hormigón y ACERO

nº 173

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)
APARTADO 19.002 – 28080 MADRID

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de **"Miembro Protector"**, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de **"Miembros Protectores"** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).-P.º de la Habana, 14. 28036 Madrid.
AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.—Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.
AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA "OFICEMEN".—Velázquez, 23. 28001 Madrid.
ALCAL.—Independencia, 4-4.º. 24001 León.
ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).-Orense, 10. 28020 Madrid.
AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.—Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.
BIGUETES, S.L.—Partida Altabix, s/n. 03000 Elche (Alicante).
CAMARA, S.A.—Apartado 180. 36080 Pontevedra.
CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.—Grijalba, 9. 28006 Madrid.
CEMENTOS MOLINS, S.A.—C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Viçenc dels Horts (Barcelona).
CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX). Gabinete de Información y Documentación.—Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A., C.T.T., S.A.—Aribau, 185. 08021 Barcelona.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.—Almagro, 42. 28010 Madrid.
COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.—Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.—Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.—Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.—Barquillo, 12. 28004 Madrid.
CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.—Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
CONSULTECO, S.L.—Pintor Lorenzo Casanova, 26. 03003 Alicante.
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Ayala, 42. 28001 Madrid.
DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.—Orense, 81. 28020 Madrid.
EMESA-TREFILERIA, S.A.—Apartado 451. 15080 La Coruña.
EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI). Departamento Obras Especiales.—Padilla, 46. 28006 Madrid.
ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.—Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.—Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
ESTEYCO, S.A.—Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.
ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).-Arapiles, 14. 28015 Madrid.
EUROCONSULT, S.A.—Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).
FERROVIAL, S.A.—Lagasca, 88. 28001 Madrid.
FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).—Paseo de la Castellana, 118-4.ª planta. 28046 Madrid.
FREYSSINET, S.A.—General Perón, 24. 28020 Madrid.
GRACE, S.A.—Apartado 523. 08080 Barcelona.
HASA. Servicios Generales.—General Perón, 40-C. 28020 Madrid.
HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.—Almogávares, 11-17. 08018 Barcelona.
HORMIGONES GERONA, S.A.—Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.—Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.

(Continúa en el int. de contraportada)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO
INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO
DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

COMITE DE REDACCION

Director:
PIÑEIRO, Rafael

Vocales:
BARREDO, Carlos
JODAR, Juan
JULIA, Manuel
LLOMBART, José Antonio
ROMERO, Rafael
SANCHEZ-GALVEZ, Vicente

Censores:
ALCALA, Juan Luis
CUVILLO, Ramón del
ELICES, Manuel
GONZALEZ VALLE, Enrique
MANTEROLA, Javier
MORAN, Francisco
MORENO TORRES, Juan
MURCIA, Juan
POZO VINDEL, Florencio J. del
SIEGRIST, Carlos

hormigón y acero

n.º 173

4.º trimestre 1989

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales)	6.000,– ptas.	45,– dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas)	15.000,– ptas.	100,– dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	30.000,– ptas.	200,– dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - 28080 MADRID - ☎ 202 04 40

Depósito Legal: M-853-1958
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID
ISSN: 0439-5689

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

hormigón y acero n.173

índice

Págs.

457-0-139 **Estudio crítico del cálculo de flechas en vigas de hormigón armado según la Instrucción EH-88** ..... **9 - 26**
Etude critique du calcul des fleches des poutres en béton armé selon le Code espagnol EH-88.
Critical study of the evaluation of deflection in reinforced concrete beams according to Spanish Code EH-88.
J. Ortiz y A. del Río.

457-0-140 **Método simplificado para el cálculo de flechas en vigas de hormigón armado, adoptado al EUROCODIGO EC-2** ..... **27 - 41**
Méthode simplifiée pour le calcul des fleches des poutres en béton armé, selon L'EUROCODE EC-2.
Simplified method for evaluation of deflections in reinforced concrete beams according to EUROCODE EC-2.
A. del Río y J. Ortiz.

457-0-141 **Reducción del ancho de banda de conjuntos de estructuras independientes** ..... **43 - 48**
Réduction de la largeur de bande dans ensembles des structures independentes.
Band-width reduction for sets of independent structures.
A. Recuero y J.P. Gutiérrez.

457-0-142 **Método penalty versus método de condensación en el cálculo lineal de estructuras con restricciones lineales entre desplazamientos** ..... **49 - 62**
Méthode penalty versus méthode de condensation dans le calcul lineaire des structures avec des restrictions lineaires dans les déplacements.
Penalty method versus condensation method for linear computation of structures with constrained displacements.
P. Rubio.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Págs.

457-0-143 **Modelos para la interacción tendón-hormigón en estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes** ..... 63 - 75
Modèles pour l'interaction armature-béton dans les constructions en béton précontraint á armatures non adhérentes.
Models for the interaction tendon-concrete in unbonded prestressed concrete structures.
J. Murcia.

457-8-140 **Un procedimiento para medir las deformaciones de origen térmico en morteros de cemento y en morteros de resina epoxi** 77 - 89
Un procédé pour mesurer les déformations d'origine thermique en mortiers de ciment et en mortiers de résine époxyde.
A test method for to mesure thermal deformations of cement mortar and of epoxy mortars.
E. Muelas.

591-2-212 **Puente atirantado de Marbella** ..... 91 - 101
Pont haubané a Marbella.
Cable-stayed bridge in Marbella.
S. Pérez-Fadón.

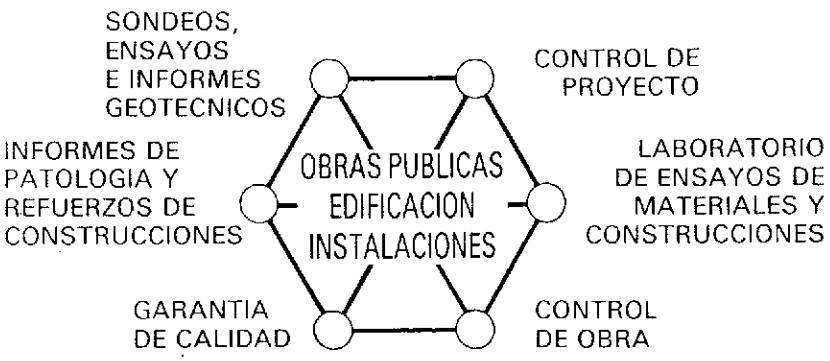
591-4-17 **Orden de tesado en depósitos de hormigón pretensado de pequeña capacidad** ..... 103 - 111
Ordre de mise en tension de réservoirs en béton précontraint de petite capacité.
Tensioning order of post-tensioned concrete water tanks of small capacity.
A. Aguado; A.R. Marí; E. Mirambell y E. Boixereu.

685-1-2 **Los cementos reforzados con fibra de vidrio** ..... 113 - 126
Les bétons de fibre de verre.
Glass fiber reinforced cements.
L. Sánchez Paradela y V. Sánchez Gálvez.

837-8-10 **Método práctico para reparación de fisuras** ..... 127 - 131
Méthode practique pour réparation de fisures.
Practical method for repair cracks.
A. González Serrano.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

INTEMAC
INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES





ENSAYOS SOBRE LA INFLUENCIA DE LA OXIDACION Y MANCHAS DE MORTERO EN LA ADHERENCIA DE BARRAS CORRUGADAS

MADRID: Oficina: Monte Esquinza, 30, 4.° D · Teléfs.: (91) 410 51 58 · 62 -66 · Télex: 49987 INTEM E · Fax: 410 25 80 · 28010 MADRID
MADRID: Laboratorio: Carretera de Loeches, 7 · Teléfs.: (91) 675 31 00 · 04 · 08 · 28850 TORREJON DE ARDOZ (Madrid)
BARCELONA: Oficina y Laboratorio: Avda. de la Riera, 10, Nave 2, Pol. Ind. Tres Santos · Teléf.: (93) 372 83 00 · Fax: 473 03 09
08960 SANT JUST DESVERN (Barcelona)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

ESPAÑA

ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).
ASOCIACIO ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.—Barcelona.
ASOCIACION DE LABORATORIOS HOMOLOGADOS DE LA COMUNIDAD VALENCIANA.—Valencia.
CAMARA OFICIAL DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACION.—Barcelona.
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.—Oviedo.
CEYD TECNICA, S.A.—Oviedo.
CIISA "CONSLTING E INGENIERIA INT. S.A.".—La Coruña.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.—La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.—Murcia.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.—Tarragona.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.—Palma de Mallorca.
COLEGI OOFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.
CONTROLEX.—Alicante.
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.
DITECO, S.L.—Valencia.
ENAGA, S.A.—Pozuelo de Alarcón (Madrid).
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Barcelona.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. Biblioteca.—San Sebastián.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Biblioteca.—Córdoba.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.—Castro de Elviña (La Coruña).
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.—León.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Burgos.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.—Manresa (Barcelona).
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.
FORJADOS DOL.—Esquivias (Toledo).
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.—Madrid.
GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).
GIRALDEZ OCAÑA CONTROL, S.L.—Chapela - Vigo (Pontevedra).
HORMADISA, S.L.—Puentecesures - Cordeiro (Pontevedra).
HORMIGONES GERONA, S.A.—Gerona.
INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

INGENIERIA Y ECONOMIA DEL TRANSPORTE, S.A.—Centro de Documentación.—Madrid.
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.—Madrid.
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.
J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Consejería de Fomento.—Valladolid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Servicio de Obras Públicas.—Avila.
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.
LABORATORIO DE LA EDIFICACION.—Consejería de Obras Públicas.—Las Palmas de Gran Canaria.
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.
LIBRERA RUBIÑOS.—Madrid.
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION GENERAL DE INFRAESTRUCTURA.—Madrid.
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS, SERVICIO DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO.—DIRECCION GENERAL PARA LA VIVIENDA Y ARQUITECTURA, SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA BASICA Y TECNOLOGICA.—Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.
POSTENSA, S.A.—Bilbao.
PRAINSA.—Barcelona.
PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.
PREFABRICADOS Y CONTRATAS, S.A.—Madrid.
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.
PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.
RODIO. CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.—Madrid.
RUBIERA, S.A.—León.
SERINCO, S.A.—Madrid.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.—Gerona.
SESTRA, S.A.L.—Andoain (Guipúzcoa).
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.
SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.
TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.—Madrid.
TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Cantabria).
TELEFONICA.—Departamento Inmobiliario.—Madrid.
TERRATEST, S.A.—Madrid.
TEXSA, S.A.—Barcelona.
TIGNUS, S.A.—Valencia.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).—Madrid.
UNIVERSIDAD CASTILLA-LA MANCHA.—Albacete.
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. Biblioteca Universitaria.—Santander.
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.
VIGUETAS MUBEMI.—Torrente (Valencia).
VISANFER, S.A.—Totana (Murcia).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

EXTRANJERO

ASSOCIAÇAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de Angola).
SARET P.P.B. Cadre Technique.—Le Pontet (Francia).
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valparaiso (Chile).

MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

* * *

AVISO IMPORTANTE

DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Normas que deben cumplir los artículos que se envien para su publicación en "Hormigón y Acero"

1. CONDICIONES GENERALES

Los originales de los artículos que se desee publicar en "Hormigón y Acero", se enviarán a la Secretaría de la ATEP. Deberán cumplir rigurosamente las normas que a continuación se especifican. En caso contrario, serán devueltos a sus Autores para su oportuna rectificación.

Los que cumplan los requisitos exigidos pasarán al Comité de Redacción de la Revista el cual, previo informe y evaluación de su calidad por el correspondiente Cuerpo de Censores, decidirá si procede o no su publicación, sugiriendo eventualmente al Autor los cambios que, en su opinión, deben efectuarse para su final publicación en "Hormigón y Acero". Toda correspondencia en este sentido se mantendrá directamente con el Autor o primero de los Autores que figuren en el Artículo.

Los originales que por cualquier causa no fueran aceptados serán devueltos al Autor.

2. PRESENTACION DE ORIGINALES

Los originales se presentarán mecanografiados a doble espacio, por una sola cara, en hojas tamaño UNE A4. De cada artículo se enviará original y dos copias.

2.1. Título

El título, *en español, francés e inglés* deberá ser breve y explícito, reflejando claramente el contenido del artículo. A continuación se hará constar nombre y apellidos del Autor o Autores, titulación profesional y, si procede, Centro o Empresa en el que desarrolla sus actividades.

2.2. Resumen

Todo artículo deberá ir acompañado de un resumen, *en español e inglés*, de extensión no inferior a cien palabras (unas ocho líneas mecanografiadas) ni superior a ciento cincuenta palabras (doce líneas).

2.3. Gráficos y figuras

Los gráficos y figuras deberán ir numerados correlativamente en el orden en que se citen en el texto, en el cual deberá indicarse el lugar adecuado de su colocación.

Se presentarán delineados en tinta china negra sobre papel vegetal o sobre papel blanco, o en reproducibles de muy buena calidad. Todas las figuras llevarán su correspondiente pie explicativo.

Los rótulos, símbolos y leyendas deberán ser tales que, tras su reducción a la anchura de una o dos columnas de la Revista (setenta y dos o ciento cincuenta mm, respectivamente) queden letras de tañamo no inferior a 1,5 mm y sean, en todo caso, fácilmente legibles.

2.4. Fotografías

Se procurará incluir sólo las que, teniendo en cuenta la reproducción, sean realmente útiles, claras y representativas. Podrán presentarse en copias de papel opaco negro o en color, en negativo, o en diapositivas. Se tendrán en cuenta las normas sobre tamaño de rótulos y leyendas dadas en el punto 2.3 anterior. Irán numeradas correlativamente y llevarán su correspondiente pie explicativo.

2.5. Tablas y cuadros

Cumplirán las proporciones y dimensiones indicadas para las figuras. Llevarán numeración correlativa, citada en el texto, y un pie con la explicación adecuada y suficiente para su interpretación directa.

2.6. Unidades

Las magnitudes se expresarán, preferiblemente, en unidades del Sistema Internacional (S.I.) según las UNE 5001 y 5002.

2.7. Fórmulas, letras griegas, subíndices y exponentes

En las fórmulas se procurará la máxima calidad de escritura y emplear las formas más reducidas siempre que no entrañen riesgo de incomprensión. Para su identificación se utilizará, cuando sea necesario, un número entre paréntesis a la derecha de la fórmula.

Se cuidará especialmente que todas las letras griegas, subíndices y exponentes resulten perfectamente identificables, procurando evitar los exponentes complicados y letras afectadas simultáneamente de subíndices y exponentes.

Cualquier expresión que, por su complejidad, pueda dar lugar a interpretaciones equivocadas, se presentará manuscrita. Se diferenciarán claramente mayúsculas y minúsculas y aquellos tipos que puedan inducir a error (por ejemplo, la ℓ y el 1; la O y el cero; la K y la k, etc.).

2.8. Referencias bibliográficas

Las referencias bibliográficas citadas en el texto se recogerán al final del mismo dando todos los datos precisos sobre la fuente de publicación, para su localización.

Las citas en el texto se harán mediante números entre paréntesis. En lo posible, se seguirán las normas internacionales utilizadas generalmente en las diversas publicaciones, es decir:

Referencias de artículos publicados en revistas

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del artículo; nombre de la publicación; número del volumen y fascículo; fecha de publicación, y número de la primera y última de las páginas que ocupa el artículo al que se refiere la cita.

Referencias de libros

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del libro; edición; editorial, y lugar y año de publicación.

3. PRUEBAS DE IMPRENTA

De las primeras pruebas de imprenta se enviará una copia al Autor para que, una vez debidamente comprobadas y corregidas, las devuelva en el plazo máximo de quince días, con el fin de evitar el riesgo de que la publicación de su artículo tenga que aplazarse hasta un posterior número de "Hormigón y Acero".

En la corrección de pruebas no se admitirán modificaciones que alteren sustancialmente el texto o la ordenación del artículo original.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Estudio crítico del cálculo de flechas en vigas de hormigón armado según la Instrucción EH-88

Jesús Ortíz Herrera
Dr. Ingeniero de Caminos
Catedrático del Dpto. de Estructuras de Edificación
E.T.S. de Arquitectura - Universidad Politécnica de Madrid
Alfonso del Río Bueno
Dr. Arquitecto
Colaborador Científico del I.C.C. Eduardo Torroja
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

1. INTRODUCCION

Las Instrucciones *EH-88 (Ref. 1)* y *EF-88 (Ref. 2)* han introducido importantes avances en materia de cálculo y limitación de deformaciones en piezas flectadas de hormigón armado respecto de la anterior EH-82. Sin embargo, junto a estos avances, la Instrucción EH-88 ha recogido un criterio simplificado de cálculo de flechas diferidas (artículo 45.4) extremadamente conservador, cuya aplicación estricta puede exigir soluciones irracionales y poco competitivas en las estructuras porticadas de hormigón armado, hoy en día mayoritarias en la edificación española.

El presente trabajo muestra la inadecuación del citado criterio de cálculo de flechas diferidas de la Instrucción EH-88, por comparación de sus resultados con los obtenidos por la generalidad de los métodos de análisis más recientemente publicados, refrendados y validados por autores y organismos de probada solvencia científica. Previamente a tal comparación, en el apartado 2 del trabajo se efectúa un repaso detenido del estado actual de la cuestión. En él se relacionan de forma extensa los métodos contrastados, con especial atención a aquéllos que han sido recogidos en reglamentos supranacionales de nuestro entorno europeo, como el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* y el *Código Modelo C.E.B.–F.I.P. (Ref. 4)*.

La aplicación de los modelos contrastados ha permitido concluir que los mismos proporcionan, desde formulaciones dispares, resultados razonablemente homogéneos entre sí, pero con diferencias importantes en términos de flecha diferida respecto a los obtenidos a partir del artículo 45.4 de la Instrucción EH-88.

El grueso del trabajo se destina a probar los aspectos anteriores; pero dos observaciones fundamentales deben manifestarse con el mayor énfasis en este primer apartado:

1. La enorme trascendencia práctica de esta presunta inadecuación del artículo 45.4 de la Instrucción EH-88.

2. Otros aspectos enormemente positivos de EH-88 y EF-88 en materia de cálculo y limitación de deformaciones en piezas flectadas de hormigón armado que son plenamente compartidas por los autores de este trabajo.

En relación con el primer punto es necesario señalar la dificultad que por sí solo exige el cumplimiento de las limitaciones de flecha, con los reducidos cantos usuales en la edificación española. Ello es así incluso utilizando métodos 'correctos' de cálculo *(Refs. 3, 4, 5, 6, etc.)*, pero si a esta dificultad se une el empleo de un método de cálculo fuertemente conservador, como el de EH-88, la dificultad crece hasta hacerse 'imposible' el cumplimiento de los límites marcados en gran número de situaciones frecuentes y no especialmente mal condicionadas.

A lo anterior se une el que, hasta la publicación de la Instrucción EH-88, el cálculo de flechas era frecuentemente realizado con criterios 'elásticos' que proporcionaban flechas de 2 a 4 veces inferiores a los valores 'correctos' *(Refs. 3, 4, 5, etc.)* (1). En estas circunstancias, se comprende el desconcierto presente en el campo de las estructuras de hormigón armado, donde coexisten actitudes que van desde la estricta aplicación de la Instrucción hasta la explícita objeción e inobservancia de la misma, pasando por actitudes intermedias, más sensatas, tales como la huida hacia reglamentos europeos (Eurocódigo, Código Modelo, etc.).

En relación con el segundo punto, entre los aspectos positivos de las disposiciones de las Instrucciones EH-88 y EF-88 hay que destacar:

—La definición de una metodología concreta para el cálculo de flechas, cubriendo el vacío existente en la EH-82, supone un indudable avance

(1) Este error de concepto estaba tan profundamente arraigado que no era bien comprendido que se insistiera, a pesar de todo, en no ignorar los efectos anelásticos (fisuración, fluencia, retracción) con criterios apropiados. La publicación de la Instrucción EH-88 ha provocado en este sentido un ejemplo paradigmático de la "ley del péndulo".

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

(prescindiendo por ahora de lo acertado o desacertado del método).

La introducción de un modelo de cálculo básicamente 'correcto' para el cálculo de flechas instantáneas (artículo 45.3 de EH-88), recogiendo de manera simplificada los efectos de la fisuración, colaboración del hormigón traccionado entre fisuras, variación del armado y del estado de fisuración a lo largo de la pieza, etc. En este sentido se señala que si bien los criterios del artículo 45.3 no son quizá demasiado rigurosos, su aplicación proporciona resultados coherentes con otros métodos de análisis más elaborados (se resalta que se hace referencia ahora al cálculo de flechas instantáneas; es en flechas diferidas donde se producen las divergencias).

—La adopción de unos límites de flecha 'razonables' (artículo 6.3.5 de EF-88), cuestión menos objetivable que el propio cálculo de flechas, en la que la nueva Instrucción se sitúa en un término medio de los valores dispersos que constan en la literatura. Asimismo, la nueva Instrucción española recoge apropiadamente la necesidad de imponer límites de relación flecha/luz variables con la longitud de las piezas.

Por todo ello, parece un imperativo ineludible el que la Instrucción EH-88 asuma también un criterio 'correcto', diferente del actual, en materia de flechas diferidas. Sólo de este modo configuraría un cuerpo de prescripciones sobre cálculo y limitación de flechas, coherente con los reglamentos y recomendaciones supranacionales europeos, y capaz de servir de base, en nuestro país, para un dimensionamiento 'justo', ni conservador ni contrario a la seguridad, de las estructuras de hormigón armado de edificación.

2. EL CALCULO DE DEFORMACIONES EN PIEZAS FLECTADAS DE HORMIGON ARMADO

El comportamiento en servicio de piezas flectadas de hormigón armado aparece descrito en numerosas publicaciones. Como marco conceptual general pueden adoptarse, en primera instancia, el *Boletín del C.E.B. Fisuración y Deformaciones (Ref. 5),* la obra de *Favre y otros (Ref. 6)* o, entre las publicaciones españolas, la monografía de *Alvarez Baleriola y otros (Ref. 7).* De esta última referencia está tomada la figura 1 que describe las deformaciones instantáneas, de una viga de hormigón, que van a ser analizadas a continuación.

La exposición que sigue se limita al caso usual de que las deformaciones de flexión predomien sobre las de cortante, adoptándose en consecuencia la curvatura C (2) como parámetro deformativo característico a nivel sección. No obstante, en condiciones especiales que requieran la consideración de la deformación de cortante, ésta puede ser introducida sin gran dificultad en los modelos de análisis. También en aras de la claridad, se supone conocido el diagrama de flectores de la pieza cuya deformación quiere evaluarse. No se entra así en la determinación de redistribuciones de momentos hiperestáticos, aspecto que trasciende del nivel de análisis de sección y pieza aquí considerado.

La curvatura C_I correspondiente al estado I (no fisurado) puede determinarse mediante la expresión:

$$C_I = \frac{1}{r_I} = \frac{M}{E_c \cdot I_I}$$

siendo:

- M el momento flector que solicita la sección.
- $E_c \cdot I_I$ la rigidez a flexión de la sección de hormigón, considerada sin fisurar y homogeneizando a hormigón las áreas de armadura con el coeficiente de equivalencia n.
- $n = E_s/E_c$, donde E_s es el módulo de elasticidad del acero y E_c el módulo de deformación del hormigón, para cargas instantáneas, que corresponda a su edad.

Para el cálculo de flechas totales, producidas por cargas permanentes, generalmente se admite el procedimiento simplificado de operar con un módulo de deformación efectivo del hormigón, de valor:

$$E_{c\infty} = \frac{E_{co}}{1 + \varphi_\infty}$$

(2) $C = 1/r \approx d\theta/dx \approx d^2v/dx^2$, siendo r el radio de curvatura, θ la función de giros, v la función de flechas y asumiéndose $|\theta| \ll 1$.

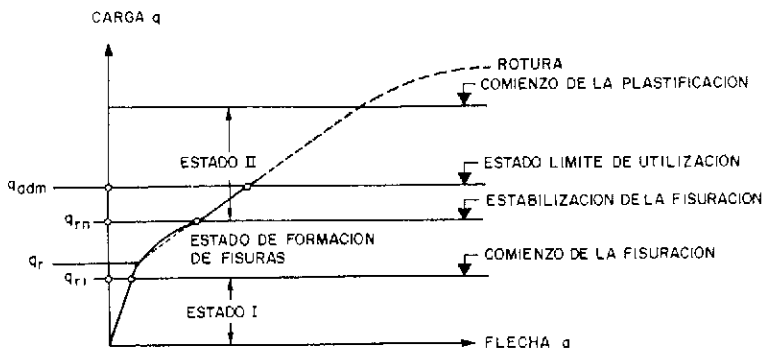


Fig. 1. (Tomada de ref. 7).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

donde φ_∞ es el coeficiente final de fluencia.

Aplicando este módulo de deformación efectivo del hormigón, el coeficiente de equivalencia, n, se modifica resultando $n_\infty = n \cdot (1 + \varphi_\infty)$.

Para un tratamiento más perfeccionado de la fluencia del hormigón se recurre en ocasiones a factores correctores del coeficiente φ_∞. Con ellos se introducen efectos tales como la variación del módulo de deformación E_c con la edad y/o el carácter variable en el tiempo del estado tensional de cada fibra de hormigón (3). En este sentido puede citarse el método A.A.A.E.M. (Algebraic Age Adjusted Effective Modulus) de *Bazant (Ref. 8)* y *Chiorino (Ref. 9)* que introduce los efectos mencionados mediante la corrección del coeficiente de fluencia φ mediante un factor χ (aging coefficient) que varía típicamente entre 0,6 y 0,9. Salvo estudio especial, 0,8 suele considerarse un valor apropiado para dicho coeficiente.

Alternativamente, según otros modelos, la curvatura C_I correspondiente al estado no fisurado puede obtenerse a partir de la curvatura 'elástica' o 'básica', C_c, aplicándole una terna de factores correctores $K_{sI}, K_{\varphi 1}, K_{csI}$. Estos coeficientes, definidos en las citadas referencias *(Refs. 5, 6, 7)*, introducen, respectivamente, la contribución de las armaduras, y los efectos de la fluencia y de la retracción. De este modo, la curvatura final de la sección en estado no fisurado se obtiene a partir de la expresión:

$$C_I = K_{sI} \cdot C_c + K_{sI} \cdot K_{\varphi 1} \cdot \varphi \cdot C_{cg} \pm \pm K_{csI} \cdot |\epsilon_{cs}|/d$$

siendo C_{cg} la fracción de la curvatura 'elástica' correspondiente a cargas permanentes y obteniéndose la curvatura 'elástica' según:

$$C_c = \frac{M}{E_c \cdot I_c}$$

donde I_c es el momento de inercia de la sección 'bruta' de hormigón, considerada sin fisurar y sin armaduras.

La curvatura, $C_{IIo} = 1/r_{IIo}$, correspondiente al estado II_o (estado fisurado sin contribución del hormigón traccionado) puede evaluarse mediante la expresión:

$$C_{IIo} = \frac{M}{Ec \cdot I_{IIo}}$$

siendo $E_c.I_{IIo}$ la rigidez a flexión de la sección completamente fisurada (despreciando la zona de hormigón traccionado) y homogeneizando el área de armadura a hormigón. Según el tipo de solicitación actuante, instantánea o permanente, se adoptarán el coeficiente de equivalencia (n o n_∞) y el módulo de deformación del hormigón (E_c o $E_{c\infty}$) que correspondan.

El término adicional de retracción se calcula aparte, para lo cual debe tenerse en cuenta el estado de fisuración de la pieza.

El cálculo del momento de inercia I_{IIo} (método 'clásico') puede seguirse en el artículo de *Leonhardt (Ref. 10)* o en la obra de *Jiménez Montoya y otros (Ref. 11)* entre muchas otras.

Aunque no implica ninguna dificultad especial, ya que dicha magnitud se determina mediante fórmulas explícitas susceptibles de ser programadas en calculadoras convencionales de bolsillo, se han desarrollado diversos métodos tendentes a facilitar el cálculo de las curvaturas en estado fisurado mediante el uso de tablas y ábacos, eludiendo así el cálculo de I_{IIo}.

Así, en las referencias *(Ref. 5, 6 y 7)* se proporciona una expresión directa de la curvatura C_{IIo} como suma de tres términos. Todos ellos se obtienen a partir de la curvatura 'básica' o 'elástica' C_c, corregida mediante un sistema de coeficientes adimensionales: el primer término, $K_{s2} \cdot C_c$, corresponde a la sección fisurada, sin deformaciones diferidas, y tiene en cuenta la cuantía y disposición de armaduras; el segundo término, $K_{s2} \cdot K_{\varphi 2} \cdot \varphi \cdot C_c$, introduce el efecto de la fluencia; y el tercero, $\pm K_{cs2} \cdot |\epsilon_{cs}|/d$, el de la retracción, siendo ϵ_{cs} la deformación unitaria de retracción y d el canto útil. (El signo ± debe elegirse coincidente con el de la flexión exterior).

En el estado II coexisten secciones plenamente fisuradas con secciones intermedias en las que el hormigón desarrolla tensiones de tracción (siempre inferiores a su resistencia de este signo). Ello determina un régimen de comportamiento macroscópico no lineal, intermedio entre los estados I y II_o (fig. 1). En términos de curvaturas, el comportamiento zonal de la pieza puede describirse apropiadamente mediante una curvatura media, $C_{II} \equiv 1/r_{II}$, que se determina a partir de C_I y C_{IIo} de la forma:

$$C_{II} = (1 - \zeta) \cdot C_I + \zeta \cdot C_{IIo}$$

donde el 'coeficiente de interpolación', ζ, para una sección dada, varía en el intervalo $0 \leq \zeta \leq 1$ en función de la solicitación actuante (evidentemente $\zeta = 0$ para estados no fisurados).

La fórmula de interpolación antedicha procede originalmente de una propuesta de *Branson (Ref. 12)* que ha ido experimentando sucesivos refinamientos. Actualmente, se adoptan coeficientes de interpolación del tipo:

$$\zeta = 1 - f\left[\beta_1 \cdot \beta_2, \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right]$$

(3) Con mayor rigor, ambos efectos pueden introducirse mediante una ecuación constitutiva apropiada del material y el recurso a técnicas bien establecidas para la integración en el tiempo de la respuesta estructural. Pero este tipo de modelización es obviamente prohibitiva para cálculos repetitivos y sistemáticos, y la mejora de precisión que proporciona no justifica su alto coste para este tipo de cálculos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

donde:

- β_1 y β_2 son coeficientes función, respectivamente, del tipo de armadura (lisa o corrugada) y del tipo de solicitación actuante (instantánea, repetitiva o permanente).
- σ_s es la tensión existente en la armadura para la solicitación de servicio.
- σ_{sr} es un valor teórico de referencia, correspondiente a la tensión en la armadura para el instante de iniciarse la fisuración de la sección.

Para estados de flexión pura, el cociente σ_{sr}/σ_s de la expresión precedente puede sustituirse por M_r/M, siendo M el momento que solicita la sección y M_r el momento de fisuración de la misma.

En relación con el fenómeno de retracción, es preciso observar que, en el estado fisurado, incluso para vigas de sección doblemente simétrica, desaparece toda simetría de comportamiento en el plano de la sección, ya que este fenómeno produce no sólo acortamientos axiles sino también curvaturas adicionales, C_{cs}. Estas curvaturas generan términos adicionales de flecha, v_{cs}, que en la mayor parte de modelos son totalmente independientes del nivel de solicitación exterior, excepto en lo que respecta a la extensión de las zonas fisuradas.

Según *Leonhardt (Ref. 10)* y *Johnson (Ref. 13)*, la curvatura debida a retracción en el estado II_0 es $C_{cs} = \pm |\epsilon_{cs}|/d$, expresión que aparece también recogida por el *C.E.B. (Ref. 5)* con el coeficiente corrector K_{cs} antes indicado. Una expresión algo más ajustada se propone en el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* en la que este término de curvatura se obtiene en cada sección o zona dividiendo la deformación unitaria por retracción, ϵ_{cs}, por el brazo mecánico correspondiente (4).

En el método de integración de curvaturas, posteriormente descrito, el término C_{cs} se considera como un sumando más de la curvatura de cada 'rebanada' o sección para su posterior integración. No obstante, para otros métodos de cálculo de carácter 'manual', resulta necesaria una formulación explícita del término de flecha v_{cs}. Siempre que pueda suponerse constante el canto útil a lo largo de la pieza, dicho término puede expresarse de la forma $v_{cs} = \mu \cdot \ell^2 \cdot C_{cs}$, siendo ℓ la luz y μ un coeficiente adimensional que depende de la posición de los puntos de flector nulo. Siendo $\alpha_1 \cdot \ell$ y $\alpha_2 \cdot \ell$ las distancias desde estos puntos al extremo correspondiente, dicho coeficiente se expresa según:

$$\mu = \frac{1}{8} - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2}$$

$$(\text{con } 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 0{,}5 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0{,}5)$$

Como uno de los procedimientos más perfeccionados para el cálculo de flechas, puede mencionarse el llamado *método de integración de curvaturas*. Este método, sugerido por el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, consiste en la aplicación del principio de los trabajos virtuales (teorema de la carga unidad) al diagrama de curvaturas medias C_{II} de la pieza:

$$v = \int_0^{\ell} C_{II} \cdot \bar{M} \cdot dx$$

donde $\bar{M}$ es una función de flectores equilibrada con una carga unidad aplicada en el punto donde se evalúa la flecha v.

Alternativamente, si se desea caracterizar completamente la deformada calculando las flechas en un número suficiente de puntos, resulta preferible la aplicación de los teoremas de Mohr al mismo diagrama de curvaturas:

$$v = \int dx \int C_{II} \cdot dx$$

donde una condición de contorno en flechas y otra en giros o flechas determinan las constantes de integración.

En todo caso, el método de integración de curvaturas requiere la aplicación de algoritmos de integración numérica simples y bien conocidos (regla del trapecio, regla de Simpson, etc.), pero poco practicables a nivel de cálculo 'manual'. Por este motivo, diversos autores han ido proponiendo otros métodos simplificados de cálculo de flechas susceptibles de ser aplicados 'manualmente'.

El denominado *método bilineal (Ref. 5)* permite el cálculo de flechas sin herramientas especiales de análisis, ofreciendo suficiente aproximación. Este método obvia la variación a lo largo de la pieza del coeficiente de interpolación ζ que se obtiene en una única sección, llamada sección determinante. Como tal se adopta la sección central para vanos biapoyados o en continuidad, o la sección de empotramiento si se trata de voladizos. Por otra parte, la expresión de este coeficiente ζ se simplifica en la forma $\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (M_r/M)$, si $|M| \geqslant |M_r|$, o $\zeta = 0$, si $|M| < |M_r|$. La representación gráfica de la curvatura C_{II} en función de M queda entonces constituida por dos tramos rectilíneos, de donde toma su nombre el método. Al suponerse ζ constante a lo largo de la pieza, mediante una doble integración se deduce que este coeficiente de interpolación puede aplicarse directamente a las flechas:

(4) El Eurocódigo EC-2 considera ϵ_{cs} como un valor medio en la zona de hormigón no fisurado, que supone se produce en el baricentro del bloque de compresiones. Al variar este punto con el nivel de solicitación (según el modelo de análisis adoptado), la flecha por retracción es función del nivel de solicitación. Por el contrario, los métodos antes señalados (Refs. 10, 13) entienden ϵ_{cs} como el valor máximo posible en la zona no fisurada que, por tanto, se produce en el borde comprimido. Para estos modelos, la flecha por retracción es independiente del nivel de solicitación.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$v_{II} = (1 - \zeta) \cdot v_I + \zeta \cdot v_{IIo}$$

De esta forma no es necesario el cálculo explícito de las curvaturas, determinándose directamente los diferentes términos que componen v_I y v_{IIo} y procediéndose después a su interpolación mediante la fórmula antedicha. La fecha v_I (estado no fisurado) se compone de los siguientes términos:

$$v_I = K_{s1} \cdot v_c + K_{s1} \cdot K_{\varphi 1} \cdot \varphi \cdot v_{cg} + \\ + \mu \cdot \ell^2 \cdot K_{cs1} \cdot |\epsilon_{cs}|/d$$

siendo, de acuerdo con la nomenclatura ya establecida:

- K_{s1}, $K_{\varphi 1}$, K_{cs1} y μ coeficientes adimensionales.
- v_c la flecha 'elástica' o 'básica', calculada en base a las fórmulas usuales de Resistencia de Materiales, considerando como rigidez a flexión la correspondiente a la sección 'bruta' de hormigón (sin considerar armaduras, fisuración o fluencia).
- v_{cg} la fracción de esta flecha elástica correspondiente a solicitaciones permanentes.

Por su parte, la flecha correspondiente al estado II_o (completamente fisurado), v_{IIo}, se calcula según:

$$v_{IIo} = K_{s2} \cdot v_c + K_{s2} \cdot K_{\varphi 2} \cdot \varphi \cdot v_{cg} + \\ + \mu \cdot \ell^2 \cdot K_{cs2} \cdot |\epsilon_{cs}|/d$$

siempre a partir de las mismas flechas 'básicas' v_c y v_{cg}, pero con los coeficientes adimensionales K_{s2}, K_{φ_2}, y K_{cs2}.

El *método de los coeficientes globales*, también considerado por el *C.E.B. (Ref. 5)* es una versión simplificada del *método bilineal*, de aplicación inmediata con la ayuda de ábacos. La descripción detallada del mismo puede seguirse en la citada publicación del *C.E.B. (Ref. 5)* así como en la monografía de *Alvarez Baleriola y otros (Ref. 7).*

Posteriormente, en la nueva versión del *Código Modelo C.E.B.–F.I.P. (Ref. 4)*, se ha recogido un método enormemente simplificado, de aplicación mucho más directa que los anteriores y que el propuesto en la Instrucción EH-88, no requiriendo siquiera el manejo de ábacos. De acuerdo con este método, la flecha total producida por cargas permanentes se determina en la forma:

$$v = (1 + \varphi) \cdot v_c \;\; ; \text{ si } \;\; |M| < |Mr|$$

o bien:

$$v = \left[\frac{h}{d}\right]^3 \cdot \eta \cdot [1 - 20\ \rho'_m] \cdot v_c \; ; \text{ si } \; |M| \geq |Mr|$$

siendo:

- M el momento flector de la sección 'determinante'.
- M_r el correspondiente momento de fisuración.
- v_c la flecha 'elástica' o 'básica' ya definida.
- η un coeficiente adimensional definido en una tabla en función de la cuantía geométrica media de tracción (ρ_m).
- ρ'_m la cuantía geométrica media de armadura de compresión de la viga (estimada, al igual que ρ_m, de forma aproximada a partir de las cuantías de las secciones central y extremas, promediadas proporcionalmente a los intervalos de flexión 'positiva' y 'negativa' correspondientes).

