión qxq que relaciona p_α y d_β.

p_α^{0j} es el vector de fuerzas equivalentes en los gdl de la interfaz α. Su dimensión es qx1 y se conserva el superíndice j, para indicar la dependencia con el elemento j, es decir, las cargas no son en general cíclicamente simétricas.

Se supone que existen fuerzas aplicadas P_j directamente en los gdl externos de la estructura (j = =0, 1, ..., n−1).

Los grados de libertad en las distintas interfaces se describen en coordenadas cilíndricas con eje 0 y se utilizarán los términos axial, radial y tangencial en el sentido apropiado respecto a estos ejes. Con objeto de eliminar la posibilidad de movimientos de sólido rígido en la estructura, ésta debe de tener al menos una coacción elástica al movimiento axial, al menos en un nudo (y por consiguiente en todos sus homólogos en las distintas unidades). De esta forma se asegura adecuadamente la inexistencia de giros con ejes normales a 0. Por otra parte, para eliminar rotaciones respecto al eje 0, al menos un punto (y por lo tanto todos sus homólogos) tiene que poseer una coacción elástica al movimiento tangencial.

2.2. Análisis de una estructura cíclica

Existen varios procedimientos de análisis de una estructura cíclica. Así, la utilización del método de la matriz de transferencia, adecuado dado el carácter árbol de la estructura, y el consiguiente análisis espectral de esta matriz [3]. Otra posibilidad consiste en el planteamiento para los gdl de cada interfaz de las ecuaciones matriciales de equilibrio. De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones en diferencias finitas que puede ser resuelto de acuerdo con los métodos usuales en el análisis matemático [4] y [5]. En este artículo, se planteará un procedimiento, conceptualmente

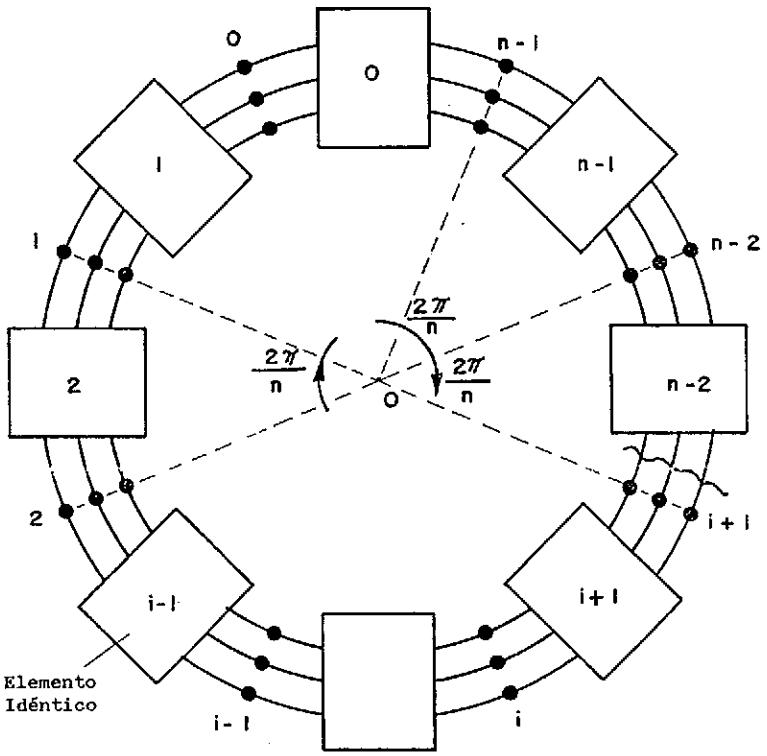
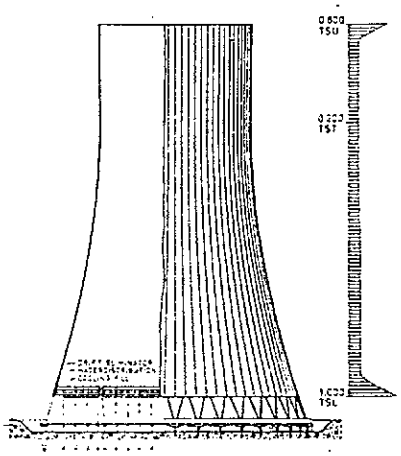
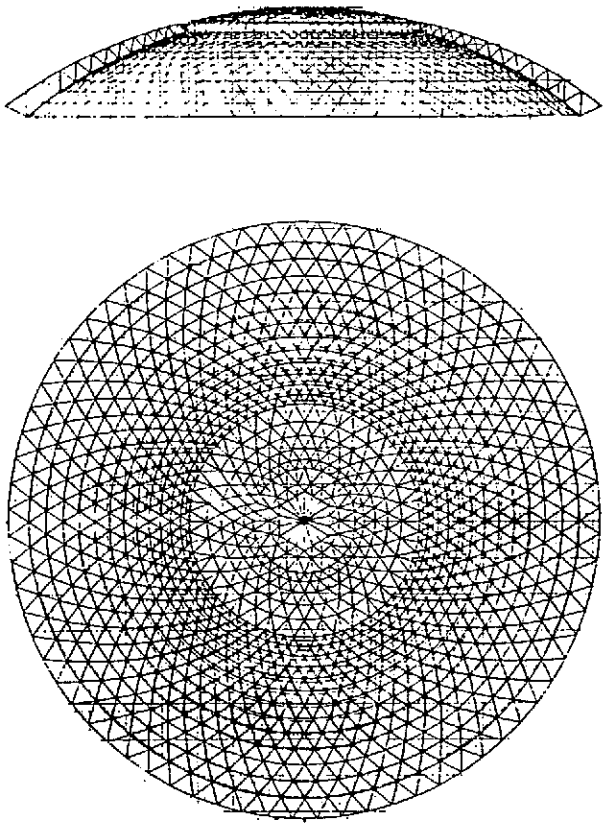


Fig. 1. Estructuras con simetría cíclica. Esquema.

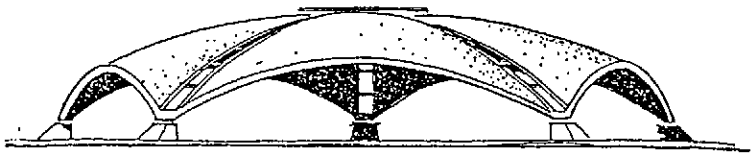
Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



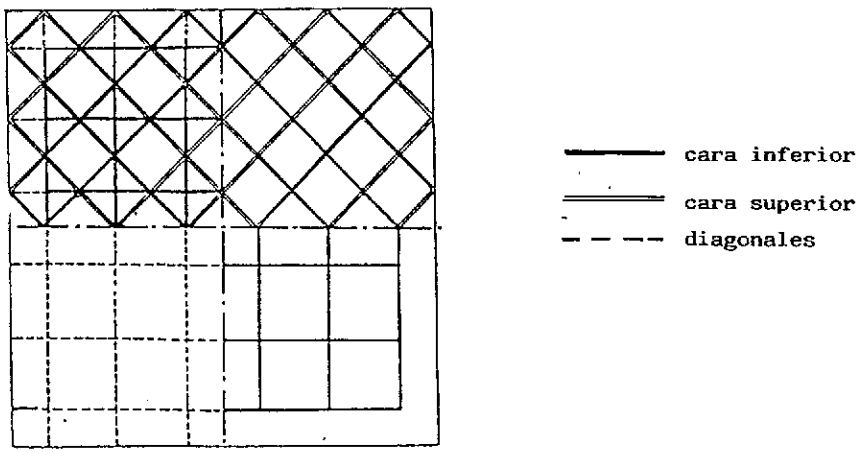
(a) Torre de refrigeración.



(b) Cúpula espacial.



(c) Lámina de cubierta.



(d) Celosía espacial.

Fig. 2. Estructuras periódicas. Ejemplos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

simple, basado en la transformada de Fourier de las cargas y características de la estructura. Los datos del problema son las matrices $k_{\alpha\beta}$, las fuerzas iniciales p_{α}^{0j} equivalentes a las acciones sobre el elemento j y las fuerzas P^j actuando directamente en los gdl de la interfaz j.

Con estos datos, a partir de una subestructura, es posible ensamblar la matriz de rigidez global en coordenadas cilíndricas, así como las fuerzas totales, obteniéndose el siguiente sistema de qxn ecuaciones lineales de equilibrio:

$$k\,d = p \qquad (2.2.a)$$

o bien, en forma desarrollada

$$\begin{bmatrix} k_{11}+k_{22} & k_{12} & 0 & 0 & . & 0 & k_{21} \\ k_{21} & k_{11}+k_{22} & k_{12} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & k_{21} & k_{11}+k_{22} & k_{12} & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & k_{11}+k_{22} & k_{12} \\ k_{12} & 0 & 0 & 0 & . & k_{21} & k_{11}+k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ . \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ . \\ . \\ p_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2.2.b)$$

con

d_j el vector de movimientos en los gdl de la interfaz j

$$(j = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

p_j el vector de fuerzas conocidas en los gdl de la interfaz j

$$(j = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

con

$$p_j = -p_1^{0,j-1} - p_2^{0,j} + P_j$$

El sistema anterior es quasicirculante, por lo que de acuerdo con el Apéndice A, se puede resolver como sigue:

Se descomponen las cargas en serie de Fourier discreta

$$p_k = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{p}_j\, e^{-i\frac{2\pi}{n}jk} \quad \text{con} \quad i = \sqrt{-1} \qquad (2.3)$$

en donde $\bar{p}_j$ son los coeficientes de Fourier del vector de cargas p_k que contiene todas las fuerzas a lo largo de la interfaz k. Se observa el signo negativo en el exponente en la transformación de Fourier.

La expresión de estos coeficientes de Fourier es

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k\, e^{i\frac{2\pi}{n}jk} \qquad (2.4)$$

Por consiguiente, el factor de cargas de toda la estructura es:

$$p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ p_k \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & . & I \\ I & Iz^{-1} & . & Iz^{-(n-1)} \\ I & Iz^{-2} & . & Iz^{-2(n-1)} \\ . & . & . & . \\ I & Iz^{-k} & . & Iz^{-k(n-1)} \\ I & Iz^{-(n-1)} & . & Iz^{-(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_0 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ . \\ \bar{p}_k \\ \bar{p}_{n-1} \end{bmatrix}$$

con $z = e^{i\cdot 2\pi/n}$ e I = matriz unidad de dimensión q, es decir, en forma compacta

$$p = Z\,\bar{p} \qquad (2.5.b)$$

Por otra parte la matriz de rigidez global (2.2.a) que es quasi circulante, puede expresarse de la forma siguiente:

$$k = Z\,B\,Z^{-1} \qquad (2.6)$$

con

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & & & 0 \\ & B_1 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & B_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_j = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\, z^{-jk}$$

En este caso

$$A_0 = k_{11} + k_{22} = k_0$$
$$A_1 = k_{12} = k_1$$
$$A_2 = A_3 = ...A_{n-2} = 0$$
$$A_{n-1} = k_{21} = k_1^T$$

con lo que se deduce

$$B_j = k_0 + (k_1 + k_1^T)\cos\frac{2\pi j}{n} +$$

$$+ i\,(k_1^T - k_1)\,\text{sen}\,\frac{2\pi j}{n} = k_s + i\,k_a \qquad (2.7)$$

Las ecuaciones de equilibrio global de la estructura son:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$k\,d = p$$

con lo que al sustituir en ellas las expresiones anteriores, se obtiene:

$$Z\,B\,Z^{-1}\,d = Z\,\bar{p}$$

o bien

$$d = Z\,B^{-1}\,\bar{p} = Z\,\bar{d} \qquad (2.8)$$

con

$$\bar{d} = B^{-1}\,\bar{p}$$

el vector transformado de Fourier del vector movimientos $\bar{d}$.

Expresando la ecuación anterior en función de los movimientos en cada interfaz, se deduce

$$\bar{d}_j = B_j^{-1}\,\bar{p}_j \qquad (2.9)$$

y por consiguiente

$$d_k = \sum_{j=o}^{n-1} \bar{d}_j\, e^{-i\frac{2\pi}{n}jk} \qquad (2.10)$$

2.3. Método de cálculo

En resumen, el procedimiento de cálculo sigue los siguientes pasos:

(1) Formar las submatrices de rigidez del elemento periódico, es decir:

$$k_0 = k_{11} + k_{22}\ ; \quad k_1 = k_{12} \qquad (2.11)$$

(2) Calcular las inversas de las matrices hermíticas, es decir, B_j^{-1}, siendo:

$$B_j = k_0 + (k_1 + k_1^T)\cos\frac{2\pi j}{n} + $$
$$+ i\,(k_1^T - k_1)\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi j}{n} \qquad (2.12)$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

(3) Calcular la transformada de Fourier de las cargas actuantes en cada elemento j:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k\, e^{i\frac{2\pi}{n}jk} \qquad (2.13)$$

En algunos casos particulares de cargas, como las simétricas radialmente o verticalmente uniformes, pueden ser calculadas estas transformadas de un modo analítico.

(4) Determinar, utilizando las fórmulas anteriores, los movimientos $\bar{d}_j$ (transformada de Fourier) y d_k, de cada interfaz entre elementos:

$$\bar{d}_j = B_j^{-1}\,\bar{p}_j \qquad (2.14)$$

$$d_k = \sum_{j=o}^{n-1} \bar{d}_j\, e^{-i\frac{2\pi}{n}jk} \qquad (2.15)$$

(5) Una vez calculados los valores de los desplazamientos, se deducen las acciones sobre el elemento j, mediante la aplicación de la expresión (2.1), es decir:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix}$$

con

$d_1 = d_{j-1}$ (eventualmente para $j = 0$; $d_1 = d_{n-1}$)
$d_2 = d_j$

Respecto al método de cálculo anterior, conviene hacer las siguientes observaciones:

La determinación de B_j^{-1}, representa un esfuerzo de cálculo relativamente importante, ya que debe efectuarse n veces la inversión de una matriz de dimensión qxq.

Si

$$B_j = k_s + i\,k_a \qquad (2.16)$$

con

$$k_s = k_0 + (k_1 + k_1^T)\cos\frac{2\pi}{n}j\ ;$$

$$k_a = (k_1^T - k_1)\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}j$$

entonces, se deduce

$$B_j^{-1} = \bar{k}_s - i\,\bar{k}_a \qquad (2.17)$$

siendo

$$\bar{k}_s = (k_s + k_a\,k_s^{-1}\,k_a)^{-1}$$
$$\bar{k}_a = (k_s + k_a\,k_s^{-1}\,k_a)^{-1}\,k_a\,k_s^{-1}$$

En el caso de que q sea pequeño, puede ser interesante, proceder a la inversión de la matriz B_i, en lugar de la fórmula (2.17), mediante una matriz simétrica $\tilde{B}_j$, de dimensión 2qx2q, que es equivalente a la hermítica. La expresión de $\tilde{B}_j$, es

$$\tilde{B}_j = \begin{vmatrix} k_s & k_a \\ k_a^T & k_s \end{vmatrix}$$

La inversa de esta matriz se escribe

$$\tilde{B}_j^{-1} = \begin{vmatrix} \bar{k}_s & -\bar{k}_a \\ -\bar{k}_a^T & \bar{k}_s \end{vmatrix}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Es interesante comprobar que las fórmulas (2.17) representan la inversión de $\tilde{B}_j$ mediante submatrices de orden qxq.

Por otra parte, se observa que para cada valor de j, la matriz k_s, cuya inversa hay que determinar, es distinta. Si el número de orden cíclico n es importante, una alternativa, con objeto de reducir el esfuerzo de cálculo que significa este número elevado de inversiones, consiste en resolver previamente el problema de autovalores y autovectores siguiente:

$$\left| k_0 - \lambda (k_1 + k_1^T) \right| = 0 \qquad (2.18)$$

Sean $\Delta = \text{diag}\,(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ los autovalores y $\psi = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_{n-1})$ los autovectores del problema (2.18), entonces, se escribe:

$$\psi^T k_s \psi = \psi^T [k_0 + (k_1 + k_1^T) \cos \frac{2\pi}{n} j] \psi = k_s^* \qquad (2.19)$$

siendo

$$k_s^* = \text{diag}\,(k_{sh}) \quad \text{con} \quad h = 0, 1, ..., n-1$$

$$k_{sh} = [\lambda_h + \cos \frac{2\pi}{n} j] \psi_h^T (k_1 + k_1^T) \psi_h =$$

$$= (\lambda_h + \cos \frac{2\pi}{n} j)\, m_h^*$$

con

$$m_h^* = \psi_h^T (k_1 + k_1^T) \psi_h$$

La inversa buscada, de k_s es:

$$k_s^{-1} = \psi (k_s^*)^{-1} \psi^T \qquad (2.20)$$

siendo

$$(k_s^*)^{-1} = \text{diag} \left[\frac{1}{(\lambda_h + \cos \frac{2\pi}{n} j)\, k_h^*} \right]$$

2.4. Casos particulares

Un caso particular del cálculo anterior corresponde a la actuación de cargas cíclicas, es decir, cuando se cumple la igualdad de acciones entre los gdl de cada interfaz:

$$p_0 = p_1 = \cdots = p_{n-1} = p \qquad (2.21)$$

En estas condiciones, los movimientos también son cíclicos, y por consiguiente

$$d_0 = d_1 = \cdots = d_{n-1} = d \qquad (2.22)$$

La ecuación (2.2.b) se transforma, en este caso, en una única para cada subunidad:

$$(k_{11} + k_{22} + k_{12} + k_{21})\, d = p \qquad (2.23)$$

La ecuación (2.23), corresponde a la expresión del principio de periodicidad estructural enunciado y aplicado en [6], que dice: "En el cálculo de un sistema compuesto por una serie de elementos idénticos, tanto en cargas, como en su aspecto elásto-estático, sólo es preciso considerar un elemento típico, identificando los gdl exteriores, es decir, los de las dos interfaces que lo conectan con los elementos adyacentes. Este principio es aplicable no sólo a estructuras cíclicas, sino a las espacialmente periódicas en general".

La aplicación de este principio, puede efectuarse sobre el elemento típico completo, con sus gdl interiores sin eliminar mediante condensación estática. La figura 3, indica esta aplicación. Sean:

$$d_i, d_1, d_2$$

y

$$p_i, p_1, p_2$$

los movimientos y las fuerzas en los gdl interiores y en las interfaces 1 y 2 del elemento, respectivamente.

Las condiciones de simetría cíclica son:

$$d_1 = d_2 = d_e$$

y

$$p_1 = p_2 = p_e$$

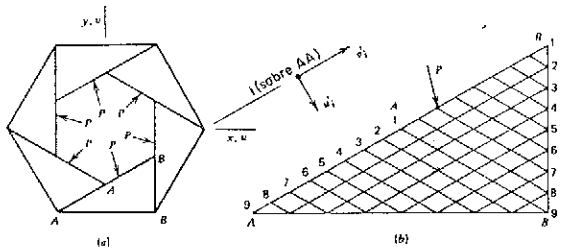
con p_e carga exterior aplicada en los gdl de una interfaz.

Las ecuaciones de equilibrio del elemento se obtienen mediante los métodos standard del cálculo matricial de estructuras; con lo que resulta:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{i1} + k_{i2} \\ k_{ii} + k_{2i} & k_{11} + k_{22} + k_{12} + k_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ d_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ p_e \end{bmatrix}$$

con p_i las cargas en los gdl interiores.

Es decir, para el cálculo de la estructura puede utilizarse un programa standard (SAP, ANSYS, etc.), bastando únicamente, a efectos del ensamblaje estructural, numerar de un modo idéntico



D_I, D_A y D_B en gdl interiores, AA y BB respect.
P_I, P_A y P_B " " " " " "

pero $P_A = 0$ ó $P_B = 0$ por simetría

R_A y R_B reacciones $(R_A = -R_B)$

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IA} & K_{IB} \\ K_{AI} & K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BI} & K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_I \\ D_A \\ D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_I \\ P_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_A \\ R_B \end{bmatrix}$$

$D_B = D_A$ y $R_B + R_A = 0$ resulta

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{II} & K_{IA} + K_{IB} \\ \hline K_{IA}^T + K_{IB}^T & K_{AA} + K_{AB} + K_{AB}^T + K_{BB} \end{array} \right] \begin{bmatrix} D_I \\ D_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_I \\ P_A \end{bmatrix}$$

Fig. 3. Ilustración del principio de periodicidad estructural.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

los gdl de los bordes (interfaces) del elemento y referirlos a unos ejes locales (coordenadas cilíndricas) adecuados, como se indica en la figura 3.

Una simplificación adicional aparece cuando el elemento típico posee un plano radial de simetría, con lo que se cumple la igualdad

$$k_{11} = k_{22}$$

Las cargas con simetría cíclica que en general se distribuyen de forma arbitraria dentro de cada elemento, se pueden siempre descomponer, dentro de cada uno, como suma de una distribución simétrica más una antisimétrica de cargas, respecto al plano radial de simetría.

Cada uno de estos dos casos anteriores de carga, pueden ser calculados imponiendo condiciones de simetría o antimetría en los dos bordes del elemento mitad, es decir, en los gdl situados en el plano radial de simetría y en los de una de las interfaces. Estas condiciones, como es bien conocido, son para cada caso las siguientes:

(1) Simetría de cargas.
Los desplazamientos normales al plano de simetría de carga, y los giros con ejes contenidos en el mismo son nulos.

Las acciones contenidas en el plano de simetría (fuerzas en el plano y momentos con eje normal al mismo) se dividen por dos.

(2) Antisimetría de cargas.
Los desplazamientos contenidos en el plano de simetría de cargas y los giros con ejes normal al mismo, son nulas.

Las acciones normales al plano de antimetría (fuerzas normales y momentos con eje normal al mismo) se dividen por dos.

A veces, la discretización en elementos finitos no coincide con el plano de simetría (figura 4), por lo que se pueden introducir las condiciones de simetría en los nudos de la interfaz, como se ha indicado; pero en los nudos simétricos exteriores a la misma, las de periodicidad deberán introducirse en sus correspondientes ejes locales. Si A y A' son puntos simétricos pertenecientes a un único elemento cortado por el plano de simetría, estas condiciones de simetría son en coordenadas cilíndricas.

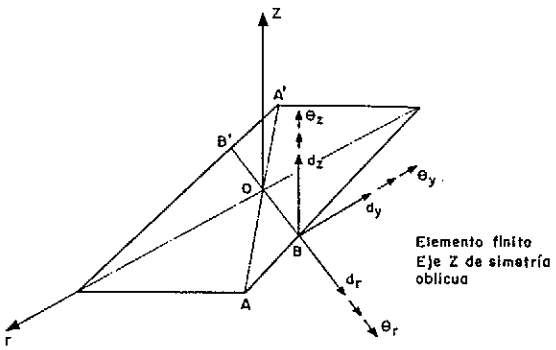


Fig. 4. Introducción de condiciones de simetría.

Desplazamientos	Giros
$d_\psi(A) = d_\psi(A')$	$\theta_\psi(A) = \theta_\psi(A')$
$d_r(A) = d_r(A')$	$\theta_r(A) = \theta_r(A')$
$d_z(A) = d_z(A')$	$\theta_z(A) = \theta_z(A')$

Las condiciones de antimetría de la carga son las anteriores cambiadas de signo.

Un caso particular muy interesante de simetría cíclica estructural, corresponde a $n = 2$, que se suele denominar simetría oblícua. No será tratado específicamente en el breve espacio de este artículo.

2.5. Ejemplo ilustrativo

Movimientos en la estructura reticulada de la figura 5 correspondiente a un triángulo equilatero.

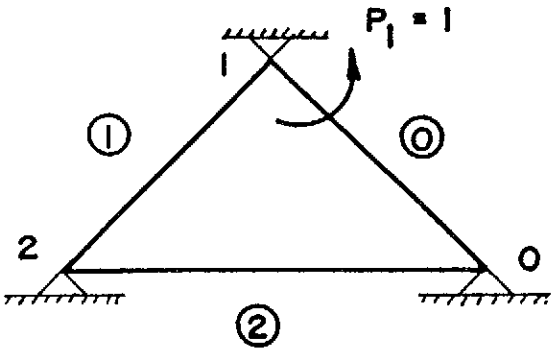


Fig. 5. Estructura cíclica. Ejemplo ilustrativo.

Rigidez de una barra

$$k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}$$

Por consiguiente, se deduce en este caso:

$$k_0 = \frac{8\,EI}{L}\ ; \quad k_1 = k_1^T = \frac{2\,EI}{L}$$

$$n = 3\ ; \quad \alpha = \frac{2\,\pi}{3}$$

Transformada de las cargas:

$$\overline{p}_j = \frac{1}{3}\, e^{i\alpha_j}\, P_1$$

Matriz de impedancia y su inversa:

$$B_j = \frac{4\,EI}{L}(2 + \cos\alpha_j)\ ; \quad B_j^{-1} = \frac{L}{4\,EI}\ \frac{1}{2 + \cos\alpha_j}$$

Los movimientos son

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$d_k = \sum_{j=0}^{2} \bar{d}_j \, e^{-i\alpha_j k} =$$

$$= \frac{L}{12\,EI} \sum_{j=0}^{2} \frac{e^{-i\alpha_j (k-1)}}{2+\cos\alpha_j} P_1$$

es decir

$$d_0 = \frac{L}{12\,EI} \sum_{j=0}^{2} \bar{d}_j \, e^{i\alpha_j} =$$

$$= P_1 \frac{L}{12\,EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1{,}5}\right) = -\frac{L}{36\,EI} P_1$$

$$d_1 = \frac{L}{12\,EI} \sum_{j=0}^{2} \bar{d}_j =$$

$$= P_1 \frac{L}{12\,EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{1{,}5}\right) = -\frac{5L}{36\,EI} P_1$$

$$d_2 = \frac{L}{12\,EI} \sum_{j=0}^{2} \bar{d}_j \, e^{-i\alpha_j} =$$

$$= P_1 \frac{L}{12\,EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{1{,}5}\right) = -\frac{L}{36\,EI} P_1$$

Los esfuerzos en cada extremo de barra son:

Barra 0:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{P_1 L}{36\,EI} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} P_1$$

Barra 1:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{P_1 L}{36\,EI} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} P_1$$

Barra 2:

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{P_1 L}{36\,EI} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} P_1$$

3. ESTRUCTURAS ESPACIALMENTE PERIODICAS

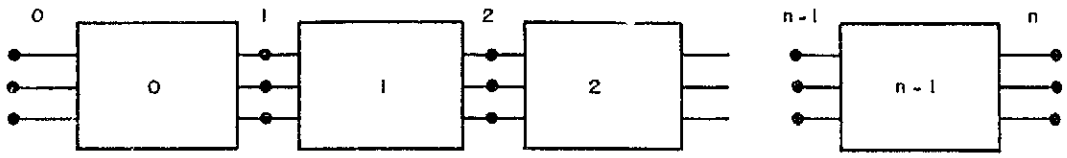
3.1. Definición

Existe otro tipo de estructuras compuestas por múltiples elementos idénticos, unidos en forma de cadena abierta (Figura 6). En contraposición a las estructuras con simetría cíclica de tipo cadena cerrada, aquí en las estructuras se puede distinguir un primer elemento (elemento 0) y un último designado por n−1. Cada uno de estos elementos presenta idénticas propiedades y condiciones de contorno, a excepción de las interfaces extremas (designadas por 0 y n) que pueden poseer otro tipo de condiciones de contorno.

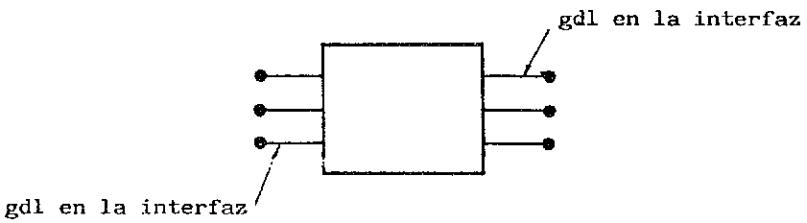
Se observa que si se aplica una traslación a un elemento i, este coincide con el siguiente i+1; de ahí el nombre de estructuras espacialmente periódicas. Esta periodicidad, puede referirse a una traslación o bien a una rotación alrededor de un eje 0. Ambas situaciones pueden ser tratadas de forma unificada, considerando bien unos ejes rectangulares cartesianos en el primer caso o unos ejes cilíndricos con origen en 0 en el segundo, para describir los q grados de libertad comunes en cada interfaz entre elementos.

Utilizando idéntica notación que en el apartado 2.1, la relación fuerzas-movimientos para el elemento j es:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$



a) Estructura.



b) Elemento.

Fig. 6. Estructuras espacialmente periódicas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

3.2. Análisis de una estructura espacialmente periódica

Existen distintos métodos de análisis de estructuras periódicas espacialmente, pero aquí sólo se expone el análogo al utilizado en las estructuras cíclicas, y que está basado en la aplicación de la transformación de Fourier.

Se supone que existen coacciones adecuadas, bien en algunos gdl de las interfaces intermedias de la estructura, o bien en los gdl de las interfaces extremas.

Con esta hipótesis, a partir de la ecuación (3.1) válida para cada elemento, es posible, mediante ensamblaje, obtener la matriz de rigidez global de la estructura, llegando al siguiente sistema de $q \times (n+1)$ ecuaciones lineales:

$$k\, d = p \tag{3.2}$$

en donde las matrices de rigidez k y vectores de movimientos d y fuerzas o, son:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11}+\bar{k}_{22} & k_{12} & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{11}+k_{12} & k_{12} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & k_{11}+k_{22} & k_{12} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & k_{11}+k_{22} & k_{12} \\ . & . & . & . & . & k_{21} & \bar{k}_{11}+k_{22} \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} ; \; p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_1^{0,0} \\ -p_2^{0,0}+p_1^{0,1} \\ -p_2^{0,1}+p_1^{0,2} \\ \vdots \\ p_1^{0,n-1}+p_1^{0,n-1} \\ p_2^{0,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix}$$

con $\bar{k}_{22}$ y $\bar{k}_{11}$ las submatrices adicionales del primero y último elemento, respectivamente, en las que pueden estar incluidas las condiciones específicas de borde.

Las restantes matrices y vectores se designan como en el apartado 2 anterior. El sistema (3.2) se escribe de forma que presente una estructura matricial circulante, como sigue:

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & 0 & \dots & 0 & k_1^T \\ k_1^T & k_0 & k_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_1^T & k_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ k_1 & 0 & 0 & \dots & k_1^T & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 + k'_0 d_0 + k_1^T d_n \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n + k'_n d_n + k_1 d_0 \end{bmatrix} \tag{3.3.a}$$

con

$$k_0 = k_{11} + k_{22} \; ; \quad k_1 = k_{12}$$
$$k'_0 = k_{22} - \bar{k}_{22} \; ; \quad k'_n = k_{11} - \bar{k}_{11} \tag{3.3.b}$$

Con objeto de resolver esta estructura, se procede, como es normal en el cálculo de estructuras, en dos fases. En la primera se determina la rigidez de la misma, considerando los gdl en las interfaces extremas 0 y n. En la segunda fase se calcula la estructura supuesta ésta coaccionada totalmente en sus extremos y bajo la actuación de todas las cargas existentes, obteniéndose así la solución inicial. La combinación de los dos cálculos de modo que se satisfaga el equilibrio en los gdl de las interfaces extremas, permite obtener la solución final.

En ambas fases de cálculo, se utilizarán los resultados deducidos en el Apéndice A, en relación con las matrices circulantes.

3.3. Matriz de rigidez

Se puede deducir del sistema (3.2) con cargas p_0 y p_n únicamente, es decir, $p_j = 0$ en $j = 1, 2, \dots, n-1$. Para la resolución del citado sistema se definen las siguientes matrices hermíticas:

$$B_j = k_0 + (k_1 + k_1^T) \cos \frac{2\pi}{n+1} j + $$
$$+ i\,(k_1^T - k_1) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n+1} j = k_s + i\, k_a \tag{3.4}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

con

$$i=\sqrt{-1} \quad j=0,1,2,\ldots,n$$

Se han suprimido en (3,4), por comodidad de escritura, los índices j, en las matrices simétricas k_s y antisimétrica k_a.

La inversa de B_j, es:

$$B_j^{-1}=\bar{k}_s - i\,\bar{k}_a \tag{3.5}$$

en donde $\bar{k}_s$ y $\bar{k}_a$ pueden determinarse de varias formas. En particular, se pueden calcular mediante las expresiones siguientes:

$$\bar{k}_s=(k_s+k_a\,k_s^{-1}\,k_a)^{-1}$$
$$\bar{k}_a=\bar{k}_s\,k_a\,k_s^{-1}$$

Las transformadas de Fourier de las fuerzas son

$$\bar{p}_j=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_k\,e^{i\frac{2\pi}{n+1}jk}$$

es decir, si se suponen que no existen fuerzas intermedias, sólo en los bordes $k=0$ y $k=n$, se obtiene

$$\bar{p}_j=\frac{1}{n+1}\,[(p_0+k_0'\,d_0+k_1^T\,d_n)+$$
$$+(p_n+k_1\,d_0+k_n'\,d_n)\,e^{-\frac{2\pi j}{n+1}j}\,]$$

La transformada de Fourier de los desplazamientos es:

$$\bar{d}_j=\frac{1}{n+1}\,B_j^{-1}\,[(p_0+k_0'\,d_0+k_1^T\,d_n)+$$
$$+(p_n+k_1\,d_0+k_n'\,d_n)\,e^{-\frac{2\pi j}{n+1}j}\,]$$

Los desplazamientos reales se calculan mediante la aplicación de la fórmula de transformación inversa de Fourier, es decir:

$$d_k=\sum_{j=0}^{n}\bar{d}_j\,e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk}$$

En particular, los movimientos de las interfaces extremas $k=0$ y $k=n$, son:

$$d_0=\sum_{j=0}^{n}\bar{d}_j=S_0\,(p_0+k_0'\,d_0+k_1^T\,d_n)+$$
$$+S_{-1}(p_n+k_1\,d_0+k_n'\,d_n) \tag{3.6}$$

$$d_n=\sum_{j=0}^{n}\bar{d}_j\,e^{i\frac{2n}{n+1}j}=S_1\,(p_0+k_0'\,d_0+k_1^T\,d_n)+$$
$$+S_0\,(p_n+k_1\,d_0+k_n'\,d_n)$$

siendo

$$S_0=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}B_j^{-1}$$

$$S_1=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}B_j^{-1}\,e^{i\frac{2\pi}{n+1}j}$$

$$S_{-1}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}B_j^{-1}\,e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j}$$

o bien, de forma única, para h genérico:

$$S_h=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}B_j^{-1}\,e^{i\frac{2\pi}{n+1}jh}$$

Se observa que se cumple $S_h=S_{h+n+1}$.

A partir de (3.6) se deduce la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{00} & k_{0n} \\ k_{n0} & k_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

con

$$k_{00}=S^{-1}\,S_0-k_0'$$
$$k_{0n}=-S^{-1}\,S_{-1}-k_1^T$$
$$k_{n0}=-S^{-1}\,S_1-k_1$$
$$k_{nn}=S^{-1}\,S_0-k_n'$$
$$S=-S_1\,S_{-1}+S_0\,S_0$$

3.4. Solución inicial

Finalmente, la solución inicial, es decir, la carga equivalente en los gdl de las interfaces extremas (0, n) a una aplicada en los gdl de la interfaz interior h, con $d_0=d_n=0$ (empotramiento total) se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & 0 & \ldots & 0 & k_1^T \\ k_1^T & k_0 & k_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_0 & \ldots & k_0 & k_1 \\ k_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ 0 \\ p_h \\ 0 \\ \hat{p}_n \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

en donde $\hat{p}_0$ y $\hat{p}_n$ son reacciones desconocidas, por lo que en las ecuaciones correspondientes a los gdl de las interfaces 0 y n, se conocen los movimientos d_0 y d_n (3.8).

Procediendo análogamente con la matriz circulante, se obtiene:

$$\bar{p}_j=\frac{1}{n+1}\,[\hat{p}_0+\hat{p}_n\,e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j}+p_h\,e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj}\,]$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\bar{d}_j = \frac{1}{n+1} B_j^{-1} [\hat{p}_0 + \hat{p}_n e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j} + p_h e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj}]$$

Los movimientos son:

$$d_k = \sum_{j=0}^{n} \bar{d}_j e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk} \qquad (3.9)$$

Los movimientos en las interfaces 0 y n son, por consiguiente:

$$d_0 = \sum_{j=0}^{n} \bar{d}_j = 0$$

$$d_n = \sum_{j=0}^{n} \bar{d}_j e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j} = 0 \qquad (3.10)$$

El sistema (3.10) permite obtener los valores de las reacciones incógnitas $\hat{p}_0$ y $\hat{p}_n$ y se puede escribir como sigue:

$$S_0 \hat{p}_0 + S_{-1} \hat{p}_n + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj} \cdot p_h = 0$$

$$(3.11)$$

$$S_1 \hat{p}_0 + S_0 \hat{p}_n + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}(h+1)j} \cdot p_h = 0$$

La solución de (3.11) es:

$$\hat{p}_0 = \frac{S^{-1}}{n+1} \left[\sum_{j=0}^{n} B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj} (e^{i\frac{2\pi}{n+1}j} S_{-1} - S_0) \right] p_h$$

$$(3.12)$$

$$\hat{p}_n = \frac{S^{-1}}{n+1} \left[\sum_{j=0}^{n} B_j^{-1} e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj} (e^{i\frac{2\pi}{n+1}j} S_0 + S_1) \right] p_h$$

que puede escribirse en la siguiente forma:

$$\hat{p}_0 = S^{-1} (S_{h+1} S_{-1} - S_h S_0)$$

$$(3.12.a)$$

$$\hat{p}_n = S^{-1} (-S_{h+1} S_0 - S_h S_1)$$

con S_h definido anteriormente.

Conocidas las reacciones $\hat{p}_0$ y $\hat{p}_n$ se deducen los movimientos de la solución inicial mediante (3.9).

3.5. Solución final

La solución final se obtiene como suma de la inicial y la modal producidas por los movimientos en las interfaces extremas, de forma que el equilibrio se satisfaga en las mismas. Se designan con un superíndice F (final), I (inicial) y M (modal) para indicar la correspondiente solución. Por consiguiente, se escribe:

$$d_k^F = d_k^I + d_k^M \qquad (3.13)$$

Los movimientos d_k^M se deducen a partir de la ecuación de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} k_{00} & k_{0n} \\ k_{n0} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^M \\ d_n^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_n \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

con $\hat{p}_0$ y $\hat{p}_n$ definidas en (3.12). Una vez determinados los movimientos d_0^M y d_n^M los restantes se obtienen mediante la expresión:

$$d_k^M = \sum_{j=0}^{n} \bar{d}_j^M e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk} \qquad (3.15)$$

siendo

$$\bar{d}_j^M = \frac{1}{n+1} B_j^{-1} [(k'_0 d_0^M + k_1^T d_n^M) +$$

$$+ (k_1 d_0^M + k'_n d_n^M) e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j}]$$

Los movimientos de d_k^I son:

$$d_k^I = \sum_{j=0}^{n} \bar{d}_j^I e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk} \qquad (3.16)$$

siendo

$$\bar{d}_j^I = \frac{1}{n+1} B_j^{-1} [\hat{p}_0 + \hat{p}_n e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j} + p_h e^{i\frac{2\pi}{n+1}hj}]$$

con $\hat{p}_0$ y $\hat{p}_n$ definidas en (3.12).

Una vez conocidos los movimientos finales d_k^F, se obtienen las acciones sobre el elemento j, mediante las expresiones:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_j \\ d_{j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1^{0j} \\ p_2^{0j} \end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

$$j = 1, 2, ..., n-2$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} + \bar{k}_{22} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_{n-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \bar{k}_{11} + \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Una observación última referente a la posibilidad de obtener la solución final de forma más directa en los casos frecuentes de bordes libres, es decir, con movimientos desconocidos d_0 y d_n. Se supone en estos casos que las condiciones de borde están incluidas en las matrices adicionales $\bar{k}_{11}$ y $\bar{k}_{22}$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El procedimiento que se debe seguir, parte de la ecuación (3.3) con $p_j = 0$ para $j \neq h$; $j = 1, 2, \ldots$ y p_h fuerzas conocidas, que se escriben ahora:

$$\begin{bmatrix} k_0 & k_1 & 0 & \ldots & 0 & k_1^T \\ k_1^T & k_0 & k_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & k_1^T & k_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k_0 & k_1 \\ k_1 & 0 & 0 & \ldots & k_1^T & k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k'_0\, d_0 + k_1^T\, d_n \\ 0 \\ 0 \\ p_h \\ 0 \\ \vdots \\ k'_n\, d_n + k_1\, d_0 \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

La transformada de Fourier de las fuerzas de este sistema de ecuaciones es:

$$\overline{p}_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_k\, e^{i\frac{2\pi}{n+1}jk} \qquad (3.18)$$

es decir

$$\overline{p}_j = \frac{1}{n+1} [(k'_0\, d_0 + k_1^T\, d_n) +$$

$$+ (k_1\, d_0 + k'_n\, d_n)\, e^{-i\frac{2\pi}{n+1}j} + p_h\, e^{i\frac{2\pi}{n+1}jh} \qquad (3.19)$$

La transformada de Fourier de los desplazamientos es:

$$\overline{d}_j = B_j^{-1}\, \overline{p}_j \qquad (3.20)$$

cuya inversa conduce a los desplazamientos reales

$$d_k = \sum_{j=0}^{n} \overline{d}_j\, e^{-i\frac{2\pi}{n+1}jk} \qquad (3.21)$$

Particularizando la ecuación anterior para $k = 0$ y $k = n$, se deduce

$$d_0 = S_0\, (k'_0\, d_0 + k_1^T\, d_n) + S_{-1}\, (k_1\, d_0 + k'_n\, d_n) +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n+1}jh}\, p_h \qquad (3.22)$$

$$d_n = S_1\, (k'_0\, d_0 + k_1^T\, d_n) + S_0\, (k_1\, d_0 + k'_n\, d_n) +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n+1}(h+1)j}\, p_h$$

A partir de las ecuaciones (3.22) se determinan los movimientos incógnitas d_0 y d_n como sigue:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 & S_n \\ S_1 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} S_h \\ S_{h+1} \end{bmatrix} p_h \qquad (3.23)$$

con

$$S_h = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n+1}jh}$$

$$S_{h+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n+1}j(h+1)}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = F^{-1} \begin{bmatrix} S_h \\ S_{h+1} \end{bmatrix} p_h$$

siendo

$$F = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_0 & S_n \\ S_1 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

Si se denomina $S_h = \alpha_h + i\, \beta_h$, la ecuación (3.23) se transforma en la siguiente:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + i \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_n \\ \beta_n & \beta_0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{h+1} \end{bmatrix} p_h + i \begin{bmatrix} \beta_h \\ \beta_{h+i} \end{bmatrix} p_h$$

Si se separan las partes reales e imaginarias de la ecuación, se obtiene al observar que d_0 y d_n son reales:

$$\left[\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{h+i} \end{bmatrix} p_h$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \beta_h \\ \beta_{h+1} \end{bmatrix} p_h$$

En la resolución de los sistemas de ecuaciones anteriores, es posible conservar el esquema particionado de las matrices, si se utiliza la igualdad siguiente de la inversión de matrices:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

en donde

$$H_{11} = (F_{11} - F_{22} F_{22}^{-1} F_{21})^{-1}$$
$$H_{12} = -H_{11} F_{12} F_{22}^{-1}$$
$$H_{21} = -F_{22}^{-1} F_{21} H_{11}$$
$$H_{22} = (F_{22}^{-1} - F_{22}^{-1} F_{21} H_{21})^{-1}$$

Una vez conocidas d_0 y d_n, se obtienen los restantes movimientos mediante la sucesiva aplicación de (3.19), (3.20) y (3.21) con lo que resulta:

$$d_k = \sum_{j=0}^{n} \bar{d}_j \, e^{-\frac{2\pi}{n+1} jk} = \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1} \bar{p}_j \, e^{-\frac{2\pi}{n+1} jk}$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1} [(k'_0 d_0 + k_1^T d_n) +$$

$$+ (k_1 d_0 + k'_n d_n) e^{-i\frac{2\pi}{n+1} j} +$$

$$+ p_h e^{i\frac{2\pi}{n+1} jh}] e^{-i\frac{2\pi}{n+1} jk} = S_{-k} (k'_0 d_0 + k_1^T d_n) +$$

$$+ S_{-(k+1)} (k_1 d_0 + k'_1 d_n) + S_{h-k} p_h$$

o bien en forma matricial:

$$d_k = [S_k, S_{-(k+1)}] \begin{bmatrix} k'_0 & k_1^T \\ k_1 & k'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_n \end{bmatrix} + S_{h-k} p_h$$

3.6. Ejemplo ilustrativo

Se considera una viga continua de tres vanos, de sección y luces iguales, (Figura 7). Este ejemplo en cadena abierta (simetría espacial) corresponde a la contrapartida del estudiado anteriormente con simetría cíclica.

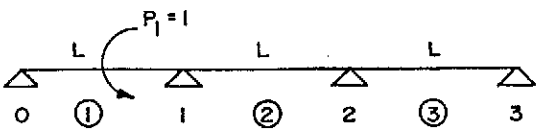


Fig. 7. Estructura periódica abierta. Ejemplo ilustrativo.

En este caso se tiene

$$n = 3 \quad ; \quad k_0 = 8 \frac{EI}{L} ; \quad k_1 = k_1^T = 2 \frac{EI}{L}$$

$$\bar{k}_{11} = \bar{k}_{22} = 0 \; ; \quad k'_0 = k'_n = 4 \frac{EI}{L}$$

La matriz de rigidez se obtiene (para los gdl 0 y 3) de acuerdo con las fórmulas (3.7).

$$B_j = 4 \frac{EI}{L} (2 + \cos j\alpha) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{2\pi}{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$B_j^{-1} = \frac{L}{4\,EI} \frac{1}{2 + \cos j\alpha}$$

$$S_0 = \frac{L}{16\,EI} \frac{3}{7} ; \quad S_1 = S_{-1} = \frac{L}{16\,EI} (-\frac{2}{3})$$

$$S = S_0 S_0 - S_1 S_{-1} = (\frac{L}{16\,EI})^2 \, 5 ; \quad S^{-1} = (\frac{16\,EI}{L})^2 \frac{1}{5}$$

$$k_{00} = S^{-1} S_0 - k'_0 = \frac{EI}{L} \left[\frac{16}{5} \cdot \frac{7}{3} - 4 \right] = \frac{52}{15} \frac{EI}{L} = k_{33}$$

$$k_{03} = S^{-1} S_{-1} - k_1^T = \frac{EI}{L} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{5} - 2 \right] = \frac{2}{15} \frac{EI}{L} = k_{30}$$

$$\underline{k} = \frac{EI}{15\,L} \begin{bmatrix} 52 & 2 \\ 2 & 52 \end{bmatrix}$$

Las cargas equivalentes a una fuerza (momento) en el gdl 1, se deducen de acuerdo con (3.12), resultando (h = 1):

$$S_{h+1} = S_2 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} B_j^{-1} e^{i\alpha j 2} = \frac{L}{16\,EI} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\hat{p}_0 = S^{-1} [S_2 S_{-1} - S_1 S_0] p_1 =$$
$$= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{3} (-\frac{2}{3}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} \right] P_1 = \frac{4}{15} P_1$$

$$\hat{p}_3 = S^{-1} [-S_2 S_0 + S_1 S_1] p_1 =$$
$$= \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} + \frac{4}{9} \right] P_1 = -\frac{1}{15} P_1$$

El resultado final se deduce del sistema

$$\frac{EI}{15\,L} \begin{bmatrix} 52 & 2 \\ 2 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_3 \end{bmatrix} + \frac{P}{15} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

cuya solución es:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{7}{90} \\ +\frac{2}{90} \end{bmatrix} P$$

Los restantes movimientos son, de acuerdo con (3.18):

$$d_k = (k_0' d_0 + k_1^T d_n)\, S_{-k} + $$
$$+ (k_1 d_0 + k_n' d_n)\, S_{-(k+1)} + p_h\, S_{h-k}$$

$$d_0 = \frac{1}{16}\left[(-4 \cdot \frac{7}{90} + 2 \cdot \frac{2}{90})\frac{7}{3} + \right.$$
$$\left. + (2 - \frac{7}{90} + 4 \cdot \frac{2}{90})(-\frac{2}{5}) - \frac{2}{3}\right]\frac{PL}{EI} =$$
$$= \frac{1}{16x3x90}\,[(-24) \cdot 7 + (-1) \cdot (-2) +$$
$$+ 90\,(-2)]\frac{PL}{EI} = -\frac{7}{90}\,\frac{PL}{EI}$$

$$d_1 = \frac{1}{16x3x90}\,[-24 \cdot (-2) + (-6) \cdot (1) +$$
$$+ 90 \cdot 7]\frac{PL}{EI} = -\frac{14}{90}\,\frac{PL}{EI}$$

$$d_2 = \frac{1}{16x3x90}\,[-24 \cdot 1 + (-6) \cdot (-2) +$$
$$+ 90 \cdot (-2)]\frac{PL}{EI} = -\frac{4}{90}\,\frac{PL}{EI}$$

$$d_3 = \frac{1}{16x3x90}\,[-24 \cdot (-2) + (-6) \cdot (7) +$$
$$+ 90 \cdot 1]\frac{PL}{EI} = -\frac{2}{90}\,\frac{PL}{EI}$$

y los momentos sobre cada barra son:

Barra 0

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}\frac{P}{15}$$

Barra 1

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix}\frac{P}{15}$$

Barra 2

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{P}{15}$$

4. APLICACION A TABLEROS DE PUENTES

4.1. Planteamiento del cálculo

Una alternativa al método de la losa ortotropa [9], para análisis de tableros de puentes, es un procedimiento directo de cálculo de estructuras que reconozca la realidad de las vigas y losas que constituyen el tablero del puente.

Se calcula el tablero del tipo que se representa en la figura 8. Los gdl entre interfaces que se consideran son los movimientos (flecha vertical y giro) de cada viga. Los elementos son las losas intermedias y por consiguiente n = n° de vigas −1.

El cálculo se efectúa mediante un método en movimientos o de equilibrio, por lo que se evalúan las matrices de rigidez transversales de cada elemento –losas y vigas– que componen el tablero. Se considera una solución Levy, que implica simple apoyo en los extremos x = 0 y x = 2a del puente.

En las figura 9 y 10 se presentan las matrices de rigidez de los elementos losa y viga para el armónico n. Es conveniente incluir, en las rigideces de

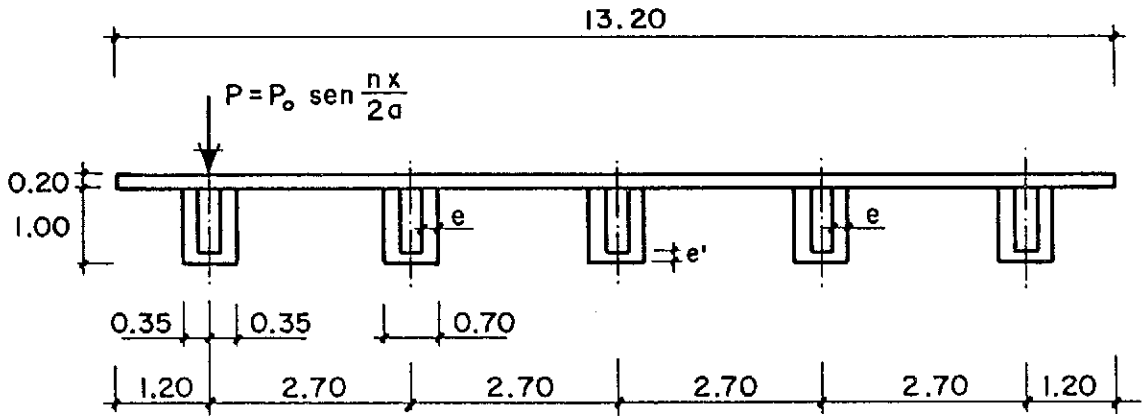


Fig. 8. Tablero de puente. Ejemplo de aplicación. Datos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

flexión y torsión de la viga, la zona correspondiente de losa que colabora a la resistencia de la viga. Por consiguiente, existirán en general dos matrices de rigidez de las vigas de borde K_{v1} y K_{v2} y una matriz de rigidez de la viga intermedia K_v.

Las ecuaciones de equilibrio se plantean en los grados de libertad situados en el cdg de cada viga. Por ello, se trasladan las acciones de cada extremo i de losa al cdg de la viga adyacente.

Las matrices de equilibrio de transformación correspondientes son:

$$P_i = T_i\, p_i \;\; ; \;\; d_i = T_i^T\, D_i \quad (i=1,2)$$

con

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-)^{i+1} b_v & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la losa, referida a los centros de gravedad de las vigas contiguas, es:

$$K_{ij} = T_i\, k_{ij}\, T_j^T$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & & & \\ K_3 & K_2 & \text{simétrico} & \\ K_4 & -K_5 & K_1 & \\ K_5 & K_6 & -K_3 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = k_1$$
$$K_2 = \beta^2 k_1 + 2\beta k_3 + k_2$$
$$K_3 = \beta k_1 + k_3$$
$$K_4 = k_4$$
$$K_5 = -\beta k_4 + k_5$$
$$K_6 = -\beta^2 k_4 + 2\beta k_5 + k_6$$

con $\beta = b_v\, \lambda$

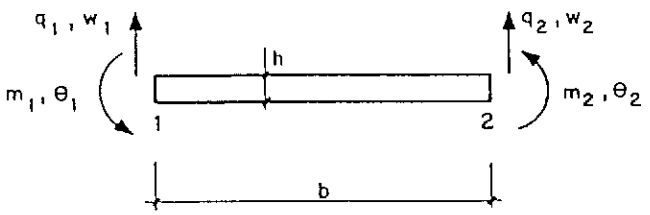
Las ecuaciones de equilibrio que resultan son:

Viga $j=0$

$$(K_{11} + K_{v1})\, D_0 + K_{12}\, D_1 = R_0$$

Vigas $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$K_{21} D_{j-1} + (K_{22} + K_{11} + K_v)\, D_j + K_{12} D_{j+1} = R_j \quad (4.1)$$



$$p_i = \begin{pmatrix} q_i \\ m_i \end{pmatrix} \;\; ; \;\; d_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

con $k_{11} = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ k_3 & k_2 \end{pmatrix}$; $k_{22} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 \end{pmatrix}$; $k_{12} = k_{21}^T \begin{pmatrix} k_4 & -k_5 \\ k_5 & k_6 \end{pmatrix}$

Solución exacta [7]:

$$k_1 = D\lambda^3 \bar{k}_1 ;\; \bar{k}_1 = \frac{s}{\frac{\mu}{s}+c} - \frac{c}{\frac{\mu}{s}-s}$$

$$k_2 = D\lambda \bar{k}_2 ;\; \bar{k}_2 = \frac{c}{\frac{\mu}{c}+s} - \frac{s}{\frac{\mu}{s}-c}$$

$$k_3 = D\lambda^2 \bar{k}_3 ;\; \bar{k}_3 = \frac{c}{\frac{\mu}{s}+c} - \frac{s}{\frac{\mu}{c}-s} - (1-\upsilon)$$

$$k_4 = D\lambda^3 \bar{k}_4 ;\; \bar{k}_4 = \frac{s}{\frac{\mu}{s}+c} + \frac{c}{\frac{\mu}{c}-s}$$

$$k_5 = D\lambda^2 \bar{k}_5 ;\; \bar{k}_5 = -\left(\frac{c}{\frac{\mu}{s}+c} + \frac{s}{\frac{\mu}{c}-s}\right)$$

$$k_6 = D\lambda\, \bar{k}_6 ;\; \bar{k}_6 = -\left(\frac{c}{\frac{\mu}{c}+s} - \frac{s}{\frac{\mu}{s}-c}\right)$$

Solución bandas finitas [8]:

$$\bar{k}_1 = \frac{3}{2\mu^3} + \frac{6}{5}\,\frac{2-\nu}{\mu} + \frac{36}{35}\mu$$

$$\bar{k}_2 = \frac{2}{\mu} + \frac{8}{15}(2-\upsilon)\mu + \frac{8}{105}\mu$$

$$\bar{k}_3 = \frac{3}{2\mu^2} + \frac{2}{5}(1+2\upsilon) + \frac{32}{105}\mu$$

$$\bar{k}_4 = -\frac{3}{2\mu^3} - \frac{6}{5}\,\frac{2-\upsilon}{\mu} + \frac{9}{35}\mu$$

$$\bar{k}_5 = \frac{3}{2\mu^2} + \frac{1}{5}(2-\upsilon) - \frac{13}{105}\mu^2$$

$$\bar{k}_6 = \frac{1}{\mu} - \frac{2}{15}(2-\upsilon)\mu - \frac{2}{35}\mu^3$$

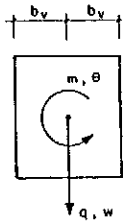
con

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \;\; ; \;\; \lambda = \frac{n\pi}{2a} \;\; ; \;\; \mu = \frac{n\pi b}{4a}$$

$$S = Sh\mu \;\; ; \;\; c = Ch\mu$$

Fig. 9. Matriz de rigidez de la losa para el armónico n-simo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



I= inercia a flexión de la viga respecto a y-y.
J= inercia a torsión de la viga.

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$P=\begin{bmatrix} q \\ m \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez
$P=K\ D$

$$K=\begin{bmatrix} EI\lambda^4 & 0 \\ 0 & GJ\lambda^2 \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad \lambda=\frac{n\pi}{2a}$$

Fig. 10. Matriz de rigidez de la viga para el armónico n-simo.

Viga j = n

$$K_{21}\ D_{n-1}+(K_{22}+K_{v2})\ D_n=R_n$$

siendo R_j la fuerza total existente en el cdg de la viga j.

El sistema de ecuaciones (4.1) puede transformarse en circulante, mediante la técnica descrita en el apartado 3 anterior. En este caso, las matrices que hay que considerar son:

$$k_0=K_{11}+K_{22}+K_v\ ;\quad k_1=K_{12}$$

$$\bar{k}_{11}=k_{v2}\ ;\ \bar{k}_{22}=K_{v1}\ ;\ k'_0=K_{22}-K_{v1}\ ;$$
$$k'_n=K_{11}-K_{v2}$$

4.2. Ejemplo de aplicación

Se ha estudiado el tablero representado en la figura 8, correspondiente a cinco vigas (n = 4). Los datos se han indicado en dicha figura, y en la notación de este apartado son:

$$2a=20{,}00\ \text{m}\ ;\quad b=2{,}00\ \text{m}\ ;\quad E=3\text{x}10^6\ \text{tm}^{-2}$$
$$\nu=0{,}20$$

Las características mecánicas de la flexión y torsión de las vigas extremas e intermedias son (figura 11):

Vigas intermedias:

$$I=0{,}1456\ \text{m}^4\ ;\quad J=0{,}09432\ \text{m}^4$$

Vigas extremas:

$$I=0{,}1399\ \text{m}^4\ ;\quad J=0{,}09432\ \text{m}^4$$

La matriz de rigidez de la losa se ha calculado mediante el procedimiento elástico exacto y según el método de las bandas finitas. Los resultados obtenidos son:

	Cálculo elástico exacto	Cálculo de bandas finitas
$\bar{k}_1=$	395.53166	400.93093
$\bar{k}_2=$	12.84089	12.88349
$\bar{k}_3=$	61.31347	61.36023
$\bar{k}_4=$	−395.37460	−399.36878
$\bar{k}_5=$	61.10529	61.14966
$\bar{k}_6=$	6.36974	6.32828

Se comprueba la excelente aproximación que se alcanza con el método de las bandas finitas en la determinación de los coeficientes de la matriz de rigidez.

Estos coeficientes de la matriz de la losa, al referirlos a los ejes en el cdg de las vigas son (b_v = =0,25; β=0,03927):

$$\bar{K}_1=395.53166$$
$$\bar{K}_2=12.84089$$
$$\bar{K}_3=61.31347$$

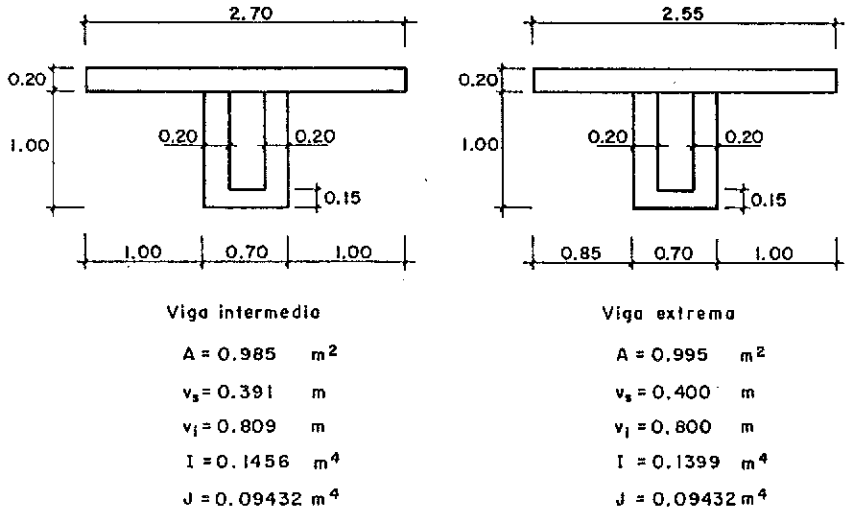


Fig. 11. Características de las vigas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\bar{K}_4 = -395.37460$$
$$\bar{K}_5 = 61.10529$$
$$\bar{K}_6 = 6.36974$$

Las constantes del cálculo son (unidades: toneladas y metros):

$$D = 2.083 \times 10^3$$
$$\lambda = 0.1571$$
$$\mu = 0.1571$$

Las matrices de rigidez de la losa y vigas se deducen, por lo tanto, de acuerdo con las fórmulas del apartado anterior.

$$K = \begin{bmatrix} 2759 & 3545 & -2758 & 3535 \\ & 5597 & -3535 & 3571 \\ \text{simétrica} & & 2758 & -3545 \\ & & & 5597 \end{bmatrix}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 244 & 0 \\ 0 & 4114 \end{bmatrix} \quad K_{v1} = K_{v2} = \begin{bmatrix} 218 & 0 \\ 0 & 3688 \end{bmatrix}$$

Los resultados parciales del cálculo se relacionan a continuación:

$$k_0 = K_{11} + K_{22} + K_v = \begin{bmatrix} 5762 & 0 \\ 0 & 15309 \end{bmatrix};$$

$$k_1 = K_{12} = \begin{bmatrix} -2758 & 3535 \\ -3535 & 3571 \end{bmatrix}$$

$$k'_0 = K_{22} - K_{v1} = \begin{bmatrix} 2540 & -3545 \\ -3545 & 1911 \end{bmatrix} = k'_5$$

$$k_1^T + k_1 = \begin{bmatrix} -5516 & 0 \\ 0 & 7142 \end{bmatrix};$$

$$k_1^T - k_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7070 \\ 7070 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices auxiliares B_j son:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 246 & 0 \\ 0 & 22452 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4058 & -6722i \\ 6722i & 17517 \end{bmatrix};$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 10224 & -4154i \\ 4154i & 9530 \end{bmatrix}; \quad B_5 = \begin{bmatrix} 4058 & 6722i \\ -6722i & 17517 \end{bmatrix};$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 10224 & 4154i \\ -4154i & 9530 \end{bmatrix}$$

Las matrices inversas B_j^{-1} son:

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 40.65 & 0 \\ 0 & 0.45 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 676 & 2.60i \\ -2.60i & 157 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1.19 & 0{,}52i \\ -0{,}52i & 1.28 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_5^{-1} = \begin{bmatrix} 6.76 & -2.60i \\ 2.60i & 1.57 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1.19 & -0.52i \\ 0.52i & 1.28 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Finalmente, las matrices S_j sólo presentan parte real, ya que la imaginaria se anula idénticamente:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 11.31 & 0 \\ 0 & 1.23 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 8.58 & -1.11 \\ 1.11 & 0.13 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 6.08 & -0.41 \\ 0.41 & -0.26 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_5 = \begin{bmatrix} 8.58 & 1.11 \\ -1.11 & -0.13 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 6.08 & 0.41 \\ -0.41 & -0.26 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

La matriz F resulta (3.24):

$$F = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.58 & 0.55 & 0.74 \\ 0.08 & 1.20 & -0.11 & -0.02 \\ 0.55 & -0.74 & 0.88 & -0.58 \\ 0.11 & -0.02 & -0.08 & 1.20 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es.

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 4.24 & -4.30 & -3.54 & -4.40 \\ -0.61 & 1.52 & 0.62 & 0.70 \\ -3.54 & 4.40 & 4.24 & 4.30 \\ -0.62 & 0.70 & 0.61 & 1.52 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, aplicando la fórmula (3.23) se obtienen los movimientos incógnitas según la posición de la carga P.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Carga aplicada en la viga V-3

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5.47\text{x}10^{-2} \\ 5.31\text{x}10^{-3} \end{vmatrix} \; ; \; d_5 = \begin{vmatrix} 5.47\text{x}10^{-2} \\ -5.31\text{x}10^{-3} \end{vmatrix}$$

Carga aplicada en la viga V-2

$$d_1 = \begin{vmatrix} 10.50\text{x}10^{-2} \\ 6.80\text{x}10^{-3} \end{vmatrix} \; ; \; d_5 = \begin{vmatrix} 2.66\text{x}10^{-2} \\ -2.87\text{x}10^{-3} \end{vmatrix}$$

Carga aplicada en la viga V-1

$$d_1 = \begin{vmatrix} 16.18\text{x}10^{-2} \\ -9.90\text{x}10^{-3} \end{vmatrix} \; ; \; d_5 = \begin{vmatrix} 1.42\text{x}10^{-2} \\ -1.60\text{x}10^{-3} \end{vmatrix}$$

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de cálculo de estructuras periódicas cíclicas y abiertas, que tiene en cuenta esta característica de periodicidad para reducir de un modo importante el esfuerzo de computación preciso. Dado el carácter general que presenta el procedimiento presentado, este podría ser implementado en una segunda generación de programas generales comerciales de cálculo de estructuras, en los que se consideren los distintos niveles de subestructuración y, por consiguiente, las condiciones de periodicidad estructurales.

6. RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la Dirección General de Carreteras dentro del Convenio entre el MOPU y la Fundación Agustín de Bethancourt (Exp. TP-185.88).

REFERENCIAS

[1] Hussey, M.J.L. "General Theory of Cyclically Symmetric Frames". Proc. ASCE. Journ. Struc. Div. April. (1967).

[2] Makowski, Z.S. "Räumliche Tragwerke aus Stahl". Verlag Stahleisen m.b.H. Düsseldorf. (1963).

[3] Kausel, E. "Dynamic of Spatially Periodic Structures". Private Comunication. MIT. (1983).

[4] Samartin, A. and Moreno, L. "Fórmulas explícitas para el cálculo sísmico de entramados planos regulares". Revista de Obras Públicas. Junio, (1986).