En esta versión del *Código Modelo (Ref. 4)*, lo mismo que en el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, se incluyen valores de esbeltez de las piezas por debajo de los cuales se exime al proyectista del cálculo de deformaciones. En ambos códigos estos valores son lo suficientemente favorables como para liberar de todo tipo de comprobación de flechas con una elección de cantos en las vigas coherente con lo que los autores calificarían de 'buena práctica' dentro de la edificación española actual.

El *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* establece además las condiciones que debe reunir un cálculo correcto de deformaciones en piezas flectadas de hormigón armado (para aquellos casos en que la comprobación de flechas no pueda omitirse). Como método riguroso de análisis recomienda el *método de integración de curvaturas*, método que ha sido el adoptado en este trabajo para el contraste sistemático desarrollado en los apartados 4.1 y 4.2. No obstante, considera aceptable simplificaciones como la interpolación entre los estados I y IIo, no a nivel de sección (en curvaturas) sino a nivel de pieza (en giros o flechas). Como fórmula de interpolación establece una variante al criterio de Branson antes comentado. Para el cálculo de las curvaturas C_I y C_{IIo} remite a la utilización de las características de las secciones sin fisurar y fisurada (momentos de inercia I_I e I_{IIo}, respectivamente). En materia de solicitaciones permanentes admite la utilización para el hormigón de un módulo de deformación efectivo de valor $E_{c\infty} = E_c/(1 + \varphi)$, lo que conduce al coeficiente de equivalencia $n_\infty = (1 + \varphi) \cdot n$ para el cálculo de secciones homogeneizadas a tiempo infinito, de acuerdo con lo ya señalado en este mismo apartado. No se menciona expresamente en el Eurocódigo la posibilidad de simplificar el cálculo de curvaturas mediante expresiones aditivas similares a las propuestas en el llamado *método bilineal.* La expresión de las curvaturas de retracción, como ya se indicó, es formalmente diferente a la propuesta en este método, si bien conduce a valores razonablemente semejantes.

En todo caso, dado que el método propuesto en el Eurocódigo ha sido el adoptado para el contraste sistemático, en el Apartado 4.1 de este trabajo se efectúa un análisis del mismo en mayor profundidad.

La *Instrucción EH-88 (Ref. 1)* establece en su artículo 45.3 un método para el cálculo de flechas instantáneas aceptablemente preciso (en términos

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

de flecha instantánea, no diferida), como se verifica posteriormente. Tal método está tomado del *Código A.C.I. (Ref. 17)*, y, formalmente, puede objetársele la utilización de la fórmula primitiva de *Branson (Ref. 12)* que interpola momentos de inercia (5):

$$I_{II} = (1-\zeta) \cdot I_c + \zeta \cdot I_{IIo} \geq I_c,$$
$$\text{con } \zeta = 1 \quad (M_r/M)^3$$

en lugar de las fórmulas de interpolación actualmente implantadas, que interpolan parámetros cinemáticos (curvaturas, giros, flechas).

Por otra parte, se fija un criterio de promedio para la obtención del momento de inercia efectivo a lo largo de toda la pieza, que aunque discutible, proporciona resultados razonablemente concordantes con otros modelos (siempre en términos de flechas instantáneas).

Para el cálculo de flechas diferidas, el artículo 45.4 de la Instrucción EH-88 recomienda, "salvo justificación más precisa", su determinación multiplicando la flecha instantánea, v_{II}, por un factor λ dependiente de la duración de la carga y de la cuantía geométrica de armadura comprimida. A tiempo superior a cinco años y para las cuantías usuales de armadura de compresión, el factor λ es del orden de 2. Consecuentemente, según el mencionado artículo de EH-88, la flecha final $v_{II\infty} = v_{II} + \lambda \cdot v_{II}$ resulta del orden de tres veces la instantánea.

Estos órdenes de magnitud podrían parecer inicialmente coherentes con las relaciones usuales entre las deformaciones diferidas e instantáneas del material hormigón. Sin embargo, a nivel de sección (no a nivel de 'punto' o de 'fibra'), y en interacción con el fenómeno de la fisuración, se producen redistribuciones de las tensiones internas, con reajuste de la posición de la fibra neutra y de las características mecánicas de la sección, que determinan, a nivel de sección fisurada, un comportamiento en general mucho más favorable que el comportamiento diferido 'local' del material. Esto determina un carácter acusadamente conservador del artículo 45.4 de la Instrucción, como se ha comprobado en los apartados 3 y 4 del trabajo.

El coeficiente λ de EH-88 procede de un trabajo original de *Yu y Winter (Ref. 14)*, poco reciente (exactamente de 1960) que fue adoptado en varias normas anglosajonas. A este respecto, cabe afirmar que la ciencia y técnica norteamericanas, tan progresistas y modélicas, no encuentran en el campo de la construcción un reflejo demasiado adecuado en la redacción de sus normas. Esta situación, que es bien cierta en el mundo de las estructuras metálicas, parece tener también cierta validez en algunos aspectos de las estructuras de hormigón. Así pues, en opinión de los autores, el apelar a las normas norteamericanas no parece una validación suficiente, al menos en el aspecto específico aquí discutido.

Resulta ante todo sospechoso que algunas referencias al multiplicador de Yu y Winter lo mencionen como aplicable a la flecha 'elástica', v_I o v_c, como por ejemplo aparece reseñado en el apartado 10.1.5 del prestigioso volumen *ASCE-CB-1978 (Ref. 15)*. Si la componente diferida de flecha fuera $\lambda \cdot v_I \approx \lambda \cdot v_c$ (y no $\lambda \cdot v_{II}$), las flechas totales $v_{II} + \lambda \cdot v_c$ para cargas permanentes sí serían coherentes con las evaluadas abrumadoramente por los restantes métodos.

El trabajo original de *Yu y Winter (Ref. 14)*, presenta dos métodos para el cálculo de flechas diferidas: uno analítico (método C) y otro empírico (método D). El método empírico, origen del factor λ, se basa mayoritariamente en experimentación ajena, lo que dificulta el seguimiento y la crítica del método, condiciones y evaluación de los ensayos. La mayor parte de los valores experimentales proceden de una publicación *Washa y Fluck (Ref. 6)* (6). Localizado este trabajo, de su lectura se derivan las siguientes cuestiones:

- Como valor de referencia o denominador de las flechas diferidas, se menciona la flecha 'elástica' (se recuerda la observación anterior al respecto).
- Las piezas ensayadas presentan relaciones luz/canto elevadas (20, 30) o elevadísimas (50, 70), totalmente alejadas de la práctica usual, máxime tratándose de piezas biapoyadas. Esta cuestión es muy importante, ya que la capacidad de redistribución tensional interna y reajuste de la fibra neutra y de las características mecánicas de la sección, tienen márgenes muy reducidos en secciones de tan elevada esbeltez.
- La incidencia de la retracción en piezas biapoyadas (máximo valor de μ) y con tan elevadas relaciones canto/luz es anormalmente alta, y no representativa de los casos usuales.
- No parece razonable una aproximación puramente estadística a un fenómeno con fuertes dosis de varianza. Menos aún pretendiendo hacer recaer en un sólo factor empírico simplista toda la enorme cantidad de fuentes de dispersión del fenómeno: desde la variedad de parámetros geométricos, mecánicos, de solicitación y ambientales que regulan el comportamiento intrínseco del proceso de deformación y los diversos estados posibles de fisuración, hasta la dispersión en las características de los materiales empleados, instrumentación de los ensayos, etc.

Por todo ello, cabe dudar del carácter totalmente representativo de estos ensayos para las estructuras de hormigón armado actuales en la edificación. Tampoco parece conveniente que un 'factor

(5) En la Instrucción EH-88 se adopta la notación I_b, I_f, I_e, M_f para las magnitudes I_c, I_{IIo}, I_{II}, M_r.

(6) Fechada en 1952 (¿Investigación contradictoria con las de los 37 años posteriores?).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

multiplicador' con tal base empírica, reemplace a los actualmente formulados y validados modelos analíticos.

Es importante señalar que la Instrucción *EH-88 (Ref. 1)*, en su artículo 26.9, desarrolla una elaborada formulación del mencionado coeficiente de fluencia, φ_t, en función del conjunto de variables principales del problema. En tales condiciones, no se comprende por qué existiendo en la Instrucción un planteamiento riguroso del fenómeno de la fluencia del hormigón, dicho planteamiento sea ignorado para calcular deformaciones diferidas debidas a ese mismo fenómeno.

3. COMPARACION DE RESULTADOS EN UN EJEMPLO SIGNIFICATIVO

El apartado 4.6.3 de la publicación de *Alvarez Baleriola y otros, (Ref. 7)*, analiza y compara los resultados que se obtienen de la aplicación de diferentes métodos de cálculo a un mismo ejemplo, correspondiente al tramo extremo de una viga continua de tres vanos bajo carga uniformemente repartida. Los procedimientos considerados en la citada publicación (método de integración de curvaturas, método bilineal y método de los coeficientes globales), se completan aquí resolviendo el mismo caso según la aplicación del *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* en los términos descritos en el apartado que sigue, el *Código Modelo C.E.B.–F.I.P. (Ref. 4)*, la Instrucción española *EH-88 (Ref. 1)* y un método simplificado propuesto por los autores de este artículo en otro de publicación simultánea en esta revista *(Ref. 18)*.

El ejemplo de referencia trata de una viga continua, de tres vanos de 9 m de luz, sometida a una carga uniformemente repartida de 12 KN/m. La sección 'bruta' es rectangular y constante, con 30 cm de ancho y 50 cm de canto *(fig. 2)*. Se trata de calcular la flecha en el centro del vano extremo (sensiblemente coincidente con la máxima correspondiente). Como ley de flectores se adopta el diagrama elástico, con momentos hiperestáticos sobre apoyos intermedios de valor – 97,2 m.KN. (En la publicación de referencia puede comprobarse cómo en fase de servicio los momentos redistribuidos difieren muy poco de los elásticos). La armadura longitudinal inferior está constituida por 4Φ16 dispuestos en toda la longitud. La armadura longitudinal superior, constituida también por 4Φ16, se extiende exclusivamente a las zonas de flexión 'negativa', más longitudes de decalaje y anclaje. Las características del hormigón son las siguientes: $f_{ck} = 25$ MPa; $\epsilon_{cs} = -30 \cdot 10^{-5}$; $\varphi_\infty = 2{,}5$ (admitiéndose $\chi = 0{,}8$); los parámetros f_{ct} y E_c son datos del problema, siendo $f_{ct} = 2{,}5$ MPa y $E_c =$

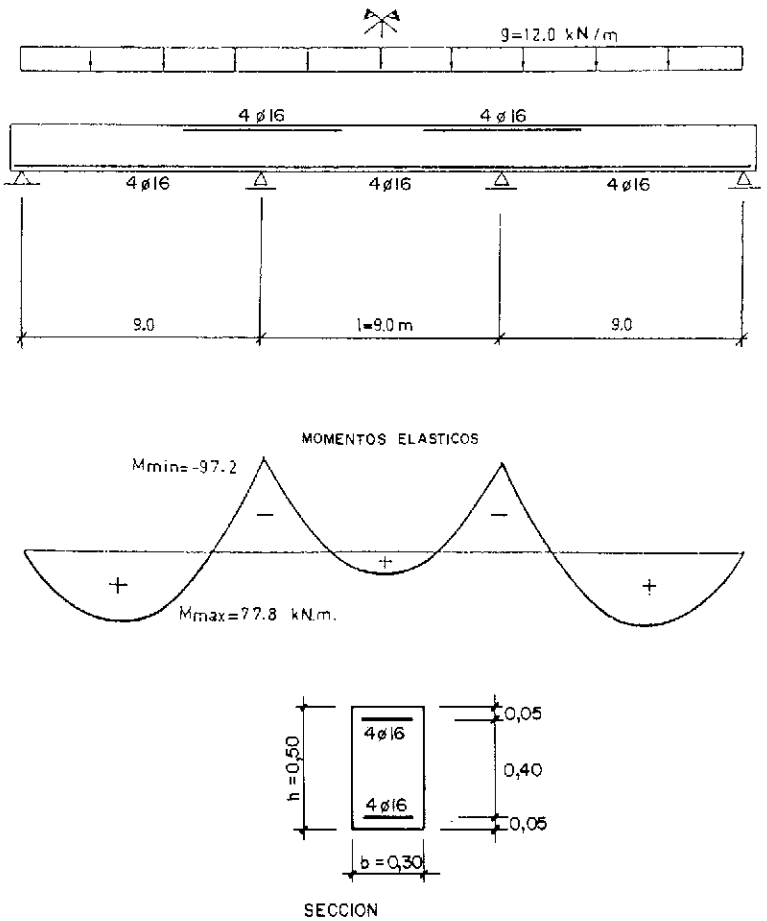


Fig. 2. (Tomada de la ref. 7).

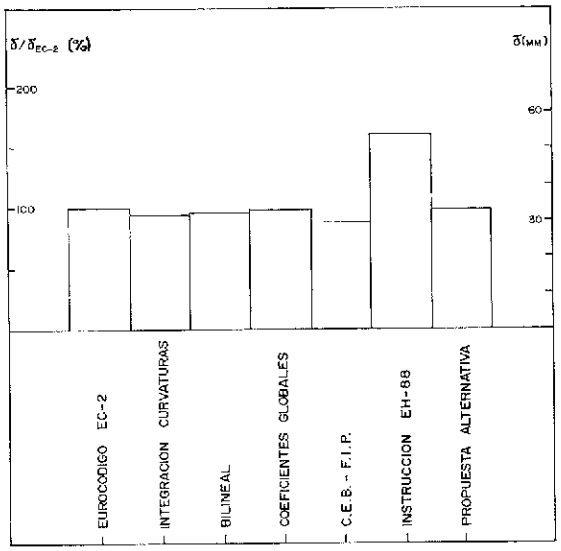
Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

= 30,5 GPa. (Estos últimos valores responden a la aplicación de expresiones propuestas por el Eurocódigo, y se han mantenido constantes para todos los métodos considerados, a fin de homogeneizar resultados).

La Tabla I resume y compara los valores obtenidos, proporcionando los errores que en el cálculo de la flecha total se obtienen de la aplicación de uno u otro procedimiento respecto al Método General propuesto en el Eurocódigo EC-2.

Tanto, la Tabla I, como la figura *(fig. 3)*, permiten apreciar cómo para el ejemplo considerado todos los métodos estudiados, a excepción de la propuesta de la Instrucción EH-88, proporcionan flechas totales razonablemente concordantes. En efecto, siempre en términos de flechas totales (instantánea más diferida para una carga cien por cien permanente), los diferentes métodos considerados presentan errores muy reducidos, en la mayor parte de los casos por debajo del 5 por 100 y siempre por debajo del 12 por 100 que se obtiene con la sencilla y fácil de aplicar propuesta del C.E.B. - F.I.P. Este orden de errores se encuentra bien lejos del 61 por 100 (del lado de la seguridad) que arroja la Instrucción EH-88 y que es indicativo de su carácter extremadamente conservador.

Las divergencias entre la Instrucción española y el resto de los métodos estudiados son aún mayores si se considera exclusivamente la componente diferida de flecha (aquélla debida a fluencia y retracción). En efecto, para esta componente el error de la EH-88 resulta, en el ejemplo considerado, del 78 por 100, claramente superior al orden de divergencia que manifiestan los restantes métodos. En todo caso, hay que señalar que descomponiendo los resultados de los diferentes métodos en componente instantánea y diferida, las diferencias entre unos y otros, para cada una de las componentes,



COMPARACION DE RESULTADOS PARA UN EJEMPLO SIGNIFICATIVO .

Fig. 3.

resultan en general superiores respecto a las diferencias que se producen en flechas totales. Ello se debe, en la mayor parte de casos, a que el calibrado y ajuste de los modelos se efectúa en términos de deformaciones totales.

4. CONTRASTE SISTEMATICO DE FLECHAS CALCULADAS SEGUN LA INSTRUCCION EH-88 Y EL EUROCODIGO EC-2

A fin de determinar el alcance de las discrepancias entre la propuesta de cálculo de flechas diferidas introducida por la Instrucción EH-88 y el mé-

Tabla 1

Resultados de flecha según diversos métodos, para un ejemplo significativo

Método	Flecha mm (% sobre EC-2)		
	Instant.	Diferida	Total
Eurocódigo EC-2	13,7 (100)	20,0 (100)	**33,7 (100)**
Integración curvaturas	—	—	**31,8 (94)**
Bilineal	16,5 (120)	15,7 (79)	**32,2 (96)**
Coeficientes globales	15,2 (111)	17,6 (88)	**32,8 (98)**
C.E.B. - F.I.P.		—	**29,5 (88)**
Instrucción EH-88	18,5 (135)	35,6 (178)	**54,1 (161)**
Propuesta alternativa	18,5 (135)	14,6 (73)	**33,1 (98)**

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

todo recomendado en el Eurocódigo EC-2, se ha procedido al tratamiento sistemático de un elevado número de casos. Tales casos han sido seleccionados de modo que constituyan una muestra amplia y representativa de la edificación convencional española.

Antes de entrar en la descripción detallada del modelo adoptado y de los casos analizados, debe indicarse que, como se evidenció en el apartado 3, el método propuesto en el Eurocódigo EC-2 concuerda razonablemente con una amplia gama de modelos (Código Modelo CEB-FIP, integración de curvaturas, bilineal, método de los coeficientes globales, entre otros). En estas circunstancias, puede entenderse que la comparación que se presenta no es exclusivamente frente a un modelo determinado sino frente a un conjunto de ellos.

En los subapartados que siguen se exponen, tanto la metodología de cálculo adoptada como los resultados obtenidos en los casos analizados.

4.1. Descripción del algoritmo de análisis

El modelo de cálculo de flechas adoptado como patrón en la comparación con la propuesta de la Instrucción EH-88, se basa en la aplicación rigurosa del Eurocódigo EC-2 en su edición de diciembre de 1988.

De acuerdo con el Artículo 4.4.3.3 de esta reciente norma europea así como con su Apéndice 4, un método riguroso para comprobar deformaciones en elementos a flexión consiste en el cálculo de curvaturas en secciones suficientemente próximas y posterior integración de las mismas. En las aplicaciones expuestas en este trabajo, el intervalo de discretización ha sido de 5 cm, lo que proporciona resultados de gran precisión.

La integración de curvaturas se realiza recibiendo como dato la ley de momentos. Consecuentemente, se prescinde de la determinación de la redistribución de momentos hiperestáticos que, como se indicó, trasciende el análisis a nivel de pieza aquí considerado.

El efecto de fenómenos esenciales como fisuración, colaboración del hormigón entre fisuras, fluencia y retracción es considerado según las directrices del Eurocódigo EC-2 que se exponen a continuación.

De acuerdo con ellas, así como con los aspectos analizados en el Apartado 2, en cada sección (más propiamente 'rebanada') utilizada para el cálculo e integración de curvaturas, el estado de deformación queda comprendido entre dos situaciones límite:

– Situación no fisurada (I), en la cual hormigón y acero trabajan elástica y conjuntamente en compresión y tracción. En esta situación, para las cuantías usuales en vigas de edificación, el efecto del armado es poco relevante, por lo que la respuesta deformativa puede calcularse a partir de las constantes de la sección 'bruta' de hormigón.

Situación de completa fisuración (II_o), para la cual se desprecia la colaboración del hormigón a tracción. En esta situación, dado que las deformaciones se calculan eh condiciones de servicio, bien alejadas de las últimas, la respuesta de la sección puede aproximarse con suficiente precisión adoptando las constantes correspondientes a la sección fisurada equivalente, homogeneizada a hormigón con un módulo de deformación coherente con la duración de la carga.

En aquellos elementos, secciones o 'rebanadas', en los que no se supere la resistencia a tracción del hormigón en ningún punto, obviamente la determinación de deformaciones puede efectuarse considerando exclusivamente la situación I. De no ser así, se está en un estado de fisuración repartida de forma discreta (II). Consecuentemente, como se indicó en el Apartado 2, coexisten secciones totalmente fisuradas con secciones en las que el hormigón desarrolla tensiones de tracción. En estas condiciones, la respuesta deformativa (en este caso curvatura, si bien puede también ser un giro, deformación unitaria o incluso flecha) resulta intermedia entre ambas situaciones (I y II_o). Es decir:

$$\alpha_{II} = (1 - \zeta) \cdot \alpha_I + \zeta \cdot \alpha_{IIo}$$

Donde ζ es un coeficiente de interpolación. Para elementos no pretensados, en flexión pura, según la propuesta del Eurocódigo EC-2 adoptada en el modelo de comparación, dicho coeficiente es:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left[\frac{M_r}{M}\right]^2$$

siendo:

- β_1 un coeficiente que considera la adherencia de las barras al hormigón. Su valor es 1 para barras corrugadas de alta adherencia y 0,5 para barras lisas.
- β_2 un coeficiente dependiente de la duración y/o repetitividad de la carga. Su valor es 1 para cargas monótonas instantáneas y 0,5 para cargas repetitivas o de larga duración. En caso de coexistencia de cargas de diferente duración pueden admitirse valores intermedios.
- M_r el momento de inicio de fisuración en la sección o rebanada considerada.
- M es el máximo momento actuante en la sección (suma del debido a acciones permanentes e instantáneas). En caso de ser inferior a M_r debe adoptarse $\zeta = 1$.

El coeficiente de interpolación propuesto por el Eurocódigo EC-2, presenta ciertas diferencias formales con el planteado en la Instrucción EH-88. Sin embargo, la aplicación práctica de uno u otro en vigas convencionales de edificación proporciona resultados finales sensiblemente coincidentes.

Las características mecánicas del hormigón que intervienen en el cálculo de deformaciones y de cu-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ya precisión depende el resultado final son su resistencia a (flexo–) tracción, f_{ct}, y su módulo de deformación longitudinal efectivo, E_c.

Para cargas instantáneas, ambas normas proporcionan tales magnitudes a partir de la resistencia característica a compresión. Las formulaciones propuestas son formalmente diferentes, si bien su aplicación conduce a resultados razonablemente concordantes en los hormigones usuales de edificación.

Una aplicación rigurosa de los métodos considerados exigiría adoptar, para cada uno de ellos, los valores correspondientes de f_{ct} y E_c. Sin embargo, en el tratamiento de casos efectuado, se ha optado por utilizar iguales valores de resistencia a tracción y módulo de deformación en la aplicación de uno y otro método a cada ejemplo analizado. Ello se ha hecho a fin de centrar la comparación en el procedimiento y no introducir discrepancias en base a los datos de partida.

Al ser la propuesta de la Instrucción EH-88 de carácter más cerrado que la del Eurocódigo y haber podido intervenir en su desarrollo un ajuste en función de las formulaciones de las citadas características mecánicas, se ha optado por utilizar precisamente éstas. Así se ha adoptado:

$$f_{ct} = 0{,}8 \cdot (f_{ck})^{2/3}$$

$$E_c = 19000 \cdot \sqrt{f_{ck}}$$

En todo caso, hay que indicar que la utilización de uno u otro conjunto de valores de resistencia a tracción y módulo de deformación, influye de modo muy reducido en el resultado final. Así, en el ejemplo del Apartado 3, la aplicación del método general del Eurocódigo con los valores de resistencia a flexo-tracción y módulo de deformación de la EH-88 proporciona una flecha total (sin retracción) de 26,36 mm. Este valor puede considerarse sensiblemente coincidente con los 27,34 mm que se obtienen partiendo de la resistencia a tracción y módulo de deformación proporcionados por el Eurocódigo (3,6 por 100 de error).

Para cargas permanentes, y siempre de acuerdo con las prescripciones del Eurocódigo, el fenómeno de fluencia se incorpora utilizando un módulo de deformación efectivo en el hormigón de valor:

$$E_{ct} = \frac{E_c}{1 + \varphi_t}$$

siendo φ_t el coeficiente de fluencia para la edad t en que se calcula la flecha (en general $t \to \infty$), definido en función de parámetros como la edad del hormigón en el instante de aplicación de la carga, las condiciones de humedad y curado, etc. Para una mayor precisión, sobre este factor se puede incorporar el efecto del incremento de resistencia y de rigidez que experimenta este material con la edad. Tanto el Eurocódigo EC-2 como la Instrucción EH-88 proporcionan valores para este coeficiente. En las condiciones medias de la edificación española ambas normas tienden a coincidir en torno a un valor $\chi \varphi_\infty = 2$ (incluyendo ya la corrección por incremento de rigidez con la edad).

Consecuentemente, el planteamiento del Eurocódigo EC-2 para la evaluación de flechas debidas a fluencia, permite tomar en consideración el conjunto de variables fundamentales del problema, admitiendo diversos grados de refinamiento que deben adecuarse a las necesidades de precisión. Este carácter global y riguroso contrasta con el restrictivo y simplista factor λ introducido en EH-88, del que se hacen depender conjuntamente los efectos de fluencia y retracción, ignorando incluso formulaciones y planteamientos desarrollados rigurosamente dentro de la misma Instrucción.

En aquellas zonas en que se alcanza la fisuración ($M > M_r$), la retracción deja de producir exclusivamente un acortamiento de las mismas y genera curvaturas de igual signo a las provocadas por el momento actuante. Existe en esas condiciones un término adicional de curvatura por retracción. Siempre de acuerdo con el Eurocódigo EC-2, esta curvatura se estima según:

$$C_{cs} = \frac{1}{r_{cs}} = \pm \epsilon_{cs} \cdot n_\infty \cdot \frac{S_{II}}{I_{II}}$$

siendo:

- ϵ_{cs} el acortamiento unitario por retracción del material (que la Instrucción EH-88 propone con valor -25×10^{-5} para hormigón armado).
- n_∞ el coeficiente de equivalencia efectivo. Es decir, $n_\infty = E_s / E_{c\infty}$.
- S_{II} el momento estático efectivo de la armadura traccionada respecto al centroide de la sección (o a la fibra neutra). Se calcula considerando el módulo de deformación efectivo del hormigón a tiempo infinito, $E_{c\infty}$, y promediando su valor entre los correspondientes a los estados I y II_o, con el coeficiente de interpolación anteriormente propuesto.
- I_{II} el momento de inercia de la sección, determinado con iguales criterios que los expuestos para S_{II}.

El cálculo de deformaciones producidas por la actuación simultánea de cargas de larga y breve duración resulta un problema habitual en edificación. En el Apéndice I del artículo de los mismos autores publicado simultaneamente en este número, se efectúa una revisión rigurosa del problema. Con independencia de ella, hay que resaltar que, una vez iniciada la fisuración, el principio de superposición de efectos (tensiones, deformaciones, curvaturas, flechas, etc.) deja de ser correcto, incluso dentro del dominio cuasi-lineal que corresponde a los estados de servicio a los que aquí se hace referencia.

Sin embargo, salvo casos excepcionales, el error cometido admitiendo tal superposición resulta reducido, siempre que al determinar las deformacio-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

nes para cada tipo de carga considerada dentro del estado II de fisuración discretamente distribuida, se interpolen las correspondientes a los estados I y II_o, operando con la solicitación total (suma de las correspondientes a cargas de breve y larga duración). Es decir, para el cálculo de las curvaturas debidas a una u otra solicitación en cada sección considerada, la interpolación entre los valores de la sección bruta de hormigón y la completamente fisurada (con el módulo de deformación correspondiente) ha de hacerse determinando el coeficiente de interpolación con el momento total.

Una vez determinadas con los criterios anteriores las curvaturas debidas a uno u otro tipo de carga así como a retracción en las secciones consideradas, se procede a su (doble) integración. En una primera integración se admite giro nulo en el extremo izquierdo ($\theta_i = 0$), además de, obviamente, flecha nula en igual punto ($v_i = 0$). Con esta imposición se determina la deformada del tramo que, en general, no cumple la condición de flecha nula en el extremo opuesto ($v_d \neq 0$). El giro en el extremo izquierdo debe pues corregirse, y será $\theta_i = v_d/\ell$, siendo ℓ la luz del tramo. Conocido este giro, se reintegran las curvaturas, obteniéndose una deformada coherente con las condiciones de extremo y con la ley de momentos del tramo analizado.

Se determinan así tres términos de flecha: uno debido a acciones permanentes, otro debido a acciones instantáneas y otro debido a retracción. Estos términos pueden superponerse sin grave error para vigas convencionales de edificación, ya que en su determinación se tiene en cuenta su interrelación en el fenómeno de fisuración.

4.2. Tratamiento sistemático de casos

El modelo anteriormente expuesto, basado en una interpretación rigurosa del Furocódigo EC-2 así como del actual estado de conocimientos, ha sido implementado mediante el programa de ordenador FLECHA, desarrollado por los autores para facilitar el tratamiento exhaustivo de casos. Dicho programa permite trazar la deformada y calcular la flecha máxima en tramos de vigas de hormigón armado, en las siguientes condiciones:

— Se admite exclusivamente sección 'bruta' constante, bien rectangular, o bien tipo 'T'.

Se considera la posibilidad de aplicación simultánea de acciones de breve y larga duración, que son tratadas en los términos anteriormente expuestos. Para cada una de ellas se admite un único esquema, consistente en momentos en los extremos y carga uniformemente repartida, extendida a lo largo de toda la luz.

El armado de la viga debe estar dispuesto exclusivamente en sus caras superior e inferior, con recubrimientos iguales en todos los casos, debiendo poder definirse del siguiente modo:

En la capa superior, un conjunto de redondos cubriendo la totalidad de la luz y que se suponen perfectamente anclados en extremos y un máximo de dos capas en cada extremo, de longitud variable, simulando los refuerzos usuales de 'negativos'.

En la capa inferior un grupo de redondos extendidos en toda la longitud y supuestos perfectamente anclados en extremo, más un máximo de una capa de refuerzo, centrada en la longitud de la viga.

— Las zonas de anclaje correspondientes a los extremos libres de las barras de armadura, se determinan conforme a la Instrucción EH-88. A lo largo de ellas, se considera una pérdida lineal de sección de armadura que simula la pérdida de tensión que se produce en dicha zona.

— La resistencia a flexo-tracción del hormigón, f_{ct}, su módulo de deformación longitudinal instantáneo, E_c, el coeficiente de fluencia, φ_t, y la deformación unitaria por retracción, ϵ_{cs}, pueden ser separadamente definidos por el usuario. (Por defecto, a partir de la resistencia característica del hormigón, se adoptan los valores resultantes de aplicar lo indicado en la Instrucción EH-88).

Para cada caso analizado, el programa facilita los términos de flecha debidos a cargas permanentes, cargas instantáneas y retracción, calculados en base al método general propuesto por el Eurocódigo. También proporciona los valores que resultan de aplicar la Instrucción EH-88, así como el método alternativo propuesto por los autores en el artículo que se publica simultáneamente en esta revista. Opcionalmente, pueden obtenerse datos completos de curvaturas y flechas para cada sección considerada.

El tratamiento sistemático de un amplio y significativo conjunto de casos correspondientes a vigas usuales de edificación, llevado a cabo a través del programa FLECHA, ha permitido el contraste sistemático de los resultados que proporciona la Instrucción EH-88, con los obtenidos aplicando el método general del Eurocódigo EC-2. En dicho tratamiento, se han considerado variables esenciales del problema (evidentemente interrelacionadas) como son luz, condiciones de apoyo, esbeltez, escuadría y cuantía de armadura.

La selección de los casos analizados, se ha efectuado partiendo de una viga 'media' de edificación, de 5,5 m de luz, con giro limitado en un extremo y libre en el otro, una esbeltez geométrica de 20 y un ancho determinado de modo que la capacidad mecánica de la armadura de tracción, para el máximo momento, esté en torno a $0{,}4.b.d.f_{cd}$ (sin armadura de compresión, consecuentemente). La carga actuante sobre ella se ha tomado igual a la que correspondería a una banda de 5 m de forjado de vivienda convencional, con una carga superficial total de 650 Kp/m². De ellos, la fracción correspondiente a pesos propios de forjado (250 Kp/m²) y solado (100 Kp/m²) así como la sobrecarga de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

tabiquería (100 Kp/m²) se supone actuando de modo permanente, en tanto que la fracción correspondiente a la sobrecarga de uso (200 Kp/m²) se supone de actuación eventual e instantánea.

Partiendo de esta configuración media, se han hecho oscilar las variables principales dentro de su rango habitual en estructuras de edificación:

- Se han considerado otras dos posibles luces: una 'corta' de 4 m, y otra 'larga' de 8 m.

– También se han considerado otras dos posibles condiciones de extremo: viga con giro limitado en ambos extremos y viga con giro libre en ambos extremos.

Las esbelteces se han hecho oscilar entre 10 y 28 en 9 intervalos, cubriendo pues un amplio espectro y permitiendo trazar gráficas adimensionales del tipo $(\delta/L)/(L/h)$.

- Se han considerado adicionalmente dos capacidades mecánicas de armadura de tracción, U_s: una 'baja' $(0{,}25.b.d.f_{cd})$ y otra alta que exige ya armadura de compresión $(0{,}60.b.d.f_{cd})$. (En base a estas cuantías, definida la esbeltez se determina el ancho).

Para cada tipología considerada se han calculado las deformaciones bajo tres condiciones de carga/edad:

– En primer lugar, se han determinado las flechas correspondientes a la totalidad de la carga de servicio, distribuida en permanente e instantánea según los criterios anteriormente expuestos. En todos los casos, se asume un coeficiente efectivo de fluencia $\chi \cdot \varphi = 2{,}0$ aplicable exclusivamente a la fracción de cargas permanentes (en este coeficiente se considera ya incluida la corrección por incremento de rigidez del material con la edad). La deformación unitaria por retracción se considera $\epsilon_{cs} = -25.10^{-5}$. Las flechas así determinadas se denominan, en lo que sigue, flechas máximas.

– En segundo lugar, se determinan las deformaciones que en un proceso constructivo estandar pueden esperarse en el instante de realización de la tabiquería. Para ello se considera actuando la fracción de carga correspondiente al peso del forjado (250 Kp/m²), durante un mes a partir de los 28 días de edad del material. En estas condiciones resulta un coeficiente efectivo de fluencia $\varphi = 0{,}9$ y una deformación unitaria de retracción $\epsilon_{cs} = -18.10^{-5}$. (Para aplicar la fórmula de la Instrucción EH-88, se considera $\xi = 1{,}0$, correspondiente a cargas actuantes por un período inferior a tres meses).

Restando el valor de flecha así calculado, de la flecha máxima, se obtiene la flecha activa sobre la tabiquería.

– En tercer lugar, se determina la deformación instantánea que correspondería a la aplicación de la totalidad de la carga a una edad de 28 días. Esta flecha, aún cuando no tiene un significado práctico en los procesos constructivos usuales, permite obtener la componente de flecha diferida como consecuencia de los fenómenos de fluencia y retracción, restándola de la flecha máxima. Esta componente diferida presenta un especial interés, en este trabajo, a la hora de estudiar el alcance y precisión de la fórmula que para dicha componente proporciona la Instrucción EH-88.

Una parte de los resultados obtenidos en el tratamiento de casos realizado y anteriormente descrito, se resume en los cuadros y figuras adjuntas. En estas últimas, se han trazado gráficas adimensionales, con esbelteces geométricas (ℓ/h) en abscisas y deformaciones relativas (δ/ℓ) en ordenadas, que permiten visualizar fácilmente las discrepancias entre los resultados correspondientes al Eurocódigo EC-2 y a la Instrucción EH-88. Todos los resultados recogidos en las figuras *(figs. 4 a 9)* corresponden a vigas de luz media y cuantía de armado igualmente media, considerando diferentes condiciones de extremo y esbelteces. Las figuras 4 y 5 corresponden al caso de viga biapoyada, representándose en la primera de ellas los resultados correspondientes a flechas totales y en la segunda los correspondientes a flechas activas sobre la tabiquería. Las figuras 6 y 7 corresponden a vigas apoyadas en un extremo y empotradas en el otro, ofreciéndose en la primera resultados correspondientes a flechas totales y en la segunda a flechas activas. Finalmente, las figuras 8 y 9 ofrecen, con iguales criterios, resultados correspondientes a vigas con continuidad en ambos extremos.

Además de los casos 'medios' antes indicados, también se han estudiado otras luces y armados, llegándose a conclusiones cualitativamente coincidentes. Como resumen de resultados de los diferentes casos analizados, puede considerarse la Tabla 2. En ella se proporcionan errores medios de la propuesta de EH-88 en relación con el Eurocódigo EC-2, obtenidos para flechas instantáneas, diferidas, totales, y activas sobre la tabiquería, para una treintena de vigas.

Tabla 2

Resumen de resultados - Errores medios

Errores medios $\frac{\delta_{EH} - \delta_{EC}}{\delta_{EC}}$ (%)	Tipo de flecha			
	Instant.	Diferida	Total	Activa
	8,9	105,8	48,2	74,4

El análisis de los resultados que se presentan, pone en evidencia las divergencias existentes entre la aplicación de los artículos 45.3 y 45.4 de la Instrucción EH-88 y del modelo general de integración de curvaturas propuesto en el Eurocódigo EC-2:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

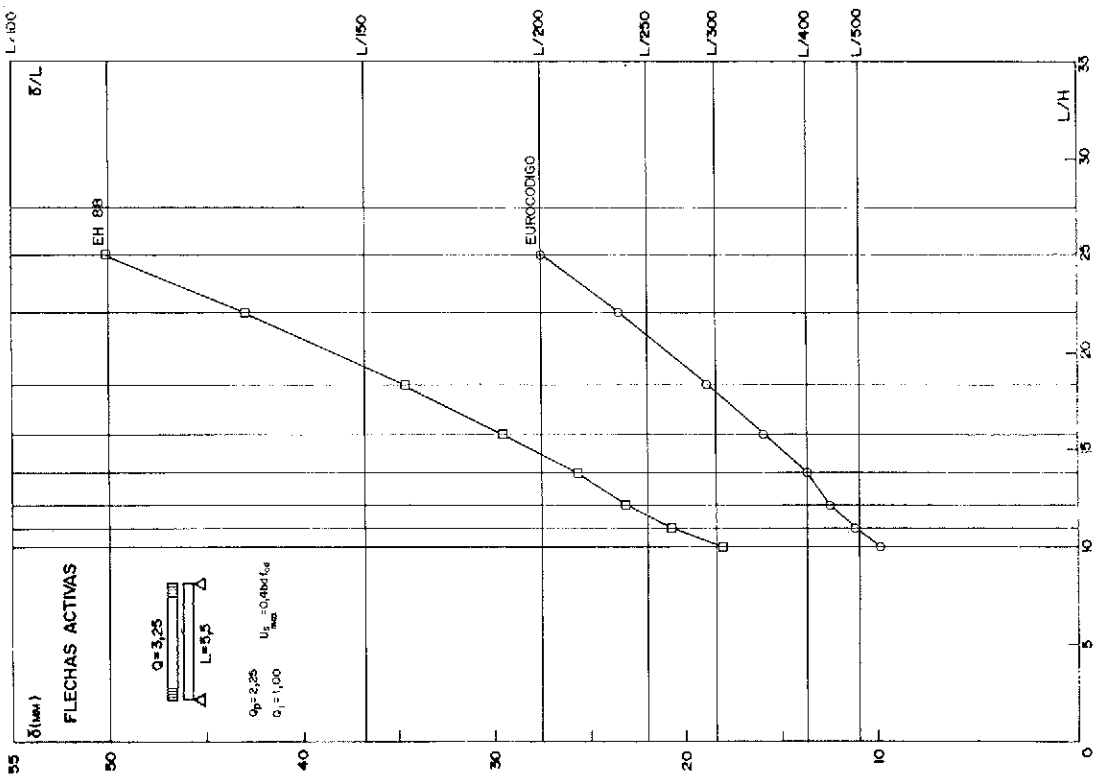


Fig. 5.