[5] Samartin, A. "Cálculo de estructuras espacialmente periódicas. Aplicación del método de las diferencias finitas. Comunicación Privada. ETSICCP. Santander.

[6] Zienckiewicz, O.C. and Scott, F.C. "On the principle of repeatibility and its application in analysis of turbine and pump impellers". Intal Journ. for Num. Methods in Eng. Vol. 4 (1972).

[7] Goldberg, J.E. y Leve, H.L. "Theory of Prismatic Folded Plate Structures". IABSE. Publications. Vol. 17 (1957).

[8] Loo, Y. Ch. y Cusens, A.R. "The Finite Strip Method in Bridge Engineering. C.A.C.A. (1978).

[9] Samartin, A. "Cálculo de Estructuras de Puentes de Hormigón". Editorial Rueda, (1983).

APENDICE A. MATRICES CIRCULANTES Y QUASI CIRCULANTES

A.1. Matrices circulantes

Se denomina matriz circulante a la constituida por filas que son permutaciones simples de una de ellas, es decir, presenta la estructura siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & . & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & . & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & . & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & a_0 \end{bmatrix} = \{ \vdots a_i \vdots \} \quad (A.1)$$

El problema de autovalores siguiente:

$$A\, X_j = b_j\, X_j \qquad (A.2)$$

tiene la solución (puede comprobarse por sustitución):

$$X_j = \begin{bmatrix} 1 \\ r^{-j} \\ r^{-2j} \\ \vdots \\ r^{-(n-1)j} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^{-jk}$$

siendo

$$r = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

Por consiguiente, los autovectores del problema (A.2) están formados por las sucesivas potencias de la raiz n-sima de la unidad. Los autovalores son iguales a las transformadas discretas de Fourier de la primera fila de la matriz A.

La matriz modal X satisface la condición de ortogonalidad, es decir:

$$X^* X = X X^* = n\, I$$

con $X = \{X_j\}$ y X^* la conjugada transpuesta de X
I es la matriz unidad.

La descomposición espectral de A es.

$$A = X\, B\, X^{-1} = \frac{1}{n}\, X\, B\, X^*$$

con $B = \text{diag}\ \{b_j\}$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Por lo tanto, las potencias de A se calculan como sigue:

$$A^h = X\,B^h\,X^{-1} = \{\vdots\, a_i \,\vdots\}$$

Se comprueba que la matriz A^h es también circulante y su primera fila $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ se obtiene como la transformada inversa de los autovalores $b^h j$, es decir:

$$\bar{a}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} b_j^h\, r^{jk}$$

En particular, para $h = -1$, se obtienen los elementos de la matriz inversa (que es asimismo circulante) mediante la expresión

$$\bar{a}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{b_j}\, r^{jk} \quad (b_j \neq 0)$$

Evidentemente, si alguno de los coeficientes de Fourier se anula, la matriz es singular.

A.2. Matrices quasi-circulantes

Se define como matriz quasi-circulante a la constituida por permutaciones de las submatrices A_j en lugar de los escalares, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_{n-1} \\ A_{n-1} & A_0 & A_1 & \ldots & A_{n-2} \\ A_{n-2} & A_{n-1} & A_0 & \ldots & A_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_0 \end{bmatrix}$$

Se pueden mostrar las siguientes propiedades de A

$$A\,X_j = X_j\,B_j \quad \text{o bien} \quad A\,X = X\,B$$

con

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & & & 0 \\ & B_1 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & B_{n-1} \end{bmatrix} \text{(no diagonal)}$$

$$X = \begin{bmatrix} I \\ Ir^{-j} \\ Ir^{-2j} \\ \vdots \\ Ir^{-(n-1)j} \end{bmatrix}$$

I es la matriz unidad de igual rango que A_k

$$B_j = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\, r^{-jk}$$

Se supone que las matrices Bj admiten la descomposición espectral siguiente:

$$B_j = \Phi_j\,\Omega_j\,\Phi_j^{-1}$$

se deduce entonces

$$A\,X_j\,\Phi_j = X_j\,\Phi_j\,\Omega_j$$

Si se define $\psi_j = X_j\,\Phi_j$ se obtiene

$$A\,\psi_j = \psi_j\,\Omega_j$$

Por consiguiente, los autovalores de Bj son también un conjunto de los autovalores de A.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_0 & & \\ & \ldots & \\ & & \Omega_{n-1} \end{bmatrix} \text{(matriz diagonal)}$$

$$\psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}\}$$

$$A\,\psi = \psi\,\Omega$$

Se deduce inmediatamente que

$$A^h\,\psi = \psi\,\Omega^h$$

i.e.

$$A^h\,\psi_j = \psi_j\,\Omega_j^h$$

$$A^h\,X_j = X_j\,(\phi_j\,\Omega_j^h\,\psi_j^{-1})$$

es decir

$$\bar{B}_j = \phi_j\,\Omega_j^h\,\phi_j^{-1} = B_j^I$$

y

$$\bar{A}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} B_j^h\, r^{jk}$$

RESUMEN

Se muestra un procedimiento de cálculo de estructuras constituidas por una más simple, que se repite bien mediante una rotación finita (estructuras cíclicas) o según una traslación (estructuras traslacionales). Es posible, según el método que se expone, obtener el comportamiento de la estructura bajo la acción de cargas arbitrarias, mediante el cálculo repetido de la estructura elemental modificada. De esta forma, estructuras con un número elevado de grados de libertad pueden ser analizadas con un esfuerzo computacional relativamente pequeño, el preciso para el estudio de una estructura de dimensión igual a la de la estructura elemental. Se muestran algunos ejemplos ilustrativos muy simples, así como una aplicación al caso práctico correspondiente a losas de tableros de puentes rectos de vigas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

SUMMARY

Structures with multiple identical elements that are joined in a chain-like fashion are called spatially periodic structures. These systems, either cyclic structures (close chains) or translational structures (open chains), can be analysed by using a simplified procedure. The behaviour of the whole structure under arbitrary loading can be obtained by a repetitive analysis of elemental structures of the same size as the one of identical elements. In this way structures with a very large number of degrees of freedom can be studied with a relatively small computational effort. Some simple illustrative examples are given and a practical application case is also presented.

Jornadas sobre "La Industrialización Abierta, solución para la modernización de la construcción"

Organizadas por el CERIB (Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie du Béton Manufacturé) y el GUS (Gesellschaft für Umweltplanning, Stuttgart) y con el patrocinio del BIBM (Bureau International du Béton Manufacturé) y el CIB (Conseil International du Bâtiment pour la recherche, l'étude et la documentation), se van a celebrar en Stuttgart (R.F.A.), durante los días 21, 22 y 23 de febrero del próximo año 1990, unas Jornadas en las cuales se tratarán los siguientes temas:

1.– Procesos de concepción/realización de las obras: Aportaciones de la coordinación dimensional.

2.– Producción: Incidencia de la coordinación dimensional sobre el utillaje industrial.

3.– Situación actual de la coordinación modular en la Comunidad Europea y a nivel internacional.

4.– Procesos informáticos CAO/gestión de obras/GPAO: Necesidad de la coordinación dimensional.

5.– Ejemplos de realizaciones concretas: Bases de datos, coordinación, teletranscripción de datos, etc.

6.– Perspectivas de exportación para las industrias de la Comunidad.

En estas Jornadas, en las que intervendrán diferentes expertos de la Comunidad Europea, se expondrá y discutirá la situación actual de la "Industrialización abierta".

La "Industrialización abierta" es una producción industrial de "Componentes" cuya compatibilidad dimensional y tecnológica esté garantizada. Es la posibilidad de una armonización de los procesos de concepción/realización de las construcciones en la perspectiva del mercado comunitario de 1993.

Organización de las Jornadas

– Se celebrarán una serie de Conferencias, seguidas de coloquio entre los Conferenciantes y los participantes.

–Se expondrán ejemplos de realizaciones concretas.

- Habrá traducción simultánea de las Conferencias, en inglés, francés y alemán.

Los interesados en participar en estas Jornadas deberán dirigirse a:

CERIB BP 59
F-28232 EPERNON CEDEX (Francia).
Tel.: 37 83 52 72.
Telex: 782048.
Fax: 37 83 67 39.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Estructuras traslacionales en hormigón armado. Deformaciones de segundo orden

Rodrigo Bernárdez
Ingeniero Técnico Industrial
Maquinista Naval

1. INTRODUCCION

La Instrucción Española del Hormigón en su versión del año 88 y en anteriores, preconiza en su art. 43.4 que la estabilidad de las estructuras traslacionales será comprobada de acuerdo con las bases generales definidas en el art. 43.2, estableciéndose las hipótesis básicas que permiten calcular las deformaciones de segundo orden, y de acuerdo con ellas realizar la comprobación de la estructura.

En los comentarios al primer artículo, la EH-88 indica que las estructuras usuales de edificación con menos de 15 plantas en las que el desplazamiento máximo en cabeza bajo cargas horizontales características, calculado mediante la teoría de primer orden y con las rigideces correspondientes a secciones no fisuradas, no superen 1/750 de la altura total, cada elemento de la estructura se puede comprobar con la longitud de pandeo definida en los comentarios del art. 43.1.2 para estructuras traslacionales (método simplificado), y con los esfuerzos obtenidos aplicando la teoría de primer orden.

Con esto la Instrucción pretende que las estructuras más usuales no sean penalizadas con un cálculo realmente complicado, de difícil adopción práctica debido a la falta de programas adecuados en el mercado que resuelvan el problema.

En el caso de estructuras sometidas a importantes cargas horizontales, aunque sean usuales las alturas entre plantas, o de estructuras que soportando cargas horizontales normales tengan alturas inusuales, el espíritu de la EH-88 parece que no permite que sean calculadas mediante el método simplificado.

No es el objeto de este artículo entrar en el método simplificado. Su aplicación está perfectamente definida a partir de la EH-80, y también en el artículo "El pandeo en la Instrucción EH-80" publicado por Francisco Morán Cabré y Hugo Corres Peiretti, como consecuencia de las conclusiones a que llegó el Grupo de Trabajo de Pandeo nombrado para realizar una propuesta de articulado sobre el tema, que ha servido de base a como este está tratado desde la publicación de la EH-80. En él se dan razones y sobre todo se introducen precisiones muy necesarias para que el Proyectista sea consciente de su campo de validez.

Dicho artículo puede decirse que en esencia está orientado a la comprobación de soportes con sección y armadura constante en toda su altura, definiéndose un factor α de la longitud de pandeo; al multiplicar este factor por la longitud real del soporte, se obtiene la longitud ℓ_0 de pandeo de la pieza primitiva, que se corresponde con la longitud real de una pieza biarticulada de igual sección que la anterior.

La esbeltez mecánica λ_m de la pieza, es el cociente entre ℓ_0 y el radio de giro de la sección total de hormigón en la dirección considerada. En función de ella se establecen las cuatro zonas siguientes:

Zona 0: $\lambda_m \leqslant 35$
No hay pandeo y por lo tanto no es necesario hacer ninguna comprobación adicional.

Zona 1: $35 < \lambda_m \leqslant 100$
Los efectos de segundo orden se engloban en una excentricidad adicional e_a que si bien no tiene sentido físico, ha sido preparada para que también tenga en cuenta los efectos de las deformaciones diferidas (Art. 43.5.2 de la EH-88).

Zona 2: $100 < \lambda_m \leqslant 200$
Se precisa un cálculo más riguroso de las deformaciones de segundo orden. Como métodos aproximados pero con resultados satisfactorios en esta zona de pandeo, los autores citan tres:

a.- Método de la Columna Modelo, expuesto

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

en el Código Modelo del CEB.

b.– Método de la Deformada Senoidal, debido a J.J. Arenas.

c.– Método de las Curvaturas de Referencia, original de Hugo Corres.

Zona 3: $200 < \lambda_m$

Es preciso calcular rigurosamente las deformaciones de segundo orden.

Por lo tanto, la acotación de la zona en la que está incluida una determinada pieza, descansa en la definición del coeficiente básico α. Un error en su evaluación puede invalidar el proceso de cálculo que se realice.

Es práctica común obtener α a partir de los nomogramas indicados en los comentarios al art. 43.1.2 de la EH-88, y es necesario insistir en las precisiones que establecen los autores del artículo que más arriba se cita:

a.– Los nomogramas están basados en los trabajos de Jackson y Moreland.

b.– Han sido preparados para soportes de pórticos regulares de edificación (iguales luces, alturas e inercias) y de gran número de pisos y vanos, en comportamiento elástico y lineal.

c.– Su aplicación a pórticos reales de hormigón armado en el rango no lineal, proporciona únicamente resultados aproximados.

d.– Cumpliéndose los requisitos para uso de estos nomogramas, el Código ACI-318-77 y la Norma DIN 1045-72, limitan los valores mínimos de α a 1,2 para los pórticos traslacionales y a 0,67 para los intraslacionales.

La Norma británica BS 8110 de 1985 en su art. 3.8.1.6.2 es todavía más conservadora para los pórticos intraslacionales, pues el valor mínimo lo fija en 0,75.

Leonhardt para los pórticos traslacionales limita el valor inferior a 1,15.

Estos valores mínimos no los contempla la EH-88.

e.– Leonhardt advierte que la aplicación de los nomogramas a pórticos que no cumplan los requisitos con los que fueron realizados, puede dar resultados del lado de la inseguridad.

f.– Las deformaciones de segundo orden inducen en las jácenas momentos adicionales transmitidos por los soportes. Estos momentos son de igual signo en las caras dorsal y frontal de la viga en la sección de empotramiento con el soporte, y por lo tanto mientras uno se resta el otro se suma a los momentos determinados en el cálculo de primer orden. Dependiendo del incremento que estos momentos representen, puede ser necesario dimensionar el dintel para el momento total.

Los métodos de cálculo simplificado no contemplan la evaluación de estos momentos adicionales.

g.– Los giros de las cimentaciones pueden agravar considerablemente los efectos de segundo orden. También pueden hacerlo los desplomes por defectos de construcción.

h.– Los métodos de cálculo simplificado, están concebidos para ser aplicados a soportes en los que en toda su longitud el axil está contenido en el mismo plano de simetría. Por lo tanto la EH-88 no contempla la aplicación de métodos simplificados al pandeo en flexión-esviada.

i.– Si los esfuerzos debidos a las cargas permanentes representan un porcentaje importante de los esfuerzos totales, el incremento de las deformaciones debidas a la fluencia puede incluso duplicar las deformaciones de segundo orden.

Como consecuencia de estas consideraciones y para las estructuras a las que no son aplicables los métodos simplificados, es preciso idear sistemas de cálculo que prescindan de la determinación del coeficiente α, y por lo tanto de la longitud equivalente ℓ_0 de pandeo.

Estos sistemas serán tanto más rigurosos cuanto más se acerquen a las condiciones definidas en los artículos 43.2.1 y 43.2.2 de la EH-88. Las de mayor dificultad son las que se refieren a la fisuración y a la no linealidad del comportamiento de los materiales y de la determinación de esfuerzos, pues esto obliga a que el cálculo se realice de acuerdo con las siguientes premisas:

a.– Las cargas actúan sobre los nudos desplazados, y los esfuerzos se calculan teniendo en cuenta la posición real de las cargas. Esto produce nuevos desplazamientos y por lo tanto nuevos esfuerzos. Es por ello un proceso iterativo.

b.– Al considerar la sección fisurada y los diagramas tensión-deformación de los materiales, el producto $E \cdot I$ es distinto en cada sección de la pieza, puesto que es función de las acciones exteriores que soporte cada una de ellas. Como en cada iteración cambian estas acciones, también debe hacerlo el producto $E \cdot I$.

Se comprende así que el comportamiento de la estructura dependa de la armadura dispuesta, y a distintos armados correspondan diferentes respuestas de la estructura, ya que esfuerzos, rigideces y desplazamientos son magnitudes interdependientes.

Esto origina que los métodos basados en deformaciones de segundo orden, exijan que los elementos estén previamente armados; son por ello métodos de comprobación en los que no es posible aplicar la facilidad que representa calcular primero los esfuerzos y en otra etapa armar las secciones. Si llegado al final del proceso, el Proyectista tuviera que variar las armaduras, bien porque la estructura fuera inestable o excesivamente segura, tendría

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

que iniciar desde el principio el cálculo con la nueva armadura dispuesta.

Cuando la estabilidad de la estructura se comprueba con deformaciones de segundo orden, se debe tener en cuenta que es un estado límite último; por esto deberán mayorarse las acciones de cálculo y minorarse las resistencias de los materiales. Las cimentaciones se calcularán para los esfuerzos que resulten, habida cuenta que ya están mayorados.

A continuación se exponen diversos métodos de análisis de las deformaciones de segundo orden.

2. METODO DE ANALISIS P-DELTA

El análisis de la estabilidad de segundo orden mediante programas de cálculo matricial, es comúnmente conocido como análisis P-Delta. En él se considera la no linealidad de aplicación de las cargas; es por lo tanto riguroso en este requisito.

Como ya se comentó, en el hormigón armado el producto $E \cdot I$ es función de los esfuerzos a los que esté sometida la sección, y comúnmente en los programas se suelen dar estos datos como parte de la definición de la estructura y sin posibilidad de cambio.

En general, los métodos basados en la matriz de rigidez, consideran constante el valor de $E \cdot I$ en el intervalo de definición del elemento de la estructura, y suponen la linealidad mecánica del material hormigón armado, es decir, que las tensiones son proporcionales a las deformaciones y por lo tanto no tienen en cuenta la no colaboración del material que esté fisurado, y en el que no lo esté, la no linealidad entre tensiones y deformaciones.

Para paliar estos defectos, el Código ACI en su artículo 10.10.1 penaliza los valores de $E \cdot I$ tanto en pilares como en vigas, recomendando que se consideren los siguientes valores:

Pilares: $E \cdot I = E_h \cdot I_g \cdot (0{,}20 + 1{,}20\, \rho \cdot E_a/E_h)$

Vigas: $E \cdot I = 0{,}50 \cdot E_h \cdot I_g$

Siendo:

I_g = Momento de inercia de cada elemento respecto de su centro de gravedad, supuesta la sección total de hormigón sin fisurar.

E_h, E_a = Módulos de elasticidad respectivamente del hormigón y acero.

ρ = Cuantía geométrica de la armadura dispuesta respecto a la sección total de hormigón.

En esencia, estos programas suelen operar de la siguiente manera: dada una estructura y las cargas exteriores que sobre ella actúan, se determinan las deformaciones de primer orden y los esfuerzos que estas originan en las barras (Fig. 1).

Aislada cada una de las barras, las deformaciones junto con las fuerzas que actúan sobre ellas, generan un vector de cargas adicional (Fig. 2). Calculado este vector, se suma a las cargas exteriores que soporta la estructura, dando lugar a un nuevo vector de cargas.

La matriz de rigidez se relaciona con el nuevo vector de cargas y mediante la sustitución atrás se calculan las nuevas deformaciones, y a partir de ellas, las nuevas cargas en las barras.

Iniciado el proceso a partir de los nuevos esfuerzos y deformaciones, éste se finaliza cuando la variación de las deformaciones de cada una de las barras entre dos iteraciones consecutivas, es inferior a un valor previamente fijado.

En cada iteración, se debería partir de la posición que tiene la estructura en la iteración anterior, sometiéndola al incremento de vector adicional entre ambas posiciones. Finalizado el proceso, los esfuerzos y deformaciones de la estructura se obtendrían como suma de las correspondientes a las deformaciones de primer orden y las de todas las iteraciones realizadas; más como las deformaciones son normalmente pequeñas en com-

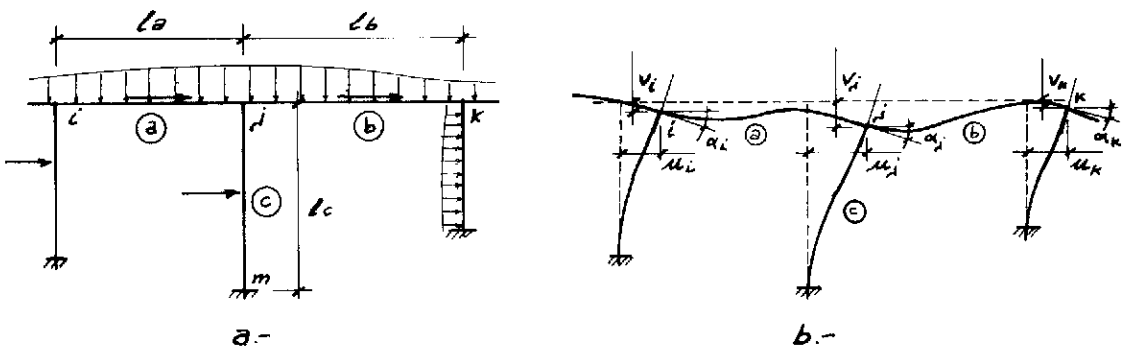


Fig. 1

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

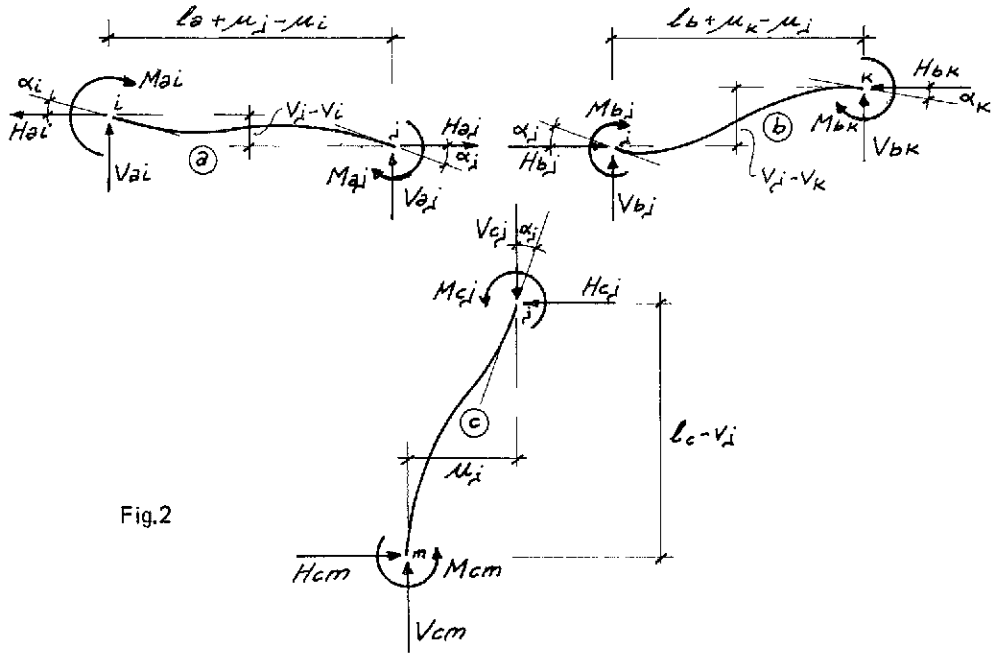


Fig.2

paración con las dimensiones de la estructura, se suelen despreciar las variaciones de longitud de las barras y las nuevas matrices de cambio de coordenadas de ejes particulares de barras a generales de la estructura, considerándose por ello que la matriz de rigidez de la estructura deformada es igual a la que tiene sin deformarse. Por este motivo, en cada iteración se somete la estructura inicial al conjunto de cargas exteriores y de vectores totales de carga adicional, obteniéndose directamente los esfuerzos y deformaciones finales.

El elemento estructural que se desee estudiar a pandeo, hay que dividirlo en un número idóneo de barras; así se obtienen secciones intermedias en las que se calculan los esfuerzos y deformaciones totales, y por lo tanto el pandeo de la barra en su totalidad.

El proceso así descrito, permite incluirlo en los métodos matriciales de cálculo de estructuras planas y espaciales. Su aplicación es cómoda y con él todavía es posible calcular primero los esfuerzos y proceder al armado de la estructura en una fase posterior. Tiene los inconvenientes apuntados al principio de este apartado, y para tener en cuenta las deformaciones por fluencia, habría que disminuir el módulo de elasticidad del material:

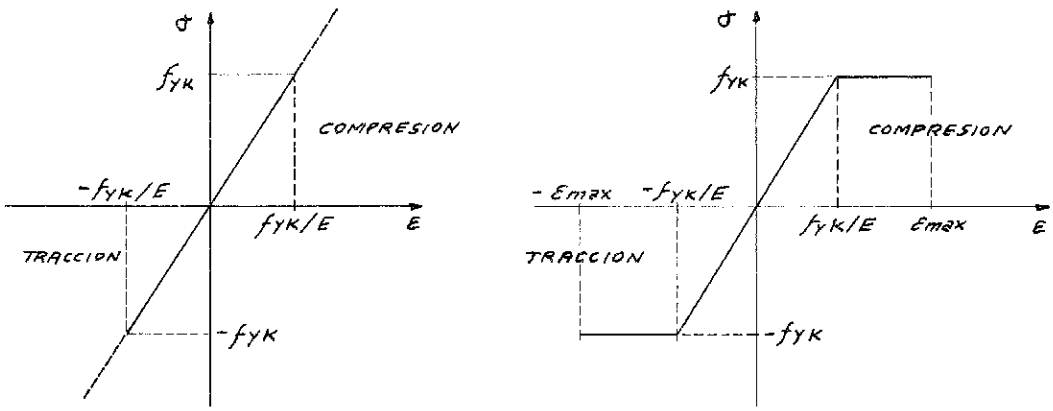
$$E = E_h/(1 + \varphi)$$

siendo φ lo que el Código-Modelo llama el coeficiente de fluencia reducido.

Una forma de calcularle consiste en multiplicar el coeficiente de fluencia del elemento estructural considerado, por la relación entre los esfuerzos debidos a las cargas permanentes (N_{cp}, M_{cp}) y los totales de la estructura (N_T, M_T)

$$\text{Coeficiente reductor de la fluencia} = \frac{N_{cp} \cdot M_{cp}}{N_T \cdot M_T}$$

Abundando en los inconvenientes anteriores, si se considera un material idealmente elástico, es decir, que cumpla la ley de Hooke en todo su intervalo de trabajo, el diagrama tensión-deformación sería como el de la Fig. 3.a.



a.- Fig.3 b.-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En la realidad, y refiriéndonos al material acero, se suele considerar para determinados tipos el diagrama elasto-plástico de la Fig. 3.b.

Definido el diagrama σ-ϵ de reacción del material y la excentricidad e de la carga exterior aplicada, para cada valor de N se pueden definir las deformaciones v que alcanzan las secciones de la barra representada en la Fig. 4.

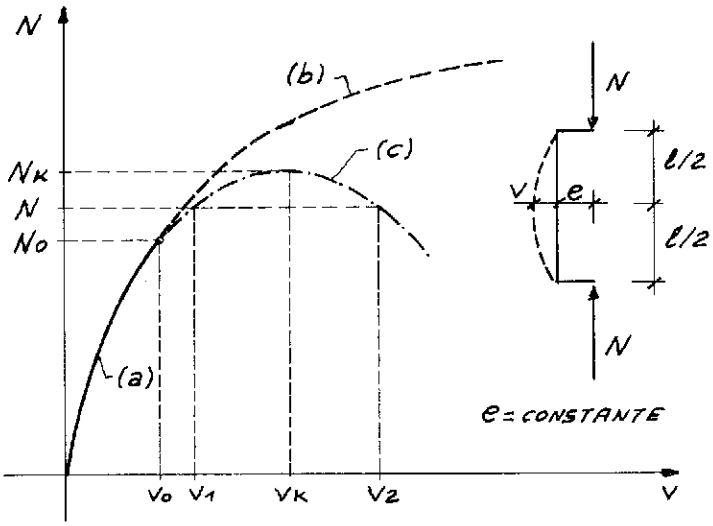


Fig. 4

Si la barra cargada excéntricamente tiene su sección central trabajando en el intervalo elástico de su diagrama tensión-deformación, las tensiones en las fibras extremas se calculan por la expresión:

$$\sigma = N/A \pm N \cdot (V + e)/W$$

Para un determinado valor $N = N_0$ será $\sigma = f_{yk}$, y a partir de aquí, mientras que los métodos matriciales de cálculo consideran una prolongación indefinida del diagrama σ-ϵ, líneas de trazos de la Fig. 3.a y rama (b) de la Fig. 4, el comportamiento de la sección de acuerdo con el diagrama de la Fig. 3.b, se corresponde con la curva (c) de la Fig. 4.

A partir de N_0 la fibra más cargada de la sección ha entrado en la zona plástica del diagrama, y su momento de reacción crece más lentamente que la deformación v, ya que la plastificación penetra hacia fibras más interiores.

La capacidad de carga se agota cuando se alcanza el valor N_k llamado carga crítica y en él, el equilibrio es indiferente. Para cargas $N < N_k$ y deformaciones $V < V_k$, el equilibrio es estable. Para deformaciones mayores a V_k, el equilibrio es inestable y pequeñas perturbaciones conducen al colapso de la barra.

Una variante en la aplicación del método P-Delta que permite estudiar el problema tan rigurosamente como se desee, consiste en determinar los valores de $E \cdot I$ a partir del diagrama que relaciona la curvatura con el momento de reacción de la sección. De esta manera se pueden tener en cuenta todas las variables que intervienen en el trabajo del material hormigón-armado, obviándose todos los inconvenientes que antes se han apuntado.

Definidas las dimensiones de la sección resistente y su armadura, la forma operativa se describe a continuación en el supuesto de estructura plana con los esfuerzos actuando en ese plano, que además es de simetría tanto de la sección como de las armaduras. Con estos requisitos, las deformaciones están contenidas en ese plano (Fig. 5). El coeficiente de fluencia reducido se supone φ.

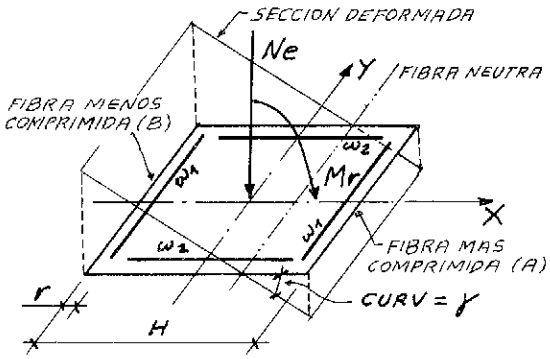


Fig. 5

Para un determinado axil N_e que soporta la sección, se quieren calcular los momentos de reacción M_r para las diferentes curvaturas que la sección puede adoptar.

Suponiendo que el diagrama σ-ϵ del hormigón sea el parábola-rectángulo, para la curvatura γ la deformada de la sección estará comprendida entre las posiciones extremas que se indican en la Fig. 6.

Definidas las deformaciones ϵ_1 y ϵ_2 de la fibra más comprimida de la sección y los axiles N_1 y N_2 de reacción para las dos posiciones indicadas, se puede interpolar en el diagrama de la Fig. 7, hallándose la deformación ϵ_e de la fibra más comprimida de manera que para la curvatura γ, el axil

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

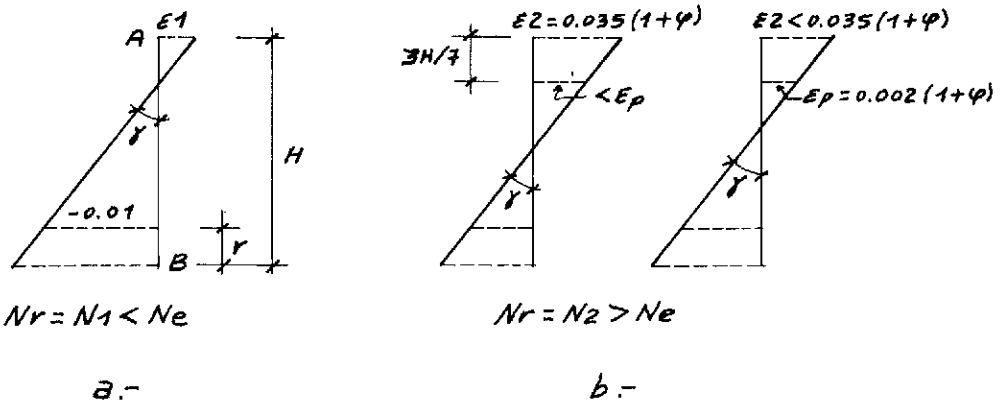


Fig.6

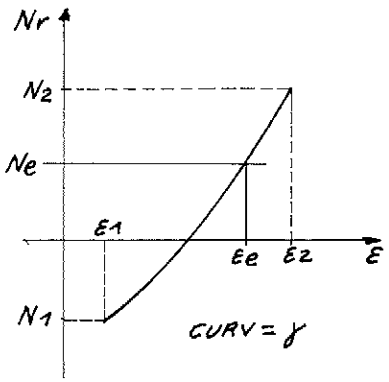


Fig.7

de reacción de la sección sea $N_r = N_c$; en esta situación, se puede calcular el momento M_r de reacción.

Variando los valores de γ, se puede confeccionar el diagrama de la Fig. 8 del que se obtiene el valor de $E \cdot I$ para el momento exterior M_c realmente soportado por la sección.

El diagrama representado se supone para momentos actuando en el mismo sentido; si los momentos pudieran cambiar de sentido y la sección o las armaduras no fueran simétricas respecto del plano representado por el eje "y", el diagrama debería ser ampliado.

Las diferentes barras en las que se deseen estudiar las deformaciones de segundo orden, deben a su vez ser discretizadas en intervalos adecuados y

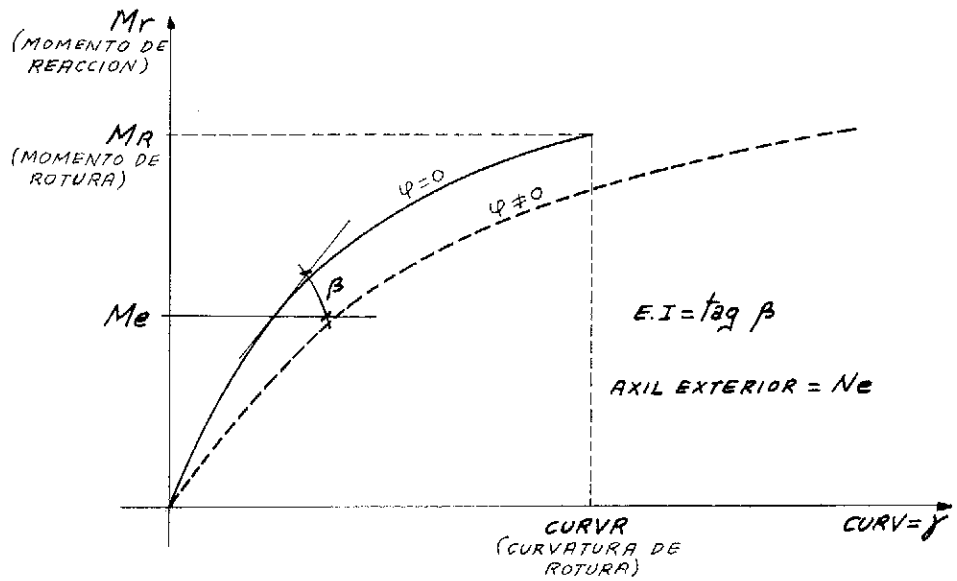


Fig.8

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

así consideradas en la definición de la estructura (Fig. 9).

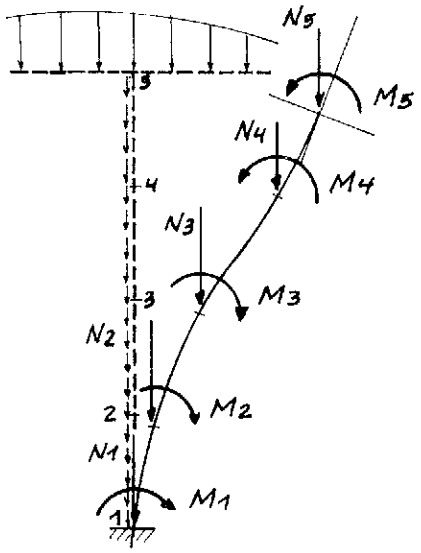


Fig.9

En cada iteración de cálculo con la estructura global, debe operarse con los nuevos valores de $E \cdot I$ que para el axil N_i y el momento M_i, se obtienen en las secciones a partir del diagrama curvatura-momento de reacción.

Las cargas consideradas deben ser las exteriores (constantes en todas las iteraciones), y otras que son variables al depender de las deformaciones obtenidas en la iteración precedente. Esto define un vector adicional de cargas causado por el axil desplazado respecto de la posición inicial de la sección.

Al variar las características mecánicas de las barras, en cada iteración es preciso calcular la nueva matriz de rigidez.

Suponiendo que en ninguna sección se sobrepase la capacidad a rotura, el número de iteraciones será tanto mayor cuanto más ajustada se haya proyectado la estructura.

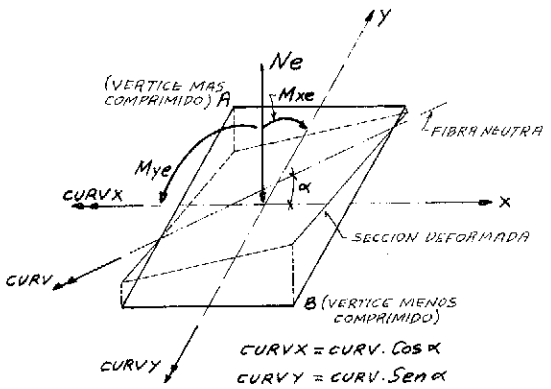


Fig.10

El método se complica más al considerar momentos en dos direcciones, puesto que entonces también opera como variable la inclinación de la fibra neutra (Fig. 10).

Para diversas inclinaciones α de la FN y fijado el axil N_e, se pueden definir diagramas análogos al de la Fig. 11. El elegido será aquel en el que el valor $M_{xI} = M_{xe}$, se obtenga en la misma abscisa en que $M_{yI} = M_{ye}$, en cuyo caso se pueden calcular las rigideces en las dos direcciones.

En conclusión se deduce que para aquellos elementos estructurales que se consideren singulares, puede ser sumamente complicado estudiarlos teniendo en cuenta todas las variables del problema. Es por ello preciso adicionar rutinas a los programas de cálculo matriciales, para que faciliten la determinación de las variables que intervienen como datos en el siguiente proceso iterativo.

Puede también ser conveniente idear nuevos métodos que aplicados globalmente a toda la estructura o localmente a alguno de sus elementos, el Proyectista los considere satisfactoriamente estudiados. En cualquier caso, cuando el Ingeniero dispone de diferentes herramientas, puede elegir la más idónea con el objetivo de llegar a la solución adecuada con la menor complicación en sus cálculos.

En esta idea, se expone a continuación un método alternativo.

3. METODO ALTERNATIVO PARA ESTUDIAR LAS DEFORMACIONES DE SEGUNDO ORDEN

3.1. Variaciones en las leyes de esfuerzos

En un elemento sometido en su extremo A a la acción de la fuerza N (Fig. 12), cuando se consideran las deformaciones de segundo orden se producen variaciones en las leyes de axiles, cortantes y flectores.

$$N_A = N \cdot \cos \alpha_0$$

$$Q_A = N \cdot \operatorname{sen} \alpha_0$$

Los esfuerzos en la sección B serán:

$$N_B = N \cdot \cos (\alpha_0 + d\alpha) \cong N \cdot \cos \alpha_0$$

$$Q_B = N \cdot \operatorname{sen} (\alpha_0 + d\alpha) \cong N \cdot \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$M_B = Q_A \cdot ds = N \cdot \operatorname{sen} \alpha_0 \frac{dy}{\operatorname{sen} (\alpha_0 + d\alpha)} \cong$$

$$\cong N \cdot dy$$

Como las deformaciones son pequeñas respecto de las dimensiones del elemento, con suficiente aproximación puede suponerse que los esfuerzos en la sección C son:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

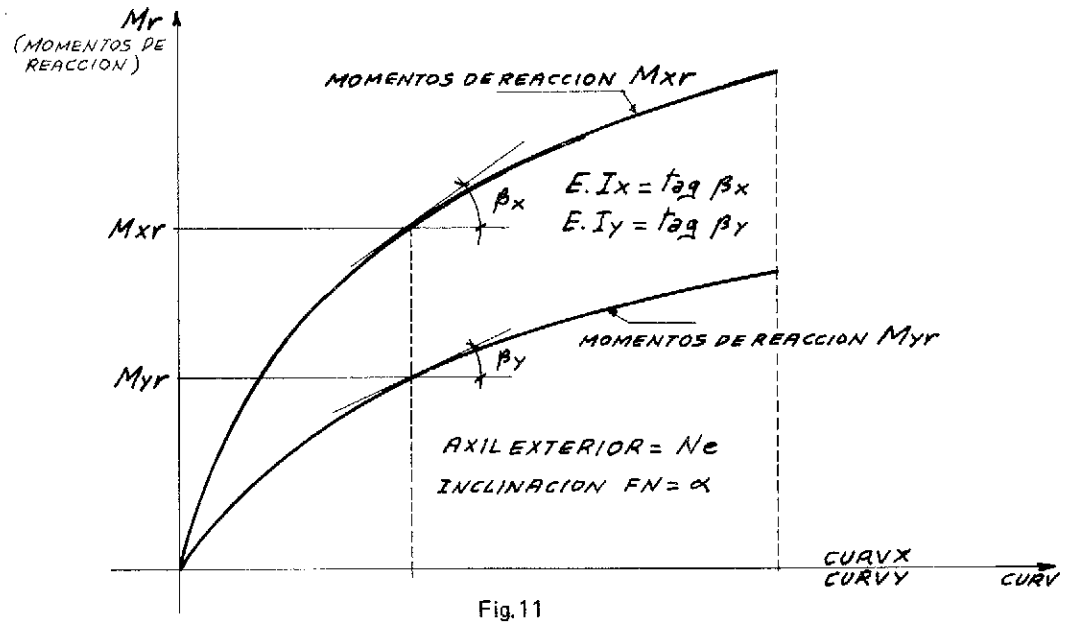


Fig. 11

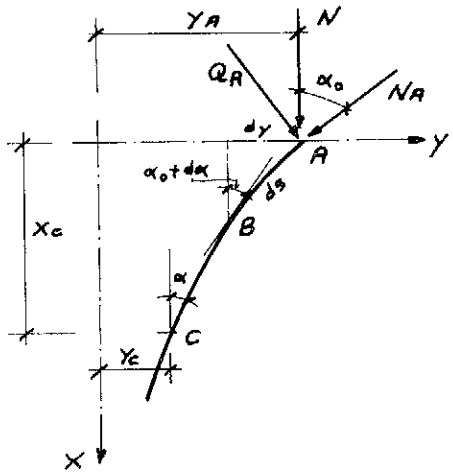


Fig. 12

$$N_C = N \cdot \cos \alpha$$

$$Q_C = N \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$M_C = N \cdot (y_A - y_C)$$

Considerada una columna en voladizo con el esfuerzo N en su coronación, la aplicación de las anteriores expresiones produce las leyes de esfuerzos representados en la Fig. 13 (líneas de trazos continuos).

En los casos normales de valores pequeños de α, puede considerarse la pieza dividida en intervalos con α constante en cada uno de ellos, y con suficiente aproximación las expresiones anteriores pueden transformarse en las siguientes:

$$N_c = N$$

$$Q_c \cong N \cdot \operatorname{tag} \alpha = N \cdot (y_A - y_c)/x_c$$

$$M_c = N \cdot (y_A - y_c) = Q_c \cdot x_c$$

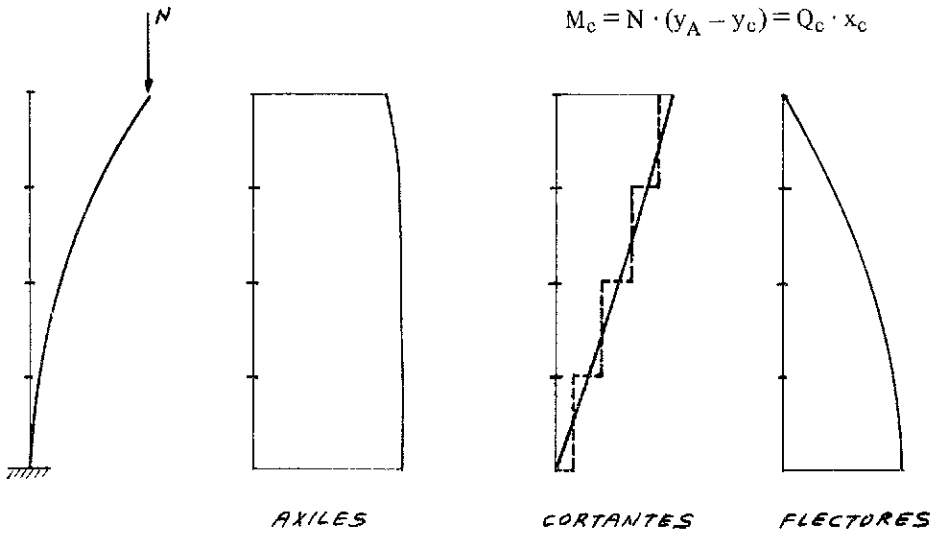


Fig. 13

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Estas expresiones son el fundamento de los vectores adicionales de carga a que se hacía referencia en el apartado anterior: las acciones debidas al desplazamiento del axil N, son equivalentes a las de la fuerza Q_c aplicada en la misma sección que N. Por ser una fuerza interna, Q_c también debe aplicarse con signo contrario en el otro extremo del intervalo, y en cada uno de ellos se obtiene una ley de cortantes constante y una ley lineal de flectores (líneas de trazos en la Fig. 13).

3.2. Bases de cálculo de las secciones de hormigón armado

Las secciones de hormigón armado suelen dimensionarse de acuerdo con las siguientes hipótesis básicas:

a.– Bajo la acción de las solicitaciones, las armaduras tienen la misma deformación que el hormigón que las envuelve.

b.– Las deformaciones del hormigón siguen una ley plana.

c.– Se aplican a las secciones las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, igualando la resultante de las tensiones del hormigón y del acero (solicitación resistente), con la solicitación actuante (solicitación exterior).

d.– En el cálculo no se tiene en cuenta la resistencia a la tracción del hormigón, es decir que no se consideran las zonas del hormigón en las que aparecen deformaciones longitudinales de tracción.

e.– Las condiciones anteriores son válidas para secciones sometidas a solicitaciones normales que además cumplan que sea superior a 2 la relación:

$$\frac{\text{Distancia entre puntos de momento nulo}}{\text{Canto total}}$$

Solicitaciones normales son las que originan tensiones normales sobre las secciones rectas, y por lo tanto están constituidas por un momento flector y un axil.

A partir de las condiciones enunciadas, se pueden determinar las deformaciones en todas las fibras de la sección en función de las condiciones de compatibilidad de las deformaciones; y mediante los diagramas tensión-deformación establecidos para los materiales, pueden calcularse las correspondientes tensiones; su integración definirá los esfuerzos resistentes y al igualarlos a los exteriores, se obtendrán las ecuaciones de equilibrio.

Supuesta una sección rectangular de hormigón con dimensiones a, b y armaduras ω_c y ω_t, sometida a un axil N_e en su eje y un momento M_e en uno de sus planos de simetría (Fig. 14.a), se deforma según la Fig. 14.b y reacciona con los esfuerzos indicados en 14.c.

Los esfuerzos de reacción se obtienen mediante las expresiones siguientes:

$$N_c = \sigma_c \cdot \omega_c$$

$$N_t = \sigma_t \cdot \omega_t$$

$$N_r = a \cdot \int_{b/2-y}^{b/2} \sigma_x \cdot dx + N_c - N_t$$

$$M_r = a \cdot \int_{b/2-y}^{b/2} \sigma_x \cdot x \cdot dx + (N_c + N_t) \cdot (b/2 - r)$$

calculándose σ_x, σ_c y σ_t a partir de los diagramas σ-ϵ definidos para el hormigón y el acero, en función de las deformaciones ϵ_x, ϵ_c y ϵ_t que tiene cada una de las fibras para la posición de la sección deformada.

Si se verifica que $N_e = N_r$ y $M_e = M_r$, la sección está equilibrada y adopta una curvatura:

$$\text{curv} = \gamma \cong \text{tag}\, \gamma = \epsilon_h / y$$

3.3. Elementos aislados. Deformaciones de segundo orden

Considerado un elemento estructural aislado sometido a un sistema de cargas exteriores, en cada

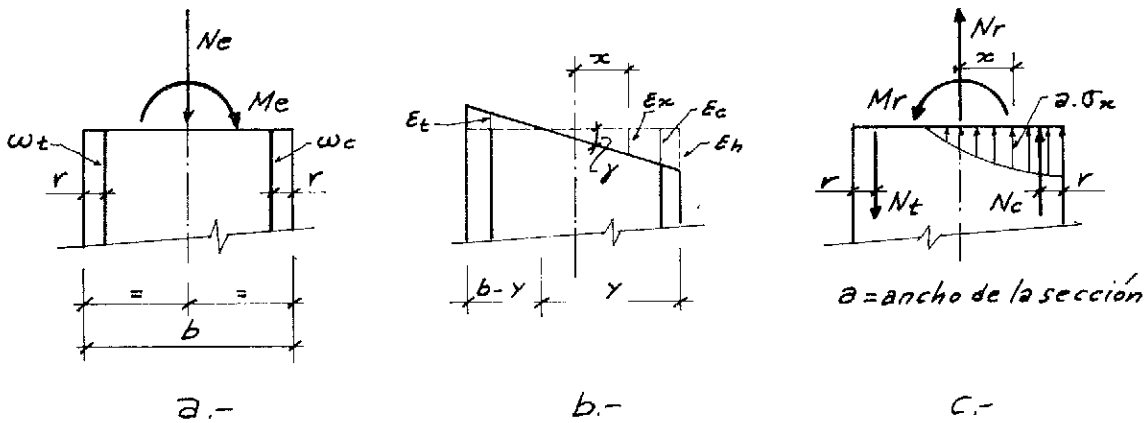


Fig. 14

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

una de sus secciones se pueden calcular los esfuerzos que soporta; en función de estos se puede hallar la posición de equilibrio que adopta la sección deformada de acuerdo con los diagramas σ-ϵ de los materiales, las dimensiones y forma de la sección, y la disposición y valores de las armaduras. Definida la posición de la sección deformada, queda determinada la curvatura.

De acuerdo con las condiciones de borde del elemento considerado, con la primera integración de las curvaturas a lo largo de su longitud se obtienen las tangentes de los ángulos a su deformada, y con la segunda integración de las curvaturas se determinan los desplazamientos respecto de la posición inicial.

Los desplazamientos incrementan los esfuerzos y por lo tanto se inicia un proceso iterativo al que se da por finalizado cuando entre dos iteraciones consecutivas son prácticamente iguales los desplazamientos obtenidos.

En cada iteración deberá comprobarse que las deformaciones obtenidas para las secciones, no sobrepasen a las de rotura de los materiales.

Dos son los elementos aislados básicos que a continuación se consideran: Barra en voladizo y barra biarticulada en sus extremos.

En ambos casos se calculan los esfuerzos en las secciones intermedias a partir de los definidos en uno de los extremos del elemento, pero de idéntica manera se operaría si la barra estuviera sometida a fuerzas exteriores concentradas en secciones intermedias o distribuidas en su longitud.

Se considera que los desplazamientos son pequeños en comparación con la longitud del elemento.

Definida la posición inicial de la barra, se determinan los esfuerzos N_i, M_i que actúan en una sección genérica i. Estos esfuerzos inducen los desplazamientos $\delta_{i(1)}$ de primer orden, obteniéndose a partir de ellos los $\Delta_{i(1)}$ respecto de la posición de la barra en la que teóricamente el axil no produciría efectos de segundo orden.

Los desplazamientos producen una variación de los esfuerzos que actúan en la sección, respecto de los anteriormente considerados ($N_{i(1)}$, $M_{i(1)}$), y por ello nuevos desplazamientos (véanse figuras 15 a 20).

El estudio de las deformaciones de segundo orden en los seis problemas tipo anteriores, se puede generalizar con los esfuerzos actuando en dos planos perpendiculares y para diferentes secciones resistentes: secciones macizas o huecas, de formas rectangular, circular, poligonal, etc., pudiendo ser variables a lo largo de la barra tanto las dimensiones geométricas como la armadura dispuesta.

Las cargas exteriores que actúan sobre la barra pueden ser de cualquier tipo. Para definir las acciones que hay que considerar en una sección, se reduce a ella el sistema de fuerzas (Fig. 21).

Una discretización idónea del elemento estructural en secciones de cálculo dispuestas a intervalos regulares, constantes o variables para captar mejor la actuación de las cargas exteriores, permitirá que el estudio de las deformaciones pueda ser considerado como si se hubiera realizado para un elemento continuo.

3.4. Estructuras. Deformaciones de segundo orden

Dada la estructura de la Fig. 1, cada barra puede considerarse aisladamente sometida a sus cargas y a sistemas de fuerzas en sus extremos (Fig. 2). Fijado el sistema que actúa en uno de los extremos, el del otro queda determinado en función de las cargas exteriores que operan sobre la barra.

Hallados en cada barra los giros y desplazamientos de segundo orden, el problema estará resuelto cuando sean compatibles tanto los giros de los extremos de las barras que incidan en el mismo nudo, como los desplazamientos de los nudos entre sí. Estas condiciones junto con las de equilibrio general de la estructura, permitirá determinar los valores de los sistemas de fuerzas considerados como incógnitas.

Ahora bien, el cálculo de las deformaciones de segundo orden no permite operar con incógnitas, y por lo tanto es preciso partir de valores definidos de los sistemas de fuerzas; la verificación de las condiciones anteriores, determinará si eran o no apropiados los valores adoptados para dichos sistemas. Como las deformaciones no son funciones lineales de las fuerzas aplicadas, la dificultad de hallar relaciones entre los diferentes sistemas de fuerzas y las deformaciones que originan, hace que sea realmente problemático encontrar una solución mediante este método.

El problema puede simplificarse haciéndolo resoluble, si al considerar cada elemento aislado se logra hacer compatibles sus deformaciones con las de sus vínculos más directos, teniendo también en cuenta la influencia del resto de la estructura; para ello es preciso que en cada caso se definan las funciones que relacionen esas deformaciones.

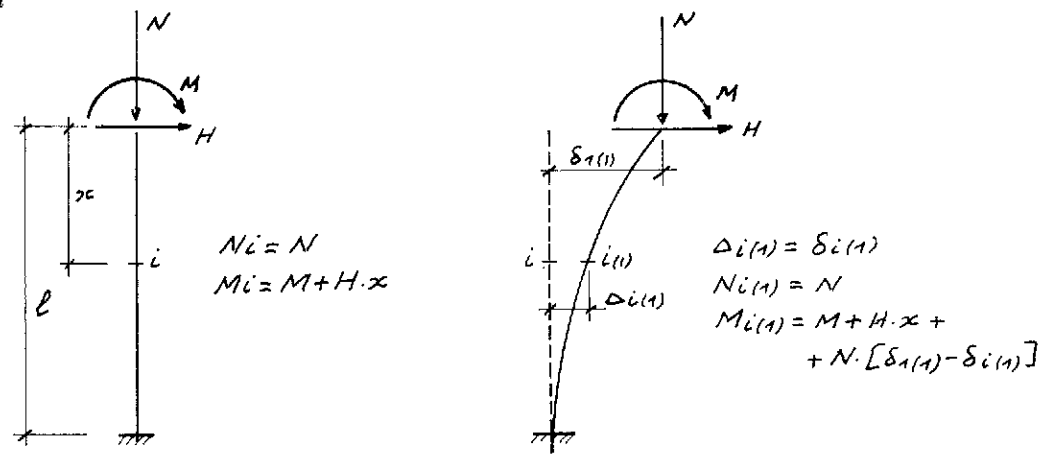
Un método de convergencia que interrelacione las funciones con las fuerzas aplicadas, mediante iteraciones sucesivas puede definir el sistema incógnita de fuerzas.

Considerado un pórtico espacial, para hacer más general la aplicación del método, se calculan las deformaciones y esfuerzos de primer orden debidos a todas las cargas que sobre él actúan en una determinada hipótesis (Fig. 22).

En un nudo interior (Fig. 23), se deben verificar las siguientes ecuaciones de equilibrio de esfuerzos:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

3.3.1. Barra en voladizo inicialmente en situación vertical

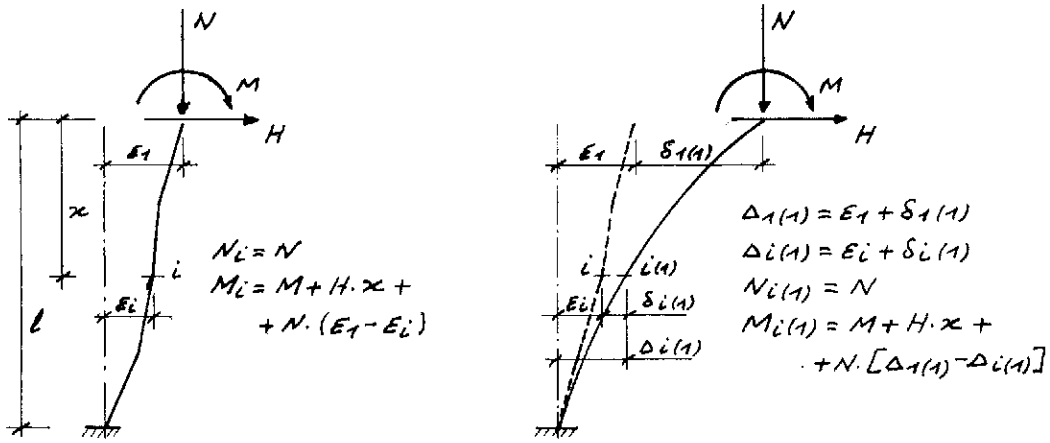


a.-Situación inicial

b.-Situación en la 1ª iteración

Fig. 15

3.3.2. Barra en voladizo con desplomes debidos a defectos constructivos

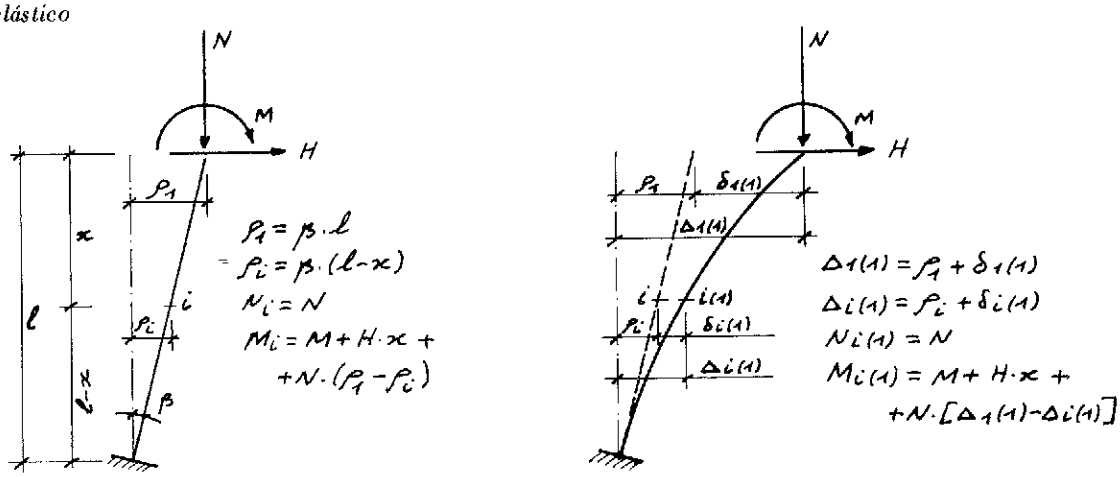


a.-Situación inicial

b.-Situación en la 1ª iteración

Fig. 16

3.3.3. Barra en voladizo con empotramiento elástico



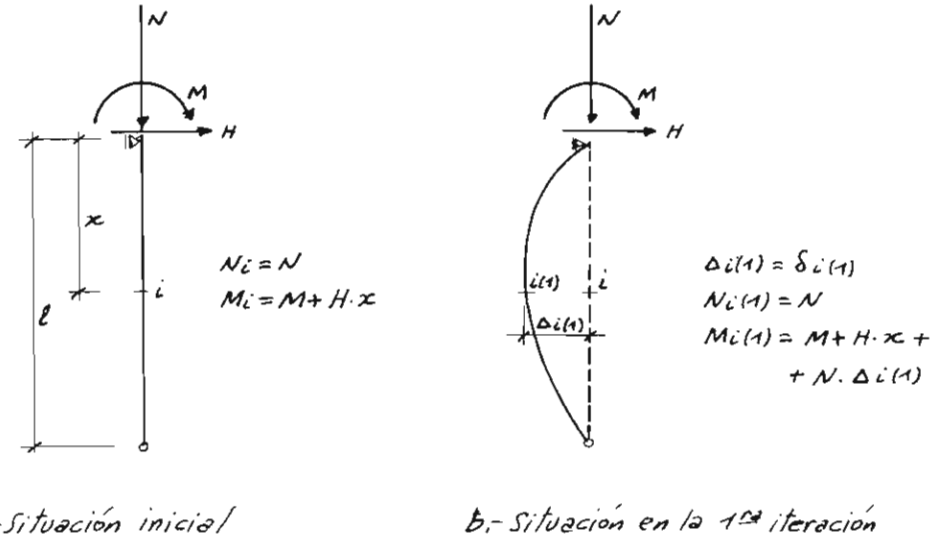
a.-Situación inicial

b.-Situación en la 1ª iteración

Fig. 17

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

3.3.4. Barra biarticulada inicialmente en situación vertical

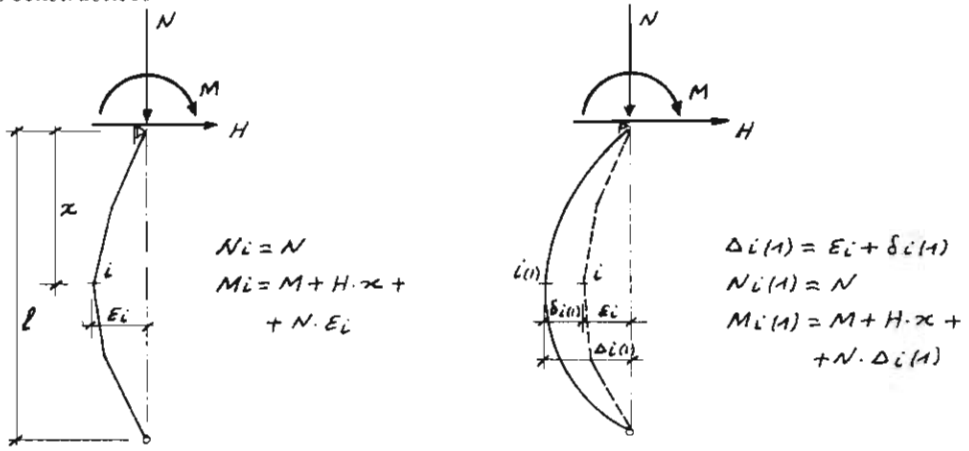


a.-Situación inicial

b.-Situación en la 1ª iteración

Fig. 18

3.3.5. Barra biarticulada con desplomes debidos a defectos constructivos

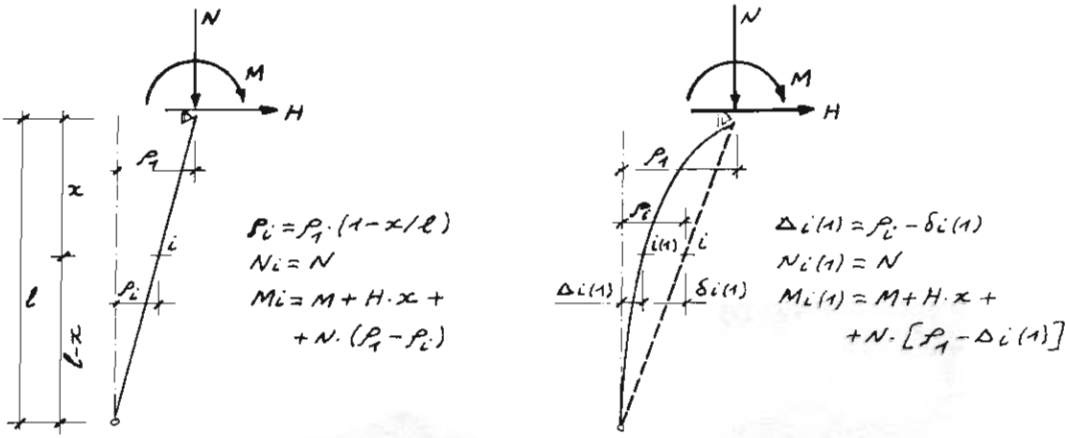


a.-Situación inicial

b.-Situación en la 1ª iteración

Fig. 19

3.3.6. Barra biarticulada con desplazamientos relativos de los extremos

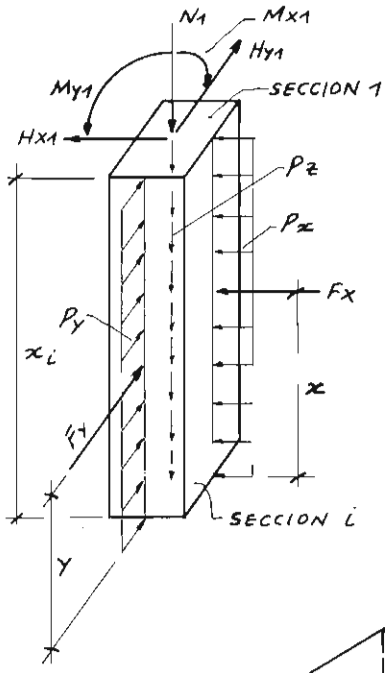


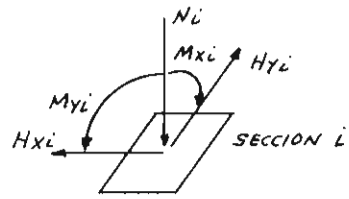
a.-Situación inicial

b.-Situación en la 1ª iteración

Fig. 20

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025





$$N_i = N_1 + p_z \cdot x_i$$
$$M_{xi} = M_{x1} + H_{y1} \cdot x_i + p_y \cdot x_i^2/2 + F_y \cdot y$$
$$M_{yi} = M_{y1} + H_{x1} \cdot x_i + p_x \cdot x_i^2/2 + F_x \cdot x$$
$$H_{xi} = H_{x1} + p_x \cdot x_i + F_x$$
$$H_{yi} = H_{y1} + p_y \cdot x_i + F_y$$

Fig.21

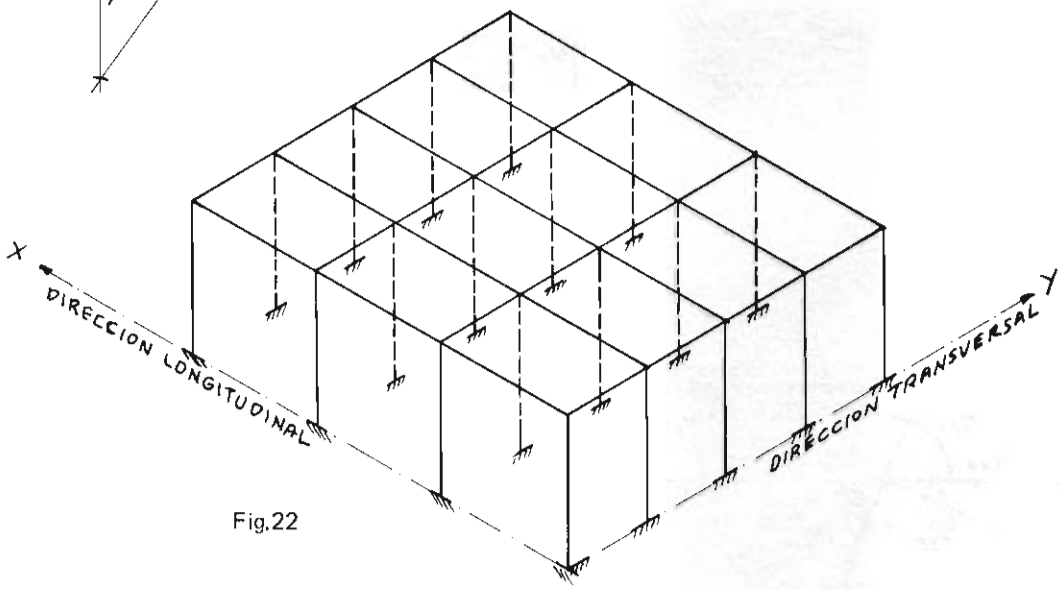


Fig.22

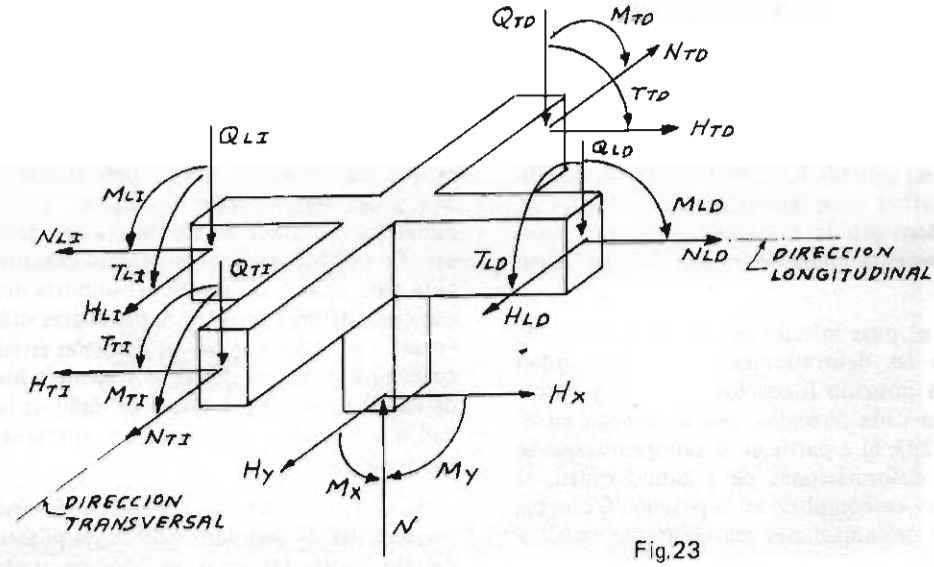


Fig.23

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$N = Q_{TI} + Q_{TD} + Q_{LI} + Q_{LD} = \Sigma Q_T + \Sigma Q_L$$

$$H_y = N_{TD} - N_{TI} - H_{LI} - H_{LD} = \Sigma N_T + \Sigma H_L$$

$$H_x = N_{LI} - N_{LD} + H_{TI} - H_{TD} = \Sigma N_L + \Sigma H_T$$

$$M_x = M_{TD} - M_{TI} - T_{LI} - T_{LD} = \Sigma M_T + \Sigma T_L$$

$$M_y = M_{LI} - M_{LD} - T_{TD} + T_{TI} = \Sigma M_L + \Sigma T_T$$

Una primera simplificación del estudio de la estructura, si no se consideran las torsiones que se originan en las barras por el trabajo espacial, sería descomponerla en pórticos longitudinales y transversales sometidos a la parte de carga total que les corrresponda según una adecuada distribución de ésta. Esto siempre es posible si no es importante la rigidez a torsión de la vigas que constituyen los dinteles.