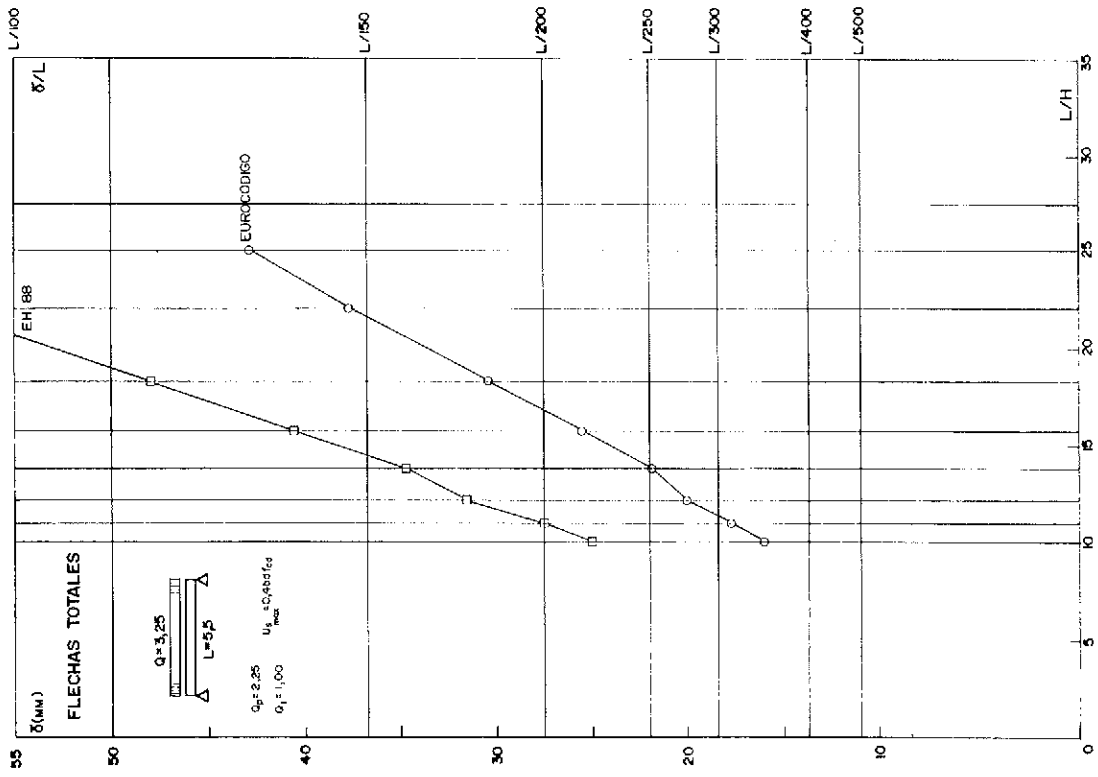


Fig. 4.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

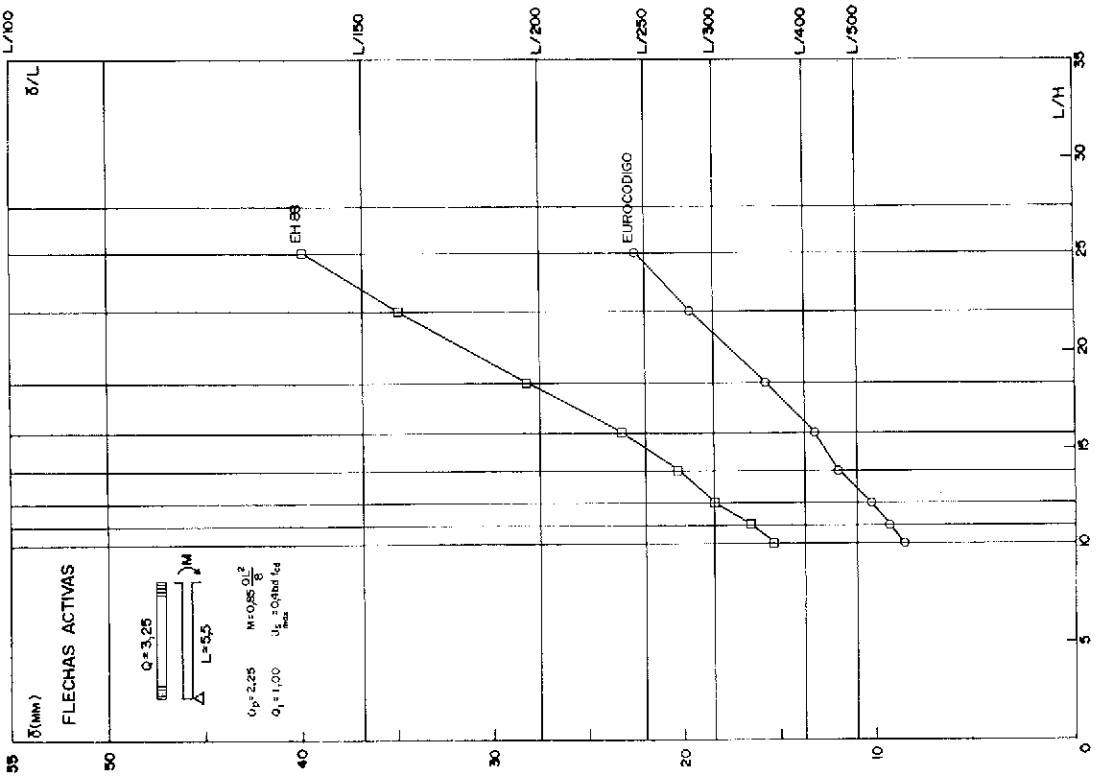


Fig. 7.

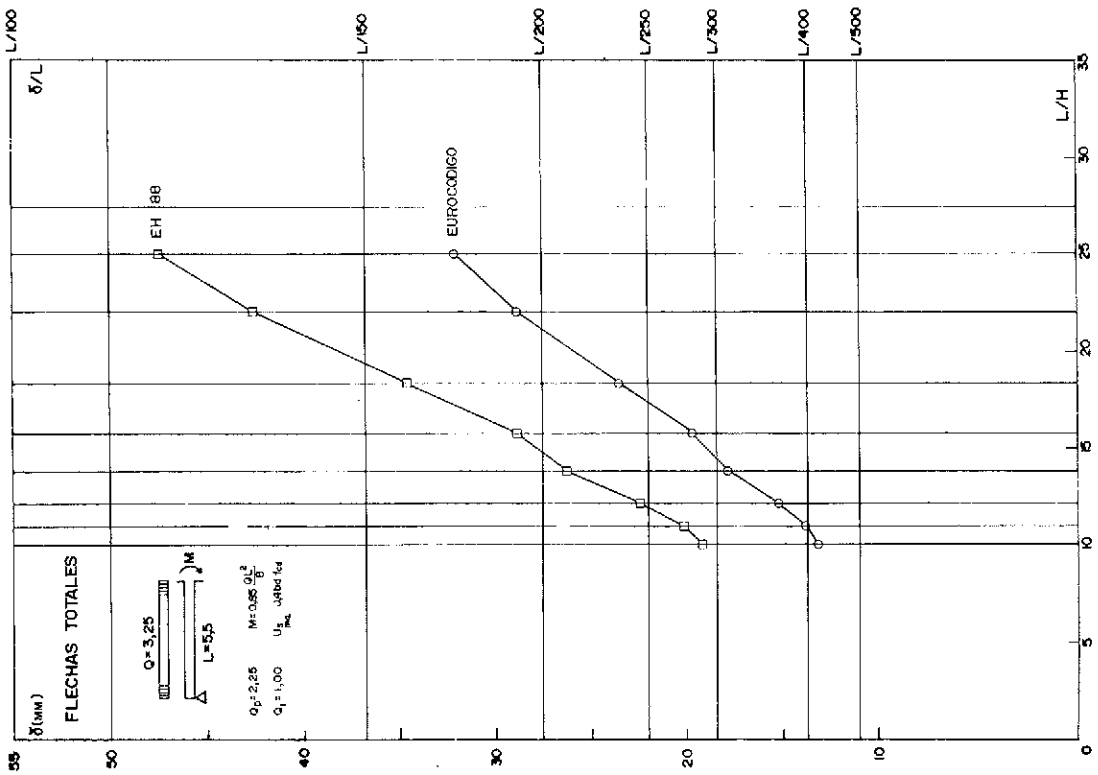


Fig. 6.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

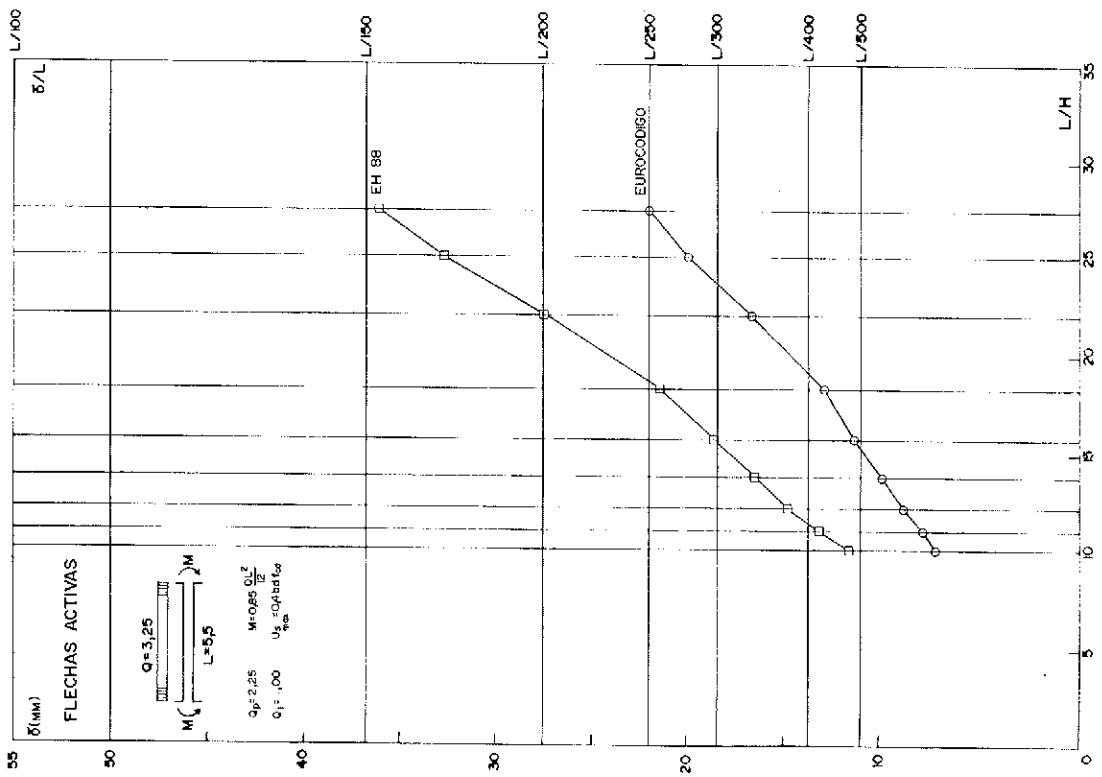


Fig. 9.

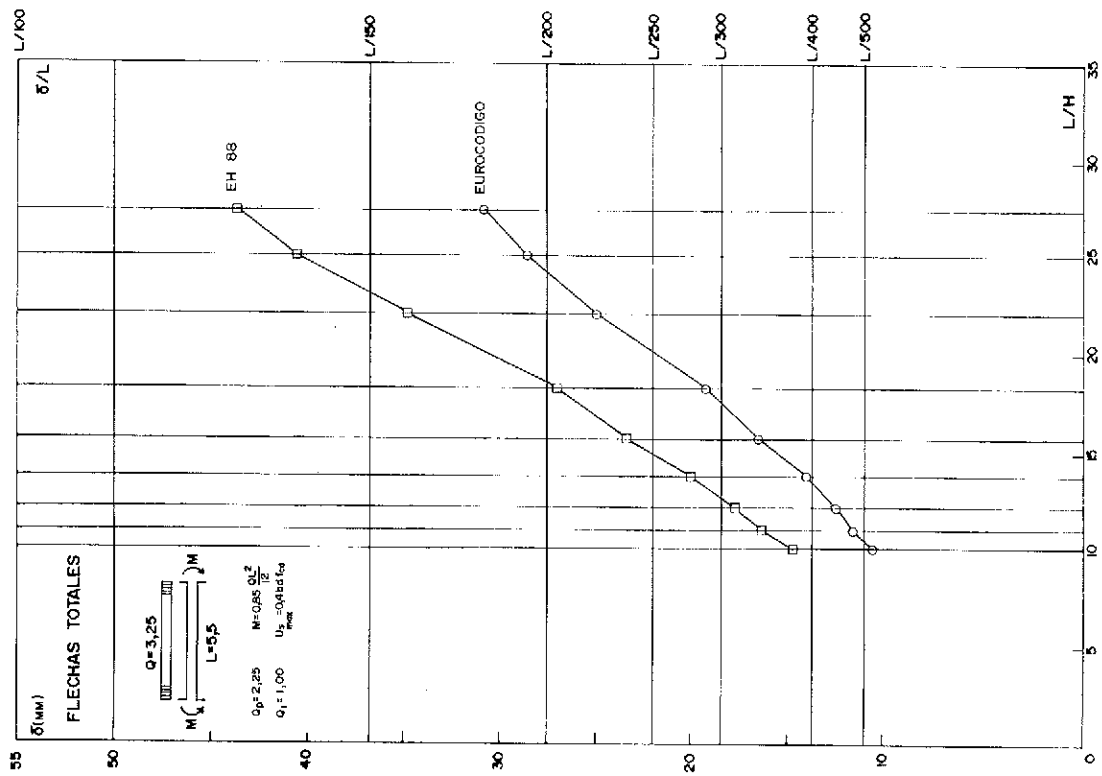


Fig. 8.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

– En términos de flechas instantáneas, las diferencias obtenidas entre uno y otro procedimiento son muy reducidas. El error que se comete aplicando el artículo 45.3, respecto a la solución obtenida por integración de curvaturas de acuerdo con el Eurocódigo EC-2, es inferior, en general, al 10 por 100. Consecuentemente, el procedimiento aproximado planteado en el artículo 45.3 de la Instrucción EH-88, para flechas instantáneas, queda justificado y validado.

– En términos de flechas diferidas, la situación es bien diferente. La aplicación del artículo 45.4 de la EH-88, presenta importantes discrepancias con el método propuesto en el Eurocódigo que, como se indicó en el apartado 3, concordaba razonablemente con los restantes seis métodos analizados. En la componente diferida de flecha (aquélla a que se refiere el citado artículo 45.4 de la EH-88) los errores se sitúan en torno al 100 por 100, del lado de la seguridad. Un error de esta naturaleza desvirtúa todos aquellos cálculos en que se considere la actuación de cargas permanentes:

- En términos de flecha (instantánea más diferida), correspondiente a la componente de carga permanente, la aplicación del artículo 45.4 repercute en un error medio del 57 por 100.
- En términos de flecha total o máxima, el error medio se sitúa en el 48 por 100.
- Finalmente, en términos de flechas activas sobre tabiquería, el error medio de la Instrucción EH-88, respecto al Eurocódigo EC-2, es del 74 por 100.

El orden de errores anteriormente comentado, únicamente disminuye hasta límites aceptables (20 por 100 ó 30 por 100) si se consideran vigas con elevadas esbelteces y grandes cuantías de armadura. En tales especímenes, la capacidad de adaptación de la sección de hormigón ante los fenómenos de fluencia y retracción resulta anormalmente reducida. Precisamente es en experimentaciones con este tipo de especímenes en las que se fundamenta la propuesta del artículo 45.4, tal y como se expuso en el apartado 2 del presente trabajo.

5. CONCLUSIONES

1. Los métodos de cálculo de flechas diferidas recogidos en las más recientes redacciones del Eurocódigo EC-2 y del Código Modelo CEB-FIP, proporcionan resultados razonablemente concordantes entre sí y con otros métodos rigurosos (método de integración de curvaturas, método bilineal, método de los coeficientes globales, etc.). En estas circunstancias, puede entenderse que la comparación realizada no lo es exclusivamente frente a un modelo determinado sino frente a un conjunto de ellos.

2. En su redacción actual, el artículo 45.4 de la Instrucción EH-88 no se ajusta en su planteamiento a las directrices básicas del Eurocódigo EC-2, resultando incluso poco coherente con el propio articulado de EH-88 en materia de fluencia del hormigón.

3. Tomando como modelo de referencia, de entre los citados, el preconizado por el Eurocódigo EC-2 y comparándolo sistemáticamente con la propuesta de cálculo de flechas de la Instrucción EH-88 en vigas usuales de edificación, se observa una clara sobrevaloración en los resultados obtenidos por aplicación de la norma española. Tal sobrevaloración se centra en la componente diferida, en la que se observan divergencias en torno al 100 por 100, en tanto que en la componente instantánea se observa un sensible acuerdo. En casos estándar de edificación, esta divergencia en la componente diferida se traduce en una sobrevaloración en torno al 75 por 100 de las flechas activas y del 50 por 100 en las flechas totales. En el apartado 4.2 se muestra con detalle el alcance y dispersión de estos 'errores' así como su relación con las principales variables del problema.

4. En las condiciones anteriores, aplicando la propuesta de cálculo de flechas de la Instrucción EH-88 y en particular su artículo 45.4 relativo al cálculo de flechas diferidas, resulta muy difícil (si no imposible) el cumplimiento de las limitaciones convencionales de deformaciones activas, incluso con esbelteces muy limitadas. De este modo, la aplicación estricta de la Instrucción EH-88 en materia de flechas puede llevar a situaciones irracionales y poco competitivas a las estructuras porticadas de hormigón armado, hoy en día mayoritarias en la edificación convencional española.

5. Todo lo anteriormente expuesto no implica que buena parte de la práctica actual del hormigón armado en edificación no deba ser cuestionada. Muy singularmente la costumbre, lamentablemente frecuente, del cálculo de flechas en términos elásticos es totalmente incompatible con la correcta evaluación de los efectos de fisuración, retracción y deformaciones diferidas recogidos en los códigos y métodos reseñados en el párrafo 1.

6. El artículo 45.4 de la Instrucción EH-88, relativo al cálculo simplificado de flechas diferidas y de gran transcendencia práctica, a juicio de los autores, debería ser urgentemente revisado. En tal sentido, en artículo aparte, publicado simultáneamente en esta revista, se propone un método simplificado cuya aplicación práctica no supone mayor complicación que el cálculo de flechas instantáneas propuesto en el artículo 45.3 de la EH-88, pero que permite el cálculo conjunto de deformaciones instantáneas y diferidas con excelente aproximación a los valores del Eurocódigo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON, "EH-88, Instrucción para el proyecto y la

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ejecución de obras de hormigón en masa o armado", Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo, 1988.

2. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON, "EF-88, Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón armado o pretensado", Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo, 1988.

3. EC-2 PART 1, "Eurocode N° 2, Design of Concrete Structures. Part 1, General Rules for Buildings", Final Draft, Dec. 1988.

4. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, "C.E.B.- F.I.P. Model Code 1990", First Predraft 1988, C.E.B. Bull. N° 189, 190a, 190b, Lausanne, Jul. 1988.

5. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, "Fissuration et Deformations", C.E.B. Bull N° 143, Lausanne, Dec. 1981.

6. FAVRE, R., KOPRNA, M., RADOJICIC, A., "Effects differés, fisuration et deformations des structures en béton", Ecole Politechnique Fédérale de Laussane, Ed. Georgi Saint Saphorin, Suisse, 1980.

7. ALVAREZ BALERIOLA, J.I., BAQUEDANO, F., GUTIERREZ, J.P., RECUERO, A., "Fisuración y cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado", Monografías del I.E.T. c.c. n° 376-377, Madrid, Junio 1984.

8. BAZANT, Z.P., "Prediction of Concrete Creep Effects using Age-Adjusted Effective Modulus Method", A.C.I. Journal, 69 (20), pp. 212-217, 1972.

9. CHIORINO, M.A., ed., "Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete", C.E.B. Manual n° 142/142 bis, Georgi Pub. Co., Switzerland, 1984

10. LEONHARDT, F., "Anfängliche und nachtragliche Durchbiegungen von Stahlbetonbalken im Zustand II, Vorschläge für Bregenzungen und vereinfachte Nachweise", Beton und Stahlbeton, Vol. 54, p. 240 (25), 1959.

11. JIMENEZ MONTOYA, P., GARCIA MESEGUER, A., MORAN CABRE, F., "Hormigón armado", Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1974.

12. BRANSON, D.E., "Design Procedures for Computing Deflections", A.C.I. Journal, Vol. 65, p. 730 (25), 1968.

13. JOHNSON, A.I., "Deformations of Reinforced Concrete", Public. of I.A.B.S.E., Vol. 11, Zurich, Switzerland, p. 253 (25), 1951.

14. YU, W.W., WINTER, G., "Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working Loads", A.C.I. Journal, Vol. 57, N° 1, pp. 29-50, 1960.

15. AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERING, "Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings", Monograph on Planning and Design of Tall Buildings, Vol. CB, ASCE, New York, 1978.

16. WASHA, G.W., FLUCK, P.C., "The Effect of Compressive Reinforcement on the Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams", A.C.I. Journal, Vol. 49, N° 10, pp. 89-108, 1952.

17. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, A.C.I. 318-83, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", A.C.I. Manual of Concrete Practice, Part 3, 1989.

18. DEL RIO BUENO, A. y ORTIZ HERRERA, J., "Método simplificado para el cálculo de flechas en vigas de hormigón armado adaptado a las recomendaciones del Eurocódigo EC-2", Hormigón y Acero, n° 173, Madrid, 4° trimestre, 1989.

19. MARTINEZ CALZON, J., ORTIZ HERRERA, J., "Construcción mixta hormigón-acero", Ed. Rueda, Madrid, 1974.

20. DEBERNARDI, P.G., "Behavior of Concrete Structures in Service", Journal of Structural Engineering, A.S.C.E., Vol. 115, N° 1, Jan. 1989.

RESUMEN

La nueva Instrucción EH-88 plantea un procedimiento simplificado y claramente definido para el cálculo de flechas, inexistente en la anterior EH-82. En términos de cálculo de flechas instantáneas los criterios y metodología propuestos aparecen como apropiados, ofreciendo resultados básicamente concordantes con la gran mayoría de modelos y normativas. Por el contrario, en términos de flechas diferidas, el método simplificado recogido en la Instrucción EH-88 resulta extremadamente conservador en relación, tanto con reglamentos supranacionales de nuestro entorno europeo (Eurocódigo EC-2, Código Modelo C.E.B.–F.I.P.) como con otros métodos de numerosos autores.

En este artículo se presenta un contraste sistemático de los valores de flecha proporcionados por la aplicación de la Instrucción EH-88 en casos representativos de edificación convencional española. El contraste se efectúa en relación con el método preconizado en el reciente Eurocódigo EC-2 así como con otros métodos, y pone en evidencia la inadecuación de la propuesta de la Instrucción EH-88 en la totalidad de casos estudiados. Los diferentes métodos contemplados así como el estado actual de conocimientos en relación con el cálculo de flechas en vigas de hormigón armado son previamente revisados.

Ante los resultados obtenidos y dado el alcance práctico del tema en el dimensionamiento de estructuras de edificación, los autores consideran que este aspecto de la Instrucción debería ser urgentemente revisado. En tal sentido, en artículo aparte publicado simultáneamente en esta revista, se aborda el desarrollo de un método alternativo

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

suficientemente preciso, adaptado a los criterios del Eurocódigo EC-2 y que mantiene el mismo nivel de simplificación que la actual propuesta de la EH-88.

Ambos trabajos se han desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación "Desarrollo de sistemas CAD para el proyecto completo de estructuras de hormigón" financiado por la D.G.I.C.Y.T. con número PB 0344.

SUMMARY

The new spanish concrete code EH-88 establishes a simplified method to calculate deflections in R.C. flexural members, non-existent in old EH-82 code. Criteria and methodology assumed for calculation of instantaneous deflections are appropriate and provide adjusted results. Nevertheless, the over-simplified method proposed to evaluate long-time deflections supplies very conservative results, comparatively with international european concrete codes (Eurocode EC-2, CEB-FIP Model Code), and with main analytical models.

In this work a comparative study of most relevant models to calculate deflections in R.C. flexural members is presented. Also, a systematic comparison of deflections in R.C. building beams calculated according to EH-88 simplified method and Eurocode EC-2 general model is shown. It proves the inadequacy of spanish concrete code in this matter, and shows its practical consequences in the design of concrete building frames.

In the same issue, authors propose an alternative simplified method to calculate long-time deflections in R.C. flexural members.

* * *

Congreso sobre "Viviendas Económicas"

Patrocinado por el "Instituto Tecnológico MARA", de Malasia, y organizado por "CAMS" y "CI-PREMIER CONFERENCE", se va a celebrar en Kuala Lumpur, Malasia, durante los días 26 y 27 de junio del presente año 1990, un Congreso sobre "Viviendas económicas".

En el Congreso se discutirán los siguientes temas:

–Sistemas de financiación.

– Métodos para la reducción de costos.

–Planeamientos urbanos y regionales.

–Planes estatales para la construcción de viviendas.

–Proyectos y métodos de ejecución de viviendas de bajo costo.

–Proyectos de viviendas de costo medio.

–Sistemas industrializados para la construcción de viviendas.

–Sistemas de administración de viviendas.

–Técnicas y métodos constructivos.

–Proyectos arquitectónicos, estructurales y de instalaciones, para viviendas.

–Problemas ambientales que deben tenerse en cuenta.

– Recursos energéticos.

–Conceptos innovadores.

El idioma oficial del Congreso será el inglés y las cuotas de inscripción se han fijado en 600 dólares malayos. Los Autores de las Comunicaciones que hayan sido aceptadas para su presentación en el Congreso, tendrán un descuento del 15 por 100 en la cuota de inscripción.

El calendario establecido para la presentación de Comunicaciones es el siguiente:

–Recepción de resúmenes (200-300 palabras): hasta el 1-2-90.

–Notificación de si han sido o no aceptadas: hasta el 1-3-90.

Recepción de los textos completos: hasta el 1-5-90.

Coincidiendo con el Congreso se celebrará una Exposición de materiales y equipos de construcción.

Se han previsto también programas para los acompañantes y diversas visitas técnicas y viajes turísticos.

Los interesados en participar en este Congreso, deberán dirigirse a:

CONGRESS DIRECTOR: JOHN S.Y.TAN
CI Premier Pted. Ltd.
150 Orchard Road ≠07-14
SINGAPORE 0923
Tel.: 733 29 22 Tlx.: RS 33205 FAIRCO.
Fax: 235 35 30

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Método simplificado para el cálculo de flechas en vigas de hormigón armado, adaptado al EUROCODIGO EC-2

Por Alfonso del Río Bueno
Dr. Arquitecto
Colaborador Científico del I.C.C. Eduardo Torroja
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Jesús Ortiz Herrera
Dr. Ingeniero de Caminos
Catedrático del Dpto. de Estructuras de Edificación
E.T.S. de Arquitectura - Universidad Politécnica de Madrid.

INTRODUCCION

Las Instrucciones *EH-88 (Ref. 1)* y *EF-88 (Ref. 2)* han introducido avances considerables en el ámbito del cálculo y limitación de deformaciones en piezas flectadas de hormigón armado. Sin embargo, conjuntamente con tales avances, la Instrucción EH-88 ha recogido, en su artículo 45.4, un criterio simplificado, extremadamente conservador, para el cálculo de flechas diferidas. Este criterio, tomado del *Código A.C.I. (Ref. 17)*, presenta en su aplicación fuertes divergencias respecto a los métodos propuestos por organismos supranacionales europeos *(Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)) (Código Modelo C.E.B. - F.I.P. (Ref. 4))* así como respecto a modelos propuestos por diversos autores *(Refs. 5, 6, 7)*, todos ellos razonablemente concordantes.

De acuerdo con el estudio y contraste sistemático de casos que los mismos autores publican, simultáneamente, en esta revista *(Ref. 18)*, el procedimiento planteado en el artículo 45.4 de EH-88 supone, para vigas usuales de edificación, un error medio aproximado, del lado de la seguridad, del 100 por 100 (en la componente de flecha diferida) respecto a la aplicación rigurosa del Eurocódigo EC-2 (sensiblemente concordante con los restantes métodos antes citados). Esta magnitud de error en flechas diferidas se traduce, para vigas usuales de edificación, en una sobrevaloración típica de alrededor del 50 por 100 para flechas totales y del 75 por 100 para flechas activas sobre la tabiquería.

En las condiciones anteriores, el cumplimiento de las limitaciones de flechas, de por sí difícil con los reducidos cantos habituales en la edificación española, se hace prácticamente 'imposible', incluso en casos no especialmente mal condicionados. De este modo, la aplicación estricta de la Instrucción EH-88, y en particular de su artículo 45.4, puede llevar a soluciones irracionales y poco competitivas a las estructuras porticadas de hormigón armado, hoy por hoy mayoritarias en la edificación española.

Consecuentemente, a juicio de los autores, la actual propuesta de EH-88 para el cálculo de deformaciones en piezas flectadas de hormigón armado y, en particular, su artículo 45.4, relativo a flechas diferidas, deben ser urgentemente revisados. La revisión debe procurar la adaptación de la Instrucción española a las directrices del Eurocódigo EC-2 y, en cualquier caso, introducir las correcciones necesarias para que su aplicación proporcione resultados homogéneos con los de los principales modelos existentes, formulados y validados por autores y organismos de probada solvencia científica.

Evidentemente, una posible estrategia para la revisión podría consistir en el completo replanteo de la actual propuesta de EH-88. Ello implicaría, no sólo la modificación del método preconizado para el cálculo de flechas diferidas, sino, además, cuestionar el planteamiento y formulación adoptados para el cálculo de flechas instantáneas.

La actual propuesta de EH-88 en relación con el cálculo de flechas instantáneas (al igual que la relativa a flechas diferidas) se ha tomado del *Código A.C.I. (Ref. 17)*. Tal y como han estudiado los mismos autores *(Ref. 18)*, a ella podría objetársele la utilización de la fórmula primitiva de *Branson (Ref. 12)* para la evaluación de la influencia del fenómeno de fisuración discretamente repartida. Esta fórmula interpola momentos de inercia, a diferencia de las actualmente implantadas que interpolan parámetros cinemáticos (curvaturas, giros, flechas). Asimismo, la fórmula original adoptada por la Instrucción, no considera el efecto de la fisuración sobre la adherencia hormigón-acero, ni tampoco la influencia de la duración o repetitividad de la solicitación. En fórmulas de interpolación más recientes, como la recogida en el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, los anteriores fenómenos se incorporan, respectivamente, en los parámetros β_1 y β_2. También, en relación con el cálculo

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

de flechas instantáneas, sería cuestionable el criterio de promedio de inercias entre extremos y centro de vano preconizado por la Instrucción.

Sin embargo, como se evidencia en el tratamiento sistemático de casos presentado por los autores en artículo aparte publicado simultáneamente en esta revista *(Ref. 18)*, la aplicación de la propuesta de EII-88 para el cálculo de flechas instantáneas, conduce a resultados aceptablemente precisos, con un error medio, respecto a la aplicación rigurosa del Eurocódigo EC-2, de un 9 por 100. En estas condiciones, no se justifica, al menos con carácter inmediato, una revisión del método preconizado por la Instrucción EH-88 para el cálculo de flechas instantáneas. Ello retrasaría innecesariamente afrontar el problema de fondo que se localiza en el método propuesto para el cálculo de flechas diferidas, y cuya solución pasa por la inmediata revisión del artículo 45.4 de EH-88.

Consecuentemente, el presente trabajo se centra en proponer un método alternativo para el cálculo de deformaciones diferidas en piezas flectadas de hormigón armado. El método se materializa en una propuesta de redacción alternativa del artículo 45.4 de EH-88, y se propone tras un tratamiento y contraste sistemático de casos análogo al llevado a cabo como verificación del actualmente vigente. La modificación sugerida es coherente con el restante articulado de la Instrucción en la materia, se adapta a los criterios básicos del *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, y proporciona resultados razonablemente concordantes, tanto con el método general preconizado en este reglamento supranacional como con otros métodos validados y reconocidos *(Refs. 4, 5, 6, 7)*. Por otra parte, su aplicación práctica presenta igual nivel de complejidad que la del artículo 45.3 relativo a cálculo de flechas instantáneas.

2. EL CALCULO DE DEFORMACIONES EN PIEZAS FLECTADAS DE HORMIGON ARMADO, SEGUN EL EUROCODIGO EC-2

El *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, en su más reciente edición, de Diciembre de 1988, desarrolla una doble propuesta en relación con el cálculo y/o comprobación de deformaciones en piezas flectadas de hormigón armado.

De una parte, define valores de esbeltez o relación luz/canto por debajo de las cuales se exime al proyectista del cálculo de deformaciones. Estos valores, al igual que los establecidos en el *Código Modelo C.E.B. - F.I.P. (Ref. 4)*, son lo suficientemente favorables como para permitir liberar de todo tipo de comprobaciones de flechas, con una elección de cantos que los autores calificarían de *'buena práctica'* dentro de la edificación española actual.

Por otra parte, para aquellos casos en que la comprobación de deformaciones no pueda omitirse, el Eurocódigo EC-2 establece las condiciones que debe reunir un cálculo 'correcto' de las mismas. Estas condiciones son definidas, tanto en su artículo 4.4.3 como en el Apéndice 4, con concreción y precisión suficientes como para llegar a constituir una metodología de cálculo, la cual se analiza a continuación.

Como método riguroso para el cálculo de deformaciones en piezas cuyas condiciones de esbeltez y solicitación permitan despreciar la incidencia de deformaciones tangenciales (asociadas a esfuerzos cortantes y/o momentos torsores), el Eurocódigo recomienda el *método de integración de curvaturas*, consistente en computar curvaturas en secciones suficientemente próximas, procediéndose después a su (doble) integración. Implícitamente, se acepta que la integración se efectúe recibiendo como dato la ley de momentos. No se entra así en la determinación de la redistribución de momentos hiperestáticos, que trasciende los análisis a nivel de pieza que se consideran aquí.

En todo caso, de acuerdo con el Eurocódigo EC-2, el método de cálculo adoptado debe representar, con precisión adecuada, el comportamiento de la estructura. En particular, siempre que se prevea alcanzar la fisuración en el elemento analizado, se exige tener en cuenta el efecto de ese fenómeno sobre su deformabilidad. Además, se menciona explícitamente la necesidad de considerar en el cálculo (siempre que se considere apropiado) los siguientes aspectos:

Fluencia y retracción.

Contribución a tracción del hormigón entre fisuras.

Fisuración existente a consecuencia de cargas previas.

Tipo de carga (estática o dinámica).

– Influencia de acciones indirectas (temperatura).

– Evaluación del módulo de deformación del hormigón en función de sus características y edad en el instante de carga.

De acuerdo con las directrices señaladas en el Eurocódigo EC-2, el comportamiento deformativo de una pieza de hormigón armado en la que se ha alcanzado un estado de *fisuración discretamente repartida*, queda comprendido entre dos situaciones límite:

– Situación no fisurada (I), en la cual hormigón y acero trabajan elástica y conjuntamente en compresión y tracción. En esta situación, para las cuantías usuales en vigas de edificación, el efecto del armado es poco relevante, por lo que la respuesta deformativa puede calcularse a partir de las constantes de la sección 'bruta' de hormigón.

Situación de completa fisuración (IIo), para la cual se desprecia la colaboración del hormigón

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

a tracción. En esta situación, dado que las deformaciones se calculan en condiciones de servicio bien alejadas de las últimas, la respuesta de la sección puede aproximarse, con suficiente precisión, adoptando las constantes correspondientes a la sección fisurada equivalente, homogeneizada a hormigón con un módulo de deformación coherente con la duración de la carga.

En aquellos elementos, secciones, o 'rebanadas' en los que no se supere la resistencia a tracción del hormigón en ningún punto, obviamente la determinación de deformaciones puede efectuarse considerando exclusivamente la situación I. De no ser así, se está en un estado de fisuración repartida de forma discreta (II), donde coexisten secciones totalmente fisuradas con secciones en las que el hormigón desarrolla tensiones de tracción. En estas condiciones, la respuesta deformativa (curvatura, giro o incluso flecha) resulta intermedia entre ambas situaciones (I y IIo). Es decir:

$$\alpha_{II} = (1 - \zeta) \cdot \alpha_I + \zeta \cdot \alpha_{IIo}$$

Donde ζ es un coeficiente de interpolación. Para elementos no pretensados, en flexión pura, la propuesta general del Eurocódigo EC-2 para dicho coeficiente se particulariza en la forma:

$$\zeta = 1 - \beta_1 . \beta_2 . \left[\frac{M_r}{M} \right]^2$$

siendo:

- β_1 un coeficiente que considera la adherencia de las barras al hormigón. Su valor es 1 para barras corrugadas de alta adherencia y 0,5 para barras lisas.
- β_2 un coeficiente dependiente de la duración y/o repetitividad de la carga. Su valor es 1 para cargas monótonas instantáneas y 0,5 para cargas repetitivas o de larga duración. En caso de coexistencia de cargas de diferente duración, pueden admitirse valores intermedios.
- M_r el momento de inicio de fisuración en la sección o rebanada considerada.
- M es el máximo momento actuante en la sección (suma del debido a acciones permanentes e instantéas). En caso de ser inferior a Mr debe adoptarse $\zeta = 1$.

El coeficiente de interpolación propuesto por el Eurocódigo EC-2, presenta ciertas diferencias conceptuales y formales con el planteado en la Instrucción EH 88, tal y como se señaló en el apartado precedente. En primer lugar, el Eurocódigo plantea la interpolación sobre parámetros cinemáticos (curvaturas, giros, flechas), a diferencia de la Instrucción española que lo hace sobre los valores estáticos de sección (inercia). En segundo lugar, el Eurocódigo considera la interrelación existente entre la fisuración y la duración y/o repetitividad de las solicitaciones, y la adherencia hormigón-acero. Esta interrelación es ignorada en la formulación de EH-88. A pesar de todo ello, como se ha contrastado en un considerable número de casos, la aplicación práctica de uno u otro coeficiente en vigas convencionales de edificación, proporciona resultados finales sensiblemente coincidentes.

Las *características mecánicas del hormigón* que intervienen en el cálculo de deformaciones y de cuya precisión depende el resultado final son su resistencia a (flexo-)tracción, fct, y su módulo de deformación longitudinal efectivo, Ec.

Para cargas instantáneas, el Eurocódigo EC-2 y la Instrucción EH-88 formulan ambos parámetros a partir de la resistencia característica a compresión. Las formulaciones propuestas son formalmente diferentes; sin embargo, la aplicación de unas u otras conduce a resultados razonablemente concordantes en los hormigones usuales de edificación. Por otra parte, la utilización de unos u otros valores en el cálculo de deformaciones influiría de modo muy reducido en los resultados finales *(Ref. 18)*.

En materia de *flechas diferidas* ante cargas de larga duración, las diferencias entre el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* y la *Instrucción EH-88 (Ref. 1)* no se limitan a los resultados derivados de su aplicación sino que son también de planteamiento. Por tal motivo, antes de entrar en el estudio de las directrices marcadas por el Eurocódigo EC-2, se resume el alcance y fundamentos de la propuesta de la norma española. Esta cuestión se encuentra desarrollada en mayor profundidad dentro del artículo que los mismos autores publican simultáneamente en esta revista.

El artículo 45.4 de EH-88 plantea el cálculo de deformaciones diferidas, debidas conjuntamente a fluencia y retracción, multiplicando las flechas instantáneas correspondientes por un factor λ, exclusivamente dependiente de la duración de la carga y de la cuantía geométrica de armadura comprimida. A tiempo superior a cinco años y para las cuantías usuales de armadura de compresión, el factor λ es del orden de 2. Consecuentemente, según el mencionado artículo de EH-88, la flecha final, $v_{II\infty} = v_{II} + \lambda . v_{II}$, resulta del orden de tres veces la instantánea.

Estos órdenes de magnitud podrían parecer inicialmente coherentes con las relaciones usuales entre las deformaciones diferidas e instantáneas del material hormigón. Sin embargo, a nivel de sección (no a nivel de 'punto' o de 'fibra'), y en interacción con el fenómeno de la fisuración, se producen redistribuciones de las tensiones internas, con reajuste de la posición de la fibra neutra y de las características mecánicas de la sección, que determinan, a nivel de sección fisurada, un comportamiento en general mucho más favorable que el comportamiento diferido 'local' del material. Esto determina un carácter acusadamente conservador del artículo 45.4 de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

la Instrucción, como han comprobado los autores *(Ref. 18)*.

El coeficiente λ de EH-88, tomado del *Código A.C.I. (Ref. 17)*, procede de un trabajo original de *Yu y Winter (Ref. 14)*, poco reciente (exactamente de 1960) que fue adoptado en varias normas anglosajonas, y en particular por el A.C.I.

Resulta ante todo sospechoso que algunas referencias al multiplicador de Yu y Winter lo mencionen como aplicable a la flecha 'elástica', v_I ó v_c, como por ejemplo aparece reseñado en el apartado 10.1.5 del prestigioso volumen *ASCE-CB-1978 (Ref. 15)*. Si la componente diferida de flecha fuera $\lambda \cdot v_I \approx \lambda \cdot v_c$ (y no $\lambda \cdot v_{II}$), las flechas totales $v_{II} + \lambda \cdot v_c$ para cargas permanentes sí serían coherentes con las evaluadas abrumadoramente por los restantes métodos.

El método empírico propuesto por *Yu y Winter (Ref. 14)*, origen del factor λ, se basa mayoritariamente en experimentación ajena, lo que dificulta el seguimiento y la crítica del método, condiciones y evaluación de los ensayos. La mayor parte de los valores experimentales proceden de una publicación de *Washa y Fluck (Ref. 16)*. Localizado este trabajo, de su lectura se deduce, en primer lugar, que en el valor de referencia o denominador de las flechas diferidas, se menciona la flecha 'elástica' (se recuerda la observación anterior al respecto). Por otra parte, las piezas ensayadas presentan relaciones luz/canto elevadas (20, 30) o elevadísimas (50, 70), totalmente alejadas de la práctica usual, máxime tratándose de piezas biapoyadas. Esta cuestión es muy importante, ya que la capacidad de redistribución tensional interna y reajuste de la fibra neutra y de las características mecánicas de la sección, tienen márgenes muy reducidos en secciones de tan elevada esbeltez. Asimismo, la incidencia de la retracción en piezas biapoyadas (máximo valor de μ) y con tan elevadas relaciones canto/luz es anormalmente alta, y no representativa de los casos usuales.

En las condiciones anteriores, cabe dudar del carácter totalmente representativo de estos ensayos, para las estructuras de hormigón armado actuales en la edificación. Tampoco parece razonable pretender hacer recaer en un solo factor empírico simplista toda la enorme cantidad de fuentes de dispersión del fenómeno: desde la variedad de parámetros geométricos, mecánicos, de solicitación y ambientales que regulan el comportamiento intrínseco del proceso de deformación y los diversos estados posibles de fisuración, hasta la dispersión en las características de los materiales empleados, instrumentación de los ensayos, etc. Menos aún puede entenderse que, en el año 1988, un 'factor multiplicador' de 1960, con la comentada base empírica, reemplace a los actualmente formulados y validados modelos analíticos.

A diferencia de lo antedicho en relación con el planteamiento de la Instrucción EH-88 en materia de flechas diferidas, el Eurocódigo EC-2 distingue claramente entre los fenómenos de fluencia y retracción.

Para cargas permanentes, el *fenómeno de la fluencia* se incorpora en el reglamento europeo utilizando en los cálculos correspondientes un módulo de deformación efectivo en el hormigón, de valor:

$$E_{ct} = \frac{E_c}{1 + \varphi_t}$$

siendo φ_t el coeficiente de fluencia para la edad t en que se calcula la flecha (en general $t \to \infty$), definido en función de un amplio conjunto de variables, tales como la edad del hormigón en el instante de aplicación de la carga, las condiciones de humedad y curado, espesor efectivo medio de la pieza, etc. Tanto el Eurocódigo EC-2 como la Instrucción EH-88 proporcionan formulaciones y valores para este coeficiente, coincidiendo, para las condiciones medias de la edificación española, en valores entre 2,0 y 2,5.

Es importante señalar que la Instrucción *EH-88 (Ref. 1)*, en su artículo 26.9, desarrolla una elaborada formulación del mencionado coeficiente de fluencia, φ_t, en función del conjunto de variables antedicho. En tales condiciones, no se comprende por qué existiendo en la Instrucción un planteamiento riguroso de fenómeno de la fluencia del hormigón, dicho planteamiento sea ignorado para calcular deformaciones diferidas debidas a ese mismo fenómeno.

El tratamiento de la fluencia antes señalado puede, finalmente, perfeccionarse utilizando factores correctores del coeficiente φ_t. Con ellos se introducen efectos tales como la variación del módulo de deformación E_c con la edad y/o el carácter, variable en el tiempo, del estado tensional de cada fibra de hormigón. En este sentido, puede citarse el método A.A.A.E.M. (Algebraic Age Adjusted Effective Modulus) de *Bazant (Ref. 8)* y *Chiorino (Ref. 9)* que introduce los efectos mencionados mediante la corrección del coeficiente de fluencia φ mediante un factor χ ('aging coefficient') que varía típicamente entre 0,6 y 0,9. Salvo estudio especial, 0,8 suele considerarse un valor apropiado para dicho coeficiente.

Consecuentemente, el planteamiento del Eurocódigo EC-2 para la evaluación de flechas debidas a fluencia, permite tomar en consideración el conjunto de variables fundamentales del problema, admitiendo diversos grados de refinamiento que deben adecuarse a las necesidades de precisión. Este carácter global y riguroso contrasta con el restrictivo y simplista factor χ introducido en EH-88, del que se hacen depender conjuntamente los efectos de fluencia y retracción, ignorando incluso formulaciones y planteamientos desarrollados rigurosamente dentro de la misma Instrucción.

El cálculo de *deformaciones producidas por la*

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

actuación simultánea de cargas de larga y breve duración es un problema habitual en edificación. En relación con él, hay que resaltar, como explícitamente se señala en el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* que, iniciada la fisuración, el principio de superposición de efectos (tensiones, deformaciones, curvaturas, flechas, etc.) deja de ser correcto, incluso dentro del dominio cuasi-lineal que corresponde a los estados de servicio a los que aquí se hace referencia. En tal sentido, en el Apéndice 1 de este artículo se efectúa una revisión rigurosa del problema.

Con independencia de lo expresado en el Apéndice, salvo casos excepcionales, el error cometido admitiendo tal superposición resulta reducido, siempre que al determinar las deformaciones (para cada tipo de carga considerada) dentro del estado II de fisuración discretamente distribuída, se interpolen las correspondientes a los estados I y II_o, operando con la solicitación total (suma de las correspondientes a cargas de breve y larga duración). Es decir, para el cálculo de las curvaturas debidas a una u otra solicitación en cada sección considerada, la interpolación entre los valores de la sección bruta de hormigón y la completamente fisurada (con el módulo de deformación correspondiente) ha de hacerse determinando el coeficiente de interpolación con el momento total.

En aquellas zonas en que se alcanza la fisuración ($M > M_f$), la *retracción* deja de producir exclusivamente un acortamiento de las mismas y genera curvaturas de igual signo a las provocadas por el momento actuante. Existe en esas condiciones un término adicional de curvatura por retracción, que se traduce en una componente adicional de flecha por retracción. De acuerdo con el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, dicha curvatura se estima según:

$$C_{cs} = \frac{1}{r_{cs}} = \pm \epsilon_{cs} \cdot n_\infty \cdot \frac{S_{II}}{I_{II}}$$

siendo:

- ϵ_{cs} el acortamiento unitario por retracción del material.
- n_∞ el coeficiente de equivalencia efectivo. Es decir, $n_\infty = E_s/E_{c\infty}$.
- S_{II} el momento estático efectivo de la armadura traccionada respecto al centroide de la sección (fibra neutra en flexión pura). Se calcula considerando el módulo de deformación efectivo del hormigón a tiempo infinito $E_{c\infty}$ y promediando el valor del momento estático entre los correspondientes a los estados I y II_o, con el coeficiente de interpolación anteriormente propuesto.
- I_{II} el momento de inercia de la sección, determinado con análogos criterios que los expuestos para S_{II}.

Consecuentemente, el Eurocódigo EC-2 considera la deformación unitaria por retracción, ϵ_{cs}, como un valor medio en la zona de hormigón no fisurado, que supone se produce en el baricentro del bloque de compresiones. Al variar este punto con el nivel de solicitación (según el modelo de análisis adoptado), la flecha por retracción se hace dependiente del nivel de solicitación. Por el contrario, para otros métodos *(Refs. 10, 13)*, ϵ_{cs} es el valor máximo posible en la zona no fisurada que, por tanto, se produce en el borde comprimido. Para estos modelos la flecha por retracción resulta independiente del nivel de solicitación.

De acuerdo con el procedimiento general señalado en el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, una vez determinadas las curvaturas debidas a uno u otro tipo de carga, así como a retracción en las secciones consideradas, se procede a su (doble) integración. Para ello, una condición de contorno en flechas y otra en giros o flechas, determinan las constantes de integración. Si no se pretende la determinación completa de la deformada, sino solamente el cálculo de la flecha en un punto, la aplicación del principio de los trabajos virtuales (teorema de la carga unidad) permite reducir el proceso numérico a la evaluación de una única integral extendida a toda la pieza.

Se calculan así tres términos de flecha: uno debido a acciones permanentes, otro debido a acciones instantáneas y otro debido a retracción. Estos términos pueden superponerse, sin grave error, para vigas convencionales de edificación, siempre que en su determinación se haya considerado su interrelación en el fenómeno de fisuración. En todo caso, se recuerda que en el Apéndice 1 del artículo se efectúa una revisión más rigurosa de este problema.

3. SIMPLIFICACIONES PARA EL CALCULO MANUAL

La aplicación rigurosa del método de integración de curvaturas preconizado por el Eurocódigo, requiere la aplicación de algoritmos de integración numérica simples y bien conocidos (regla del trapecio, regla de Simpson, etc.), pero poco practicables a nivel de cálculo 'manual'. Por tal motivo, diversos autores y organismos han propuesto simplificaciones y métodos alternativos para el cálculo de flechas, susceptibles de ser aplicados sin herramientas especiales de análisis. Algunos de ellos, como el método bilineal, el método de los coeficientes globales o el método simplificado de la última edición del Código Modelo, son reseñados a continuación. Una descripción más detallada de los mismos se recoge en diversas publicaciones *(Refs. 4, 5, 6, 7)*, así como en el artículo que los autores publican simultáneamente en esta revista *(Ref. 18)*.

El *método bilineal (Refs. 5, 7, 18)* obvia la variación, a lo largo de la pieza, del coeficiente de interpolación ζ, que se obtiene en una única sección, llamada sección determinante. Como tal se adopta la sección central para vanos biapoyados o en continuidad, o la sección de empotramiento si

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

se trata de voladizos. Por otra parte, la expresión de este coeficiente ζ se simplifica en la forma $\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (M_r/M)$, si $|M| \geq |M_r|$, ó $\zeta = 0$, si $|M| < |M_r|$. La representación gráfica de la curvatura C_{II} en función de M queda entonces constituida por dos tramos rectilíneos, de donde toma su nombre el método. Al suponerse ζ constante a lo largo de la pieza, mediante una doble integración se deduce que este coeficiente de interpolación puede aplicarse directamente a las flechas:

$$v_{II} = (1 - \zeta) \cdot v_I + \zeta \cdot v_{IIo}$$

De esta forma, no es necesario el cálculo explícito de las curvaturas, determinándose directamente los diferentes términos que componen v_I y v_{IIo} y procediéndose después a su interpolación mediante la fórmula antedicha.

El *método de los coeficientes globales*, también considerado por el *C.E.B. (Ref. 5)* es una versión simplificada del *método bilineal*, de aplicación inmediata con la ayuda de ábacos. La descripción detallada del mismo puede seguirse en la citada publicación del *C.E.B. (Ref. 5)* así como en la monografía de *Alvarez Baleriola y otros (Ref. 7)*.

Posteriormente, en la nueva versión del *Código Modelo C.E.B. - F.I.P. (Ref. 3)*, se ha recogido un método enormemente simplificado, de aplicación mucho más directa que los anteriores y que el propuesto en la Instrucción EH-88, no requiriendo siquiera el manejo de ábacos. De acuerdo con este método, la flecha total producida por cargas permanentes se determina en la forma:

$$v = (1 + \varphi) \cdot v_c \quad ; \quad \text{si } |M| < |M_r|$$

o bien:

$$v = \left[\frac{h}{d}\right]^3 \cdot \eta \cdot [1 - 20\,\rho'_m] \cdot v_c \; ; \; \text{si } |M| \geq |M_r|$$

siendo:

- M el momento flector de la sección 'determinante'.
- M_r el correspondiente momento de fisuración.
- v_c la flecha 'elástica' o 'básica', calculada en base a las fórmulas usuales de Resistencia de Materiales, adoptando como rigidez a flexión la correspondiente a la sección bruta de hormigón (sin considerar armaduras, fisuración o fluencia).
- η un coeficiente adimensional definido en una tabla en función de la cuantía geométrica media de armadura de tracción (ρ_m).
- ρ'_m la cuantía geométrica media de armadura de compresión de la viga (estimada, al igual que ρ_m, de forma aproximada, a partir de las cuantías de las secciones central y extremas, promediadas proporcionalmente a las longitudes de los intervalos de flexión 'positiva' y 'negativa' correspondientes).

Asimismo, sobre el método general propuesto en el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)*, pueden establecerse ciertas simplificaciones que, sin pérdidas graves de precisión ni rigor, permiten su aplicación por procedimientos 'manuales'. Explícitamente, el Eurocódigo considera aceptable la interpolación entre los estados I y II_o a nivel de pieza (en giros o flechas), en lugar de a nivel de sección (en curvaturas). Una interpretación amplia de esta simplificación, interpolando valores estáticos de sección (inercias) en lugar de parámetros cinemáticos (curvaturas, giros o flechas), puede conducir a admitir interpolar las inercias en una o varias secciones determinantes, para, en base a dicha interpolación, calcular deformaciones. Tal es la simplificación adoptada por la *Instrucción EH-88 (Ref. 1)* para flechas instantáneas que, con diferencias en el parámetro de interpolación y con un discutible criterio de promedio de inercias, podría considerarse conforme con las directrices del Eurocódigo EC-2 (dentro de una interpretación 'amplia' del mismo).

No sucede lo mismo, como se ha analizado sobradamente, en términos de flechas diferidas. En esta materia, el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* y una gran generalidad de métodos, plantean, incluso dentro de sus simplificaciones, unas mínimas exigencias, incumplidas en la *Instrucción EH-88 (Ref. 1)*:

Considerar separadamente los fenómenos de fluencia y retracción.

– Incorporar el fenómeno de fluencia dentro del comportamiento del material hormigón, en base a módulos de deformación efectivos obtenidos corrigiendo el módulo instantáneo. De este modo es posible considerar la capacidad de reajuste de las secciones.

A partir de tales criterios, y admitiendo el planteamiento y simplificaciones del artículo 45.3 de EH-88 en materia de cálculo de flechas instantáneas, se efectúa la propuesta de redacción modificada del artículo 45.4. recogida en el Apartado 4.

En términos de flechas finales (instantáneas + + diferidas) producidas por cargas de larga duración, la modificación propone realizar su cálculo admitiendo el mismo procedimiento simplificado definido para flechas instantáneas en el artículo 45.3, pero con la exigencia de adoptar un módulo de elasticidad efectivo en el hormigón,

$$E_{c,t} = E_{c,28} / (1 + \chi \varphi_t)$$

representativo de su comportamiento a largo plazo. Esta corrección en el módulo de deformación interviene en la determinación de las inercias fisuradas y efectivas, al alterarse el coeficiente de equivalencia n (o m) que pasa a ser,

$$n_t = (1 + \chi \varphi_t) \cdot E_s / E_{c,28}$$

De este modo, se consideran simultáneamente, tanto la mayor deformabilidad del material ante tensiones mantenidas, como la capacidad de reajuste de la sección, efectuando una aproximación al efecto de la fluencia, mucho más rigurosa que la actual.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Por otra parte, siempre que se alcance la fisuración, la retracción produce, no sólo acortamientos axiles sino también curvaturas y flechas adicionales, no computadas en el procedimiento anterior. Admitiendo una curvatura media por retracción de valor $C_{cs} = \pm |\epsilon_{cs}|/d$, conforme lo planteado por *Leonhardt (Ref. 10) y Johnson (Ref. 13)*, la flecha por retracción puede expresarse de la forma, $v_{cs} = \mu \cdot \ell^2 \cdot C_{cs}$, siendo ℓ la luz y μ un coeficiente adimensional que depende de la posición de los puntos de flector nulo. Siendo $\alpha_1 \cdot \ell$ y $\alpha_2 \cdot \ell$ las distancias desde estos puntos al extremo correspondiente, dicho coeficiente se expresa según:

$$\mu = \frac{1}{8} - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2}$$

(con $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 0{,}5$ y $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0{,}5$).

El coeficiente μ puede tabularse, simplificadamente, en función de las condiciones de extremo (apoyo simple o en continuidad), tal y como se indica en la propuesta de redacción alternativa expuesta en el apartado 4.

4. PROPUESTA DE REDACCION MODIFICADA DEL ARTICULO 45.4 DE EH-88

Artículo 45.4. Cálculo de las flechas finales

Para el cálculo de las flechas totales (instantáneas + diferidas) producidas por cargas de larga duración, salvo determinación más precisa, se aplicará el mismo método de cálculo definido en 45.3 adoptando un módulo de deformación efectivo en el hormigón de valor:

$$E_{c,t} = \frac{E_{c,28}}{1 + \chi \cdot \varphi_t}$$

que implica un coeficiente de equivalencia modificado:

$$m_t = \frac{E_s}{E_{c,28}} \cdot (1 + \chi \cdot \varphi_t)$$

siendo φ_t el coeficiente de fluencia correspondiente al instante t para el cual se calcula la flecha (definido en esta Instrucción); y χ un coeficiente reductor que se tomará con valor 0,8, salvo estudio especial.

A la flecha final calculada, se sumará el siguiente término, debido a la retracción del hormigón:

$$v_{cs} = \mu \cdot \ell^2 \cdot |\epsilon_{cs}|/d$$

siendo:

- μ un coeficiente adimensional que, salvo justificación más precisa, adoptará los valores siguientes:

$\mu = 1/8$ para vigas doblemente apoyadas.

$\mu = 1/16$ para vanos interiores de dinteles continuos.

$\mu = 1/12$ para vanos con un extremo apoyado y otro continuo.

$\mu = 1/2$ para voladizos.

- ϵ_{cs} la deformación unitaria de retracción del hormigón en el instante t (definida en esta Instrucción).
- ℓ la luz de la pieza.
- d el canto útil de la sección.

Cuando coexistan cargas de larga y breve duración, salvo determinación más precisa, se admitirá la suma de los términos de flecha correspondientes: flechas instantáneas producidas por cargas de breve duración, flechas totales (instantáneas + diferidas) producidas por cargas de larga duración, y flechas debidas a retracción; sin embargo, a efectos de determinación de momentos de inercia equivalentes correspondientes a los distintos tipos de solicitaciones, los momentos flectores M_a que se deberán adoptar serán siempre los totales de cada sección considerada.

5.– CONTRASTE SISTEMATICO DEL METODO SIMPLIFICADO PROPUESTO

El método simplificado que se concreta en la propuesta de redacción modificada del artículo 45.4 de la Instrucción EH-88, ha sido contrastado, de modo sistemático, tanto con el método general de integración de curvaturas preconizado por el *Eurocódigo EC-2 (Ref. 3)* como con la actual propuesta de la *Instrucción EH-88 (Ref. 1)*.

La aplicación del Eurocódigo se ha llevado a cabo conforme a las directrices indicadas en el apartado 2 de este trabajo y al algoritmo de análisis y programa de ordenador descritos en el apartado 4.1 del artículo que los mismos autores publican simultáneamente en esta revista *(Ref. 18)*. Los casos analizados han sido los mismos que se consideraron para el contraste sistemático de la actual propuesta de EH-88, recogido en dicho artículo simultáneo. Consecuentemente, una descripción y justificación más detallada de los mismos se encuentra en el apartado 4.2 del mismo. Con independencia de ello, debe ahora indicarse que su selección se ha efectuado partiendo de una viga "media" de edificación, de 5,5 m de luz, con giro limitado en un extremo y libre en el otro, una esbeltez geométrica de 20 y un ancho determinado de modo que la capacidad mecánica de la armadura de tracción, para el máximo momento, esté en torno a $0{,}4 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd}$ (sin armadura de compresión). La carga actuante sobre ella se ha tomado igual a la que correspondería a una banda de 5 m de forjado de vivienda convencional, con una carga superficial total de 650 Kp/m². De ellos, la fracción correspondiente a pesos propios de forjado (250 Kp/m²) y solado (100 Kp/m²) así como la

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

sobrecarga de tabiquería (100 Kp/m²) se supone actuando de modo permanente, en tanto que la fracción correspondiente a la sobrecarga de uso (200 Kp/m²) se supone de breve duración.

Partiendo de esta configuración media, se han hecho oscilar las variables principales, dentro de su rango habitual en estructuras de edificación:

–Se han considerado otras dos posibles luces: "corta" de 4 m y otra "larga" de 8 m.

También se han considerado otras dos posibles condiciones de extremo: viga con giro limitado en ambos extremos y viga con giro libre en ambos extremos.

–Las esbelteces se han hecho oscilar entre 10 y 28, en 9 intervalos, cubriendo pues un amplio espectro y permitiendo trazar gráficas adimensionales del tipo $(\delta/L)/(L/h)$.

–Se han considerado, adicionalmente, dos capacidades mecánicas de armadura de tracción, U_c: una "baja" $(0{,}25 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd})$ y otra "alta" que exige ya armadura de compresión $(0{,}60 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd})$. (En base a estas cuantías, definida la esbeltez se determina el ancho).

Para cada tipología considerada, se han calculado las deformaciones bajo tres condiciones de carga/edad:

En primer lugar, se han determinado las flechas correspondientes a la totalidad de la carga de servicio, distribuida en permanente e instantánea según los criterios antes expuestos. En todos los casos, se asume un coeficiente efectivo de fluencia $\chi \cdot \varphi = 2{,}0$ aplicable exclusivamente a la fracción de cargas permanentes (en este coeficiente se considera ya incluida la corrección por incremento de rigidez del material con la edad). La deformación unitaria por retracción se considera con valor $\epsilon_{cs} = -25 \cdot 10^{-5}$. Las flechas así determinadas se denominan, en lo que sigue, flechas máximas.

–En segundo lugar, se determinan las deformaciones que en un proceso constructivo estándar pueden esperarse en el instante de realización de la tabiquería. Para ello se considera actuando la fracción de carga correspondiente al peso del forjado (250 Kp/m²), durante un mes a partir de los 28 días de edad del material. En estas condiciones resulta un coeficiente efectivo de fluencia $\varphi = 0{,}9$ y una deformación unitaria de retracción $\epsilon_{cs} = -18 \cdot 10^{-5}$. (Para aplicar la fórmula de la Instrucción EH-88, se considera $\xi = 1{,}0$, correspondiente a cargas actuantes por un periodo inferior a tres meses).

Restando el valor de flecha así calculado, de la flecha máxima, se obtiene la flecha activa sobre la tabiquería.

–En tercer lugar, se determina la deformación instantánea que correspondería a la aplicación de la totalidad de la carga a una edad de 28 días. Esta flecha, aún cuando no tiene un significado práctico en los procesos constructivos usuales, permite obtener la componente de flecha diferida como consecuencia de los fenómenos de fluencia y retracción, restándola de la flecha máxima. Esta componente diferida presenta un especial interés, en este trabajo, a la hora de estudiar el alcance y precisión de la fórmula que para dicha componente proporciona la Instrucción EH-88.

Una parte de los resultados obtenidos en el tratamiento de casos realizado y anteriormente descrito, se resume en la tabla y figuras adjuntas. En estas últimas, se han trazado gráficas adimensionales con esbelteces geométricas (ℓ/h) en abscisas y deformaciones relativas (δ/ℓ) en ordenadas, que permiten visualizar fácilmente el razonable acuerdo existente entre la propuesta alternativa y el Eurocódigo EC-2, así como la mejora de precisión que dicha propuesta alternativa supone respecto a la actual redacción de la Instrucción EH-88. Todos los resultados recogidos en las figuras 1 a 6, corresponden a vigas de luz media y cuantía de armado igualmente media, considerando diferentes condiciones de extremo y esbelteces. Las figuras 1 y 2 corresponden al caso de viga biapoyada, representándose en la primera de ellas los resultados correspondientes a flechas activas sobre la tabiquería. Las figuras 3 y 4 corresponden a vigas apoyadas en un extremo y empotradas en el otro, ofreciéndose en la primera resultados correspondientes a flechas totales y en la segunda a flechas activas. Finalmente, las figuras 5 y 6 ofrecen, con iguales criterios, resultados correspondientes a vigas con continuidad en ambos extremos.

Además de los casos "medios" antes indicados, también se han analizado otras luces y armados, obteniéndose resultados cualitativamente coincidentes. Como resumen de los diferentes casos estudiados puede considerarse la Tabla 2. En ella se proporcionan errores medios de la propuesta de modificación y de la actual redacción de EH-88, en relación con el Eurocódigo EC-2, obtenidos para flechas totales y activas sobre la tabiquería, en un conjunto de 27 vigas.

Tabla 1

Resumen de resultados. Errores medios

Errores medios $\frac{\delta_{EH} - \delta_{EC}}{\delta_{EC}}$ (%)	Tipo de flecha		
	Final (C.P.)	Total	Activa
Redacción actual	+56,8	+48,2	+74,4
Propuesta de modificación	−10,4	− 7,1	− 8,1

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

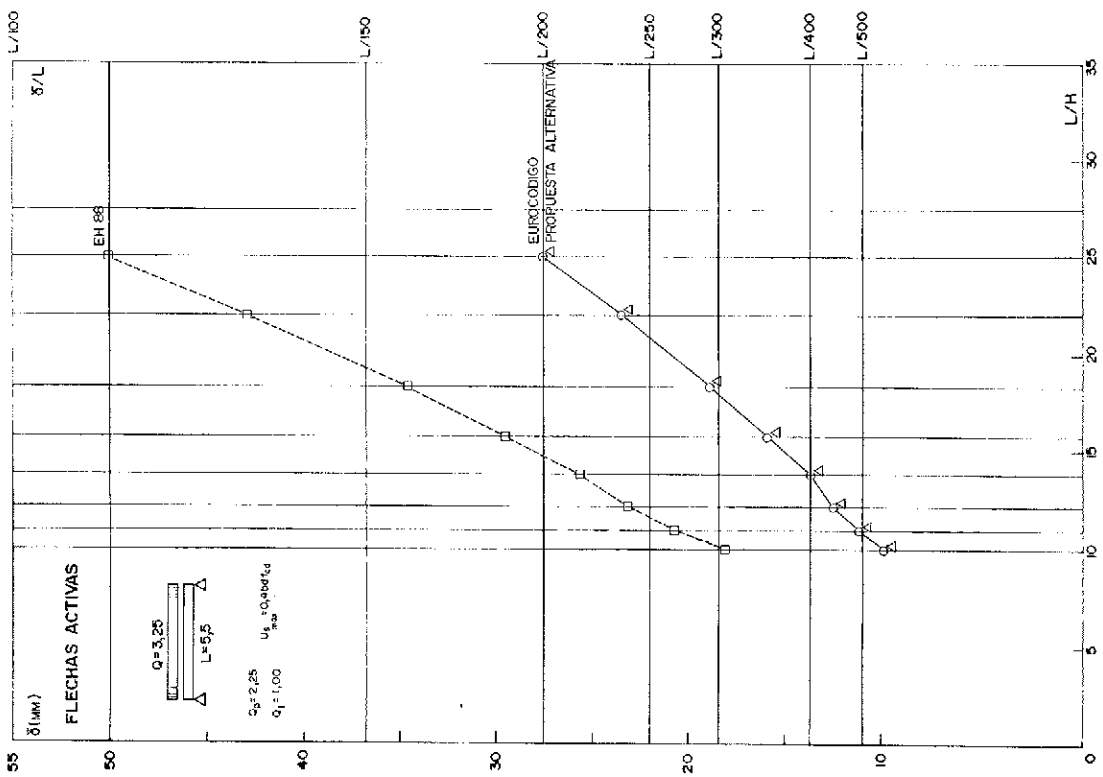


Fig. 2.

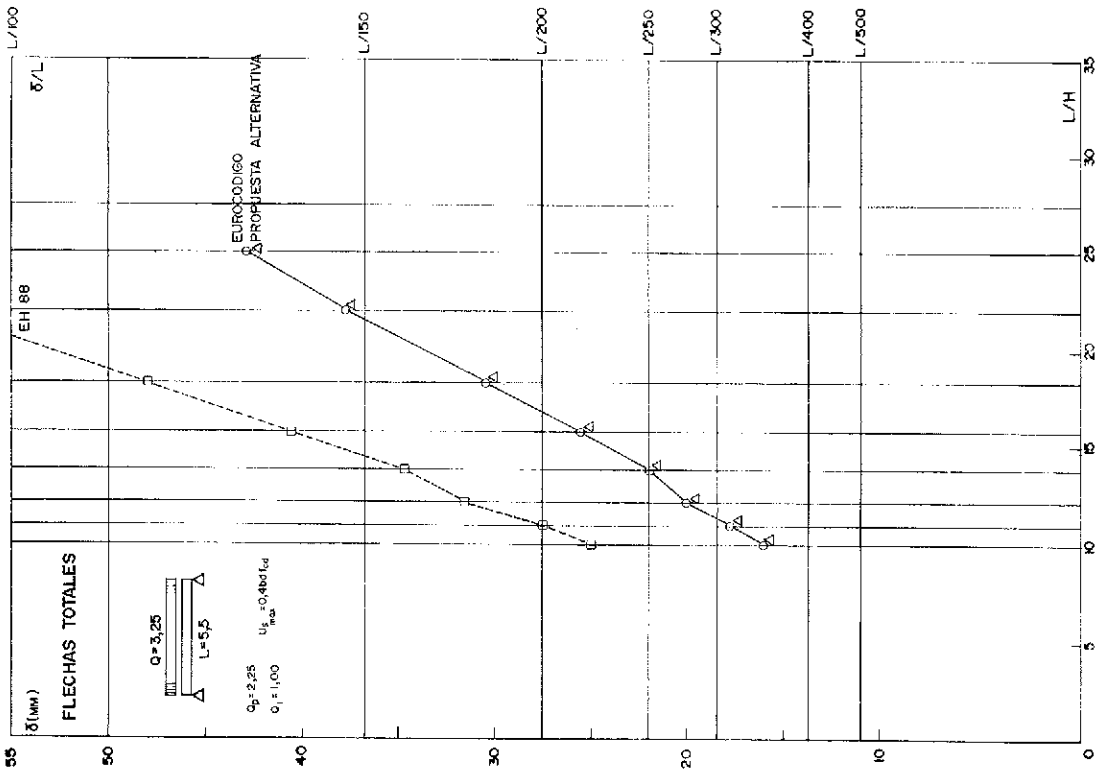


Fig. 1.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

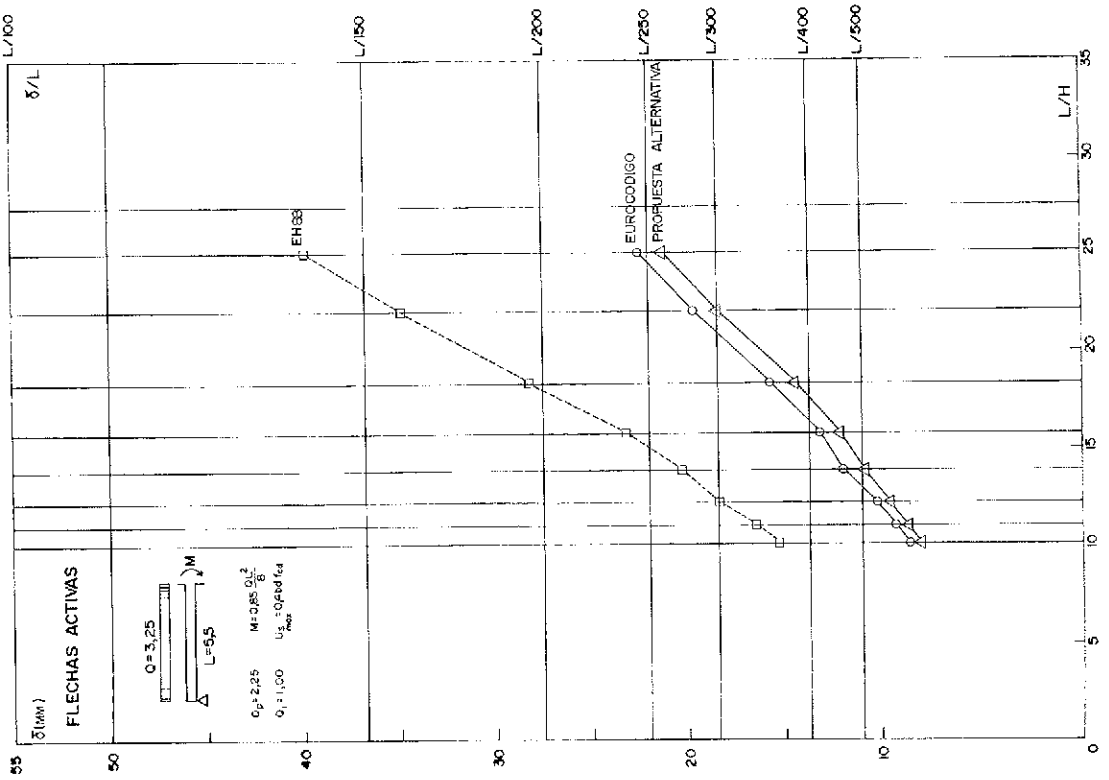


Fig. 4.