A idéntica situación final se debe llegar si se estudia el pilar en deformaciones de segundo orden a partir de la posición A, con los esfuerzos en su coronación correspondientes a la situación C, y todas las acciones exteriores que directamente soporta.

El cambio del axil N al N_F entre B y C es debido a la variación de los momentos hiperestáticos en los dinteles. Como las deformaciones deben estar acotadas puesto que deben ser compatibles con la funcionalidad de la estructura, no se comete un error importante si no se considera ese cambio, y se supone que el axil es constante e igual al que se obtiene en la posición B.

Si considerada una dirección las deformaciones de primer orden tienen el mismo sentido en todos los pilares, se produce un reajuste de los cortantes en coronación entre las posiciones B y C, de manera que los pilares con mayor deformabilidad tienden a descargarse, incrementándose a través del dintel los cortantes en los pilares con mayor rigidez. En esta hipótesis y con el condicionante apuntado para el axil, no suelen ser importantes las variaciones de los cortantes, y los pilares más desfavorables serán los que por su situación estén menos coaccionados por el dintel, por ejemplo los pilares de esquina; en ellos se estará del lado de la seguridad si se consideran los cortantes correspondientes a la posición B.

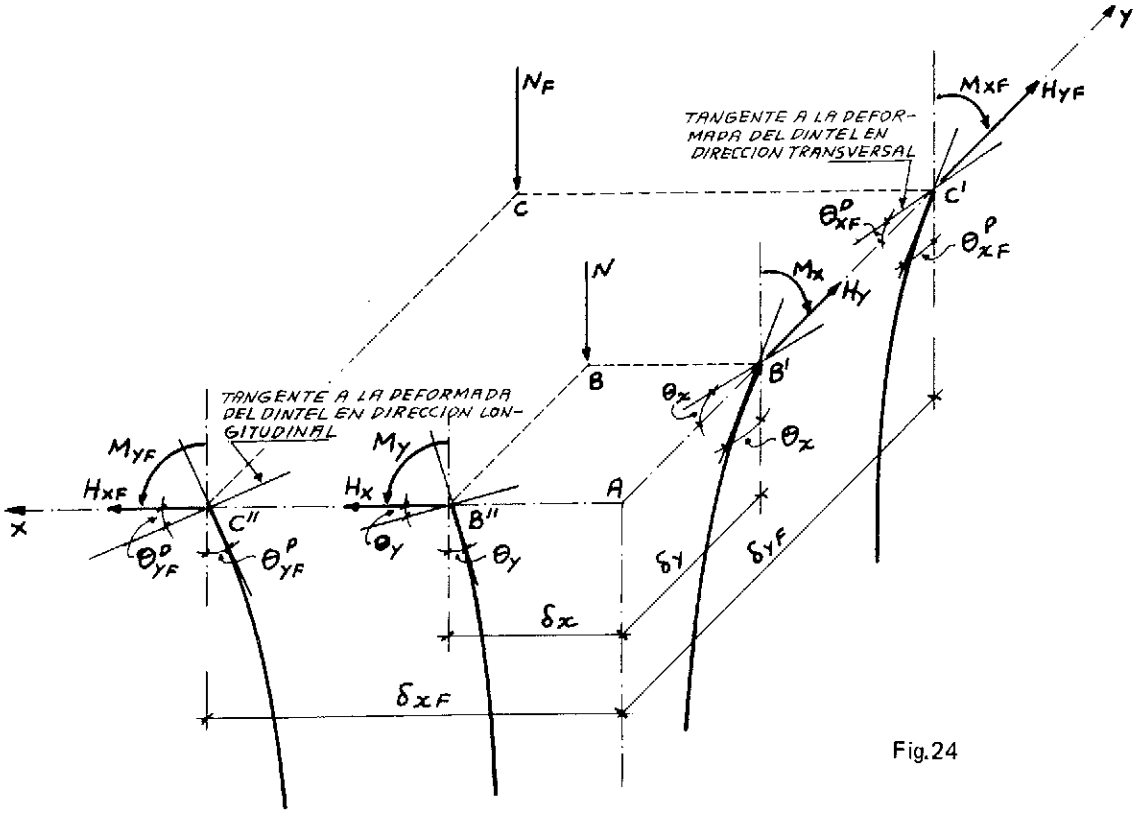


Fig.24

Elegido un pilar de la estructura, en las dos direcciones sufrirá unos desplazamientos y giros de primer orden que le inducirán unos esfuerzos, siendo todos ellos compatibles con los que tienen los dinteles.

Situado el pilar inicialmente en la posición A, después de las deformaciones de primer orden estará en la posición B con los esfuerzos y deformaciones en cada dirección que se indican en B' y B'' (Fig. 24). Si a partir de B suponemos que se inician las deformaciones de segundo orden, el pilar quedará en equilibrio en la posición C con los esfuerzos y deformaciones representados en C' y C''.

Si no se verifica lo anterior, al producirse las deformaciones de segundo orden unos pilares se acodalarán contra los otros, pudiéndose producir im-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

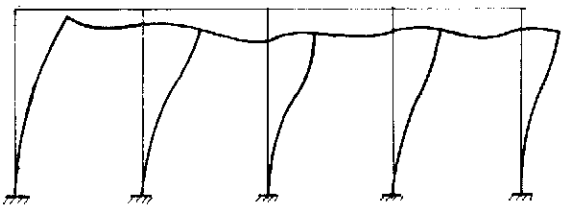
portantes cambios en los cortantes. Si se desprecian las variaciones de longitudes de los dinteles debidos a los incrementos de axiles, los desplazamientos finales de las coronaciones de los pilares en la dirección considerada, serán iguales a los de primer orden que tenían.

Si como ejemplo en la estructura de la Fig. 22 se considera la hipótesis de cargas permanentes y sobrecargas de uso, acompañadas de viento únicamente en la dirección transversal, y acortamientos por retracción y disminución de temperatura, cualquier alineación de pilares en dirección transversal tendrá una deformada como la indicada en la Fig. 25.a, y en dirección longitudinal será del tipo del de la Fig. 25.b.

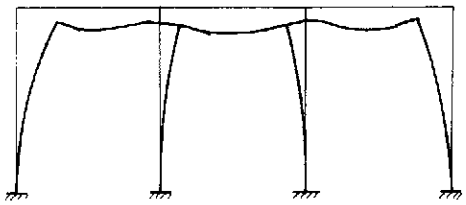
minución de rigidez de los pilares, la asignada a los dinteles tiene mucha importancia, pues define el grado de empotramiento de la coronación de los pilares. A falta de cálculos más precisos, puede ser conveniente adoptar la recomendada por el Código ACI.

Considerado un pilar en una posición intermedia entre la B y C de la Fig. 24, en su coronación estará sometido a los esfuerzos siguientes: $N, M_{xi}, H_y, M_{yi}, H_{xi}$.

Si se tratase de una estructura muy flexible, en cada iteración se podría considerar la variación del axil y los cortantes en la coronación, en base al cálculo anterior. Si para $M_x = 1$ mT el axil fuera N_{x1} y N_{y1} para $M_y = 1$ mT, en lugar de N se tomaría.



a.- Deformada en dirección transversal



b.- Deformada en dirección longitudinal

Fig.25

En este ejemplo, entre las posiciones B y C de la Fig. 24 se verificará:

$$H_{yF} = H_y$$

$$\delta_{xF} = \delta_x$$

y las coacciones que los dinteles ejercen sobre los pilares en una situación intermedia entre las anteriores, se pueden determinar si se calcula cómo se distribuye entre las barras de la estructura, un momento unitario que se genere en la coronación del pilar.

Para ello, en el modelo de la Fig. 22 se consideran las hipótesis de reparto en las direcciones longitudinal y transversal, sometiendo los pilares a un cortante en su coronación de valor el producto del axil N por el desplazamiento δ_x o δ_y según la dirección considerada, dividido entre la altura del pilar. De esta forma se obtendrá una distribución de esfuerzos análogo al de la Fig. 23, del que se puede deducir:

Para $M_x = 1$ mT se obtienen. $M_{TI1}, M_{TD1}, T_{LI1}$ y T_{LD1}. El nudo gira ω_{T1} en la dirección transversal.

Y para $M_y = 1$ mT: $M_{LI1}, M_{LD1}, T_{TI1}, T_{TD1}$ y ω_{L1}, todos ellos con los signos que les correspondan.

Este cálculo debe realizarse con la inercia correspondiente a la sección fisurada de las barras, y aunque tiene relativamente poca influencia la dis-

$$N_i = N + N_{x1} \cdot (M_{xi} - M_x) + N_{y1} \cdot (M_{yi} - M_y)$$

Con los esfuerzos anteriores y las cargas exteriores que el pilar soporte directamente, se pueden calcular las deformaciones de segundo orden considerándolo como barra aislada, obteniéndose los siguientes giros y desplazamientos en cabeza:

$$\theta^p_{xi}, \theta^p_{yi}, \delta_{yi}, \delta_{xi}$$

Los giros en los dinteles serán.

$$\theta^D_{xi} = \theta_x + (M_{xi} - M_x) \cdot \omega_{T1}$$

$$\theta^D_{yi} = \theta_y + (M_{yi} - M_y) \cdot \omega_{L1}$$

Para hacerlos compatibles con los obtenidos en el pilar, se consideran las variables auxiliares x e y, estableciéndose las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \theta^p_{xi} &= \theta_x + (M_{xi} - M_x) \cdot \omega_{T1} \cdot x \\ \theta^p_{yi} &= \theta_y + (M_{yi} - M_y) \cdot \omega_{L1} \cdot y \end{aligned} \qquad (I)$$

y la que relaciona el desplazamiento fijo δ_{xF}:

$$\delta_{xF} = \delta_{xi} \cdot z \qquad (I)$$

La solución del problema se obtiene cuando se verifique:

$$x = y = z = 1$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

siendo entonces los esfuerzos en la coronación del pilar los siguientes:

$$M_{xi} = M_{xF}$$

$$M_{yi} = M_{yF}$$

$$H_{xi} = H_{xF}$$

resultando también para el desplazamiento que: $\delta_{yi} = \delta_{yF}$.

Los incrementos de esfuerzos en los dinteles se determinan al multiplicar los valores de $M_{xF} - M_x$ y $M_{yF} - M_y$ por los deducidos para $M_x = 1$ mT y $M_y = 1$ mT.

Los finales se calculan sumando los anteriores a los que se tenían en la posición B.

Una variante del método expuesto, puede ser aplicado para hallar la solución de distribución de una fuerza horizontal actuando en un puente sobre apoyos de neopreno, en combinación con el pandeo de las pilas. Se supone despreciable la variación de longitud de los vanos del tablero.

Cada pila se supone aislada con las fuerzas N_i, F_i y los desplazamientos iniciales ϵ_i en coronación, hallándose las deformaciones de segundo orden: δ_2, δ_3 y δ_4.

Las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\Delta = \epsilon_2 + \delta_2 \cdot x$$

$$\Delta = \epsilon_3 + \delta_3 \cdot y$$

$$\Delta = \epsilon_4 + \delta_4 \cdot z$$

que sirven de base para aplicar el proceso de convergencia.

METODO DE CONVERGENCIA

Usando la notación utilizada en el ejemplo del pórtico y despejando las variables auxiliares x, y, z de las ecuaciones (I), se obtienen las funciones:

$$x = f_1 (M_{xi}, M_{yi}, H_{xi})$$

$$y = f_2 (M_{xi}, M_{yi}, H_{xi})$$

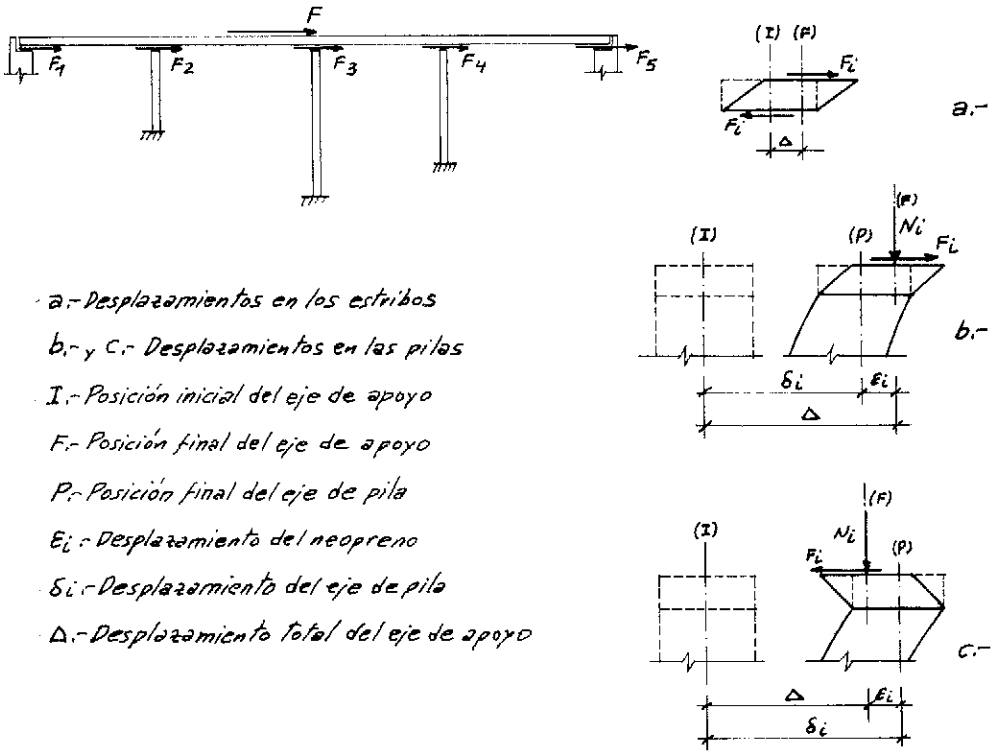


Fig.26

Fijado F_1, se determina Δ. Con ella se puede calcular F_5.

Fijados F_2 y F_3 se calcula $F_4 = F - \Sigma F_i$ con $i = 1, 2, 3, 5$.

Con estas fuerzas se hallan ϵ_2, ϵ_3 y ϵ_4.

$$z = f_3 (M_{xi}, M_{yi}, H_{xi})$$

La diferencial de estas funciones está relacionada por el Jacobiano, de manera que:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = J \frac{(x, y, z)}{(M_{xi}, M_{yi}, H_{xi})} \begin{bmatrix} d(M_{xi}) \\ d(M_{yi}) \\ d(H_{xi}) \end{bmatrix}$$

Expresada en incrementos sería:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = (a_{ij}) \begin{bmatrix} \Delta(M_{xi}) \\ \Delta(M_{yi}) \\ \Delta(H_{xi}) \end{bmatrix} \qquad \text{(II)}$$

sistema del que se puede calcular $\Delta(M_{xi})$, $\Delta(M_{yi})$ e $\Delta(H_{xi})$ de la manera siguiente:

Fijadas las acciones: N, M_{xi}, H_y, M_{yi}, H_{xi}

se obtienen: $\theta^p_{xi}, \theta^p_{yi}, \delta_{xi}$

y por las igualdades (I) se calculan: x, y, z

Luego:

$$\Delta x = 1 - x$$

$$\Delta y = 1 - y$$

$$\Delta z = 1 - z$$

Incrementando independientemente cada una de las acciones variables, se pueden obtener los valores de las variables auxiliares y los coeficientes del Jacobiano, de manera que:

Para: N, $M_{xi} + \Delta M_x$, H_y, M_{yi}, H_{xi} se obtienen: x_1, y_1, z_1.

$$a_{11} = (x_1 - x)/\Delta M_x$$

$$a_{21} = (y_1 - y)/\Delta M_x$$

$$a_{31} = (z_1 - z)/\Delta M_x$$

Para: N, M_{xi}, H_y, $M_{yi} + \Delta M_y$, H_{xi} se obtienen: x_2, y_2, z_2.

$$a_{12} = (x_2 - x)/\Delta M_y$$

$$a_{22} = (y_2 - y)/\Delta M_y$$

$$a_{32} = (z_2 - z)/\Delta M_y$$

Para: N, M_{xi}, H_y, M_{yi}, $H_{xi} + \Delta H_x$ se obtienen: x_3, y_3, z_3.

$$a_{13} = (x_3 - x)/\Delta H_x$$

$$a_{23} = (y_3 - y)/\Delta H_x$$

$$a_{33} = (z_3 - z)/\Delta H_x$$

Resuelto el sistema (II), los valores de partida en la siguiente iteración son:

$$N$$

$$M_{xi} + \Delta(M_{xi})$$

$$H_y$$

$$M_{yi} + \Delta(M_{yi})$$

$$H_{xi} + \Delta(H_{xi})$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

– Francisco Morán Cabre y Hugo Corres Peiretti: "El pandeo en la Instrucción EH-80", Informes de la Construcción núm. 331.

– Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado EH-88. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo.

– Fritz Leonhardt. Estructuras de hormigón armado. Tomo I. Editorial El Ateneo.

– Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318 M-83). American Concrete Institute.

– Código-modelo CEB-FIP para las estructuras de hormigón.

– Proyecto de Eurocódigo EC 2. Normas generales para estructuras de hormigón.

– Structural use of concrete. BS 8110. 1985.

RESUMEN

En este artículo se comenta el cálculo de estructuras, considerando las deformaciones de segundo orden.

En la introducción, se repasan los métodos simplificados para estudiar a pandeo los elementos estructurales, considerándoles aislados.

El cálculo matricial de la estructura mediante el método P-delta, se comenta en una versión simplificada y en otra más rigurosa, en la que se tienen en cuenta los diagramas σ-ϵ de los materiales.

Finalmente, se presenta un método alternativo que considerando las deformaciones de segundo orden para un elemento aislado, tiene en cuenta las coacciones que sobre él ejerce el resto de la estructura.

SUMMARY

It is shown in this article the calculation of structures considering the second order deformations.

Firstly, the simplified methods to study the buckling of isolated structural members are revised.

The matrix calculation of structures by means P-Delta analysis is shown in a simplified version and in a more accurate one, that uses the σ-ϵ diagrams of materials.

Finally an alternate method is presented. It is a method that, considering the second order deformations of an isolated member, consideres as well the constraints that the whole structure makes over it.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Simposio de la IABSE sobre estructuras mixtas

Organizado por el Grupo Belga de la IABSE, con el patrocinio del C.E.B., la E.C.C.S. y la F.I.P., se va a celebrar en Bruselas (Bélgica), durante los días 5 al 7 de septiembre de 1990, un Simposio sobre "Estructuras mixtas, incluyendo los nuevos materiales".

La utilización de las estructuras y los elementos estructurales mixtos acero-hormigón en edificios, puentes y otras obras de ingeniería civil es cada día más frecuente. Durante los últimos años, han sido numerosos los trabajos de investigación realizados sobre este tipo de estructuras, se han desarrollado nuevos métodos de cálculo y se han redactado nuevos Códigos e Instrucciones al respecto. Por otra parte, se ha demostrado que la sustitución del acero, el hormigón o de ambos materiales por otros menos tradicionales, puede proporcionar soluciones técnica y económicamente eficaces.

Existen aún algunos problemas, por ejemplo: los relativos al enlace entre los distintos materiales; el comportamiento de estos elementos tanto en servicio como a largo plazo; los métodos de cálculo y la ejecución. Lógicamente, cualquier innovación plantea siempre algunos problemas y dificultades y se hace necesario analizarlos y resolverlos.

En este Simposio se hablará, no solo de los aspectos estructurales de las estructuras mixtas sino también del comportamiento de materiales distintos trabajando conjuntamente en la misma estructura.

Por otra parte, la introducción del concepto de "vida útil", obliga a los proyectistas y constructores a estudiar la adecuada conservación de las estructuras, con el fin de ampliar su vida de servicio y garantizar su conservación. Estos aspectos, evidentemente, son importantes no sólo para las estructuras mixtas sino también para las construidas con un solo material.

Este Simposio proporcionará la ocasión de poder discutir, entre otras, las siguientes cuestiones:

–Mejora de la economía y eficiencia de las estructuras construidas utilizando materiales distintos;

–Desarrollo de nuevos métodos de cálculo y ejecución de estas estructuras;

–Incorporación a las estructuras mixtas, de nuevos materiales o de materiales tradicionales con características mejoradas;

–Utilización de estructuras mixtas o compuestas para la reparación o refuerzo de las construcciones existentes;

–Métodos de conservación, reparación o refuerzo de las estructuras mixtas actualmente en servicio.

El Simposio dará ocasión a comentar el estado actual de todas estas cuestiones y proporcionará a los técnicos cumplida información sobre nuevas ideas, nuevas aplicaciones, últimas realizaciones, y enseñanzas de todo ello obtenidas. A este respecto debe señalarse que si útiles son las informaciones relativas a los casos de estructuras realizadas con éxito, quizás lo sean aún más las referentes a aquellas otras en las que los resultados alcanzados no han sido todo lo buenos que se esperaba.

El intercambio de ideas y experiencias, indudablemente ayudará a evitar duplicar esfuerzos en el estudio de problemas ya resueltos, facilitará la transferencia de tecnología y estimulará a nuevos avances en este campo de las estructuras mixtas.

El programa técnico del Simposio incluye:

–Cuatro Sesiones dedicadas a los cuatro temas que más adelante se especifican.

–Sesiones de Posters en los que se mostrarán ejemplos prácticos de estructuras mixtas, algunas de ellas construidas con nuevos materiales.

–Una exposición de materiales, equipos, etc., utilizados en la construcción de este tipo de estructuras.

Los temas seleccionados para este Simposio son:

Tema 1.– Elementos estructurales compuestos acero-hormigón.

Tema 2.– Sistemas estructurales mixtos acero-hormigón.

Tema 3.– Estructuras mixtas construidas con otros materiales que no sean el acero y el hormigón.

Tema 4.– Nuevos materiales utilizados en las estructuras mixtas.

Habrá un programa especial de actividades sociales para los participantes y sus acompañantes y se están organizando también algunas visitas técnico-turísticas para el sábado día 8 de septiembre de 1990.

Los que deseen recibir información complementaria sobre este Simposio deberán dirigirse a.

Organizing Committee
IABSE Symposium 1990
Résidence Palace
Rue de la Loi 155 - Boite 1
B-1040 BRUSSELS (Bélgica)

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Formulación global para el análisis de estructuras de hormigón pretensado con tendones adherentes y no adherentes

Juan Murcia
Doctor Ingeniero de Caminos
Instituto de Ciencia de Materiales de Barcelona, CSIC

INTRODUCCION

La técnica del hormigón pretensado mediante tendones no adherentes se viene utilizando de forma notable en los últimos tiempos, en razón sobre todo de sus ventajas constructivas y, en definitiva, económicas.

Se impone, por tanto, el estudio de metodologías para su análisis estructural, el cual parece resultar, de entrada, diferente en buena parte al ya bastante bien desarrollado en el caso de tendones adherentes, técnica que ha sido la utilizada casi en exclusiva (fuera de algunas tipologías, como las losas de forjado en edificación) hasta hace no mucho tiempo.

Sin duda, en lo que al análisis afecta, se introducen elementos que parecen llevar a una mayor complejidad: así, al no existir adherencia ya no es posible plantear la compatibilidad seccional igualando deformaciones del acero y del hormigón, sino que aparece una compatibilidad de tipo global, de manera que los desplazamientos de ambos materiales en los anclajes han de ser iguales; por otro lado, hay que tener presente la interacción mecánica existente entre los mismos en las zonas intermedias cuando se producen contactos, considerando todas las posibles disposiciones que ofrece esta técnica (tendones internos curvos o rectos; tendones externos poligonales o rectos).

En la línea que se acaba de comentar, cabría entonces establecer planteamientos diferentes para el análisis de ambas técnicas estructurales del pretensado; no obstante, ello sólo lo sería en apariencia, puesto que es posible abordar un tratamiento o formulación que unifica ambos análisis: esto es lo que va a ser estudiado en el presente trabajo, en un principio de forma general y, a partir de un cierto punto, para las estructuras lineales o de barras.

CONDICIONES DEL ANALISIS Y FORMULACION PARCIAL ESPECIFICA DE LA INTERACCION ESTRUCTURA-TENDON

Como ya se ha indicado, la característica diferencial fundamental entre ambas técnicas es la independencia o no de las deformaciones del hormigón y del acero de una misma sección. En un caso puede hablarse de sección conjunta, que en la práctica se trata como homogeneizada (a hormigón); en el otro, de dos secciones diferentes (relativas a una misma posición respecto a un origen común de coordenadas) o incluso, en otro nivel, de *dos estructuras distintas* ligadas en ciertos puntos.

La técnica no adherente se identifica, como es evidente, con las armaduras postesas. En cuando a la técnica adherente, la opción de armaduras postesas es, por cierto, la más general (2, 3) y lleva consigo siempre, precisamente para poder introducir el pretensado, la existencia de una fase previa no adherente; dadas las características normales de esta última (de corta duración y anterior a la entrada en servicio de la estructura), su análisis se ciñe en la práctica a los consabidos cálculos relativos a las operaciones de tesado y anclaje. Estos mismos cálculos, por estar ligados a esa fase común a ambas técnicas, forman parte también del análisis en la no adherente pero, por supuesto, no lo agotan.

Nos centraremos por el momento en la *técnica no adherente*, cuyo análisis, aparte de ser menos conocido, se muestra en principio, como ya se apuntó antes, más complejo, resultando finalmente ser el más general al permitir una formulación que, tal como se verá, engloba también a la adherente. Repasemos sus características:

—El pretensado representa, como siempre, una fuerza de compresión sobre la sección de hormigón (efecto activo).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

–La unión del hormigón con el acero de pretensado se establece sólo en los anclajes (extremos de los tendones), aunque también pueden existir contactos entre ambos en zonas intermedias, los cuales se traducen en interacciones mecánicas (en particular, rozamientos si hay deslizamientos relativos; aunque, en ciertas situaciones, pueden ajustarse mejor otros modelos para representarlas).

Tal vez es oportuno ahora tratar un poco de los distintos casos posibles respecto a la citada interacción hormigón-acero, considerando la disposición y forma del trazado de los cables o tendones:

–Trazados curvos (internos) o poligonales (externos): Siempre existe interacción, continua o en los vértices del polígono.

–Trazados rectos internos: Existe o no interacción según la amplitud del conducto, centrado del tendón en el mismo y tensión previa del acero (que influye sobre el efecto de ondulación).

–Trazados rectos externos: No existe interacción, a no ser que se produzcan contactos o se dispongan uniones intermedias.

Las condiciones del análisis estructural, en que se traduce la situación anteriormente descrita, son las que siguen:

Condiciones de equilibrio o mecánicas:

–por un lado, las de la *estructura de hormigón*, que relacionan sus acciones mecánicas (incluidas las originadas por los tendones, esto es, el pretensado y la interacción en los contactos, indistintamente) con sus esfuerzos;

–por otro, las propias de *cada tendón* que (equilibrando sus fuerzas extremas en anclajes, y en general su fuerza longitudinal, con las intermedias de interacción) permiten conocer su sistema de cargas (igual y contrario al que, debido a la ya citada acción del tendón sobre el hormigón, se produce sobre éste; sistema que posee, por descontado, todas las particulares propiedades (3) de las cargas de pretensado y sus esfuerzos).

Condiciones de compatibilidad o geométricas:

–por un lado, las relativas a las vinculaciones de la *estructura de hormigón;*

–por otro, una vez consolidados los anclajes, la de compatibilidad global hormigón-acero (igualdad de desplazamientos de ambos en los puntos de anclaje); para fases anteriores, y aunque no se dé estrictamente una situación de compatibilización, puede aquí citarse la igualdad del desplazamiento relativo entre ambos materiales con el alargamiento de tesado (o acortamiento por destesado).

Condiciones del material: entran en el análisis a través de las características mecánico-geométricas de las secciones de hormigón (incluyendo en ellas el acero adherente, como se hace al tomar la sección homogeneizada), así como de las del acero activo no adherente (relaciones tensión-deformación o fuerza-deformación); también podrían incluirse en este grupo ciertos modelos para representar las interacciones entre acero y hormigón en sus contactos intermedios, que presentan una forma mecánico-geométrica.

Precisamente, en lo que atañe a tales interacciones, nos vamos a limitar en este trabajo (con el fin de que no resulte más extenso) al *modelo de rozamiento simple*, que sólo afecta a variables mecánicas; quizás en otro lugar habrá ocasión de tratar de su significado en un marco más general.

A continuación, revisaremos, utilizando este modelo, las condiciones y variables *específicas de la interacción estructura-tendón*, esto es, las relacionadas con factores tales como sus uniones en los anclajes, sus interacciones en los contactos intermedios y sus desplazamientos relativos; son, por tanto, *comunes a todo tipo de estructuras* (lineales o de más dimensiones) *y de materiales* (hormigón y acero u otros) a los que se aplique esta técnica. Más adelante, se completará la formulación con el análisis de las condiciones relativas a las distintas fases o situaciones existentes, particularizando ya en las estructuras lineales o de barras, con objeto de poder plasmarla mejor.

Condiciones de equilibrio específicas de la interacción

Como son bastante conocidas, si bien en un contexto más restringido (pérdidas de pretensado por rozamiento), trataremos aquí de resumir omitiendo algunos antecedentes y desarrollos (las referencias siempre permiten entrar en más detalles), pero en la idea de que sea posible un seguimiento autosuficiente, por lo que se irán definiendo las distintas variables que aparecen, aunque muchas son asimismo bien conocidas.

Tomaremos un cierto sentido de avance, de manera que las variables vectoriales (desplazamientos, fuerzas, etc.) se considerarán positivas cuando tengan ese mismo sentido.

Supongamos, en principio, un tendón genérico de trazado curvo. Si t y n son respectivamente las componentes unitarias tangencial y normal sobre el tendón, debidas a su interacción con el hormigón, y P la resultante de sus tensiones (se toman positivas las tracciones), el equilibrio lleva (3) a

$$t = -\frac{dP}{ds} \quad y \quad n = \frac{P}{r} = \frac{d\beta}{ds},$$

siendo s la longitud, r el radio de curvatura y β

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

el ángulo total girado, todos ellos relativos también al tendón.

Por otro lado, el rozamiento significa $t = \mu \cdot n$, donde μ es el coeficiente de rozamiento.

En un contexto general, no obstante, la expresión anterior no es correcta; el sentido de la componente t producida por el rozamiento depende, en cada punto, del signo del desplazamiento relativo u entre acero y hormigón en el mismo; por tanto, en función de dicho signo, debe en puridad formularse como $t = \pm \mu \cdot n$.

Si se define

u = desplazamiento del acero – desplazamiento del hormigón,

es fácil comprobar que el signo de t resulta así: positivo si u es negativo y viceversa; por tanto, el signo de $t = \pm \mu \cdot n$ seguirá este mismo criterio.

Para el tendón, por tanto, se obtiene finalmente

$$P = P(0) \cdot \exp[\pm \mu \cdot \beta],$$

donde P (0) es la fuerza en el origen tomado y β el ángulo total girado desde el mismo, siendo ahora el signo del exponente igual al de u. Si se considera el efecto de ondulación, se tiene

$$P = P(0) \cdot \exp[\pm \mu \cdot (\beta + \varphi \cdot s)],$$

donde φ es el coeficiente de ondulación (en radianes por unidad de longitud) y s la longitud del tendón desde el origen tomado. Poniendo β en función de s, para cada trazado concreto, es posible llegar (con los trazados habituales, parabólicos y rectos) a

$$P(s) = P(0) \cdot \exp[\pm \mu \cdot (K \cdot s + K')],$$

expresión en la cual los valores de K y K' pueden ir variando de una zona a otra de la estructura (con los eventuales cambios de la curva del trazado; en la zona contigua al origen, por supuesto, siempre K' = 0). En adelante la tomaremos como expresión general de P.

Todo lo que aquí se expone es válido si el tendón se encuentra siempre traccionado, lo que se ha supuesto implícitamente hasta ahora. Pero hay que contemplar la posibilidad de que, como se verá más tarde, en algún caso, se produzcan *incrementos negativos de P* (esto es, de compresión), de manera que el tendón permanezca a tracción.

Analicemos brevemente la anterior eventualidad. Por supuesto, el análisis previo sigue siendo válido, pero teniendo en cuenta que todas las fuerzas son incrementos y que el de P es negativo; como t y n cambian entonces su signo, el criterio para definir el signo de $t = \pm \mu \cdot n$ ha de variar también, puesto que la relación entre el sentido de t y el signo de u no se altera: así, el signo de la anterior es ahora el mismo que el de u mientras que el exponente de la expresión de P tiene signo contrario al de u. Esto se puede comprobar gráficamente, estableciendo el equilibrio de un arco elemental del tendón para tales incrementos (compresión) de P.

En los *casos de interacción no continua* sino en puntos intermedios (trazados poligonales y, si existen uniones puntuales intermedias, también los rectos), todo es básicamente igual pero pasando de lo continuo a lo discreto: la distribución de P es constante por tramos, con discontinuidades por rozamiento en tales puntos.

Para aquellos *trazados rectos sin interacción intermedia* entre acero y hormigón, es obvio que, con independencia de la situación concreta, el valor de P es constante.

Pasando ya a *la estructura de hormigón*, los tendones dan lugar en ella a esfuerzos isostáticos y también, en su caso, a hiperestáticos de pretensado. Para las *estructuras de barras*, tomando los signos habituales de los esfuerzos, el momento flector isostático es $P \cdot e \cdot \cos\alpha$ y el esfuerzo axil isostático $-P \cdot \cos\alpha$, siendo e la excentricidad (tomada como positiva hacia arriba respecto al sentido de avance) y α el ángulo de la armadura activa con la directriz de la estructura de hormigón (tomando como positivo el giro hacia arriba respecto al sentido de avance), a los que hay que añadir, en su caso, los hiperestáticos (3).

Variable geométrica específica: desplazamiento relativo u

Se ha visto cómo el desplazamiento relativo u entre el acero y el hormigón en cada punto es, aunque indirectamente, un parámetro decisivo para las condiciones mecánicas. Pues bien, más adelante se apreciará cómo a través del mismo puede expresarse la condición de compatibilidad para los diferentes casos estudiados, por lo que dicha variable pasa a tener un *papel preponderante en el análisis.*

Expresando u, ya definido antes, en forma diferencial en función de las deformaciones del acero ϵ_p y del hormigón (al nivel de la armadura activa) ϵ_{ce}, se tiene $du = (\epsilon_p - \epsilon_{ce}) \cdot ds$.

La deformación ϵ_{ce} puede obtenerse del análisis de la estructura de hormigón sometida, entre otras acciones, al propio pretensado; la deformación del acero suele ser inmediata: en situación de linealidad del material se tiene $\epsilon_p = \frac{P}{E_p \cdot A_p}$, donde A_p es el área del tendón y E_p su módulo de elasticidad.

El valor de u en un punto genérico es, pues, con carácter general,

$$u = \int (\epsilon_p - \epsilon_{ce}) \cdot ds,$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

siempre que el origen (límite inferior de integración) corresponda a un punto en que $u = 0$. Así, para todos los cálculos posteriores al anclaje definitivo del tendón, es muy pertinente *situar el origen en un punto de anclaje* (donde, a partir de ese instante, el valor de u ha de ser nulo en condiciones normales, esto es, a no ser que ceda dicho anclaje), con lo que

$$u(s) = \int_0^s (\epsilon_p - \epsilon_{ce}) \cdot ds ,$$

origen que se utilizará en lo sucesivo para la mencionada situación.

Para las *estructuras de barras*, el análisis de la sección de hormigón, en situación de linealidad y suponiendo trazados tendidos, conduce a (2, 3)

$$\epsilon_{ce} = -\frac{P}{E_c \cdot A_c} - \frac{P \cdot e^2}{E_c \cdot I_c} + \frac{N}{E_c\, A_c} - \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} ,$$

donde A_c e I_c son, respectivamente, el área y la inercia de la sección de hormigón y E_c el módulo de elasticidad de este material; por otro lado, N y M son los esfuerzos distintos a los isostáticos de pretensado (hiperestáticos de pretensado, en su caso, y los debidos a otras acciones).

Por tanto, para tales estructuras, si n es el coeficiente de equivalencia ($n = \frac{E_p}{E_c}$),

$$\epsilon_p - \epsilon_{ce} = \frac{P}{E_p \cdot A_p} \{1 +$$

$$+ n \cdot A_p \left[\frac{1}{A_c} \left(1 - \frac{N}{P}\right) + \frac{e^2}{I_c} \left(1 + \frac{M}{P \cdot e}\right) \right] \},$$

expresión para la que hay que indicar que, con el convenio de signos tomado, el término $\frac{M}{P \cdot e}$ resulta normalmente negativo al dar valores numéricos (2, 3). Introduciendo la anterior en la expresión general de u, se obtiene el valor del desplazamiento relativo para estas estructuras.

FORMULACION DE LAS DISTINTAS TECNICAS Y FASES

Se ha llegado así a una formulación parcial, específica de la interacción acero-hormigón, establecida en principio para la técnica no adherente; como ya se ha indicado, es común a todas las estructuras a las que se aplica esta técnica (aunque se haya particularizado con más detalle para una tipología concreta y dentro del ámbito lineal). En lo sucesivo nos centraremos ya en esta tipología, las *estructuras lineales o de barras*, a modo de muestra suficientemente representativa de la formulación global, ya que resulta muy ilustrativa al tener una forma analítica bastante sencilla.

El análisis que sigue se refiere a las diversas situaciones que implican una variación de la fuerza de pretensado P, por lo que las diferentes variables de las expresiones anteriores representan, en realidad, *incrementos sobre sus valores anteriores* y no valores totales.

Como situación particular límite, se incluye también la técnica de tendones adherentes.

Comencemos por repasar el análisis corresondiente a las operaciones de tesado y anclaje, común a ambas técnicas (fase previa a la inyección, en la adherente con armaduras postesas).

Análisis relativo al tesado y anclaje

El sentido del desplazamiento relativo entre acero y hormigón es conocido a priori en todos los puntos: en el tesado, el acero se desliza hacia el punto de tesado y posterior anclaje (activo); en el anclaje con deslizamiento (anclaje por cuñas) se produce un destesado parcial, deslizando el acero en sentido contrario. Así, en todos estos casos, queda de entrada perfectamente establecida la expresión de la fuerza de pretensado P, variable que *sólo para el primer tesado representa valores totales*, mientras que en el resto de los casos significa incrementos sobre los valores previos, lo que ocurre también para las demás variables.

La *fase de tesado* se caracteriza por lo siguiente:

– Las condiciones mecánicas son suficientes por sí mismas para determinar la ley o distribución de P (y, por tanto, de los esfuerzos y tensiones), ya que la condición impuesta aquí es mecánica (fuerza del gato) y se corresponde con la condición de borde P(0), si se toma como origen el propio punto de tesado.

– Como es obvio, aquí no rige condición de compatibilidad alguna como tal, sino que la expresión del desplazamiento relativo u sirve precisamente para calcular el *alargamiento de tesado* Δs, ya que éste no es otra cosa que tal variable, si se toma como origen (extremo inferior de integración) el punto límite de la zona en la que, por el tesado, se producen incrementos de P (en principio, y teóricamente, el anclaje opuesto al de tesado, aunque en la práctica puede ser un punto intermedio), para el cual $u = 0$. Llamando s_{lim} a la longitud del tendón desde este origen al punto de tesado, se tiene

$$\Delta s = \int_0^{s_{lim}} \frac{P}{E_p \cdot A_p} \{1 + n \cdot A_p \left[\frac{1}{A_c} \left(1 - \frac{N}{P}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^2}{I_c} \left(1 + \frac{M}{P \cdot e}\right)\right]\} \cdot ds ,$$

siendo M y N los esfuerzos que, por la aparición

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

del pretensado, se movilizan junto con sus isostáticos (hiperestáticos de pretensado, peso propio y cargas permanentes existentes); por supuesto, en tales condiciones la carga de tesado sería $P(s_{lim})$ y el signo de Δs es siempre positivo, como también lo es, por tanto, el exponente en la expresión de P al sustituirla en la anterior. En la práctica, se obtiene Δs tomando como origen el punto de tesado y permutando los límites de integración, con lo que P(0) es la carga de tesado y la ley P(s) es decreciente (exponente negativo, porque u es negativo con este nuevo sentido de avance):

$$\Delta s = \int_0^{s_{lim}} \{ \frac{P(0) \cdot \exp[-\mu \cdot (K \cdot s + K')]}{E_p \cdot A_p} \cdot [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})] - \frac{N}{E_c \cdot A_c} + \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} \} \cdot ds.$$

— Las expresiones anteriores, por cierto, *no son iguales que la normalmente utilizada*

$$\Delta s = \int_0^{s_{lim}} \frac{P}{E_p \cdot A_p} \cdot ds ,$$

que representa el desplazamiento absoluto del tendón, pero no el relativo al hormigón (respecto al cual se mide, como es evidente, dicho alargamiento).

— Si bien en la práctica suele haber una ligera diferencia entre ambas expresiones, al tener normalmente muy poco peso relativo al término global que las separa, puede haber casos en que esto no sea así. Por ello, parece conveniente tomar en el *cálculo del alargamiento de tesado* Δs una expresión que, siendo práctica, se acerque más a la primera que a la segunda; esa expresión, para sección de hormigón constante a lo largo del tendón, podría ser

$$\Delta s = [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2_{med}}{I_c})] \cdot \int_0^{s_{lim}} \frac{P}{E_p \cdot A_p} \cdot ds + \int_0^{s_{lim}} \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} \cdot ds ,$$

donde e^2_{med} es el valor medio de e^2 en la zona afectada. Se ha tenido en cuenta, para ello, que normalmente el valor de P no varía excesivamente a lo largo del tendón y que el peso relativo de e^2 es mínimo dentro del factor de P; nótese también la omisión del efecto del esfuerzo axil N movilizado por el tesado, el cual no aparece en la mayoría de los casos reales (piezas simples, vigas continuas) y, cuando lo hace, no suele ser muy grande (pórticos, salvo que los soportes sean muy rígidos).

La *fase de anclaje con deslizamiento* (por cuñas) viene caracterizada porque el valor de tal deslizamiento es justamente el que permite encontrar el valor de $\Delta P(0)$. Como ahora se producen incrementos negativos de P, el signo del exponente en la expresión de ΔP para la zona afectada es el opuesto al que posee u, según se vio más arriba; como, respecto al tesado, tanto este criterio de signos como el propio signo de u son los contrarios, ocurre que ambas cosas se compensan, resultando para ΔP una expresión cuyo exponente es igual al de P para el tesado. Tomando, como antes, el origen en el punto de tesado y anclaje y llamando s_{lim} a la distancia, a lo largo del tendón, desde el anterior al punto límite de la zona afectada por el destesado, se cumple que

$$\Delta s = [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2_{med}}{I_c})] \cdot \int_0^{s_{lim}} \frac{\Delta P(0) \cdot \exp[-\mu' \cdot (K \cdot s + K')]}{E_p \cdot A_p} \cdot ds ,$$

expresión práctica para los mismos supuestos que la anterior; además, refleja ya una variación en el coeficiente de rozamiento (μ' ahora) desde el tesado inicial a este destesado por deslizamiento y se ajusta a la hipótesis, bastante razonable, de que éste último no modifica prácticamente los esfuerzos movilizados en el tesado, salvo los isostáticos de pretensado. El signo de Δs es ahora negativo (ΔP y, en particular, $\Delta P(0)$ lo son).

Es evidente que, aunque referido al anclaje por cuñas, lo anterior es extensivo al destesado por cualquier otra causa.

Para *trazados rectos sin interacción*, y dado que P (o ΔP) es constante, las integrales anteriores se extienden siempre a toda la longitud del tendón y, por supuesto, se simplifican mucho; si, además, se supone que la sección de hormigón es constante (y también la excentricidad e, lo que en tales circunstancias parece lo más normal) es fácil comprobar que, para tesado,

$$\Delta s = \frac{P \cdot s_{tot}}{E_p \cdot A_p} [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})] - \frac{N \cdot s_{tot}}{E_c \cdot A_c} + \int_0^{s_{tot}} \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} \cdot ds$$

y, para destesado por deslizamiento,

$$\Delta s = [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})] \cdot \frac{\Delta P}{E_p \cdot A_p} \cdot s_{tot} ,$$

siendo s_{tot} la longitud total del tendón; expresiones todas ellas que no son exactamente iguales a las normalmente usadas, por el mismo motivo ya expuesto antes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Análisis del caso general sin adherencia

Trataremos ahora, sin salir de la técnica del pretensado no adherente, del caso general en que se produce una variación de P por la *aparición de nuevas acciones o incrementos de las ya existentes*, que deforman el hormigón y, por tanto, el acero. Tales acciones son fundamentalmente las mecánicas; las geométricas, en la práctica, sólo producen variaciones de P a través de esfuerzos hiperestáticos, salvo las deformaciones diferidas del hormigón que lo hacen directamente en cualquier estructura. Aquí no se considera explícitamente el ámbito diferido para evitar complicaciones formales innecesarias; por ello, los efectos de las acciones se limitarán sólo a los esfuerzos (que incluyen ya en su caso, por supuesto, tales hiperestáticos), siendo muy sencillo extrapolar esta formulación al análisis diferido.

Es interesante observar, volviendo por un momento atrás, que en el instante del tesado, aunque se movilicen esfuerzos por ello, éstos no influyen en el valor de P, puesto que lo que cuenta en ello es la fuerza del gato, pero sí lo hacen en el valor del alargamiento de tesado, por actuar sobre el hormigón e incidir así en el desplazamiento relativo; por el contrario, los esfuerzos que aparecen ya más tarde influyen sobre P puesto que deforman la estructura de hormigón.

Las características y forma de resolución de este caso general son:

– El sentido del desplazamiento relativo entre hormigón y acero no es conocido a priori.

– La condición de compatibilidad global, antes ya enunciada (igualdad de desplazamientos del acero y del hormigón en los anclajes), es la siguiente:

$$u(s_{tot}) = \int_0^{s_{tot}} \frac{P}{E_p \cdot A_p} \{1 + n \cdot A_p [\frac{1}{A_c} (1 - \frac{N}{P}) + \frac{e^2}{I_c} (1 + \frac{M}{P \cdot e})]\} \cdot ds = 0 \, .$$

– Se requieren conjuntamente las condiciones mecánicas y geométricas para obtener la distribución de P (y, por tanto, los esfuerzos). Al sustituir la expresión general P(s), obtenida mecánicamente, en la de compatibilidad global, esto es,

$$\int_0^{s_{tot}} \{\frac{P(s)}{E_p \cdot A_p} [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})] - \frac{N}{E_c \cdot A_c} + \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c}\} \cdot ds = 0 \, ,$$

se tiene la condición a partir de la cual es posible encontrar P(0).

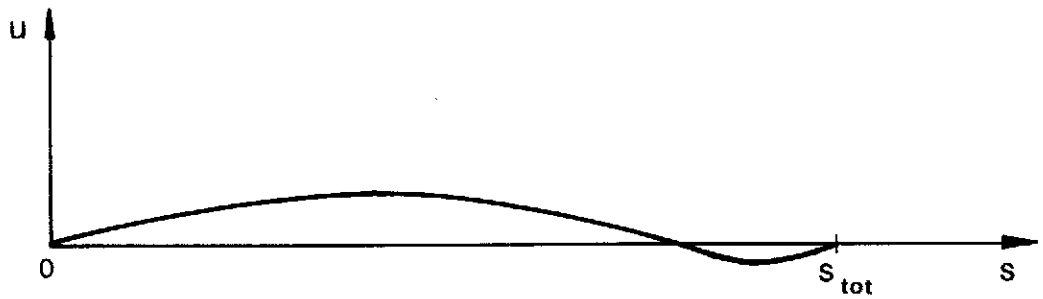
– Es bastante evidente que cerca de cada extremo (anclaje) de los tendones, tomándolo como origen y avanzando hacia el opuesto, el signo de u es positivo, (ϵ_p es positiva y ϵ_{ce} negativa) lo que quiere decir que, respecto a un mismo origen, esta variable tiene que cambiar de signo en un punto intermedio; esto se muestra en la figura que sigue.

–En consecuencia, la expresión de P respecto a un mismo origen no es única, por producirse un cambio de signo en su exponente; pero, como es lógico, ha de mantenerse la continuidad de P. En la práctica, lo más cómodo suele ser referir cada una a su extremo correspondiente (esto es, ponerlas en función de P(0) y de $P(s_{tot})$).

–La integral de la condición de compatibilidad global se subdivide, por tanto, en la suma de las relativas a los diferentes tramos definidos por una misma expresión. El signo del exponente de P(s), como ya se explicó más arriba, es el mismo de u(s) o, lo que es igual, el de la integral

$$\int_0^{s} \{\frac{P(s)}{E_p \cdot A_p} [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})] - \frac{N}{E_c \cdot A_c} + \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c}\} \cdot ds \, .$$

– Como en la integral anterior no está definido todavía el valor P(0), resulta que se ha de proceder mediante tanteos, de manera que al final se cumpla la nulidad de la integral por tramos relativa a $u(s_{tot})$ y coincida el signo del exponente de P(s) con el de la última integral.



Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Para *trazados rectos sin interacción*, todo lo anterior se simplifica y resulta directo, resumiéndose en la condición

$$\frac{P \cdot s_{tot}}{E_p \cdot A_p} [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})] - \\ - \frac{N \cdot s_{tot}}{E_c \cdot A_c} + \int_0^{s_{tot}} \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} \cdot ds = 0 ,$$

donde se ha supuesto que tanto la sección de hormigón como la excentricidad e son constantes a lo largo del tendón.

Análisis del caso general con adherencia

Veamos ahora qué sucede con la técnica del pretensado adherente, en las mismas condiciones expuestas al comienzo del epígrafe anterior.

Lo relativo a la fase previa a la inyección adherente ya ha sido comentado y no lo repetiremos ahora. Sí se ha de indicar que, a fin de establecer la continuidad entre ambas fases, es preciso conocer en cada punto o sección el valor de $\epsilon_p - \epsilon_{ce}$ en el instante anterior a dicha operación (2, 3), también conocido como $\Delta\epsilon_p$ (diferencia de deformaciones que, como se sabe, es justamente du/ds).

Para la fase adherente, en el ámbito lineal se calcula habitualmente con los parámetros de la sección homogeneizada. Pero las cosas pueden enfocarse de otra forma, ligando la situación de esta fase al planteamiento del presente trabajo.

Desde esta óptica, lo que ocurre ahora es que, en todos los puntos, el valor de du/ds ya no se modifica; esto es, como se trabaja en incrementos para todas las variables, en dicha situación se cumple que du/ds = 0. Con esta condición se puede calcular la distribución de (los incrementos de) P en todo instante; esto es,

$$\frac{P}{E_p \cdot A_p} [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c})] - \\ - \frac{N}{E_c \cdot A_c} + \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} = 0 .$$

En realidad, lo anterior es una *condición geométrica de compatibilidad local* (continua, para todos los puntos o secciones, y por ello diferencial) que de manera automática *respeta la compatibilidad global* $[u(s_{tot}) = \int_0^{s_{tot}} (du/ds) \cdot ds = 0]$. Por otro lado, es evidente que aquí no tiene ningún sentido la expresión general de P para la situación no adherente, puesto que no se producen deslizamientos relativos.

Se plantea, entonces, la cuestión de la equivalencia de esta vía de cálculo con la relativa a sección homogeneizada. La respuesta es, por supuesto, afirmativa, ya que el análisis con sección homogeneizada puede realizarse sobre secciones netas de hormigón y acero por separado, a base de imponer la compatibilidad de deformaciones de ambos materiales en la fibra o nivel de contacto, respetando el equilibrio del conjunto (todo incremento de P en la armadura activa se traduce en igual incremento de la compresión sobre el hormigón); procediendo de esta forma (1) se llega precisamente a la expresión anterior de P.

Es más, desde un planteamiento riguroso, es incluso más correcta esta forma de cálculo, ya que lleva a que no haya de cambiarse la directriz de las piezas (baricentros de las secciones netas de hormigón, siempre) de una fase a otra; esto no ocurre con el análisis sobre secciones homogeneizadas, para el que hay que pasar de la anterior directriz a la formada por los baricentros de éstas, si bien la diferencia es muy pequeña en general y, en la práctica, esto no se hace.

Comentarios finales

Una conclusión evidente de todo lo anterior es que, una vez anclados los tendones, en igualdad de condiciones (trazado, incrementos de las acciones, etc.) el valor medio de los incrementos de P en cada tendón es el mismo, con independencia de que exista o no adherencia y de que, en este último caso, existan o no contactos intermedios con el hormigón; lo que sí varía de un caso a otro es su distribución.

Por otra parte, en todo lo que precede, es posible cambiar el arco o longitud s del tendón, si su trazado es tendido, por la abscisa x de la pieza.

ASPECTOS PRACTICOS DEL CALCULO EN LAS DISTINTAS TECNICAS Y FASES: EJEMPLO.

En el apartado anterior se han ido haciendo ya algunas indicaciones de tipo práctico a lo largo del desarrollo de sus diferentes epígrafes y puntos. No obstante, en éste tratamos de presentarlos de forma más conjuntada, más cercana a la dinámica práctica real.

Obviaremos las fases de tesado y anclaje, para las que no existen problemas especiales de cálculo dignos de reseñar.

Para el caso general sin adherencia, la resolución presenta ya algún problema, puesto que en general es preciso realizar tanteos para ajustar P(0) de manera que se cumplan una serie de condiciones. Pero a lo anterior se suma el hecho de que en los esfuerzos M y N, que aparecen en las distintas integrales, se incluyen los hiperestáticos producidos por la

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

propia ley P(s), la cual se conoce al final, una vez obtenido P(0).

El caso general con adherencia presenta pocos problemas, puesto que el valor de P se obtiene directamente en cada sección. No obstante, al igual que en el anterior, cabe preguntarse qué ocurre con los hiperestáticos ligados a la propia ley P(s).

Probablemente, la manera más idónea de proceder al respecto sea la presentación y resolución de un ejemplo concreto, lo que dará, además, ocasión para hacer algún comentario de carácter general.

Ejemplo

Sea una viga continua de dos tramos simétrica, de sección constante y con pretensado de trazado parabólico también simétrico, que podría corresponder a la estructura del tablero de un puente, la cual se muestra en la figura con el trazado medio de los tendones.

Las características de la sección de hormigón son $A_c = 5\ m^2$ e $I_c = 2{,}3\ m^4$ y el área de los tendones de acero es $A_p = 200\ cm^2$.

Módulos de los materiales: $E_c = 35000$ M P a y $E_p = 210000$ M P a.

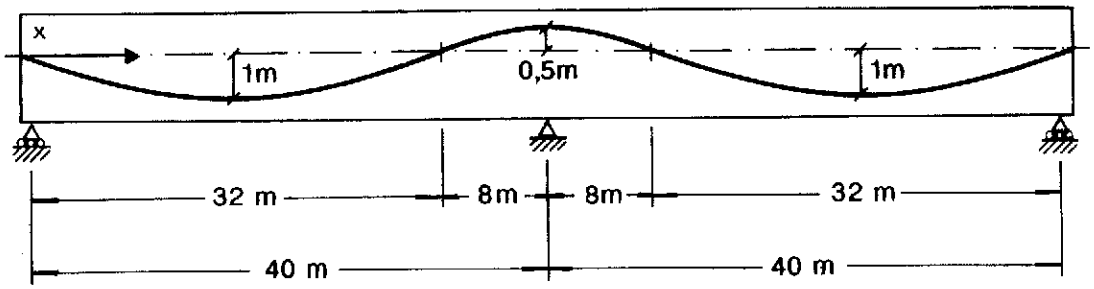
Se supone que los coeficientes relativos a la interacción son $\mu = 0{,}16$ y $\varphi = 1/128$ rad/m.

* * *

Se trabajará, en todo lo que sigue, con el trazado medio de los tendones; como el mismo es tendido, sustituiremos la longitud s por la abscisa x. Definamos analíticamente su excentricidad e:

en $0 \leqslant x \leqslant 32$, $e(x) = \left(\frac{x-16}{16}\right)^2 - 1$;

en $32 \leqslant x \leqslant 48$, $e(x) = -0{,}5\left(\frac{x-40}{8}\right)^2 + 0{,}5$;



Para el pretensado se supone, por separado, el uso de ambas técnicas:

1) tendones no adherentes;

2) tendones adherentes.

A su vez, para cada técnica se estudia un par de casos, relativos a sendas hipótesis sobre el incremento de la carga variable repartida q:

a) actuando en la mitad de la estructura, esto es, sobre un solo vano, el derecho por ejemplo (caso asimétrico);

b) actuando en toda la estructura (caso simétrico);

tal como se representa en la figura siguiente.

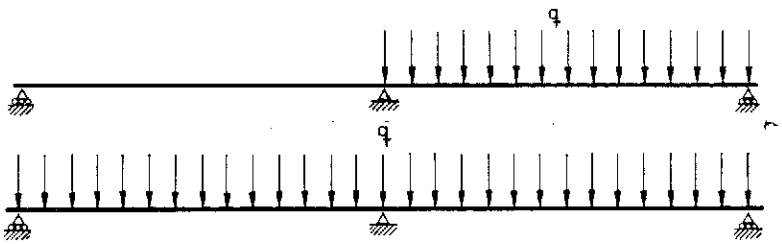
en $48 \leqslant x \leqslant 80$, $e(x) = \left(\frac{x-64}{16}\right)^2 - 1$.

1.– *Técnica de tendones no adherentes.*

Veamos la expresión de la fuerza P. En un cierto tramo, el incremento del ángulo β girado por los tendones, por tener éstos un trazado tendido y parabólico, es $\Delta\beta \cong \Delta \operatorname{tg}\beta = \Delta|\operatorname{tg}\alpha| = \Delta|e'(x)|$.

Por tanto, teniendo en cuenta que u es positivo en el entorno del origen y suponiendo en principio que lo sigue siendo en toda la estructura, la expresión general de P es:

para $0 \leqslant x \leqslant 32$,



Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$P(x) = P(0) \cdot \exp\left[0{,}16 \cdot \frac{2x}{128}\right] =$$

$$= P(0) \cdot \exp\left[0{,}0025\, x\right];$$

para $32 \leqslant x \leqslant 48$,

$$P(x) = P(0) \cdot \exp\left[0{,}16 \left(\frac{x-32}{64} + \frac{x+32}{128}\right)\right] =$$

$$= P(0) \cdot \exp\left[0{,}00125\,(3x - 32)\right];$$

para $48 \leqslant x \leqslant 80$,

$$P(x) = P(0) \cdot \exp\left[0{,}16 \cdot \frac{x-48+x+64}{128}\right] =$$

$$= P(0) \cdot \exp\left[0{,}0025\,(x+8)\right].$$

En lo que viene a continuación, vamos a trabajar con la expresión del desplazamiento relativo,

$$u(x) = \int_0^x \left\{\frac{P(x)}{E_p \cdot A_p}\left[1 + n \cdot A_p\left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2(x)}{I_c}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{M(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c}\right\} \cdot dx\,.$$

Tomaremos en el cálculo un valor medio de $e^2(x)$ (esto es, e^2_{med}) a lo largo de la estructura, puesto que se sabe que P no varía mucho y e^2 tiene un muy ligero peso relativo en el factor que multiplica a P(x); dicho valor es 0,4533 m^2, aunque, precisamente por ese pequeño peso relativo, puede tomarse incluso "a ojo" con muy poco error adicional.

El factor $E_p \cdot A_p/[1 + n \cdot A_p\left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2(x)}{I_c}\right)]$, divisor de P(x), pasa de este modo a ser constante, teniendo el valor 4009 M N. El factor $E_c \cdot I_c$, que afecta a $M(x) \cdot e(x)$, vale $8{,}05 \cdot 10^4$ MN $\cdot$ m^2.

Caso 1 a :

Definamos la ley de momentos debidos a la carga q. En este caso,

para $0 \leqslant x \leqslant 40$, $\quad M(x) = -\dfrac{40\,q \cdot x}{16}$;

para $40 \leqslant x \leqslant 80$,

$$M(x) = \frac{q\,(x-40)\,(80-x)}{2} - \frac{40\,q\,(80-x)}{16}\,.$$

Para facilitar el cálculo de la ley P(x), mediante tanteos a partir de las integrales de $u(80) = 0$ (compatibilidad global) y de u(x), puesto que no se sabe a priori dónde se anula éste, es muy interesante conocer previamente el orden de magnitud de P. Ello se puede conseguir directamente suponiendo que P es constante; en tales condiciones,

$$P = -\frac{4009}{80 \cdot 8{,}05 \cdot 10^4} \int_0^{80} M(x) \cdot e(x) \cdot dx\,.$$

Como en este caso $\int_0^{80} M(x) \cdot e(x) \cdot dx = -2193{,}6$ q, resulta de lo anterior $P = 1{,}3655$ q.

Tanteando con una P constante de ese valor, se ve claramente que u(x) es positivo en todo el vano izquierdo y se anula en el derecho, precisamente dentro del tramo $48 \leqslant x \leqslant 80$. Puede tomarse ahora la expresión exacta de u(x) con P variable (esto es, $P(x) = P(0) \cdot \exp\left[0{,}0025\,(x+8)\right]$) y hacerse lo mismo para la zona complementaria en la que u(x) es negativo, colocando ahora el origen en el apoyo derecho (para este origen provisional se está en el tramo $0 \leqslant x \leqslant 32$ y la expresión depende de P(80), siendo su exponente también positivo por haberse cambiado el sentido de avance: $P(x) = P(80) \cdot \exp\left[0{,}0025\,x\right]$); tanteando con las dos expresiones de u, hay que lograr finalmente que se anulen en el mismo punto y que el valor de P en éste último coincida para ambas leyes de P(x).

Mediante tal procedimiento se llega a la obtención de los valores en los extremos de la estructura: $P(0) = 1{,}222$ q y $P(80) = 1{,}47$ q. El punto interior en que u se anula es el de abscisa $x = 72{,}25$ m, muy cercano por tanto al apoyo derecho.

Caso 1 b :

En este caso, al existir perfecta simetría en todo, se conoce el punto en el que u se anula: el apoyo central. Por ello, el cálculo no requiere tanteos y todo puede referirse a la mitad de la estructura (el vano izquierdo, para el origen tomado), incluida la condición de compatibilidad global.

Definamos ahora (en $0 \leqslant x \leqslant 40$) la ley de momentos debidos a la carga q:

$$M(x) = \frac{q \cdot x\,(40-x)}{2} - \frac{40\,q \cdot x}{8}\,.$$

Como ahora $\int_0^{40} M(x) \cdot e(x) \cdot dx = -2193{,}6$ q $\rightarrow$ $\rightarrow \int_0^{40} P(x) \cdot dx = \int_0^{32} P(0) \cdot \exp\left[0{,}0025\,x\right] \cdot dx + \int_{32}^{40} P(0) \cdot \exp\left[0{,}00125\,(3x-32)\right] \cdot dx =$ $= 42{,}11 \cdot P(0) = \dfrac{4009 \cdot 2193{,}6\,q}{8{,}05 \cdot 10^4} \rightarrow$

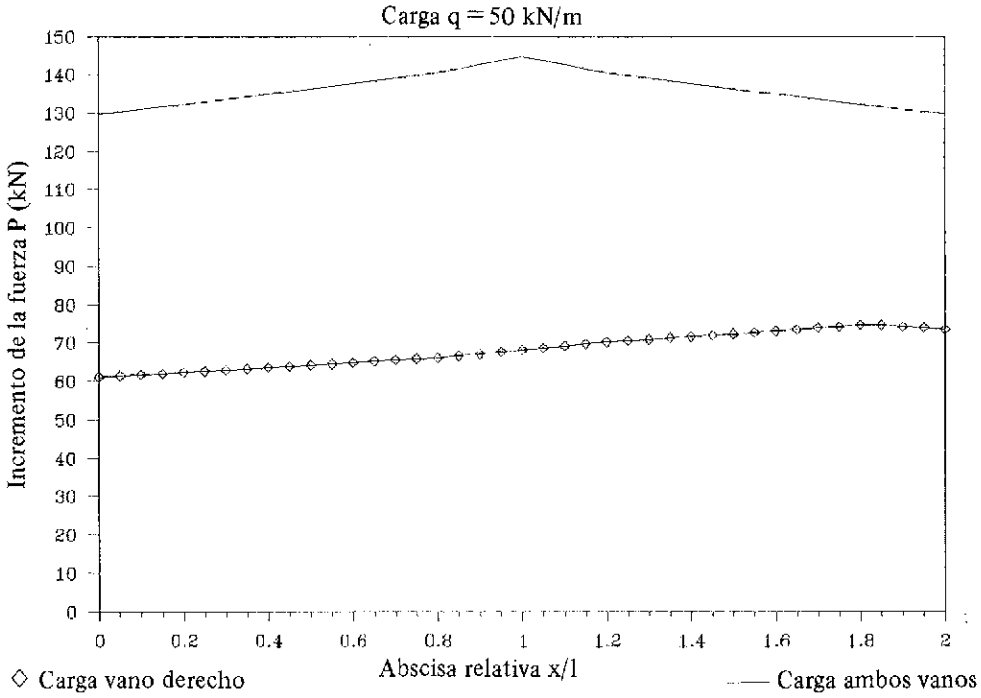
$\rightarrow P(0) = 2{,}594$ q.

Por otra parte, $P(40) = P(0) \cdot \exp\left[0{,}11\right] = 2{,}896$ q.

En la figura que sigue se aprecia la distribución de P en ambos casos para $q = 50$ kN/m.

Hablemos de los *hiperestáticos creados por la propia ley* P(x), ya que hasta ahora no se han incluido en M(x). Antes que nada, evaluemos su orden de magnitud; ello puede hacerse directamente, si se supone que tanto P como la excentricidad e

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



son constantes (tomando para esta última una cota superior de su valor medio), mediante la integración de la línea de influencia (para deformaciones) del momento hiperestático sobre el apoyo central (3), donde es máximo:

$$M_{hip}(40) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 40) \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{E_c \cdot I_c}{40}\right) \cdot \frac{P \cdot e}{E_c \cdot I_c} = -\frac{3}{2} \cdot P \cdot e \, .$$

Tomaremos el caso b (simétrico), en que los valores de P son mayores (su valor medio es el doble que el del caso a, que es el ya calculado allí suponiendo P constante), al igual por tanto que los hiperestáticos; supondremos por ejemplo e = − 2/3 m, que es suficientemente desfavorable. De esta forma,

$$M_{hip}(40) = -\frac{3}{2} \cdot (2 \cdot 1{,}3655\ q) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 2{,}731\ q \, ,$$

valor muy inferior a los máximos relativos de los momentos producidos directamente por la carga variable q que se encuentran en un orden de magnitud de 100 q a 200 q.

Por tanto, pueden despreciarse a costa de un pequeño error; de todas maneras, no existe ninguna dificultad en considerarlos, pudiendo procederse para ello del modo siguiente:

– calcular el valor medio de P(x) (esto es, como si fuera constante);

– calcular sus hiperestáticos (con la e(x) real en principio, aunque se puede simplificar aún más el cálculo tomando, como se acaba de hacer, un valor medio adecuado) e incluirlos en M(x);

– obtener la ley P(x) que corresponde a esos M(x), tal como se ha realizado en todo lo que precede.

Otra forma práctica de proceder, de alcance general, puede ser suponer en principio que P es constante, con lo que los hiperestáticos se obtienen salvo un factor que es precisamente su valor, el cual se puede identificar con P(0), incluyéndolos ya en las expresiones de la compatibilidad global y de u(x) y realizando los tanteos hasta obtener P(0). Al final, se puede comprobar que los hiperestáticos usados y los reales para la ley P(x) obtenida difieren poco (lo que está asegurado en la mayoría de los casos); en caso contrario, hay que incorporar estos últimos al cálculo y volver a tantear.

2.– *Técnica de tendones adherentes.*

Ahora, en la sección genérica de abscisa x se cumple

$$du/ds = \frac{P(x)}{E_p \cdot A_p} \left[1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2(x)}{I_c}\right)\right] + \frac{M(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c} = 0 \, ,$$

con lo que el cálculo de P(x) es inmediato. No obstante, y por lo dicho sobre la influencia relativa de $e^2(x)$ en su factor, seguiremos usando en su lugar

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

el mismo valor constante e^2_{med} anterior; aunque ahora puede tomarse su valor real en cada sección sin dificultad, al no existir ya la complicación de tenerlo dentro de una integral. Por tanto,

$$P(x) = -\frac{4009}{8{,}05 \cdot 10^4} M(x) \cdot e(x) =$$

$$= -0{,}0498\, M(x) \cdot e(x)\,.$$

Caso 2 a:

La distribución de P es asimétrica, teniendo incluso valor negativo (compresión) en buena parte del vano izquierdo, puesto que tanto momentos como excentricidades son negativos.

En el centro,

$$P(40) = -0{,}0498 \cdot (-40^2\ q/16) \cdot 0{,}5 = 2{,}49\ q.$$

Caso 2 b:

La distribución de P es simétrica, no teniendo prácticamente valores negativos (compresión), puesto que momentos y excentricidades vienen a tener en toda la estructura signos contrarios.

En el centro,

$$P(40) = -\,0{,}0498 \cdot (-40^2\ q/8) \cdot 0{,}5 = 4{,}98\ q.$$

En la figura siguiente se muestra la distribución de P en ambos casos para q = 50 kN/m.

Puede observarse ahora lo que ya se sabe con carácter general: para un mismo caso de incremento de q, el valor medio de la ley P(x) que resulta, para una u otra técnica (e incluso, para la no adherente, si no hubiera interacción intermedia alguna, lo que no es posible con el trazado existente) es idéntico.

Como antes, tratemos finalmente de los *hiperestáticos creados por la propia ley* P(x), ya que tampoco se han incluido aún en M(x). Su orden de magnitud es el mismo que antes, puesto que, como se acaba de indicar, lo es el de P(x).

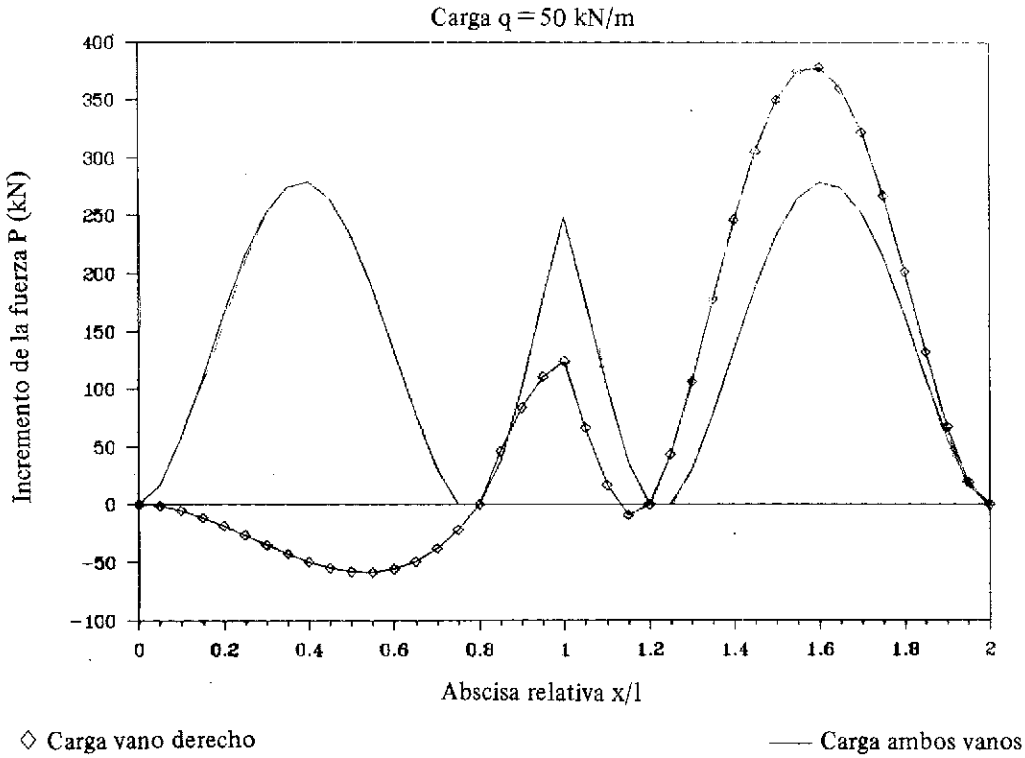
Por tanto, pueden asimismo despreciarse a costa del consabido pequeño error; de todos modos, no existe dificultad alguna en considerarlos, pudiendo procederse al efecto de la forma siguiente:

obtener P(x), tal como se ha hecho más arriba, sin considerar sus hiperestáticos;

– calcular los hiperestáticos de P(x) (con e(x) real en principio, si bien se podría simplificar aún más el cálculo tomando un valor medio adecuado) e incluirlos en M(x);

– obtener P(x) con esos nuevos M(x).

Hablando ya en términos generales, se ha de indicar que, a pesar de que el valor medio no varía de una técnica a otra, la ley o distribución P(x) para la adherente puede dar lugar a unos hiperestáticos menores que los resultantes para lo no adherente (pudiendo despreciarse directamente) o in-



Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

cluso nulos. Ello es tanto más cierto cuanto más cercana se encuentre la ley P(x) a ser lineal con M(x) (esto es, entre otras, en la medida en que e(x) se aproxime a ser constante, lo que por otra parte lleva también, para la técnica no adherente, a que P(x) tienda a lo mismo); la razón de ello se aclara si se recuerda que M(x) es siempre una ley de momentos compatibles en la estructura de hormigón.

Por último, para esta misma técnica adherente puede afirmarse, a título de curiosidad, que los errores que se cometen al despreciar estos hiperestáticos son del mismo orden que los que resultan al no tener en cuenta, cuando se calcula con sección homogeneizada, que la directriz de la estructura conjunta no es exactamente recta si la excentricidad de los tendones es variable, aunque la estructura de hormigón sea recta y de sección constante.

CONCLUSION

Se ha establecido una *formulación general del análisis de estructuras de hormigón pretensado* para las técnicas adherente y no adherente, aplicable en sus condiciones específicas a cualquier estructura, aunque desarrollada después para las estructuras lineales o de barras, al permitir una formulación sencilla de tipo analítico.

Con ocasión del desarrollo anterior, se ha constatado la inadecuación de la fórmula habitual para calcular el *alargamiento de tesado* y se ha propuesto otra alternativa:

$$\Delta s = [1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2_{med}}{I_c}\right)] \cdot$$

$$\cdot \int_0^{s_{lim}} \frac{P}{E_p \cdot A_p} \cdot ds + \int_0^{s_{lim}} \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} \cdot ds \,,$$

siendo e^2_{med} el valor medio de e^2 en la zona afectada por el tesado, s_{lim} la distancia entre el punto de tesado y el límite de dicha zona y M los momentos movilizados por la aparición de P (distintos a sus propios isostáticos).

Lo mismo ocurre para el acortamiento por *destesado*, debido a un anclaje mediante cuñas o a otro motivo, para el que se propone:

$$\Delta s = [1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2_{med}}{I_c}\right)] \,.$$

$$\cdot \int_0^{s_{lim}} \frac{\Delta P(0) \cdot \exp\left[-\mu' \cdot (K \cdot s + K')\right]}{E_p \cdot A_p} \cdot ds \,,$$

con significados semejantes a la anterior, donde ya se supone que el coeficiente de rozamiento en el destesado es diferente al del tesado.

Precisamente para estas mismas situaciones de destesado, la formulación conduce también a que la ley de sus correspondientes ΔP (incrementos de compresión) tenga una forma similar a la de P (tracciones) en el tesado, lo que queda reflejado en la expresión anterior; por ello, *la ley P(s) posterior al destesado es sensiblemente parecida a la inicial*, si el coeficiente de rozamiento μ no varía mucho, aunque con valores menores; así, si μ se mantuviera constante, sería indiferente tesar y luego destesar hasta una cierta carga (o alargamiento) que tesar de una vez hasta lo anterior. Esto contradice la muy arraigada idea de que la curva de P posterior al destesado tiene *siempre*, en su zona de influencia, una pendiente distinta a la del tesado.

Sin entrar más a fondo en el análisis de este punto, que no es objeto del trabajo, lo concluiremos indicando que la mencionada equivalencia (tesar-destesar y tesar sin más) era previsible, dada la linealidad existente, para un trazado fijo y un coeficiente μ constante, entre Δs, P(0) y P(s): paso de unos a otros mediante operadores lineales, como son el factor constante y la integral de función lineal. Tampoco es posible tratar de un asunto de gran interés, relacionado con lo anterior: los valores de los coeficientes de rozamiento y ondulación en el tesado y el destesado y, por extensión, incluso en la etapa de servicio.

Apuntemos ahora algunas conclusiones en torno a los esfuerzos hiperestáticos. Se ha visto en el ejemplo que, tanto para la técnica no adherente como para la adherente, en el cálculo de los incrementos de P producidos por deformación de la estructura de hormigón, es posible despreciar el efecto de sus propios esfuerzos hiperestáticos. La razón estriba en que, en tales circunstancias, éstos vienen a ser unos *efectos* (deformadores de la estructura de hormigón) *de un orden inferior;* sin embargo, siempre es conveniente, al menos, realizar a posteriori una evaluación de su orden de magnitud, para calibrar su importancia y tener una idea del error que, en su caso, se va a admitir.

Algo similar ocurre al considerar los efectos de las pérdidas diferidas de pretensado para las acciones permanentes; así, en los cálculos en servicio relativos a las etapas "final" o intermedia, no está de más evaluar el orden de magnitud de los incrementos de los hiperestáticos ligados a dichas pérdidas, si éstas son importantes.

Ello significa que, en la mayoría de los casos, los hiperestáticos de pretensado sólo han de ser tenidos en cuenta en la fase de tesado inicial, cuando se introduce el pretensado, en la cual la variación de P (desde cero, para el primer tesado) no viene causada por deformación alguna de la estructura (de hormigón) sino que tiene un origen mecánico: la fuerza ejercida por el gato.

Por otro lado, es patente que la cómoda simplificación de tomar constantes los incrementos de P

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

producidos por deformación, para la técnica no adherente, será tanto más ajustada cuanto menores sean los coeficientes de rozamiento y de ondulación, por un lado, y las longitudes y variación de la excentricidad de los tendones, por otro. De lo cual se concluye que dicha hipótesis es, en líneas generales, más adecuada,

a) cuando se emplean tendones engrasados y

b) en el campo de las estructuras de edificación.

Finalmente, indicaremos que, por obvias limitaciones de extensión, no se ha entrado en aspectos relacionados con el análisis no lineal y el comportamiento con fisuración y a rotura de estas estructuras con tendones no adherentes, lo que dejaremos para otro momento.

REFERENCIAS

1. MURCIA, J. Tratamiento, en sección no fisurada, de la sección homogeneizada de hormigón y acero a partir de la neta de hormigón. *Hormigón y Acero* n° 114 (pp. 23-31). Madrid, 1975.

2. MURCIA, J. En torno del análisis no lineal de estructuras de hormigón pretensado. *Hormigón y Acero* n° 159 (pp. 95-113). Madrid, 1986.

3. MURCIA, J. *Fundamentos para el análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado* (304 pp.). Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 1987.

RESUMEN

En este artículo se plantea y desarrolla una formulación global para las estructuras de hormigón pretensado a partir del análisis de la técnica no adherente, sobre la base del modelo de interacción hormigón-acero de rozamiento simple; la técnica adherente queda cubierta dentro de ella como un caso particular especial, en el que la compatibilidad global se cumple merced a la existencia de una compatibilidad local continua. Se analizan también con la misma, las situaciones generales en servicio para ambas técnicas, sin olvidar las fases previas comunes de tesado y anclaje.

Para dar una idea precisa de los aspectos prácticos ligados a la formulación, se resuelve, para ambas técnicas por separado, un mismo ejemplo (viga continua de dos tramos), correspondiente a la estructura del tablero de un puente, en dos casos de distribución de la carga variable.

Finalmente, se apuntan algunas conclusiones, sobre todo prácticas, ligadas a la mejora de las fórmulas de cálculo de los alargamientos de tesado y acortamientos por destesado, a la forma que toma la ley de P en el anclaje por cuñas y otros tipos de destesado, a la importancia de los esfuerzos hiperestáticos de pretensado debidos a los incrementos de P que aparecen por deformación de la estructura y a otros extremos.

SUMMARY

The paper contains the development of an overall formulation for prestressed concrete structures, departing from the unbonded tendon technique analysis, on the basis of the simple friction model; bonded tendon technique is covered by it, as a particular case in which structural concrete-steel compatibility is fulfilled because of the existence of a continuous local one. All phases, including tendon prestressing and anchorage, are studied through such a formulation.

For having an idea of practical aspects involved, an example consisting of a two-span continuous beam (bridge deck) is solved, for both techniques separately and for two cases of live load distribution.

Finally, some practical conclusions are proposed, involving formulae for the calculation of tensioning extensions and releasing shortenings, shape of the force P law when releasing (due to wedge anchorage or other reason), influence of secondary moments due to the P increments that appear as the structure is deformed and other topics.

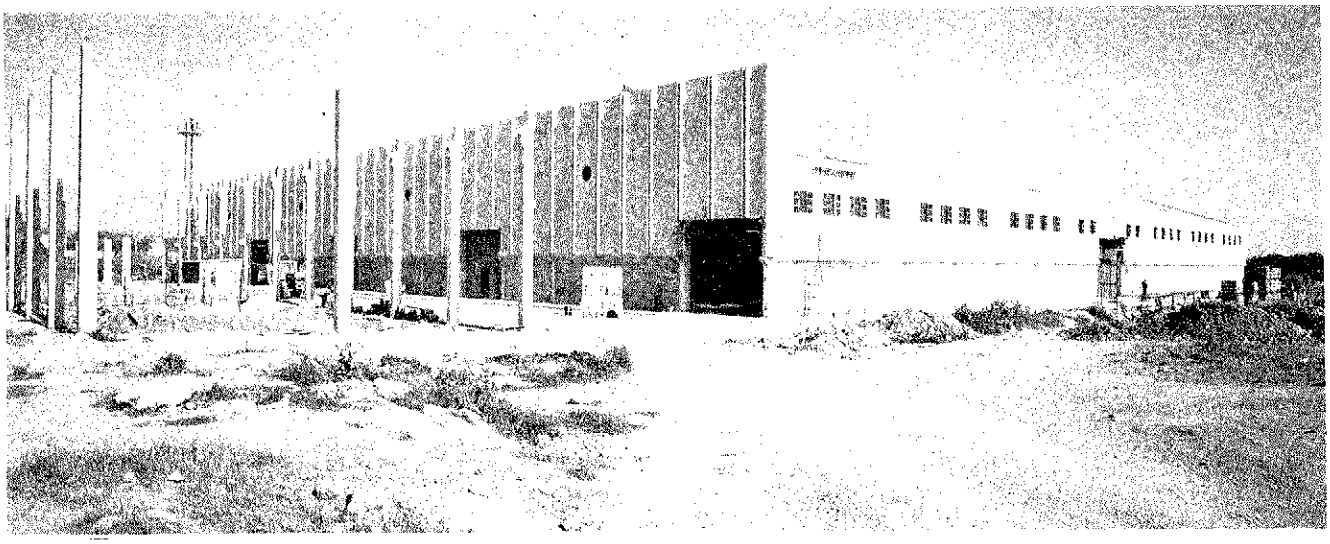
Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

ALVISA

PREFABRICADOS ALBAJAR

PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE



HUESCA:

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA
Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON
Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

MADRID

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10
Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4- 8 - TORREJON DE ARDOZ
Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

ZARAGOZA

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El cálculo por resistencia a la fatiga en la nueva Norma Cubana

José Bellido de Luna
Ingeniero Civil
Empresa de Proyectos de Obras para el Transporte
Cuba

Un método muy común en la elaboración de normas para el cálculo de estructuras de hormigón consiste en la adaptación de normas foráneas que, a juicio de un colectivo de especialistas, se acerquen más a nuestras posibilidades reales de ejecución y que además lleven implícitas en ellas los últimos descubrimientos de la ciencia y la técnica en la problemática de que se trate.

El objetivo de este trabajo es exponer el método utilizado para elaborar los diferentes epígrafes relativos al cálculo de la resistencia a la fatiga en aquellos elementos que así lo requieran.

En la norma que se encuentra actualmente vigente, que data de 1978, no existe ninguna regulación acerca de esta comprobación, por lo que los proyectistas de este tipo de estructuras, en su mayoría los que proyectan elementos para puentes (tanto de vías como puentes grúa), tienen que recurrir a normas de otros países para realizar sus cálculos.

La inclusión de las bases para la comprobación de las estructuras de elementos sometidos a la acción de cargas máximas y mínimas que se repiten por ciclos, en la norma cubana para el cálculo de estructuras de hormigón armado y pretensado de próxima aparición, fue planteado por sus autores como una necesidad impostergable.

El colectivo del CONCE que asumió la tarea, se dedicó a la búsqueda de diferentes normas que contemplaran este cálculo, revisándose entre otras, las del CEB - FIB, las normas Españolas, las del ACI de Norteamérica y las DIN de Alemania. En todas ellas se encontraron sólo referencias de las estructuras que deben ser comprobadas por este estado límite, no hallándose una metodología que pudiera ser empleada por nuestros proyectistas sin ninguna ambigüedad. Sin embargo, en la revisión de las Normas Soviéticas se encontró que ellas trataban el tema con suficiente profundidad y claridad.

En la Unión Soviética, las normas para el cálculo y diseño de las estructuras para puentes, tanto de ferrocarril, de carreteras como pasarelas peatonales, se encuentran separadas de las normas de cálculo de estructuras para edificaciones de diversos usos, cosa que no ocurre en nuestro país, pues la norma cubana es única para todo tipo de estructuras de hormigón armado y pretensado. Es por ello que una de las primeras tareas que tuvimos que enfrentar en la adaptación de estas normas a la nuestra fue compatibilizarlas y tratarlas de adaptar, lo más fielmente, a nuestras posibilidades reales.

Ambas normas poseían los siguientes caracteres comunes:

1. Las dos entraron en vigencia en Enero de 1986 por lo que pueden considerarse igualmente confiables en el sentido del desarrollo científico técnico.
2. En su estructura poseen un epígrafe, en los capítulos donde se dan las características de los materiales, para obtener las resistencias de cálculo de éstos a la fatiga.
3. En estos epígrafes, ambas normas fijan la resistencia de los materiales a la fatiga, en función del ciclo de tensiones repetitivas, máximas y mínimas, obteniendo un coeficiente menor que 1, que se aplica reduciendo la resistencia de cálculo de ambos materiales.
4. En las dos normas se analiza la disminución de la resistencia de cálculo a la fatiga por la presencia de empalmes soldados en la zona de máximas tensiones.
5. Como consecuencia también de las tensiones variables por ciclos, se contempla en las normas la variación del coeficiente n de

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

equivalencia, recomendándose un coeficiente distinto para la comprobación en este estado límite.

6. Ambas normas dedican un capítulo aparte para desarrollar los diferentes aspectos que hay que tener en cuenta en el cálculo de la resistencia a la fatiga, indicando además las estructuras que requieren esta comprobación.

A partir de estas consideraciones y teniendo en cuenta la similitud de la estructura de nuestra norma con la soviética, se decidió emplear la misma estructura anteriormente explicada, es decir:

1. Crear un epígrafe en cada capítulo referido a los materiales, en los cuales se expusiera la forma de obtener la resistencia de cálculo de cada uno de ellos a la fatiga.
2. Elaborar otro epígrafe en el capítulo correspondiente a las comprobaciones, donde se ofreciera un método comprensible y fácil de asimilar por cualquiera de nuestros proyectistas.

En el primer caso, se definen las fórmulas necesarias para el cálculo de la resistencia a la fatiga, tanto para el acero como para el hormigón, y en el caso del acero para los dos tipos conocidos, el ordinario y el de alto límite elástico.

Todas las resistencias de cálculo están en función del coeficiente γ_f que cuantifica la reducción de estas resistencias por el efecto de las cargas repetidas; y está en función de los ciclos de tensiones, máximas y mínimas, que se repiten más de 2×10^6 veces durante el período de utilización del elemento.

Los coeficientes γ_{fa} y γ_{fb} para el acero y el hormigón, respectivamente, deberán extraerse de una tabla, en función de los coeficientes llamados k_a, k_p y k_b, para el acero ordinario, el de alto límite elástico y el hormigón, respectivamente, que se obtienen por las fórmulas:

$$k_a = \frac{\sigma_{a\,mín}}{\sigma_{a,\,máx}};\ k_p = \frac{\sigma_{p\,mín}}{\sigma_{p,\,máx}}\ \text{y}\ k_b = \frac{\sigma_{b\,mín}}{\sigma_{b,\,máx}}$$

correspondiendo el numerador de las relaciones anteriores a las tensiones mínimas a que se somete cada uno de ellos y el denominador a las tensiones máximas.

En el caso del acero ordinario, para determinar el valor de γ_f en función de k_a, se elaboró la siguiente tabla comparativa número 1, con los valores de las dos normas soviéticas a que hacíamos referencia.

Para confeccionar la tabla se afectaron las resistencias de cálculo, de su coeficiente correspondiente, para determinar los valores de las resistencias de cálculo a la fatiga que se iban a comparar. Esto se hizo debido a que ambas normas poseen coeficientes ρ diferentes, pero también poseen resistencias de cálculo diferentes para el primer estado límite por resistencia, lo cual dificulta la comparación a otro nivel.

Tabla comparativa número I

Tipo de Norma	−1	−0,2	0	0,2	0,4	0,7	0,8	0,9	1
NSE A-I	92,0	142	157,5	173,2	202,5	205*	225*	225*	225*
NSP A-I	96,0	144	162,0	174,0	200,0*	200*	200*	200*	200*
NSE A-II	117,6	143	154,0	168,0	193,0	260*	280*	280*	280*
NSP A-II	100,0	150	168,0	185,0	218,0	250*	250*	250*	250*
NSE A-III 6-8 mm	117,0	135	149,0	167,0	202,0	302	337	355*	355*
NSP A-III 6-8 mm	102,0	154	173,0	189,0	224,0	288	320*	320*	320*
NSE A-III 10-40 mm	113,0	131	146,0	164,0	201,0	296	332	347	365*
NSP A-III 10-40 mm	106,0	158	178,0	195,0	231,0	297	330*	330*	330*

* Valores de resistencia de cálculo del acero; $\rho = 1$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En la tabla anterior podemos observar:

1. Los valores de la resistencia de cálculo a la fatiga para los aceros son más bajos para la Norma Soviética de Estructrura (NSE) que para la Norma Soviética de Puentes (NSP), con excepción de los valores señalados con asterisco, que corresponden a $\rho = 1$, donde ocurre lo inverso, por lo que explicábamos con anterioridad en relación con las resistencias de cálculo para el primer estado límite.

2. Existen dos rangos de resistencias en el caso del AIII, para los grupos de diámetros de 6 a 8 y de 10 a 40.

3. Los valores de la resistencia de cálculo del acero para el primer estado límite, en el caso de la norma de puentes son semejantes a los valores nuestros para la misma comprobación, cuando usamos como coeficiente de minoración el valor 1,2. Así se tiene, según sea el tipo de acero:

Para el A-I, comparado con el A-24 cubano:

$$\frac{R_a^*}{\gamma_a} = \frac{240}{1{,}2} = 200 \text{ MPa}$$

Para el A-II, comparado con el A-30 cubano:

$$\frac{R_a^*}{\gamma_a} = \frac{300}{1{,}2} = 250 \text{ MPa}$$

Para el A-III, comparado con el A-40 cubano:

$$\frac{R_a^*}{\gamma_a} = \frac{400}{1{,}2} = 330 \text{ MPa}$$

Atendiendo a las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta, además, que los cálculos de resistencia a la fatiga que se hacen más frecuentemente son los referidos a las obras destinadas a puentes, se decidió adoptar, para nuestra norma, las tablas para coeficientes k_a correspondientes a la Norma de Puentes.

En las normas que estudiamos se plantea también una reducción de la resistencia de cálculo a la fatiga del acero, por presencia de uniones soldadas. En ellas aparecen sendos grupos de tablas en las que se observa un estudio detallado del comportamiento a la fatiga de la unión soldada, para los diferentes aceros.

En realidad, el colectivo del CONCE entendió que asumir cualquiera de los dos grupos de tablas correspondientes a una de las dos normas, no era una tarea sencilla, debido a la ausencia total de investigaciones en este campo, en nuestro país. Por lo tanto, no tenía ningún sentido agobiar al proyectista con tablas y cálculos que carecen de respaldo práctico. Por ello se decidió agrupar los valores del coeficiente que había que aplicar en presencia de uniones soldadas, reduciendo éstas a tres tipos y adoptando para cada uno de ellos los valores siguientes:

En presencia de soldaduras por puntos: $\gamma_{fs} = 0{,}4$.

En presencia de soldaduras por cordones continuos: $\gamma_{fs} = 0{,}4$.

En presencia de soldaduras a tope: $\gamma_{fs} = 0{,}7$.

Como se ve, la presencia de uniones soldadas agrava bastante la resistencia de cálculo a la fatiga. Es por ello que en los elementos sometidos a este tipo de comprobación se recomienda evitar las uniones soldadas, en las secciones de máximas solicitaciones.

En el caso de la resistencia de cálculo del hormigón a la fatiga, se confeccionó la siguiente tabla comparativa entre las dos normas soviéticas:

Tabla comparativa número II

Tipo de Norma		**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**
Norma de Edificaciones		0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1	1
Norma de Puentes	B 27,5	0,800	0,84	0,88	0,92	0,96	1	1
	30,0	0,786	0,82	0,86	0,90	0,94	0,97	1
	35,0	0,768	0,81	0,84	0,88	0,92	0,95	0,95
	40,0	0,756	0,79	0,83	0,87	0,91	0,94	0,94

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En ella puede observarse lo siguiente:

1. La NSE utiliza un valor único del coeficiente ρ para todos los valores de hormigón, mientras que la NSP tiene valores diferentes según el tipo de hormigón. Queremos destacar que los hormigones soviéticos B 30 y B 40 corresponden a los nuestros con resistencia de 25 y 30 MPa, respectivamente.

2. Con independencia de lo anterior, no existen diferencias notables entre los valores de ρ para una misma diferencia de ciclos de tensiones, por lo que se decidió tomar para el coeficiente que se denominó k_b un valor único independiente del tipo de hormigón; tomándose, en definitiva, el valor medio correspondiente al hormigón B-35 soviético de la tabla de referencia.

En la parte correspondiente al capítulo de comprobación de las secciones, existía una diferencia notable en la exposición de ambas normas. Por una parte la NSE sólo se limita a explicar que el cálculo de la resistencia a la fatiga se realiza comparando las tensiones actuantes en las secciones, con las resistencias de cálculo a la fatiga determinadas según los epígrafes anteriormente expuestos. Además, se plantea que la determinación de tensiones se realizará por métodos elásticos y teniendo en cuenta el incremento del coeficiente de equivalencia, n, debido a la reducción de módulo de elasticidad del hormigón cuando se produce el fallo debido a este estado límite.

La norma de puentes es mucho más amplia. En ella se exponen, en primer término, las estructuras en las cuales se debe realizar la comprobación; con posterioridad, expone lo mismo que la NSE, pero incluyendo fórmulas que permiten al proyectista determinar las tensiones actuantes, por métodos elásticos.

Al redactar el epígrafe correspondiente a nuestra norma, decidimos ofrecer una redacción semejante a esta última, teniendo presente que los textos con los métodos para la determinación de tensiones por teoría elástica son muy poco conocidos entre nuestros técnicos.

CONCLUSIONES:

1. La norma cubana para el cálculo de estructuras de hormigón, cuenta ya con requisitos suficientes para enfrentar las comprobaciones de las secciones en su resistencia a la fatiga.

2. La base fundamental de este cálculo está en la norma soviética para puentes, que entró en vigencia en ese país en 1986, simplificada a nuestras condiciones de cálculo y ejecución.

3. Es necesario la elaboración de ejemplos que ayuden a la comprensión de este cálculo entre nuestros proyectistas, así como la divulgación de los mismos.

4. La inclusión en la norma del procedimiento de cálculo expuesto debe tomarse como punto de partida en el estudio de este fenómeno, a fin de comprobar si efectivamente los valores obtenidos por extrapolación de las normas soviéticas tienen un grado de aproximación suficiente en la práctica.

RESUMEN

En el presente artículo se hace un análisis del método empleado en la preparación de los epígrafes correspondientes al cálculo de la resistencia a la fatiga, en la norma cubana que entrará en vigencia próximamente, los cuales se anexan y podrán ser empleados para realizar los cálculos para este estado límite, mientras no exista dicha norma.

SUMMARY

In this paper is explained the method used in the Cuban Code, that will be nearly approved, for the calculation of the fatigue strenght.

The method could be employed until the new Code will be published.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El cálculo por resistencia a la fatiga en secciones de hormigón armado y pretensado

José Bellido de Luna
Ingeniero Civil
Empresa de Proyectos de Obras para el Transporte
Cuba

INTRODUCCION

Cuando se calcula un elemento sometido a la acción de cargas máximas y mínimas que se repiten por ciclos y siempre que exista la posibilidad de que el número de veces que se repiten los ciclos sea superior a 2×10^6 en el transcurso de la vida del elemento en cuestión, es obligatorio hacer su comprobación para el estado límite de resistencia a la fatiga.

La inclusión del cálculo por resistencia a la fatiga en la norma cubana de cálculo y diseño de estructuras de hormigón, se basa, fundamentalmente, en las normas soviéticas para edificaciones y para puentes, vigentes desde Enero de 1986, adaptadas a nuestras características propias.

DESARROLLO DEL TEMA

El cálculo para el estado límite de resistencia a la fatiga consiste, primeramente, en determinar las resistencias de cálculo de los materiales para este estado límite y, posteriormente, determinar las tensiones máximas de trabajo de estos materiales bajo las cargas de servicio y compararlas con los valores de resistencia previamente determinados.

La comprobación de la resistencia a la fatiga cae dentro del grupo de estados límites de resistencia, es decir, del primer grupo; sin embargo, su cálculo se realiza con cargas nominales. Esto se debe a que las posibilidades de que se repita un ciclo 2×10^6 veces, está más cerca de la realidad con este tipo de cargas que con las mayoradas. Las cargas accidentales se toman con su coeficiente de impacto, por la función intrínseca de este coeficiente; lo que no significa necesariamente una mayoración.

En la norma se indica que la comprobación por resistencia a la fatiga se realizará mediante la comparación de las tensiones en el acero y el hormigón con sus resistencias de cálculo, es decir:

$$\sigma_{b,\,máx} \leq R'^{*}_{bf}$$
$$\sigma_{a,\,máx} \leq R^{*}_{af}$$
$$\sigma_{p,\,máx} \leq \sigma^{*}_{pf}$$

donde σ_b, σ_a y σ_p representan las tensiones máximas del hormigón, acero ordinario y acero de alto límite elástico, respectivamente, y en los miembros de la derecha aparecen sus resistencias de cálculo a la fatiga.

También se prescribe en la norma que los cálculos de las tensiones de trabajo de los materiales se realizará por la teoría elástica, es decir, tomando un diagrama triangular de tensiones en las secciones de cálculo. Como entre nuestros proyectistas no abunda la literatura que trata este tema, se han incluido en la norma las fórmulas para las solicitaciones de mayor uso, tales como flexión, compresión y compresión excéntrica, cuya demostración es fácil de encontrar cuando se dispone de los textos mencionados.

Las resistencias de cálculo de los materiales se determinan afectando de un coeficiente de trabajo para la fatiga, a las resistencias previamente determinadas para el cálculo por el primer estado límite. El coeficiente de trabajo se obtiene de tablas, en las que se entra determinando previamente las relaciones entre la variación de tensiones máximas y mínimas actuantes.

Ejemplo de cálculo

Se propone la comprobación por el estado límite a la fatiga de una sección en el centro de la luz, de la viga de 16 m del proyecto típico soviético para puentes de ferrocarril.

R_{ak} = 300 MPa, R'_{bk} = 25 MPa.

I - Cálculo de las solicitaciones.

1. Cargas nominales permanentes.

a) Peso propio de la viga: q_a = 26 kN/m
b) Peso del balasto, traviesas y vía q_b = 12 kN/m.
c) Peso del hidroaislamiento q_h = 4 kN/m.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

2. Carga accidental equivalente, para el momento flector.

$q_c = 70{,}6$ kN/m. Se obtiene de la norma de carga para puentes NC-53-125-84, para la luz de cálculo = 15,26 m.

3. Coeficiente dinámico.

$C_D = 1 + \frac{10}{20+\gamma} > 1{,}15$. También se obtiene de la NC-53-125-84

luz de cálculo:
$C_D = 1{,}28 > 1{,}15$. Luego vale.

4. Momentos Mínimo y Máximo.

$$M_{mín} = \frac{(26 + 12 + 4)\,(15{,}26)^2}{8} = 1222{,}6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{máx} = (1222{,}6) + \frac{(70{,}6 \times 1{,}28)\,(15{,}26)^2}{8} =$$

$$= 3853{,}0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

II - Determinación de las resistencias admisibles.

1. Cálculo de los coeficientes γ_{fa} y γ_{fb}.

En este caso es fácil demostrar que:

$$\frac{\sigma_{b'mín}}{\sigma_{b'máx}} = \frac{\sigma_{a'mín}}{\sigma_{a'máx}} = \frac{M_{mín}}{M_{máx}} = K_b = K_a$$

$$K_{ab} = \frac{1222{,}6}{3853{,}0} = 0{,}32$$

Como la resistencia del acero es 300 MPa, buscamos en la tabla 9 de la norma e interpolamos, obteniendo $\gamma_{af} = 0{,}82$. (Las tablas 9 y 11a necesarias para el cálculo, se incluyen al final del artículo). La resistencia del hormigón es de 25 MPa, valor con el que entramos en la tabla 11 a y, por interpolación también, obtenemos el valor $\gamma_{bf} = 0{,}85$.

2. Determinación de las resistencias de cálculo a la fatiga.

Para el acero, según 4.4.2.

$R_{af}^* = \gamma_{fa} R_a^*$; R_{af}^*: Resistencia de cálculo del acero a la fatiga.

$R_a^* = \frac{R_{ak}^*}{\gamma_a}$; R_a^*: Resistencia de cálculo del acero para estados límites últimos.

$$R_a^* = \frac{300}{1{,}15} = 260 \text{ Mpa}$$

$R_{af}^* = 0{,}82 \times 260$
$R_{af}^* = 213{,}2$ MPa

Para el hormigón, según 4.5.1

$R_{bf}'^* = \gamma_{bf} R_b'^*$; $R_{b'f}$ Resistencia de cálculo del hormigón, a la fatiga.

$R_b'^* = \frac{25}{1{,}6} = 15{,}6$ MPa ; $R_b'^*$: Resistencia de cálculo del hormigón para estados límites últimos.

$R_{bf}'^* = 0{,}85 \times 15{,}6$

$R_{bf}'^* = 13{,}26$ Mpa

3. Determinación de las tensiones de trabajo del acero y el hormigón.

Según el epígrafe 8.11.3, para elementos trabajando a flexión simple,

$$\sigma'_b = \frac{M}{I_h} \cdot X' = \text{Tensión del hormigón}$$

$$\sigma_a = n_f \cdot \frac{M}{I_h}(ht - X' - d_u) = \text{Tensión del acero.}$$

En las fórmulas anteriores.

M : Solicitación originada por el momento de servicio.

I_h : Momento de inercia de la sección homogenizada, respecto al eje neutro, sin considerar la zona de tracción del hormigón. El área de la armadura de acero, se multiplica por el coeficiente de equivalencia, n_f.

n_f : Coeficiente de equivalencia que se obtiene, para la fatiga, según la tabla siguiente:

Resistencia del hormigón R'_{bk}, MPa	20	25	30	35
Coeficiente n_f	20	15	10	10

X' : Altura de la zona de compresión del hormigón, que se determina mediante las fórmulas aplicables a cuerpos elásticos, teniendo presente que no se considera ni la zona de tracción del hormigón ni la acción del acero en la zona de compresión.

d_u : Distancia desde el borde de tracción hasta el eje de la capa de armaduras más próxima.

h_t : Canto total de la sección.

1. Determinación de la altura de la zona en compresión, para un cuerpo elástico, suponiendo que la viga trabaja como T.

$$X' = -\frac{\eta f A + (b_e - b)\,h_o}{b} + \sqrt{\left(\frac{\eta f A + (b_e - b)\,h_o}{b}\right)^2 + \frac{(b_e - b)\,h_o^2 + 2\eta f A h}{b}}$$

donde: A = área de la sección de acero de la viga = 34 Ø 25 = 166,94 cm²
h = canto útil = 125,5 cm

El resto de los parámetros geométricos se obtienen del esquema que se adjunta (véase fig. 1).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

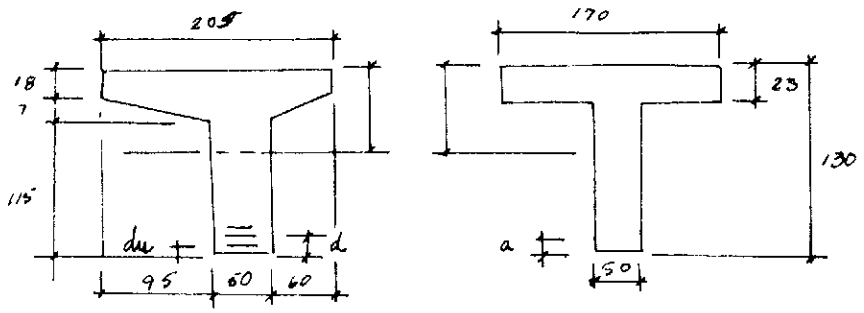


Figura 1

Se destaca que el valor del ancho del ala es promedio.

$$\frac{n_f A + (b_e - b)\, h_o}{b} = \frac{15 \times 166{,}94 + (170 - 50)\, 23}{50} =$$

$= 105{,}28$ cm

$$X' = -105{,}28 + \sqrt{(105{,}28)^2 + \frac{(170-50)\times 23^2 + 2\times 15 \times 166{,}94 \times 125{,}5}{50}}$$

$X' = 52{,}59$ cm.

Obsérvese que este valor es mayor que $h_o = 23$; lo que asevera que la zona de compresión incluye toda el ala y parte del alma. Si este valor hubiese resultado menor que h_o, habría que calcularlo nuevamente, considerando la viga rectangular con $b_e = b_o$.

2. Determinación del momento de inercia de la sección.

$$I_h = \frac{b_e X'^3}{3} - \frac{(b_e - b)(X' - h_o)^3}{3} + n A (h - X')^2$$

$$I_h = \frac{170\,(52{,}59)^3}{3} - \frac{(170-50)(52{,}59-23)^3}{3} + 15\times 166{,}94(125{,}5-52{,}59)^2$$

$I_h = 0{,}2051$ m^4.

3. Cálculo de las tensiones en el hormigón.

$$\sigma_{b'} = \frac{M_{máx}}{I_h} X'$$

$$\sigma_{b'} = \frac{3853}{0{,}2051} \times 0{,}5259 = 9879\ \frac{kN}{m^2} = 9{,}88 \text{ MPa}$$

4. Cálculo de las tensiones en el acero.

$$\sigma_\alpha = n_f \frac{M_{máx}}{I_h} (h_t - X' - d_u)$$

$$\sigma_\alpha = 15 \times \frac{3853}{0{,}2051} (140 - 52{,}59 - 4{,}5) \times 10^{-5}$$

$\sigma_\alpha = 233$ MPa.

5. Comparaciones.

Para el hormigón.

$\sigma_h = 9{,}88$ MPa $< R'^*_{bf} = 13{,}26$ MPa. Luego vale.

Para el acero.

$\sigma_a = 233$ MPa $> R^*_{af} = 213{,}2$ MPa. Luego no vale.

En este caso deberá incrementarse el área de acero y realizarse todas las comprobaciones nuevamente.

Si colocamos 4 Ø 25 más, entonces varían algunos valores, quedando:

$A = 186{,}58$ cm^2
$h = 124{,}75$ cm
$X' = 54{,}94$ cm
$I = 0{,}217$ m^4
$\sigma_a = 214$ MPA > 213 pero admisible
$\sigma_b = 9{,}741$ MPa, que ya antes valía.

Comentario acerca de los resultados obtenidos

El hecho de haber tomado una viga de 16 m, de amplio uso en nuestros puentes por pertenecer a la tipificación existente, no es casual; lo hicimos con todo propósito, para que constituya así una especie de advertencia sobre lo que pudiera ocurrir en un futuro, cuando nuestras cargas se acerquen más a las cargas de diseño de estas estructuras.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Comprobación por fatiga, en pretensado

Datos: Sea la viga de 16 m, pretensada, del nuevo sistema constructivo de puentes de ferrocarril cuyo estado tensional se señala (véase figura 2):

Los datos de la viga son:

Fuerza total de pretensado, después de descontadas las pérdidas = 3014,00 kN.

Cantidad: 8 cables 12 Ø 7.

Area de la sección del cable = 4,62 cm^2.

Posición del centroide de los cables = 10,5 cm del borde inferior.

Calidad del hormigón = 30 MPa.
Canto de la viga 160 cm.

Según 8.11.4.1, la comprobación de la armadura de la zona de tracción se realiza:

$$\sigma_{p,\,máx} = \sigma_{po}^* + \sigma_{pg} + \sigma_{p,ac}^*$$

$$\sigma_{p,\,mín} = \sigma_{po}^* + \sigma_{pg}^*$$

donde σ_{po}^* = tensión del acero pretensado, considerando las pérdidas.

$$\sigma_{po}^* = \frac{3014{,}00}{8 \times 4{,}62} = 815{,}47 \simeq 815{,}5 \text{ MPa}$$

σ_{pg} = Tensión en la armadura, debida a la acción de carga permanente.

$$\sigma_{pg} = n_f\, \sigma_{bg}$$

σ_{bg} = tensión en el hormigón debido a la acción de la carga permanente *en el centroide de los cables.*

Del estado de peso propio.

$$\sigma_{bg}^* = \frac{(2{,}05 + 1{,}23)\,(16{,}0 - 1{,}05) - 1{,}23}{16{,}0}$$

$$\sigma_{bg}^* = 1{,}83 \text{ MPa}$$

$n_f = 10$, para $R_{bk} = 30$ MPa (Norma)

$$\sigma_{pg}^* = 1{,}83 \text{ MPa} \times 10 = 18{,}3 \text{ MPa}$$

Del estado de carga accidental.

$$\sigma_{b,ac}^* = \frac{(7{,}44 + 12{,}4)\,(16{,}0 - 1{,}05) - 7{,}44}{16{,}0}$$

$$\sigma_{b,ac}^* = 11{,}098 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,ac}^* = 11{,}098 \times 10 = 110{,}098 = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,máx} = 815{,}5 + 18{,}3 + 110 = 943{,}8 \simeq 944{,}0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p,mín} = 815{,}5 + 18{,}3 = 833{,}8$$

$$K_p = \frac{833{,}8}{944} = 0{,}88$$

Interpolando en la tabla 9, para A-150 resulta $\gamma_{af} = 1$

Por lo que $\sigma_{pf}^* = \sigma_p^*$

$$\sigma_p^* = \frac{1.500}{1{,}2} = 1.250 \text{ MPa}$$

$\sigma_{p,máx} = 944 < 1.250$ · Luego vale.

Comprobación del hormigón.

$$\sigma'_{b,máx} = \sigma'_{bo} + \sigma'_{bg} + \sigma_{b,ac}$$

$$\sigma'_{b,\,máx} = -5{,}6 \text{ tracciones.}$$

$$\sigma_{b,mín} = +1{,}8$$

Como existen tracciones en el hormigón, $\gamma_{bf} = 1$ (véase tabla 11).

$$\sigma'^*_{b,\,máx.} < R_b'^*$$

$$\sigma'_{b,máx} = 5{,}6 < \frac{300}{1{,}6}$$

Como puede verse, esta viga no tiene problemas con la fatiga.

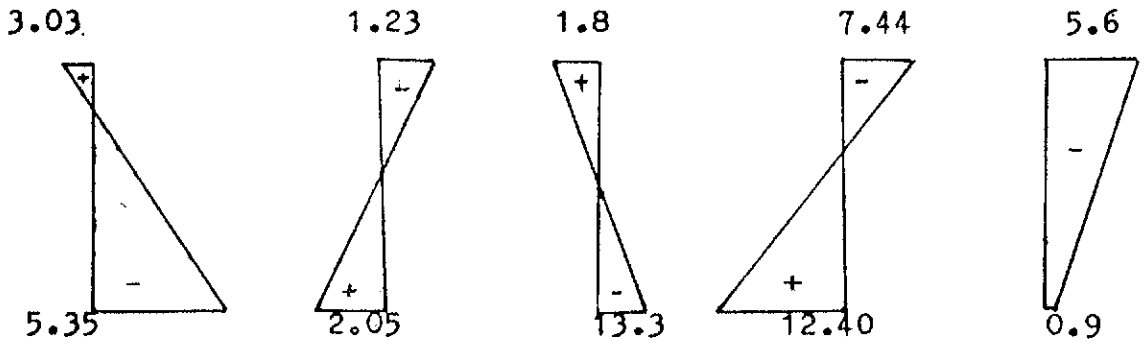


Figura 2

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA 9. VALORES DE γ_{af}

K_a, K_p / Tipo acero	−1	−2	0	0,2	0,4	0,7	0,75	0,80	0,85	0,90
A - 24	0,48	0,72	0,81	0,87	1	1	1	1	1	1
A - 30	0,40	0,60	0,67	0,74	0,87	1	1	1	1	1
A - 40	0,32	0,48	0,54	0,59	0,70	0,90	0,95	1	1	1
A - 150							0,85	0,97	1	1
A - 180							0,78	0,82	0,87	0,90

En la tabla anterior los valores intermedios de K_a, K_p se interpolan linealmente.

Los valores de γ_f, obtenidos de la tabla anterior, deberán reducirse en presencia de empalmes soldados, por los coeficientes siguientes, que tienen en cuenta el fallo frágil por soldadura:
Soldadura por puntos; 0,4
Soldadura por cordones continuos; 0,4
Soldadura a tope; 0,7.

TABLA 11.ª. VALORES DE γ_{bf}

Coeficiente K_b	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
γ_{bf}	0,77	0,81	0,84	0,88	0,92	0,95	0,95

En la tabla anterior, los valores de γ_{bf} intermedios pueden ser interpolados linealmente.

CONCLUSIONES

1. Obsérvese que, en ambas vigas, la armada y la pretensada, el acero se encuentra más cercano a las tensiones permisibles, que el hormigón, el cual aparentemente trabaja más cómodo en este estado límite.
2. Obsérvese además que este cálculo es muy sencillo y fácilmente podrá ser introducido en la computación.

BIBLIOGRAFIA

(NC-053-039) "Norma Cubana de Cálculo de elementos de Hormigón". (Propuesta).
Rosado L. "Cálculo de la resistencia a la fatiga". Revista Ingeniería Civil (6-77).

RESUMEN

En el presente artículo se expone cómo se realiza el cálculo de la resistencia a la fatiga, según la nueva norma cubana para el proyecto de elementos de hormigón armado y pretensado. Al final del mismo se incluyen dos ejemplos de cálculo para facilitar su comprensión.

SUMMARY

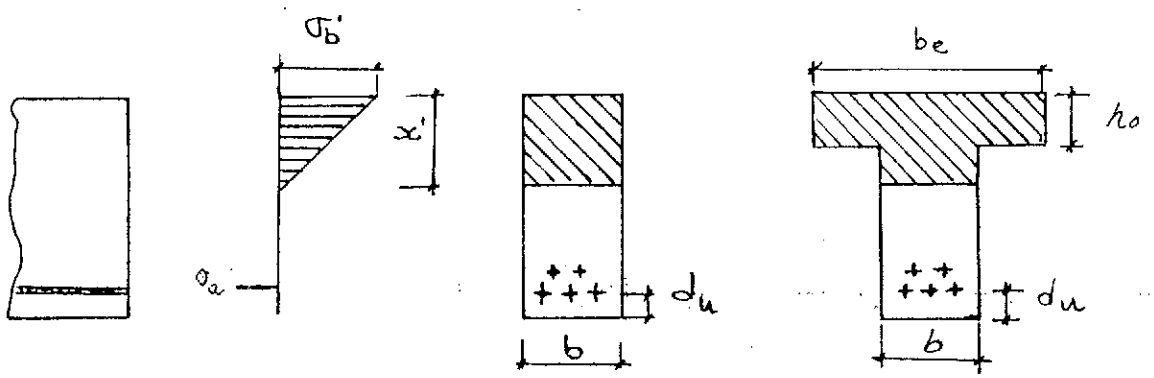
In this paper is explained the method for the calculation of the fatigue strenght of the reinforced and prestressed concrete sections in accord with the new Cuban Code.

Two examples are enclosed for better understanding of this method.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

FORMULARIO PARA EL CALCULO DE LA RESISTENCIA A LA FATIGA DE LOS ELEMENTOS DE HORMIGON ARMADO NO PRETENSADO

FORMA DE TRABAJO DEL ELEMENTO	FORMULAS DE CALCULO
Flexión en uno de los planos principales.	
Tensión en el hormigón.	$\sigma_b' = \frac{M}{I_h} \cdot X'$
Tensión en el acero.	$\sigma_a = n_f \frac{M}{I_h} (h_t - X' - d_u)$
Tensión de compresión axial en el hormigón.	$\sigma_b' = \frac{N}{B_t}$
Compresión excéntrica.	$\sigma_b' = \frac{N}{B_t} + \frac{M}{I_h} X'$
Tensión de compresión en el hormigón.	
Tensión en el acero.	$\sigma_a = n \frac{N}{B_t} + n_f \frac{M}{I_h} (ht - X' - d_u)$



En las fórmulas anteriores:

M y N: Solicitaciones de Momento y Fuerza normal de servicio.

B_t: Area de la sección transversal, homogenizada, del elemento.

Los restantes términos aparecen en el texto.

Para sección rectangular:

$$X' = \frac{n_f A}{b} \left(\sqrt{\frac{1 + 2\,b\,h}{n_f\,A}} - 1) \right)$$

$$I_h = \frac{b \cdot X^3}{3} + n_f \cdot A\,(h - x)^2$$

Para sección en T, con $X' \leq h_o$ (igual al anterior, sustituyendo b por b_e)

Para sección en T con $X' > h_o$

$$X' = \frac{-\,n_f.A + (be - b)h_o}{b} + \sqrt{\left(\frac{(nf.A + (be - b)\,h_o^2}{b}\right) + \frac{(be - b)\,h_o^2 + 2_{nf} \cdot A.h.}{b}}$$

$$I_h = \frac{b_e\,X^3}{3} - \frac{(b_e - b)\,(x' - h_o)^3}{3} + n_f.A\,(h - x)^2$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Diagnóstico y evaluación de construcciones de hormigón dañadas por el fuego

Adolfo Delibes Liniers
Dr. Ingeniero de Caminos
Profesor de la E.T.S. de Arquitectura

1. INTRODUCCION

Como veremos en lo que sigue, el daño sufrido por un elemento de hormigón armado depende, casi exclusivamente, de la temperatura máxima alcanzada en cada punto del mismo. La documentación técnica disponible permite calcular los perfiles de temperatura de secciones tipo expuestas al incendio normalizado (por ejemplo en ISO 834), en función de su duración, pues las altas temperaturas se van extendiendo con el tiempo a la masa de la construcción. En un punto determinado, la duración del efecto térmico apenas influye en su grado de deterioro.

Dichos perfiles dependen además de las siguientes variables:

a) Composición del hormigón y naturaleza de los áridos: silíceos, calizos o ligeros (*).

b) Forma y dimensiones de la sección: rectangulares (pilares), rectangulares o en T (vigas) o losas.

c) Exposición al fuego: por las cuatro caras (pilares), por tres caras (vigas), por una cara (losas de forjado o muros y divisiones).

La relativamente baja conductividad del hormigón, más que su resistencia a las altas temperaturas, lo hacen un material constructivo adecuado para la protección contra el fuego (Tabla 1).

De acuerdo con PETTERSON podemos indicar la siguiente tipología de los daños en construcciones de hormigón armado sometidas al fuego:

(1) Daño o deterioro permanente de las propiedades mecánicas de los materiales.

TABLA 1. INTRODUCCION

COMPORTAMIENTO AL FUEGO DE LOS ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS	
ACERO ORDINARIO	Pérdida del 50% de la resistencia a 500°C. Conductividad 80 W/m 0°C
HORMIGON	Conductividad 1 a 2 W/m 0°C
HORMIGON ARMADO	15 minutos de resistencia al fuego en elementos sin protección
	Más de 120 minutos respetando mínimos Recubrimiento . . . . . . Dimensiones sección . . . . .
ALUMINIO	Funde a 650°C Conductividad 5 veces la del acero
MADERA	Arde a 280°C En 30 minutos pierde 2 - 3 cm
ALBAÑILERIA (Tradicional)	240 minutos (a 1100°C)

OBSERVACION

Este trabajo no incluye el estudio de la resistencia al fuego de las estructuras metálicas. Una reciente publicación sobre el tema es la de J. Monfort en CONSTRUCCIONES METALICAS Y CALDERERIA, N.° 8/9, 1988.

(*) Para áridos calizos puede suponerse que la temperatura alcanzada por un punto determinado del elemento constructivo es solamente del 90% de la alcanzada si se trata de árido silíceo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

(2) Pérdida de material por descantillado, etc.

(3) Fisuración y deformaciones residuales.

(4) Pérdidas de tensión en estructuras de hormigón pretensado.

(5) Cambio del aspecto superficial.

En este artículo se exponen los datos conocidos que permiten estudiar el comportamiento ante el incendio de las construcciones de hormigón armado. El objeto de la exposición no es tanto justificar unos criterios de Proyecto o de Diseño constructivo, como establecer las bases para el *diagnóstico y evaluación* de las construcciones que ya han sufrido los efectos de las altas temperaturas. A partir de ellos puede dictaminarse sobre la nueva puesta en servicio de las construcciones afectadas.

Tal evaluación requiere establecer criterios ocasionalmente diferentes que los considerados al proyectar: así, la resistencia residual de las estructuras difiere de la que puede garantizarse durante el incendio, en particular debido al menor daño residual en las armaduras.

Por otro lado, las exigencias estructurales serán mayores en nuestro caso: no basta evitar la ruina de las construcciones bajo las solicitaciones características o habituales sino garantizar un adecuado margen de seguridad y un buen comportamiento en condiciones de servicio.

Otras exigencias, de estanquidad al fuego, por ejemplo, pueden ser evitadas: así los elementos cortafuegos han de mantenerse eficaces durante un cierto plazo: hasta que la superficie opuesta a la sometida al fuego alcanza una temperatura superior a unos 200°C. Este tipo de exigencias de aislamiento térmico no serán tenidas en cuenta en lo que sigue.

2. CARGA DE FUEGO Y RESISTENCIA

La resistencia al fuego de las construcciones se refiere al período durante el cual soportan, con un margen de seguridad mínimo, las solicitaciones de proyecto. La resistencia depende, evidentemente, de la «carga de fuego» y del grado de aislamiento que los distintos elementos constructivos ofrecen a la estructura, retrasando las solicitaciones térmicas. Es posible evaluar las «cargas de fuego» y su velocidad de propagación, con más o menos precisión, a fin de reducir el problema al caso tipificado en la normativa, relativo al comportamiento de los elementos constructivos.

De acuerdo con nuestra Instrucción EH-88 se denomina PERIODO de resistencia al fuego, al tiempo en minutos durante el cual una pieza resiste la carga de servicio cuando se somete al ensayo de resistencia previsto en UNE 23.093, considerándose períodos de 30 a 240 minutos. La norma UNE citada es equivalente a la ISO 834 anterior. Un soporte de 30 × 30 cm^2 de sección, con 35 mm de recubrimiento, tiene una resistencia al fuego de 120 minutos. El dato anterior equivale a suponer que las armaduras alcanzan una temperatura máxima del orden de 500°C al finalizar el período de resistencia al fuego.

La comprobación de una sección de hormigón armado frente al daño por fuego se realiza recorriendo los pasos siguientes:

a) Determinación de la isoterma de iniciación de daños, usualmente a unos 500°C.

b) Introducción del diagrama «reducido» de las armaduras, sometidas a temperaturas elevadas.

c) Comprobación de la sección por los procedimientos habituales de cálculo.

Una vez producido el incendio, si los daños no han sido definitivos, la condición b) resultará limitativa solamente en el caso de armaduras deformadas en frío, como veremos más adelante. El problema del diagnóstico se basará en la determinación de una isoterma de umbral de daño o de un cierto nivel de daño (véase la Fig. 1).

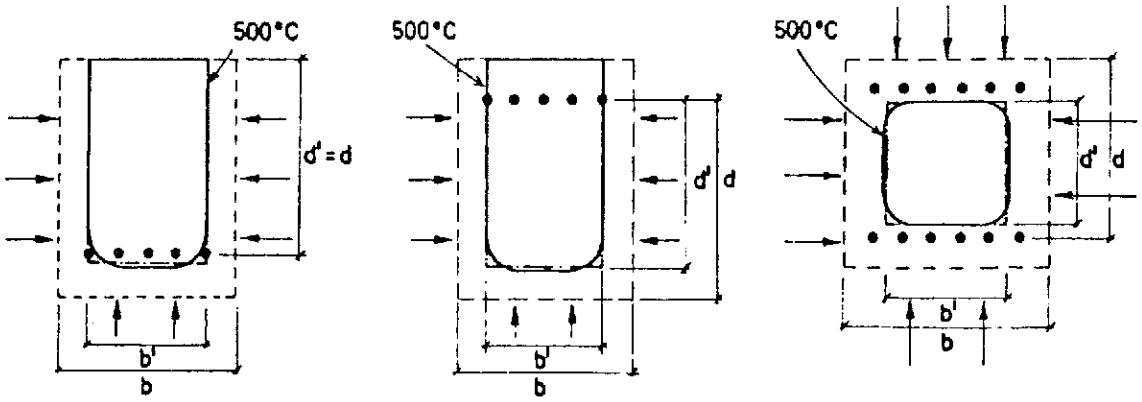


Fig. 1. Sección reducida de hormigón armado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Si la isoterma de 400° - 500°C no ha alcanzado a las armaduras (puede «simplificarse» dicha línea adaptándola a formas rectangulares, lo que reduce los efectos en las esquinas) es probable que la resistencia de la estructura esté muy poco afectada.

3. EFECTOS APARENTES DEL INCENDIO SOBRE EL HORMIGON

3.1. Pérdidas de peso por calcinación

De forma simplificada puede indicarse que, temperaturas de hasta 100°C producen únicamente la evaporación y migración del agua intersticial que contiene el hormigón. Entre 125°C y 250°C, el yeso aportado al cemento como regulador del fraguado se deshidrata y ocurren las primeras pérdidas de resistencia apreciables en el hormigón. Entre dicha temperatura y un máximo de 750 u 800°C se dañan los distintos compuestos hidratados de la pasta de cemento, empezando por los aluminatos y silicatos, siguiendo por la portlandita, hasta unos 500°C y finalmente los carbonatos a las máximas temperaturas. La figura 2 ilustra los efectos gravimétricos de la temperatura en el caso límite de la pasta de cemento.

NOMENCLATURA:

W = peso en cada escalón del tratamiento térmico.

W_0 = peso residual tras la calibración a 800°C.

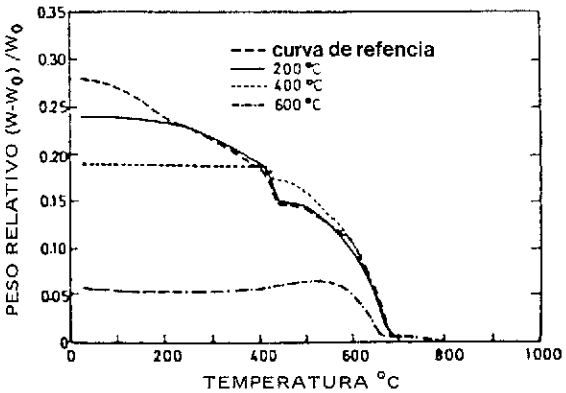


Fig. 2. Pérdida de peso, por calcinación, de la pasta de cemento Portland. Según HARMATHY (1970).

3.2. Cambios de color

Los hormigones fabricados con árido silíceo o calizo muestran un cambio de coloración con la temperatura: de 300°C a 600°C se tornan rosáceos o rojizos, entre 600°C y 900°C grises, y amarillentos por encima de dicha temperatura. La coloración depende de las transformaciones de diversos compuestos de hierro y, por tanto, admite variaciones. El cambio no es reversible, por lo que la temperatura alcanzada durante el incendio puede ser estimada a posteriori. Así, la resistencia residual puede juzgarse de forma aproximada:

— El hormigón rosáceo es sospechoso.
— El hormigón gris se vuelve poroso y friable.

La figura 3 explica estos fenómenos, que son válidos para hormigones fabricados con áridos no procedentes de rocas ígneas.

Fig. 3. Cambios de color del hormigón. Según ZOLDNERS (1960) citado por NEVILLE (1981).

4. EFECTOS MECANICOS DEL INCENDIO SOBRE EL HORMIGON

Las figuras números 4 y 5 representan el comportamiento térmico del hormigón en relación con las diferentes propiedades mecánicas que nos interesan. Simplificadamente puede suponerse, con precisión razonable, que dichas propiedades dependen casi exclusivamente de la temperatura máxima alcanzada y no del gradiente térmico o de la duración del nivel de temperatura citado.

Los datos experimentales disponibles se refieren casi siempre a la resistencia *durante* el incendio: no a la *residual*. En general, debe suponerse que la resistencia residual es aún ligeramente inferior a la obtenida a temperatura elevada. No obstante, algunos investigadores opinan que una cierta re-hidratación posterior de los componentes del conglomerante hidráulico da lugar a una «recuperación» parcial de la resistencia.