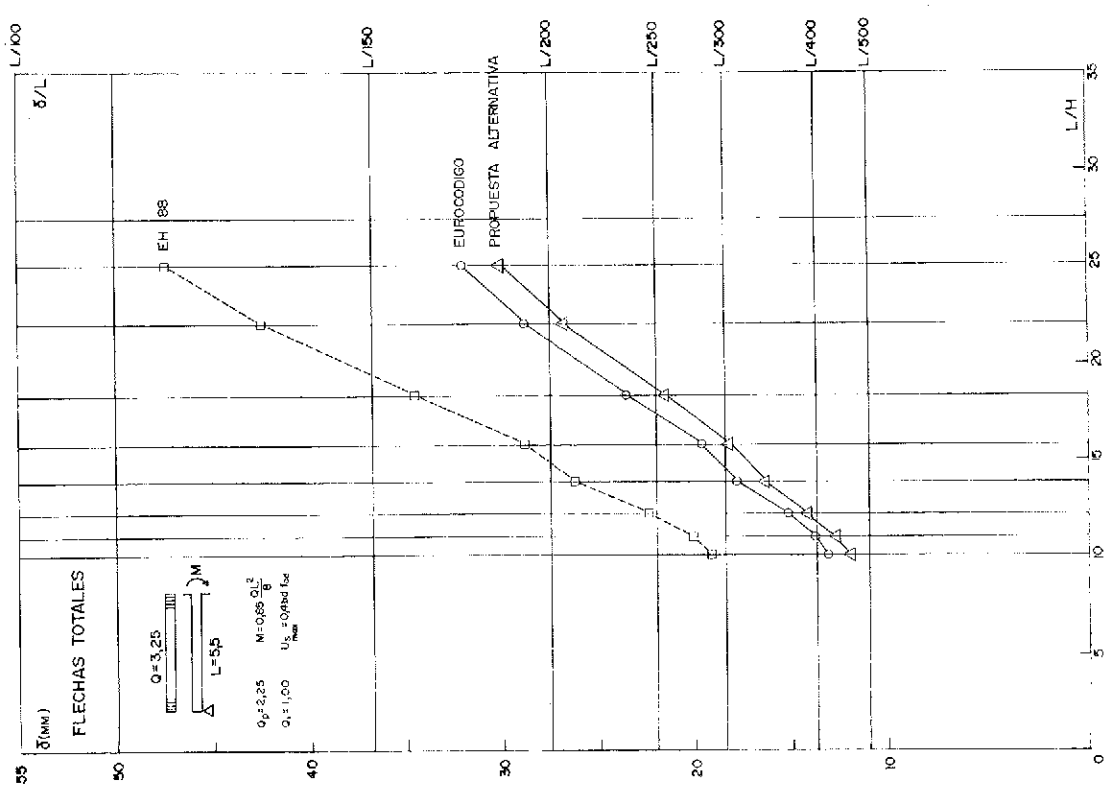


Fig. 3.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

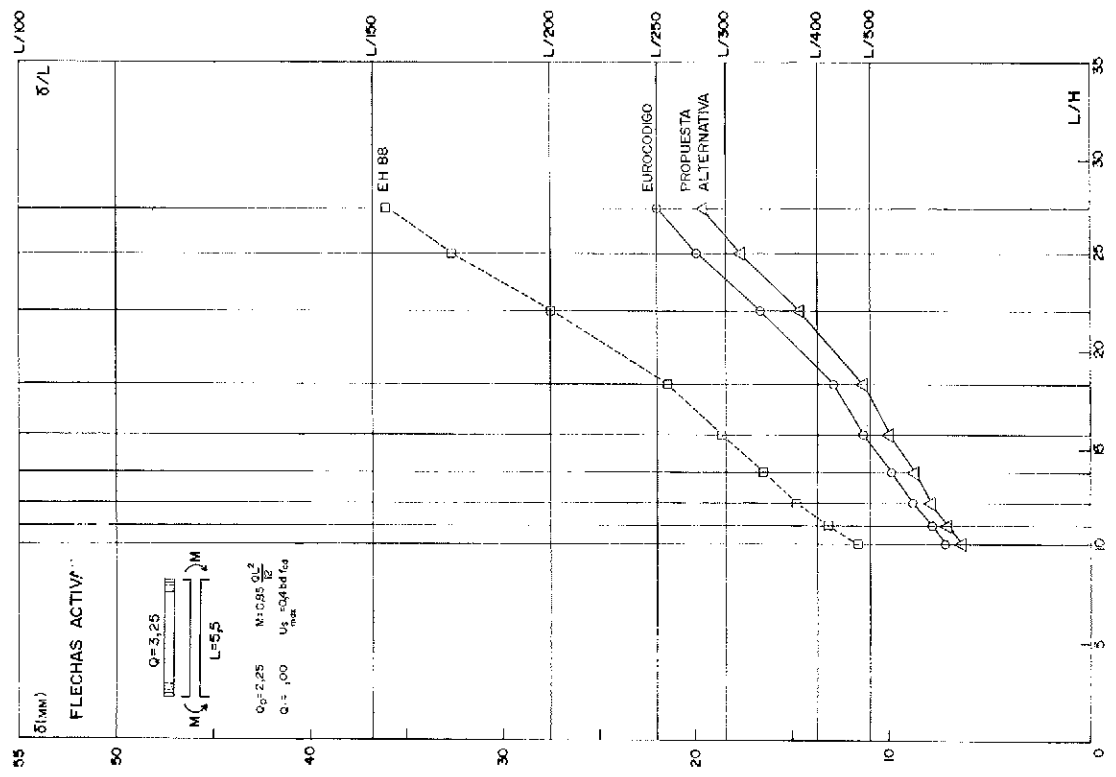


Fig. 6.

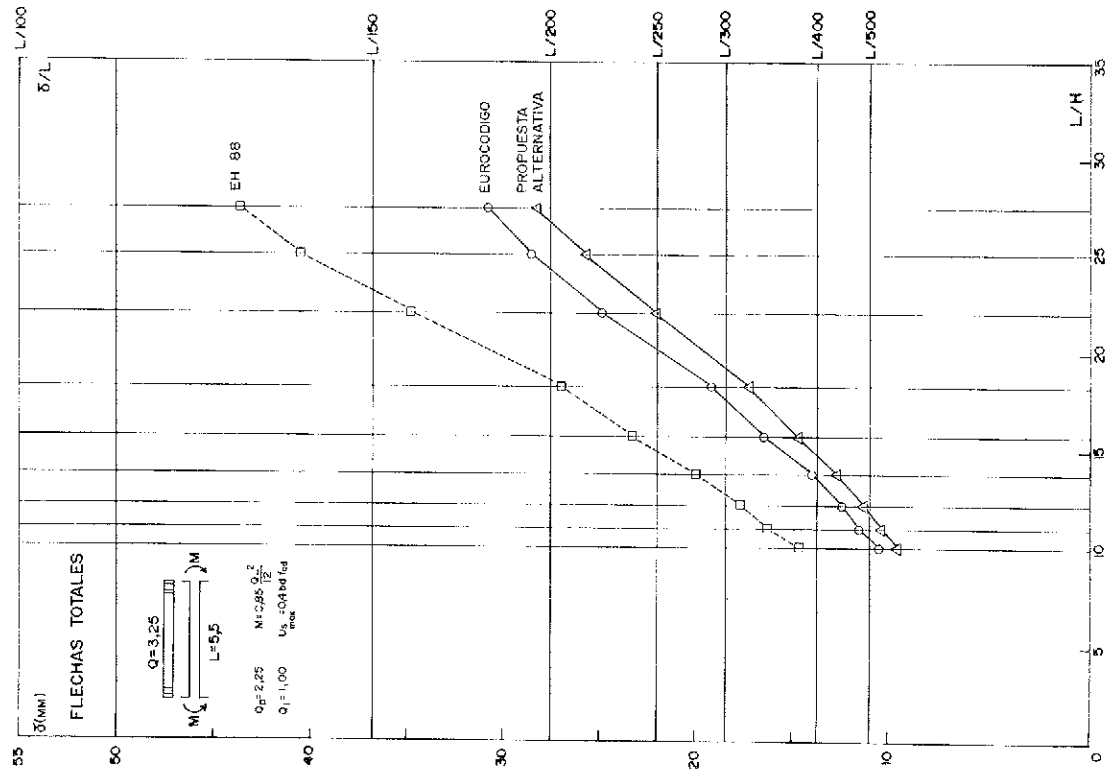


Fig. 5.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El análisis de los resultados que se presentan, evidencia que los resultados obtenidos aplicando la propuesta de modificación del artículo 45.4 de EH-88, concuerdan satisfactoriamente con los obtenidos aplicando el método general de integración de curvaturas preconizado por el Eurocódigo EC-2. Asimismo, resulta manifiesta la mejora de precisión que, respecto a dicho método, supone la propuesta de modificación, en relación con la redacción vigente:

—En términos de *flechas finales* (instantáneas + diferidas) debidas a la actuación de cargas permanentes, que son las que realmente se calculan a partir de la propuesta de modificación del artículo 45.4, el error medio de dicha propuesta respecto al método general del Eurocódigo EC-2 es del −10,4 por 100. Este valor supone una considerable mejora respecto al + 56,8 por 100 que, respecto a ese mismo método, presenta la actual redacción de EH-88.

—En términos de *flechas totales*, para situaciones medias de edificación, la propuesta de modificación concuerda razonablemente con el Eurocódigo EC-2, con un error medio en los casos estudiados del −7,1 por 100. Este valor representa una notable mejora respecto a la actual redacción de la EH-88 que, para los mismos casos, proporciona un error medio del + 48,2 por 100 (siempre relativo al método general del Eurocódigo EC-2).

—En términos de *flechas activas* sobre la tabiquería, la propuesta de modificación proporciona un error medio, respecto al Eurocódigo, del −8,1 por 100, valor que contrasta con + 74,4 por 100 de error que se obtiene con la redacción vigente de la Instrucción.

6. CONCLUSIONES

1. La aplicación de la redacción actual del artículo 45.4 de EH-88, relativo al cálculo de flechas diferidas, conduce a importantísimas sobrevaloraciones de los resultados, para las situaciones habituales de la edificación española. Por otra parte, en su redacción actual, el artículo 45.4 no se ajusta en su planteamiento a las directrices básicas del Eurocódigo EC-2, e, incluso, resulta poco coherente con el propio articulado de EH-88 en materia de fluencia del hormigón. Sin embargo, en materia de flechas instantáneas, con algunas matizaciones, la actual propuesta de la Instrucción, desarrollada en el artículo 45.3, resulta aceptable, tanto en su planteamiento como en la precisión de sus resultados.

2. Admitiendo el actual planteamiento de EH-88 para el cálculo de flechas instantáneas, e incorporando las directrices básicas del Eurocódigo EC-2 en materia de flechas diferidas, es posible desarrollar un modelo simplificado para la determinación de las flechas finales (instantáneas + diferidas) debidas a cargas permanentes. Este modelo, que se propone como alternativo al planteado en el artículo 45.4, supone una muy considerable mejora de precisión respecto a la redacción actual, sin incremento sustancial de dificultad. De acuerdo con el amplio tratamiento de casos efectuado, y tomando como referencia el método general de integración de curvaturas preconizado por el Eurocódigo EC-2, la aplicación de este modelo permitiría reducir los errores absolutos medios en flechas totales y activas, para vigas de edificación, desde los valores actuales de 48 por 100 y 74 por 100, hasta el 7 por 100 y 8 por 100, respectivamente. (Dada la concordancia existente entre el método general propuesto por el Eurocódigo y toda una serie de modelos, la comparación efectuada no puede considerarse exclusivamente frente a un modelo sino frente a un conjunto de ellos).

3. La modificación del artículo 45.4 en los términos propuestos en este trabajo, permitiría que la Instrucción EH-88 configure un cuerpo completo y coherente de prescripciones sobre cálculo y limitación de deformaciones, acorde con los reglamentos supranacionales de nuestro entorno europeo. Por otra parte, la modificación planteada es enteramente coherente con el restante articulado de EH-88, tanto en materia de comportamiento diferido del hormigón como de cálculo de flechas. Consecuentemente, su implantación sólo exige la mencionada sustitución del artículo 45.4, sin demandar correcciones adicionales.

APENDICE 1: ANALISIS RIGUROSO DE DEFORMACIONES PRODUCIDAS SIMULTANEAMENTE POR SOLICITACIONES DE LARGA Y BREVE DURACION

Salvo casos particulares, las extensiones de las zonas fisuradas de la sección, bajo solicitaciones de larga y breve duración actuantes por separado, no coinciden entre sí. Ello implica que, cuando la actuación de ambos tipos de solicitación es simultánea, la superposición de los efectos respectivos (tensiones, deformaciones, flechas, etc.) deje de ser correcta, incluso dentro del dominio cuasilineal propio de los estados límites de servicio a los que exclusivamente se hace aquí referencia.

En general, no obstante, los errores derivados de tal superposición de efectos son reducidos, siempre que para la obtención de deformaciones medias entre los estados I y II_0 (o para la obtención de momentos de inercia "equivalentes"), se opere con las solicitaciones totales respectivas.

En casos especiales, tales como historias de cargas/descargas complejas, secciones atípicas o "evolutivas", etc., dicha superposición de efectos deja ya manifiestamente de ser válida, requiriéndose entonces la aplicación de algoritmos más rigurosos. Estos algoritmos existen en la literatura,

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

y su aplicación con medios informáticos es relativamente simple, si bien su utilización no resulta apropiada para estructuras con gran número de piezas.

Martínez Calzón y Ortiz Herrera (Ref. 19) resuelven el problema antedicho, para una sección mixta, monosimétrica, general. Las secciones de hormigón armado/pretensado son un caso particular de dicha sección general, por lo que los mismos algoritmos les son aplicables, obviamente. Los mismos autores establecen, asimismo, los coeficientes de equivalencia u homogeneización que se deben aplicar en diversas situaciones.

En la publicación citada, se formulan las ecuaciones de respuesta en las secciones parciales o elementos integrantes de la sección, ΔN_i ($\Delta\epsilon_0$, ΔC), ΔM_i ($\Delta\epsilon_0$, ΔC), $1 \leqslant i \leqslant m$, en función de las incógnitas cinemáticas $\Delta\epsilon_0$ (incremento de la deformación unitaria en la fibra de referencia o 'directriz') y ΔC (incremento de la curvatura). Las ecuaciones de equilibrio que hay que resolver son:

$$\sum_{1}^{m} \Delta N_i\,(\Delta\epsilon_0, \Delta C) = \Delta N$$

$$\sum_{1}^{m} \Delta M_i\,(\Delta\epsilon_0, \Delta C) = \Delta M$$

donde ΔN y ΔM son las variaciones de las solicitaciones actuantes sobre la sección, en un intervalo de tiempo Δt, que no necesariamente ha de ser 'pequeño' si se adoptan los coeficientes de equivalencia u homogeneización propuestos por los autores. Evidentemente, puede tenerse $\Delta t \to 0$ (solicitaciones de breve duración).

El sistema de dos ecuaciones no lineales antedicho, se resuelve sin dificultad utilizando técnicas iterativas apropiadas; por ejemplo, el Método de Newton-Raphson modificado, con determinación del jacobiano 'secante' por diferenciación numérica, o bien, con menor rapidez de convergencia, adoptando la matriz de rigidez 'elástica' de la sección.

Martínez Calzón y Ortiz Herrera, en la obra citada *(Ref. 19)*, realizan una discusión del sistema no-lineal anterior que permite reducirlo a una única ecuación igualmente no-lineal, fácilmente resoluble por el *método de las cuerdas* u otra técnica apropiada. Esta ecuación única, prefijado el signo de la curvatura, ajusta la excentricidad de la solicitación aplicada, $\Delta M/\Delta N$.

Más recientemente, *Debernardi (Ref. 20)* ha propuesto un algoritmo sencillo pero riguroso para el análisis en estado de servicio de secciones de hormigón armado/pretensado. Basándose en el método A.A.A.E.M. (Algebraic Age Adjusted Effective Modulus), de *Bazant (Ref. 8)* y *Chiorino (Ref. 9)*, adopta el siguiente coeficiente de homogeneización o equivalencia:

$$n(t) = Es \cdot \left[\frac{1}{Ec(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \cdot \chi(t, t_0) \right]$$

donde t_0 y t son los instantes inicial y final de cada etapa de carga (no debiendo ser necesariamente 'pequeño' el intervalo $\Delta t = t - t_0$, siempre que la variación de tensiones en el hormigón sea afín a la función de relajación de dicho material en el mismo intervalo); *Es* es el módulo de elasticidad del acero; $E_c(t_0)$ es el módulo de deformación del hormigón, variable con la edad; $E_{c,28}$ es su valor a la edad de 28 días; $\varphi(t, t_0)$ es el coeficiente de fluencia; y $\chi(t, t_0)$ ('aging coeficient') es un coeficiente numérico que varía típicamente entre 0,6 y 0,9 y que reproduce dos efectos: la variación del módulo de deformación con la edad, que afecta a las deformaciones instantáneas del hormigón, y la variación de la tensión σ_c con el tiempo. El carácter variable de σ_c obliga a corregir el coeficiente de fluencia φ que en rigor ha de aplicarse exclusivamente para escalones de tensión $\Delta\sigma_c$ constantes en cada intervalo Δt; sin embargo, tales escalones discretos de tensión no pueden obviamente asumirse si —en orden a reducir al máximo el número de etapas del análisis— se pretende operar con incrementos de tiempo Δt no sólo no 'pequeños', sino incluso ilimitados.

Debernardi (Ref. 20) plantea el siguiente sistema de ecuaciones linealizado:

$$\lambda_c(t) \cdot A(t) + \mu_c(t) \cdot S(t) = C_1$$

$$\lambda_c(t) \cdot S(t) + \mu_c(t) \cdot I(t) = C_2$$

donde λ_c y μ_c son dos parámetros que caracterizan la ley de tensiones del hormigón ($\sigma_c = \lambda_c + \mu_c \cdot y \geqslant 0$); A, S, e I son el área, momento estático y momento de inercia de la sección homogeneizada; C_1 y C_2 son los incrementos ΔN, ΔM, corregidos mediante términos adicionales que dependen del estado de tensiones en el instante t_0 inicial del intervalo, y de las deformaciones de retracción del hormigón y de relajación del acero (en su caso) correspondientes al intervalo Δt.

El sistema linealizado anterior se resuelve con toda sencillez; pero subsiste la necesidad de un proceso iterativo, en una sola variable, y*, que establece la posición de la fibra neutra ($\lambda_c + \mu_c\, y^* = 0$) y define la sección efectiva de hormigón.

Para el cálculo de deformaciones medias entre los estados I y II_o, *Debernardi (Ref. 20)* propone una adaptación del mismo algoritmo anterior, si bien parece más conveniente la aplicación de las fórmulas usuales de interpolación directa de curvaturas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON, "EH-88, Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado", Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo, 1988.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

2. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON, "EF-88, Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón armado o pretensado", Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo, 1988.

3. EC-2 PART 1, "Eurocode N° 2, Design of Concrete Structures. Part 1, General Rules for Buildings", Final Draft, Dec. 1988.

4. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, "C.E.B. - F.I.P. Model Code 1990", First Predraft 1988, C.E.B. Bull. n° 189, 190a, 190b, Lausanne, Jul. 1988.

5. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, "Fissuration et Deformations", C.E.B. Bull. n° 143, Lausanne, Dec. 1981.

6. FAVRE, R., KOPRNA, M., RADOJICIC, A., "Effects differés, fisuration et deformations des structures en béton", Ecole Politechnique Fédérale de Lausanne, Ed. Georgi Saint Saphorin, Suisse, 1980.

7. ALVAREZ BALERIOLA, J.I., BAQUEDANO, F., GUTIERREZ, J.P., RECUERO, A., "Fisuración y cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado", Monografías del I.E.T. c.c. n° 376-377, Madrid, Junio 1984.

8. BAZANT, Z.P., "Prediction of Concrete Creep Effects using Age-Adjusted Effective Modulus Method", A.C.I. Journal, 69 (20), pp. 212-217, 1972.

9. CHIORINO, M.A., ed., "Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete", C.E.B. Manual n° 142/142bis, Georgi Pub. Co., Switzerland, 1984.

10. LEONHARDT, F., "Anfängliche und nachtragliche Durchbiegungen von Stahlbetonbalken im Zustand II, Vorschläge für Bregenzungen und vereinfachte Nachweise", Beton und Stahlbeton, Vol. 54, p. 240 (25), 1959.

11. JIMENEZ MONTOYA, P., GARCIA MESEGUER, A., MORAN CABRE, F., "Hormigón armado", Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1974.

12. BRANSON, D.E., "Design Procedures for Computing Deflections", A.C.I. Journal, Vol. 65, p. 730 (25), 1968.

13. JOHNSON, A.I., "Deformations of Reinforced Concrete", Public. of I.A.B.S.E., Vol. 11, Zurich, Switzerland, p. 253 (25), 1951.

14. YU, W.W., WINTER, G., "Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working Loads", A.C.I. Journal, Vol. 57, N° 1, pp. 29-50, 1960.

15. AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERING, "Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings", Monograph on Planning and Design of Tall Buildings, Vol. CB, ASCE, New York, 1978.

16. WASHA, G.W., FLUCK, P.C., The Effect of Compressive Reinforcement on the Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams", A.C.I. Journal, Vol. 49, N° 10, pp. 89-108, 1952.

17. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, A.C.I. 318-83, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", A.C.I. Manual of Concrete Practice, Part 3, 1989.

18. ORTIZ HERRERA, J., DEL RIO BUENO, A., "Estudio crítico del cálculo de flechas en vigas de hormigón armado según la Instrucción EH-88", Hormigón y Acero, n° 173, Madrid, 4° trimestre, 1989.

19. MARTINEZ CALZON, J., ORTIZ HERRERA, J., "Construcción mixta hormigón-acero", Ed. Rueda, Madrid, 1974.

20. DEBERNARDI, P.G., "Behavior of Concrete Structures in Service", Journal of Structural Engineering, A.S.C.E., Vol. 115, N° 1, Jan. 1989.

RESUMEN

El procedimiento simplificado para el cálculo de flechas diferidas propuesto en el artículo 45.4 de la Instrucción EH-88 presenta, en su concepción y aplicación, fuertes divergencias respecto a reglamentos supranacionales de nuestro entorno europeo (Eurocódigo EC-2, Código Modelo C.E.B. - F.I.P.), así como respecto a otros modelos de numerosos autores (método de integración de curvaturas, método bilineal, método de los coeficientes globales, etc.). El alcance de tales divergencias queda evidenciado en el contraste sistemático con otros modelos, expuesto en artículo aparte publicado simultáneamente en esta revista.

Ante los resultados obtenidos y dada la importancia práctica de la cuestión en el dimensionamiento de estructuras de hormigón armado, los autores entienden que el citado artículo 45.4 de EH-88 debe ser urgentemente revisado. En tal sentido, en este trabajo se propone un método alternativo de cálculo que supone una adaptación, simplificada pero rigurosa, del modelo general propuesto en el Eurocódigo EC-2. El método mantiene igual nivel de simplificación que la actual propuesta de EH-88 para el cálculo de flechas instantáneas, con la que resulta totalmente coherente.

La propuesta alternativa para el cálculo de flechas diferidas, ha sido sistemáticamente contrastada con el método general preconizado por el Eurocódigo EC-2, obteniéndose un satisfactorio acuerdo en las más de treinta configuraciones de vigas analizadas. El contraste con otros modelos propuestos por organismos y autores de reconocida solvencia científica, ha resultado igualmente satisfactorio.

Tanto este trabajo como el relativo al estudio crítico del método propuesto por EH-88, han sido desarrollados en el marco del Proyecto de Investigación "Desarrollo de sistemas CAD para el proyecto completo de estructuras de hormigón" fi-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

nanciado por la D.G.I.C.Y.T. con número PB 0344.

SUMMARY

The over-simplified model proposed in new spanish concrete code to calculate long-time deflections in R.C. flexural members, disagree with international european concrete codes (Eurocode EC-2, CEB-FIP Model Code), and with most of main analytical models. A study concerning this matter is related by authors in this issue.

In this work an alternative simplified model to evaluate long-time deflections in R.C. is proposed. It has been developed according to general procedures suggested by Eurocode EC-2 in this subject. The alternative proposal has been systematically checked for usual building beams, and shows a satisfactory agreement with most analytical models.

* * *

XIII Congreso Internacional de la Industria de Prefabricados de Hormigón

Durante los días 20 a 25 de mayo del presente año 1990, se va a celebrar, organizado por el BIBM, y con la colaboración de las firmas Bayer (U.K.) Ltd., British Cement Association y ECC Building Products Ltd., el XIII Congreso Internacional de la Industria de Prefabricados de Hormigón.

Todas las Sesiones del Congreso, incluida la Ceremonia de Apertura, tendrán lugar en el "Conference Center Queen Elisabeth II", de Westminster, Londres.

Los idiomas oficiales serán el inglés, francés y alemán. Habrá un servicio de traducción simultánea, en todas las Sesiones de Trabajo.

El programa aprobado para este Congreso es el siguiente:

Domingo, 20 de mayo: Registro de participantes.

Lunes, 21 de mayo:

Mañana – Ceremonia de Apertura.

Tarde – Sesión Plenaria. "Tendencias de la construcción en el Siglo XXI y respuesta que ofrece la prefabricación".

Noche – Recepción, con refrigerio, en el Museo Victoria y Alberto.

Martes, 22 de mayo:

Mañana y tarde:

Sesiones de Trabajo

– Elementos constructivos para edificación.

– Elementos constructivos par ambientes rurales.

– Elementos constructivos para obras subterráneas.

– Elementos estructurales.

Noche: Banquete en el Guilldhall (opcional).

Miércoles, 23 de mayo: Sesión Plenaria Técnica.

Mañana y tarde:

– Los prefabricados de hormigón en el tunel del Canal.

Una visión de futuro.

–Las aplicaciones de la informática en la producción de elementos prefabricados de hormigón, en el año 2000.

Noche: Las Sesiones del Congreso se clausurarán con una Gala extraordinaria en el famoso Café Royal, en el corazón del West-End de Londres.

Para los acompañantes se ha preparado un amplio y atractivo programa de actividades sociales y visitas artísticas.

Simultáneamente con el Congreso y en los mismos locales, se celebrará una magna Exposición de elementos prefabricados de hormigón y de los productos y equipos utilizados en su fabricación.

Se han organizado también diversos e interesantes viajes post-Congreso.

Las cuotas de inscripción establecidas son las siguientes:

– Para los Miembros del BIBM.

Inscripciones efectuadas antes del 12-2-90: Libras 475,

Inscripciones efectuadas después del 12-2-90: Libras 530,–

Para los no Miembros del BIBM.

Inscripciones efectuadas antes del 12-2-90: Libras 505,–

Inscripciones efectuadas después del 12-2-90: Libras 560, -

– Para los acompañantes:

Inscripciones efectuadas antes del 12-2-90: Libras 295,

Inscripciones efectuadas después del 12-2-90: Libras 330,–

Los que deseen ampliar esta información, deberán dirigirse a:

BIBM 90, Concorde Services Limited
10 Wendell Road, London W12 9RT, Reino Unido
Teléfono: 01-743 3106. Fax: 01-743 1010

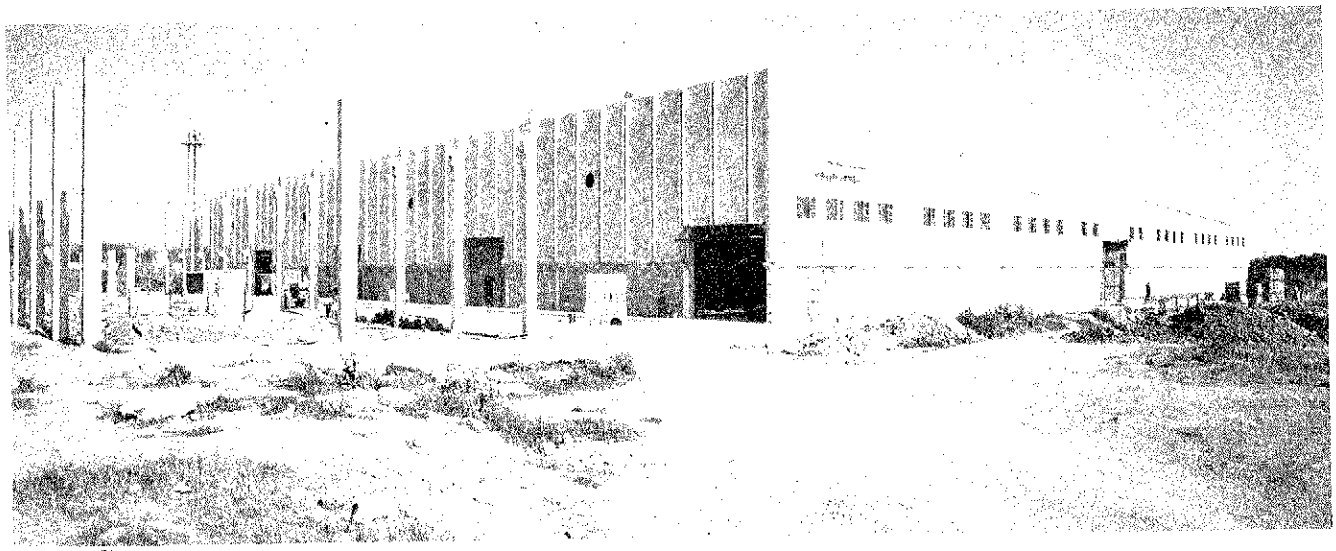
Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

ALVISA

PREFABRICADOS ALBAJAR

PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE





HUESCA:

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA
Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON
Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

MADRID

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10
Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4- 8 - TORREJON DE ARDOZ
Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

ZARAGOZA

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Reducción del ancho de banda de conjuntos de estructuras independientes

Alfonso Recuero y José P. Gutiérrez
Instituto de Ciencias de la Construcción
Eduardo Torroja C.S.I.C. Madrid

INTRODUCCION

El análisis de estructuras conduce, sistemáticamente, a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Los algoritmos para la resolución de tales sistemas pueden clasificarse en directos e iterativos, siendo los primeros los más frecuentemente utilizados. Los métodos directos más utilizados son los denominados en banda, constante o variable, y los de SKY-LINE, para las estructuras formadas por barras; y los denominados frontales, en caso de utilizar elementos finitos.

Los métodos denominados en banda aprovechan la característica de la matriz de rigidez de las estructuras, de que los elementos que distan de la diagonal principal más de una cierta cantidad son siempre nulos. La eficiencia de estos métodos depende del parámetro denominado ancho de banda de la matriz que, para los sistemas de banda constante, es la máxima diferencia entre los índices de un coeficiente no nulo, esto es, el número de coeficientes comprendidos entre el mismo y el elemento de la diagonal principal correspondiente a la ecuación a la que pertenece. La memoria necesaria para almacenar los coeficientes de la matriz de rigidez es proporcional al número de nudos por el ancho de banda, y el tiempo de ejecución del algoritmo es directamente proporcional al producto del número de nudos por el cuadrado del ancho de banda.

El valor de este parámetro es directamente proporcional a la máxima diferencia entre los números asignados a dos nudos pertenecientes a un mismo elemento; por esta razón resulta importante el numerar adecuadamente los nudos de la estructura que se va a analizar. Sin embargo, no siempre resulta fácil o conveniente el numerar los nudos de la estructura de modo que se produzca un ancho de banda mínimo. En tales casos es preferible utilizar un algoritmo que produzca una renumeración interna de los nudos que minimice el ancho de banda de la matriz de rigidez. Esta numeración se utilizará para generar la matriz de rigidez y resolver el sistema de ecuaciones, en tanto que los resultados se presentarán utilizando la numeración original propuesta por el proyectista o generada automáticamente por el programa de diseño.

La bibliografía sobre este tipo de algoritmos es relativamente abundante. Los autores realizaron un exhaustivo estudio del tema (8) en la que revisaron las soluciones propuestas por distintos autores (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y propusieron, además, un algoritmo (8, 10) capaz de producir, en tiempos muy razonables, soluciones óptimas o cuasi óptimas. Este algoritmo tiene además la propiedad de admitir el establecimiento de un limitador de tiempo, de forma que, transcurrido un tiempo prefijado, el proceso puede interrumpirse en un estado intermedio, devolviendo, en cualquier caso, una solución satisfactoria.

Sin embargo, este algoritmo, al igual que la mayor parte de los restantes algoritmos existentes, presenta problemas de funcionamiento cuando se trata de renumerar conjuntos de estructuras independientes. Esta circunstancia se pone de manifiesto especialmente en sistemas CAD para el proyecto de estructuras completas; así, por ejemplo, en sistemas que realizan análisis de la estructura planta a planta, pueden encontrarse plantas en las que existen zonas independientes entre sí. Además, es en este tipo de sistemas donde es más necesaria la utilización de algoritmos de renumeración de la estructura, ya que en ellos la generación y numeración de los nudos de la estructura es automática y la misma está principalmente condicionada por la posterior utilización de los resultados.

Este ha sido, precisamente, el caso que se ha presentado a los autores en el desarrollo de un sistema del tipo citado, realizado conjuntamente por el Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, y la Empresa Tetraser. Este trabajo

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

se realiza dentro del proyecto de investigación "Desarrollo de Sistemas CAD para el Proyecto Completo de Estructuras de Hormigón", financiado por la DGICYT con el número PB0344.

En el presente artículo se describe un algoritmo que supone una generalización del presentado por los autores en (8, 10), que permite renumerar conjuntos de estructuras independientes, obteniendo para cada una de ellas el mismo resultado que se obtendría con la aplicación del algoritmo antes citado a cada una de ellas por separado. Mantiene, además, el nuevo algoritmo, la propiedad de que en caso de interrumpir el proceso antes de su finalización, por ejemplo por introducir un limitador de tiempo, devuelve en cualquier caso una solución satisfactoria.

DESCRIPCION DE LOS DATOS

Tanto los datos de entrada en el algoritmo como los resultados producidos, coinciden exactamente con los del algoritmo previamente mencionado. Puesto que en las referencias (8, 10) se hace una descripción exhaustiva de los mismos y se incluyen numerosos ejemplos, en el presente artículo se incluye tan sólo una sucinta descripción de los mismos a modo de recordatorio.

Los datos necesarios para describir el conjunto de estructuras, así como el formato de los mismos es el siguiente:

Número de nudos del conjunto.

–Número de elementos del conjunto.

–Número máximo de nudos por elemento.

–Relación de los nudos de los elementos. Esta relación se supone situada en un vector de una dimensión; en él se relacionarán, sucesivamente, los números de los nudos de cada uno de los elementos. En caso de existir elementos con distinto número de nudos, aquellos que tengan un número de nudos menor que el máximo, deberán ser completados, repitiendo el número de veces necesario el número de alguno de los nudos existentes.

El algoritmo devuelve como resultado:

– Ancho de banda del conjunto de estructuras, considerando como tal el mayor de los anchos de banda de las estructuras independientes.

–Vector de renumeración. Se trata de un vector unidimensional en el que el elemento iésimo indica el nuevo número que debe asignarse al nudo I.

Las consideraciones expuestas, en las referencias mencionadas, sobre la forma de utilizar este vector de renumeración así como sobre la utilización del algoritmo en estructuras en las que el número de grados de libertad puede ser distinto de uno a otro nudo son totalmente aplicables al algoritmo que aquí se presenta.

BASES DEL ALGORITMO

El algoritmo descrito es un método heurístico consistente en aplicar de forma sistemática un criterio para la numeración de los nudos de una estructura, que produce habitualmente anchos de banda razonables y cuya aplicación es muy simple.

El criterio mencionado es el siguiente: "Asignar el número 1 a un nudo de la estructura; numerar correlativamente todos los nudos conectados con el 1; seguidamente continuar numerando correlativamente todos los nudos conectados con el 2 y que no hubieran sido previamente renumerados; proceder sucesivamente y de forma ordenada con los restantes nudos hasta que hayan quedado numerados todos los nudos de la estructura".

La numeración resultante de la aplicación de este criterio depende del nudo al que se aplique el número 1 y de el orden en que se revisen los nudos que están conectados a otro nudo. La aplicación de este criterio permite, además, seguir fácilmente la evolución del ancho de banda producido por la numeración, pues basta, al final de la comprobación de todos los nudos unidos a cada nudo, restar del último número asignado el del número del nudo que se comprueba.

El algoritmo propuesto por los autores consiste en aplicar este criterio, tomando sucesivamente como nudo 1 cada uno de los nudos de la estructura y revisando los nudos conectados a cada nudo en el orden en que se ha descrito la estructura, sin realizar permutaciones de ningún tipo. El método presenta problemas para pasar de una estructura a la siguiente al no existir ninguna conexión entre ambas; por consiguiente se hace preciso incorporar la detección de la renumeración completa de una estructura independiente, buscar un nudo de la estructura siguiente y continuar a partir de él el proceso.

Ocurrirá, además, habitualmente, que los números asignados a los nudos de cada estructura no sean correlativos. El algoritmo originalmente propuesto por los autores, consideraba como numeración inicial la propuesta por el proyectista o por el programa de Diseño Automático. El algoritmo que ahora se presenta propone, como numeración inicial, una numeración mejorada en la cual los números asignados a los nudos de cada estructura son correlativos y en la que se mantiene el orden relativo de los números asignados a cada nudo dentro de una misma estructura. Esta primera renumeración puede ya producir mejoras en el ancho de banda de cada una de las estructuras y en el del conjunto.

El algoritmo que se propone persigue, además del objetivo general de mejorar el ancho de banda del conjunto y de cada una de las estructuras, el de minimizar su tiempo de ejecución y el de poder proporcionar una solución satisfactoria aunque el proceso se interrumpa antes de ser completado. Se ha buscado, además, un procedimiento no recursi-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

vo, dado que, por una parte, no todos los lenguajes de programación permiten la recursión, y por otra, dichos procedimientos, aunque puedan ser más elegantes, son sistemáticamente menos eficientes.

DESCRIPCION DEL ALGORITMO

El algoritmo propuesto puede descomponerse en cuatro pasos sucesivos que se describen a continuación.

PASO 1: CONSTRUCCION DE LA TABLA DE CONEXIONES ENTRE NUDOS

Esta tabla de conexiones estará contenida en un vector unidimensional que denominaremos TABLA, en el que se situarán consecutivamente los números de los nudos conectados con cada nudo del conjunto. Para manejar este vector se utilizará otro vector unidimensional que denominaremos LIMITES, de modo que LIMITES(I) indicará la posición en TABLA del número del último nudo conectado con el nudo I. Para construir estos vectores el procedimiento es:

1.1. Considerar sucesivamente cada uno de los nudos del conjunto de estructuras. Sea I el nudo actualmente considerado.

1.1.1. Detectar cada uno de los elementos que contienen el nudo I.

1.1.1.1. Revisar cada uno de los nudos del elemento encontrado. Sea J el número del nudo considerado. Si J no está contenido en TABLA como conectado con I, incluir J al final de TABLA y actualizar el valor de LIMITES(I).

PASO 2: DETECCION DE LAS ESTRUCTURAS INDEPENDIENTES

Pueden detectarse las distintas estructuras independientes así como los nudos pertenecientes a cada una de ellas. A cada una de las estructuras se asignará un número y cada uno de los nudos se marcará con el número de la estructura a que pertenece, utilizando para ello un vector unidimensional que denominaremos EST. Para saber el número de nudos de cada estructura, bastará contar en el vector EST las veces que aparece el número de estructura. Puesto que en cada estructura se renumeran sus nudos con valores correlativos, este conteo nos permite saber también cuál es el número más alto que se va a asignar a los nudos de cada una de las estructuras. El proceso de separación consta de las siguientes fases:

2.1. Considerar que se está en la estructura 1 y que el último número asignado es 0. Llamemos K a este número.

2.2. Buscar el primer número de la estructura actual y asignar al mismo el número siguiente al último asignado.

2.3. Revisar sucesivamente los nudos a los que se ha asignado el número K y sucesivos. Sea J el número asignado al nudo en consideración.

2.3.1. Si no se hubiese asignado el número J a ningún nudo, se habrá alcanzado el final de la estructura actualmente considerada. Incrementar en 1 el número de la estructura y volver a 2.2.

2.3.2. Revisar todos los nudos conectados con aquel al que se le ha asignado el número J. Si a alguno de estos nudos no se le hubiera asignado número, se le asignará el número siguiente y se marcará como perteneciente a la estructura en curso.

2.3.3. Cuando se hayan renumerado todos los nudos del conjunto de estructuras, pasar a 2.4.

2.4. Contar el número de nudos pertenecientes a cada una de las estructuras.

2.5. Construir una tabla con el máximo número que se asignará a cada una de las estructuras independientes.

PASO 3. PREPARACION DEL PROCESO DE RENUMERACION

La numeración inicial de las estructuras puede ser tal que no se utilicen números correlativos dentro de cada una de ellas. El algoritmo utiliza, como numeración base, una en la cual los números asignados a los nudos de cada estructura son correlativos y mantienen, dentro de cada una de ellas, el mismo orden relativo de la numeración inicial; para ello basta ordenar los elementos del vector EST y generar el vector de renumeración a partir del vector de direcciones indirectas que devuelve la subrutina SORT. Para esta renumeración se calculan, como primeros valores de referencia, los anchos de banda de cada una de las estructuras independientes y del conjunto. Las fases de este paso son:

3.1. Ordenar los elementos del vector EST mediante una subrutina SORT.

3.2. Generar el vector de renumeración a partir del vector de direccionamiento indirecto producido por SORT.

3.3. Calcular el ancho de banda que produce esta renumeración en cada una de las estructuras independientes; para ello, bastará recorrer cada uno de los nudos del conjunto, determinar la estructura a la que pertenecen y comprobar la máxima diferencia entre el número asignado a dicho nudo y los números asignados a los nudos con los que está conectado.

3.4. Asignar, como ancho de banda del conjunto, el máximo de los anchos de banda de cada una de las estructuras independientes.

PASO 4: PROCESO DE RENUMERACION

El algoritmo aplica el criterio de renumeración

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

mencionado, tomando como primer nudo, sucesivamente, cada uno de los nudos del conjunto de estructuras, pero ordenados por estructura. Dentro de cada estructura, se prosigue la renumeración en tanto que no se supere el mejor ancho de banda de la estructura o no se iguale o supere el mejor ancho de banda del conjunto. Al terminar de numerar la estructura a la que pertenece el primer nudo, se pasará a numerar la siguiente estructura, siempre que no se hubiera realizado una renumeración anterior completa. En cualquier caso, no se renumerarán las estructuras anteriores a aquella que contiene el primer nudo, al cual se asignará el primer número correspondiente a su estructura. Cada vez que en una estructura independiente se alcance una numeración mejor que la mejor anterior, ésta será sustituida por la nueva en las posiciones adecuadas del vector de renumeración.

4.1. Establecer un indicador que señale que no se ha producido ninguna renumeración completa.

4.2. Para cada una de las estructuras independientes:

4.2.1. Determinar el primer número correspondiente a esta estructura.

4.2.2. Determinar el último número que hay que asignar, que será el último nudo de la estructura si ha habido previamente una renumeración completa, o el número de nudos del conjunto, si no ha habido ninguna renumeración completa.

4.2.3. Para cada uno de los nudos a los que hay que reasignar numeración y llamando I a dicho nudo:

4.2.3.1. Anular la renumeración anterior de los nudos que hay que renumerar.

4.2.3.2. Asignar al nudo I el primer número correspondiente a la estructura a la que pertenece.

4.2.3.3. Para cada uno de los números que hay que asignar, y llamando J a dicho número.

4.2.3.3.1. Revisar todos los nudos conectados con aquel al que se ha asignado el número J, asignando el número siguiente al último asignado a aquellos que no estuvieran renumerados.

4.2.3.3.2. Si se supera el mejor ancho de banda anterior de la estructura a que pertenece dicho nudo, volver a 4.2.3.

4.2.3.3.3. Si se supera o iguala el mejor ancho de banda del conjunto, volver a 4.2.3.

4.2.3.3.4. Si se ha alcanzado el último número correspondiente a la estructura en curso y el ancho de banda actual de la misma mejora el último obtenido, sustituir esta solución en el vector de renumeración.

4.2.3.3.5. Si se ha alcanzado el último nudo de la estructura en curso y quedan más estructuras por renumear, actualizar el número de estructura y hacer J igual al primer número que hay que asignar a la misma, volviendo al punto 4.2.3.

4.2.3.3.6. Si se ha alcanzado el último número que hay que asignar, volver a 4.2.

4.2.3.3.7. Volver a 4.2.3.

EJEMPLOS

En la bibliografía especializada referente a este tema, suele utilizarse un conjunto de ejemplos con los cuales se comparan los resultados, tanto en ancho de banda obtenido como en tiempo de ejecución. Puesto que el algoritmo que aquí se describe no representa, en su aplicación a una sola estructura, ninguna diferencia con el presentado en (8, 10), no se considera necesario reproducir aquí los resultados para este conjunto clásico de ejemplos.

Para ilustrar el funcionamiento del algoritmo, se ha tomado aquí, como ejemplo, un conjunto de tres estructuras independientes, formadas exclusivamente por barras horizontales y verticales. En la Fig. 1 se representa este conjunto de estructuras con la numeración inicial de los nudos. Los nudos se han numerado, sistemáticamente, de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, lo que hace que la numeración de los nudos de cada una de las estructuras no sea correlativa.

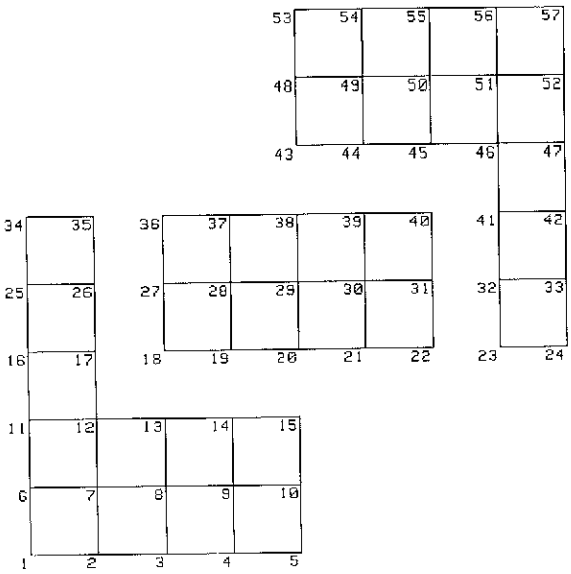


Fig. 1. Numeración inicial.

En la Fig. 2 se representa el mismo conjunto de estructuras, pero esta vez los números asignados a sus nudos corresponden a la numeración tomada como base por el algoritmo. Puede observarse que, en este caso, los número asignados a los nudos de cada estructura son correlativos y que, además, conservan dentro de cada estructura el orden relativo en la numeración inicial de la Fig. 1. Esta numeración de base produce ya un mejor ancho de banda que la numeración inicial.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

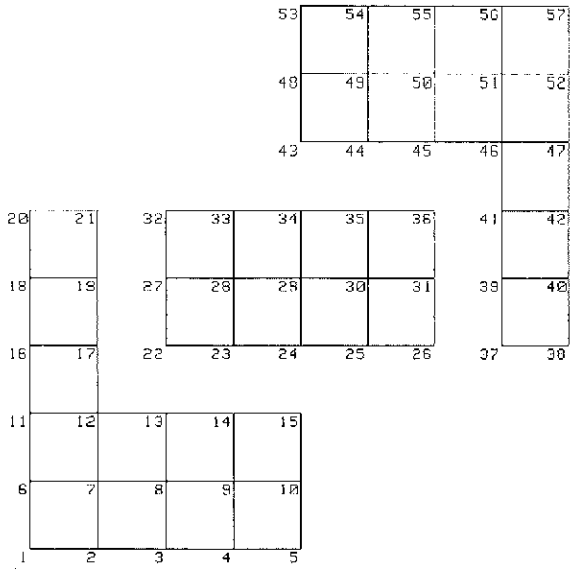


Fig. 2. Numeración base de partida.

Por último, en la Fig. 3 se muestra la numeración devuelta por el algritmo. Las estructuras en forma de L son simétricas y la numeración asignada es también simétrica. Esto no tendría por qué ser así necesariamente, ya que la solución a la que llegue depende del orden en que se hayan descrito los elementos que forman la estructura. En este caso, para cada una de las tres estructuras independientes, la numeración proporcionada produce un ancho de banda mínimo.

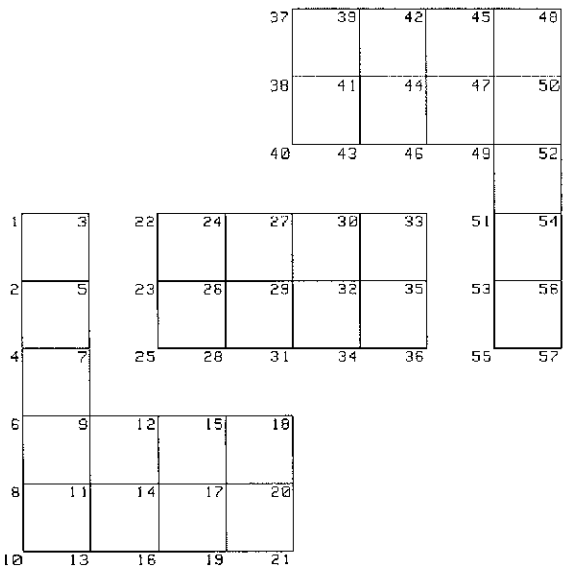


Fig. 3. Numeración final.

CONCLUSIONES

El algoritmo que se describe en este artículo tiene las siguientes características:

–Permite renumerar conjuntos de estructuras independientes, proporcionando, para cada una de ellas, una renumeración de las mismas características que si se hubiese aplicado el algoritmo a la estructura sola.

–No garantiza la obtención del ancho de banda mínimo en cada una de las estructuras, si bien, en general, proporciona una numeración óptima o cuasi óptima.

–Los tiempos de ejecución del algoritmo son reducidos y sensiblemente iguales a la suma de los tiempos que se emplearían para renumerar independientemente cada una de las estructuras.

No utiliza procedimientos recursivos, por lo que el algoritmo puede implementarse en cualquier lenguaje de programación.

–A lo largo de todo el proceso, está disponible la mejor solución obtenida hasta el momento, lo que permite introducir limitadores de tiempo de ejecución, devolviendo, en cualquier caso, una solución satisfactoria.

–La numeración asignada a cada una de las estructuras independientes es correlativa.

–El algoritmo está especialmente indicado para su utilización en programas de Diseño Automático de Estructuras, en los cuales se producen normalmente anchos de banda grandes y, además, puede darse el caso de tener que analizar conjuntamente estructuras independientes.

–El algoritmo se compara, favorablemente, con cualquiera de los algoritmos presentados en la literatura especializada, tanto en tiempos de ejecución como en requerimientos de memoria central y en calidad de la solución obtenida.

–El algoritmo descrito, ha sido implementado en BASIC-UX, en forma de subrutina externa que puede sustituir directamente a la subrutina presentada en (8, 10). Las personas interesadas en disponer de esta subrutina pueden solicitarlo por escrito a los autores.

REFERENCIAS

1. ROSEN, R., Matrix Bandwidth Minimization, Proceedings of the 23rd National Conference, Association for Computing Machinery, Brandon Systems Press. Princeton, N.J., 1968.

2. AKYUZ, F.A. and UTKU, S., An Automatic Relabeling Scheme for Bandwidth Minimization of Stiffnes Matrices, Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 6, 1968.

3. CUTHILL, E. and McKEE, J., Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices, presented at the 1969 National Conference of Association for Computing Machinery, held at San Francisco, California.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

4. NELSON, M.F. and HIDALGO, J.,Discussión, Algorithm for Matrix Bandwidth Reduction, ASCE, N° ST12, December 1972, pp. 2.820-2.821.

5. GROOMS, H.R., Algorithm for Matrix Bandwidth Reduction, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, N°. ST1, January, 1972, pp. 203-214.

6. RODRIGUES, Joachim S., Node Numbering Optimization in Structural Analysis, ASCE, Vol. 101, N.° ST2, February 1975, pp. 361-376.

7. JACOBS, D., The State of the Art in Numerical Analysis. Academic pres, 1977.

8. RECUERO, A., and GUTIERREZ, J.P., Métodos para la Reducción del Ancho de Banda de la Matriz de Rigidez de una Estructura, Monografía 360 del Instituto Eduardo Torroja, 1980.

9. PUTTONEN, J., Simple and Effective Bandwidth Reduction Algorithm, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 1.139-1.152, 1983.

10. RECUERO, A. and GUTIERREZ, J.P., An Effective Bandwidth Reduction Algorithm for Micro-Computers, International Conference on Engineering Software for Microcomputers, Pineridge Press Limited, 1984, pp. 519-530.

11. KAVEHT, A., Ordering for Bandwidth Reduction, Computers and Structures, Vol. 24, N° 3, pp. 413-420, 1986.

12. BURGESS, I.W. and LAI, P.K.F., A New Mode Renumbering Algorithm for Bandwidth Reduction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1.693-1.704, 1986.

RESUMEN

El diseño asistido por computador de estructuras completas, implica la generación automática de los datos de las estructuras que se van a analizar; la numeración de los nudos de estas estructuras se hace de modo que facilite la interpretación de los resultados, por lo que el ancho de banda producido suele ser grande. Esto obliga a utilizar algoritmos de renumeración interna de la estructura. En algunos casos ocurre que deben analizarse conjuntamente estructuras independientes, fallando, en tales casos, muchos de los algoritmos comunmente utilizados.

En este artículo se describe un algoritmo con tiempos de ejecución muy reducidos, aplicable a conjuntos de estructuras independientes y que produce, para cada una de ellas y para el conjunto, anchos de banda óptimos o próximos al óptimo. Tiene, además, la propiedad de que si se le introduce un limitador de tiempo de ejecución, produce, en cualquier caso, numeraciones muy satisfactorias.

PALABRAS CLAVE: Análisis matricial de estructuras; reducción de ancho de banda; renumeración; diseño asistido por computador.

SUMMARY

Computer aided design of complete structures implies the automatic generation of the data used in structural analysis.

Structure nodes are numbered so that results can be readily interpreted. The node numbering used produces a large band-width, which makes the use of band-width reduction algorithms necessary. Sometimes, these systems lead to the analysis of sets of independent structures, in which case many of the usual band-width reduction algorithms fail.

An algorithm with very short execution time, which can be applied to sets of independent structures, and which produces optimun or nearly optimum band-width for every structure in the set, is described in this paper. Besides, this algorithm produces satisfactory renumberings even if it were interrupted before its total acomplishment, due for instance to an execution time limitation.

KEY WORDS: Matrix structural analysis; Band-width reduction; node-renumbering, computer aided design.

* * *

Censolar
Centro de Estudios de la Energía Solar

CONVOCATORIA DE BECAS

Para cursar, durante el año 1990-1991, y en régimen de enseñanza a distancia, los estudios conducentes a la obtención del Diploma de Proyectista-Instalador de Energía Solar (autorizado por el Ministerio de Educación y Ciencia, O.M. 26-III-82).

REQUISITOS:

Haber cumplido los 18 años (sin limitación de edad) y poseer, como mínimo, estudios a nivel de B.U.P., Formación Profesional o equivalentes, valorándose otros niveles.

Los aspirantes, para obtener los impresos de solicitud, deben dirigirse a CENSOLAR, (Avda. República Argentina, 1, 41011-SEVILLA), indicando sus circunstancias personales, situación económica y motivo por el que se interesan por el tema de la Energía Solar, antes del 30 de abril del presente año.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Método penalty versus método de condensación en el cálculo lineal de estructuras con restricciones lineales entre desplazamientos

Pablo Rubio Pérez
Dr. Ingeniero de Caminos
Dragados y Construcciones, S.A.

1. INTRODUCCION

El problema del cálculo lineal, estático y/o dinámico, de estructuras con restricciones, también de tipo lineal, entre desplazamientos, se presenta en ocasiones, principalmente en el diseño y cálculo estructural de equipos mecánicos. En realidad, una forma simplista particular de tales restricciones lineales se produce ya en el cálculo usual de cualquier estructura, desde el momento en que es necesario establecer coacciones de desplazamientos determinados, para garantizar la sustentación de la propia estructura. La misma cuestión se produce, de forma artificial, en casos más sofisticados, por ejemplo, en la utilización de algunos tipos de elementos finitos cuya compatibilidad con la tipología del modelo aplicado, requiere igualmente el establecimiento de relaciones adicionales lineales en ambos tipos de desplazamientos traslacionales y rotacionales. Señalaremos como referencia concreta de esta clase de relaciones, la aplicación de la teoría discreta de Kirchhoff en la formulación de elementos barra, placa y/o lámina, de órdenes bajos, de comprobada eficiencia (Refs. [1] y [2]).

Con vista a la deducción más expresiva, ulterior, de las dos soluciones alternativas que se consideran de este problema, recordaremos que una solución general de los problemas estructurales se basa en el establecimiento de una condición extremal del principio variacional que se expresa en la forma

$$\delta \Phi = (\delta x^T) Mx'' + (\delta x^T) Cx' + (\delta x^T) Kx - (\delta x^T) f \qquad (1)$$

En esta definición, x y f son sendos vectores de orden n x 1, representativos de los desplazamientos generalizados y fuerzas, igualmente generalizadas, relativos a los n grados de libertad; y los símbolos usuales M, C y K son las notaciones habituales de las matrices de masa, de amortiguamiento y de inercia de la estructura, según el modelo aplicado, cuya interpretación matemática es la de matrices cuadradas simétricas de orden común n x n.

Los tres primeros sumandos del segundo miembro de la expresión (1) representan las variaciones de energía respectivamente asociadas a las resistencias inerciales, de amortiguamiento y elásticas, y el cuarto sumando, con signo negativo, es la variación del trabajo realizado por las fuerzas exteriores y reacciones aplicadas a la estructura, con los signos debidos.

La solución del anterior problema extremal lleva al sistema diferencial conocido

$$Mx'' + Cx' + Kx = f \qquad (2)$$

Se trata, en resumen, de resolver un sistema diferencial lineal de segundo orden, no homogéneo, de n ecuaciones con n variables (desplazamientos generalizados) que dependen del tiempo.

La obtención de una solución explícita del sistema (2) supone convenciones complementarias. En primer término, la matriz de masa M puede definirse, alternativamente, como matriz diagonal a partir del concepto de masas concentradas, que tiene sentido físico, o como matriz llena, aplicando el concepto de matriz de masa consistente, de significación estrictamente matemática. En cualquier caso se trata, en el caso más general, de una matriz semidefinida positiva, es decir, con autovalores positivos o nulos. El caso más simple corresponde a la no singularidad de la matriz M, es decir, a su definición como matriz definida positiva. En este supuesto, existe una transformación semejante común que diagonaliza simultáneamente ambas matrices M y K. La matriz C se define entonces, convencionalmente, como matriz asociada a la misma

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

transformación anterior, de manera que resulta posible la separación del sistema en ecuaciones independientes, mediante aplicación de un simple cambio de base. Si la matriz M tiene autovalores nulos, el procedimiento que se debe seguir es la previa eliminación de los desplazamientos asociados a tales autovalores, mediante métodos de condensación, para reducción al caso anterior. La matriz C se define discrecionalmente sobre el sistema restringido, con el criterio arriba indicado. En resumen, la presencia del término de amortiguamiento no es significativa para los desarrollos teóricos, por lo que se omitirá en las formulaciones, para mayor sencillez de la exposición.

Además, en este artículo nos referiremos, únicamente, al supuesto de matriz de masa definida positiva, reservando para un trabajo posterior el caso más general de matriz singular, antes comentado. Supuesta la definición positiva de M, una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del sistema es la definición positiva adicional de la matriz K, de manera que todos los autovalores, relacionados en este caso con las frecuencias en vibración libre del sistema, serán positivos.

Para facilitar la introducción del problema inicialmente citado, es decir, la consideración de relaciones adicionales entre desplazamientos, que trataremos después de forma completa para ambos tipos de cálculos, estático y dinámico, nos limitaremos, de momento, en esta presentación, al problema estático correspondiente a la aplicación lenta de las cargas, esto es, en un primer término, a la solución del siguiente sistema ordinario, que se deduce de la aplicación del mismo principio variacional, sin inclusión de los términos inerciales

$$Kx = f \tag{3}$$

Si el vector del segundo miembro es dato del problema, la no singularidad de la matriz K es una condición necesaria y suficiente para la solución. Si la matriz K se refiere a la estructura completa, no sustentada, es inicialmente una matriz singular, de manera que será necesario fijar el número de desplazamientos necesarios para convertir el sistema anterior en un sistema determinado. En el caso más habitual, tal fijación de desplazamientos es simplemente la anulación de los correspondientes a los grados de libertad impedidos, de manera que, si se eliminan las ecuaciones asociadas a aquellos, la matriz resultante, que llamaremos K^*, que es una submatriz principal de K, resulta no singular. A su vez, los elementos del vector f asociados a las ecuaciones suprimidas, pasan a ser incógnitas del problema, coincidentes con las reacciones, y la solución en los desplazamientos incógnita se escribe

$$x^* = K^{*-1} f^* \tag{4}$$

La no singularidad de la submatriz K^* es, pues, una condición necesaria y suficiente para obtención de una solución estable. No se planteará, de momento, la exigencia de definición positiva de K^*, que implicaría una condición suficiente, pero no necesaria para la solución del problema estático.

La fijación, *a priori*, de las coacciones o desplazamientos nulos, como, la más general, de desplazamientos con valores asignados no nulos, son ambas, como apuntábamos anteriormente, simples casos particulares del caso general de existencia de relaciones lineales arbitrarias entre desplazamientos. En efecto, el problema más complejo que planteamos en este trabajo es la existencia adicional de un conjunto de interrelaciones lineales, que se expresan mediante el siguiente sistema lineal ordinario indeterminado

$$R^T x = d_m \tag{5}$$

donde R es una matriz de orden n x m y rango m, con $m < n$, R^T la matriz traspuesta de R, de orden m x n, y d_m es un vector conocido de orden m x 1.

El sistema anterior es, obviamente, compatible y no determinado, con n−m grados de libertad, puesto que la matriz, de orden $m \times (n+1)$, que resulta de orlar la matriz R^T, de orden m x n, con el vector d_m, tiene también rango m.

En las Secciones siguientes se desarrolla primero, en la Sección 2, el método usual de solución del problema condicionado, en ambos planteamientos, estático y dinámico, a partir de la reducción del sistema a desplazamientos independientes, que se efectúa mediante condensación de grados de libertad, presentando después, en la Sección 3, un método alternativo, mediante introducción de un sumando penalty en la definición del principio variacional, con aplicación subsiguiente de la condición extremal. La Sección 4 se dedica al desarrollo de algunas aplicaciones sencillas aclaratorias, en ambos supuestos de cálculo estático y dinámico. Las Refs. [3] y [4], corresponden a sendas presentaciones que hemos efectuado anteriormente de una versión más simplificada del método penalty, con base en su aplicación al cálculo y comprobación de frecuencias de un equipo mecánico en una central nuclear, si bien esta aplicación concreta corresponde al citado caso de matriz de masa singular, que se remite a exposición posterior. Finalmente, algunos desarrollos matemáticos necesarios, en alguna medida complejos, se han resumido en Apéndice.

2. METODO DE REDUCCION

Un método general de solución del problema, denominado también algoritmo master-slave, opera a partir de la previa separación entre desplazamientos independientes y dependientes, y subsiguiente eliminación de los últimos, mediante condensación estática, con la reducción correspondiente de los

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

grados de libertad del sistema. Esta operación de condensación se plantea en la forma siguiente:

La existencia de, al menos, un menor de orden m de la matriz R, no nulo, permite la partición de la matriz R en dos submatrices de órdenes respectivos mxm y (n-m)xm, y la del vector x en dos subvectores asociados de órdenes mx1 y (n-m)x1, pudiendo escribirse el sistema de restricciones (5) en la forma equivalente siguiente, mediante reordenación adecuada de las variables

$$[R_m^T \; R_{n-m}^T] \begin{bmatrix} x_m \\ x_{n-m} \end{bmatrix} = d_m \qquad (6)$$

Los desplazamientos x_m y x_{n-m} se definen, respectivamente, como desplazamientos dependientes e independientes.

El sistema de restricciones lineales se escribe, en definitiva

$$R_m^T x_m + R_{n-m}^T x_{n-m} = d_m \qquad (7)$$

y permite, en consecuencia, expresar las coordenadas restringidas x_m en función de las coordenadas libres x_{n-m}, dado que la matriz cuadrada $R_m{}^T$ es no singular, esto es

$$x_m = -(R_m^T)^{-1} R_{n-m}^T x_{n-m} + (R_m^T)^{-1} d_m \qquad (8)$$

El vector global x se expresa, también, en función de los desplazamientos libres

$$x = \begin{bmatrix} x_m \\ x_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_m^T)^{-1} R_{n-m}^T \\ I_{n-m} \end{bmatrix} x_{n-m} + \begin{bmatrix} (R_m^T)^{-1} \\ \Omega \end{bmatrix} d_m \qquad (9)$$

donde I_{n-m} es la matriz unidad, de orden (n-m) x (n-m), y el símbolo Ω representa cualquier matriz/vector idénticamente nulos.

Por comodidad de notación, designaremos S y T a las siguientes matrices de órdenes respectivos nx(n-m) y nxm, y rangos correspondientes n-m y m

$$S = \begin{bmatrix} (R_m^T)^{-1} R_{n-m}^T \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$T = \begin{bmatrix} (R_m^T)^{-1} \\ \Omega \end{bmatrix} \qquad (11)$$

luego la relación (9) se expresa

$$x = S x_{n-m} + T d_m \qquad (12)$$

Con relación a la expresión anterior, hacemos notar que, por ser la matriz R_m no singular, el término Td_m es un vector no nulo si el vector d_m no es nulo.

Destacaremos también las dos siguientes relaciones que son de utilidad posterior. En primer lugar, el producto de las matrices R^T y S es una matriz nula, puesto que se cumple

$$R^T S = [R_m^T \; R_{n-m}^T] \begin{bmatrix} -(R_m^T)^{-1} R_{n-m}^T \\ I_{n-m} \end{bmatrix} = -R_m^T (R_m^T)^{-1} R_{n-m}^T + R_{n-m}^T = \Omega \qquad (13)$$

Asimismo, el producto $R^T T$ es una matriz unidad, de orden mxm, puesto que

$$R^T T = [R_m^T \; R_{n-m}^T] \begin{bmatrix} (R_m^T)^{-1} \\ \Omega \end{bmatrix} = R_m^T (R_m^T)^{-1} = I_m \qquad (14)$$

La solución del problema condicionado requiere nuevamente la formulación de la condición extremal del principio variacional expresado en (1), tomando, además, en consideración, el sistema de restricciones expresado por cualquiera de las relaciones (5) o (12).

Sustituyendo las relaciones (12) en (1), la expresión del principio variacional toma la forma siguiente (en la que se omite ya el término de amortiguamiento):

$$\delta \Phi = [\delta (Sx_{n-m})^T] M S x''_{n-m} + [\delta (Sx_{n-m} + Td_m)^T] K (Sx_{n-m} + Td_m) - [\delta (Sx_{n-m} + Td_m)^T] f \qquad (15)$$

Si la variación anterior se hace idénticamente nula, resulta el sistema

$$(S^T M S) x''_{n-m} + (S^T K S) x_{n-m} = S^T f - S^T K T d_m \qquad (16)$$

que es equivalente al sistema (2) del caso no restringido.

Si la matriz M de la estructura no condicionada es definida positiva, que es el caso que trataremos por el momento, la matriz virtual de masa del sistema reducido, esto es, la matriz $S^T M S$, de orden (n-m)x(n-m), puede escribirse en la forma general $\Gamma \Gamma^T$ donde Γ es una matriz de orden (n-m)xn y rango n-m. Esta forma producto se deduce fácilmente, en efecto, a partir de cualquier descomposición similar arbitraria de M, como es, por ejemplo, como más fácil de obtener, la forma producto Cholesky. Por otro lado, todas las matrices de la

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

forma $\Gamma\Gamma^T$ son, además, como se justificará en el Apéndice, matrices hermíticas, con autovalores no negativos. El rango de la matriz anterior, que representa la matriz de masa virtual del sistema reducido, es n-m, luego es, también, una matriz definida positiva, debido a la inexistencia de autovalores nulos. En consecuencia, la solución explícita del sistema (16), para el vector x_{n-m}, se obtiene siguiendo el procedimiento de cambio a la base ortogonal, comentado en la Introducción. El vector completo de desplazamientos, x, se obtiene a continuación por medio de la ecuación (12). La condición necesaria y suficiente para la estabilidad del sistema dinámico es la definición positiva adicional de la matriz S^TKS, que representa la matriz de rigidez virtual del sistema reducido. Una condición suficiente, no necesaria, para que se verifique la condición anterior, es la definición positiva de la matriz K, o sea, de la matriz de rigidez de la estructura no restringida.

Los autovalores de la matriz característica del sistema condicionado, están asociados, si son positivos, es decir, si la estructura es estable, a las frecuencias de vibración libre de la estructura restringida, y son, por tanto, los elementos determinantes para la solución y estabilidad del sistema (16).

El método de reducción, hasta aquí comentado, no proporciona ninguna información sobre posibles relaciones entre las frecuencias, o, con mayor precisión, entre los autovalores característicos de ambas estructuras, libre y condicionada, relaciones que se pondrán, en cambio, de manifiesto, a partir de desarrollos adecuados del método penalty, como se detalla después en la Sección 3.

Consideraremos también el caso estático, que se trata de forma enteramente análoga, resultando el siguiente sistema en los desplazamientos libres

$$S^TKSx_{n-m} = S^Tf - S^TKTd_m \qquad (17)$$

La solución del sistema (17) requiere, simplemente, que la matriz S^TKS sea no singular, lo que no implica necesariamente que la matriz K sea no singular, esto es, que la estructura inicial esté sustentada, obteniéndose para los desplazamientos independientes

$$x_{n-m} = (S^TKS)^{-1}S^Tf - (S^TKS)^{-1}S^TKTd_m \qquad (18)$$

y para el vector global de desplazamientos

$$x = S(S^TKS)^{-1}S^Tf - S(S^TKS^{-1})S^TKTd_m + Td_m \qquad (19)$$

La definición positiva de la matriz K es, nuevamente, una condición suficiente, no necesaria, para la validez de las expresiones (18) y (19). Si la matriz S^TKS es no singular y el vector $f - KTd_m$ se anula, todos los desplazamientos libres son nulos, aunque el vector de desplazamientos forzados no se anula, si el vector d_m no es nulo.

3. METODO PENALTY

La solución del problema extremal, con restricciones adicionales, formulado en la Sección anterior, permite una reducción del número de variables y su aplicación resulta inmediata, una vez identificado cualquier menor de orden m no nulo de la matriz de coeficientes R, por lo que este algoritmo es adecuado para programación en cálculos informatizados. Desde el punto de vista conceptual, el método obliga a la separación, en alguna medida discrecional, en los dos conjuntos de desplazamientos x_m y x_{n-m}, con el inconveniente de modificar la estructura global del sistema y romper la simetría de comportamiento de las variables de la ecuación de condición. Se ha puesto también, antes, de manifiesto, el factor de enmascaramiento del comportamiento físico de la estructura condicionada, en relación con la estructura libre.

A continuación, se desarrolla un método asintótico, derivado de la aplicación directa, frontal, del principio variacional, sobre la estructura no condicionada, que permite mantener la simetría de desplazamientos sin modificación del sistema global.

Añadiremos para ello, en la definición del principio variacional, un término penalty, de valor positivo, relacionado con las restricciones, que es el autoproducto hermítico de un vector, de la forma siguiente

$$\Phi_N = \tfrac{1}{2}.\, N\,(R^Tx - d_m)^T(R^Tx - d_m) \qquad (20$$

siendo N un valor escalar que supondremos también positivo. Si los elementos de la matriz R son adimensionales, la dimensión de N es la de una constante elástica, equivalente a la dimensión de los elementos análogos de la matriz de rigidez K.

El valor del término añadido, particularizado para el vector x, solución del problema extremal, es evidentemente nulo, según (5). Por otro lado, la variación de este sumando se escribe

$$\delta(\Phi_N) = \tfrac{1}{2}.\, N\,[\delta(x^TRR^Tx - x^TRd_m - d_m{}^TR^Tx)]$$
$$= N(\delta x^T)(RR^Tx - Rd_m) \qquad (21)$$

luego la solución del nuevo comportamiento estructural, con inclusión del término (20), la da el sistema diferencial.

$$Mx'' + (K + NRR^T)x = f + NRd_m \qquad (22)$$

Si en la formulación anterior suponemos que N es un valor suficientemente grande, las ecuaciones (5) de restricción quedan impuestas así, de forma natural, en el mismo sistema global, al tiempo que resultan cumplidas también las condiciones de definición de valor extremal.

Si las propias condiciones forzadas, dadas por las ecuaciones (5), son compatibles con la necesaria estabilidad estructural, el comportamiento asin-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

tótico del sistema (22) proporcionará, en definitiva, la misma solución que las ecuaciones (19), obtenidas por condensación.

La condición necesaria y suficiente, allí señalada, para la estabilidad del sistema, esto es, la definición positiva de la matriz $S^T KS$, se corresponde ahora, como comprobaremos después, con la condición necesaria y suficiente para la estabilidad del sistema (22). Por el momento, esta condición se expresa, simplemente, como la definición positiva de la matriz $K + NRR^T$, que representa una matriz de rigidez incrementada, con adición de un término de perturbación, que es una matriz hermítica, singular, con autovalores no negativos.

La resolución del sistema (22) se efectúa, según la práctica usual, a partir de la descomposición espectral de la matriz M de masa, en base a la condición que hemos supuesto de matriz definida positiva, esto es

$$M = L^T A^2 L \tag{23}$$

donde A^2 es la matriz diagonal de los autovalores, todos ellos positivos, de M, y L es una matriz ortogonal. A continuación, previa sustitución de (23) en (22), haremos el cambio habitual.

$$z = ALx \tag{24}$$

y efectuando premultiplicaciones sucesivas del sistema por las matrices no singulares L y A^{-1}, aplicando en el primer producto la propiedad ortogonal de la matriz L, el sistema toma la forma

$$z'' + (A^{-1} LKL^T A^{-1} + NA^{-1} LRR^T L^T A^{-1})z = \\ = A^{-1} Lf + NA^{-1} LRd_m \tag{25}$$

La matriz coeficiente del término en z, que denominaremos en adelante la matriz α_N, es, ya, una matriz característica del sistema, esto es, sus autovalores, que deben ser positivos, son los cuadrados de las frecuencias de vibración libre del sistema, y su sistema de autovectores es el sistema base que permite la separación del sistema diferencial en n ecuaciones independientes. La finalización formal de esta operativa común es práctica habitual, por lo que nos centraremos en nuevas derivaciones del problema específico.

Para comodidad del análisis mediante reducción a una notación general, escribiremos la matriz α_N en la siguiente forma simplificada

$$\alpha_N = \alpha + N\beta\beta^T \tag{26}$$

donde

$$\alpha = A^{-1} LKL^T A^{-1} \tag{27}$$

$$\beta = A^{-1} LR \tag{28}$$

Veamos ahora la interpretación de la matriz suma, anterior, α_N. Puesto que ambas matrices A y L son no singulares, la matriz α que es su primer sumando, es una matriz simétrica, no necesariamente no singular, que constituye, obviamente, la matriz característica de la estructura no condicionada. Haremos notar que no cabe identificar, ahora, con propiedad, los autovalores de la matriz α con los cuadrados de las frecuencias de la estructura inicial, sin restricciones, puesto que, como hemos señalado anteriormente, podrían existir autovalores negativos o nulos de α. El segundo sumando, o matriz de perturbación, es una matriz especial, definida como producto de la matriz β por su traspuesta y por un coeficiente numérico. Debemos señalar nuevamente aquí, que la matriz β, dada por la expresión (28), es una matriz rectangular, de orden nxm y rango m, lo que se deduce directamente aplicando la ley de inercia de Sylvester al producto (28), en virtud de la no singularidad de las matrices A y L. Sobre esta base, se analizan en el Apéndice final, diversas propiedades peculiares de la matriz producto $\beta\beta^T$ y de la matriz α_N, que son de utilidad en este trabajo, de las que se derivan las conclusiones de interés estructural que indicamos a continuación:

En primer término, se deduce, en virtud de las relaciones (A.8), que la estructura condicionada tiene solamente n-m autovalores (o frecuencias) finitos. Además, en virtud de las relaciones (A.15), cada autovalor finito de la matriz α_N, está comprendido entre dos autovalores de la matriz α de la estructura no condicionada, tales que el límite inferior ocupa su mismo lugar en ambas sucesiones de autovalores, supuestos ordenados de forma no decreciente, mientras el límite superior ocupa el lugar m unidades más avanzado. Por ejemplo, si existe una restricción única, la estructura condicionada tiene n-1 frecuencias, cada una comprendida entre un par sucesivo de frecuencias de la estructura no restringida. Hacemos de nuevo la salvedad de que el primer autovalor de la matriz característica de esta última, podría ser negativo o nulo, en cuyo caso no genera frecuencia.

La reducción a n-m autovalores finitos es, así, congruente con la reducción al sistema (16), con n-m ecuaciones y variables independientes, deducido en el método de condensación. Estas relaciones se interpretan, físicamente, como relacionadas con una mayor rigidez estructural, derivada de las restricciones impuestas entre desplazamientos.

En particular, el autovalor inferior de la matriz α_N cumple las acotaciones siguientes

$$\mu_1(\alpha) \leqslant \mu_1(\alpha_N) \leqslant \mu_{1+m}(\alpha) \tag{29}$$

Para que el autovalor $\mu_1(\alpha_N)$ sea positivo, que es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad dinámica estructural, no es necesario que la matriz α sea definida positiva, aunque una condición necesaria, no suficiente, es que el autovalor

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$\mu_{1+m}(\alpha)$, que ocupa el lugar m+1, debe ser positivo. Por supuesto, si la matriz α es definida positiva, lo que supone que la matriz K cumple esta condición, la cumple también la matriz α_N.

Los m restantes autovalores de la matriz α_N, aumentan, sin límite, como funciones lineales de N, manteniendo la relación asintótica dada por las relaciones (A.21) o las más afinadas (A.20). Los autovectores asociados a estos autovalores, no tienen ninguna incidencia en la solución estructural del problema.