La resistencia a compresión empieza a disminuir a unos 250°C y lo hace de manera casi lineal con la temperatura, hasta conservar aproximadamente no más del 40% de su resistencia original a unos 600°C. Por encima de esta temperatura el hormigón puede disgregarse fácilmente (figura 4).

La influencia del incendio es más notable en otras propiedades mecánicas del hormigón (figura 5). Así, la debilidad de la unión árido-mortero, la dilatación diferencial de los áridos y la pasta y la mayor fragilidad del hormigón a tracción que a compresión, hacen que la sensibilidad al incendio de la resistencia a tracción sea elevada. A 200°C, la pérdida de resistencia es del 30% en lugar del 20% indicado a compresión. Antes de alcanzarse los 500°C la pérdida es ya del 50%.

Como en el caso anterior, la duración de las altas temperaturas tiene aquí escasa influencia, siendo determinante la temperatura máxima al-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

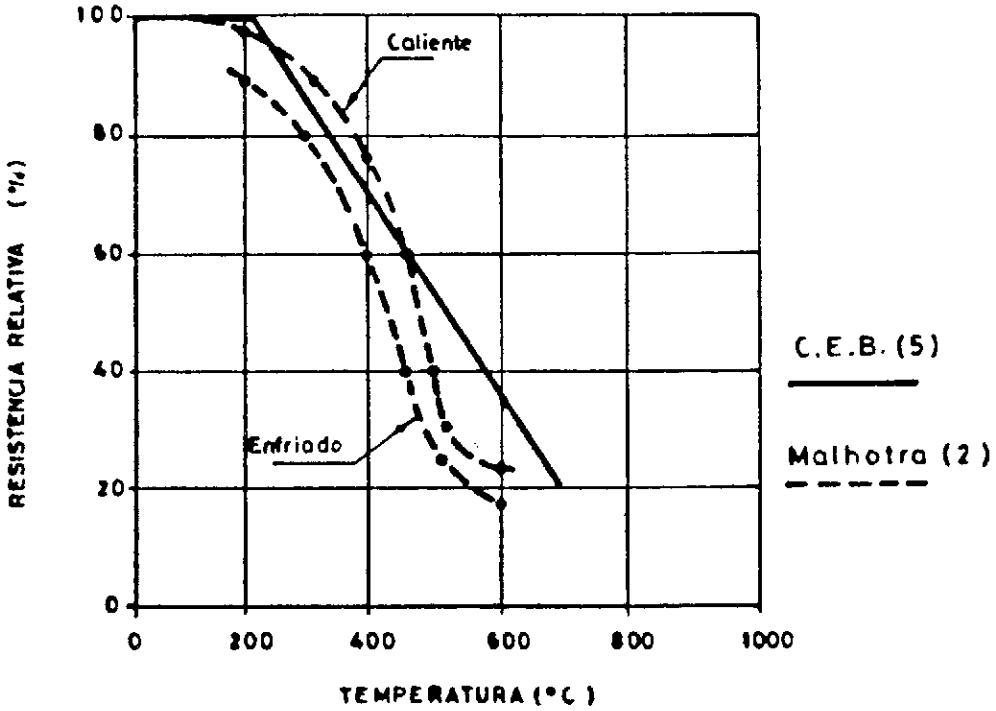


Fig. 4. Influencia de la temperatura en la resistencia a compresión del hormigón*.

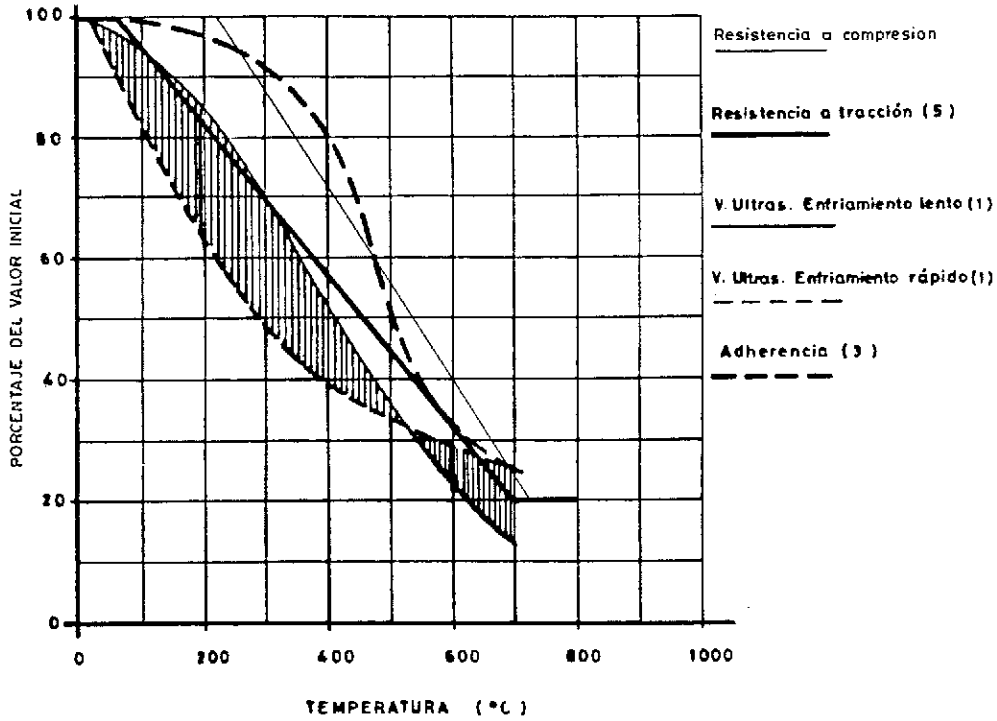


Fig. 5. Influencia de la temperatura en diversas propiedades del hormigón*.

*Los números entre paréntesis hacen referencia a la "Bibliografía".

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

canzada. Además, los efectos son más notables después del enfriamiento y, especialmente, si éste tiene lugar de forma brusca.

La adherencia entre las armaduras y el hormigón representa un caso intermedio entre los anteriores. La influencia de las altas temperaturas es pequeña hasta que se alcanzan unos 300°C. A más de 500°C las pérdidas de adherencia son análogas a las de resistencia a tracción.

Además del efecto térmico aislado en el material compuesto, debe tenerse en cuenta la posibilidad de daños a la adherencia hormigón-armadura debidos a efectos térmicos estructurales con elevadas solicitaciones en zonas imprevistas. Estos daños se acusarán, sin embargo, durante la inspección, en forma de fisuras de adherencia o anclaje y serán generalmente independientes del efecto anterior (véase 7.1).

5. EFECTOS TERMICOS SOBRE LAS ARMADURAS

Durante el incendio se produce una pérdida de resistencia de las armaduras apreciable a partir de temperaturas superiores a unos 300°C. Se produce también un aumento de deformabilidad que produce perturbaciones en el límite elástico, algo más acusadas en los aceros deformados en frío (véase figura 6.b). Ello hace que simplificadamente se suponga como límite de daño en las armaduras, la temperatura de 500°C, con disminución de resistencia del 25%, pero del orden del 50% de reducción del límite elástico.

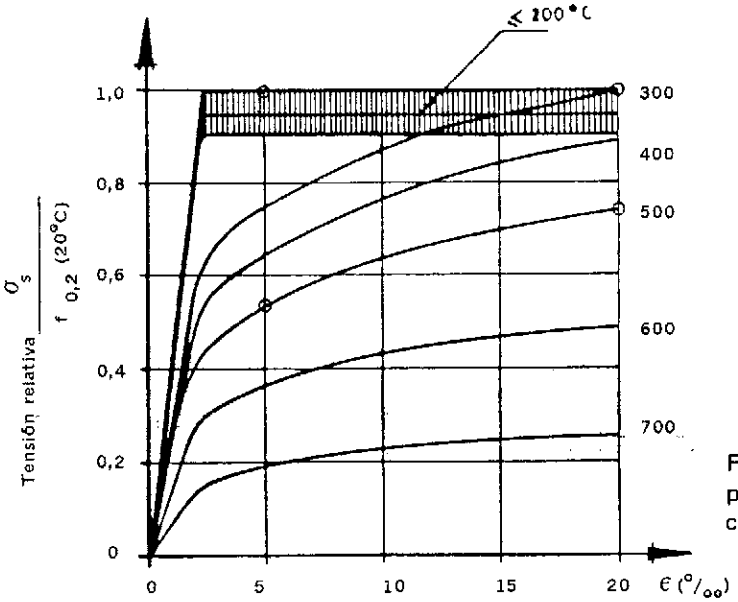


Fig. 6.a. Diagrama Tensión-Deformación para el acero de dureza natural durante el calentamiento [5].

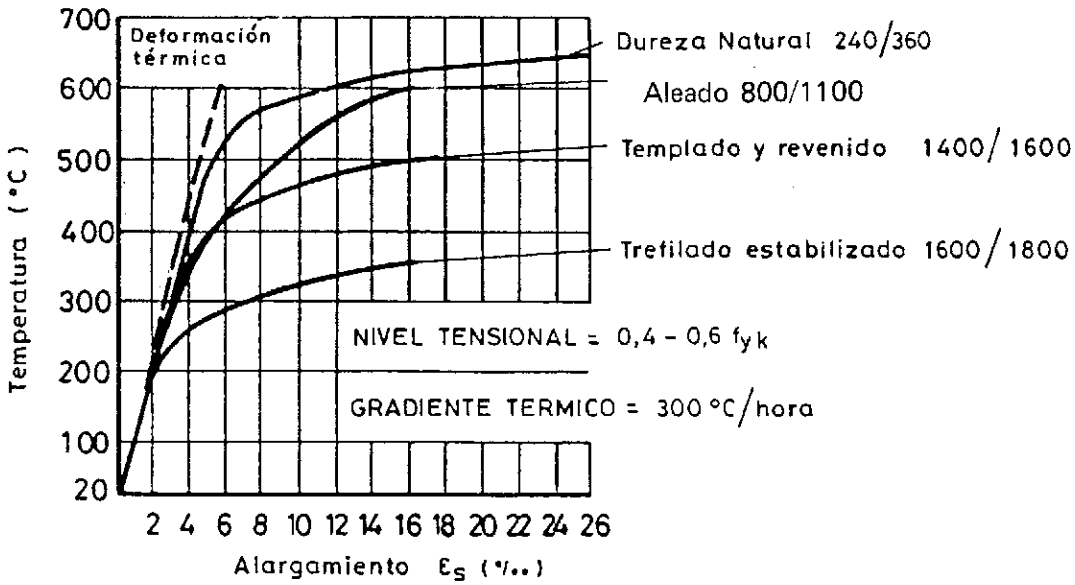


Fig. 6.b. Alargamiento de elementos traccionados, según el tipo de acero.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La figura 6.a expone con más detalle el comportamiento de las armaduras a temperatura elevada. A 500°C, por ejemplo, la tensión correspondiente a un alargamiento del 5‰ es la mitad de la misma tensión a temperatura ambiente, a pesar de que la resistencia solamente disminuye un 25%. Por otro lado las estructuras de hormigón armado alcanzan alargamientos últimos en las armaduras que dependen de su CUANTIA. Una pieza con CUANTIA BAJA rompe a flexión con fractura física del acero y alargamientos importantes. Una pieza de CUANTIA ELEVADA rompe a flexión por agotamiento del hormigón comprimido y alargamiento moderado de sus armaduras.

El razonamiento anterior lleva a concluir que las secciones o piezas más sensibles al fuego, DURANTE el incendio, serán las de máxima cuantía de armaduras.

Sin embargo, tras el enfriamiento, esos niveles de temperatura producen daños permanentes inapreciables. Aún a temperaturas más elevadas, solamente ocasionan daño permanente en los aceros deformados en frío. La figura 6.a incluye los diagramas carga-deformación para el CALCULO de la resistencia al fuego. La figura 7 expone los valores de la resistencia remanente.

Los importantes alargamientos y la prematura plastificación de los elementos durante el incendio, dan lugar a desajustes estructurales con deformaciones importantes. Desde el punto de vista, sin embargo, de la resistencia residual y de acuerdo con los datos de la figura 7, no existe daño alguno para los aceros de dureza natural.

6. EFECTO DE LAS ALTAS TEMPERATURAS EN LOS ENSAYOS NO DESTRUCTIVOS

6.1. Velocidad de ultrasonidos

En la figura número 5 vimos que la velocidad de los ultrasonidos es un parámetro físico del hormigón muy sensible al efecto de las altas temperaturas. Esta sensibilidad es incluso mayor que la recogida en la resistencia a tracción del hormigón.

En la figura número 9 se resumen los resultados de ensayos debidos a LOGOTHETIS (1981) que coinciden con los de la figura número 5 correspondientes a enfriamiento lento. Independientemente, Logothetis comprobó que la duración del incendio no tenía un efecto apreciable en el parámetro V_T/V_o, es decir, en la pérdida relativa de velocidad de ultrasonidos. Cabe indicar, sin embargo, que estos resultados fueron obtenidos sobre probetas y en laboratorio; las medidas fueron hechas con transductores en posición directa, como en el caso de los ensayos realizados sobre los testigos en laboratorio. No conocemos datos de medidas realizadas por ultrasonidos con palpadores en posición semidirecta o en posición indirecta, más fáciles de realizar en obra. Sin embargo, es de esperar que su sensibilidad sea igual o incluso superior a la obtenida en las medidas realizadas con palpadores en posición directa, puesto que el camino que ha de recorrer la onda ultrasónica está mucho más influenciado por el hormigón superficial, es decir, el más dañado (figura número 8) (*).

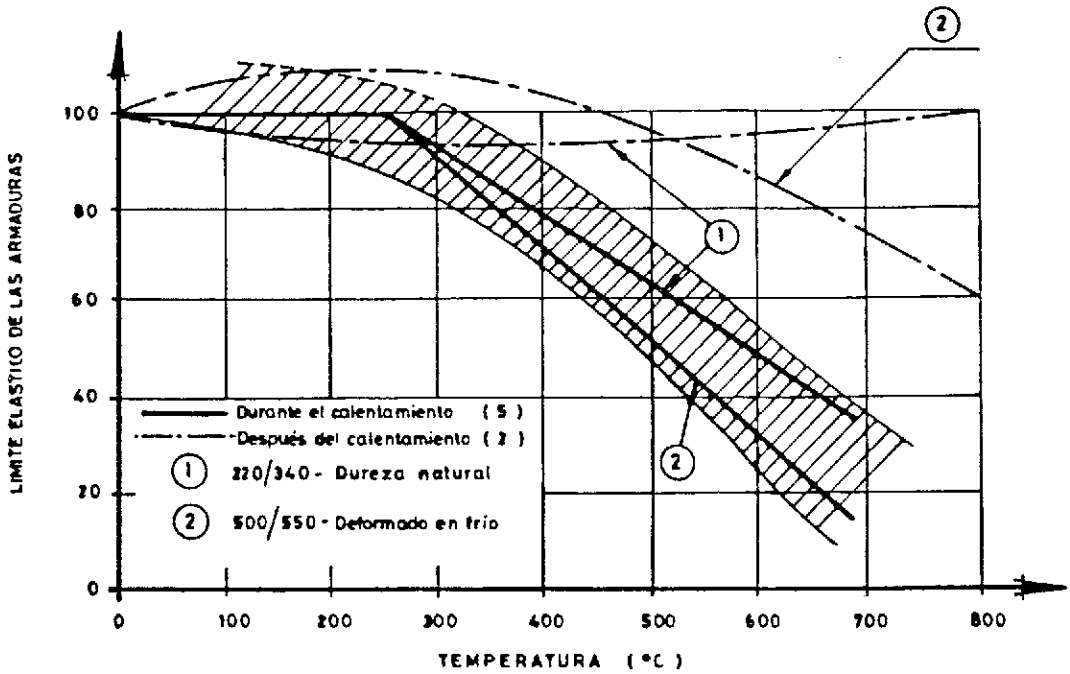
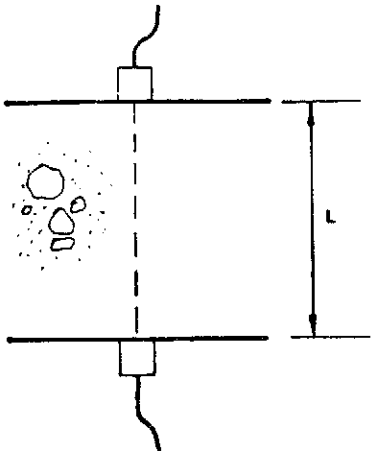


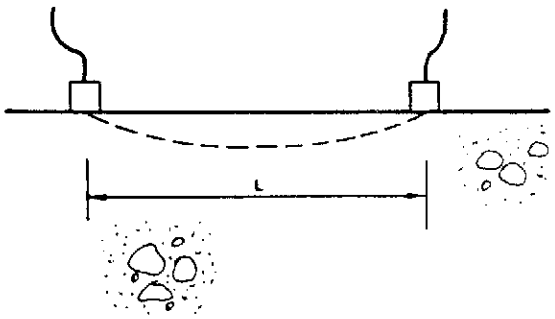
Fig. 7. Influencia de la temperatura en el límite elástico de las armaduras.

(*) J.M. IZQUIERDO ha realizado en INTEMAC ensayos que confirman las afirmaciones anteriores, si bien están pendientes de publicación.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



(a) Palpadores en posición directa.



(b) Palpadores en posición indirecta.

Fig. 8. Mediciones con ultrasonidos.

Independientemente de lo anterior, Logothetis encontró un aumento muy notable de la DISPERSION de distintas medidas ultrasónicas cuando aumenta la temperatura. Sus resultados pueden observarse en la figura 10.

6.2. Esclerómetro

Los resultados escleromètricos son poco sensibles a las variaciones de temperatura. Cuando ésta alcanza niveles del orden de 300°C, se observa un ligero descenso en el índice de rebote. También se observa un aumento de la dispersión de resultados, menos notable que en el caso de los ultrasonidos (figura 11).

Logothetis indica (6) que, sin embargo, este ensayo es un buen arma para estimaciones del daño sufrido por una obra sometida al fuego.

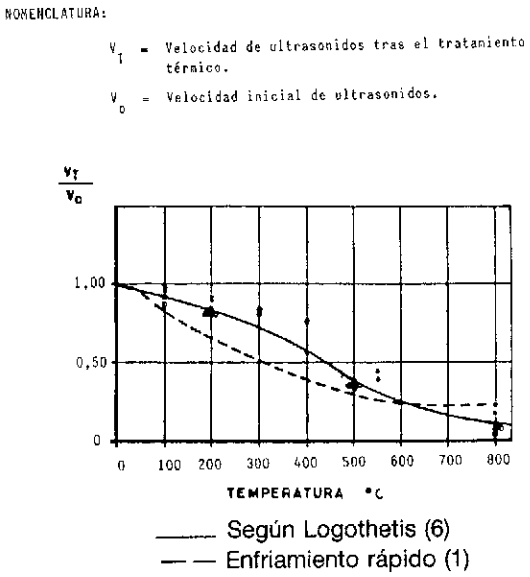


Fig. 9. Relación V_T/V_0 en función de la temperatura.

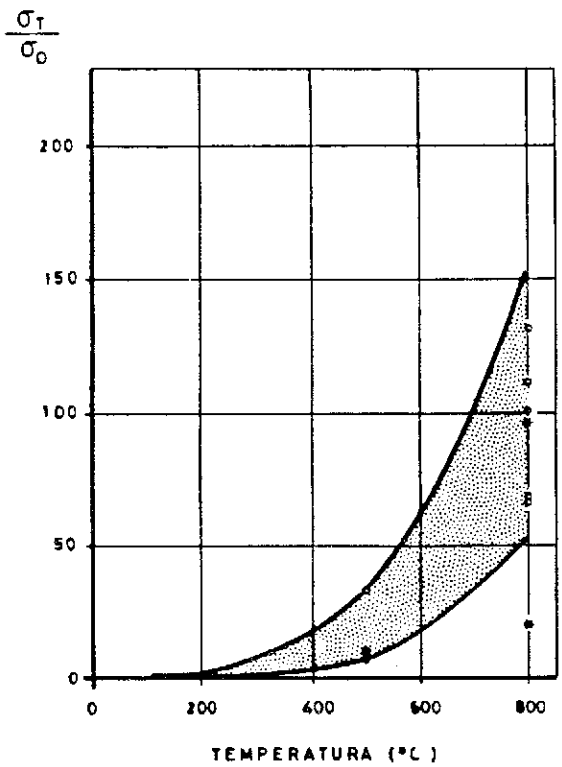


Fig. 10. Relación σ_T/σ_0 de las desviaciones standard de las medidas de velocidad, en función de la temperatura (6).

6.3. Análisis termo-gravimétrico

La termogravimetría (véase el apartado 3.1) analiza las transformaciones químicas con pérdida y eliminación de agua de los componentes hidratados del hormigón y permite estimar el nivel de temperatura a que estuvo sometido, dado que dichas transformaciones son irreversibles en la práctica. Para ello debe seleccionarse la muestra

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

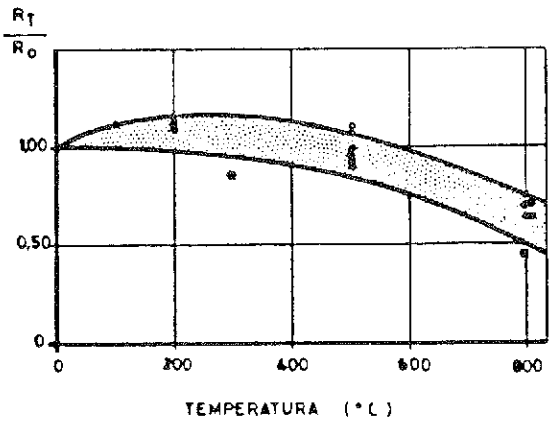


Fig. 11. Relación R_T/R_0 en función de la temperatura (6).

a la profundidad adecuada y separar por medios físicos habituales en laboratorio, los áridos gruesos (superiores a 2,5 mm) del hormigón. La tabla 2 siguiente proporciona la escala de transformaciones. El escalón que se juzga más significativo está comprendido entre 260°C y 440°C y coincide aproximadamente con el cambio de coloración antes definido. Sobre muestras compuestas de pasta de cemento y finos, la pérdida de peso en porcentaje se suele aproximar a la de la segunda columna.

Si el hormigón se ha visto afectado por daños durante el incendio, correspondientes a los niveles térmicos indicados, no se producirán nuevamente las pérdidas de peso esperadas. La comprobación puede hacerse por comparación de unas muestras "muy afectadas" con otras "poco afectadas", como veremos en 8.2.2.

7. ACCION DEL FUEGO SOBRE LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO

7.1. Descantillado y reducción de sección

De acuerdo con la figura 1 anteriormente descrita y a efectos de comprobación estructural es frecuente suponer la simplificación de despreciar la colaboración de la capa de hormigón más afectada por el fuego y en la que se alcanzan temperaturas superiores a 400°C. Esta simplificación se ve confirmada por el comportamiento aparente de los elementos estructurales. En efecto, la restricción a la libre dilatación del material de recubrimiento hace probable su desprendimiento, de acuerdo con los datos de la figura 12.

El daño es típico de soportes comprimidos y de estructuras de hormigón pretensado. En piezas continuas trabajando a flexión pueden producirse fuertes compresiones junto a elevadas temperaturas en las zonas de flexión negativa, próximas a los apoyos. Los forjados con nervios de pequeño espesor (b) se encuentran en situación desfavorable frente al riesgo de descantillado del hormigón de recubrimiento. La documentación fotográfica que se aporta ilustra este fenómeno.

La experiencia señala que el riesgo de daño aumenta con el contenido de humedad y cuando se emplean áridos silíceos. Está producido por alguno de los efectos siguientes:

a) Presión de vapor atribuible al agua intersticial.

b) Esfuerzos térmicos debidos a la dilatación impedida.

TABLA 2. PERDIDA DE PESO DEL MORTERO EXTRAIDO DEL HORMIGON*

ESCALON TERMICO (°C)	PERDIDA (%)	TRANSFORMACION GRAVIMETRICA
40 - 120	—	Pérdida de humedad (en parte aportada posteriormente al incendio).
110 - 260	3/4	Pérdida del agua de constitución del yeso (éste se puede "rehidratar" después del incendio).
260 - 440	3/3,5	Pérdida del agua de constitución de Aluminatos y Silicatos.
440 - 500	1,5/2	Transformación de la Portlandita (óxido cálcico inicialmente hidratado).
530 - 780	4/5	Transformación de los Carbonatos.
TOTAL	**14 %**	**PERDIDA POR CALCINACION**

(*) Estos valores son aproximadamente la mitad de los correpondientes a pasta pura (Figura 2).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

c) Movimientos térmicos diferenciales entre la armadura y el hormigón de recubrimiento.

d) Desintegración del hormigón.

El diagrama de la figura 12 fue deducido experimentalmente por MEYER-OTENS (citado por PETTERSSON, 1975) y es aplicable a estructuras con cuantía baja de armadura. Un aumento de la cuantía implica un aumento del riesgo de descantillados.

La acción del incendio somete al fuego a la cara inferior de las piezas. Ello produce una dilatación de las fibras inferiores que, al estar restringida, conduce a un incremento de los momentos flectores negativos en toda la pieza. Ello hace que, al actuar simultáneamente las acciones gravitatorias de cálculo, sea frecuente que lleguen a producirse rótulas plásticas en apoyos, con fisuración generalizada por flexión negativa. Las figuras 13.a y 13.b ilustran esta descripción.

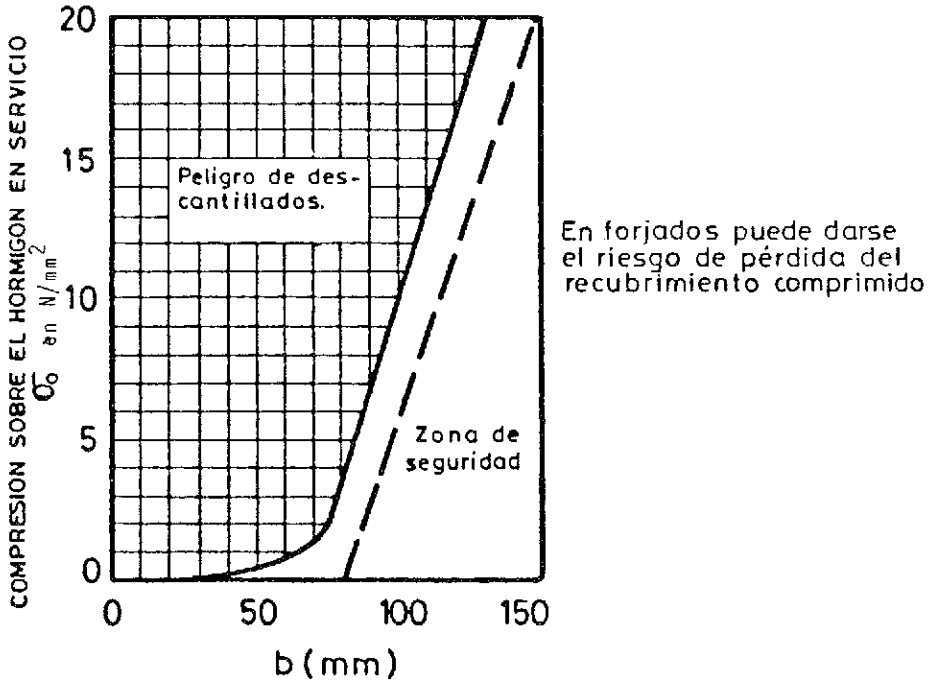


Fig. 12. Riesgo de descantillado o pérdida del recubrimiento en zonas comprimidas. Diagrama de MEYER-OTENS para piezas con cuantía baja.

7.2. Deformaciones y coacciones en vigas y losas

Es precisamente en los dinteles de los edificios donde se ha detectado el clásico comportamiento frente al fuego de las vigas continuas (figuras 13.a y 13.b).

Por otro lado, debe tenerse en cuenta el efecto beneficioso ilustrado en lo que sigue. La figura 14 representa datos experimentales relativos a vigas π isostáticamente apoyadas. Debido a la excentricidad de la compresión producida por las coacciones a la libre dilatación de la viga, se producen flexiones negativas con reducción impor-

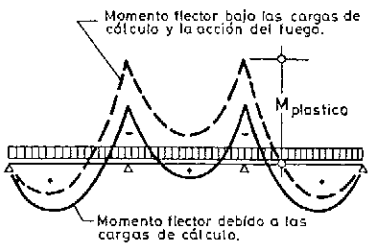


Fig. 13.a. Modificación de la Ley de Esfuerzos en una viga continua sometida a la acción del fuego.

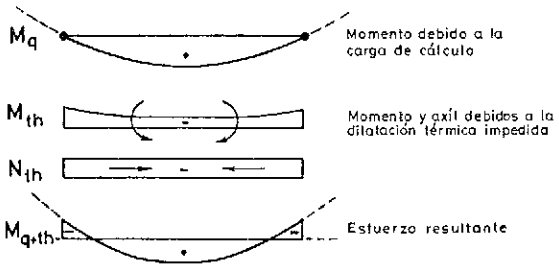


Fig. 13.b. Esfuerzos producidos por el incendio entre puntos de momento nulo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

tante de las flechas en vano. En el caso del ejemplo, si la dilatación permitida por el ancho de la junta, alcanzara el 1% de la luz, la resistencia al fuego de la pieza isotática sería inferior que si se introduce un esfuerzo axil excéntrico equivalente a reducir la dilatación al 0,1-0,5% de la luz.

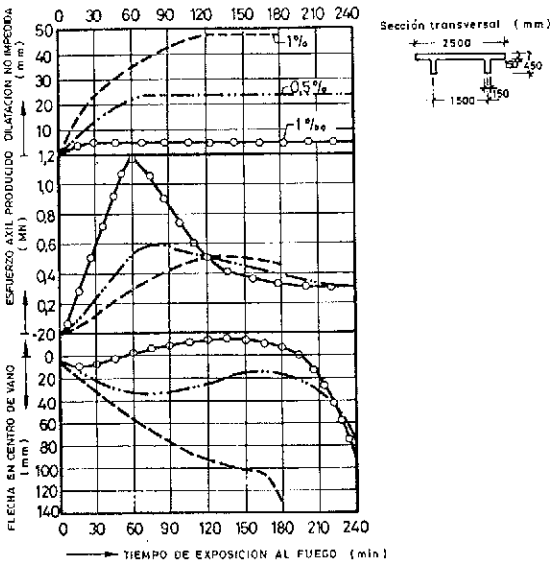


Fig. 14. Resultados de ensayo de vigas π de hormigón armado con 4,75 m de luz.

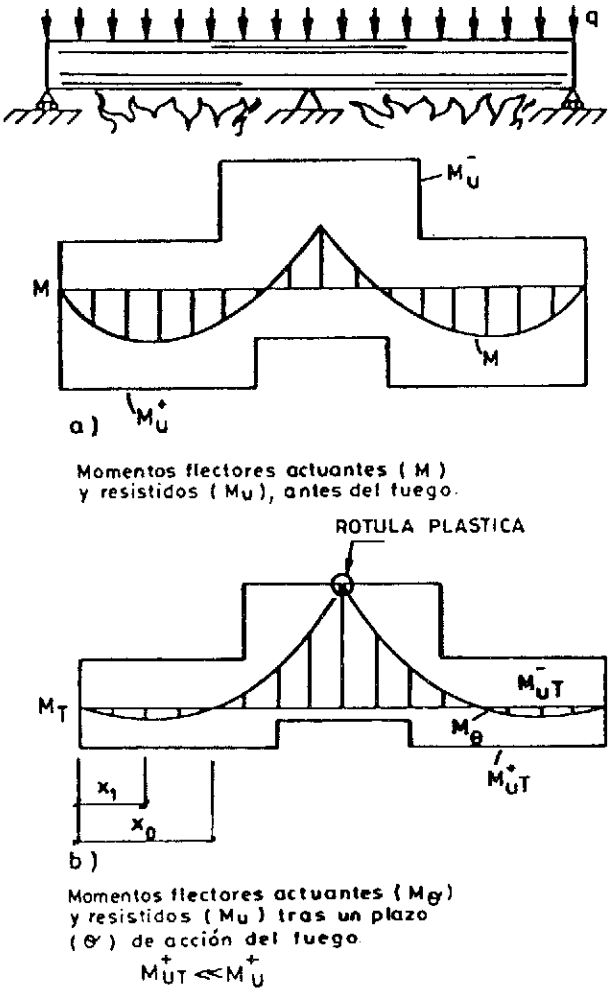


Fig. 15. Acción del fuego en una viga continua de dos vanos.

En piezas hiperestáticas de edificios sometidos a la acción del fuego, se produce la plastificación antes mencionada, en zonas de flexión negativa, con la consiguiente fisuración y daños graves en casos de longitud insuficiente de las armaduras superiores. En zonas de vano, donde el hormigón armado pierde capacidad de resistir el momento flector positivo, se produce una reducción beneficiosa de los esfuerzos debidos a las cargas gravitatorias. En consecuencia, la pérdida de capacidad de carga de la estructura no es tan grave como la pérdida de capacidad de carga de la sección. Como se ha indicado, al deberse dicha pérdida al daño producido en las armaduras, una vez producido el enfriamiento, la recuperación de las estructuras armadas con acero de dureza natural es casi completa (véase figura 15).

En hormigón pretensado, las armaduras empiezan a «sentir» la acción del fuego desde los 300-400°C y se producen importantes pérdidas de la acción de pretensado que afectan, fundamentalmente, al comportamiento en servicio de las estructuras que acusarán importantes deformaciones y fisuración. Como se ha indicado es importante estudiar, en cada caso, las condiciones de anclaje de las armaduras. Los daños serán detectados por la inspección visual, siendo necesaria la aparición de una gran flecha (superior a 1/30 de la luz) para que se vea afectada de manera importante la resistencia.

7.3. Deformaciones y coacciones en entramados

Las figuras 16, 17.a y 17.b ilustran el complejo comportamiento de los entramados durante el incendio. Debe señalarse que, en ocasiones, son los soportes quienes deben introducir las coacciones mencionadas anteriormente para los dinteles y vigas. Se producen así fuertes esfuerzos horizontales y flexiones en los soportes, que pueden duplicar los momentos previstos a temperatura ambiente (figura 17.b). Las vigas acusan el comportamiento antes descrito cuando se someten a la acción del fuego por su cara inferior. El efecto es más complejo en zonas alejadas del fuego, como se indica en el punto (3) del entramado de la figura 17.b, sin que puedan darse reglas generales respecto al comportamiento en entramados. Estos deben analizarse teniendo presente:

(a) El comportamiento de vigas y forjados según se describe en 7.2.

(b) La posibilidad de aparición de fuertes flexiones y cortantes en algunos soportes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

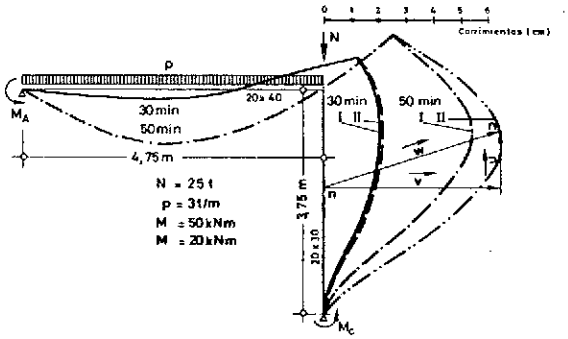


Fig. 16. Deformación de un pórtico sometido al fuego (I) según teoría de Primer Orden, (II) según teoría de Segundo Orden.

8. EVALUACION DE LOS ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS

8.1. Inspección visual

La inspección visual, complementada por determinaciones geométricas sencillas para evaluar las deformaciones, es siempre imprescindible en todo estudio de patología de las construcciones.

De acuerdo con lo anteriormente indicado será necesario registrar los daños atribuibles al incendio.

— Descantillados.
— Deformaciones.
— Fisuras en vigas y pilares.

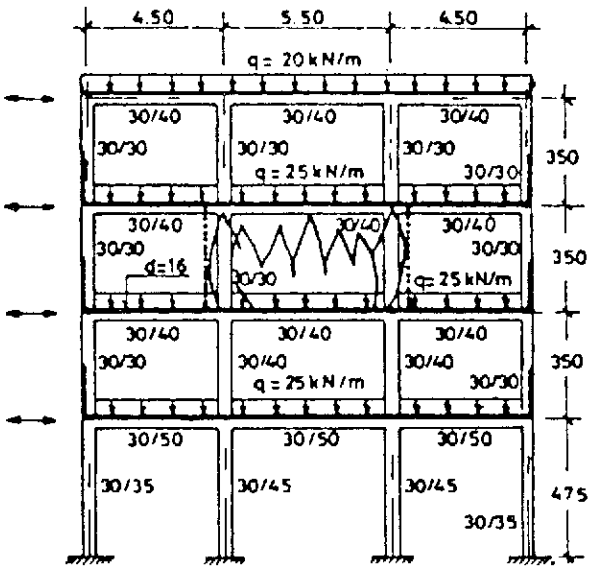


Fig. 17.a. Entramado sin arriostrar, sometido a fuego parcialmente.

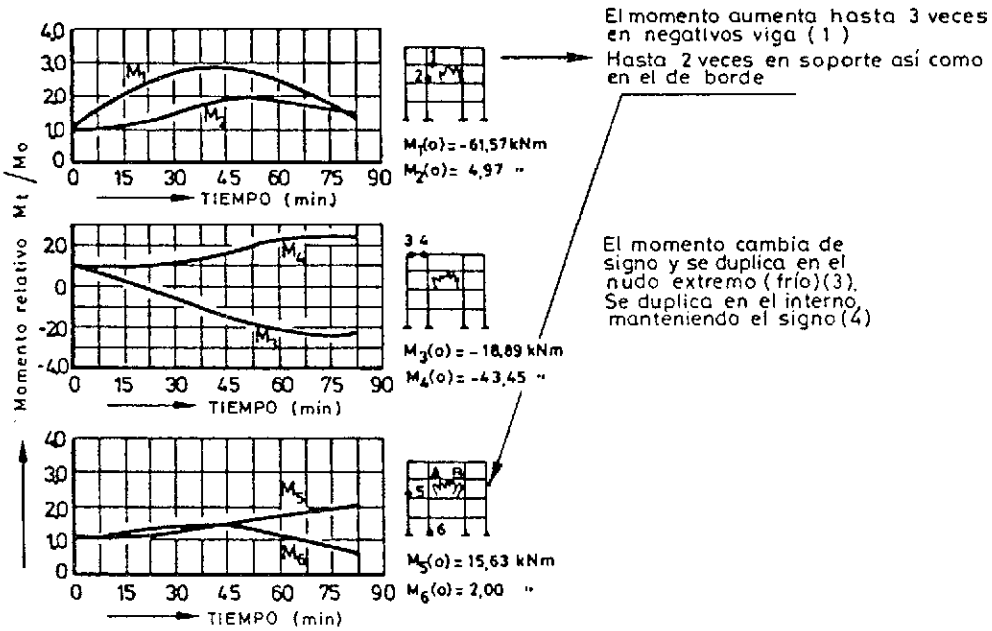


Fig. 17.b. Efecto del incendio afectado parcialmente al entramado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Foto 1. Vista general de un edificio industrial con los efectos del incendio.

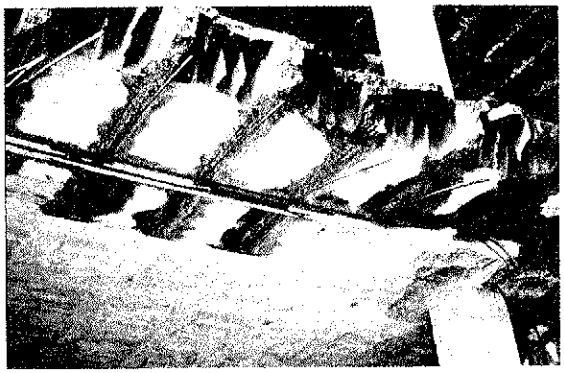


Foto 2. Detalle de la rotura del forjado reticular, flexión negativa combinada con punzonamiento.

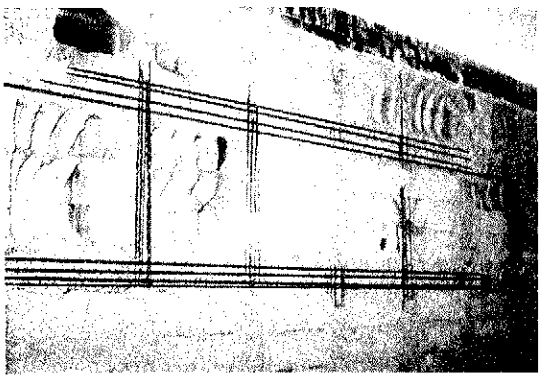


Foto 3. Pérdida del recubrimiento de hormigón en la cara inferior del forjado.

Foto 4. Pérdida del recubrimiento del hormigón en elementos a compresión y flexión.

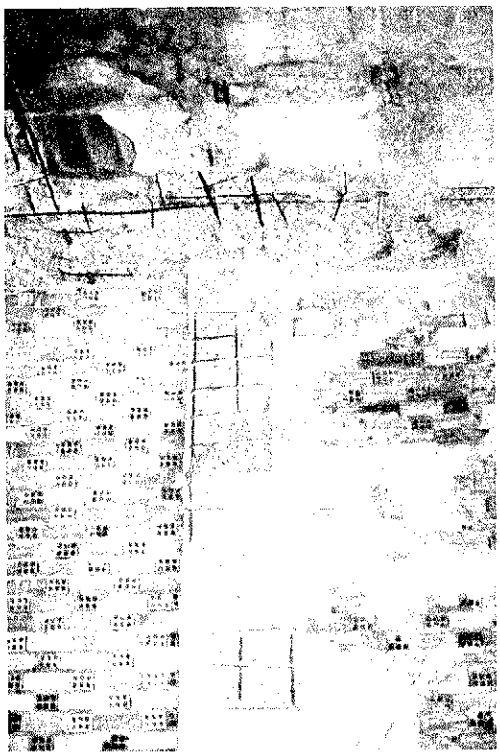


Foto 5. Pérdida del recubrimiento del hormigón en elementos a compresión y flexión.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

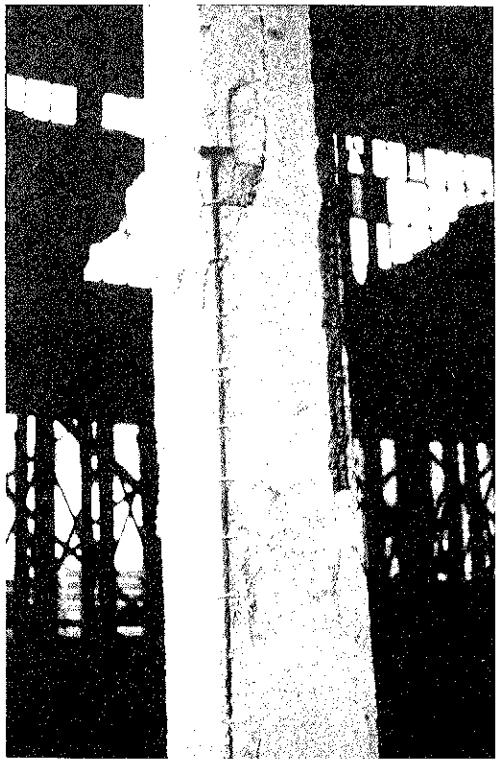


Foto 6. Daños por cortante y pérdida de recubrimiento en soportes.

Foto 7. Daños en las armaduras de soportes.

Puede ser conveniente estimar previamente el espesor de hormigón afectado por temperaturas superiores al umbral de daño.

En ocasiones resulta evidente la gravedad de los daños o la ruina de la estructura producida durante el incendio (véase la documentación fotográfica).

8.1.1. Descantillados

En construcciones de hormigón armado es probable que el fuego haya originado descantillados superficiales del recubrimiento. El daño afecta especialmente a zonas comprimidas, como soportes o áreas de losas de forjado próximas a los apoyos. En nervios de forjados de pequeño espesor, la zona inferior comprimida puede desprenderse con tensiones moderadas, afectando incluso a zonas de centro de vano.

Una rotura prematura por cortante o punzonamiento es un riesgo que se debe evaluar teniendo en cuenta el deterioro del hormigón.

En el caso de forjados unidireccionales es probable que el deterioro residual no sea completo, a pesar de la aparente gravedad del mismo. En el caso de soportes comprimidos puede generalmente evaluarse su resistencia residual analizando:

(a) El deterioro de las armaduras.

(b) El espesor de hormigón afectado.

Puede complementarse la inspección con algunos ensayos sobre armaduras que confirmen el efecto del incendio. La comprobación es necesaria solamente en los aceros deformados en frío y de pretensado.

8.1.2. Deformaciones

Como se ha indicado y prescindiendo de las construcciones de hormigón pretensado, donde las altas temperaturas conducen a la reducción de este efecto, durante el incendio se producen frecuentemente deformaciones importantes de los elementos flexionados: vigas y losas de forjado.

La recuperación de la capacidad de la armadura tras el fuego, hace posible la re-utilización de estas estructuras con nivel de seguridad aceptable. Para ello, debe asegurarse que se mantienen condiciones de anclaje adecuadas.

8.1.3. Fisuras en vigas y pilares

Es frecuente que se acusen fisuraciones importantes en losas y vigas, afectando a las zonas de flexión negativa en apoyos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La fisuración en vano implica un estado de daño más avanzado.

El desarrollo de fuertes esfuerzos horizontales y flexiones apreciables en soportes, puede ser motivo de fisuración. En ocasiones, los primeros llegan a producir la rotura por cortante.

8.2. Ensayo de testigos

El estudio detallado de los daños producidos por el incendio tiene por objeto, generalmente, determinar cuál fue la máxima profundidad o grado de penetración de la isoterma que se considere crítica: de 300°C a 600°C generalmente. Para una estimación suficientemente aproximada deben extraerse probetas-testigo con sonda de diamante que se someterán a los ensayos descritos más adelante. La extracción, realizada lo antes posible tras el incendio y sin aporte de agua, mejora la fiabilidad de algunos ensayos, como el análisis termogravimétrico, por ejemplo.

8.2.1. Aspecto

Como se describe en 3.2 el color del hormigón es un índice de la temperatura máxima que ha sufrido. La ausencia de cambios de color o la profundidad que alcance la pigmentación rosácea, señala el límite de la isoterma crítica.

Ulteriores cambios de la coloración resultan menos útiles. En efecto, el hormigón se disgrega a partir de unos 700°C de temperatura máxima, con aparición de una ostensible microfisuración.

La clasificación en zonas de cada testigo, en orden a delimitar distintos grados de deterioro, permite preparar muestras para confirmar, mediante ensayos adicionales, las impresiones de la inspección visual.

8.2.2. Termogravimetría

La pérdida del agua combinada, si se ha evitado su posterior recuperación por re-hidratación del hormigón, señala, como se describe en 3.1 y 6.3, el nivel térmico alcanzado por el material.

La tabla 3 siguiente recoge un ejemplo de los datos que pueden conseguirse. Las muestras empleadas se obtienen de probetas-testigo eliminando los áridos gruesos y representan los 6 cm superficiales del hormigón. En el ejemplo expuesto pudo dictaminarse que el hormigón había estado sometido a un incendio de muy moderados efectos, sin daño estructural sensible, que representa la acción del fuego normalizado durante 15 minutos.

8.2.3. Velocidad de ultrasonidos

La medición de velocidad de ultrasonidos en testigos permite establecer unos valores de referencia o de velocidad «patrón» en los siguientes casos:

(a) Hormigón sano.
(b) Hormigón deteriorado, generalmente con baja de velocidad superior al 20 - 30%.

Este dato, aplicado a medidas por «Transmisión Directa» en la estructura, permite estimar un «espesor del hormigón alterado» en cada uno de los elementos afectados, generalmente soportes. Debe tenerse presente que frecuentemente se presentan in-situ velocidades inferiores a la «alterada», debido a la iniciación de fisuras premonitorias del *descantillado* antes descrito. Si no se eliminan estas zonas de desagregación incipiente, deben anularse las correspondientes mediciones ultrasónicas.

TABLA 3. RESULTADOS DEL ANALISIS POR TERMOGRAVIMETRIA

MUESTRA	H_2O MOLECULAR		H_2O CONSTITUCION			TOTAL (3) (%)
	HUMEDAD (0) (%)	YESO (1) (%)	ALUMINATOS Y SILICATOS (2) (%)	PORTLANDITA (3) (%)	CARBONATOS (3) (%)	
1	35-125° C 1,76	125-275° C 3,35	275° C 440° C 2,91	440-497° C 1,55	530-797° C 4,31	13,88
2	34-100° C 1,48	100-250° C 3,62	250° C 450° C 3,16	450-517° C 1,45	520-780° C 5,36	15,07
3	45-105° C 1,45	120-260° C 3,52	260° C 425° C 3,33	425-490° C 1,90	550-753° C 4,01	14,21

NOTAS: (0) Humedad aportada posteriormente al incendio.
(1) Agua de constitución del yeso, posiblemente "rehidratado" (véase [0]).
(2) Pérdida al fuego correspondiente a los compuestos indicados y que tiene lugar en el intervalo de temperaturas que se señala.
(3) Los valores son normales en hormigones, sobre muestras compuestas de pasta de cemento y finos: véase la Tabla 2 y la Figura 2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

8.2.4. Resistencia

La resistencia a compresión es un índice menos potente que los anteriores para evaluar el grado de deterioro del hormigón. En cualquier caso, dada la frecuente incertidumbre sobre la resistencia original, resulta un dato útil y necesario para estimar mediante el cálculo la seguridad de los elementos constructivos deteriorados.

La resistencia a tracción es un parámetro más útil para la estimación del grado de deterioro, aunque su determinación puede sustituirse por otras medidas más sencillas.

8.3. Ensayos no destructivos

En general, lo más útil es la aplicación de medidas ultrasónicas a la estructura, como se ha indicado en 8.2.3. Aún aplicadas con palpadores en posición indirecta a los forjados o losas (por la mayor facilidad de acceso a una sola cara) se han demostrado útiles para delimitar las zonas de la obra afectadas por el fuego.

El esclerómetro puede también utilizarse, aunque con menor significación.

Otros tipos de END son de aplicación poco extendida en nuestro país.

8.4. Interpretación de resultados

Los resultados de la inspección y ensayos descritos puede interpretarse de las formas siguientes:

(a) Determinando la isoterma crítica por referencia al incendio normalizado (figura 18) para deducir los efectos estructurales sobre el hormigón y las armaduras. Se trata, en definitiva, de asimilar el incendio real al fuego normalizado de una duración tal que produzca efectos equivalentes.

El fuego así definido puede ser evaluado mediante el cálculo, sin necesidad de acumular más datos sobre la construcción.

(b.1) Determinando el espesor de hormigón deteriorado y despreciándolo de cara a un posterior análisis de la seguridad estructural, y

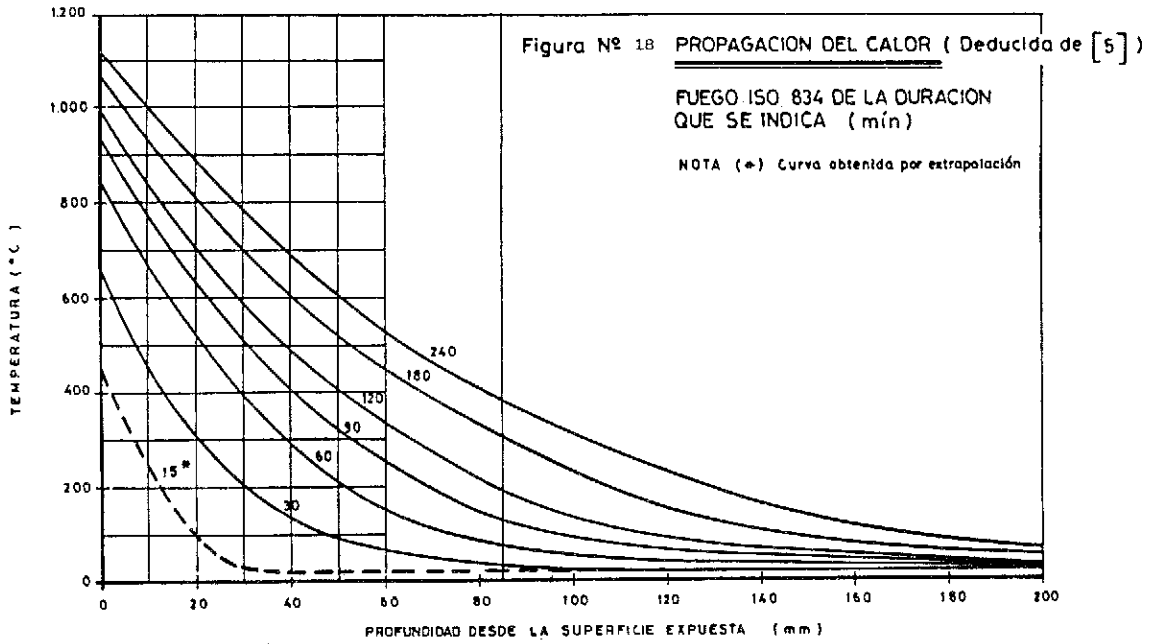
(b.2) Estimando la temperatura máxima alcanzada por las armaduras y determinando así su resistencia residual, o bien deduciendo dicha resistencia de ensayos ad-hoc.

De forma independiente, deben evaluarse las deformaciones irreversibles ocurridas y dictaminar sobre las condiciones de adherencia y anclaje de las armaduras.

9. REPARACION

Cuando resultan viables, las obras de rehabilitación consisten generalmente en sanear el hormigón disgregado y recrecer con gunita u hormigón proyectado los elementos dañados por el fuego.

Generalmente, las reparaciones incluyen la limpieza de las superficies de hormigón visto, siendo con frecuencia necesaria la aplicación de pinturas de revestimiento. Las pinturas pueden ser a base de cemento. Tenemos experiencia de tratamientos superficiales con resultados eficaces y de notable economía.



Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

AGRADECIMIENTO

El autor quiere expresar su agradecimiento a José María Izquierdo Bernaldo de Quirós, de INTEMAC, que le ha transmitido sus experiencias en numerosos casos prácticos y ha facilitado la documentación fotográfica.

BIBLIOGRAFIA

(1) WATKEYS, D. G. Non Destructive Testing of Concrete subject to fire attack. Thesis Univ. of London, 1955.

(2) GREEN, J. K. Some aids to the assessment of fire damage. Concrete, January 1976.

(3) DIEDERICHS, U. y otros. Bond strength at high temperatures. Magazine of Concrete Research: Vol. 33, No. 115, June 1981.

(4) CERETTE, G. G. y otros. Sustained High Temperature Effect on Concrete Made with Normal Portland Cement, Normal Cement and Slag, or Normal Portland Cement and Fly Ash. Concrete International, July 1982.

(5) C.E.B. Boletín 145. Design of Concrete Structures for Fire Resistence. January 1982.

(6) LOGOTHETIS, L. y otros. The influence of high temperatures on calibration of non-destructive testing of concrete. Matèriaux et Constructions, Vol. 14, n.º 79 (1981).

(7) DELIBES, A. Técnicas de inspección de estructuras de hormigón a rehabilitar.
CURSO DE REHABILITACION. 5 La Estructura. COAM, 1984.

(8) MALHOTRA, H. L. The effect of temperature on the compressive strength of concrete.
Magazine of Concrete Research (London). V. 8, N.º 23, August 1956, pp. 54.94.

(9) MORLEY, P. D. and ROYLES, R. The influence of high temperature on the bond in reinforced concrete.
Fire Safety Journal. Vol. 2, N.º 4. July 1980, pp. 243-255.

(10) MORLEY, P. D. and ROYLES, R. Response of the bond in reinforced concrete to high temperatures.
Magazine of Concrete Research. Vol. 35, N.º 123, June 1983.

(11) COLLEPARDI, M. and VALENTE, M. Effetto delle alte temperature sulle proprieta dei calcestruzzi armati.
L'Industrial Italiana del Cemento 6/1978.

(12) ACI Committee 216. Guide for Determining the Fire Endurance of Concrete Elements.
Concrete Internacional. February 1981.

(13) HARMATHY, L. Thermal properties of concrete at high temperatures.
Journal of Materials, A.S.T.M., Vol. 5, N.º 1, March 1970.

(14) PETTERSSON, O. Post-Behaviour of Concrete Structures Subjected to Fire.
Colloquium IABSE-FIP-CEB-RILEM-IASS Behaviour in Service of Concrete Structures. Lieja, Junio 1975.

(15) ANCHOR, R. D. Fire resistance of Reinforced Concrete Current Practice Sheets.
CONCRETE, pp. 31 y 32. January 1980.

(16) HODGKINSON, A. Protección contra el fuego. Estudio Técnico: Seguridad 3. Manual A. J. ESTRUCTURAS. H. Blume, Madrid, 1976.

(17) DELIBES, A., GONZALEZ ISABEL, G., GONZALEZ NUÑO, L.
Informe sobre la inspección ultrasónica y ensayos realizados para el estudio de los daños causados por el incendio en el muro del edificio Auxiliar I. Documento no publicado. INTEMAC, Ref. E/LC-84720/EO, 1984.

(18) IZQUIERDO, J. M. Aplicaciones de los ultrasonidos al estudio de la Patología del Hormigón en dos casos concretos.
Conferencia no publicada. Barcelona - INTEMAC, 1985.

(19) NEVILLE, A. M. Properties of Concrete. Pitmann, 3.ª Edición, 1981.

(20) The CONCRETE Society Assessment of fire-damaged Concrete Structures and repairs by gunite. Technical Report n.º 15, 1978.

RESUMEN

Esta publicación expone, a partir de los conocimientos actuales sobre el comportamiento al fuego de las construcciones de hormigón, un método para la inspección y comprobación experimental de los daños causados por incendios para, finalmente, sentar las bases de un dictamen sobre su capacidad para ser nuevamente puestas en servicio.

SUMMARY

This work contains a proposal for the inspection and experimental assessment of the damage produced by fire to concrete constructions. The proposal is based on the current knowledge on the fire-resistance of concrete structures. The proposal will be a basis for the judgement of the re-serviceability conditions of the damaged members.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Optimización de sistemas de anclaje para ensayo de fatiga de armaduras activas pretensadas (alambres y cordones)

J. M. Varona Ruiz, F. Gutiérrez-Solana Salcedo, J. J. González Martínez
Dres. Ingenieros de Caminos
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Cantabria

1. INTRODUCCION

El presente trabajo es resultado, entre otros, de la investigación realizada (1) por los autores dentro de un PLAN DE INVESTIGACION SOBRE RESISTENCIA A FATIGA a través de una serie amplia de ensayos sobre muestras de alambre (4-8 mm) y cordón (9,3-15,7 mm) para pretensado.

Dentro de dicha serie se encontraba un primer grupo de doce ensayos de caracterización en fatiga de cordón 1×7+0 para pretensado, de 0,6 pulgadas, para los que se recibieron doce muestras de 1.160 mm de longitud, conjuntamente con un rollo adicional del mismo material, de aproximadamente 50 m de longitud, que serviría para establecer un anclaje eficaz probeta-máquina de ensayo. La definición de este anclaje debería eliminar los inconvenientes que la acción directa de las mordazas sobre la muestra produce, los cuales se ven amplificados en los ensayos de fatiga.

Las muestras vinieron agrupadas en cuatro conjuntos de tres probetas, denominados A, B, C y D, que se diferenciaban únicamente por las precauciones tomadas para el corte y preparación de los mismos, según el esquema siguiente:

Tipo	Descripción del sistema de corte y preparación de probetas
A	Con amarras antes del corte y con soldadura de los alambres en sus extremos
B	Con amarras antes del corte y sin soldadura de los alambres en sus extremos
C	Sin amarras antes del corte y sin soldadura de los alambres en sus extremos
D	Sin amarras antes del corte y con soldadura de los alambres en sus extremos

Estos ensayos de fatiga, por exigencias del fabricante, deberían llevarse a cabo aplicando unos límites de carga diferentes a los previstos en las normas sobre armaduras de pretensado, tales como la UNE 36-098-85 (2), la BS 5896:1980 (3) o la EURONORM 138-79 (4). En este caso y de acuerdo con la Recomendación RILEM/RPC 8-1979 (5), la carga aplicada variaría entre el 60 y el 70% de la carga de rotura real de 28.350 kg y, si se alcanzasen los dos millones de ciclos, se aumentaría la amplitud de la carga, pasando ésta a oscilar entre el 60 y el 80%, hasta la rotura de uno de los alambres.

2. SISTEMAS DE ANCLAJE

La normativa sobre armaduras de pretensado no aborda el tema relativo al sistema de anclaje, salvo comentando que los alambres y cordones deben fijarse convenientemente en las mordazas de forma que no resulten dañados y estableciendo que si la rotura de un alambre se produce muy próxima a la mordaza (3 mm EURONORM 138-79) el ensayo no es válido.

Por otra parte, la norma ASTM A-370 (6), en su parte VII («Method of testing uncoated seven-wire stress-relieved strand for prestressed concrete»), preconiza todo un conjunto de procedimientos de anclaje tales como: la utilización de mordazas standard en V, dentadas, interponiendo un material colchón (plomo, aluminio...) que evite su acción directa sobre la muestra, o preparando la zona de amarre de ésta mediante mazarota o un encasquillado de tubo o conducto flexible con resina epoxi como agente de unión, o la de mordazas especiales con encajes semicilíndricos lisos, o la de anclajes con cuñas, etc... Entre ellos debe

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

elegirse el más conveniente en función del ensayo que se vaya a realizar y del equipo disponible.

También se recabó información sobre los métodos usados convencionalmente para ensayos tanto de alambre como de cordón, separando claramente los ensayos de tracción simple de los de fatiga. Para los primeros y con alambres, se pueden ensayar directamente, a la velocidad de deformación mayor permitida, o utilizando barriletes o cuñas de anclaje en varios sistemas (Freissinet, CTT. BBR), mientras que con cordones se utilizan los anclajes comerciales o la disposición de mazarotas en las zonas de amarre, entre otros. Para los ensayos de fatiga de alambres se emplean preferentemente las mordazas Amsler con botonadura o cuñas de madera de haya dura, mientras que está muy extendido el empleo de mazarotas para los cordones, aunque algunos laboratorios están utilizando el encasquillado de los extremos con interposición de resina epoxi.

Se observa que el abanico de posibilidades es suficientemente amplio y ello conlleva la necesidad de un análisis en profundidad de cada una, antes de elegir el procedimiento que se va a seguir.

3. DESARROLLO DEL SISTEMA DE ANCLAJE

3.1. Elección

Dado que existía un gran interés por conocer de manera urgente los resultados de estos doce primeros ensayos de cordón 1×7+0 de 0,6" para pretensado, se eligió el procedimiento de encasquillar los extremos de las muestras e interponer una resina epoxi entre casquillo y cordón. Este modelo, de gran sencillez y comodidad en la elaboración de las probetas, permite una total independencia externa para realizar los ensayos, existiendo experiencias previas que permitían aventurar resultados esperanzadores. Las probetas utilizadas en el desarrollo del sistema de anclaje fueron referenciadas con la letra E.

En función de la abertura de mordazas (14-24 mm) y del diámetro exterior del cordón (15,7 mm), se eligió como tipo de casquillo el tubo de acero calibrado 24,0×21,0 (1,5 mm de espesor), el cual permitía la separación de los alambres para conseguir una mejor adherencia con la resina. Una vez establecida esta elección, los problemas fundamentales que hubo que resolver fueron encontrar la resina capaz de conseguir una trabajabilidad y un nivel de adherencia que eliminara el fenómeno de deslizamiento en mordazas de los extremos de la muestra, así como determinar la longitud ideal del casquillo.

Tras un análisis de mercado, se eligió como material de interposición un mortero de resina epoxi consistente en Base, Reactor y Carga silícea que forman conjuntamente un producto comercial utilizado en problemas de unión de materiales rígidos y de reparación de estructuras y obras de hormigón. La mezcla de Base y Reactor tiene un tiempo de utilización muy corto y la adición de carga aumenta la vida de la mezcla, por cuyo motivo se eligió inicialmente una proporción 1/1 de ligante/carga en volumen.

En cuanto a la longitud de los casquillos, con una altura de mordaza de 80 mm, se utilizaron de 80, 100 y 120 mm, estando en algunas ocasiones tratados interiormente mediante chorro de arena.

3.2. Puesta a punto

Las primeras pruebas (probetas E1 y E2) se efectuaron con una longitud de casquillo igual a la altura de mordaza, 80 mm, siendo la longitud total de las probetas de 600 mm y habiéndose tratado interiormente los casquillos mediante chorro de arena.

En la muestra E1 se dejó aislado el alambre central en uno de sus extremos y se procedió a un acuñamiento de los alambres laterales con puntas, transversalmente en este extremo y longitudinalmente en el otro, tratando de conseguir la separación que permitiera una mejor penetración del mortero entre los mismos. Bajo una presión en mordazas de 60 bares (61,2 kg/cm^2) se observó que los casquillos se deformaban apreciablemente, lo que, como se comprobó posteriormente, indicaba la existencia de huecos debido a un deficiente llenado.

Se intentó mejorar el procedimiento de llenado en la probeta E2, no dejando aislado el alambre central y bajando la presión en mordazas a 50 bares (51 kg/cm^2). En el ensayo se observó que el casquillo inferior se comportaba mejor que el otro, y a la tracción de 60 kN (la tercera parte aproximadamente de la necesaria para efectuar el ensayo de fatiga) comienza el deslizamiento de la muestra en el casquillo superior. Se cortó la longitud de 8 cm de cordón que ocupaba el anclaje fallido, se limpió la zona inmediata y se dispuso otro casquillo de igual longitud, sin chorreado pero lijado interiormente para mejorar la adherencia. La probeta falló nuevamente por deslizamiento del cordón en el casquillo que se conservó (antiguo) para una carga de 157 kN.

Tras estos resultados, se preparó una probeta, E4, de 1.160 mm de longitud, utilizando resina pura como material de interposición y casquillos de 80 mm chorreados interiormente. Después de un primer tirón en que se observó el deslizamiento de la muestra en el anclaje inferior, se llevó a rotura, alcanzándose 108 kN. Al abrir el casquillo inferior se confirmó el deslizamiento del cordón respecto del material de relleno, resina pura en este caso.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Teniendo presente estas primeras pruebas, se preparó una serie de cuatro probetas (E3, E5, E6 y E7), de 600 mm de longitud, con casquillos de 80 mm (E5 y E7) y 100 mm (E3 y E6). Los ocho casquillos, sin tratarlos con chorro de arena, se limpiaron con acetona. Las muestras de cordón se ataron con alambre de pequeño diámetro a 120 mm de cada extremo, para proceder al acuñamiento de los alambres con puntas cortadas de 10 mm de longitud y 2,5 mm de diámetro y conseguir una mayor separación que en ensayos anteriores, buscando una mejor penetración del mortero. Un extremo de cada muestra y el casquillo correspondiente, se bañaron con resina pura, tratando de disminuir la posibilidad de huecos y mejorar la adherencia. La presión en mordazas se mantuvo a 50 bares en las probetas E3 y E5, elevándose hasta 80 bares para las E6 y E7.