Pasando a la consideración del problema estático, la solución del sistema restringido, mediante aplicación del método penalty, conduce al siguiente sistema lineal, relativo al vector global de desplazamientos

$$(K + NRR^T)\, x = f + NRd_m \tag{30}$$

La obtención de una solución determinada y estable del sistema (30), requiere, como condiciones necesarias y suficientes, primero, la no singularidad de la matriz $K + NRR^T$, que llamaremos K_N, siguiendo la notación ya establecida, y, además, la convergencia de la matriz K_N^{-1}. Las dos condiciones anteriores se cumplen si es no singular la matriz S^TKS, en cuyo caso es válido el desarrollo asintótico (A.32) de la matriz K_N^{-1} (obsérvese también la aparente paradoja de que la matriz límite, denominada a_o, es una matriz singular). En este supuesto, la solución del problema se escribe

$$x = (K + NRR^T)^{-1}\,(f + NRd_m) \tag{31}$$

La definición positiva de la matriz K original, sería, de nuevo, una condición suficiente, no necesaria, para la existencia de la solución (31), en tanto que la siguiente condición, deducida de las expresiones análogas a (29), para los autovalores de la matriz K_N, es necesaria, pero no suficiente, si se impone a fortiori la definición positiva de la matriz K_N

$$\mu_{m+1}(K) > 0 \tag{32}$$

Un inconveniente práctico eventual, en la resolución numérica de ambos sistemas (22) y (30), radica en que la introducción del término penalty modifica significativamente la magnitud del número de condición de la matriz final de definición del sistema, así como la de los elementos del vector transformado de fuerzas, lo que exige precauciones especiales para evitar dificultades numéricas y de precisión, en el proceso de cálculo. Ambas cuestiones se han resuelto, sin embargo, sin dificultad, en el ejemplo citado en la Ref. [3], origen de los desarrollos que se presentan. Existen, por otro lado, algunas reglas de pulgar, para una primera orientación de valores adecuados de N. Como norma general, debe cumplirse que $N \gg \text{máx}\, k_{ii}$, mientras un valor suficiente en la práctica es $N = 1000\,[\text{máx}\, k_{ii}]$, si bien el valor definitivo que se vaya a adoptar deberá ser congruente con el orden de precisión de los medios de cálculo.

Si la matriz K tiene la condición definida positiva, y, por tanto, también la matriz α dada por (27), resulta, todavía, posible, obtener una acotación superior, teórica, del número de condición de cualquier matriz α_N/K_N; lo que facilita también una orientación sobre valores de N, en función de la indicada precisión de los medios de cálculo disponibles. En efecto, refiriéndonos, por ejemplo, a la matriz K_N, las relaciones (A.10) y (A.17) dan las siguientes acotaciones, respectivamente inferior y superior, de los dos autovalores extremos de esta matriz

$$\mu_1(K_N) \geq \mu_1(K) \tag{33.1}$$

$$\mu_n(K_N) \leq \mu_n(K) + N\,\mu_n(RR^T) \tag{33.2}$$

Resulta, por tanto, la siguiente acotación del número de condición de la matriz K_N, llamado $n(K_N)$, que ofrece interés teórico

$$n(K_N) = \frac{\mu_n(K_N)}{\mu_1(K_N)} \leq \frac{\mu_n(K) + N\mu_n(RR^T)}{\mu_1(K)} =$$

$$= n(K) + N \cdot \frac{\mu_n(RR^T)}{\mu_1(K)} \tag{34}$$

Las incidencias numéricas comentadas, pueden obviarse, en el problema estático, de forma similar a la solución por condensación, operando con una matriz de elementos discretos, a partir de la utilización del desarrollo asintótico de la matriz inversa K_N^{-1}, antes citado, dado por la expresión (A.32).

En efecto, sustituyendo en (31) el desarrollo (A.32), limitado a los dos primeros términos, ya que los términos restantes no tienen ninguna incidencia en el comportamiento asintótico, se tiene la solución

$$x \approx (a_o + N^{-1} a_1)\,(f + NRd_m) \tag{35}$$

donde las matrices a_o y a_1 están dadas por las expresiones particularizadas (A. 29) y (A. 30), esto es

$$a_o = S(S^TKS)^{-1}S^T \tag{36}$$

$$a_1 = [I_n - S(S^TKS)^{-1}S^TK]TT^T\,[I_n - KS(S^TKS)^{-1}S^T] \tag{37}$$

Teniendo en cuenta las dos expresiones (13) y (36), el producto a_oR se anula; luego la solución (35) se escribe también

$$x = a_o f + a_1 Rd_m \tag{38}$$

y aplicando nuevamente las relaciones (13) y (14)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

y la expresión (37) de la matriz a_1, la solución obtenida coincide con la solución explícita global del problema estático, obtenida en (19) mediante aplicación del método de reducción.

La solución explícita obtenida en (38) mediante aplicación del desarrollo asintótico, que ya no depende de N, pierde, sin embargo, la ventaja de tratamiento indiscriminado de todos los desplazamientos, inherente al método penalty, aplicado de forma frontal, y se identifica de hecho, nuevamente, con la solución por el método de reducción.

Asimismo, la simple obtención de las frecuencias finitas de vibración libre del sistema dinámico (22), podría referirse al cálculo de los n-m autovalores no nulos de la matriz primer término del mismo desarrollo asintótico para la matriz α_N^{-1}, que son valores inversos de los n-m autovalores finitos buscados de la matriz α_N. Sin embargo, esta operativa sería de escaso interés en la práctica, por la condición de matriz singular de la matriz a_o, primer término de aquel desarrollo, sin ninguna ventaja sobre el método de reducción, siendo preferible operar directamente sobre la matriz definida positiva α_N, adoptando las precauciones debidas. Interesa, sin embargo, la observación de que los autovalores positivos de la matriz a_o, o sea de la matriz $\sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1}\sigma^T$, son precisamente todos los autovalores de la matriz no singular $\sigma^T\sigma(\sigma^T \alpha\sigma)^{-1}$, puesto que se mantiene el orden cíclico de las matrices factores. La matriz no simétrica $\sigma^T\sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1}$, o bien su traspuesta $(\sigma^T\alpha\sigma)^{-1}\sigma^T\sigma$, tienen, en consecuencia, los mismos autovalores que la matriz característica del sistema (16) reducido. Por otro lado, la postmultiplicación de la matriz $(\sigma^T\alpha\sigma)^{-1}$ por la matriz definida positiva $\sigma^T\sigma$, no modifica los signos de los autovalores de la primera matriz. El mismo razonamiento se aplica a la justificación de los signos comunes de los autovalores de la matriz S^TKS y los m autovalores finitos de la matriz $K + NRR^T$, si la matriz S^TKS es no singular, con lo cual se identifican, finalmente, las dos condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de los dos sistemas (16) y (22) en ambos métodos alternativos, esto es, la definición positiva, simultánea, de las matrices SKS^T y $K + NRR^T$ (obsérvese, además, que la definición positiva de cada una de estas matrices, implica también la de las matrices α y $\alpha + N\beta\beta^T$, que son transformadas congruentes de aquellas).

En la siguiente Sección, se desarrollan algunos ejemplos sencillos, como ilustración de la aplicación alternativa de los dos métodos comentados.

4. EJEMPLOS

El primer ejemplo considerado, corresponde al análisis dinámico de la vibración libre de un sistema ideal, de dos grados de libertad, con una restricción lineal, homogénea, entre ambos desplazamientos. El sistema está definido por las matrices simétricas M y K, de orden común 2 x 2, la primera definida, positiva, y por la matriz de condición R, de orden 2 x 1 y rango 1, que se indican a continuación

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad k_{21} = k_{12} \tag{40}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Para aplicación del método de condensación, supondremos que el valor r_1 no es nulo; luego la partición efectuada en el primer miembro de (6) de la matriz vector R, da las siguientes submatrices, correspondientes a R_m y R_{n-m}

$$R_1 = [r_1],\ R_{2-1} = [r_2] \tag{42}$$

Las matrices S y T se escriben, respectivamente,

$$S = \begin{bmatrix} -r_1^{-1} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$T = \begin{bmatrix} r_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

El sistema diferencial (16) reducido, en este caso homogéneo, resulta

$$[-r_1^{-1} r_2\ 1] \begin{bmatrix} -r_1^{-1} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2'' + [-r_1^{-1} r_2\ 1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_1^{-1} r_2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = 0 \tag{45}$$

o sea

$$(r_1^{-2} r_2^2 + 1)\, x_2'' + (r_1^{-2} r_2^2 k_{11} - 2 r_1^{-1} r_2 k_{12} + k_{22})\, x_2 = 0 \tag{46}$$

luego la única frecuencia finita del sistema, toma el valor

$$\phi = \left[\frac{k_{11} r_2^2 - 2 k_{12} r_1 r_2 + k_{22} r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \right]^{1/2} \tag{47}$$

La obtención de un valor real de ϕ, requiere que la forma cuadrática del numerador de la fracción sea de valor positivo, condición asegurada en el supuesto de definición positiva de K.

Consideremos, a continuación, la aplicación del método alternativo penalty. El sistema se escribe, ahora, en forma global

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_1'' \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} [r_1\ r_2] \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{48}$$

Se desea obtener los autovalores de la matriz característica del sistema, o sea de la matriz K_N

$$K_N = \begin{bmatrix} k_{11} + N r_1^2 & k_{12} + N r_1 r_2 \\ k_{12} + N r_1 r_2 & k_{22} + N r_2^2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

La ecuación característica de la matriz K_N, representa una hipérbola, en las coordenadas μ y N

$$\mu^2 - \mu N (r_1^2 + r_2^2) + N (k_{11} r_2^2 + k_{22} r_1^2 - 2 k_{12} r_1 r_2) + k_{11} k_{22} - k_{12}^2 = 0 \qquad (50)$$

La asíntota paralela al eje N, corresponde al autovalor finito, dado por el cuadrado de la frecuencia (47), como se comprueba anulando simplemente el coeficiente de N en la ecuación (50).

El autovalor no finito está definido por la expresión de la segunda asíntota de la hipérbola, escrita en la forma

$$\mu_2 = N (r_1^2 + r_2^2) + \frac{k_{11} r_1^2 + 2 k_{12} r_1 r_2 + k_{22} r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \qquad (51)$$

El coeficiente angular, Θ, de la asíntota general, dada por la ecuación (51), es el autovalor positivo de la matriz RR^T, que se obtiene directamente mediante inversión de las dos matrices factores, o sea

$$\Theta = R^T R = [r_1 \; r_2] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = r_1^2 + r_2^2 \qquad (52)$$

La intersección de la misma asíntota (51) con el eje μ, da el valor ϵ

$$\epsilon = \frac{[r_1 \; r_2] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}}{[r_1 \; r_2] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}} = \frac{R^T K R}{R^T R} \qquad (53)$$

Por otro lado, el primer autovalor finito μ_1, o sea, el cuadrado de la frecuencia obtenida en (47), se escribe en la forma alternativa siguiente

$$\mu_1 = \phi^2 = \frac{[r_2 \; -r_1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{bmatrix}}{[r_2 \; -r_1] \begin{bmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{bmatrix}} = \frac{S^T K S}{S^T S} \qquad (54)$$

Puesto que la forma de los dos últimos miembros de las igualdades (53) y (54) es un cociente de Rayleigh, ello significa que ambos valores, μ_1 y ϵ, están comprendidos entre las dos intersecciones de la hipérbola (50) con el eje μ, es decir, están limitados por los dos autovalores de la matriz K. Ambos autovalores son reales, por ser K simétrica, debiendo cumplirse, además, según (29), que el mayor autovalor sea positivo, condición no necesaria, sin embargo, para el autovalor inferior.

El valor positivo de la pendiente en cualquier punto de la hipérbola, se corresponde con la propiedad de convexidad de esta curva en todos sus puntos, y con la realidad de las intersecciones con cualquier paralela al eje μ. Esta propiedad es congruente también con el valor positivo del coeficiente angular de la asíntota general, y con la posición relativa de los cuatro puntos arriba indicados, esto es, las intersecciones de la curva y sus dos asíntotas con el eje μ.

Una representación gráfica del anterior análisis de autovalores, correspondería al caso 1 de la (Fig. 1 A) del Apéndice.

El segundo ejemplo tratado es el problema estático clásico, con desplazamientos impuestos, que corresponde a la solución del sistema lineal, supuesta efectuada la adecuada ordenación de variables

$$\begin{bmatrix} K_{m,m} & K_{m,n-m} \\ K_{m,n-m}^T & K_{n-m,n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_m \\ x_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m^* \\ f_{n-m} \end{bmatrix} \qquad (55)$$

Las componentes f_m^* del vector de fuerzas, antes conocidas, pasan a ser, ahora, incógnitas del problema, por la aparición de reacciones adicionales. Por ello, si se cumple la condición necesaria y suficiente de no singularidad de la matriz $K_{n-m,n-m}$, la solución del vector de coordenadas libres resulta

$$x_{n-m} = -K_{n-m,n-m}^{-1} K_{n,n-m}^T d_m + K_{n-m,n-m}^{-1} f_{n-m} \qquad (56)$$

y las nuevas incógnitas f_m^*

$$f_m^* = -K_{m,n-m} K_{n-m,n-m}^{-1} K_{m,n-m}^T x_m + K_{m,n-m} K_{n-m,n-m}^{-1} f_{n-m} + K_{m,m} d_m \qquad (57)$$

La solución anterior corresponde, realmente, a la aplicación del método de reducción, como se evidencia escribiendo las ecuaciones de condición en la forma

$$[I_m \; \Omega] \begin{bmatrix} x_m \\ x_{n-m} \end{bmatrix} = d_m \qquad (58)$$

Las matrices R, S y T se escriben

$$R = T = \begin{bmatrix} I_m \\ \Omega \end{bmatrix} \qquad (59)$$

$$S = \begin{bmatrix} \Omega \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \qquad (60)$$

La condición necesaria y suficiente para la aplicación del método de reducción, es la no singularidad de la matriz $S^T K S$

$$S^T K S = [\Omega \; I_m] \begin{bmatrix} K_{m,m} & K_{m,n-m} \\ K_{m,n-m}^T & K_{n-m,n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ I_{n-m} \end{bmatrix} = K_{n-m,n-m} \qquad (61)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

o sea, de nuevo, la no singularidad de la matriz $K_{n-m,n-m}$.

La solución, para el vector global de desplazamientos, es, según (9)

$$x = \begin{bmatrix} \Omega \\ I_{n-m} \end{bmatrix} K^{-1}_{n-m,n-m} [\Omega\, I_{n-m}] \begin{bmatrix} f^*_m \\ f_{n-m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Omega \\ I_{n-m} \end{bmatrix} K^{-1}_{n-m,n-m} [\Omega\, I_{n-m}] d_m + \begin{bmatrix} I_m \\ \Omega \end{bmatrix} d_m = \begin{bmatrix} \Omega \\ K^{-1}_{n-m,n-m} \end{bmatrix} f_{n-m} + \begin{bmatrix} I_m \\ -K^{-1}_{n-m,n-m} K^T_{m,n-m} \end{bmatrix} d_m \qquad (62)$$

que incluye el subvector (56) de los desplazamientos x_{n-m} ya calculados. En el desarrollo anterior se observa, efectivamente, la inoperancia de las componentes f_m^*, convertidas en incógnitas adicionales.

Una aplicación muy divulgada del método penalty para este problema simple, fué primero sugerida por Irons, mediante la sustitución de las componentes del vector de fuerzas correspondientes a los desplazamientos conocidos, por el producto del desplazamiento por un escalar de valor elevado, y la adición de este mismo escalar a los elementos diagonales de la matriz de rigidez, en las filas/columnas correspondientes.

El procedimiento bien conocido de Irons es una aplicación particularizada del método general penalty, descrito en la Sección 3, puesto que aplicando la expresión (59) de la matriz R, la matriz de rigidez incrementada se escribe, en efecto

$$K_N = K + N \begin{bmatrix} I_m \\ \Omega \end{bmatrix} [I_m\ \Omega] = K + N \begin{bmatrix} I_m & \Omega \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} \qquad (63)$$

mientras el vector de fuerzas se modifica también, según (22), en la forma arriba indicada.

Si la matriz K es definida positiva, aplicando la expresión (34), y teniendo en cuenta que la matriz $R^T R$ es una matriz unidad, y sus autovalores de valor uno, se obtiene la siguiente acotación del número de condición de la matriz K_N

$$n(K_N) \leqslant n(K) + N [\mu_1(K)]^{-1} \qquad (64)$$

que podría ser orientativa de valores adecuados de N.

Pasando al problema dinámico, correspondiente al mismo caso anterior, y adoptando el criterio de masas concentradas para formación de la matriz de masa, se trata de una matriz diagonal definida positiva, que escribimos en la forma

$$M = A^2 \qquad (65)$$

donde los elementos diagonales de A son también positivos.

El término de perturbación de la matriz característica del sistema dinámico resulta, según (28) y (59)

$$N\beta\beta^T = NA^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ \Omega \end{bmatrix} [I_m\ \Omega]\, A^{-1} = N \begin{bmatrix} A_m^{-2} & \Omega \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} \qquad (66)$$

cuyos m autovalores positivos son los inversos de las masas asociadas a los m desplazamientos impuestos.

Suponiendo que todas las masas asociadas a cada grado de libertad tienen valor unidad, la matriz K_N dada por la expresión (63), es también la matriz característica del sistema forzado. Se comprueba, además, fácilmente, que los n-m autovalores finitos de este sistema son los autovalores de la submatriz $K_{n-m,n-m}$ (basta anular el coeficiente del término N^m en la ecuación característica), y que las coordenadas de las intersecciones de las m asíntotas generales con el eje μ, esto es, los m valores ϵ_i, son los autovalores de la submatriz $K_{m,m}$ (haciendo $N = \mu + \epsilon$ en la ecuación característica y pasando al límite cuando $\mu \to \infty$). Aplicando a la matriz K_N las propiedades relativas a los autovalores de la matriz α_N, deducidas en el Apéndice, se deduce la siguiente propiedad, aplicable a los autovalores de cualquier submatriz principal de una matriz simétrica real:

Si se ordenan en sendas sucesiones no decrecientes los autovalores de cualquier submatriz principal, de orden kxk, y los autovalores de la matriz completa, de orden nxn, el elemento de la primera sucesión, que ocupa el lugar i, está acotado, inferior y superiormente, por los elementos que ocupan los lugares respectivos i y n-k+i en la segunda sucesión. Considerando, en particular, submatrices principales de órdenes respectivos 1x1 y (n-1)x(n-1), esto es, para valores 1 y n-1 de k, se deduce que los elementos diagonales de una matriz simétrica real están comprendidos entre los dos autovalores extremos, y que los n-1 autovalores de cualquier submatriz principal de orden (n-1)x(n-1) separan a los n autovalores de la matriz.

Las observaciones anteriores pueden comprobarse en representaciones gráficas del ejemplo analizado, para sistemas de 2 y 3 grados de libertad, que corresponderían a los casos 1, 2 y 3.b de la (Fig. 1A) del Apéndice, suponiendo pendiente unidad para las asíntotas generales, en todos los casos.

5. CONCLUSIONES

La exposición efectuada de la aplicación del método penalty al cálculo lineal de estructuras,

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

con restricciones lineales entre desplazamientos, proporciona desarrollos de interés teórico que facilitan un conocimiento más profundo del comportamiento estructural, que el derivado de la utilización del algoritmo master-slave.

La utilización práctica de este método alternativo, requiere las precauciones usuales en la aplicación numérica de este tipo de métodos, en evitación de problemas derivados de matrices mal condicionadas, que se han comentado también; por lo que no se plantea aquí, realmente, como alternativa competitiva del método de reducción, en el área de las aplicaciones numéricas, sino más bien complementaria, en casos en que los programas disponibles no incluyan el algoritmo master-slave generalizado y deba facilitarse una respuesta estructural inmediata. En este supuesto, las ventajas del método penalty son claras, pues las necesidades de reprogramación son mínimas o incluso nulas, según el problema. El origen de esta investigación, derivó, precisamente, de una situación de este tipo, correspondiente a la estructura de un equipo mecánico nuclear, comentada en la Introducción, que pudo resolverse así de manera satisfactoria.

Finalmente, un subproducto añadido de este trabajo, que afectará igualmente a la exposición ulterior del caso restante correspondiente a matriz singular de masa, que es la situación más normal en problemas de estructuras reales, como ocurría en el caso de referencia indicado, ha sido la derivación de diversos desarrollos matemáticos, de interés en el área del algebra lineal, algunos de los cuales se exponen sucintamente en el siguiente Apéndice.

APENDICE

ESTUDIO DE LA MATRIZ $\alpha_N = \alpha + N\beta\beta^T$

Se analizan, en este Apéndice, las propiedades de matrices suma de dos matrices reales, la primera simplemente simétrica, y la segunda, además, hermítica. La expresión $\alpha + N\beta\beta^T$, en notación abreviada α_N, es una forma general de estas matrices suma, que, como hemos visto en el texto, desempeñan un papel primordial en el comportamiento lineal de estructuras con desplazamientos restringidos.

La matriz α es, como decimos, una matriz cuadrada, simétrica, de orden nxn, sin ninguna otra condición. La expresión $\beta\beta^T$, donde β es una matriz rectangular de orden nxm y rango igual a la menor dimensión, es una forma producto general, asociada a las matrices reales hermíticas. Finalmente, N es una variable escalar que nos interesa expresar explícitamente.

Aplicando propiedades conocidas de las matrices simétricas y hermíticas, se deducen diversas propiedades interesantes de los autovalores de la matriz α_N. Destacaremos, desde el principio, que las dos matrices sumandos, α y $\beta\beta^T$, así como la matriz suma, α_N, son simétricas; luego los autovalores de las tres matrices son todos reales. A continuación se detallan algunas precisiones sobre los mismos.

La ecuación de los autovalores o ecuación característica de la matriz α_N, se escribe anulando el siguiente determinante característico

$$|\alpha + N\beta\beta^T - \mu I_n| = 0 \qquad (A.1)$$

donde I_n es la matriz unidad de orden nxn.

La ecuación anterior se representa gráficamente como una curva algébrica, de grado n, cuyos grados mayores en las dos variables μ y N, son, respectivamente, n y mín (n,m). Los n autovalores son las abcisas de las n intersecciones reales de la curva con cualquier paralela al eje μ, a distancia N. En particular, para el valor N=0, las intersecciones son las raíces de la ecuación

$$|\alpha - \mu I_n| = 0 \qquad (A.2)$$

que representa la ecuación característica de la matriz α.

El análisis de las raíces de la ecuación (A.1) requiere la consideración previa de los autovalores de las dos matrices sumandos, esto es, de las raíces de la ecuación (A.2) y de los autovalores de la matriz $\beta\beta^T$.

En primer lugar, los autovalores de la matriz α, llamados $\mu_i(\alpha)$, como hemos dicho reales, se ordenan, a continuación, en secuencia no decreciente

$$\mu_1(\alpha) \leqslant \mu_2(\alpha) \leqslant \ldots \leqslant \mu_n(\alpha) \qquad (A.3)$$

La matriz $\beta\beta^T$ es simétrica, de orden nxn. Por ser matriz simétrica es no defectuosa; es decir, que cada autovalor tiene un solo vector asociado, existiendo una base completa de autovectores, independientemente de los posibles órdenes de multiplicidad de los autovalores. Se demuestra, además, que es una matriz hermítica, de manera que todos los autovalores son no negativos. En efecto, llamando y_h al autovector asociado al autovalor $\mu_h(\beta\beta^T)$, e y_h^H al autovector transformado hermítico, que coincide con el vector traspuesto por tratarse de operaciones en el campo real, se cumplen las relaciones

$$y_h^H(\beta\beta^H)y = (y_h^H\beta)(\beta^H y_h) = (\beta^H y_h)^H(\beta^H y_h) \geqslant 0 \qquad (A.4)$$

y, también

$$y_h^H(\beta\beta^H)y_h = y_h^H[(\beta\beta^H)y_h] = y_h^H[\mu_h y_h] = \mu_h(y_h^H y_h) \qquad (A.5)$$

luego

$$\mu_h \geqslant 0 \qquad (A.6)$$

La deducción de ambos números respectivos de autovalores, positivos o nulos, requiere la conside-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ración adicional del rango de la matriz. Observemos que las tres matrices β, β^T y $\beta\beta^T$ tienen rango común, igual a la dimensión menor de β, debiendo distinguirse, por tanto, dos casos distintos:

Si se cumple $n \leqslant m$, n es el rango común de las tres matrices anteriores; luego el número de autovalores de la matriz $\beta\beta^T$ es también n y, por tanto, es una matriz no singular, con n autovalores positivos.

Si se cumple $m < n$, que es el supuesto al que nos referiremos en todos los desarrollos posteriores, el rango común es m; luego la matriz $\beta\beta^T$ debe tener n-m autovalores nulos.

En consecuencia, en el supuesto que tratamos, la matriz hermítica $\beta\beta^T$ tiene n-m autovalores nulos y m autovalores positivos, que ordenamos, asimismo, a continuación, en secuencia no decreciente

$$0 = \mu_1(\beta\beta^T) = \ldots = \mu_{n-m}(\beta\beta^T) \leqslant \leqslant \mu_{n-m+1}(\beta\beta^T) \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \qquad (A.7)$$

Podemos aplicar ahora el teorema de Courant-Fisher, o principio del minimax, a los autovalores de la matriz α_N, que es suma de dos matrices simétricas, lo que se expresa mediante las relaciones siguientes, para cualquier valor positivo de N (Ref. [5]):

$$\mu_i(\alpha) + N\mu_1(\beta\beta^T) \leqslant \mu_i(\alpha_N) \leqslant \mu_i(\alpha) + N\mu_n(\beta\beta^T),\ 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (A.8)$$

$$\mu_{n+2-i-j}(\alpha_N) \leqslant \mu_{n+1-i}(\alpha) + N\mu_{n+1-j}(\beta\beta^T),\ 1 \leqslant i, j \leqslant n \qquad (A.9)$$

Puesto que $\mu_1(\beta\beta^T)$ es nulo, resulta, según (A.8)

$$\mu_i(\alpha) \leqslant \mu_i(\alpha_N),\ 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (A.10)$$

En las relaciones (A.9) podemos hacer a fortiori

$$n + 1 - j = n-m \qquad (A.11.1)$$

o su equivalente

$$j = m + 1 \qquad (A.11.2)$$

que da las relaciones

$$\mu_{n-m+1-i}(\alpha_N) \leqslant \mu_{n+1-i}(\alpha) + N\mu_{n-m}(\beta\beta^T),\ 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (A.12)$$

y, puesto que $\mu_{n-m}(\beta\beta^T)$ es también nulo, quedan las relaciones

$$\mu_{n-m+1-i}(\alpha_N) \leqslant \mu_{n+1-i}(\alpha),\ 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (A.13)$$

que se escriben, también, en forma alternativa

$$\mu_h(\alpha_N) \leqslant \mu_{h+m}(\alpha),\ 1 \leqslant h \leqslant n-m \qquad (A.14)$$

Las dos expresiones (A.10) y (A.14) dan sendos límites inferior y superior de los n-m autovalores menores de la matriz α_N, acotaciones que escribimos en forma condensada

$$\mu_i(\alpha) \leqslant \mu_i(\alpha_N) \leqslant \mu_{i+m}(\alpha),\ 1 \leqslant i \leqslant n-m \qquad (A.15)$$

A partir de las relaciones (A.15) se cumple a fortiori la siguiente acotación, común para los n-m autovalores menores

$$\mu_1(\alpha) \leqslant \mu_i(\alpha_N) \leqslant \mu_n(\alpha),\ 1 \leqslant i \leqslant n-m \qquad (A.16)$$

Los m autovalores restantes, para los cuales siguen siendo válidas las relaciones (A.8) y (A.9), y, en particular, la relación (A.10), aumentan de forma asintótica, lineal, con N. Retendremos en forma explícita, únicamente, la siguiente cota superior del autovalor de mayor valor, $\mu_n(\alpha_N)$, de interés en la acotación del número de condición de la matriz α_N

$$\mu_n(\alpha_N) \leqslant \mu_n(\alpha) + N\mu_n(\beta\beta^T) \qquad (A.17)$$

Otras propiedades interesantes de la matriz α_N, que enunciamos a cotinuación, requieren ya desarrollos matemáticos sofisticados, en alguna medida, que exceden el interés del área estructural, por lo que nos limitamos a su simple mención.

En primer lugar, los n-m autovalores finitos de la matriz α_N son, también, las raíces de la siguiente ecuación de grado n-m, que resulta de anular el coeficiente del término de mayor grado en N, esto es, el coeficiente de N^m, en el desarrollo del determinante, primer miembro de la ecuación característica (A.1)

$$\begin{vmatrix} \Omega & \beta^T \\ \beta & \alpha - \mu I_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (A.18)$$

La ecuación anterior tiene validez general, si bien no representa una ecuación característica. El interés de esta formulación es, por tanto, teórico, ya que, en el tratamiento numérico no son aplicables los algoritmos iterativos usuales, por lo que debe operarse sobre la propia matriz α_N.

Los autovalores finitos de la matriz α_N, raíces de (A.18), representan los puntos de intersección con el eje μ, de las n-m asíntotas de la curva (A.1), paralelas al eje N. Asimismo, los m autovalores mayores de la matriz α_N, representan m asíntotas generales de la curva (A.1), cuyas pendientes son los m autovalores positivos de la matriz $\beta\beta^T$, que son también todos los autovalores de la matriz $\beta^T\beta$, o sea, las m raíces de la ecuación.

$$|\beta^T\beta - \mu I_m| = 0 \qquad (A.19)$$

Los m autovalores no finitos de α_N están dados, pues, por las siguientes expresiones equivalentes, para valores suficientemente grandes de N.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\mu_{n-m+i}(\alpha_N) \approx N \cdot \mu_{n-m+i}(\beta\beta^T) + \epsilon_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{A.20}$$

o bien, por las relaciones asintóticas más simples

$$\mu_{n-m+i}(\alpha_N) \approx N \cdot \mu_{n-m+i}(\beta\beta^T), \; 1 \leqslant i \leqslant m \tag{A.21}$$

Los valores de las pendientes de las m asíntotas generales son, pues, los m autovalores de la matriz $\beta\beta^T$, que son positivos. A su vez, las coordenadas ϵ_i de los puntos de intersección de las m asíntotas generales con el eje $N = 0$, verifican las siguientes relaciones comunes, similares a las acotaciones establecidas en (A.16) para los n-m autovalores menores de la matriz α_N.

$$\mu_1(\alpha) \leqslant \epsilon_i \leqslant \mu_n(\alpha), \; 1 \leqslant i \leqslant m \tag{A.22}$$

En resumen, todos los puntos intersección de las n asíntotas de la curva (A.1) con el eje μ están comprendidos en el segmento limitado por las dos intersecciones extremas de la curva y el eje. En el último ejemplo particular, tratado en la Sección 4, se han obtenido precisiones más afinadas sobre la posición de estos puntos, de validez completamente general en los casos de desplazamientos impuestos.

Además, el valor de la/s primera/s derivada/s, o sea el valor, unívoco o múltiple, de la expresión $dN/d\mu$, se mantiene positivo en todos los puntos de la curva, ordinarios o singulares. Más precisamente, en todos los puntos propios, se cumple $0 < dN/d\mu < \infty$. En consecuencia, no existen máximos ni mínimos ni puntos de inflexión propios, con tangentes paralelas a un eje.

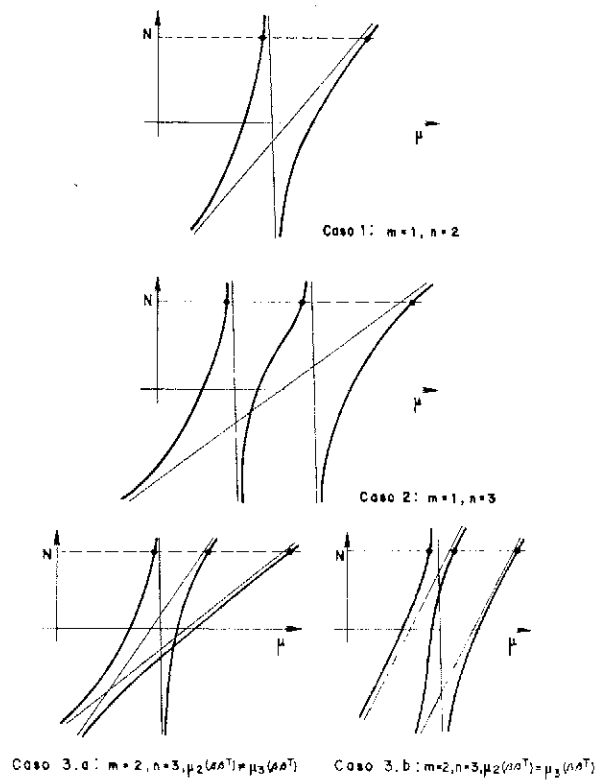


Fig. 1A. Autovalores de la matriz α_N

En la (Fig. 1A) se han representado, gráficamente, distintos casos de soluciones de la ecuación característica de la matriz α_N, para sistemas de 2 y 3 grados de libertad, con número de restricciones variable. El caso 1, relativo a valores $m = 1$, $n = 2$, corresponde al primer ejemplo tratado en la Sección 4; mientras este mismo caso y los casos 2 y 3.b, corresponderían al último ejemplo, respectivamente para sistemas de 2 y 3 grados de libertad, y en este último supuesto, con uno o dos desplazamientos impuestos.

El estudio de la matriz inversa, esto es, la matriz α_N^{-1}, nos lleva, finalmente, a desarrollos asintóticos de interés. Para este análisis es conveniente una ordenación previa de las matrices α y β, como detallamos a continuación.

Puesto que la matriz β tiene rango m, podemos escribirla en la siguiente forma particionada, suponiendo una ordenación adecuada, o mediante las adecuadas transformaciones elementales si fuera preciso

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_m \\ \beta_{n-m} \end{bmatrix} \tag{A.23}$$

con β_m matriz cuadrada de orden mxm, no singular, y β_{n-m} de orden (n-m)xm.

La matriz α se supone ordenada con el mismo criterio resultante para la matriz β, lo que equivale a la aplicación paralela de la transformación congruente resultante para ordenación de la matriz $\beta\beta^T$.

Las matrices conexas σ y τ, se definen de la forma siguiente, a partir de la partición (A.23) de β

$$\sigma = \begin{bmatrix} -(\beta_m^T)^{-1}\beta_{n-m}^T \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \tag{A.24}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} (\beta_m^T)^{-1} \\ \Omega \end{bmatrix} \tag{A.25}$$

cumpliéndose las relaciones ya mencionadas

$$\beta^T\sigma = \Omega \tag{A.26}$$

$$\beta^T\tau = I_m \tag{A.27}$$

La no singularidad de la matriz $\sigma^T\alpha\sigma$, de orden mxm, es una condición necesaria y suficiente, para la siguiente identidad matricial

$$\alpha_N^{-1} = (\alpha + N\beta\beta^T)^{-1} = a_0 + N^{-1}a_1(I_n + N^{-1}\alpha a_1)^{-1} \tag{A.28}$$

donde a_0 y a_1 son las siguientes matrices simétricas

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$a_o = \sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1} \sigma^T \qquad (A.29)$$

$$a_1 = (I_n - a_o \alpha)\tau\tau^T (I_n - \alpha a_o) =$$

$$= [I_n - \sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1} \sigma^T \alpha]\tau\tau^T [I_n - \alpha\sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1} \sigma^T] \qquad (A.30)$$

Las dos matrices a_o y a_1 son simétricas, de orden nxn, y sus rangos son n-m y m, respectivamente.

La identidad (A.28) se escribe, también, en la forma alternativa siguiente, en la que se explicita la propiedad simétrica de la matriz α_N^{-1}, que no aparece directamente en (A.28).

$$\alpha_N^{-1} = \sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1} \sigma^T + N^{-1} [I_n - \sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1} \sigma^T \alpha]\tau \{I_n + N^{-1} \cdot [\tau^T \alpha \tau - \tau^T \alpha \sigma (\sigma^T \alpha \sigma)^{-1} \sigma^T \alpha \tau]\}^{-1} \tau^T \cdot [I_n - \alpha\sigma(\sigma^T \alpha \sigma)^{-1} \sigma^T] \qquad (A.31)$$

Las identidades (A.28) y/o (A.31), equivalen al siguiente desarrollo asintótico, convergente, de la matriz α_N^{-1}

$$\alpha_N^{-1} = a_o + \Sigma N^{-i} (-1)^{i-1} a_1 (\alpha a_1)^{i-1},$$

$$1 \leqslant i \leqslant \infty \;,\; N > \text{máx } |\mu(\alpha a_1)| \qquad (A.32)$$

Las matrices coeficientes del desarrollo (A.32), todas ellas simétricas, tienen las propiedades características que indicamos a continuación.

La matriz coeficiente del término potencial negativo N^{-i}, es la matriz a_i, dada por las expresiones alternativas

$$a_i = (-1)^{i-1} a_1 (\alpha a_1)^{i-1} = = (-1)^{i-1} (a_1 \alpha)^{i-1} a_1 \qquad (A.33)$$

y, para $i > 1$, todas las matrices a_i tienen rango común, de valor m, que es, en particular, el rango de la matriz a_1, si α es no singular, y con valor inferior a m, si α es singular.

La matriz a_o es ortogonal a cualquier matriz a_i, respecto del núcleo α, esto es

$$a_o \alpha a_i = \Omega, \; 1 \leqslant i \leqslant \infty \qquad (A.34)$$

Se cumplen, además, las relaciones siguientes, en cuya deducción son aplicables las relaciones (A.26) y (A.27):

$$a_o \beta = \Omega \qquad (A.35)$$

$$\beta\beta^T a_1 + \alpha a_o = I_n \qquad (A.36)$$

$$\beta\beta^T a_i + \alpha a_{i-1} = \Omega, \; 1 < i \leqslant \infty \qquad (A.37)$$

$$a_i \beta\beta^T a_1 = a_i \;,\; 1 \leqslant i \leqslant \infty \qquad (A.38)$$

Por último, la condición necesaria y suficiente indicada para validez del desarrollo (A.32), que es la no singularidad de la matriz $\sigma^T \alpha \sigma$, se expresa, alternativamente, por la no anulación de la traza de la matriz compuesta mixta de Reiss, de índice m, de las matrices α y $\beta\beta^T$, que se escribe como el siguiente producto de dos determinantes no nulos, el primero, además, positivo

$$t_m = |\beta_m \beta_m^T| \, |\sigma^T \alpha \sigma| \qquad (A.39)$$

o, también, en la forma

$$t_m = |\beta_m|^2 \, |\sigma^T \alpha \sigma| \qquad (A.40)$$

REFERENCIAS

[1] BATHE, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, p. 242, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

[2] MOHR, G.A., Application of Penalty Functions to a Curved Isoparametric Axisymmetric Thick Shell Element, Computers & Structures, Vol. 15, pp. 685-690, Pergamon Press, 1982.