Toda la serie se ensayó al día siguiente de su preparación (21-22 horas de curado). Aquellas con una presión en mordazas de 50 bares, deslizaron en el extremo previamente tratado con resina pura, antes de alcanzarse en rampa el nivel medio (180,6 kN=65% carga de rotura real) de la carga oscilante de fatiga. Las que se fijaron con una presión de 80 bares, llegaron a alcanzar dicho nivel medio e incluso se probaron a fatiga, observándose un mejor comportamiento en la probeta con casquillos de 100 mm. Esta última, con una presión de 100 bares y 4 días de curado, llegó a realizar 1.493.459 ciclos, con un deslizamiento en el casquillo bañado con resina pura, del orden de 30 mm, que obligó a dar por finalizado el ensayo ante la posibilidad de una salida de mordazas.

Con estos nuevos datos, se preparó otra nueva serie de cuatro probetas (E8, E9, E10 y E11) de 600 mm de longitud, con casquillos de 120 mm en un extremo bañado previamente en resina pura y de 100 mm en el otro sin tratamiento. Manteniendo una presión en mordazas de 100-120 bares, se ensayaron únicamente las dos primeras, con un tiempo de curado entre 2 y 4 días, controlando el deslizamiento en el ensayo de fatiga, tanto entre 60-70% como entre 60-80% de la carga de rotura real, y obteniéndose un buen comportamiento y un deslizamiento, siempre entre mortero y casquillo, aceptable. Las otras dos no fue necesario ensayarlas.

Ante este hecho, se prepararon dos probetas (E12 y E13), de longitud igual a la que tienen las muestras, para realizar con ellas el ensayo de fatiga propuesto (1.160 mm). Los resultados son satisfactorios, hasta tal punto que, por ser el material de prueba de la misma carga, 4.307, el ensayo de la E13 se hace corresponder con uno, C1, de los tres que se iban a efectuar del conjunto C (sin amarras antes del corte y sin soldadura de los alambres en sus extremos). El deslizamiento, en algunos casos, llegó a ser superior a los 20 mm, pero permitió concluir el ensayo. La probeta E12 tampoco fue ensayada.

Se observó que, con presiones altas en mordazas, el cierre de las mismas producía un chasquido característico, debido posiblemente a un agrietamiento del mortero de unión. Ya con los ensayos definitivos en marcha, los cuales se realizaban con una presión de 120 bares, al objeto de disminuir el deslizamiento, surgió la idea de efectuar el apriete a una presión notablemente inferior y aumentarla posteriormente de forma gradual hasta alcanzar la presión definitiva, comprobándose que éste procedimiento anula prácticamente el citado deslizamiento.

La Tabla I resume los resultados y características de todos los ensayos efectuados y en las Fotos 1, 2 y 3 puede observarse el encasquillado del extremo de la probeta, la rotura del cordón en un ensayo de tracción y la rotura en fatiga de un alambre, respectivamente.

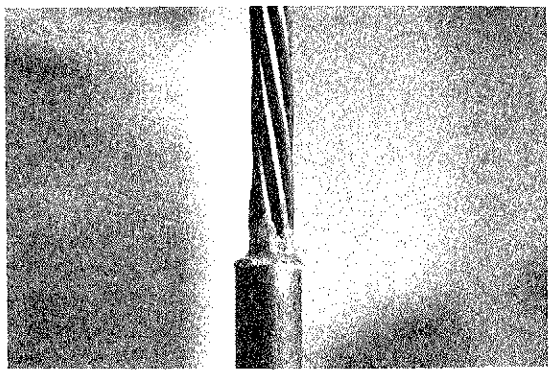


Foto 1

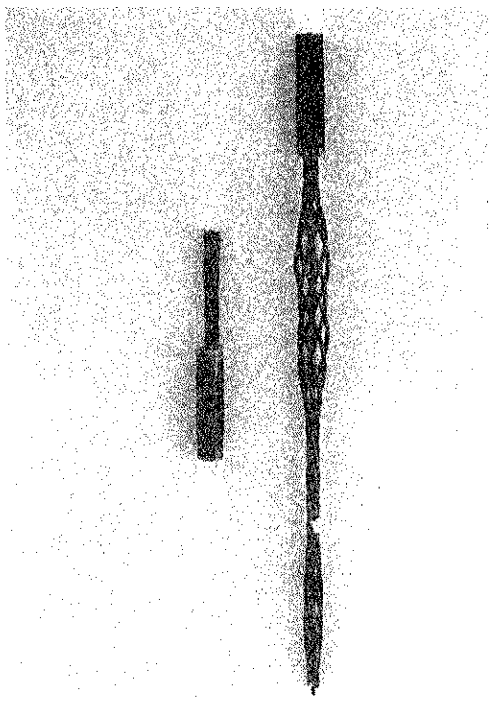


Foto 2

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

TABLA I
RESUMEN DE PRUEBAS PARA DEFINICION DEL SISTEMA DE ANCLAJE

ENSAYO	MATERIAL DE RELLENO	TIEMPO (h) DE CURADO	LONGITUD (mm) PROBETA	LONGITUD (mm) CASQUILLO	TRATAMIENTO DEL CASQUILLO	BAÑO CON RESINA PURA	TRATAMIENTO DEL EXTREMO DEL CORDON	PRESION (Bares) EN MORDAZAS	CARGA (kN) DESLIZAMIENTO	DESLIZAMIENTO (mm)	OBSERVACIONES
E1(1)	Mortero 1/1	48	600	80	Chorro arena	Casquillo y cordón	(1), (2); (3)	60	150	6,7 (resina/alma)	Relleno deficiente
E2(1)	Mortero 1/1	48	600	80	Chorro arena	Casquillo y cordón	(3)	50	114	7	Relleno deficiente
E1(II)	Mortero 1/1	24	600	30	Lijado	Casquillo y cordón	(1), (2); (3)	60	147	4,5 (resina/alma)	Mejor relleno
E2(II)	Mortero 1/1	24	600	80	Lijado (4)	Casquillo y cordon	(3)	50	157	4,5	Desliza en casquillo conservado
E4	Resina	120	1.160	80	Chorro arena	Cordón	(3)	50	99/108	2 (resina/cordón)	Unico con resina pura
E3	Mortero 1/1	24	600	100	Lavado con acetona (Ultrasonidos)	Casquillo y cordon (5)	(3)	50	174	14,5	Desliza en casquillo bañado con resina
E5	Mortero 1/1	24	600	80	Lavado con acetona (Ultrasonidos)	Casquillo y cordon (5)	(3)	50	164	15	Desliza en casquillo bañado con resina
E6	Mortero 1/1	24 (traccion) 120 (fatiga)	600	100	Lavado con acetona (Ultrasonidos)	Casquillo y cordon (5)	(3)	80 100	(6) $1,5 \times 10^6$ ciclos	50:0,45(7)	Desliza en casquillo bañado con resina
E7	Mortero 1/1	24 (traccion) 96 (fatiga)	600	60	Lavado con acetona (Ultrasonidos)	Casquillo y cordon (5)	(3)	80 100	(6) 50.000 ciclos	0,25 (7)	Desliza en casquillo bañado con resina
E8	Mortero 1/1	60	600	100/120	Lijado y lavado con acetona	Cordón 120 (5)	(3)	120	(6) 175.000 ciclos	0,1 (7)	Desliza en extremo bañado con resina
E9	Mortero 1/1	84	600	100/120	Lijado y lavado con acetona	Cordon 120 (5)	(3)	100/120 120	(6) 500.000 (60-70%) 100 000 (60-80%)	0,07 (7) 1,1(7)	Mejor respuesta a 120 bares
E10	Mortero 1/1		600	100/120	Lijado y lavado con acetona	Cordón 120 (5)	(3)		No se hizo por comportarse bien las otras probetas de la serie		
E11	Mortero 1/1		600	100/120	Lijado y lavado con acetona	Cordón 120 (5)	(3)		No se hizo por comportarse bien las otras probetas de la serie		
E12	Mortero 1/1		1.160	80	Lijado y lavado con acetona		(3)		No se hizo por comportarse bien las otras probetas de la serie		
E13	Mortero 1/1	72	1.160	100	Lijado y lavado con acetona		(3)	120	(6) 2.000.000 (60-70%) 121.743 (60-80%)	0,2 (7) 0,2 (7)	Rotura de un alambre

NOTAS: (1) Acuñamiento transversal.
(2) Aislamiento del alambre central.
(3) Acuñamiento longitudinal.
(4) Sustituido tras corte el casquillo mal rellenado (deslizamiento).
(5) Solo un extremo.
(6) No desliza a 180,6 kN (nivel medio en fatiga). Se incluye el numero de ciclos realizados.
(7) Velocidad de deslizamiento en mm/h a los 50.000 ciclos (incluye fluencia).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

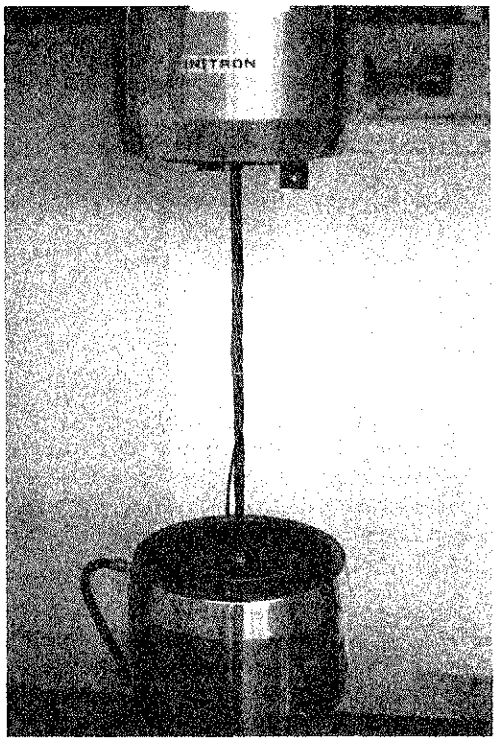


Foto 3

3.3. Aplicaciones

El procedimiento fue utilizado, con resultados totalmente satisfactorios, para realizar los ensayos de fatiga propuestos, correspondientes al grupo de doce muestras de las series A, B, C y D, motivo original del desarrollo del sistema de anclaje.

Asimismo y aunque el sistema de anclaje fue desarrollado para ensayos de fatiga sobre cordón de 0,6" para pretensado, el mismo se ha mostrado sumamente versátil, dado que ha permitido realizar ensayos similares en cordones de 0,5", ensayos de tracción y fatiga de alambres (7) empleando casquillos de tubo de acero calibrado 16,0×10,0 (Foto 4), e incluso ensayos de fatiga sobre probetas de sección rectangular (8), encasquillando los extremos con tubo 32,0×29,0 (Foto 5).

Foto 4

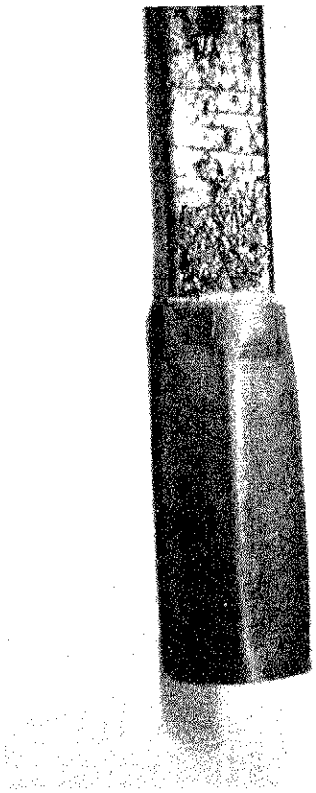


Foto 5

4. CONCLUSIONES

Como conclusiones de este estudio sobre el sistema de anclaje utilizado pueden citarse, entre otras, las siguientes:

1. El casquillo debe tener una longitud igual o superior a 100 mm (la altura de mordaza de la máquina de ensayo es de 80 mm), no es necesario tratarlo mediante chorro de arena y sí es conveniente limpiarlo con acetona y lijarlo interiormente.
2. El baño en resina pura del casquillo y del cordón es perjudicial pues favorece el deslizamiento.
3. El cordón debe atarse a 120-140 mm del extremo y procederse a la separación de los alambres con puntas o clavos de acero, para facilitar la penetración del mortero entre los mismos.
4. El tiempo mínimo de curado deberá ser de 2 días.
5. La presión de ensayo en mordazas será igual o superior a 100 bares y, con el fin de evitar el resquebrajamiento del mortero, es esencial proceder en dos etapas. La fijación de la probeta a la máquina se realizará con una presión inferior a 50 bares, la cual se incrementará paulatinamente hasta la presión definitiva.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

AGRADECIMIENTOS

Se quiere agradecer a la empresa Nueva Montaña Quijano, S. A. y, en especial, a su ingeniero D. José María Wamba Fernández, el suministro del material necesario para la experimentación; y a los becarios J. Cabrero, A. Hernández y M. R. Iturralde la labor desarrollada en la preparación de probetas, realización de ensayos y elaboración de datos.

REFERENCIAS

(1) ESTUDIO SOBRE ENSAYOS DE FATIGA DE ARMADURAS ACTIVAS PRETENSADAS (Informe), 1987.

(2) UNE 36-098-85 «CORDONES DE 7 ALAMBRES DE ACERO PARA ARMADURAS DE HORMIGON PRETENSADO».

(3) BS 5896:1980... «Specification for High tensile steel wire and strand for the prestressing of concrete».

(4) EURONORM 138-79 «Armatures de précontrainte».

(5) RECOMMANDATION RILEM/FIP/CEB RPC 8-1979 «Essai de fatigue sur armatures de précontrainte».

(6) ASTM A-370-77 «Standard Methods and Definitions for MECHANICAL TESTING OF STEEL PRODUCTS».

(7) FATIGUE BEHAVIOUR OF WIRE ROPES. J. Llorca, J. M. Varona, V. Sánchez Gálvez y F. Gutiérrez-Solana. Materials and Structures, 1989. Pendiente de publicación.

(8) CARACTERIZACION MECANICA CONVENCIONAL Y EN FATIGA DE MATERIAL DE PUENTES METALICOS DE FERROCARRIL (Informe), 1989.

RESUMEN

La elección del sistema de anclaje para los ensayos de fatiga, tanto de alambres y cordones para pretensado como de cualquier otro elemento susceptible a este proceso, es una de las dificultades que hay que resolver a la hora de proceder a su realización. El trabajo aborda la optimización de uno de los procedimientos más cómodos y eficaces, como es el encasquillado de los extremos de la muestra con tubo o conducto flexible y resina epoxi como elemento de unión.

El sistema de anclaje que se contempla se ha desarrollado para ensayos de fatiga sobre cordón de 0,6" para pretensado, mostrándose sumamente versátil, dado que ha permitido extender la técnica a ensayos de tracción y fatiga de alambres e incluso de probetas de sección rectangular utilizando el tubo flexible adecuado.

SUMMARY

The selection of the anchorage system to be used in the fatigue testing of wires and strands for the prestressing of concrete, as well as in those carried out on any other uniaxial structural element, is extremely important in order to be succesfull on the testing procedure to be performed.

This work analyzes the way to optimize one of the more frecuently used anchorage system in such tests: steel tubing covers at the gripped portions of the specimen, filled up with an epoxi resin mortar as a bonding agent.

The obtained conditions of anchorage preparation and gripping procedure that optimize the fatigue tests, have been stablished for 0.6" seven-wire strands but has been proved to be also usefull to any other specimens such wires, flat specimens, for either fatigue or tensile tests.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Estudio experimental de la influencia de la ejecución en la resistencia a rasante de piezas en flexión

Enrique González Valle
Dr. Ingeniero de Caminos, C. y P.
Subdirector General de INTEMAC

1. INTRODUCCION

La evolución de los sistemas constructivos que se produjo tras la primera guerra mundial, condujo a la aparición de una tipología de piezas, solicitadas en flexión, que actualmente se reconocen bajo la denominación de piezas compuestas. Tales piezas se configuran con una parte prefabricada en hormigón armado o pretensado y otra vertida in situ. Su utilización permite obtener múltiples ventajas, tales como la reducción del encofrado y del cimbrado, la reducción de pesos en el transporte y montaje, y la posibilidad de restablecer el monolitismo en la estructura acabada. Pero frente a tales ventajas existe una desventaja que condiciona el comportamiento de las piezas compuestas y es la presencia de una "interface" o unión entre hormigones in situ y prefabricado, generalmente solicitada a tensión tangencial y cuya resistencia es condicionante para el comportamiento solidario de la sección.

Como resumen de las investigaciones realizadas hasta el momento, podemos señalar que la transferencia del esfuerzo rasante entre hormigones in situ y prefabricado se realiza según los mecanismos que se desarrollan, secuencialmente, de acuerdo con las etapas siguientes (véase figura 1).

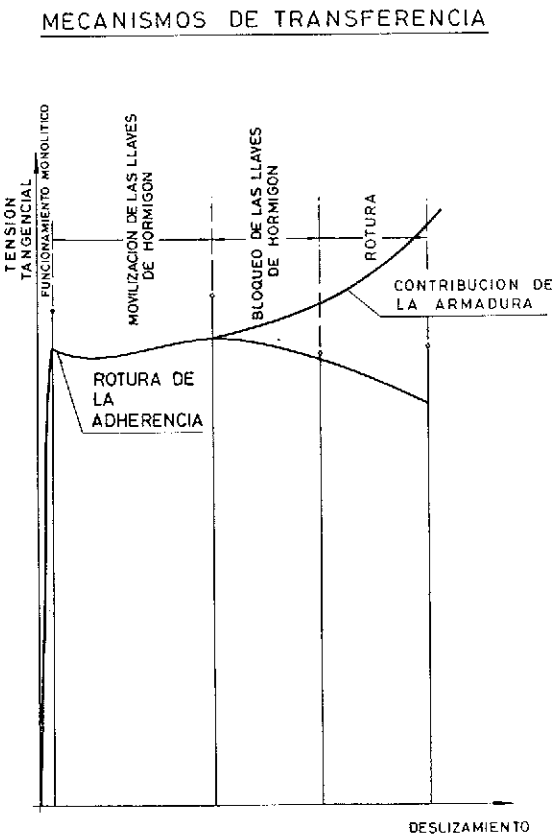


Fig. 1

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

a) *ETAPA 1ª*

Mecanismo de movilización de la cohesión interna entre los dos hormigones, mecanismo de transferencia de mayor rigidez.

b) ETAPA 2ª

Mecanismo de movilización de las fuerzas de corte entre zonas rugosas, naturales o artificiales, creadas entre los hormigones.

c) *ETAPA 3ª*

Mecanismo de movilización de fuerzas de rozamiento en superficies que se someten a estados de solicitación tangencial.

d) *ETAPA 4ª*

Mecanismo de movilización del efecto pasador de las armaduras que atraviesan el plano de contacto.

En lo que concierne al tipo de piezas que son objeto de análisis en el presente estudio, sólo los mecanismos citados en primero y segundo lugar son de consideración por tratarse de los únicos que no requieren la disposición de armaduras. Se trata de los mecanismos de transferencia más rígidos, y particularmente la movilización del primero, basado en la adhesión entre las partículas y en la creación de microllaves en la superficie de contacto, se hace en un rango lineal, siendo el comportamiento de la pieza compuesta prácticamente análogo al de una monolítica. El interés de profundizar en el comportamiento de este tipo de uniones queda justificado por lo económico que resultaría su realización exclusiva en aquellas tipologías de pieza en las que pudiesen garantizarse con seguridad los estados límites últimos.

Para otros tipos de pieza, condicionados por los estados límites de servicio en deformaciones, la contribución ofrecida por este mecanismo podría resultar asimismo interesante.

Las investigaciones desarrolladas para el análisis del comportamiento a rasante de secciones con o sin armadura transversal, se han realizado sobre diferentes tipos de modelos experimentales que pasamos a comentar.

Los modelos de "PUSH-OFF" han sido utilizados en las investigaciones de Hanson, Mattock y otros en diferentes concepciones. En la *figura 2* se acompaña el modelo empleado por Hanson y en la *figura 3* los empleados por Mattock.

Otro grupo de investigadores basó su análisis experimental *en modelos de viga*, constituida por una parte prefabricada, armada o pretensada, y un hormigonado, de su cabeza comprimida, en segunda fase. Hanson utilizó modelos de vigas según se indica en la *figura 4*.

Estos modelos de viga, pueden reproducir, con mayor fiabilidad, la distribución de tensiones tangenciales en la unión.

Las uniones sin armadura atravesando el plano de la unión presentan una gran sensibilidad a determinados aspectos, los cuales condicionan fuertemente, si no la deformabilidad de la unión ante esfuerzos transversales, si su resistencia última. Tales aspectos podemos agruparlos, desde el punto de vista de su origen, en:

– Reológicos (retracción y fluencia)

– Geométricos

– Constructivos

De los aspectos constructivos está confirmado, experimentalmente, que la resistencia de la sección

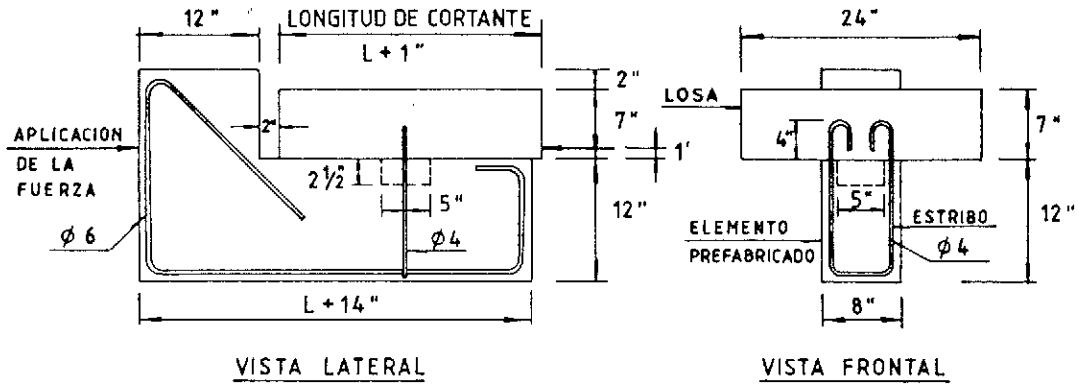


Fig. 2. Probeta de PUSH-OFF

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

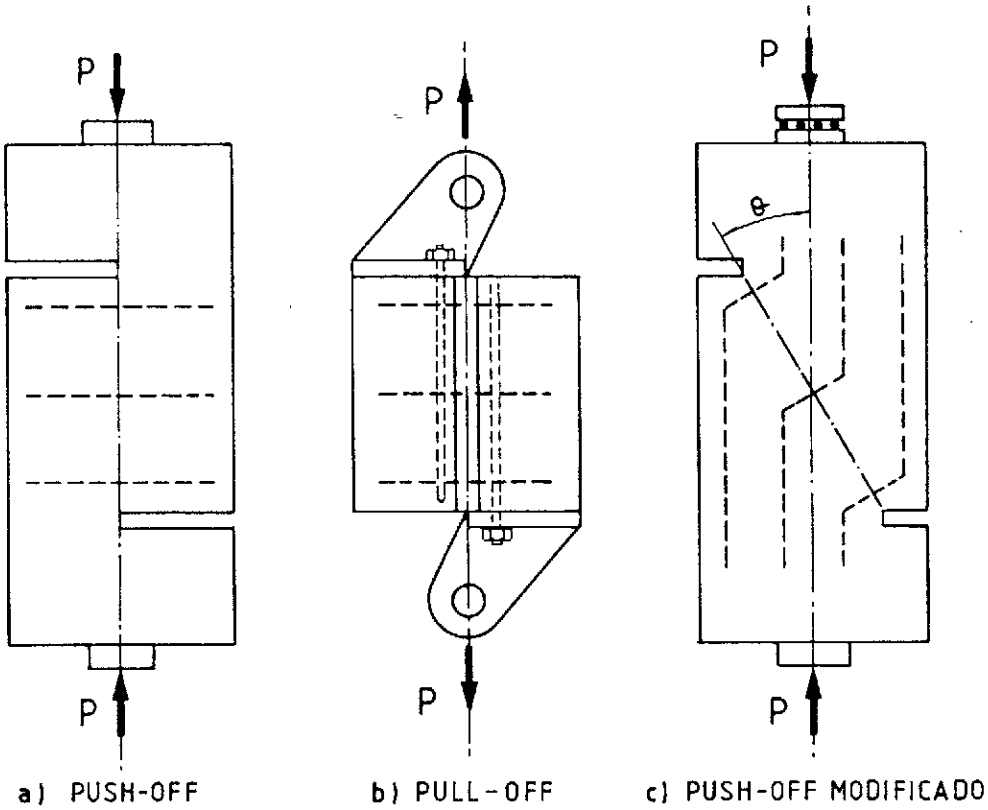


Fig. 3. Probetas de ensayo

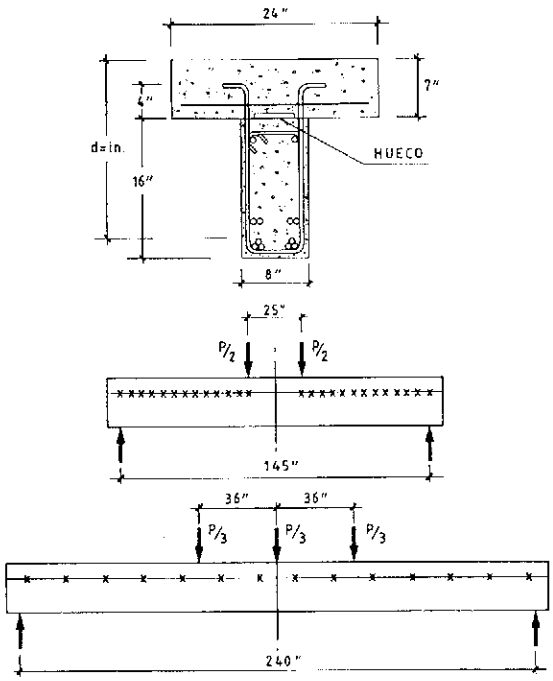


Fig. 4

compuesta y en particular de la "interface", queda afectada negativamente por la presencia de la lechada superficial en el contacto y también por la presencia de polvo o suciedad. Asimismo, ha sido estudiada experimentalmente la influencia que los estados de saturación superficial de humedad tienen sobre la resistencia del plano de unión. Algunas investigaciones han estudiado la influencia de tratamientos superficiales de cepillado, picado, lavado de superficies, tampeado, etc., para en unos casos mejorar la rugorisdad y en otros para eliminar la lechada superficial, el polvo o la suciedad.

En lo referente al proceso del hormigonado de la segunda fase de la sección compuesta, existen investigaciones experimentales que han estudiado la incidencia de aspectos tales como los tiempos de vibración, llegándose a conclusiones sobre el efecto beneficioso de la compactación enérgica.

2. INVESTIGACION EXPERIMENTAL DESARROLLADA

El objetivo de la investigación que hemos desarrollado es el análisis experimental de la influencia de estados de tratamiento de la superficie de contacto entre hormigones endurecidos y vertidos in situ, en condiciones de diferente grado de saturación de la unión y compactados, bien por vibración interna o bien por picado con barra.

La investigación se refiere a piezas compuestas sin armadura de cosido, y sus conclusiones hemo pretendido que sean de aplicación para element solicitados por tensiones tangenciales moderadas,

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

producidas por cargas de carácter predominantemente estático.

Nos decantamos por la adopción de un modelo experimental de viga que, en lo posible, presentase una distribución de tensiones tangenciales en la "interface", no cuestionable, lo que nos llevaba a adoptar un esquema de cargas puntuales que solicitase la unión a tensiones tangenciales de valor sensiblemente constante en una amplia zona, para poder prescindir de los efectos de redistribución tensional, efectos que, en cualquier caso, no serían determinantes.

Para estudiar la influencia de la distancia entre el punto de aplicación de la carga y el apoyo, lo que hemos denominado "luz de cortante" o "vano de cortante", establecimos un plan experimental piloto que contempló la rotura de 4 vigas denominadas A, B, C y D.

En el *cuadro I* se acompaña un resumen de los resultados obtenidos de estos ensayos.

En la *figura 5* hemos representado los valores obtenidos en los ensayos piloto realizados, con relación a la curva dada por K. Rafla, pudiendo comprobar que el ajuste de los resultados de ensayo es aceptable y que la relación $a/d = 4{,}05$ seleccionada para nuestro ensayo es aceptable por mostrarse en la zona poco dependiente de la influencia de la distancia de la carga al apoyo.

CUADRO 1

REFERENCIA DE LA VIGA	a (m)	a/d	f_c (kp/cm²)		V_u (t)	τ_u (kp/cm²)	τ_{CORR} (kp/cm²)
			f_{c1}	f_{c2}			
PILOTO A	1,00	2,70	284	262	5,05	16,6	14,5
PILOTO B	1,50	4,05	324	327	5,84	19,1	15,0
PILOTO C	0,70	1,89	248	207	10,56	33,8	33,0
PILOTO D	1,25	3,38	200	272	5,17	17,0	17,0

f_{c1} = hormigón de primera fase (suela)
f_{c2} = hormigón de segunda fase (viga)
V_u = esfuerzo cortante último debido a la carga P
τ_u = tensión tangencial $= \dfrac{(V_u + V_p)}{b\,Z}$
V_p = esfuerzo cortante de peso propio
b = ancho del alma en el contacto
Z = brazo mecánico
$\tau_{CORR} = \tau_u \sqrt{200/f_{c\,mínima}}$

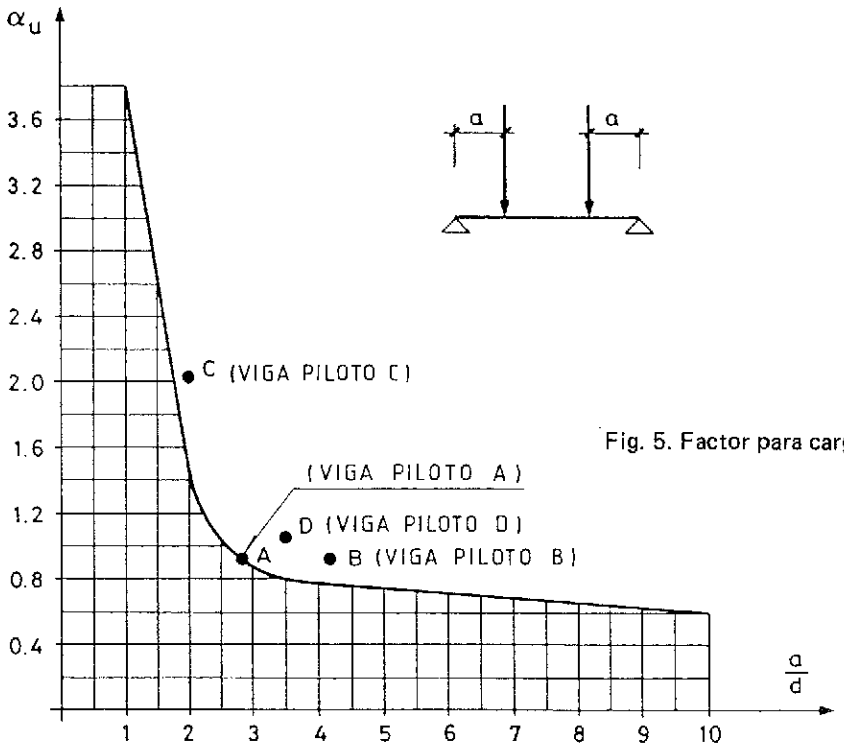


Fig. 5. Factor para cargas concentradas

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El objetivo de la experimentación era evaluar la incidencia de los parámetros siguientes:

a) Estado de saturación de la unión

b) Sistema de compactación empleado para el hormigón

c) Tipo de rugosidad alcanzado en función del tratamiento previo a que se sometía la unión.

La investigación experimental ha contemplado las variables siguientes:

a) Dos estados de tratamiento superficial de la "interface".

a.1) Natural (N)
a.2) Cepillado (C)

b) Dos estados de saturación de la unión.

b.1) Húmedo (H)
b.2) Encharcado (E)

c) Dos tratamientos de compactación del hormigón

c.1) Vibrado (V)
c.2) Picado con barra (P)

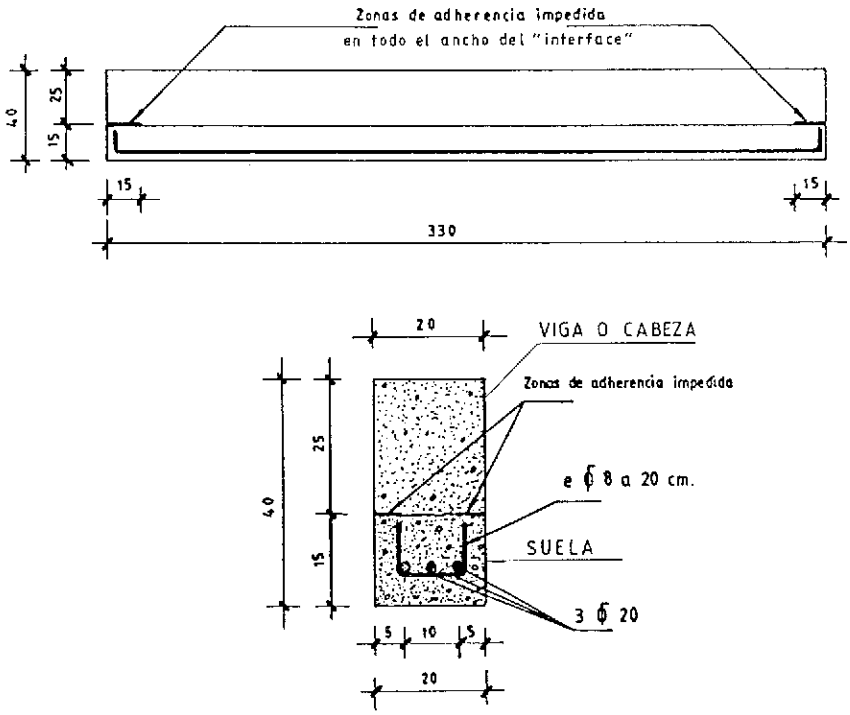
d) Complementariamente, se han contemplado tres estados más para la "interface".

d.1) Artificialmente desecada (AD)
d.2) Rugosidad obtenida mediante tampeado (T)
d.3) Rugosidad obtenida mediante peinado con útil adecuado (p)

En la *figura 6* acompañamos la definición de las vigas ensayadas.

El proceso de fabricación seguido para la realización de los modelos fue el siguiente:

FASE I: Hormigonado de la parte inferior de la viga, realizando el tratamiento para conseguir la rugosidad prevista.



CALIDADES DE LOS MATERIALES:

ACERO: AEH - 500 N
HORMIGON: H -175
D = 20 mm

Fig. 6. Definición de las vigas

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

FASE II: A los siete días de hormigonada la suela de las vigas, se procedió al hormigonado de las cabezas o partes superiores. Previamente al hormigonado se aplicó a la junta el tratamiento de humectación correspondiente.

Los tratamientos superficiales aplicados a las juntas, tanto de rugosidad como de humectación, así como el método de compactación utilizado en cada caso, fueron los condicionantes básicos de las variables a investigar.

Las características de los materiales empleados fueron:

ACERO: Se ha utilizado acero tipo AEH-500N.

HORMIGON: El hormigón, en el momento del ensayo de las vigas, se correspondía con un H-175. Las dosificaciones del hormigón de suelas y cabezas se han determinado de tal forma que en el momento del ensayo las resistencias de ambos hormigones fuesen semejantes.

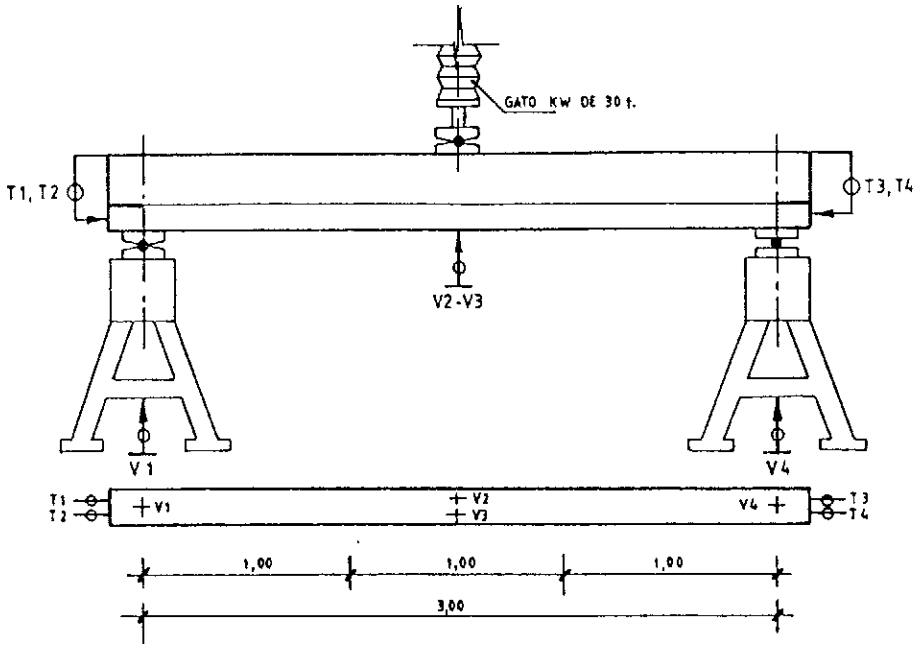
La nomenclatura de las vigas fabricadas, en función de las variables de ensayo a que hemos hecho referencia, fue la siguiente:

NHV 1	NHP 1	P - 1
NVH 2	NHP 2	P - 2
NEV 1	NEP 1	T - 1
NEV 2	NEP 2	T - 2
CHV 1	CHP 1	AD - 1
CHV 2	CHP 2	AD - 2
CEV 1	CEP 1	
CEV 2	CEP 2	

pudiendo observar que fueron ensayadas dos vigas por cada combinación de variables.

Sobre los materiales componentes para la fabricación del hormigón (áridos y cemento) se realizaron los ensayos de idoneidad que contempla la Instrucción EH. Asimismo, se realizó un control del hormigón y del acero muestreando al 100% todas las unidades de producto.

Las vigas se ensayaron a flexión, de acuerdo con la disposición que se presenta en la *figura 7.*



NOTAS: - transductor inductivo LVDT

- T1, T2, T3 y T4 transductores para la medida de corrimientos.
- V1, V2, V3 y V4 transductores para la medida de flechas
- La designación es la misma que figura en los registros contínuos de ordenador obtenidos durante el ensayo, en los cuales figuran además:

DIZ: media de T1 y T2

DDE: media de T3 y T4

FLECHA: $\frac{V2 + V3 - V1 - V4}{2}$

Fig. 7. Disposición del ensayo

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Cada viga se instrumentó con ocho transductores inductivos LVDT, cuatro de ellos para la medida de corrimientos relativos entre suela y cabeza superior, de 0,001 mm de apreciación y 12,5 mm de recorrido y cuatro para la medida de descensos verticales, de 0,005 mm de apreciación y 25 mm de recorrido.

3. RESULTADOS OBTENIDOS EN LOS ENSAYOS REALIZADOS

3.1. Sobre las características de los materiales

Los resultados de las probetas correspondientes a cada una de las fases de hormigonado, y para cada una de las vigas, se acompañan en el *cuadro II*. Señalamos que los resultados de ensayo fundamentalmente significativos son los correspondientes a las probetas curadas en ambiente análogo al de las vigas y rotas a compresión en la fecha en que las vigas fueron ensayadas, aunque en el cuadro también hemos incorporado los resultados de rotura a compresión de probetas, curadas en cámara standard y ensayadas a la edad de 28 días a fin de tener una referencia nominal de la calidad de los hormigones utilizados en la investigación.

CUADRO II

Resistencias individuales de las probetas obtenidas en la fabricación de las vigas ensayadas

VIGA TIPO	f_{ce} (kp/cm²)		f_{c28} (kp/cm²)		Edad de ensayo en días	
	Suela	Viga	Suela	Viga	Suela	Viga
NHV (1 y 2)	194 207	188 185	187 199	190 194	22	15
NEV (1 y 2)	203 212	188 190	188 188	208 201	21	14
CHV (1 y 2)	183 182	179 174	162 161	181 183	29	22
CEV (1 y 2)	254 247	210 225	242 237	227 227	21	14
HHP (1 y 2)	201 201	197 195	202 201	203 204	21	14
NEP (1 y 2)	175 175	184 187	174 182	177 171	29	22
CHP (1 y 2)	168 164	177 173	173 176	186 184	28	21
CEP (1 y 2)	238 243	232 235	229 225	256 244	21	14
T (1 y 2)	241 237	211 214	219 213	174 182	35	28
P (1 y 2)	213 216	209 200	192 192	196 198	26	19
AD (1 y 2)	241 229	173 176	216 212	179 172	20	14

f_{ce} = Resistencia a la edad del ensayo, en probetas curadas en ambiente análogo al de las vigas.

f_{c28} = Resistencia de ensayo, en probetas curadas en cámara standard y a 28 días.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En el *cuadro III* acompañamos los valores medios de las probetas curadas en forma análoga a las vigas y ensayadas a compresión a la edad del ensayo de las vigas.

CUADRO III

Resistencias medias de los hormigones utilizados en la fabricación de las vigas

VIGA TIPO	f_{cem} (kp/cm²) Resistencia media de la amasada	
	Suela	Viga
NHV (1 y 2)	201	186
NEV (1 y 2)	208	189
CHV (1 y 2)	182	177
CEV (1 y 2)	250	218
NHP (1 y 2)	201	196
NEP (1 y 2)	175	186
CHP (1 y 2)	164	175
CEP (1 y 2)	241	234
T (1 y 2)	239	213
P (1 y 2)	215	205
AD (1 y 2)	235	174

Las barras de acero para armaduras, empleadas en la realización de las vigas, fueron ensayadas individualmente, acompañando en el *cuadro IV* los valores del límite elástico nominal obtenidos del ensayo, y el valor de su sección equivalente.

3.2. Sobre las medidas de rugosidad

Sobre cada una de las superficies de la "interface" tratadas de acuerdo con lo expuesto en el apartado 2, se han realizado medidas de rugosidad, de acuerdo con la norma SIS-812005. *En el cuadro V* se acompaña un resumen de los valores obtenidos.

3.3. Sobre la resistencia a esfuerzo rasante

El esfuerzo cortante, debido a las cargas directas aplicadas fue en consecuencia constante en cada semiluz. Dado el proceso de ejecución de las piezas que fueron hormigonadas con la situación equivalente a la de un cimbrado continuo, a los

CUADRO IV

Viga	Diámetro nominal ϕ mm	f_y (kp/cm²) Límite elástico nominal	Tolerancia en el área de la sección transversal %
NHV-1	20	5475	+0,4
NHV-2	20	5284	+0,3
NEV-1	20	5411	+0,4
NEV-2	20	5348	+0,5
CHV-1	20	5348	0,0
CHV-2	20	5284	−0,4
CEV-1	20	5570	1,3
CEV-2	20	5793	−0,8
NHP-1	20	5284	−0,1
NHP-2	20	5411	+0,3
NEP-1	20	5316	0,0
NEP-2	20	5316	+0,3
CHP-1	20	5570	−0,8
CHP-2	20	5570	−0,9
CEP-1	20	5730	−0,2
CEP-2	20	5602	−0,7
T-1	20	5570	−0,7
T-2	20	5666	−1,1
P-1	20	5570	−1,1
P-2	20	5602	−1,1
AD-1	20	5666	−1,2
AD-2	20	5570	−2,0

cortantes originados por las cargas directas aplicadas por el gato, habría que sumar las originadas por el peso propio de las piezas y de los elementos de transmisión de carga.

En el *cuadro VI* se acompañan los valores de las cargas con los cuales se produjo la rotura de la pieza, que en todos los casos correspondió a rotura por rasante, y los cortantes correspondientes a tal situación de rotura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CUADRO V

Valores de rugosidad de la "interface" S/SIS 812005

Viga	Rugosidad (mm)			
	Individual	Media	Media	Media
NHV-1	1,23	124	1,45	1,97
NHV-2	1,25			
NEV-1	1,75	1,66		
NEV-2	1,56			
CHV-1	2,39	2,05	2,48	
CHV-2	1,70			
CEV-1	2,81	2,91		
CEV-2	3,00			
NHP-1	4,24	4,11	4,37	4,67
NHP-2	3,98			
NEP-1	6,69	4,64		
NEP-2	2,59			
CHP-1	6,34	4,96	4,97	
CHP-2	3,58			
CEP-1	5,08	4,97		
CEP-2	4,86			
T-1	1,92	2,30	–	–
T-2	2,68			
P-1	2,62	2,61	–	–
P-2	2,59			
AD-1	3,80	3,37	–	–
AD-2	2,93			

CUADRO VI

Esfuerzos cortantes de agotamiento

Viga tipo		P/2 (t)	$V_{PP} + V_{EL}$ (t)	V_T (t)
NHV	1	4,95	0,30	5,25
	2	4,49	0,30	4,79
NEV	1	3,73	0,30	4,03
	2	4,00	0,30	4,30
CHV	1	5,41	0,30	5,71
	2	5,40	0,30	5,70
CEV	1	5,00	0,30	5,30
	2	5,01	0,30	5,31
NHP	1	5,00	0,30	5,30
	2	5,01	0,30	5,31
NEP	1	3,94	0,30	4,24
	2	4,86	0,30	5,16
CHP	1	4,51	0,30	4,81
	2	5,51	0,30	5,81
CEP	1	4,80	0,30	5,10
	2	4,87	0,30	5,17
T	1	4,45	0,30	4,75
	2	4,50	0,30	4,80
P	1	5,02	0,30	5,32
	2	5,30	0,30	5,60
AD	1	4,46	0,30	4,76
	2	4,88	0,30	5,18

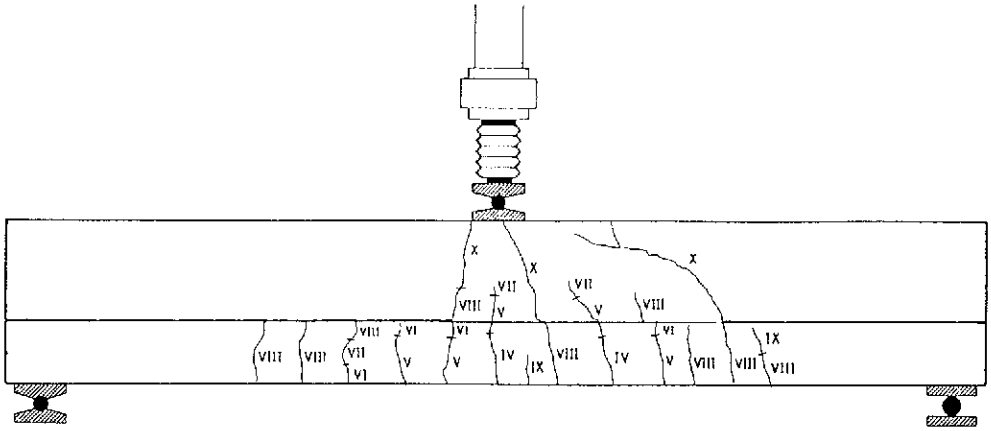
La fisuración de las vigas fue registrada durante todos los escalones de carga. En la *figura 8* se acompañan detalles de algunos esquemas de fisuración.

3.4. Sobre la deformabilidad de las vigas

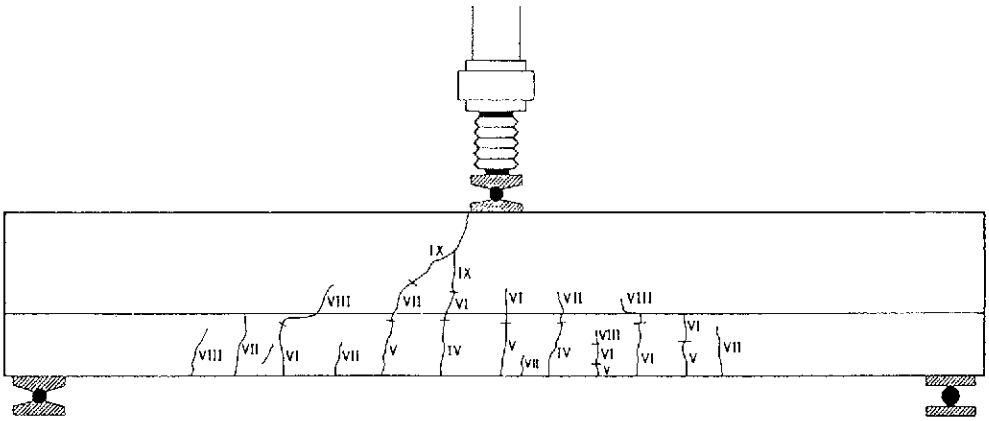
En la *figura 9* se presentan algunos diagramas cargas-flechas registrados, correspondientes a las parejas de vigas ensayadas, de acuerdo con los valores que se incorporan en el *cuadro VII*.

Los valores de desplazamientos relativos entre las partes de pieza medidos, en la práctica totalidad de los ensayos, carecen de significación absoluta, ya que exceptuando la viga NHV-1 se sitúan en límites prácticos $< 0{,}01$ mm.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



VIGA N.H.V.-1



VIGA N.H.V.-2

Fig. 8

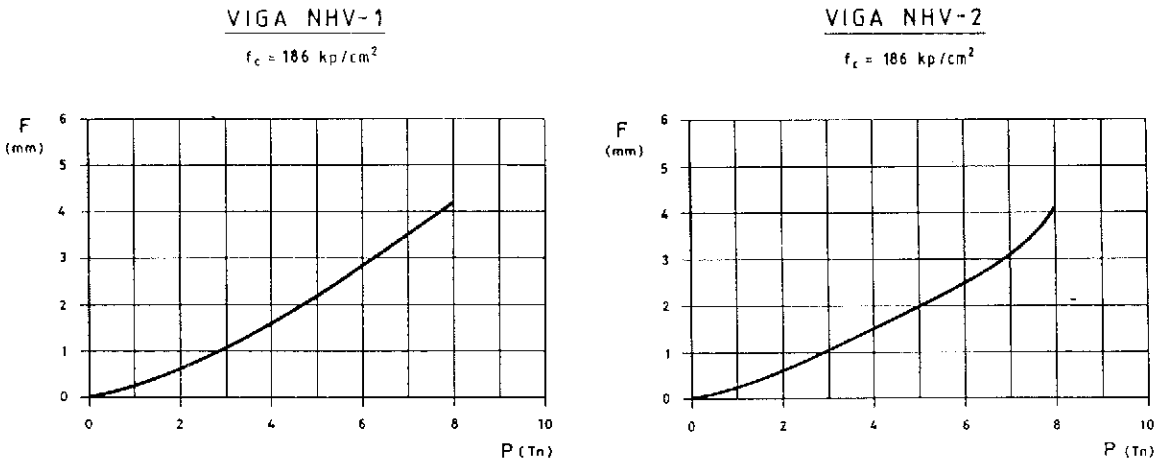


Fig. 9. Diagramas cargas-flechas

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CUADRO VII

Flechas registradas en ensayo (F_m mm)

Viga \ Escalón		P = 2 t	P = 4 t	P = 6 t	P = 8 t
NHV	1	0,609	1,576	2,822	4,158
	2	0,595	1,579	2,467	4,146
NEV	1	0,611	1,802	3,196	–
	2	0,642	(1,527)	(2,718)	(3,997)
CHV	1	0,688	1,437	2,514	3,798
	2	0,736	1,782	3,004	4,313
CEV	1	0,589	1,478	2,522	3,746
	2	0,623	1,487	2,546	3,658
NHP	1	0,558	1,450	2,575	3,827
	2	0,679	1,679	2,852	4,089
NEP	1	0,697	1,793	2,729	4,170
	2	0,643	1,466	2,698	4,054
CHP	1	0,647	1,632	2,741	3,993
	2	0,794	1,819	3,022	4,292
CEP	1	0,519	1,311	2,378	3,536
	2	0,604	1,385	2,448	3,577
T	1	0,578	1,515	2,602	3,726
	2	0,501	1,392	2,472	3,618
P	1	0,560	1,480	2,553	3,747
	2	0,586	1,497	2,562	3,715
AD	1	0,534	1,389	2,584	3,839
	2	0,631	1,527	2,709	3,964

4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

4.1. Análisis de la resistencia a esfuerzo rasante

Nos ha parecido oportuno calcular las tensiones tangenciales, en función de los valores de resistencia a esfuerzo cortante obtenidos en ensayo, bajo tres supuestos.

a) Valores calculados por aplicación de la teoría clásica, con coeficiente de equivalencia n = 10; $\tau_I = V/bz$.

b) Valores calculados adoptando un bloque rectangular de compresiones y con valor 0,85 f_c, siendo f_c la resistencia a compresión del hormigón de pieza comprimida y distribución de τ_{II} según señala BS-8110.

c) Valores calculados adoptando $\tau_{III} = V/0{,}9\ bd$.

Los resultados obtenidos de ensayo fueron homogeneizados a un tipo de hormigón f_c = 200 kp/cm^2, mediante una corrección proporcional al coeficiente

$$\beta = \sqrt{200/f_c}$$

donde f_c sería la menor resistencia de los hormigones que conforman la pieza en la fecha de ensayo.

Dado el gran ajuste que existe entre los resultados de los tres modelos teóricos aplicados, la comparación entre resultados puede ser realizada con los valores obtenidos tras la aplicación de cualquiera de los tres modelos.

En el *cuadro VIII* hemos resumido los valores de las tensiones tangenciales, presentando los valores medios de los resultados obtenidos en función de las variables básicas que han sido objeto de la investigación experimental.

En lo referente a las variables complementarias, en el *cuadro IX* se acompaña el resumen comparativo entre las situaciones que contemplan tales variables.

Por último, en el *cuadro X* se incorporan, ordenados de mayor a menor, los valores de las tensiones tangenciales medias.

En las *figuras 10, 11, 12 y 13* se acompaña la representación gráfica de los valores incluidos en los cuadros citados previamente.

4.2. Análisis teórico de las flechas bajo cargas de ensayo y contraste con los valores experimentales

Para efectuar este análisis, la metodología que nos ha parecido conveniente aplicar ha sido evaluar las flechas teóricamente, bajo cargas de ensayo, aplicando un modelo teórico simple y proceder a su comparación con los valores obtenidos de ensayo.

El cálculo teórico de flechas lo hemos realizado según la fórmula de Branson.

En el *cuadro adjunto XI* se acompañan los valores de flechas teóricas calculadas (F), para los intervalos de cargas de servicio.

En la *figura 14* se acompañan algunos diagramas

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CUADRO VIII

Comparación de variables fundamentales

Superficie	Viga		τ_I (kp/cm²)		τ_{Im} (kp/cm²)	Relación
NATURAL (N)	NHV	1	16,9	16,2	15,5	$\frac{N}{C} = 0,92$
		2	15,5			
	NEV	1	12,9	13,3		
		2	13,8			
	NHP	1	16,7	16,7		
		2	16,7			
	NEP	1	14,1	15,7		
		2	17,2			
CEPILLADA (C)	CHV	1	18,9	18,8	16,9	
		2	18,8			
	CEV	1	15,8	15,8		
		2	15,8			
	CHP	1	16,6	18,3		
		2	20,0			
	CEP	1	14,7	14,8		
		2	14,9			
VIBRADA (V)	NHV	1	16,9	16,2	16,0	$\frac{V}{P} = 0,98$
		2	15,5			
	NEV	1	12,9	13,3		
		2	13,8			
	CHV	1	18,9	18,9		
		2	18,8			
	CEV	1	15,8	15,8		
		2	15,8			
PICADA (P)	NHP	1	16,7	16,7	16,4	
		2	16,7			
	NEP	1	14,1	15,7		
		2	17,2			
	CHP	1	16,6	18,3		
		2	20,0			
	CEP	1	14,7	14,8		
		2	14,9			
HUMEDA (H)	NHV	1	16,9	16,2	17,5	$\frac{H}{E} = 1,17$
		2	15,5			
	CHV	1	18,9	18,9		
		2	18,8			
	NHP	1	16,7	16,7		
		2	16,7			
	CHP	1	16,6	18,3		
		2	20,0			
ENCHARCADA (E)	NEV	1	12,9	13,3	14,9	
		2	13,8			
	CEV	1	15,8	15,8		
		2	15,8			
	NEP	1	14,1	15,6		
		2	17,2			
	CEP	1	14,7	14,8		
		2	14,9			

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CUADRO IX

Comparación de variables complementarias

Viga		τ_I (kp/cm²)	τ_{Im} (kp/cm²)	Relación
NHV	1	16,9	16,2	$\frac{NHV}{T}=1,12$
	2	15,5		
CHV	1	18,9	18,9	$\frac{CHV}{T}=1,31$
	2	18,8		
T	1	14,3	14,4	
	2	14,4		
NHV	1	16,9	16,2	$\frac{NHV}{P}=0,96$
	2	15,5		
CHV	1	18,9	18,9	$\frac{CHV}{P}=1,12$
	2	18,8		
P	1	16,4	16,8	
	2	17,2		
NHV	1	16,9	16,2	$\frac{NHV}{AD}=0,98$
	2	15,5		
NEV	1	12,9	13,3	$\frac{NEV}{AD}=0,80$
	2	13,8		
AD	1	15,9	16,6	
	2	17,3		

CUADRO X

Modelo	τ_R (kp/cm²)	$\alpha=\frac{\tau_R}{\tau_M}$
CHV	18,9	1,17
CHP	18,3	1,14
P	16,8	1,04
NHP	16,7	1,04
AD	16,6	1,03
NHV	16,2	1,01
CEV	15,8	0,98
NEP	15,7	0,98
CEP	14,7	0,92
T	14,4	0,89
NEV	13,3	0,87
τ_M(media)	16,1	--

CUADRO XI

Cálculo de flechas teóricas

Viga	f_{cs} kp/cm²	f_{cv} kp/cm²	M_0 x 10^{-5} kp x cm	I_e (cm⁴)			F(cm)		
				P = 4 t	P = 6 t	P = 8 t	P = 4 t	P = 6 t	P = 8 t
NHV	201	186	1,66	73.231	69.895	68.763	0,15	0,24	0,32
NEV	208	189	1,71	73.715	69.850	68.831	0,15	0,23	0,32
CHV	182	177	1,56	72.348	69.413	68.639	0,16	0,24	0,33
CEV	250	218	1,93	76.201	70.644	69.179	0,13	0,22	0,29
NHP	201	196	1,66	73.231	69.695	68.763	0,15	0,23	0,31
NEP	175	186	1,52	72.025	69.310	68.594	0,15	0,24	0,32
CHP	164	175	1,45	71.499	69.142	68.521	0,16	0,25	0,33
CEP	241	234	1,88	75.583	70.446	69.092	0,13	0,21	0,28
T	239	213	1,87	75.463	70.408	69.076	0,14	0,22	0,30
P	215	205	1,74	74.019	69.947	68.874	0,14	0,22	0,30
AD	235	174	1,85	75.227	70.333	69.043	0,15	0,24	0,33

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

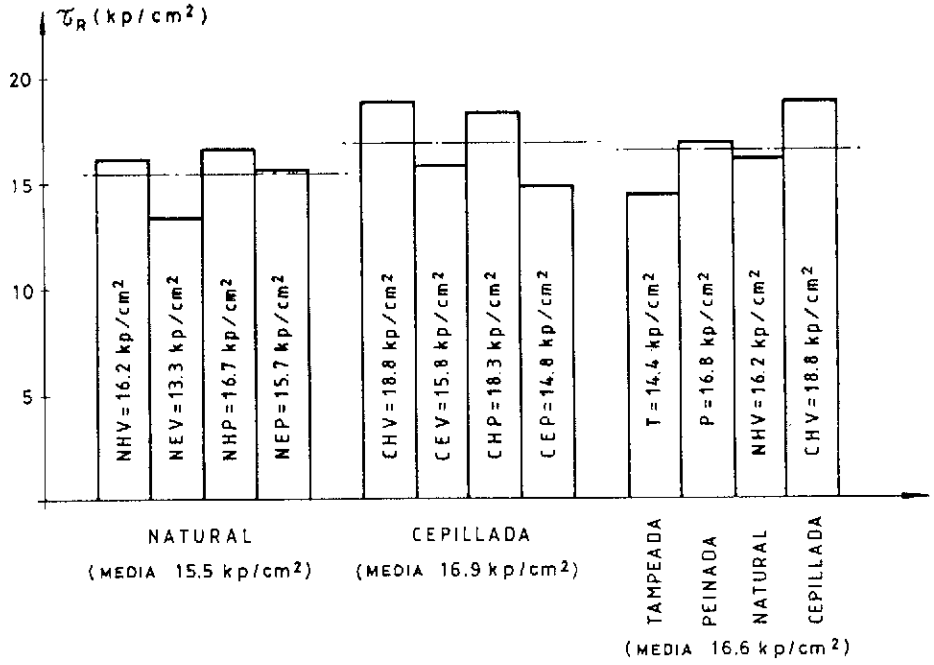


Fig. 10. Gráfico de comparación de tratamientos superficiales de la "Interface"

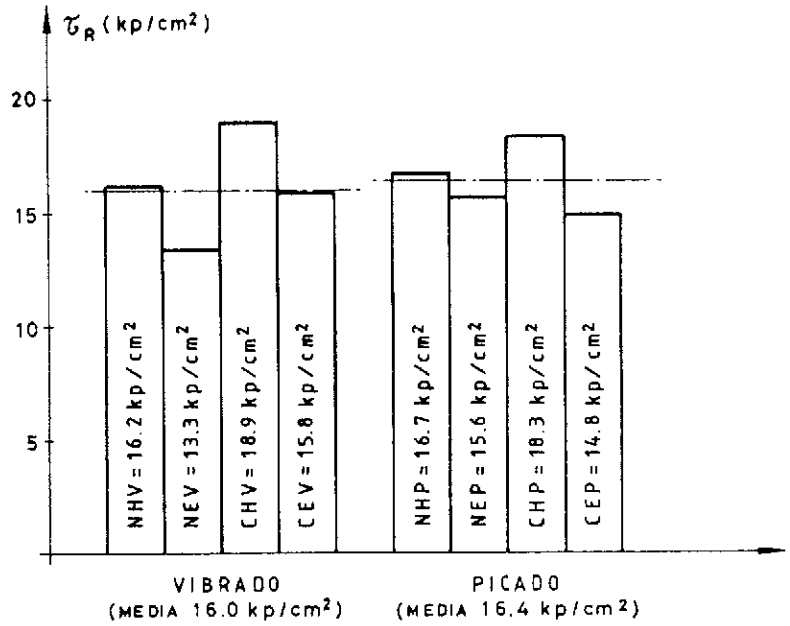


Fig. 11. Gráfico de comparación de métodos de compactación

cargas flechas registrados en ensayo, así como su comparación con los diagramas cargas flechas teóricas, calculados según el modelo teórico.

En el *cuadro XII* se acompaña el resumen de flechas teóricas calculadas y medidas en ensayo, así como la relación entre tales valores, que hemos considerado representativa de la influencia de las variables ensayadas.

En el *cuadro XIII* hemos resumido los valores de la relación K, flecha medida a flecha calculada teóricamente, para cada una de las variables determinantes de la investigación realizada como base para la evaluación de la influencia de las diferentes variables en la deformabilidad.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

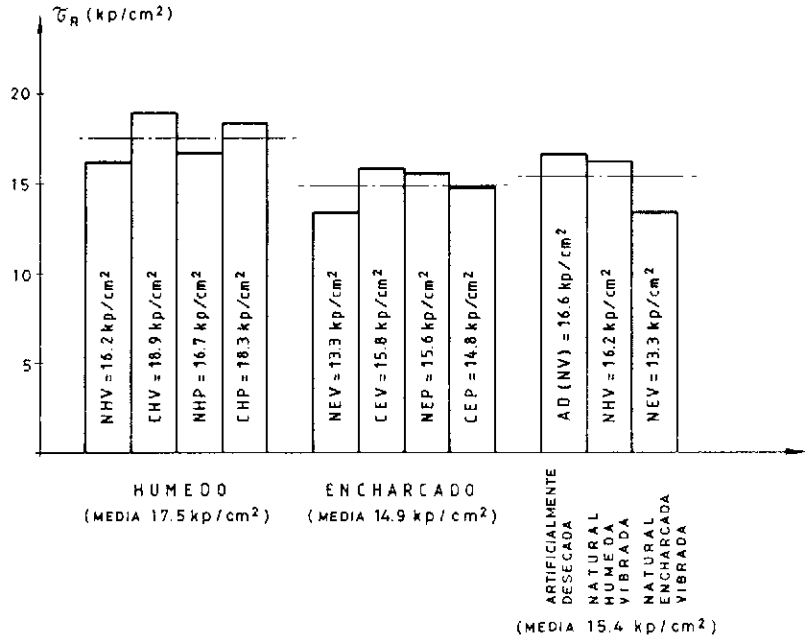


Fig. 12. Gráfico de comparación de estados de saturación de la "Interface"

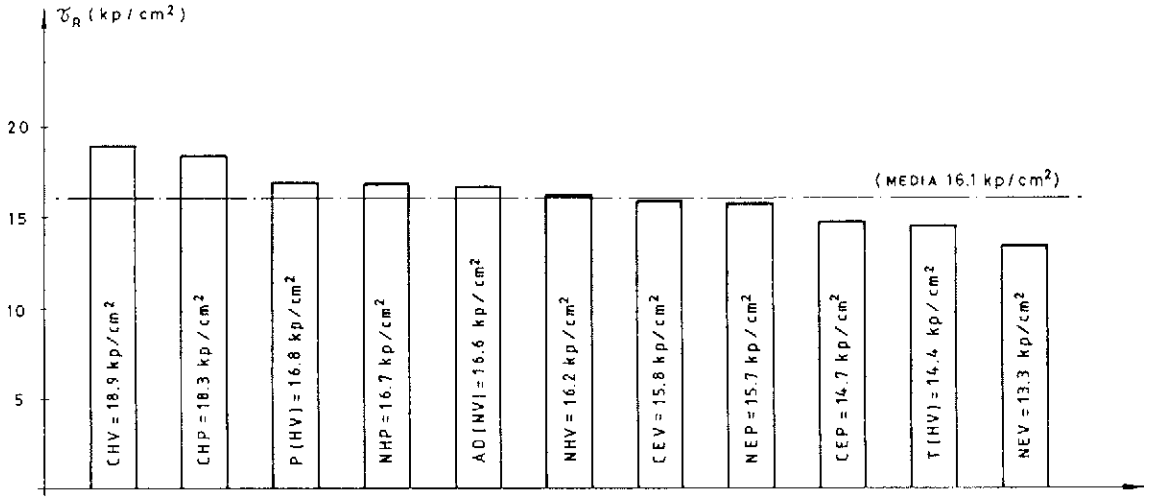


Fig. 13. Resumen de tensiones tangenciales medias en agotamiento (homogeneizadas a hormigones de $f_c = 200$ kp/cm²)

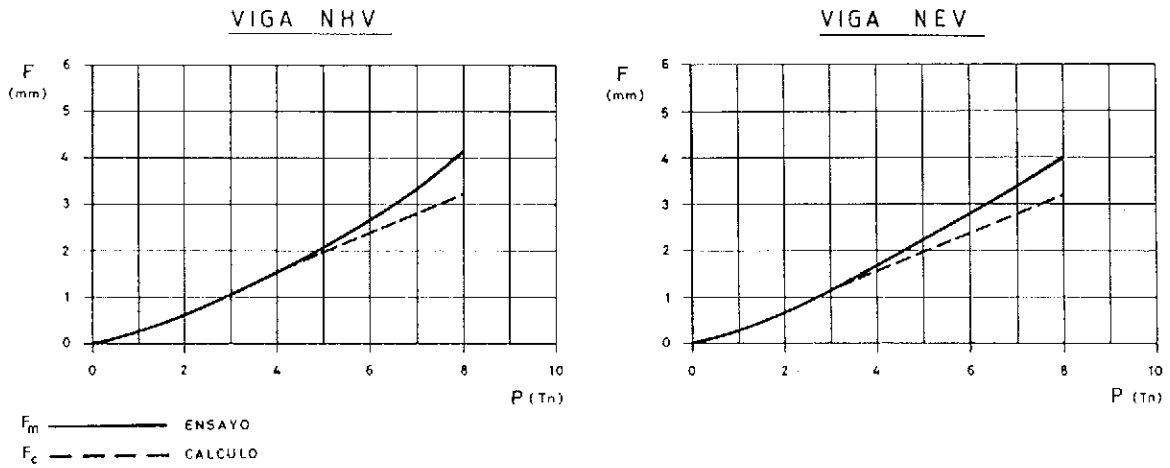


Fig. 14. Diagramas cargas-flechas

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CUADRO XII

Relación entre valores de flechas medidas en ensayo y calculadas según modelo teórico de Branson

Viga Tipo	P = 4 t			P = 6 t			P = 8 t		
	F_m (cm)	F_c (cm)	F_m/F_c	F_m (cm)	F_c (cm)	F_m/F_c	F_m (cm)	F_c (cm)	F_m/F_c
NHV	0,16	0,15	1,07	0,26	0,24	1,08	0,42	0,32	1,31
NEV	0,17	0,15	1,13	0,29*	0,23	1,26*	0,40	0,32	1,25
CHV	0,16	0,16	1,00	0,28	0,24	1,17	0,41	0,33	1,24
CEV	0,15	0,13	1,15	0,25	0,22	1,14	0,37	0,29	1,28
NHP	0,16	0,15	1,07	0,27	0,23	1,17	0,40	0,31	1,29
NEP	0,16	0,15	1,07	0,27	0,24	1,13	0,41	0,32	1,28
CHP	0,17	0,16	1,06	0,29	0,25	1,16	0,41	0,33	1,24
CEP	0,14	0,13	1,08	0,24	0,21	1,14	0,36	0,28	1,29
T	0,14	0,14	1,00	0,25	0,22	1,14	0,37	0,30	1,23
P	0,15	0,14	1,07	0,26	0,22	1,18	0,37	0,30	1,23
AD	0,15	0,15	1,00	0,26	0,24	1,08	0,39	0,33	1,18

* Valores afectados por una anomalía de la lectura, durante el ensayo de una de las vigas NEV.

4.3. Rugosidad

En el *cuadro XIV* hemos resumido los valores de la rugosidad específica, junto con los valores de las tensiones tangenciales de rotura τ_{IM}.

5. CONCLUSIONES

5.1. Sobre la resistencia de la unión frente a estados límites últimos de resistencia a rasante

a) *INFLUENCIA DEL ESTADO DE SATURACION DE LA UNION*

La resistencia última se muestra sensible a la presencia de agua en la unión. La resistencia de uniones en estado equivalente a saturado del soporte superficie seca, es superior (17%) a la registrada en uniones con superficie encharcada.

En contra de lo admitido hasta el momento, no consideramos significativa la influencia de la desecación de la superficie de la "interface".

b) *INFLUENCIA DEL SISTEMA DE COMPACTACION*

Los dos sistemas de compactación investigados, vibración interna y picado con barra, conducen a valores medios de la resistencia a rasante practicamente análogos.

c) *INFLUENCIA DEL TRATAMIENTO SUPERFICIAL DE LA UNION*

Las uniones entre hormigones con superficies de contacto cepilladas previamente al hormigonado, presentan resistencias ligeramente más elevadas que las correspondientes a las superficies naturales.

Los tratamientos de "tampeado" y de "peinado" no producen mejoras significativas en la resistencia a rasante.

d) *INFLUENCIA DE LA RUGOSIDAD DE LA "INTERFACE"*

La resistencia de uniones sin armadura es poco dependiente del parámetro rugosidad específica.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CUADRO XIII

Resumen de valores de la relación flecha medida a flecha calculada
F_m/F_c

Escalón / P(T)	4 t	6 t	8 t
N (Natural)	1,07 1,13 1,07 1,07	1,08 1,26 1,17 1,13	1,31 1,25 1,29 1,28
Media	1,09	1,16	1,28
C (Cepillada)	1,00 1,15 1,06 1,08	1,17 1,14 1,16 1,14	1,24 1,28 1,24 1,29
Media	1,07	1,15	1,26
K = N/C	1,02	1,01	1,02
H (Húmeda)	1,07 1,00 1,07 1,06	1,08 1,17 1,17 1,16	1,31 1,24 1,29 1,24
Media	1,05	1,15	1,27
E (Encharcada)	1,13 1,15 1,07 1,08	1,26 1,14 1,13 1,14	1,25 1,28 1,28 1,29
Media	1,11	1,17	1,27
K = H/E	0,95	0,98	1,00
Escalón / P(T)	**4 t**	**6 t**	**8 t**
V (Vibrada)	1,07 1,13 1,00 1,15	1,08 1,26 1,17 1,14	1,31 1,25 1,24 1,28
Media	1,09	1,16	1,27
P (Picada)	1,07 1,07 1,06 1,08	1,17 1,13 1,16 1,14	1,28 1,28 1,29 1,29
Media	1,07	1,15	1,27
K = V/P	1,02	1,01	1,00

5.2. Sobre los parámetros que condicionan el comportamiento en servicio

a) *INFLUENCIA EN LA FISURACION*

Los esquemas de fisuración para situaciones de servicio, resultan semejantes en todos los casos de combinación de variables investigados.

b) *INFLUENCIA EN LA DEFORMABILIDAD*

La deformabilidad del elemento compuesto en condiciones de servicio es independiente, en la práctica, del estado y tratamiento de la unión. La investigación confirma que el mecanismo movilizado de resistencia a rasante corresponde al que denominamos como mecanismo de adhesión.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente artículo es un resumen de la Tesis "ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL COMPORTAMIENTO DE JUNTAS ENTRE HORMIGONES "IN SITU" Y PREFABRICADOS CON DISTINTOS TRATAMIENTOS EN LA UNION" leída en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid y que fue realizada por el Autor y dirigida por el Profesor J. Calavera Dr. Ingeniero de Caminos, Catedrático de Edificación y Prefabricación en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la U.P.M.

Los ensayos fueron realizados en el Laboratorio Central del Instituto Técnico de Materiales y Construcciones (INTEMAC), por el Departamento de Ensayos Estructurales con la colaboración del Profesor J. Fernández Gómez, Dr. Ingeniero de Caminos.

A todos los citados quiero expresar mi agradecimiento por su inestimable ayuda.

BIBLIOGRAFIA

1 - ACI. *"Building code requirements for reinforced concrete"*. ACI-318/83. American Concrete Institute, 1983.

2 - BS.8110 *"Structural use of concrete"*. Part 1, 1985, BSI.

3 - Calavera, J., González Valle E., Delibes A., Izquierdo J.M. *"Ensayo de corte en la superficie de contacto entre hormigones de piezas prefabricadas y hormigones vertidos in situ"*. Hormigón y Acero n° 119-120, 1976.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CUADRO XIV

Influencia de la rugosidad en la resistancia a rasante

Viga Tipo	Rugosidad (mm)	τ_{IM}* (kp/cm²)	Rugosidad (mm)	τ_{IM}* (kp/cm²)	Rugosidad (mm)	τ_{IM}* (kp/cm²)
NHV	1,24	16,2	1,45	14,8	1,97	16,1
NEV	1,66	13,3				
CHV	2,05	18,8	2,48	17,3		
CEV	2,91	15,8				
NHP	4,11	16,7	4,37	16,2	4,67	16,4
NEP	4,64	15,7				
CHP	4,96	18,3	4,97	16,6		
CEP	4,97	14,8				

* τ_{IM}: Valores medios.

4 - Calavera, J. *"Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación"*. 4ª edición. INTEMAC, Madrid. 1989.

5 - Dardare, J. *"Etude des contraintes de cisaillement-glissement dans les éléments composites soumis a la flexión"*. Centre d'Etudes et de Recherches de L'Industrie du Béton Manufacturé. Monographie 1, Juin 1970.

6 - EH-82. *"Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado"*. Comisión Permanente del Hormigón, Madrid, 1982.

7 - FIP, Guide to Good Practice on *"Shear at the interface of precast and in situ concrete"*. Fédération International pour la Précontrainte, 1982.

8 - Gustavsson, K. *"Composite toppings by means in situ toppings. In view of the risks of bond failure due to poor execution and diferential shrinkage"*. CTH Göteborg 1977. Rapport 77/6.

9 - Hanson, N.W. *"Precast prestressed concrete bridges 2. Horizontal shear connections"*. Journal, PCA. Research and Development Laboratories, V.2, nº 2, May 1960.

10 - Mattock, A.H. and Hawkins, N.M. *"Shear transfer in reinforced concrete. Recent research"*. Journal of the PCI, March-April 1972.

11 - Régles BAEL/83. *"Régles Techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états-limites"*, 1983.

12 - Solas, A. *"Armaduras de cosido entre hormigones prefabricados y ejecutados in situ"*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1985.

RESUMEN

Las piezas compuestas, constituidas por una parte prefabricada y otra hormigonada in situ, comenzaron a ser investigadas hace más de 30 años, dado el interés que su utilización despertó, por tratarse de elementos semiindustrializados de gran campo de aplicación.

Han sido escasas las investigaciones sistemáticas de piezas con "Interfaces" sin armadura de cosido, que analicen los parámetros condicionados por la propia ejecución, aun cuando tales tipos de pieza son ampliamente utilizados en nuestro país en soluciones de forjados de edificación.

Para la investigación experimental hemos adoptado un determinado modelo de vigas, confirmando previamente su idoneidad mediante ensayos piloto sobre la influencia de la disposición de la carga. Como variables básicas de la investigación se han adoptado dos estados de saturación superficial, humedo (H) y encharcado (E); y dos sistemas de compactación, picado con barra (P) y vibración interna (V). Por último, adoptamos dos tratamientos de la unión, natural (N) y cepillada (C). Complementariamente seleccionamos dos nuevas variables de estado superficial de tratamiento de la "interface", peinada (P) y tampeada (T), así como un nuevo estado de humedad superficial desecando la superficie artificialmente (AD).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Las variables seleccionadas configuraron 11 combinaciones que condujeron a la fabricación y ensayo de 22 vigas, al adoptar dos ejemplares idénticos por grupo de variables.

Los ensayos fueron realizados en el Laboratorio del Instituto Técnico de Materiales y Construcciones, obteniéndose resultados sobre la resistencia rasante en agotamiento, los corrimientos relativos entre las dos partes de la pieza compuesta y las flechas alcanzadas en el centro del vano de viga, durante todo el proceso de carga. Previamente a la realización del ensayo, fueron muestreados y ensayados los materiales, tanto los constituyentes de los hormigones, como los propios hormigones y aceros para armaduras.

Los resultados de los ensayos han sido analizados para evaluar la influencia de los parámetros investigados, tanto en el comportamiento frente a estados límites de servicio, fisuración y deformaciones, como frente a los estados límites últimos condicionados por la investigación, que fueron los de rasante.

Como conclusiones básicas de la investigación se establecen, la nula dependencia de la resistencia a rasante con los procedimientos de compactación para la tipología de pieza ensayada, así como la nula influencia de la rugosidad y la inapreciable incidencia de los procesos de tratamiento de la unión, mediante peinado y tampeado con la técnica utilizada. Por el contrario, de la investigación se desprende un efecto positivo del cepillado de la unión frente al estado natural de hormigonado y subsiguiente compactación y negativo del encharcamiento frente a los estados de unión humedecida e incluso de "interface" artificialmente desecada.

Queda confirmada, asimismo, la extraordinaria rigidez de la unión en todos los casos, así como la inapreciable influencia de los parámetros investigados en el comportamiento de las piezas ensayadas frente a las características que condicionan su deformabilidad y esquemas de fisuración.

SUMMARY

Investigations into composite members made up partly of prefabricated concrete and partly of concrete in-situ, began some thirty years ago due to the interest that it aroused, being semi-industrialized elements of a wide range of usage.

There have been few systematic investigations into members with interfaces without connection reinforcement that analyze the parameters conditioned by its execution and this when such types of members are widely used in this country as buildings slabs.

For the experimental investigation we used a beam model, the suitability of which having been previously confirmed by pilot tests on the effects of load distribution. As basic variables of the investigation we adopted two states of superficial saturation wet (H) and flooded (E), two methods of consolidation, rod tamped (P) and internal vibration (V); finally we used two types of joint, natural (N) and brushed (C). In addition we selected two new variables of states of surface treatment to the interface, combed (P) and tamped (T) and a further state of surface humidity by artificially drying the surface (A D).

The selected variables made up 11 combinations which led to the fabrication and testing of 22 beams, using two identical models for each group of variables.

The tests were carried out in the laboratory of the "Instituto Técnico de Materiales y Construcciones" and results were obtained on the resistance of the shear at the interface under stress and relative sliding between the two parts of the composite members and deflection in the centre of the beam span, throughout the loading process. Prior to testing, the components of the concrete, the concrete itself and the steel for reinforcing were sampled and tested.

The results of the tests have been analysed in order to evaluate the influence of the parameters investigated both, under service limit states, cracking and deformation, and under ultimate limit states for the investigations that were shear at the interface.

The basic conclusions of the investigation show the complete lack of dependence of resistance to shear at the interface with the procedures of consolidation for the type of member tested, the null influence of roughness, the inappreciable influence of joint treatment be it combed or tamped. On the other hand the investigation shows the positive effect of the brushed joint as opposed to the natural state of concrete and subsequent consolidation and the negative effect of flooding as opposed to the states of wet joints including artificially drying interface.

The extraordinary rigidity of the joint was confirmed likewise in all cases as was the inappreciable influence of the parameters investigates in the performance of the members tested against characteristics that condition its deformability and cracking scheme.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

JORNADAS sobre TECNICAS DEL HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO EN CENTRALES NUCLEARES

EDITADO POR:

asociación técnica
española del pretensado

Precio del ejemplar: 3.000 ptas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Un modelo para el análisis de la transferencia tangencial de esfuerzos en vigas de hormigón armado reforzadas mediante bandas de acero encoladas

Alfonso del Río Bueno
Dr. Arquitecto, Colaborador Científico
del Instituto Eduardo Torroja
de la Construcción y del Cemento

Jesús Ortiz Herrera
Dr. Ingeniero de Caminos
Catedrático del Departamento de Estructuras
de Edificación de la E.T.S. de Arquitectura

1. INTRODUCCION

La necesidad de incremento de capacidad flectora en vigas de hormigón armado de edificación es un problema al que hay que hacer frente en múltiples situaciones de refuerzo de estructuras. Un sistema ampliamente utilizado para ello consiste en el encolado inferior de bandas de acero que actúan como armadura adicional frente a momentos flectores positivos.

Este sistema exige resolver satisfactoriamente, entre otros, los problemas de transferencia tangencial de esfuerzos entre viga original y banda de refuerzo, particularmente críticos en los extremos de ésta. De otro modo, resulta imposible la total movilización de la cuantía de refuerzo dispuesta, al producirse el colapso de la junta previamente a alcanzarse el límite elástico en el acero de la banda. Ello implica además un esquema cuasi-frágil de rotura en la viga reforzada, evidentemente no deseable, como han puesto de manifiesto algunos trabajos experimentales (1), (2).

En el presente trabajo se presenta un modelo analítico original, en relación con la transferencia tangencial de esfuerzos en vigas de hormigón armado reforzadas. El modelo se basa en la Teoría de Vigas Mixtas (3) y se encuentra desarrollado con mayor amplitud en la Tesis Doctoral realizada por el primero de los autores bajo la dirección del segundo (4). Asimismo, ha sido contrastado con algunos de los resultados experimentales disponibles en la literatura (1), (2), obteniéndose un acuerdo satisfactorio.

Como cuestión previa, se ofrecen ecuaciones constitutivas originales tensión tangencial-deslizamiento (τ /s), deducidas a partir de algunos de los trabajos teóricos y experimentales disponibles. En la parte final del trabajo se plantea un Modelo Simplificado, de fácil aplicación práctica, deducido a partir del amplio tratamiento de casos realizado con el Modelo Teórico General propuesto.

2. RELACIONES TENSO-DEFORMACIONALES EN JUNTAS HORMIGON-ACERO

El encolado de bandas de acero sobre elementos de hormigón se realiza, en general, utilizando adhesivos epoxídicos. En tales casos, siempre y cuando el espesor de éste sea reducido ($t < 1$ mm), el comportamiento tenso-deformacional de la junta o "interfase" resultante puede plantearse en términos de relación tensión tangencial local-deslizamiento local (τ /s).

Un acuerdo altamente satisfactorio con los resultados experimentales consultados (5), (6), se obtiene utilizando las siguientes expresiones:

- Rama Ascendente ($0 \leqslant s \leqslant s_m$):

$$\tau = \tau_{máx} \left[1 - \left[1 - \frac{s}{s_m}\right]^A\right]$$

- Rama Descendente ($s_m \leqslant s \leqslant s_u$):

$$\tau = \tau_{máx} \cdot e^{-B \cdot (s - s_m)^K}$$

Donde τ y s son, respectivamente, tensiones tangenciales y deslizamientos locales; $\tau_{máx}$ y s_m son la tensión y el deslizamiento en el máximo de la ley; s_u es el deslizamiento último o de agotamiento; y A, B y K son parámetros que permiten precisar el perfil de la curva.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Ambas ramas coinciden en el máximo de la ley con pendiente común e igual a cero (siempre que $K > 1$). Se evitan así discontinuidades y problemas de convergencia numérica. Los valores de $\tau_{máx}$, s_m, s_u, A, B y K más acordes con los resultados experimentales (1), (2), (5) y (6) para interfases hormigón-epoxi-acero correspondientes a vigas de hormigón reforzadas, resultan ser:

$$A = 2{,}00; \quad B = 0{,}006; \quad K = 1{,}05$$

$$50{,}0 \leqslant \tau \ (\mathrm{Kp/cm^2}) \leqslant 67{,}5$$

$$50{,}0 \leqslant \tau \ (\mu\mathrm{M}) \leqslant 62{,}5$$

$$s_m = 18\,\mu\mathrm{M}$$

Las curvas resultantes de aplicar tales valores pueden observarse en la Figura 1.

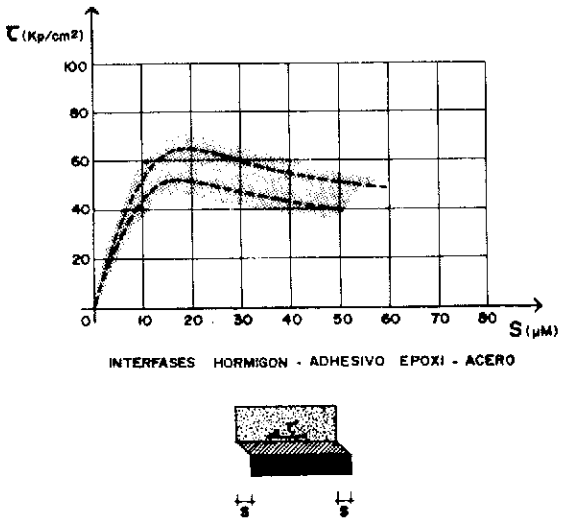


Fig. 1. Ecuación constitutiva propuesta.

Hay que señalar que los valores y leyes anteriores se obtienen para hormigones de cierta calidad ($f_{ck} > 150$ Kp/cm²), y siempre y cuando el ancho de la banda de refuerzo sea limitado. De otro modo, la resistencia a cortadura del hormigón original en las fibras inmediatas a la junta puede resultar crítica (1), (2), (4).

3. PRIMERA APROXIMACION AL PROBLEMA: SIMULACION DE ENSAYO "PULL-OUT"

Utilizando las ecuaciones constitutivas propuestas, puede efectuarse una primera aproximación al problema a partir de la simulación de un ensayo "pull-out", estableciendo las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones.

En efecto, considerando un elemento diferencial, la compatibilidad de deformaciones exige (Figura 2);

$$s' = \frac{ds}{dx} = \frac{du_1 + du_2}{dx} = \epsilon_1\,[N(x)] + \epsilon_2\,[N(x)]$$

y, a partir de las ecuaciones constitutivas de hormigón y acero pueden obtenerse:

$$\epsilon_1 = \epsilon_1\,[N(x)] \qquad \epsilon_2 = \epsilon_2\,[N(x)]$$

Si se deriva la ecuación diferencial inicial se tiene:

$$s'' = \frac{d^2 s}{dx^2} = \frac{d\epsilon_1}{dN} \cdot \frac{dN}{dx} + \frac{d\epsilon_2}{dN} \cdot \frac{dN}{dx}$$

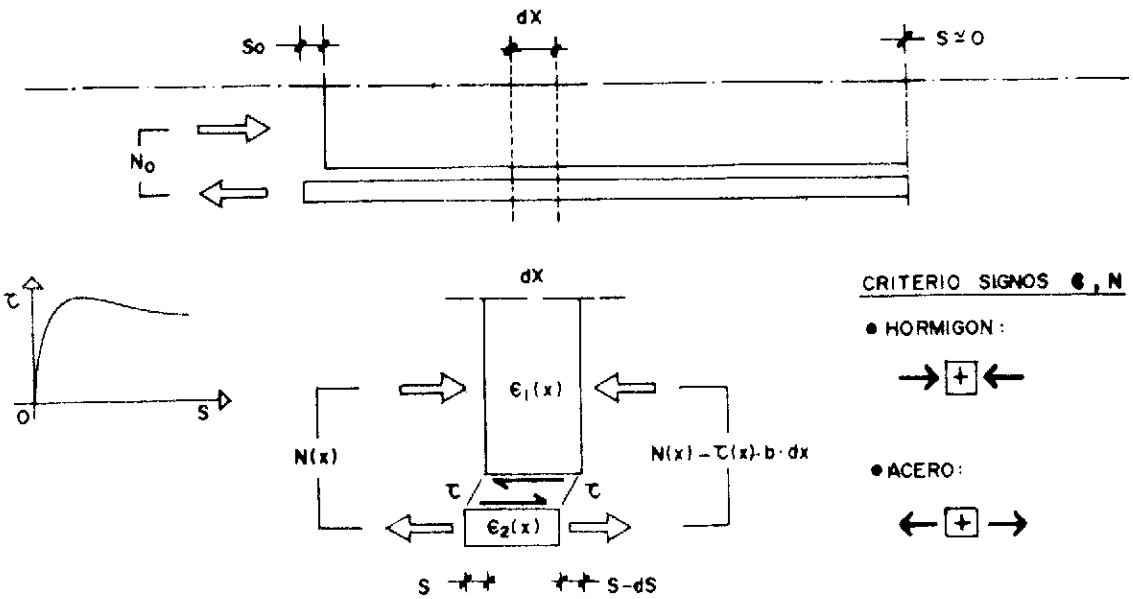


Fig. 2. Simulación ensayo "pull-out".

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

siendo condición necesaria para el equilibrio del elemento diferencial:

$$\frac{dN}{dx} = \tau(s) \cdot b_R$$

donde b_R es el ancho de la banda de refuerzo, coincidente con el área unitaria de adherencia.

Incorporando la anterior condición de equilibrio, la ecuación diferencial de segundo orden que caracteriza la transferencia tangencial de esfuerzos se transforma en:

$$s'' = \left[\frac{d\epsilon_1}{dx} + \frac{d\epsilon_2}{dx} \right] \cdot \tau(s) \cdot b_R$$

Sobre esta ecuación diferencial de segundo orden pueden imponerse las correspondientes dos condiciones de contorno:

1.– En el origen ($x = 0$):

Dado N_0, se conocen ϵ_{10}, ϵ_{20} y por tanto s'_0.

2.– En el infinito, o bien a una distancia $x = L_\infty$ suficientemente alejada:

$$s_\infty = 0 \equiv \epsilon_{1\infty} = \epsilon_{2\infty} = 0 \equiv N_\infty = 0$$

El tratamiento numérico informatizado de la ecuación diferencial deducida, (basado en su desarrollo en diferencias finitas con aproximación cuadrática), permite analizar de modo sistemático las situaciones de agotamiento de la interfase o junta, definidas por la condición extrema $s_0 = s_u$. Para tales situaciones últimas (Figura 3), pueden definirse dos variables principales:

1. Máximo Esfuerzo Normal Transferible (Relativo), definido según:

$$\frac{N_{Tmáx}}{N_{Ru}} = \frac{1}{N_{Ru}} \cdot \int_0^\infty \tau(x) \cdot b_R \cdot dx$$

2. Longitud de Transferencia Máxima, definida como aquélla para la que se ha transmitido el 99,9 por 100 del esfuerzo total que hay que transferir:

$$\int_0^{L_{Tmáx}} \tau(x) \cdot b_R \cdot dx = 0{,}999 \cdot \int_0^\infty \tau(x) \cdot b_R \cdot dx$$

De acuerdo con el tratamiento exhaustivo de casos realizado, ambas variables principales son esencialmente función de las características de la interfase ($\tau_{máx}$, s_u) y del espesor de la banda de refuerzo, e_R. Los resultados obtenidos en tal sentido (4) se observan en la Figura 4. De ellos se deduce que prácticamente para cualquier espesor de los usuales en estas actuaciones, el arrancamiento de la banda en las condiciones consideradas es previo a su agotamiento a tracción, al ser $N_{Tmáx}/N_{Ru} < 1$. Ello evidencia el alcance y la importancia de los problemas de transferencia tangencial de esfuerzos.

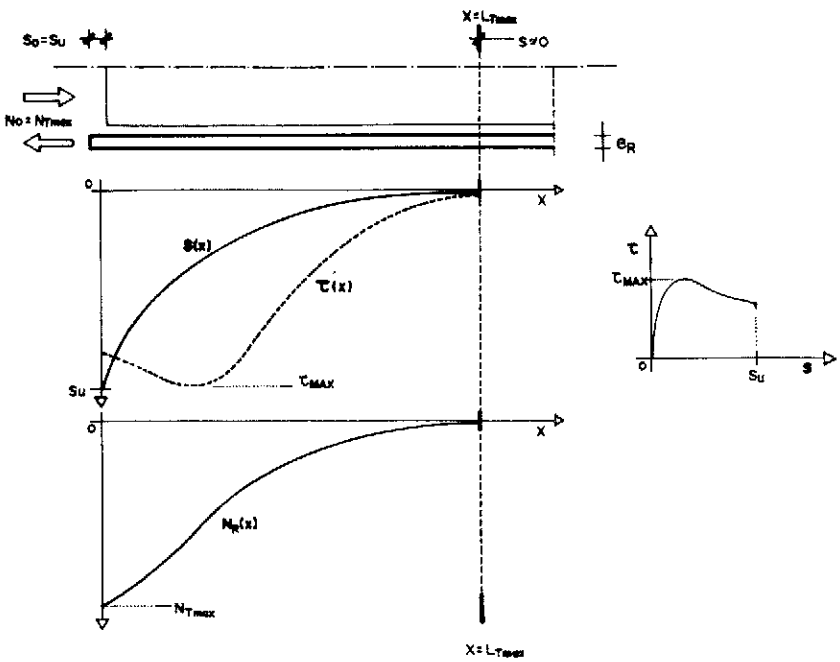
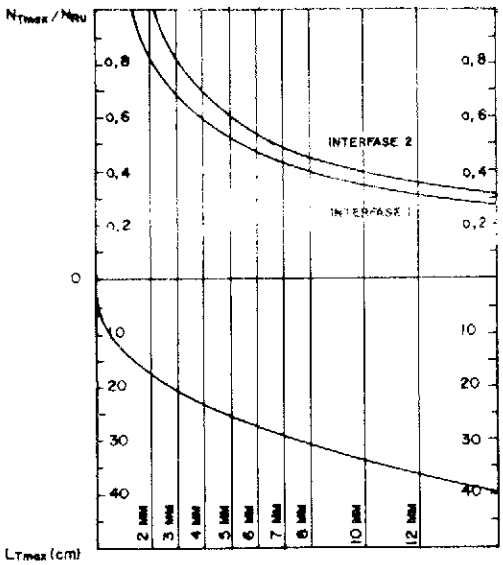


Fig. 3. Situación de Agotamiento de la junta.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



INTERFASE 1 τ_{max} = 50 k/cm² S_u = 50 μM		e_R (MM)	INTERFASE 2 τ_{max} = 67 k/cm² S_u = 60 μM	
N_{Tmax}/N_{RU}	L_{Tmax} (CM)		N_{Tmax}/N_{RU}	L_{Tmax} (CM)
0,85	18	2	1,00	17
0,68	21	3	0,80	21
0,59	24	4	0,68	23
0,52	26	5	0,61	26
0,47	29	6	0,54	28
0,43	31	7	0,50	30
0,40	33	8	0,46	32
0,36	36	10	0,41	35
0,31	37	12	0,36	37
0,27	39	15	0,31	39

Fig. 4. Transferencia de esfuerzos para diferentes espesores de banda.

4. TRANSFERENCIA TANGENCIAL DE ESFUERZOS EN VIGAS DE HORMIGON ARMADO REFORZADAS A FLEXION MEDIANTE BANDAS DE ACERO ENCOLADAS

Las conclusiones obtenidas de la simulación del ensayo "pull-out", solamente proporcionan un orden de magnitud del problema, al tiempo que ponen de manifiesto su importancia. Sin embargo, esta primera aproximación no permite, en principio, precisar las posibilidades de transferencia tangencial de esfuerzos a través de juntas correspondientes a vigas de hormigón armado reforzadas y sometidas a flexión.

Un modelo en tal sentido puede plantearse a partir de la Teoría de Vigas Mixtas, estableciendo las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones. En efecto, transformando el sistema planteado en (3), pueden definirse las siguientes cinco condiciones (Figura 5):

1) $\dfrac{ds}{dx} = \epsilon_R - \epsilon_B = \epsilon_R - (z_R - z_N) \cdot \Phi_0$

2) $\dfrac{dN_R}{dx} = R = b_R \cdot \tau(s)$

3) $N_R = e_R \cdot b_R \cdot E_S \cdot \epsilon_R$ (con linealidad en el acero).

4) $N_R = N_0 (Z_N, \Phi_0; Z_{Np}, \Phi_{0p})$

5) $M(x) = M_0 (z_N, \Phi_0; z_{Np}, \Phi_{0p})$

Expresiones en las que:

x es la coordenada de la sección considerada.

s es el deslizamiento en la interfase o junta.

τ es la tensión tangencial en la interfase, $\tau = \tau(s)$.

N_R es el esfuerzo normal en la banda de refuerzo.

ϵ_R es la deformación unitaria en la banda de refuerzo.

z_R es la cota del refuerzo.

z_{Np} y Φ_{0p} definen las deformaciones en la sección original, previas a la introducción del refuerzo.

z_N y Φ_0 definen las deformaciones en la sección original, posteriores a la introducción del refuerzo.

M(x) es el momento flector actuante en la sección.

M_0 es el momento resultante, referido al centro del refuerzo.

N_0 es el esfuerzo normal resultante en la sección original.

E_S es el módulo de elasticidad del acero.

Consecuentemente, estando definida la ley de momentos flectores a lo largo de la viga, en cada sección x puede plantearse un sistema de cinco ecuaciones en el que existen las siguientes cinco incógnitas:

s (x), deslizamiento en la interfase.

N_R (x), esfuerzo normal en la banda de refuerzo.

ϵ_R (x), deformación unitaria en la banda de refuerzo.

z_N (x), profundidad de la fibra neutra.

Φ_0 (x), curvatura de la sección original de H.A.

Las dos primeras condiciones del sistema planteado, ecuaciones diferenciales de primer orden, pueden ser desarrolladas en diferencias finitas, obteniéndose sendas expresiones recurrentes que, con aproximación lineal, resultan ser:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

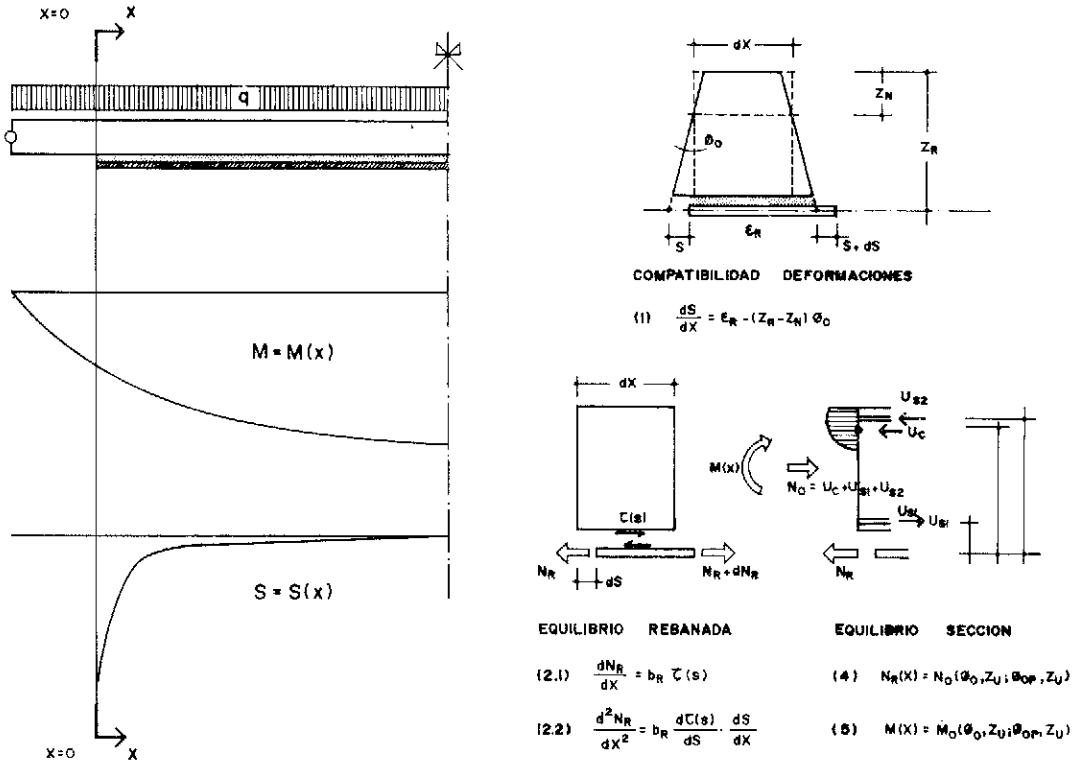


Fig. 5. Fundamentos del Modelo propuesto.

1) $s_i = s_{i-1} + [\epsilon_{Ri} - (z_R - z_{Ni}) \cdot \Phi_{0i}] \cdot \delta x$

2) $N_{Ri} = N_{Ri-1} + [b_R \cdot \tau(s_i)] \cdot \delta x$

La aplicación de las anteriores expresiones exige conocer el valor de s y N_R en un punto, para desde él plantear en los restantes el sistema definido. Tales valores son obviamente equivalentes a las constantes de integración de las ecuaciones diferenciales originales y para su definición se dispone de las siguientes dos condiciones de contorno:

1ª Condición: En el extremo de la banda ($x = x_{R0}$):

$$N_R(x_{R0}) = 0 \equiv \epsilon_{R0}(x_{R0}) = 0$$

2ª Condición: En un punto de cortante nulo suficientemente alejado del extremo de la banda ($x = x_{T0}$):

$$s(x_{T0}) = 0$$

Adoptando como punto de referencia el extremo de la banda, la primera condición de contorno proporciona directamente la constante de integración N_{R0}, siendo $N_{R0} = 0$. La segunda condición define el deslizamiento s en un punto diferente al de referencia, x_{T0}. En general, salvo situaciones excesivamente simplificadas y poco realistas, no puede definirse una expresión explícita del deslizamiento en el origen, s_0, en función del deslizamiento conocido, $s(x_{T0})$, por lo que resulta necesario utilizar un método numérico de aproximaciones sucesivas para llegar a precisar el valor del deslizamiento s_0 en el origen, a partir de la segunda condición de contorno.

Por otra parte, la resolución rigurosa del sistema planteado, desarrollando en profundidad las relaciones solicitación-deformación en la sección original de hormigón armado, presenta el inconveniente de no poder expresar de modo explícito los parámetros de deformación de la sección original, z_N, Φ_0, en función de las solicitaciones, N_0, M_0. Ello implica la necesidad de establecer un nuevo proceso iterativo, además del que exige la aplicación de la segunda condición de contorno.

Para resolver este último problema, pueden plantearse las dos siguientes simplificaciones que facilitan considerablemente el tratamiento numérico del modelo:

1) Adopción de un modelo de comportamiento lineal en el hormigón, en base a un módulo de elasticidad secante.

2) Idealización de la sección de la viga original de hormigón armado a la sección equivalente fisurada.

Debe señalarse que el alcance de las anteriores simplificaciones, en relación con el problema considerado, resulta muy limitado. Ello se debe a que, como se confirmará posteriormente, el máximo

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

volumen de transferencia se concentra en los extremos de la banda, coincidiendo así con zonas de flexión reducida.

Bajo las simplificaciones anteriores, se ha procedido al tratamiento numérico informatizado del modelo planteado, mediante el desarrollo del Programa de Ordenador RASANTE (4). Este Programa fue inicialmente aplicado en la simulación de ensayos relativos al problema objeto de estudio, suficientemente documentados en la literatura (1), (2).

El modelo desarrollado detectó todos los casos de los ensayos de referencia en los que la causa determinante del fallo era el arrancamiento de la banda. Asimismo, tal y como se aprecia en las Figuras 6 y 7, el acuerdo existente entre el Modelo Teórico propuesto y los resultados experimentales considerados resulta bastante satisfactorio.

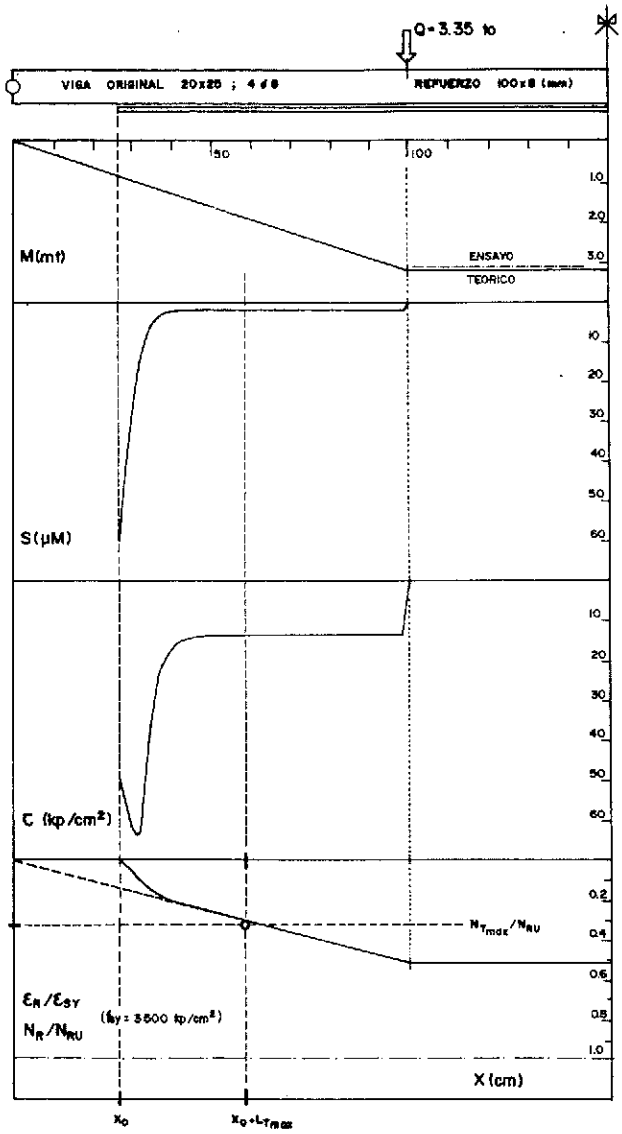


Fig. 7.

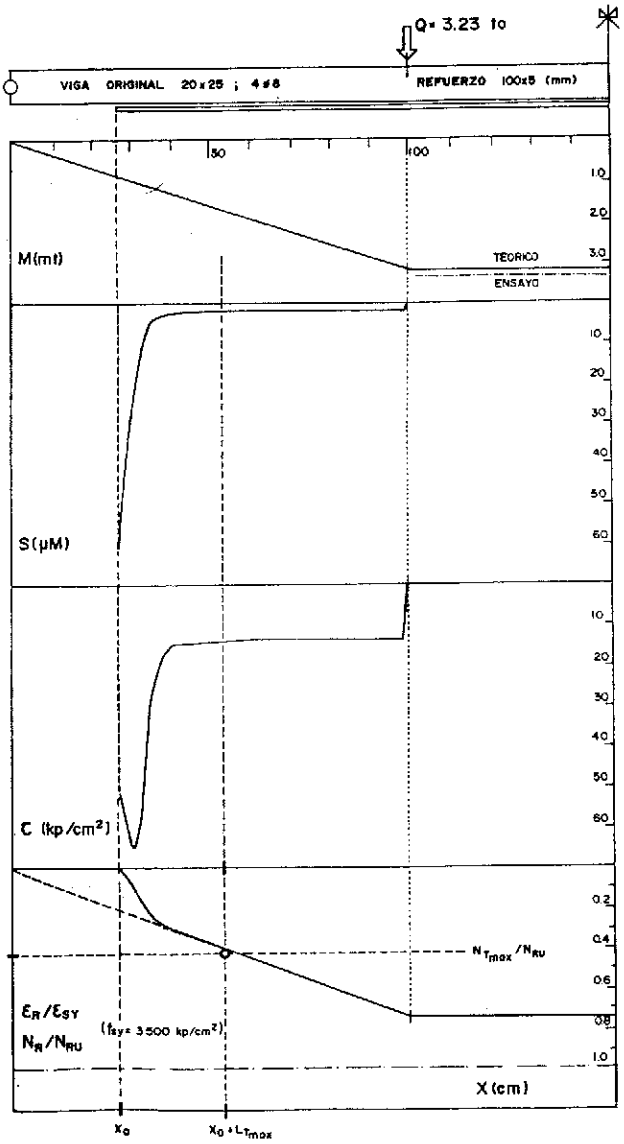


Fig. 6.

5. CONCLUSIONES: MODELO SIMPLIFICADO DE COMPROBACION DE TRANSFERENCIA

Más allá del contraste experimental antes señalado, el Modelo y Programa desarrollados han sido aplicados en múltiples configuraciones correspondientes a vigas de hormigón armado reforzadas mediante el sistema considerado. Se han estudiado tantas vigas originales "de canto" como "planas", reforzadas con bandas de diferentes espesores y secciones.

De modo especial se han analizado aquellas situaciones límite en las que el agotamiento de la junta coincide con la plastificación de la banda. En las Figuras 8 a 13, se ofrecen las distribuciones de esfuerzos en viga original y refuerzo, así como de deslizamientos y tensiones en la junta, correspondientes a los más significativos de entre tales casos límite.

Analizando detenidamente los resultados obtenidos, es posible establecer una serie de conclusiones de interés. Las principales de ellas son las siguientes:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

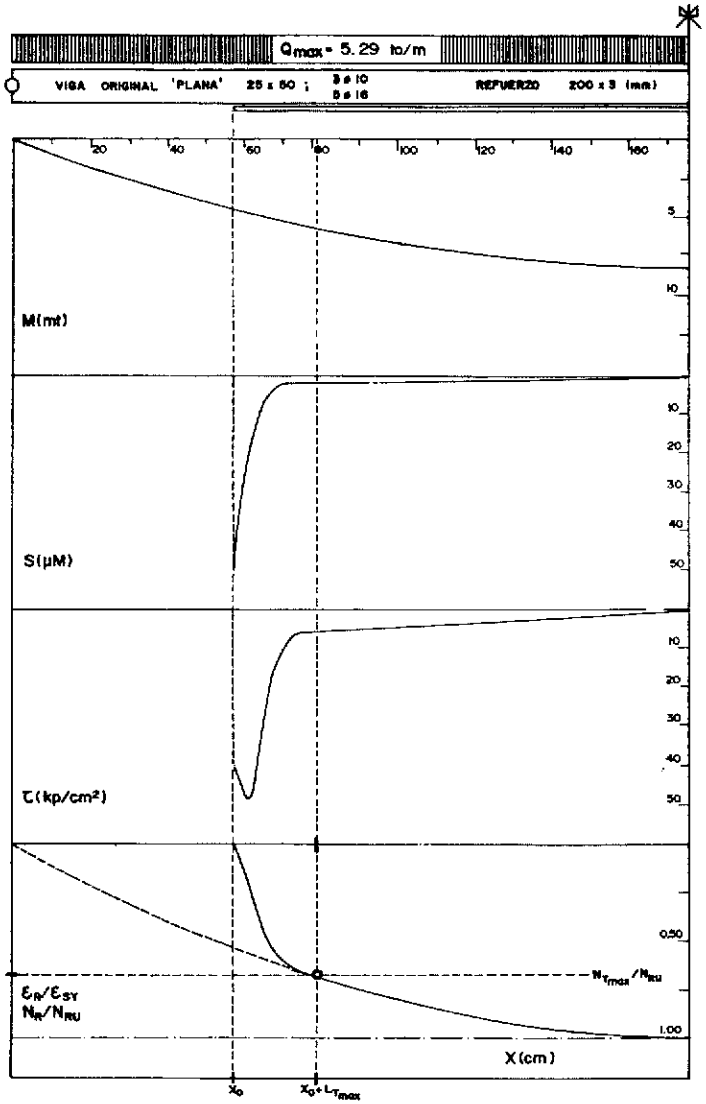


Fig. 8.

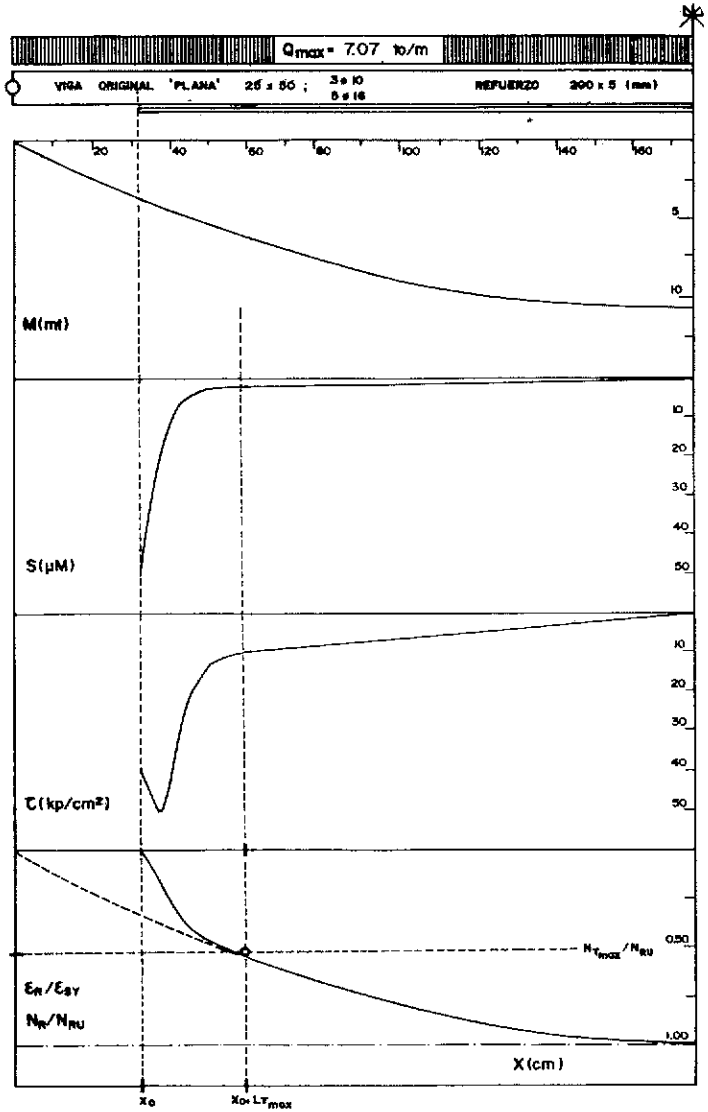


Fig. 9.

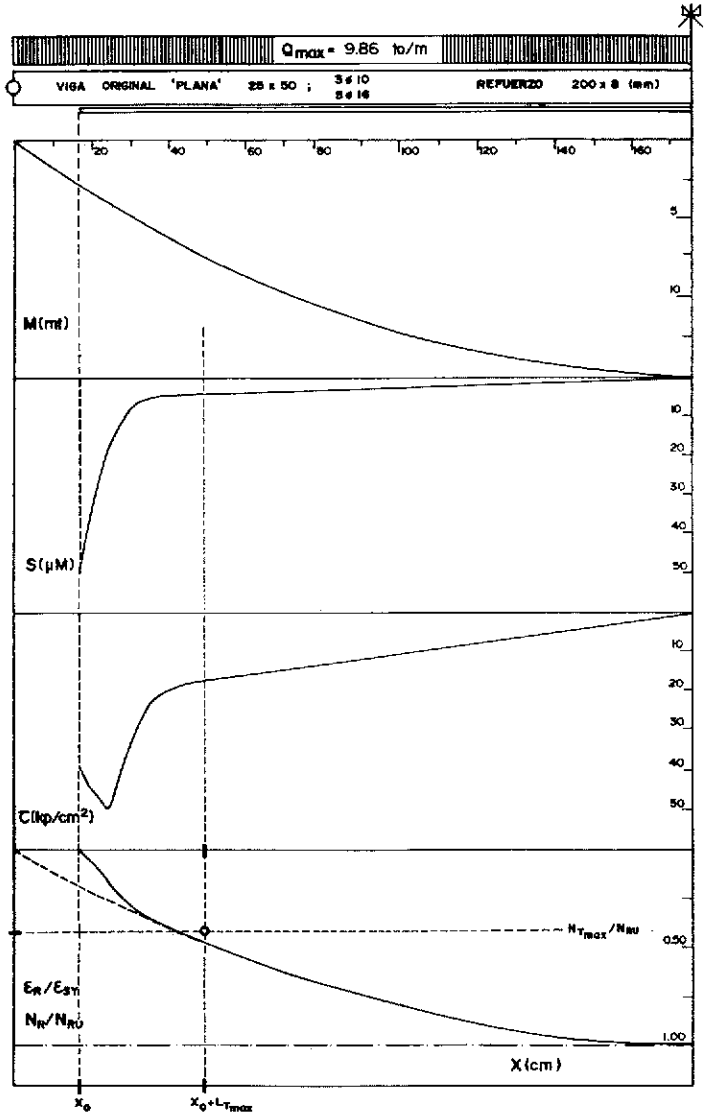


Fig. 10.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

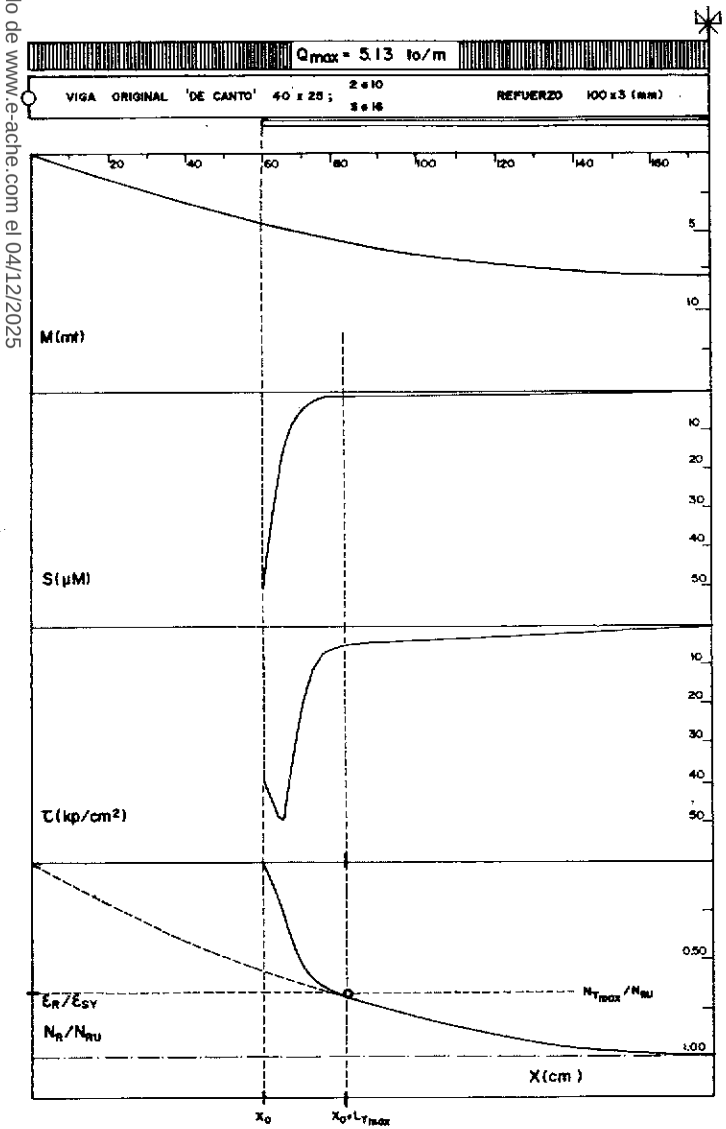


Fig. 11.

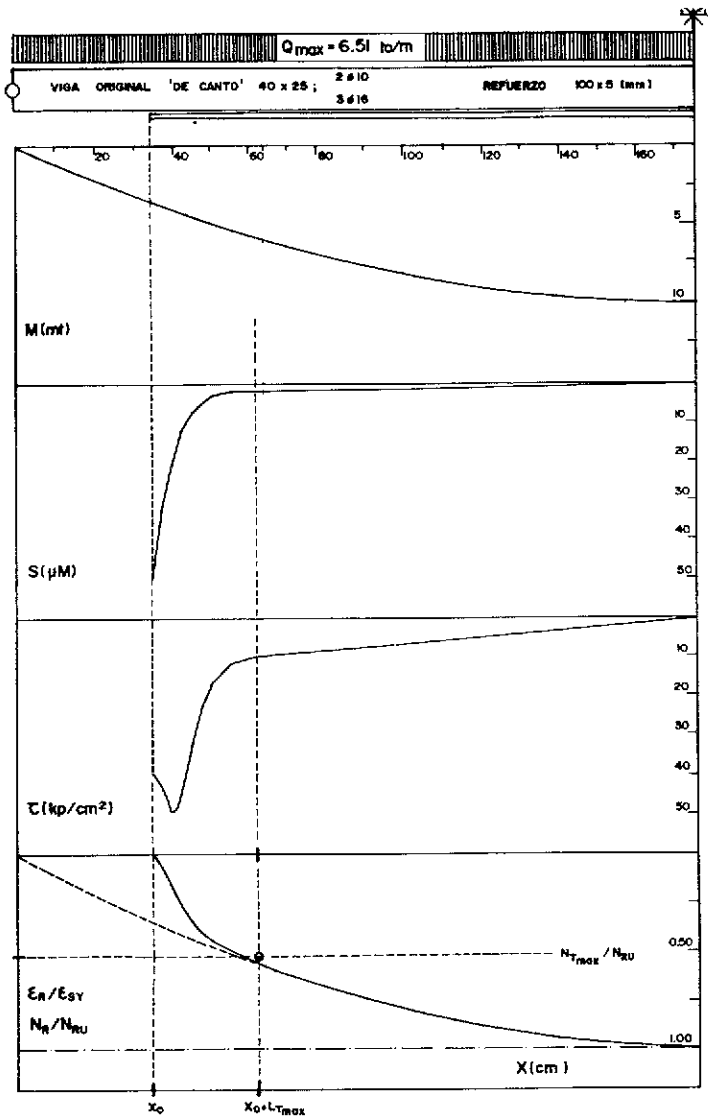


Fig. 12.

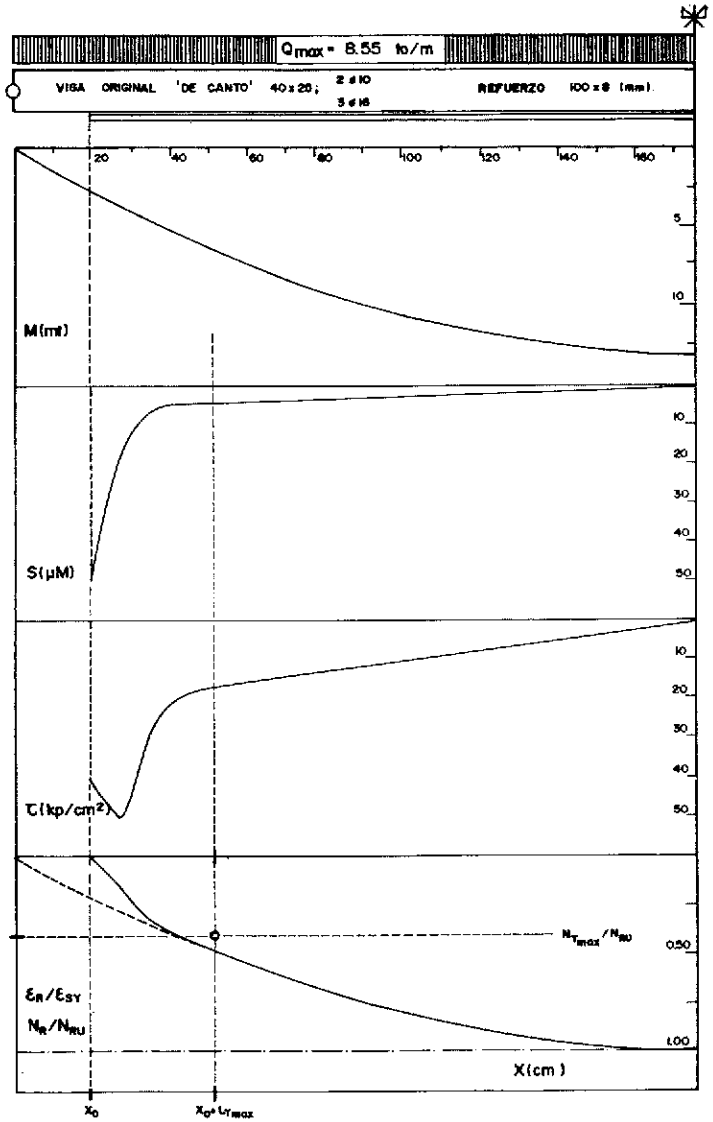


Fig. 13.

1. La transferencia tangencial de esfuerzos a través de la junta de adherencia, se concentra en zonas reducidas, localizadas en los extremos de la banda. Tales zonas pueden denominarse de transferencia máxima. Superadas estas zonas, se entra en otra que cabe calificar como de régimen establecido, caracterizada por deslizamientos y tensiones en la interfase reducidos, cuya distribución es sensiblemente coincidente con la que se deduciría de un análisis en base a modelos "convencionales", admitiendo interacción completa en las secciones.

2. En situación de agotamiento de la interfase, las posibilidades últimas de transmisión tangencial de esfuerzos dentro de la zona de máxima transferencia son sensiblemente independientes de la distribución de deslizamientos y tensiones en la zona de régimen establecido (salvo piezas críticas a cortante).

3. En situación de agotamiento de la interfase, la extensión de la zona de transferencia máxima, así como el volumen de esfuerzo transferido dentro de ella (por unidad de ancho), dependen casi exclusivamente de las características de la interfase y del espesor de la banda de refuerzo. La influencia de la configuración de la viga original así como del esquema de carga actuante resulta muy limitada.

Asimismo, en estas circunstancias, para una interfase y espesor de refuerzo dados, tanto la extensión de la zona de máxima transferencia como el volumen de esfuerzo en ella transferido (por unidad de ancho), se corresponden con sus equivalentes obtenidos en la simulación del ensayo "pull-out". Es decir:

–La extensión de la zona de transferencia máxima coincide con la correspondiente Longitud de Transferencia Máxima, $L_{Tmáx}$.

–El volumen de esfuerzo transferido en la zona de transferencia máxima es análogo al Máximo Esfuerzo Normal Transferible, $N_{Tmáx}$, correspondiente a la interfase, espesor y ancho de banda considerados.

La consideración de las conclusiones anteriores permite definir un Modelo Simplificado capaz de predecir si la extensión o longitud de la banda de refuerzo permite o no la plastificación de la misma previamente al agotamiento de la junta.

Para su aplicación debe, lógicamente, haberse (pre)dimensionado la sección de la banda en función de las necesidades de incremento de capacidad flectora y de la resistencia residual de la viga original (4), (7). Efectuado este (pre)dimensionado de sección, es necesaria una doble comprobación en cuanto a la extensión longitudinal de la banda se refiere (Figura 14):

1. Análisis como armadura "convencional".

Independientemente de la comprobación específica de transferencia que sigue, la banda de refuerzo es, de hecho, una armadura más y como tal ha de comprobarse.

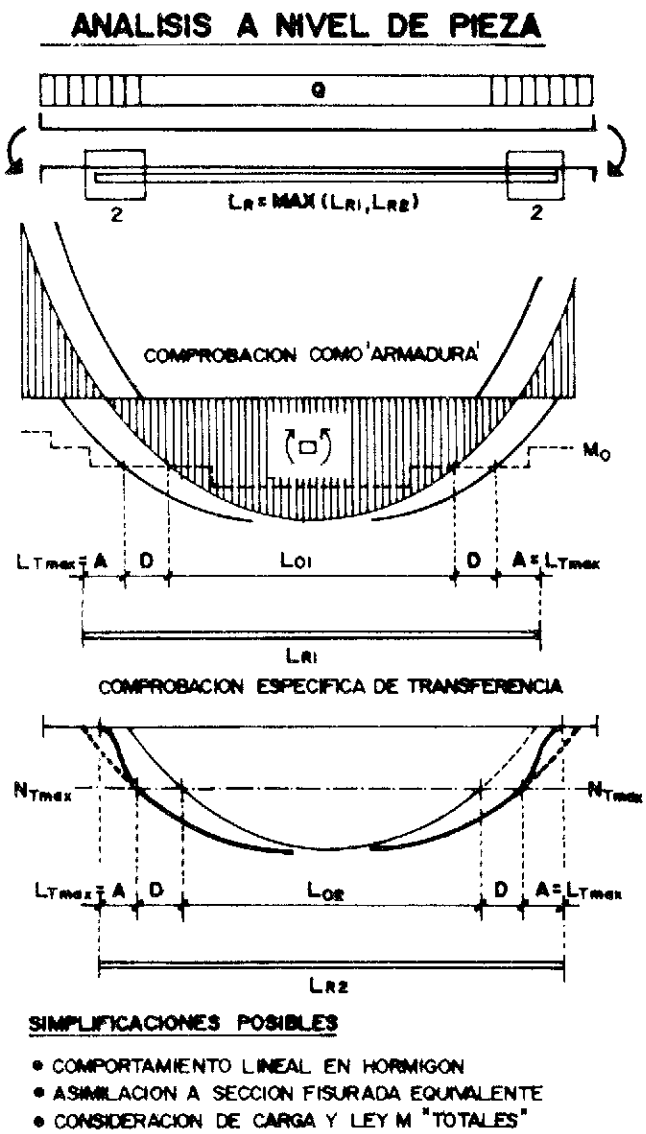


Fig. 14. Modelo simplificado de comprobación de transferencia.

Consecuentemente habrá de verificarse:

$$L_{R1} \geqslant L_{01} + D + A$$

siendo:

L_{R1} la longitud total de la banda en base a su consideración como armadura "convencional".

L_{01} la longitud en que la banda es estrictamente necesaria a partir de la ley de momentos que tiene que resistir la viga reforzada, en función de la capacidad flectora residual de la viga original y del nivel de solicitación existente en el instante de refuerzo.

D el término de decalaje, según los modelos usuales.

A el término de anclaje que, de acuerdo con lo establecido en la simulación de ensayo "pull-out", será igual a la Longitud de Transferencia Máxima correspondiente al espesor e interfase considerados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

2. Análisis o comprobación específica de transferencia

Conforme a lo establecido en la simulación del ensayo "pull-out", para espesores superiores a 2 mm no es posible garantizar el anclaje de la banda. Ello exige establecer una comprobación específica de transferencia.

De acuerdo con las conclusiones obtenidas del Modelo Teórico General propuesto, tal comprobación puede efectuarse a partir de la distribución de esfuerzos normales que correspondería a la banda de refuerzo en el caso de que ésta pudiera anclarse perfectamente en los extremos de la viga. Tal distribución será sensiblemente proporcional a la ley de momentos flectores correspondiente a cargas de actuación posterior a la introducción del refuerzo (siempre y cuando la viga original presente sección esencialmente constante en geometría y armado y se prescinda de las variaciones del brazo mecánico). De acuerdo con esta ley, N_R (x), la longitud de la banda de refuerzo habrá de ser tal que a una distancia del extremo igual a la Longitud de Transferencia Máxima correspondiente, el volumen de esfuerzo que hay que transferir no supere el Máximo Esfuerzo Normal Transferible. Es decir:

$$L_{R2} \geqslant L_{02} + D + L_{Tmáx}$$

siendo:

L_{R2} la longitud total de la banda en base a la comprobación específica de transferencia.

L_{02} la longitud de la banda en la que el esfuerzo normal en la misma supera al Máximo Esfuerzo Normal Transferible, $N_{Tmáx}$, correspondiente al espesor e interfase considerados.

D el término de anclaje, según los modelos usuales.

$L_{Tmáx}$ la longitud de Transferencia Máxima correspondiente al espesor de refuerzo e interfase considerados.

Evidentemente la longitud final de la banda habrá de ser igual o superior a las obtenidas en cada uha de las comprobaciones antes expuestas.

Finalmente, debe indicarse que ambas comprobaciones se simplifican notablemente si a efectos exclusivamente de determinar la extensión o longitud de la banda se supone que la viga original se encuentra perfectamente descargada en el instante de refuerzo. Tal suposición resulta evidentemente "conservadora" en términos de comprobación de interfase, ya que el trabajo tangencial de la misma, en el caso de no existir descarga total, resulta inferior al considerado.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) FERNANDEZ CANOVAS, M. (1985): Refuerzo de elementos estructurales de hormigón armado mediante encolado de bandas de acero con adhesivos. I Congrès de Patologia a l'Edificació. C.O.A.C. Barcelona.

(2) FERNANDEZ CANOVAS, M. (1985): Refuerzo de elementos estructurales mediante encolado de bandas de acero con resinas epoxídicas. Monografías del I.E.T. c.c. nos. 382 y 383. Madrid.

(3) MARTINEZ CALZON, J. y ORTIZ HERRERA, J. (1978): Construcción mixta hormigón-acero. Editorial Rueda, Madrid.

(4) DEL RIO BUENO, A. (1987): Aportaciones al refuerzo de estructuras de hormigón armado de edificación. Tesis Doctoral. E.T.S. Arquitectura, Madrid.

(5) LADNER, C. y WEBER (1981): Geklebte Benwehrung in Stahlbetonbau. E,M.P.A., Dübendorf.

(6) LADNER, M. (1983): Reinforced Concrete Members with Subsequently Bonded Steel Sheets. IABSE Reports. Vol. 46.

(7) DEL RIO BUENO A. y ORTIZ HERRERA J. (1988): Análisis de secciones de hormigón armado reforzadas. Monografía del I.E.T. c.c. n° 395.

RESUMEN

El estudio de los mecanismos de transferencia entre elementos existentes y de refuerzo, resulta fundamental en las actuaciones de intervención sobre estructuras existentes.

En este trabajo, se presenta un modelo teórico para el análisis de la transferencia tangencial de esfuerzos a través de juntas o interfases correspondientes a vigas de hormigón armado reforzadas mediante bandas de acero encoladas y sometidas a flexión. Se basa en la teoría de vigas mixtas y ha sido implementado con el correspondiente programa de ordenador.

Como cuestión previa se formulan ecuaciones constitutivas correspondientes a interfases hormigón-acero mediante adhesivos epoxi. Finalmente, se propone un modelo simplificado aplicable en el diseño y/o comprobación de este tipo de elementos reforzados.

SUMMARY

The verification of load transfer mechanisms from the existing elements to the additional 'reinforcing' materials is a fundamental requisite in the design of interventions on old structures.

In this work, a theoretical model for the analysis of the transverse load transfer through interfaces corresponding to R.C. beams strengthened by means of glued steel sheets and submitted to bending is proposed. It is based in the theory of composite girders, and has been completed with the corresponding computer program.

At first, constitutive laws corresponding to epoxi concrete to steel interfaces are formulated. Finally, a Simplified Model for re-design of these type of strengthened structural elements is proposed.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Cuarenta años de la ATEP

Alfredo Páez
Dr. Ingeniero de Caminos C. y P.
Profesor Emérito
E.T.S. Ing. Caminos de Santander

1. ANTECEDENTES

En estos días se cumple el cuadragésimo aniversario de nuestra Asociación. Como tengo cierta aversión a las siglas por muy cómodas que sean a la hora de escribir o de citarlas, prefiero hablar de "nuestra Asociación" en vez de la ATEP. Dos razones me inclinan hacia esta expresión: la primera es la de que, en un principio, se tituló "Asociación Española del Hormigón Pretensado", y la segunda porque, como cronista, entiendo que lo más interesante de lo ocurrido en los últimos 40 años, es destacar los cambios y evolución operados en el conocimiento que, todos nosotros, tenemos acerca de los conceptos y particularidades de la técnica del pretensado. Intento, así, contar con entusiasmo los éxitos de todos y, como no, las preocupaciones, las dudas y las vacilaciones, motivadas por nuestro quehacer común. Si así lo hago en este repaso de lo sucedido, es con el propósito de extraer las jugosas enseñanzas que siempre nos brinda la experiencia de un pasado. Pretendo, no sé si lo conseguiré, justificar las decisiones tomadas por aquellos que nos precedieron en un ayer, tan lejano, que hoy parece pertenecer a la historia de unos intrépidos pioneros.

Pero para comprender la conducta de aquellos hombres y sus problemas que hoy parecen ingenuos, preciso es describir, siquiera a modo de sucinto recuerdo, la situación de nuestro país en el marco de una Europa, recelosa unas veces, comprensiva y amable en otras, especialmente en el estrecho círculo de nuestros colegas extranjeros. Dos mundos separados por desavenencias políticas, pero entrañablemente unidos en una común ilusión:

Una nueva forma de construir.

Para Freyssinet, el pretensado es una idea que desborda la utilización de los materiales, para transformarse en un nuevo modo de diseñar, incluso estructuras metálicas. Pero la razón del desarrollo de una técnica, no se justifica con la simple cita de unos nombres, ni se perfila con los estatutos de una organización. Como en todo proceso histórico, es la evolución del pensamiento humano el mecanismo impulsor de ese desarrollo.

Sin embargo, y a diferencia con lo que le ocurrió al inventor del hormigón armado, Freyssinet sabe, desde el principio, lo que había descubierto. El mismo título de su trabajo publicado en Enero de 1936 lo confirma:

"Una revolución en la técnica del hormigón".

2. LOS PRIMEROS PASOS

La Segunda Guerra Mundial, retarda la expansión de la "Nueva Técnica" para acelerarla después, cuando se firma la paz. Mientras que en España se funda la Dirección General de Regiones Devastadas, se crean, en Europa, los Ministerios de la Reconstrucción. Materialmente destrozada la infraestructura de nuestro país, la década de los años 40 es una penosa reconstrucción de hogares y fábricas, con el agravante del cerco establecido por los Aliados en torno a nuestras costas y fronteras.

Faltan medios. El clima exterior nos es hostil, y la economía nacional está quebrantada.

En estas condiciones, y dentro del campo específico de la construcción, la escasez de una materia prima tan importante como el acero, hace que se precise recurrir a las más atrevidas solucio-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

nes. Los puentes se construyen apoyando el tablero sobre bóvedas de hormigón en masa, llegando a alcanzarse vanos superiores a los límites aconsejables. La edificación, como lógica consecuencia, tiene que prescindir de los perfiles laminados, tan en boga en años anteriores. Las fábricas de cemento trabajan a tope. Las viguetas de hormigón sustituyen a las metálicas, y se prima el empleo de los aceros especiales como armaduras de vigas y viguetas. Mientras unos fabricantes suplen las barras de acero ordinario por otras retorcidas en frío para aumentar el límite elástico, los más osados e innovadores se lanzan, sin apenas información, a la ejecución de viguetas pretensadas.

El momento es propicio; la demanda es muy fuerte y la garantía de no fisuración bajo las cargas previstas como máximas de servicio, es atrayente por la sencillez de un ensayo que ni supone la destrucción de la pieza, ni siquiera su deterioro. Los cables que se destinan para otros menesteres (ascensores, grúas y aparejos marineros), se destrenzan para obtener unos alambres que, por trefilación, alcanzan altas resistencias mecánicas y cuyo coste, a igualdad de esfuerzo resistido, es menor que el de los aceros, tanto ordinarios como especiales.

Pero no basta con que las armaduras sean de alta calidad, si el hormigón no lo es. Así ocurre que, por desconocimiento unas veces, por premuras de ejecución en otras, y por defectos de dosificación en las más, las armaduras, al desbloquearse en los extremos, deslizan dentro del hormigón, efecto que se agudiza cuando el destesado es repentino o los alambres se cortan con soplete.

Entiendo que, para ilustrar el ambiente de aquella época, lo mejor es presentar la rancia diapositiva, en blanco y negro, de la figura 1. La escena no precisa de otro comentario que el de advertir que la fotografía está sacada de una revista técnica europea de aquel decenio de 1940 a 1950. El tono, gris obscuro de la vigueta, hace pensar en el posible empleo de un cemento aluminoso, conglomerante entonces muy utilizado por su resistencia y rapidez de fraguado, y que, posteriormente, se vería postergado tras una acalorada polémica entre partidarios y detractores.

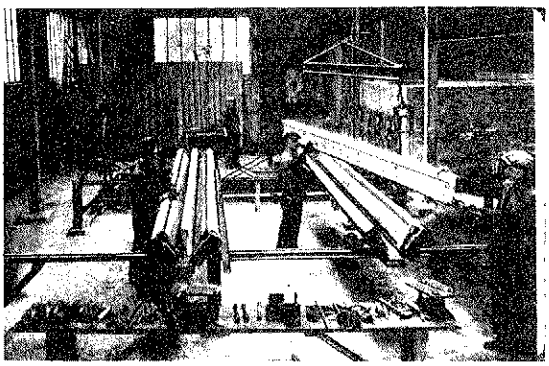


Fig. 1

La figura 2 expresa la rápida evolución de la industria de la prefabricación en Alemania. Según puede apreciarse, a fines de los años 40, la ejecución de las traviesas para el ferrocarril, se realizaba ya según líneas de producción. Lo sorprendente es la figura 3. En aquella época los fabricantes ignoraban los problemas que se derivan de un corte con soplete de los alambres que componen la armadura activa.

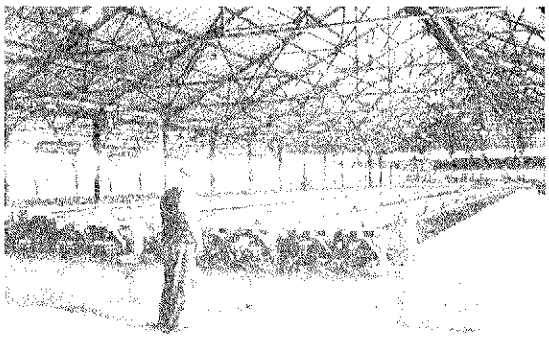


Fig.2

Fig.3

En los comienzos, los errores son aún más disculpables.

En la búsqueda de contrastes entre lo que se construye fuera y lo que se hace dentro, me ha asombrado encontrar, en mi archivo fotográfico, las diapositivas 4 y 5, ambas facilitadas por uno de nuestros asociados. No son recientes. Pertenecen a la década de los años 50, cuando todavía no habían aparecido las transparencias en color. Estas viguetas en cajón, cuya luz supera los 10 m, son poco habituales más allá de nuestras fronteras. Si han sido seleccionadas es para rendir homenaje a la inventiva que supone el resolver, con encofra-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

dos de cartón, el aligeramiento interior de las piezas en beneficio de su facilidad de transporte y colocación.

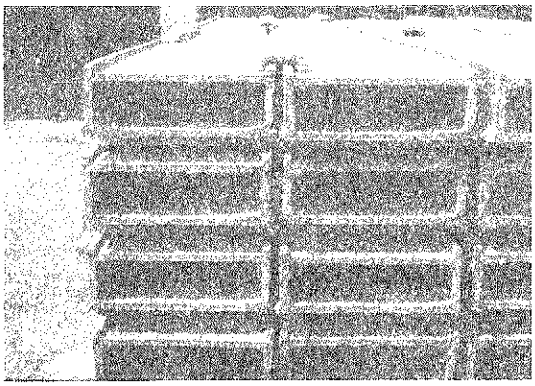


Fig.4

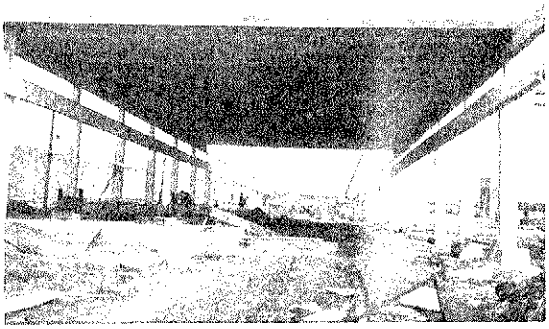


Fig.5

3. LAS PRIMERAS REALIZACIONES

A poco de finalizada la guerra civil, se construye en Navarra el acueducto de Alloz, la primera estructura de hormigón pretensado realizada en España. La imaginativa sencillez de sus formas, con sus juntas en el centro de los vanos impares para mantener sometidos los cajeros a unos momentos permanentemente negativos, constituye una disposición que permite la colocación de unos tendones longitudinales rectilíneos a modo de cables externos.

Análogamente, el puente de Almarail constituye un símbolo de las dificultades que caracterizaron los años 50. Nada se sabía acerca del comportamiento, a largo plazo, de nuestros aceros de alta resistencia. Nuestra industria siderúrgica, fabricaba cordones trenzados, pero la utilización de sus alambres como armadura activa, era una novedad ajena a los intereses comerciales de los fabricantes. A menos que se encargara el proyecto a una firma extranjera, no había gatos para pretensar, ni vainas apropiadas, ni equipos capaces de garantizar la inyección de la lechada de cemento en el interior de los conductos de alojamiento de la armadura activa.

Era preciso improvisar toda la infraestructura necesaria para el desarrollo de unos nuevos métodos, ingente labor que incluía, desde la invención de originales patentes de anclaje, hasta la producción y el diseño de la apropiada maquinaria auxiliar.

Este era el espíritu de aquella época sometida a un drástico bloqueo comercial. Si hacían falta camiones y automóviles, se comenzaba por construir la Pegaso y la Seat. Si no podíamos importar petróleo, preciso sería extraerlo de las pizarras bituminosas de Puertollano y utilizar el gasógeno. Era la época de los sucedáneos.

Y Almarail es eso: un intento para conjugar la utilidad de un paso sobre el río Duero, con la necesaria realización de un ensayo, a largo plazo, de los aceros nacionales de alta resistencia, concretamente de los alambres de 5 mm de diámetro. Como puede observarse en la figura 6, la armadura activa se instala, exteriormente al nervio, según un trazado rectilíneo que no es, por supuesto, el apropiado a la correspondiente ley de momentos. La razón primaria que motiva semejante disposición, es la de mantener, al aire, esos alambres durante unos años, para valorar después las pérdidas globales de relajación mediante el oportuno retesado. Se trata, así, de lo que hoy denominaríamos como "tendones externos", sin adherencia. Cuando, años más tarde, se realizaron las pruebas y se valoraron las pérdidas, se procedió, como se advierte en la fotografía, al revestimiento de la armadura con un relleno de mortero que la protege, definitivamente, de la intemperie.

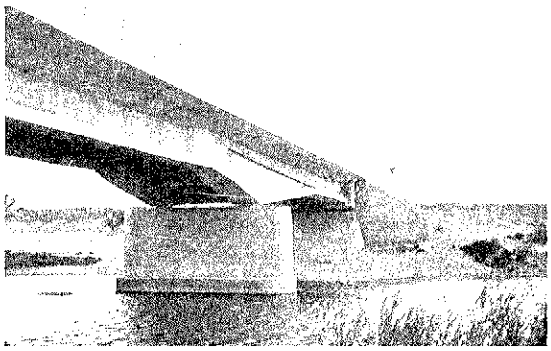


Fig.6

Tres años después, se repite el diseño de los tendones externos en el puente de San Alejandro (Jerez de la Frontera). En esta ocasión, el trazado de los tendones es el lógico: un polígono que circunscribe la ley de momentos. Todavía no se disponía de vainas, ni estaban a punto los equipos de inyección. No había más remedio que recurrir a la concentración de un paquete de alambres, de 5 mm, sin adherencia.

Dejo, para el final, el análisis crítico de una y otra solución que ahora, misteriosamente, parece resurgir con la arrogancia de una moderna innovación. Lo que, en estos momentos, intento re-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

saltar, es el proceso en el diseño de nuestras primeras realizaciones, una evolución forzosamente vacilante por tener que soslayar, a diferencia con los prototipos europeos, las dificultades que suponía el alojamiento de las armaduras activas en el interior de unos tubos, entonces desproporcionadamente costosos y, además, inconvenientemente rígidos por excesivamente gruesos.

Pero, en aquellos momentos, lo que más urgía era la fabricación de unos gatos adecuados a un tipo de anclaje que no fuera objeto de patente. Lógicamente, se comenzó por este último problema. La idea generadora fue muy simple. Si una circunferencia sólo puede ser tangente a otras tres, el anclaje más sencillo, al menos en teoría, debería ser la retención de tres alambres mediante una cuña troncocónica central.

Y sobre este principio, tan rudimentario como ingenuo, comenzó a diseñar el nuevo gato hispánico uno de nuestros más entusiastas asociados. Cuando aquel intrépido extremeño, un día preguntó cuales eran las propiedades adicionales que el gato requería, se le contestó con un cierto escepticismo:

"Bueno sería que los tres alambres que tesa resulten sometidos a la misma carga, no a la misma deformación".

Ante el asombro general, aquel extraordinario artífice presentaba, meses más tarde, el prototipo que aparece en la figura 7. Como puede observarse, tres pares de émbolos, conectados a una misma bomba de aceite, provista de su correspondiente manómetro de presión, deslizan por unas guias. En el centro del puente que une cada pareja, hay una especie de ranura o taladro donde una mordaza agarra a uno de los tres alambres. El eje central del gato, está hueco, de tal modo que pueda deslizarse una barra por su interior para permitir la fijación de la cuña central del anclaje entre el trío de alambres.

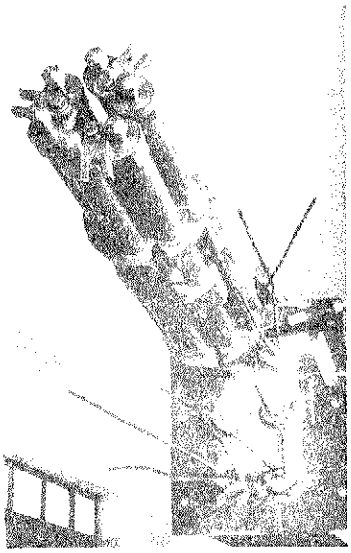


Fig.7

Con este gato, específicamente construido para tesar las armaduras activas del puente de Almarail (1954-1955), se tesó la mayor parte de las realizaciones de aquella época. Totalmente distinto a los gatos que ahora utilizamos, muestra sin rubor el mecanismo de los elementos que lo constituyen.

A título de curiosidad, la figura 8 muestra el tesado, con estos gatos, de la armadura perimetral de un pequeño depósito en Somosaguas (Madrid). Dado que el rozamiento alambre-pared, reduce la tensión efectiva aplicada en el anclaje donde actúa el gato, basta con alternar sucesivos incrementos y reducciones en el esfuerzo del gato mediante oscilaciones, cada vez menores, alrededor de la tensión teórica, para conseguir una tensión eficaz, casi uniforme, a lo largo del alambre, o al menos comprendida entre un máximo y un mínimo tan próximos como se desee. Este sistema, a pesar de haber sido posteriormente sustituido por otros procedimientos, no deja de expresar el virtuosismo alcanzado con el manejo de estos gatos (Fig. 9).

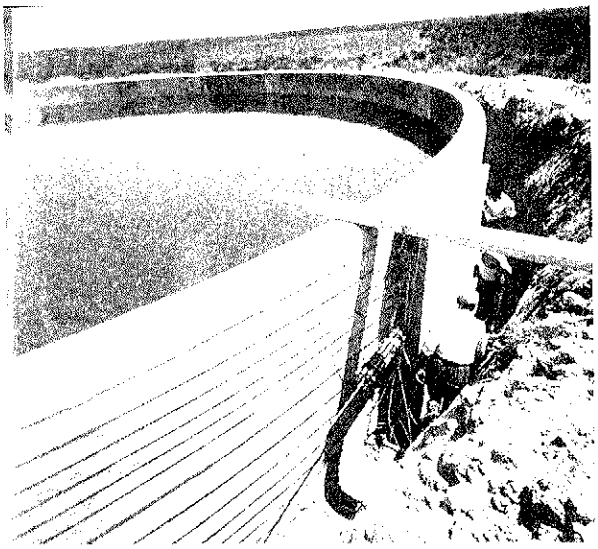


Fig.8

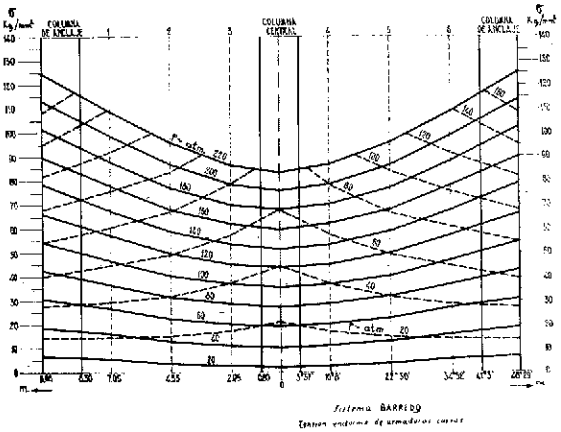


Fig.9

Fue alrededor del verano de 1957 cuando, al terminarse la estructura de la Estación de pasajeros del Aeropuerto de Barajas, se registró un importante defecto en la ejecución de unas vigas

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

principales. Por su especial situación, se decidió efectuar el refuerzo mediante la inyección de un mortero prepakt entre el árido grueso y las armaduras previamente colocadas "en seco". En la figura 10 puede verse el aspecto de las vigas después de la reparación, y en la 11 los dispositivos de anclaje utilizados en aquella época. Aunque la obra no tiene una relevante importancia, se la consigna en este relato al ser, probablemente, la primera utilización del pretensado sobre un hormigón prepakt, tanto en Europa como en el mundo.

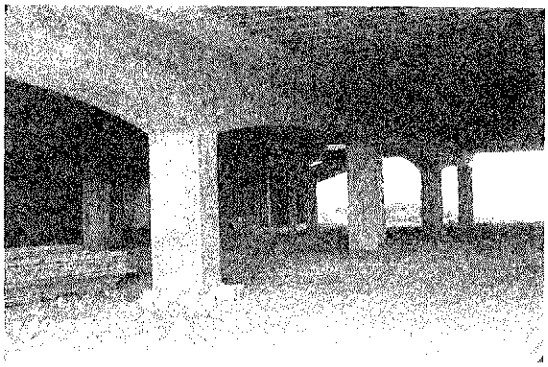


Fig. 10.

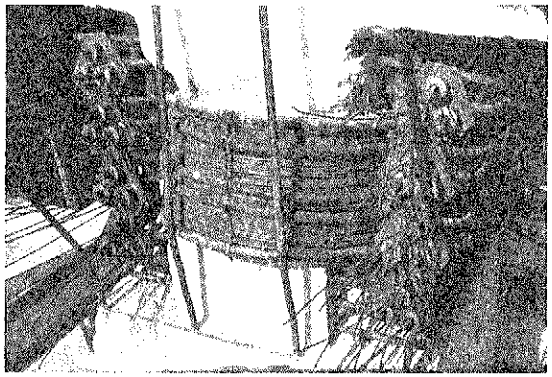


Fig. 11

Mayor importancia tiene, por su significado y proyección hacia el exterior, el depósito elevado de Mohamedía (Marruecos). Su forma (figura 12), aparentemente caprichosa, obedece a una función racional. Si en los depósitos cilíndricos como el de Somosaguas, la armadura activa pierde tensión por causa del rozamiento creado por la curvatura de la pared, basta con disponer los tendones según alineaciones rectas para que las pérdidas por rozamiento sean mínimas. Dadas las especiales propiedades geométricas de los hiperboloides de revolución, resulta que, disponiéndose los tendones según ambas familias de generatrices rectas, no sólo se consigue la citada ventaja, sino que además, se logra equilibrar los esfuerzos de tracción en los paralelos a condición de que la solera esté situada por encima de la garganta del hiperboloide. En la figura 13 puede observarse como el constructor sitúa los largueros rectos como cimbra para definir el forro del encofrado. La figura 14 muestra la disposición del cruce de vainas de ambas familias de tendones.

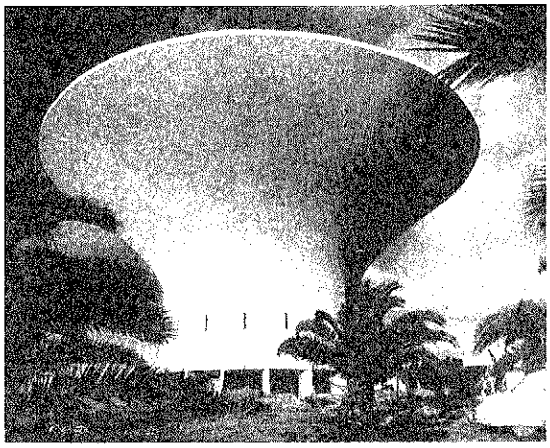


Fig. 12

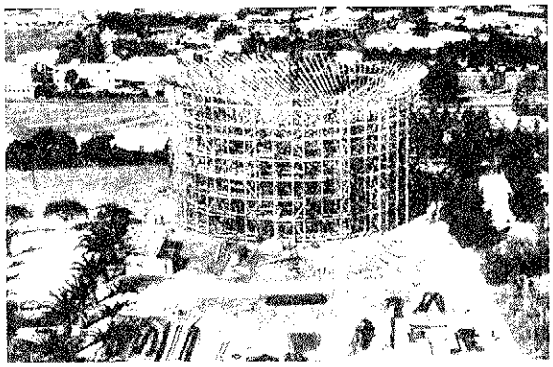


Fig. 13

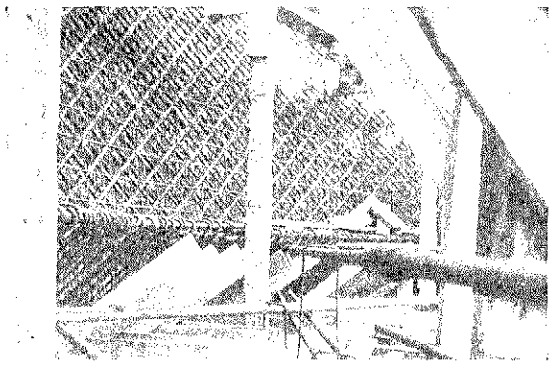


Fig. 14

Esta obra cierra, por su singularidad, la primera época de nuestra Asociación. Ya no se copia lo que fuera se hace, y a partir de ahora, el pretensado reclama un capítulo especial en el arte de construir. Sus formas, ya no son las heredadas del hormigón armado. Su estilo es otro porque otra es su técnica. Un depósito elevado en forma de hiperboloide y su garganta en la solera, no se justifica si no está pretensado. Los mismos hiperboloides

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

de las torres de refrigeración de tiro natural, si estuvieran pretensados según las generatrices, no presentarían los graves problemas de precaria estabilidad por exceso de fisuración que ahora ofrecen.

4. LA ERA DEL DESARROLLO

Cuando alguien presencia un suceso, un accidente de tráfico por ejemplo, el testimonio de lo que ha observado, puede ser de gran valor para los supuestos encausados. Su relato, sin embargo, es tan parcial como la fotografía que podamos obtener de una estatua o maqueta. Según el ángulo de la visión, el escorzo podrá destacar una faceta, u ocultar un detalle. Si ese testigo pretende ser objetivo, deberá advertir que, desde su particular punto de vista, las cosas ocurrieron de un cierto modo. Si su exposición de los hechos no concuerda con la descripción de otro espectador, deberemos admitir que, uno de ellos, pudo percibir unos detalles que quedaron ocultos a la perspectiva del otro. Hay crónicas que nos pueden parecer partidistas, cuando la realidad es que fueron escritas con los restringidos datos de unas lejanas referencias.

Si hago este inciso, es para expresar claramente la ineludible subjetividad de mi versión. Con la mejor voluntad pido excusas si refiero aquellos sucesos que más me impresionaron, omitiendo, inconscientemente, circunstancias que, siendo objetivamente importantes, me pasaron desapercibidas por falta de información o defectos de mi memoria. Si hasta ahora he omitido nombres propios, ha sido con el deliberado propósito, tanto de eludir posibles lagunas, como por el hecho de que, a veces, uno intuye borrosamente una idea, otro la perfila, y un último la perfecciona.

Acabado el periodo primario de la germinación, las ramas se extienden frondosas. Para ver el crecimiento, tenemos que separarnos del tallo, para abarcar, con nuestra mirada, la fortaleza del tronco.

Una de las particularidades más fecundas de nuestra técnica ha sido, y es, la posibilidad de descomponer una pieza en un conjunto de segmentos que, posteriormente, se vinculan mediante un pretensado, que no suele precisar de vainas ya que las armaduras activas se aloja en el hueco dejado por unas barras engrasadas que se retiran en el momento oportuno. La espectacular ejecución de grandes vanos mediante voladizos sucesivos, no es más que una acertada aplicación de este principio general.

La idea es tan simple y atractiva, que se extiende como un reguero de pólvora. Al multiplicarse los segmentos iguales, los constructores abandonan los artesanales encofrados de madera, para sustituirlos por moldes metálicos (figura 15). La vibración de estos elementos, ahora más sencilla y eficaz, mejora notablemente la calidad del hormigón. Algunas empresas, incluso confeccionan una estudiada colección de dovelas de espesor gradualmente variable (figura 16), como sistema para salvar, con ellas, vanos genéricos. En un alarde de expansión, los propios puentes auxiliares de servicio, se descomponen en un conjunto de segmentos metálicos iguales, que se montan y desmontan en muy poco tiempo mediante el simple enhebrado de un pretensado longitudinal (figura 17). Una vez terminada su misión, basta con cortar los alambres que los enfilan para que las vigas carril, se descompongan en unos cajones metálicos prismáticos que se cargan fácilmente en un camión para su inmediato transporte a otra obra.

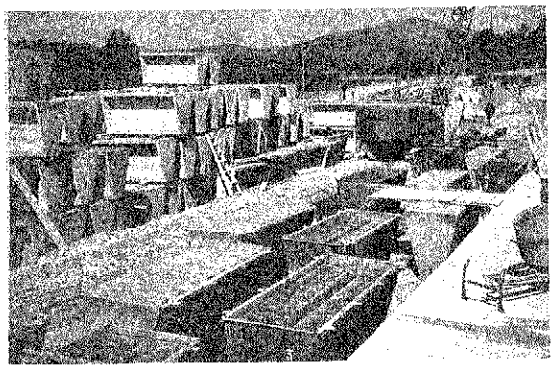


Fig. 15

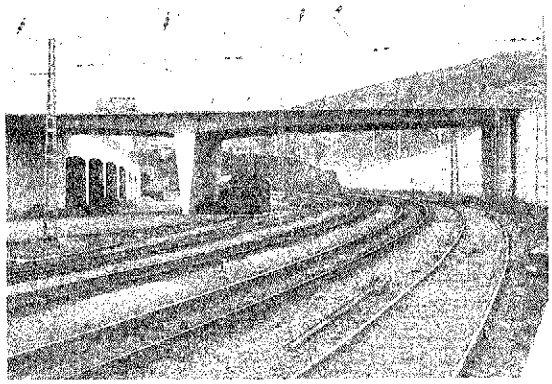


Fig. 16

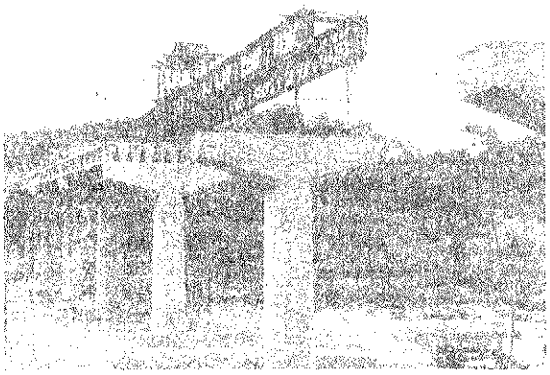


Fig. 17

Si el pretensado se había aplicado a los hormigones prepakt, ahora se extiende a las estruc-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

turas metálicas; unos ejemplos con nulos o escasos precedentes.

Pero el caso, tal vez más insólito por su escasa repercusión entre los asociados, lo constituye la construcción, alrededor del año 1959, de una cabria flotante capaz de elevar 110 toneladas (figura 18). El casco, de forma prismática, también está formado por un conjunto de dovelas, longitudinalmente trabadas por el pretensado de unos tendones. Aunque sus dimensiones, en manga y eslora, no sean espectaculares, no por eso deja de ser un prototipo que ha estado funcionando con pleno éxito durante más de un cuarto de siglo.

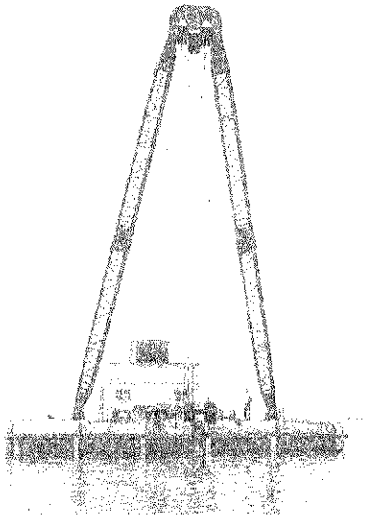


Fig. 18

Según mis referencias, puedo afirmar, solemnemente, que se trata de la primera embarcación de hormigón pretensado construida en el mundo. En este cuadragésimo aniversario, propongo a nuestro Secretario, recabe del autor de dicho proyecto, la información que disponga sobre los accidentes, colisiones, y modos de reparación, sufridos y efectuados por la barcaza durante sus años de servicio. En estos momentos, esa experiencia la considero sumamente provechosa para futuras realizaciones similares.

5. LA EXPANSION EN LA ARQUITECTURA

A nosotros nos ocurre lo mismo que a los restantes países europeos: comparando el número o el volumen de las estructuras de hormigón pretensado en la edificación, con las que se han construido en el ámbito de la ingeniería civil, el cociente que resulta es desproporcionadamente inferior a la unidad. Basta con repasar, en el capítulo de las realizaciones, las obras que cada país presenta en un congreso internacional, para observar que, frente a espectaculares soluciones pretensadas en puentes, apenas aparecen naves industriales o cubiertas singulares. Salvo excepciones, las pocas estructuras que de este tipo se presentan, suelen relacionarse con la cobertura de instalaciones deportivas.

Según los incompletos datos de que dispongo, la primera cubierta pretensada construida en España, es la techumbre de los laboratorios de la Universidad Laboral de Tarragona (figura 19). Formada por una sucesión de faldones triangulares alternados, su acción resistente es equivalente al de unas vigas inclinadas, a modo de lámina plegada. Curiosamente, este mismo tipo de cubierta se ha construido en París, con finalidades distintas y dentro de la técnica de los pretensados parciales. Según las referencias, y aunque contemporáneas, no parece haber relación alguna entre los arquitectos que las diseñaron.

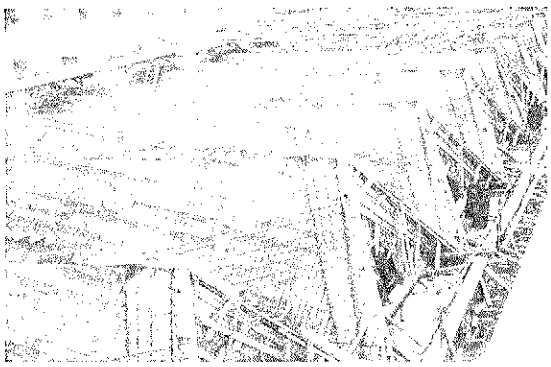


Fig. 19

Otra lámina plegada, si bien muy posterior en el tiempo, es la sucesión de vigas de sección en Z que aparece en la figura 20. Se trata de una nave industrial, con un vano del orden de los 27 m, destinada al trefilado de alambres para reforzar las cubiertas de caucho de los camiones. El calor desprendido por las sucesivas hileras de trefilación, aconsejaba disponer amplios ventanales donde situar los ventiladores de aspiración. Construida en el Polígono Industrial de Villalonquejar (Burgos), la cimbra estuvo compuesta por un entramado metálico tubular que, montado sobre unas ruedas, se ripaba a la viga siguiente después de cada tesado.

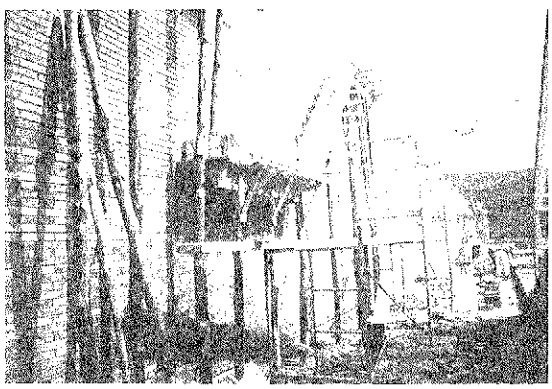


Fig. 20

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El caso de la figura 21, es distinto en su función. Ya no se trata de techar unas naves, sino la de cubrir el amplio anfiteatro del salón de actos del Palacio de Congresos de la Feria de Muestras de Barcelona. El edificio, con el estilo característico de la brillante arquitectura de la década de los años 60, acoge, en su zona central, un anfiteatro para 1.600 espectadores. La cubierta, formada por dos láminas cilíndricas paralelas, de 4 centímetros de espesor, dejan, entre ellas, una cámara de aire de 1 metro. Al llegar a la cumbrera transversal, el tiro horizontal de la lámina colgada, está equilibrado por los tirantes prefabricados de hormigón pretensado que se aprecian en la figura, dando un marcado carácter funcional a la fachada principal. En la figura 22, se aprecian los tableros de nogal que, previamente barnizados, se colgaron de los tendones principales para servir de encofrado a la lámina inferior. Unos tendones transversales, de trazado rectilíneo, completan el adecuado estado de bicompresión del hormigón de la lámina.

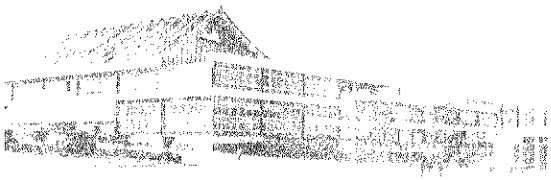


Fig.21

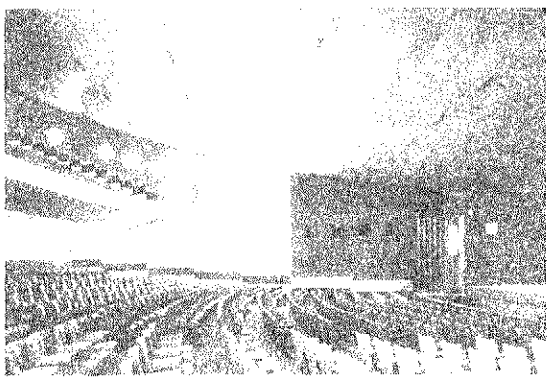


Fig.22

Debo advertir que la razón que más influyó en la propuesta de esta solución por parte de la empresa constructora, fue la dificultad en el montaje de las vigas principales que, de otro modo, tendrían que salvar vanos entre 35 y 48 metros. Mediante esta solución, la red de tendones permitía una fácil colocación de los encofrados y un mínimo volumen de hormigón en la cubierta (figura 23).

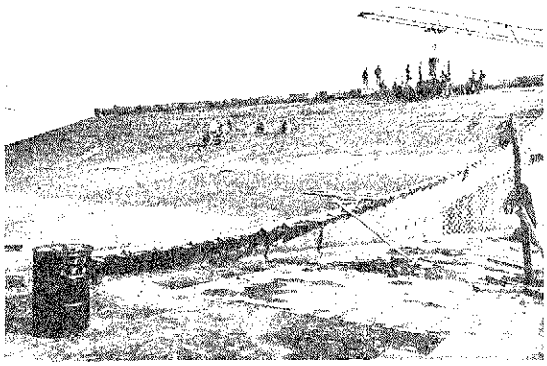


Fig.23

Entendiendo que este relato no debe limitarse a la descripción, forzosamente incompleta, de las distintas realizaciones españolas, paso a dedicar unos breves minutos a los problemas relativos al comportamiento a largo plazo de la armadura activa. La figura 24 es una fotografía, tomada desde abajo, de la cúpula lobulada que corona el patio central del Edificio Ferial, colindante con el anterior. Para equilibrar el pretensado perimetral aplicado en los bordes, un anillo, de 23 toneladas de peso, cuelga en el centro, a modo de lámpara monumental, suspendido de un centenar de alambres radiales muy tendidos. Obsérvese que, en estas condiciones, la carga retenida por cada alambre no sufre alteración alguna en el tiempo. No hay sobrecargas térmicas ni gravitatorias.

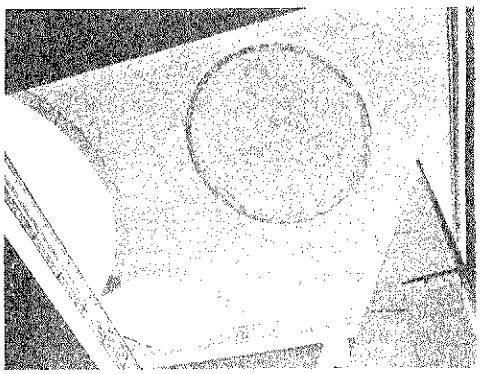


Fig.24

Considerándose que los hilos quedaban al aire, se aceptó la oferta de una empresa sueca, dedicada a la fabricación de aceros inoxidables de alta resistencia. Llegados a Barcelona, se ensayaron los rollos, comprobándose que su resistencia, en el ensayo tipificado de tracción, superaba la garantizada por el suministrador.

Seis meses después de terminada totalmente la obra, y cuando ya se habían celebrado diversos certámenes, se rompió uno de los alambres. Al día siguiente, se rompió el segundo, y al otro, el tercero. Conviene precisar que la carga de servicio, invariable en el tiempo, era el 55% de la tensión

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

garantizada de rotura.

Cundió la alarma, y ante los compromisos concertados por la Feria de Muestras, se cambiaron, urgentemente, todos los alambres de suspensión, sustituyéndolos por otros, de igual diámetro y más alta resistencia mecánica, empleados como armadura activa en la misma obra y que, por no ser inoxidables, se revistieron con una resina epoxi después de tesados. De los alambres retirados, incluidos los rotos, se sacaron muestras que se enviaron, tanto al fabricante, como a diferentes centros, para ser analizados y ensayados a diferentes niveles de carga mantenida constante.

Según los informes recibidos, se dedujo que tan insospechado comportamiento fue debido a una oxidación durante el proceso de "liberación de tensiones" a 400°C. Al parecer, debió producirse un fallo en la regulación o en el mantenimiento de la carga, durante el paso del alambre por las cámaras calentadas a esa temperatura. La comercialización de los aceros inoxidables de alta resistencia, quedó suspendida en el mercado europeo.

Es el riesgo de las nuevas soluciones; un riesgo que, a veces, es necesario afrontar.

6. LA EXPANSION EN LAS OBRAS PUBLICAS

Sin duda alguna, y como ocurre en todos los países con técnicas depuradas, la expansión más espectacular del hormigón pretensado es en el campo de los puentes. El reto que supone salvar un vano importante, con el mínimo coste, presta al noble afán de encontrar la solución más adecuada, el carácter deportivo de una leal competencia en el juego estratégico que supone el manejo de un alto conocimiento técnico de los medios disponibles.

El procedimiento constructivo de fraccionar la ejecución en una sucesión de segmentos, imprime un fuerte impulso a las soluciones pretensadas que, libres ya de las iniciales trabas, rivalizan económicamente con las demás alternativas. Tal vez el criterio más adecuado para expresar el ingente desarrollo, sea el de resumir la amplia panorámica que se nos ofrece, centrando nuestra atención en la evolución de las luces con el transcurso de los años. Como es lógico suponer, son los puentes de vigas los que más se utilizan desde el principio, tanto por ser los vanos de pequeña luz los más frecuentes y económicos, como por la competencia comercial que ofrece el creciente mercado de las piezas prefabricadas.

Cronológicamente, los puentes sobre el canal del Bajo Guadalquivir, con sus 47 metros de luz, y construidos por dovelas, constituyen, al principio de la década de los 60, el comienzo de una técnica firmemente asentada en el entusiasmo y creciente experiencia de nuestros afiliados. En esta época, son ya numerosos los puentes que, prefabricados en obra o en un taller fijo, rivalizan entre sí mostrando la superioridad de su economía en la meticulosidad de su acertado diseño estructural. Esta tipología, basada en la colocación de las vigas principales mediante especiales puentes metálicos de servicio, cada vez más depurados, tiene, sin embargo, el tope de los 40 metros de luz como límite de económica utilización.

Según los datos disponibles, sólo transcurren dos años para que la marca de los 47 metros, ascienda a 70 metros en Almodóvar del Río. Se trata de un puente sobre el Guadalquivir, construido por voladizos sucesivos, y terminado en el año 1963.

Con esta experiencia, y dominado ya el sistema de situar y empalmar las dovelas con las recientes entonces resinas epoxi, cuatro años más tarde se alcanzaban los 101 metros en el puente de Castejón sobre el río Ebro, una luz que parecía mítica para las vigas de hormigón, y sólo posible de rebasar mediante soluciones en arco.

La técnica, la ejecución, y los mismos materiales, eran cada vez más depurados. En esta favorable situación, y siguiendo las tendencias europeas, la maquinaria auxiliar evoluciona en el sentido de los llamados "carros de avance", capaces de permitir el hormigonado directo en las puntas de los voladizos, en vez de suspender las dovelas. Con la supresión de las juntas, o mejor, su transformación en juntas de sucesivo hormigonado, cambian las propias directrices del diseño en cuanto a disposición de las armaduras pasivas y avance de los moldes que sirven de encofrado.

Con estos procedimientos, el puente sobre el Llobregat en las cercanías de Barcelona, bate una nueva marca al alcanzarse, en el año 1972, los 125 metros. Seis años después, el puente de El Estrecho, salva la luz de los 154 metros, difícilmente superable con esta tipología.

En estas fechas que van desde el año 1976 al 1978, se construye el puente sobre el Ebro para las autopistas navarras. Con la espectacular solución de un solo mástil, ligeramente inclinado, y con atirantamientos a la mediana, o eje longitudinal del tablero, para mantener el peso de las sucesivas dovelas prefabricadas, se consigue salvar una luz de 140 metros que, si bien no supera las anteriores, indica la posibilidad de superar los citados límites con semejante tipología estructural. Disponiéndose dos torres en vez de un solo mástil (figura 25), y sustituyéndose las dovelas prefabricadas, por carros de avance para el hormigonado de cada segmento, se alcanza, en el año 1983, la impresionante meta de los 440 metros de luz en el puente de Barrios de Luna, batiéndose así todas las marcas mundiales establecidas para las soluciones de hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

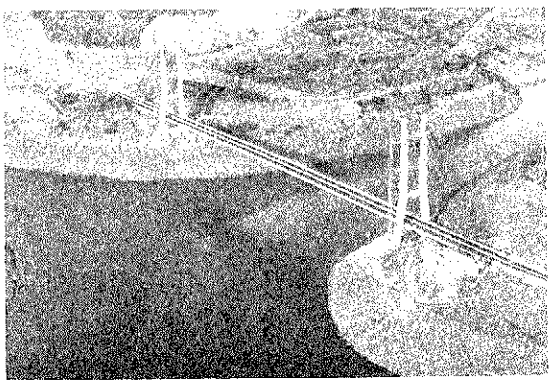


Fig.25

Todo un hito memorable para la historia de nuestra Asociación. El salto de los 154 metros a los 440 es tan asombroso, que me faltan palabras para expresar mi admiración. Plagiando una frase de Napoleón en su campaña de Egipto, podemos decir "desde lo alto de esas torrres, 40 años de la Asociación nos contemplan".

7. REFLEXIONES

Han pasado 40 años desde los comienzos de esta Asociación. En estos 40 años, se ha recorrido un largo y, a veces, penoso camino. Aún cuando la idea del pretensado es simple en su concepto, la profundidad de su contenido nos ha obligado a perfeccionar nuestros conocimientos con el planteamiento de nuevos problemas. Puesto que, en el fondo, todo gira alrededor de un distinto modo de construir, ha sido necesario pasar de unos medios tan improvisados como rudimentarios, al montaje, a nuestro derredor, de toda la tecnología apropiada al desarrollo de unos nuevos procedimientos que, como carros de avance, permitan la conquista de unas metas cada vez más ambiciosas.

Es el autoperfeccionamiento de las técnicas del siglo XX.

7.1 Silos y depósitos

Los recipientes para el almacenamiento de áridos o de líquidos, suelen presentar unos mismos tipos de problemas, más acentuados en unos casos que en otros, según la viscosidad del líquido, y según la forma de la estructura en sus tres disposiciones típicas: recintos enterrados, superficiales, o elevados.

Salvo contadas excepciones, puede decirse que la solución estructural más comúnmente adoptada, es la que se deriva de una simetría de revolución alrededor de un eje vertical. La solera, el muro de recinto, y la cubierta, son así los tres elementos constituyentes de una tipología bastante definida por la presión del líquido o árido contenido.

Con la excepción de los grandes depósitos para el almacenamiento del gas natural licuado, en los que el problema de la impermeabilidad se ha tomado muy en serio, la fisuración que, al cabo del tiempo, aparece en el muro perimetral de recinto, preocupa por su excesiva frecuencia.

Los japoneses, con su peculiar sentido de los problemas técnicos, proponen la solución, un tanto pintoresca, de propiciar la formación de las grietas en el fondo de unas ranuras practicadas en el muro, a intervalos inferiores a los 5 metros. La razón que motiva semejante modo de proceder, es la de que, con esta precaución, el sellado de las fomentadas grietas, es sumamente eficaz y sencillo. No intentan evitar el deterioro; simplemente se preparan para combatirlo.

Humilde actitud ante lo que consideran como algo inexorable.

Para expresar mejor la imagen de esta idea, centremos nuestra atención en torno al problema concreto que se suscita en el enlace del muro con la solera. Para una mayor concreción, supongamos que se trata de un depósito cilíndrico, pretensado, para almacenar agua potable. Si centro la atención en ese punto, es porque es en ese enlace donde la fisuración suele iniciarse a causa de la retracción diferencial diferida.

Si, con nuestra mentalidad europea, preferimos orientar nuestro pensamiento en la búsqueda de las causas originarias del fenómeno, nos encontramos con las dificultades que supone el planteamiento de una abstracción, en un territorio donde la casuística es notoriamente amplia y dispersa. Puestos a encontrar, en ese dominio, el común denominador de un mismo efecto, hallaremos, como una primera pista, la circunstancia de que, en estos casos, el fenómeno de la fisuración tiene una específica particularidad: su aparición pasado un cierto tiempo. No se trata de la fisuración producida por el primer llenado del recipiente. Lo característico es la paulatina e incesante evolución de la anchura de las grietas con el transcurso, más que de los meses, de las estaciones meteorológicas.

¿Se trata de un efecto producido por las deformaciones de origen térmico o higrométrico?

En una serie de ensayos realizados en Nueva Zelanda con rayos infrarrojos sobre modelos reducidos, se han deducido unos gráficos representativos de los registros de las deformaciones causadas por las diferentes acciones que solicitan los depósitos cilíndricos. En esos registros aparece, como acción principal o dominante, el gradiente térmico entre el agua contenida y la temperatura del paramento exterior de la cuba o muro de recinto. Advertida la importancia de esta causa cuando el gradiente ascendía a 30°C, una estadística de las temperaturas registradas en los depósitos en servicio

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

en aquella región, mostró que los gradientes registrados en la realidad, superaban los valores previstos en las normas neozelandesas relativas a los depósitos de agua, aproximándose mucho a la diferencia térmica anteriormente citada.

Puesto que nuestra climatología es, por su latitud geográfica, relativamente similar a la australiana, propongo el estudio de este tema para que la Comisión de Normas correspondiente, intente definir los gradientes térmicos que habitualmente se registran en los depósitos de agua ubicados en nuestro país como base de partida para nuevos estudios estructurales.

A título puramente informativo, estimo conveniente indicar que la solución norteamericana de rodear la cuba con un segundo muro de recinto, compuesto por elementos prefabricados de cuidada textura en su paramento exterior, no solo contribuye a mejorar la estética del conjunto, sino que, además, reduce notablemente la fisuración de la cuba, ya que la cámara de aire intercalada entre ambos muros, suaviza el gradiente térmico de la cuba o muro interior de contención.

Hay sobrecostos que redundan en beneficio de la economía global.

7.2. Las piezas prefabricadas

Una de las tendencias actuales es la creciente industrialización de nuestros métodos. La artesanía ha pasado a la historia, quedando incluida en el tipismo de una labor ancestral. Ahora se prefiere la confección en serie. El traje a la medida, es un lujo que solo se lo pueden permitir unos pocos.

El hecho de que la ejecución de una obra sea la acumulación y posterior ensamble de unos elementos con otros, sugiere un sin fin de procedimientos basados en la diferente dimensión o peso de las unidades empleadas. Un muro, se puede levantar a base:

a) de una superposición de ladrillos

b) del empleo de unos bloques,

c) del hormigonado entre dos encofrados provisionales,

d) de la colocación de grandes paneles que después se solidarizan mediante un pretensado o unas soldaduras.

Acorde con este planteamiento general, podemos simplificar la construcción de una estructura ensamblando, en la obra, grandes paneles cuidadosamente prefabricados en un taller, con los medios adecuados para garantizar la calidad del producto elaborado. La economía que se consigue con esa repetida producción industrial, vendrá gravada por el coste del transporte especial de esas piezas, supuestas cada vez más grandes.

En todas las regiones, las viguetas de hormigón pretensado constituyen el elemento primario de una prefabricación. Por razones económicas, más que por su durabilidad, han sustituido a los perfiles metálicos. Unas y otros, son igualmente transportables. La competencia comercial, es directa.

Pero lo que sorprende, es el distinto planteamiento que cada país hace de otros elementos cuya competitividad comercial es más sutil y compleja. Un poste, es un elemento vertical que sustenta una carga. El árbol es su natural expresión. Sus troncos fueron las piezas preferentemente utilizadas por la humanidad para constituir los mástiles, no solo de los barcos, sino para colgar banderas o suspender un tendido eléctrico. Lógico es que, allí donde el clima favorece la extensión de grandes regiones forestales, siga utilizándose la madera para su colocación como postes, mientras que, en otras, estas piezas sean preferentemente de acero, como material adecuado a las características de su mercado.

¿Por qué en España, las farolas, los mástiles de iluminación, y los postes para el tendido eléctrico de nuestros ferrocarriles, no son de hormigón pretensado?

Según he podido comprobar, la industria japonesa dispone de 14 fábricas para la producción de postes de hormigón pretensado. Lo que me ha asombrado, es que esas unidades, en sus diversos tamaños y formas, las exporta, no solo a las regiones asiáticas del Pacífico, sino que la penetración comercial alcanza la costa occidental de Canadá y los Estados Unidos.

Y en el amanecer de esta Europa comunitaria sin fronteras, los alemanes trabajan para perfeccionar los procedimientos, que ya poseen, para empalmar los postes de hormigón que se izan por segmentos.

7.3. El fenómeno de la fatiga

No solo los postes están sometidos a frecuentes fenómenos de fatiga, cada vez que se desequilibran los esfuerzos horizontales de los alambres del tendido que sustentan. También las grandes piezas prefabricadas sufren las oscilaciones de su obligado transporte y colocación. Cada vez que nos adentramos en la extensión a nuevos dominios de utilización de nuestros elementos pretensados, nos encontramos con los problemas relativos a la acción de cargas oscilantes o alternadas. La ingeniería sísmica se esfuerza por deducir la magnitud de los efectos dinámicos; pero olvidamos la repercusión de estas acciones en la capacidad resistente de los materiales. Sabemos que un terremoto es tanto más destructor cuanto mayor es su duración, aun sin aumento de la amplitud; pero seguimos empeñados en no considerar la dependencia de una rotura con el número de ciclos que la originó. Cono-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

cemos la existencia y resultados de unos ensayos de fatiga sobre armaduras activas y pasivas, pero no acostumbramos a introducirlos en el cálculo.

Actualmente, tenemos procedimientos para estimar, al menos de un modo suficientemente aproximado, la magnitud de las pérdidas virtuales de resistencia por estas causas; pero tal vez lo que más nos perturba es nuestra indecisión a la hora de valorar la frecuencia con que una carga, inferior a la de rotura estática, se presenta. Sabemos que el casco de un buque estará sometido a numerosos temporales; pero no son pocas las veces que preferimos simplificar el problema admitiendo que solo es una ola, si bien suficientemente alta, la que actúa. Creemos que basta con realizar unos cuantos ensayos tipificados de rotura, para valorar la resistencia de un alambre de acero inoxidable que se nos suministra, y nos sorprende que, al cabo de seis meses de estar sometido a una carga mitad, un día se rompa un alambre, otro al siguiente, y uno más al tercero.

Acostumbrados como estamos, a resolver los problemas que nos plantea el cálculo de la estructura partiendo de unas cargas como datos, buscamos afanosamente en las normas el valor que debemos asignar a ese ente desconocido. Pocas veces nos detenemos a meditar que, en el mejor de los casos, tal valor numérico está obtenido a partir de una estadística realizada, durante años, sobre diferentes tipos estructurales, y que el simple registro de un valor máximo, apenas representa la compleja variedad de un fenómeno aleatorio. Si, para una mejor definición de esa variable, se reseñaran las frecuencias con que aparecieron las diferentes cargas, podría establecerse el apropiado espectro o relación entre la magnitud de la carga, y las veces que, previsiblemente, esa acción aparecerá a lo largo del periodo estimado como de servicio de la estructura que se proyecta.

Esta más precisa definición de una variable aleatoria, es la pauta que necesitamos para una mejor expresión de las acciones que, en un futuro, posiblemente actuarán. No basta, así, con que la pieza esté facultada para soportar, una sola y primera vez, la acción de una carga considerada como máxima previsible. Es necesario que, además, esté capacitada para resistir un número de ciclos de carga, tanto mayor, cuanto más pequeña, o distante de la máxima, ses esa acción repetida.

7.4. Tendones externos

Se denominan tendones externos aquellos que, a diferencia con la disposición típica, se sitúan fuera de la sección de la pieza siguiendo un trazado rectilíneo o poligonal. En unos casos, un recubrimiento de mortero, posterior al tesado de los tendones, defiende la armadura activa de la corrosión; en otros, el propio tendón esta constituido por un conducto metálico o de polietileno de alta densidad, que se rellena, bien sea con la convencional papilla de cemento, o bien con una grasa especial.

Esta disposición exterior de los tendones no constituye, en modo alguno, una novedad. Si bien por razones muy diversas, no son pocos los puentes que, especialmente entre los años 1950 y 1955, se construyeron recurriendo a este procedimiento, tanto en Alemania, Gran Bretaña y Bélgica, como especialmente en Francia. También en España se construyeron, por esas fechas, los puentes de Almarail y de San Alejandro, ambos del tipo que se acaba de definir en primer lugar. Mientras que el primero se mantiene en perfectas condiciones, el segundo presenta, al cabo de los 30 años, evidentes signos de corrosión en el paquete de alambres paralelos que constituye su armadura activa, siendo necesaria su urgente sustitución. Otro tanto ha ocurrido con los puentes franceses de Villeneuve -Saint-George y de Can Bia. El grado de corrosión de este último ha sido tan intenso que ha motivado cerrarlo al tráfico y proceder a su demolición. Un caso verdaderamente curioso es el de Vaux-sur Seine, donde las ácidas deposiciones de los pájaros anidados en el interior del puente, agravaron la incipiente corrosión de los cordones de pretensado, solo defendidos por una pintura bituminosa que, sin embargo, ha probado ser suficientemente protectora en otros casos.

Con tales antecedentes, extraídos de estructuras que, en la actualidad, cuentan con más de 35 años de existencia, no parece tarea sencilla el empeño en resurgir una técnica constructiva que tan dispares resultados ofrece. Cierto es que, en la actualidad, el galvanizado de los alambres, las reformas en beneficio de la durabilidad de los aceros de alta resistencia y los recientes estudios sobre corrosión de las armaduras, permiten, con un mejor conocimiento de causa, encontrar soluciones a los problemas de durabilidad registrados en un pasado. No obstante, y como habitualmente acontece con los fenómenos de carácter diferido, será preciso una espera de otros 35 años, para poder garantizar el éxito de tales aportaciones, por muy prometedores que sean los favorables presagios que se auguran.

En este intento de bosquejar un retrato de la Asociación, he pintado su escorzo desde mi particular punto de vista, insistiendo en aquellos rasgos que entiendo son los más característicos. Posiblemente, habrá a quien le hubiera gustado un cuadro con tonos más alegres, y otros que hubieran preferido las finas pinceladas de un miniaturista, a los brochazos de mi representación. Habrá, sin duda, quien piense que he omitido determinados aspectos y que, por contra, me he excedido en otros.

Disculpad los desenfoques de mi vista cansada, y la confusión de las tonalidades. Todos vemos las cosas a nuestro modo. Hace unos meses, en una revisión médica, me han advertido que soy daltónico.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

RESUMEN

En Julio de 1949, se fundó la entonces Asociación Española del Hormigón Pretensado que, posteriormente, se ha convertido en la A.T.E.P. Como es lógico suponer, la evolución de la Asociación en estos años, está íntimamente vinculada al desarrollo de lo que entonces se llamaba la "nueva técnica". El cronista narra los difíciles comienzos del hormigón pretensado, en una España destruida por la guerra civil y económicamente atenazada por un entorno hostil.

SUMMARY

The Prestressed Concrete Spanish Association was found in July 1949. As in many countries, 1940's years were the birth of the "new constructional technology" developpment, a developpment very uneasy in Spain because the economical difficulties for a country devasted by 3 years of civil war.

XI Congreso Internacional de la F.I.P.

Para general conocimiento de todos nuestros Asociados interesados en participar en el próximo Congreso de la FIP, sobre el cual ya hemos informado en anteriores ocasiones, a continuación se transcriben los últimos detalles de organización que nos ha comunicado la Secretaría encargada de todo lo relativo a la programación del citado Congreso.

Se confirma que las fechas para su celebración han sido modificadas, posponiéndose para los días 5 al 9 de junio de 1990.

–Los interesados en participar en el Congreso deberán dirigirse a la Secretaría de la ATEP solicitando la correspondiente Ficha Provisional de Inscripción para su envío a la FIP. Esta ficha no supone ningún compromiso formal y únicamente asegura a los interesados que recibirán toda posterior información relativa a dicho Congreso, incluso la invitación final.

–Paralelamente a las Sesiones del Congreso se programará un pase de películas técnicas. Los interesados en proyectar alguna película, deberán comunicarlo a la Secretaría del Congreso, incluyendo el título de la película, una breve descripción de su contenido, tiempo de duración, tipo de película utilizado, etc.

Las señas de la Secretaría del Congreso son:

FIP' 90 Objektleitung KV4
Hamburg Messe und Congress GmbH
Jungiusstrasse 13
2000 Hamburg 36
Federal Republic of Germany

–Con motivo de este Congreso se celebrará también la "Segunda regata de canoas de hormigón" organizada por la FIP, en Hamburgo. Todos los participantes en el Congreso quedan invitados a tomar parte en esta competición.

Habrá tres Concursos independientes:

* Estética de modelos de canoas.
* Calidad del proyecto estructural de la embarcación.
* Regata.

La Regata tendrá lugar en el Kuhmühlenteich de Hamburgo, los días 3 y 4 de junio de 1990.

Los impresos de inscripción y las normas para los participantes, para la construcción de las canoas y para la regata, deberán solicitarse a la siguiente dirección:

Deustcher Beton-Verein E.V.
Postfach 21 26
D6200 Wiesbaden-Federal Republic of Germany.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

WORLD OF CONCRETE EUROPE 89

Durante los días 8 al 11 del próximo mes de noviembre, en el Recinto Ferial de Barcelona, se va a celebrar la Exposición **"World of Concrete Europe 89"**.

Se espera que unas trescientas Empresas, representando a más de treinta países, formen la lista final de Expositores.

En esta Exposición se exhibirá todo tipo de elementos utilizados en la industria de la construcción en hormigón. Abarca a todos los aspectos de esta industria, desde el diseño y la ejecución, hasta la reparación y rehabilitación. Constituirá una exhibición de todo lo mejor y más moderno en productos, equipos, plantas y maquinaria.

Además de la Exposición se celebrarán Seminarios en los que se describirán y discutirán los últimos avances en las técnicas y sistemas constructivos utilizados en las estructuras de hormigón, los nuevos materiales, y las nuevas tecnologías que han hecho posible lograr estructuras más duraderas, más atractivas y más económicas.

Con el objeto de facilitar un servicio más personal a los expositores y visitantes de la **"World of Concrete Europe 89"**, se ha abierto una Oficina en España, cuya dirección es:

WORLD OF CONCRETE EUROPE 89
Palacio de Congresos 1er piso, Of. 45
Avda. Reina María Cristina
08004 BARCELONA
Tfno.: (93) 423 31 01 - ext. 8237
Telex: 53 117. Fax. (93) 426 28 45

NOTA IMPORTANTE

En la última reunión del Consejo de la FIP recientemente celebrada, se ha ofrecido a los Delegados de los diferentes Grupos Nacionales, la posibilidad de nombrar Representantes en la nueva Comisión Técnica de la FIP, n° 10, que va a ocuparse del tema "Mantenimiento, rehabilitación y reparación de estructuras de hormigón", y en los Grupos de Trabajo sobre "Hormigones de alta resistencia" incluido en la Comisión n° 1 "Hormigones", y sobre "Hormigones reforzados con fibras de vidrio" incluido en la Comisión n° 5 "Prefabricación".

Por consiguiente, los que estén interesados en participar y colaborar en la labor que la citada Comisión o los Grupos de Trabajo tienen encomendada, deberán dirigirse a la Secretaría de la ATEP, que es la encargada de gestionar los correspondientes nombramientos.

Se recuerda que los Miembros de las Comisiones de la FIP quedan obligados a prestar su desinteresada colaboración en los trabajos que se les asignen y a participar personal y activamente en las reuniones que se convoquen, con todos los gastos a su cargo.

En general, cada Comisión celebra dos reuniones al año, en lugares y fechas previamente fijados mediante acuerdo entre los Miembros que la forman.

La no asistencia de un Delegado a tres reuniones consecutivas, salvo caso de fuerza mayor debidamente justificada, da lugar a que, automáticamente, se le dé de baja en la Comisión.

Se advierte, además, que normalmente, cada Grupo nacional no podrá tener mas de dos Representantes en cada Comisión de la FIP.

LA JUNTA DE GOBIERNO DE LA A.T.E.P.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

HUARTE, S.A.–HASA.– Oficina Técnica.– Avda. General Perón, 40 C - 4.º. 28020 Madrid.
IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.– Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.– Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).- Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.– Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPSA).– General Díaz Porlier, 49-51. 28001 Madrid.
INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).– Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES (IECA).– Velázquez, 11 - 3° izda. 28001 Madrid.
INSTITUTO TECNICO DE CONTROL, ALICANTE S.A.– Avda. de Elche, 164. 03008 Alicante.
INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).– Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA). Biblioteca.– Orense, 70. 28020 Madrid.
JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.– Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.– Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
MECANOGUMBA, S.A.– Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
OBRAS Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES, S.A. (OCISA).– Princesa, 3 - 7°. 28008 Madrid.
PACADAR, S.A.– Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
PRENSOLAND, S.A.– Calle Industria, s/n. 08592 Sant Martí de Centelles (Barcelona).
PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.– Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.– Avda. del Triunfo, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
SERVICIO DE PUENTES Y ESTRUCTURAS. - DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS.- MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO.– Paseo de la Castellana, 67. 28071 Madrid.
SIKA, S.A.– Carretera Madrid-Irún, Km. 14,500. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SECEGSA).– Estébanez Calderón, 3 - 1° A. 28020 Madrid.
TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).– Velázquez, 105. 28006 Madrid.
TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.– Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
TREFILERIAS QUIJANO, S.A.– Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).– Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

asociación técnica
española del pretensado

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025