[3] RUBIO, P., Direct Method for Computation of Frequencies in Structures with Constrained Displacements, Computers & Structures, Vol. 21, N° 5, pp. 1.035-1.046, Pergamon Press, 1985.

[4] RUBIO, P., Penalty Method applied to The Constrained Dynamic Model, Proceedings of the Seventh World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Vol. 2, pp. 767 - 771, IFToMM, Pergamon Press, Sevilla, september, 1987.

[5] WILKINSON, J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem, p. 25, Oxford University Press, 1978.

RESUMEN

Se desarrolla un método alternativo a los procedimientos usuales de condensación, para el cálculo estático y/o dinámico, en régimen lineal, de estructuras con restricciones lineales entre desplazamientos.

La base conceptual del método es la inclusión de un término penalty, relacionado con las restricciones y afectado por un coeficiente escalar, en la definición del principio variacional, y la consideración del comportamiento asintótico del sistema así definido, para un valor suficientemente grande del coeficiente numérico.

La aplicación subsiguiente del teorema del minimax y de las propiedades de las matrices hermíticas, lleva a diversas relaciones entre las frecuencias de ambas estructuras, libre y condicionada, de principal interés teórico.

El desarrollo detallado del método, se refiere, en este artículo, a estructuras con matriz de masa

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

no singular. En las aplicaciones numéricas, deben adoptarse las precauciones inherentes a los métodos penalty, para cuya consideración se deducen criterios teóricos. En particular, se obtiene una solución discreta del problema estático, equivalente a la solución por el método de condensación, a partir del desarrollo asintótico de la matriz inversa de la matriz de rigidez del sistema condicionado global.

SUMMARY

A penalty method for linear, static and dynamic, computation of structures under linear constraints in displacements, alternative to the usual condensation or master-slave algorithm, is developed.

The theoretical basis of this method is the inclusion of a penalty term, affected by a scalar coefficient, into definition of the variational principle, followed by the study of the asymptotic behaviour of the system when the above numerical coefficient increases unbounded.

Further application of the theorem of minimax, as well as of properties of the hermitian matrices, leads to interesting relations between the eigenvalues of both, unconstrained and constrained structures.

Detailed developments are restrained herein to the static and dynamic analysis of structures with nonsingular mass matrix. Criterions in order to necessary cautions associated with numerical application of all penalty methods are also provided. For the static constrained problem, we derive a discrete global solution, avoiding such type of problems, through suitable asymptotic development of the inverse increased stiffness matrix.

* * *

Coloquio de la RILEM sobre "Propiedades del hormigón fresco"

Patrocinado por el Comité Coordinador de la RILEM de "Tecnología del hormigón", y organizado por el "Institut für Baustoffkunde und Materialprüfung" de la Universidad de Hannover (R.F.A.) se va a celebrar, en dicha ciudad, un coloquio para el estudio de "Las Propiedades del hormigón fresco", durante los días 3 al 5 de octubre de 1990.

En este Coloquio se tratarán los siguientes temas:

1.° Características generales del hormigón fresco, el mortero y la pasta de cemento:

- Definiciones.
- Características reológicas; consistencia.
- Aspectos de la trabajabilidad.
- Endurecimiento.
- Exudación y segregación.

Otras propiedades.

2.° Mediciones técnicas

- Ultimos avances en las mediciones.
- Significado y confianza de los ensayos normalizados o no.
- Viscometría.

3.° Factores que influyen en las características del hormigón fresco

- Composición química, finura de los cementos, aditivos y adiciones, PFA, mezclas de cementos.
- Tipo, granulometría y características superficiales de los áridos.
- Dosificación, aire ocluido.
- Método de amasado y período de batido.
- Temperatura y condiciones climatológicas.
- Edad del hormigón.

4.° Interacción entre las características del hormigón fresco y del hormigón endurecido

5.° Aplicaciones prácticas de la Investigación Científica

6.° El cálculo asistido por el ordenador y la fabricación del hormigón

- Bibliografía.
- Sistema Experto Internacional.

El idioma oficial del Coloquio será el inglés.

Los participantes recibirán un ejemplar de los "Proceedings" del coloquio, junto con la documentación inicial.

Se han programado diversos actos Sociales, tanto para los participantes como para sus acompañantes.

Los interesados en participar en este Coloquio, deberán dirigirse a:

Institut für Baustoffkunde und
Materialprüfung der Universität Hannover
att. Dr. Ing. W. Schöner
Nienburger Strasse 3
D-3000 Hannover 1
República Federal Alemana

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Modelos para la interación tendón-hormigón en estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes

Juan Murcia Vela
Doctor Ingeniero de Caminos
Instituto de Ciencia de Materiales de Barcelona, CSIC

INTRODUCCION

Recientemente, se ha presentado una metodología para el análisis estructural de la técnica del hormigón pretensado mediante tendones no adherentes, que conduce a una formulación que engloba también a la mejor conocida de tendones adherentes (3).

Como se indicó entonces al hablar de las condiciones del análisis estructural, en las que se refieren al material pueden incluirse ciertos modelos para representar la interacción entre acero (tendón) y hormigón (o conducto) en sus contactos intermedios, cuando presentan una forma mecánico-geométrica; aunque no se trate estrictamente del modelo de un material sino, insistamos, de la interacción entre dos materiales. En lo que respecta a ésta, hasta ahora hemos estudiado sólo el modelo de rozamiento simple (3), que afecta en exclusiva a variables mecánicas (salvo en el signo, relacionado con el de la variable geométrica u).

A continuación se examina el significado de ese modelo dentro del marco general de los que pueden representar la citada interacción en sus diversas fases; con ello no sólo es ya posible llegar al establecimiento de la ley o relación que rige en la interacción, sino que también puede apreciarse la frontera que, en este sentido, separa o, quizá mejor, une la técnica no adherente con la adherente.

Más adelante, se plantea el análisis estructural con otro modelo y se comparan resultados con respecto a los de rozamiento simple (y también a los ligados a una situación de perfecta adherencia), extrayéndose conclusiones de cara al empleo de uno y otro en la práctica y apuntando sus posibles extrapolaciones para la técnica adherente.

MARCO GENERAL DE MODELOS PARA REPRESENTAR LA INTERACCION TENDON-CONDUCTO

Según lo ya expuesto, en otro lugar (3) se ha empleado un modelo de interacción muy sencillo, quizás el más elemental posible, como es el de *rozamiento simple;* este modelo involucra sólo condiciones y variables mecánicas, aunque indirectamente también hace intervenir a variables geométricas porque el signo de la fuerza tangencial viene fijado por el del desplazamiento relativo.

Sin embargo, todo modelo de comportamiento consiste, de hecho, en una ley, explícita o no, de tipo mecánico-geométrico; aunque en esta ocasión no se trata del modelo de un material sino del que define la interacción entre dos materiales (o, si se quiere, estructuras). Por tanto, el rozamiento simple no encaja bien en lo anterior, puesto que no recoge completamente la citada dualidad.

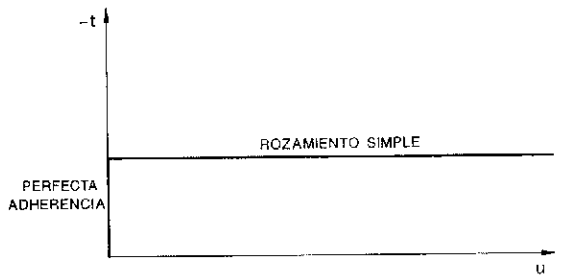
Al profundizar un poco en la reflexión previa, se aprecia que lo que está en juego al respecto es la relación t—u de la interacción, esto es, la ley que liga la fuerza unitaria tangencial interactiva (acción-reacción) t, que actúa sobre ambos materiales en sus zonas de contacto, con el desplazamiento relativo u que se produce entre los mismos. El rozamiento simple se muestra, al menos en principio, como un modelo incompleto; de todas formas, seguiremos denominándolo como tal.

Con este marco más general estamos ya en condiciones de responder a una pregunta implícita en todo este asunto: ¿Qué ocurre antes de que el tendón comience a deslizar libremente, aunque con rozamiento, respecto a su conducto?

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

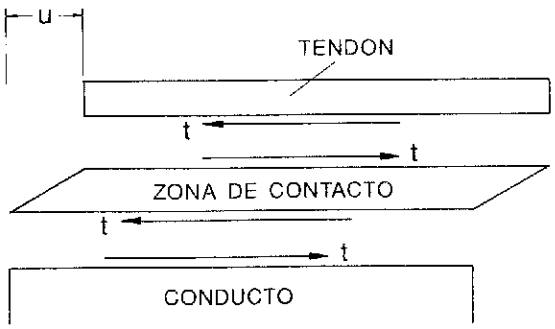
Por supuesto, el modelo de rozamiento simple, muy elemental, sólo nos informa de lo que ocurre después de que comience dicho deslizamiento, el cual se produce por encima de un cierto valor umbral de t. De hecho, y con referencia a la ley t–u, el rozamiento viene a ser el *modelo plástico perfecto:* el valor de u no está definido, mientras que sí lo está el de t ($t = \mu \cdot n$, si n es la fuerza unitaria normal), que no depende de u.

Si se incorpora el correspondiente segmento del eje vertical ($u = 0$), que llega hasta el valor indicado de t, se tendrá, en conjunto, una ley de tipo rígido-plástico perfecto; se ha de indicar, por cierto, que dicho eje refleja la situación de *perfecta adherencia:* aunque la misma se caracteriza por $du/ds = 0$ (3), esto implica que también $u = 0$ en todo punto de la estructura, ya que siempre existen anclajes en que lo último se cumple. En todo caso, utilizando el convenio de signos del citado trabajo, las variables t y u tienen justamente signo contrario.

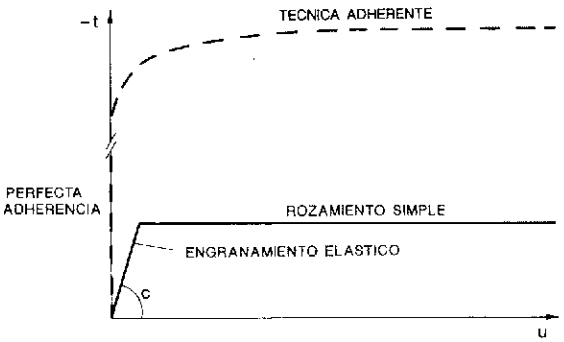


Por supuesto, la ley anterior podría ser utilizada en la técnica no adherente, con lo que se está suponiendo que o bien existe perfecta adherencia o se produce deslizamiento con rozamiento, de manera que la primera se da en las zonas con valores de t por debajo del umbral mencionado y el segundo en las restantes. De todas maneras, la misma no parece muy adecuada, precisamente por la discontinuidad que existe en $u = 0$ (propia de las relaciones de este tipo), poco realista para una ley de comportamiento (no, como se sabe, para situaciones últimas), esto es, que pretende ser capaz de hacer un seguimiento de todas las situaciones posibles; ello es así porque, desde que aparecen tensiones tangenciales t y antes del deslizamiento con rozamiento, se producen desplazamientos relativos u, existiendo un cierto efecto de *engranamiento elástico* en el contacto que, por supuesto, no impide la aparición de los anteriores.

La figura que sigue trata de ser un esquema conceptual de la interacción, de manera que, en realidad, lo que se deforma por el mencionado engranamiento elástico, en la zona de contacto, puede formar parte tanto del tendón como del conducto, dependiendo todo de la textura superficial y de la rigidez transversal de ambos en dicha zona.



Ante esta situación, se plantea de inmediato la posibilidad de utilizar una relación t–u de tipo elasto-plástico; la parte elástica puede, en principio, tomarse sin más lineal, con lo que se tiene un modelo elasto-plástico bilineal, que combina los efectos del engranamiento elástico (lineal) y del rozamiento simple.



Es oportuno señalar, como conclusión provisional, que en la figura anterior cabe incluir, en cierto modo, tanto la técnica no adherente como la adherente:

—En lo que atañe a la última, el eje vertical refleja, como se ha dicho, la perfecta adherencia, la cual comienza, antes o después, a perderse paulatinamente y entrar en las condiciones de un engranamiento (elástico al principio y, más adelante, posiblemente ya no elástico), cuando las tensiones tangenciales se acercan y finalmente alcanzan la resistencia a adherencia; recuérdese al respecto, por ejemplo, el ensayo para homologar la adherencia de las armaduras en hormigón armado (2) y otros similares. Naturalmente, la situación real respecto a la otra técnica es muy distinta, puesto que no solamente se propicia la adherencia como tal (adhesión) sino que el contacto se establece en todo el perímetro del tendón.

—En la técnica no adherente, según lo expuesto, el engranamiento elástico es una fase intermedia entre el no deslizamiento y el deslizamiento con rozamiento. Como es evidente, sólo en el entorno de los puntos en que $u = 0$ se dará una situación parecida a la de perfecta adherencia.

En fin, el modelo de engranamiento elástico, tal como ha sido definido, sirve ya como base para el

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

análisis de lo que ocurre en una estructura antes de que el tendón comience a deslizar con rozamiento, para cualquier fase en que no exista adherencia: tesado, destesado (anclaje con deslizamiento por cuñas u otras causas) y todas las restantes (servicio, en particular) propias de la técnica no adherente; aunque, por razones obvias de extensión, no se puede entrar aquí en consideraciones explícitas ligadas a los llamados ciclos de carga-descarga, tanto en sus aspectos básicos (ley t–u) como en el análisis estructural subsiguiente.

ANALISIS ESTRUCTURAL CON EL MODELO DE ENGRANAMIENTO ELASTICO

Al observar la figura previa que resume los distintos modelos t u, se aprecia que son precisamente los extremos los que han sido ya empleados en el análisis estructural (3): rozamiento simple (zona lineal horizontal) para la técnica no adherente y adherencia perfecta (eje vertical) para la adherente (aunque también podría tomarse para la no adherente, como se ha indicado, como modelo previo al deslizamiento). Plantearemos ahora el análisis (lineal) con el modelo intermedio de engranamiento elástico, para estructuras lineales o de barras.

Se parte de

$$t = -C \cdot u,$$

que, junto con $t = -\frac{dP}{ds}$,

lleva a $\frac{dP}{ds} = P' = C \cdot u.$

Si se deriva la anterior, se obtiene $P'' = C \cdot u'$, por lo cual, teniendo en cuenta que (1,3)

$$u' = \frac{du}{ds} = \epsilon_p - \epsilon_{ce} =$$

$$= \frac{P}{E_p \cdot A_p} \left[1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c}\right)\right] -$$

$$- \frac{N}{E_c \cdot A_c} + \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c},$$

donde N y M son (1,3) los esfuerzos, excluyendo los isostáticos de pretensado, se llega a

$$P'' = C \left\{ \frac{P}{E_p \cdot A_p} \left[1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{N}{E_c \cdot A_c} + \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} \right\},$$

ecuación diferencial en P de la forma

$$y''(s) - k \cdot y(s) = f(s),$$

cuya solución, si k no depende de s, es

$$P(s) = P_{part}(s) + A \cdot \exp(\sqrt{k} \cdot s) +$$

$$+ B \cdot \exp(-\sqrt{k} \cdot s).$$

Evidentemente, el análisis se aplica por fases o etapas sucesivas, con las condiciones propias de cada una, de forma que las distintas variables (y, en particular P) son realmente incrementos sobre sus valores anteriores.

En el *caso general en servicio*, al deformarse la estructura, las constantes de integración (si se toma como origen un anclaje y s_{tot} es la abscisa del otro) se derivan de las condiciones

$$u(0) = 0 \quad y \quad u(s_{tot}) = 0,$$

las cuales establecen la compatibilidad global entre el tendón y la estructura de hormigón; las anteriores equivalen aquí a

$$P'(0) = 0 \quad y$$

$$u(s_{tot}) = \int_0^{s_{tot}} \left\{ \frac{P}{E_p \cdot A_p} \left[1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{N}{E_c \cdot A_c} + \frac{M \cdot e}{E_c \cdot I_c} \right\} \cdot ds = 0,$$

o bien a $P'(0) = 0$ y $P'(s_{tot}) = 0$.

Esta compatibilidad global es la que hace que el valor medio de P(s) dependa de las leyes M y c, de las características de la estructura de hormigón y de los tendones (y de sus materiales), pero no de la técnica o modelo empleado (3).

Se ha de subrayar que, a diferencia del modelo de rozamiento simple, no hay que tantear el punto de cambio de signo de u (3); ese tanteo era preciso por no estar allí t y u directamente ligados en valor, sólo en signo, mientras que en este modelo sí lo están.

Si aplicamos el mismo modelo a la *fase de tesado*, lo único que cambia respecto al planteamiento analítico anterior es una condición de borde; si se toma como origen el punto de anclaje, se tiene

$$P(0) = P_{tesado}$$

(en lugar de $u(0) = P'(0) = 0$, como antes).

La otra condición sigue siendo la misma: $u(s_{tot}) = P'(s_{tot}) = 0$.

A diferencia de lo que ocurre con el modelo de rozamiento simple, la fuerza P resultante depende ahora de los esfuerzos N y M que el propio tesado moviliza en la estructura; la razón es la misma que antes: t y u están aquí directamente ligados y allí no.

Una vez concluidos estos cálculos hay que definir las zonas en que precisamente este modelo, y no el de rozamiento simple, puede tener vigen-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

cia. La condición que delimita uno del otro se deduce del valor de la fuerza unitaria t para la que aparece el escalón plástico en el diagrama t–u de la interacción, que corresponde al rozamiento simple. Dicho valor está ligado a la ley de P obtenida, ya que (1, 3)

$$|t| = |\frac{dP}{ds}| = |P'| = \mu \cdot n = \mu \cdot P \cdot (\frac{d\beta}{ds} + \varphi),$$

donde se incluye, junto con la curvatura real del tendón, $d\beta/ds$, el posible efecto de ondulación a través de su coeficiente φ.

Si $|\frac{dP}{ds}| < \mu \cdot P \cdot (\frac{d\beta}{ds} + \varphi)$, nos encontramos en la zona donde, en principio, puede darse el engranamiento elástico.

Si $|\frac{dP}{ds}| > \mu \cdot P \cdot (\frac{d\beta}{ds} + \varphi)$, nos encontramos en la zona donde, en principio, no es posible el engranamiento elástico.

Las comprobaciones anteriores se refieren, por supuesto, a los valores totales actuales de las variables implicadas.

En general, después de estas comprobaciones, se impone un análisis que combine adecuadamente ambos modelos, lo que hace que puedan producirse cambios más o menos notables respecto a los anteriores cálculos de referencia.

De todas formas, y aunque esto se verá de manera concreta en el ejemplo que sigue, se puede ya apreciar sin más, que las zonas en que es posible el engranamiento elástico, dado que en el mismo se cumple $P' = C \cdot u$, han de estar cerca de los puntos en que u se anula. Por otra parte, está claro que el coeficiente C es clave en el valor de P', siendo en cierto modo como un factor de escala que hace que la curva P(s) sea más pronunciada o más suave, ya que el valor medio de la misma es constante: si C es muy grande la curva P(s) tendrá fuertes oscilaciones (y se acercará a la que corresponde a perfecta adherencia), siendo más reducida la extensión de las zonas en que se da este modelo; mientras que si C tiene un valor bajo, la curva será suave, acercándose al valor medio (y, por tanto, a la que se produce para rozamiento simple con los coeficientes normales), con lo que este modelo es válido en zonas más amplias.

En definitiva, con independencia del modelo empleado (rígido-plástico o elasto-plástico), lo que hace el deslizamiento con rozamiento es limitar las pendientes de la ley real P(s), límite (variable con la propia P) que suele ser de valor muy reducido, habida cuenta de los pequeños valores habituales de las curvaturas y de los coeficientes μ y φ y de que, por otro lado, el valor medio de P (s) es fijo (y no depende del modelo).

En lugar de entrar ahora en un desarrollo matemático abstracto, examinaremos un ejemplo muy sencillo que, aparte del interés particular que pueda tener, nos permitirá llegar con más facilidad a abordar incluso alguna conclusión general sobre este modelo. Aunque la estructura es la más simple, no vale la pena ahora complicar más el ejemplo, y con él los cálculos, ya que es suficiente para lo que se pretende analizar.

EJEMPLO

Sea una viga simple, de sección constante y con pretensado de trazado parabólico, que se muestra en la figura con el trazado medio de los tendones.

Se estudiarán, de forma independiente:

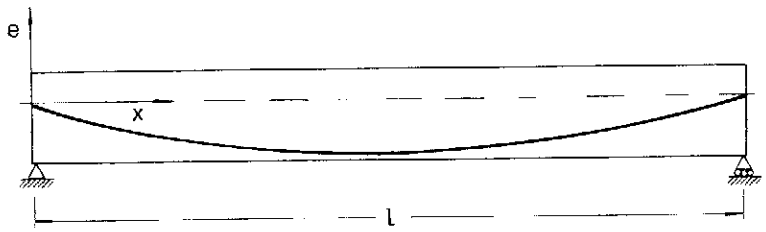
1) el caso general en servicio, con un incremento q de la carga variable repartida (sobre toda la viga);

2) la fase de tesado.

Se supone, para simplificar, que la ley de P previamente existente es constante (para el tesado esto es siempre cierto si se trata del primero, puesto que se parte de cero).

Las características de la sección de hormigón, A_c e I_c, y el área de los tendones de acero, A_p, que se suponen constantes a lo largo de la pieza, no requieren en principio valores numéricos para lo que se trata de mostrar, al igual que los módulos de elasticidad de los materiales, E_c y E_p.

* * * * *



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Trabajaremos con el trazado medio de los rendones, pudiendo sustituir el arco s del mismo por la abscisa x de la pieza si la curvatura es pequeña, lo que siempre ocurre en la práctica. Un trazado parabólico simétrico, con excentricidad nula en el origen tomado, como el propuesto, queda definido así:

$$e(x) = c \cdot \frac{x \cdot (x - \ell)}{2},$$

donde a la curvatura $\frac{d\beta}{dx}$, que en este caso es constante, la hemos designado simplemente como c.

1. Caso general en servicio

Como se ha visto ya, el modelo de *engranamiento elástico* lleva a la ecuación diferencial

$$P''(x) = C \cdot \{ \frac{P(x)}{E_p \cdot A_p} [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2(x)}{I_c})] + \frac{M(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c} \},$$

con $P'(0) = 0$ y

$P'(\ell) = 0$ o, lo que es equivalente,

$$u(\ell) = \int_0^{\ell} \{ \frac{P(x)}{E_p \cdot A_p} [1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2(x)}{I_c})] + \frac{M(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c} \} \cdot dx = 0 .$$

Este caso es simétrico y por ello se sabe (3) que u cambia de signo en el centro de la viga, teniendo signo positivo en la mitad izquierda. Siendo así, la última condición podría también expresarse como $u(\ell/2) = 0$; pero ello no es en absoluto necesario.

Si, para simplificar la notación, llamamos K al factor

$$[1 + n \cdot A_p (\frac{1}{A_c} + \frac{e^2(x)}{I_c})] / (E_p \cdot A_p),$$

que multiplica a P, el cual puede tomarse como constante dado el ínfimo peso relativo que en la práctica tiene $e^2(x)$ en el mismo, la ecuación diferencial queda definida como

$$P''(x) = C \{ K \cdot P(x) + \frac{M(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c} \} =$$

$$= C K \cdot P(x) - C \cdot \frac{c \cdot q \cdot x^2 \cdot (\ell - x)^2}{4 \cdot E_c \cdot I_c} .$$

La solución tiene la forma

$$P(x) = \frac{c \cdot q}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c} [x^4 - 2 \cdot \ell \cdot x^3 + (\ell^2 + \frac{12}{CK}) x^2 - \frac{12 \cdot \ell}{CK} \cdot x + \frac{2}{CK} (\ell^2 + \frac{12}{CK})] + A \cdot \exp(\sqrt{CK} \cdot x) + B \cdot \exp(-\sqrt{CK} \cdot x) .$$

Con las condiciones ya citadas [$u(0) = P'(0) = u(\ell) = P'(\ell) = 0$], la solución se concreta en

$$P(x) = \frac{c \cdot q}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c} \{x^4 - 2 \cdot \ell \cdot x^3 + (\ell^2 + \frac{12}{CK}) x^2 - \frac{12 \cdot \ell}{CK} \cdot x + \frac{2}{CK} (\ell^2 + \frac{12}{CK}) - \frac{12 \cdot \ell}{(\sqrt{CK})^3 [\exp(\sqrt{CK} \cdot \ell) - \exp(-\sqrt{CK} \cdot \ell)]} \cdot [(\exp(-\sqrt{CK} \cdot \ell) + 1) \cdot \exp(\sqrt{CK} \cdot x) + (\exp(\sqrt{CK} \cdot \ell) + 1) \cdot \exp(-\sqrt{CK} \cdot x)] \} .$$

A continuación, y al objeto de poder comparar, resolveremos el ejemplo para el modelo de *rozamiento simple*, con coeficientes de rozamiento μ y de ondulación φ (3).

Como en la mitad de la izquierda u es positivo,

$$P(x) = P(0) \cdot \exp[\mu (c + \varphi) x] .$$

Utilizando la condición de compatibilidad global, extendida a dicha mitad por simetría, $u(\ell/2) = 0$, esto es,

$$\int_0^{\ell/2} K \cdot P(x) \cdot dx = \int_0^{\ell/2} \frac{c \cdot q \cdot x^2 \cdot (\ell - x)^2}{4 \cdot E_c \cdot I_c} \cdot dx ,$$

resulta

$$\frac{K \cdot P(0)}{\mu (c + \varphi)} \cdot \{\exp[\mu (c + \varphi) \frac{\ell}{2}] - 1\} = \frac{c \cdot q \cdot \ell^5}{240 \cdot E_c \cdot I_c} ,$$

con lo que se llega a

$$P(x) = \frac{c \cdot q \cdot \ell^4}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c} \cdot \frac{\mu (c + \varphi) \ell}{60 \cdot \{\exp[\mu (c + \varphi) \frac{\ell}{2}] - 1\}} \cdot \exp[\mu (c + \varphi) x] .$$

Finalmente, haremos referencia a la técnica adherente, suponiendo *perfecta adherencia*, para la cual se sabe que (3)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\frac{P(x)}{E_p \cdot A_p}\left[1 + n \cdot A_p \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e^2(x)}{I_c}\right)\right] = -K.P(x) =$$

$$= -\frac{M(x) \cdot e(x)}{E_c \cdot I_c} = \frac{c \cdot q \cdot x^2 \cdot (\ell - x)^2}{4 \cdot E_c \cdot I_c},$$

por lo que

$$P(x) = \frac{c \cdot q \cdot x^2 \cdot (\ell - x)^2}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c}.$$

Para poder ofrecer resultados concretos, supondremos en lo que sigue que $\ell = 20$ m y que $K = 5 \cdot 10^{-4}$ MN^{-1}. El valor de q no es necesario, puesto que, como se ve, sólo figura en el factor común, idéntico en todos los resultados. Estos se referirán, por tanto, a su valor y al de otros parámetros similares: concretamente, a $q/(4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c) = 500 \cdot q/(E_c \cdot I_c)$ (con lo que P hay que expresarla en MN); E_c e I_c se equiparan con q porque, aunque forman parte del factor K, tienen una influencia reducidísima en su variación en relación con la del área de los tendones A_p, que es la que fija casi del todo su valor (dado que E_p no varía mucho).

Los gráficos que siguen muestran los resultados de este ejemplo con el modelo de engranamiento elástico, para distintos valores de C, en comparación con los relativos al de rozamiento simple (para los valores $\mu = 0{,}25$ y $\varphi = 0{,}01$ rad/m) y con el de adherencia perfecta (du/ds = 0 y, por tanto, también u = 0) o eje vertical de la ley de interacción t–u. Se supone, en principio, como valor de la curvatura de los tendones, $c = 0{,}01$ m^{-1}.

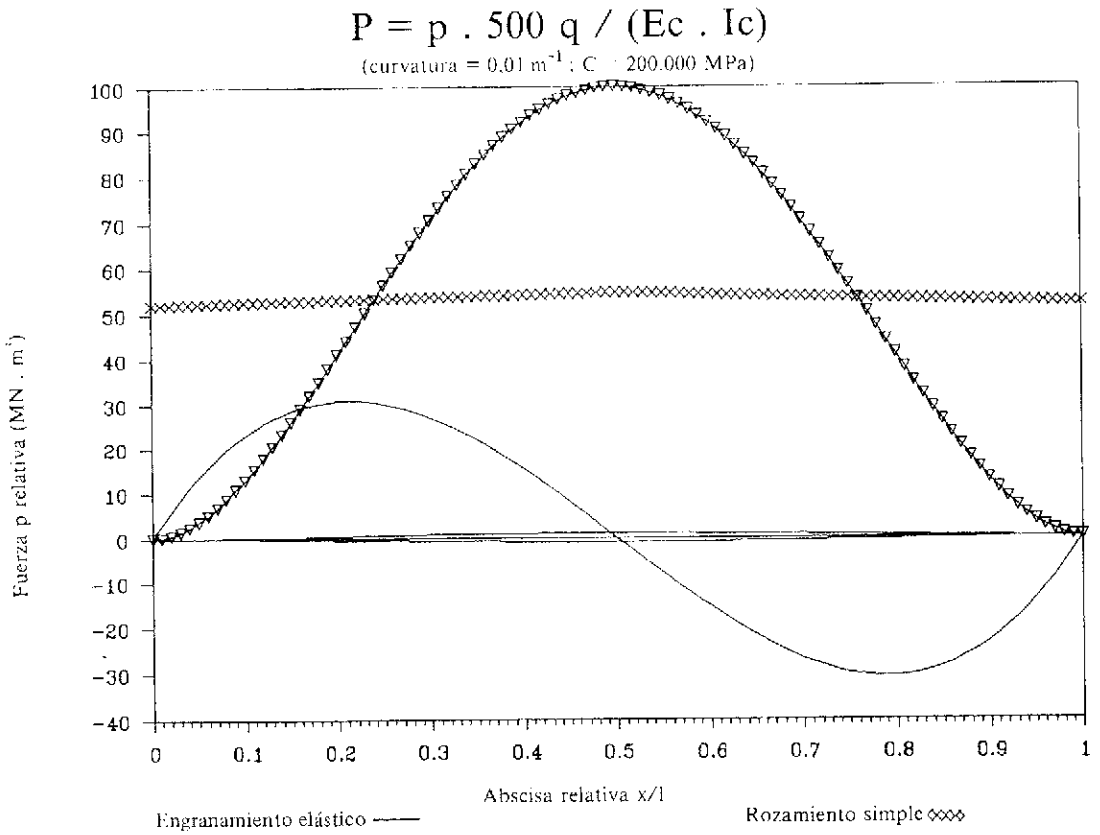
Los resultados que corresponden a adherencia perfecta se muestran marcados con pequeños triángulos.

Asimismo, en los gráficos se superponen, en línea continua, (a una escala diferente, no indicada porque es innecesaria) las curvas que, para el modelo de engranamiento elástico, corresponden a P' (x) (a u(x), con otra escala) y a $\pm 0{,}25 \cdot P(x) \cdot (c + 0{,}01)$, al objeto de poder tener una idea, en principio, de las zonas en que deja de ser válido dicho modelo: aquéllas en que se cumple $|P'(x)| > 0{,}25 \cdot P(x) \cdot (c + 0{,}01)$; al realizar este análisis, se ha de tener presente que ahora no se está incluyendo en P(x) su valor previo a esta fase, lo que habría de hacerse.

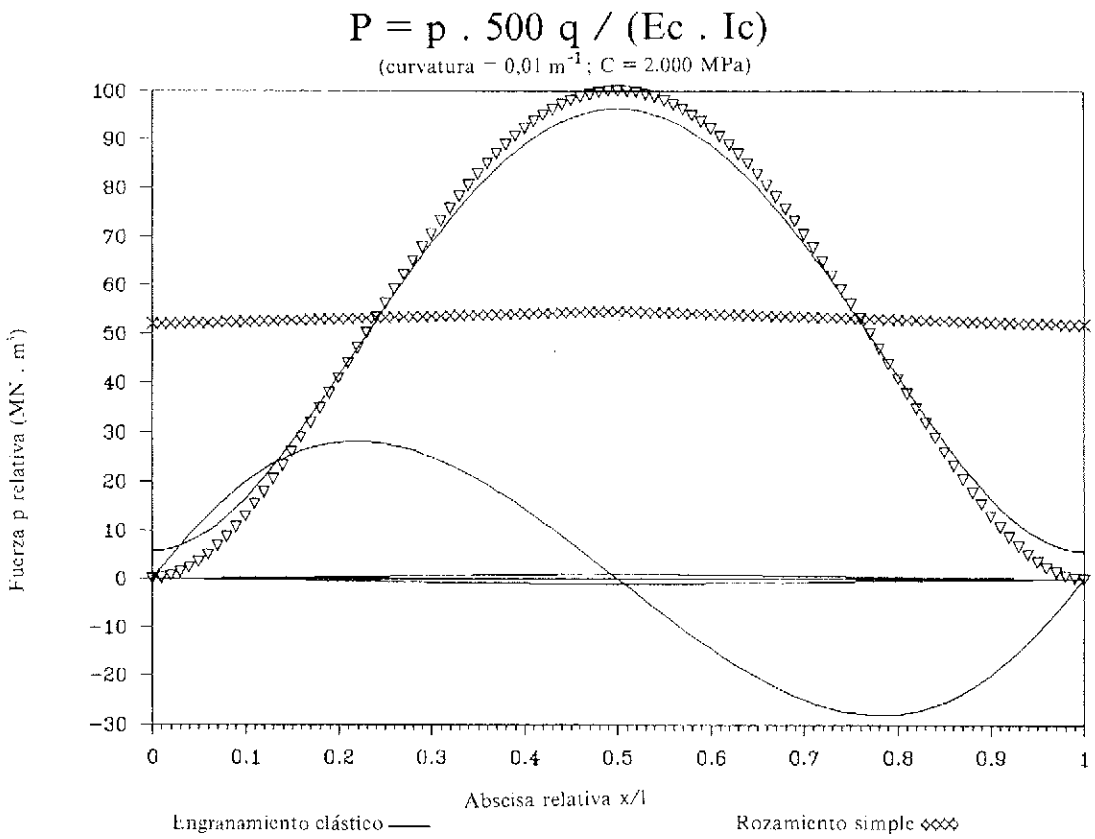
Como su valor medio es idéntico para todos los modelos, atenderemos más bien a la forma de la ley o distribución de P(x) para los mismos.

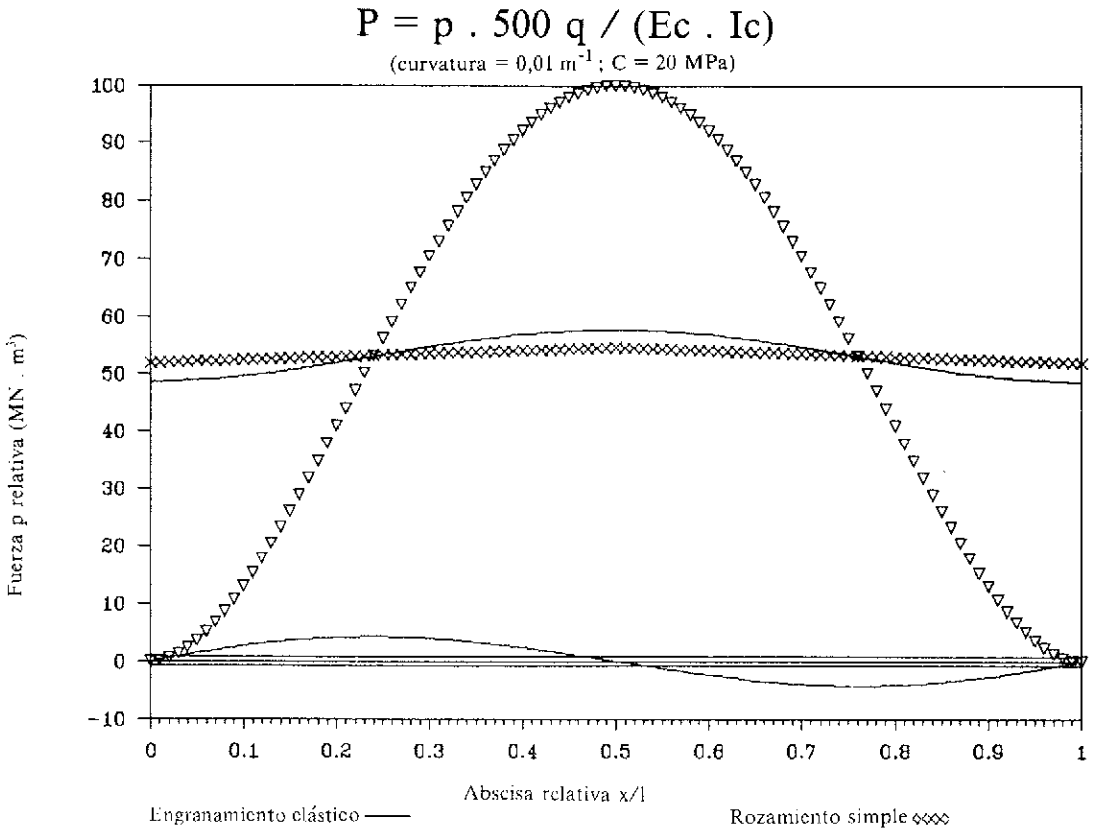
Así, por ejemplo, para C = 200000 MPa, que es un valor muy alto, los resultados para este modelo se confunden con los de perfecta adherencia, imperando el rozamiento simple en la estructura.

Para C = 2000 MPa, ya existe una diferencia apreciable entre ambos y continúa imperando el rozamiento simple.



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026





Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Para C = 20 MPa, los resultados para este modelo se acercan más a los de rozamiento simple y todavía rige este último mecanismo en buena parte de la estructura. Esto sugiere claramente que para los valores de C inferiores, donde comience a imperar el engranamiento elástico, los resultados para ambos modelos serán prácticamente idénticos.

Los gráficos confirman, por tanto, las observaciones realizadas más arriba.

En efecto, cuando la constante C es muy pequeña, la ley varía poco (pendientes poco acusadas, puesto que P' es también pequeña): en esta situación, en que se da realmente el modelo de engranamiento elástico, la ley de P se acerca mucho a la correspondiente al de rozamiento simple que, por el valor reducido de sus coeficientes, se aproxima a su vez a ser una constante.

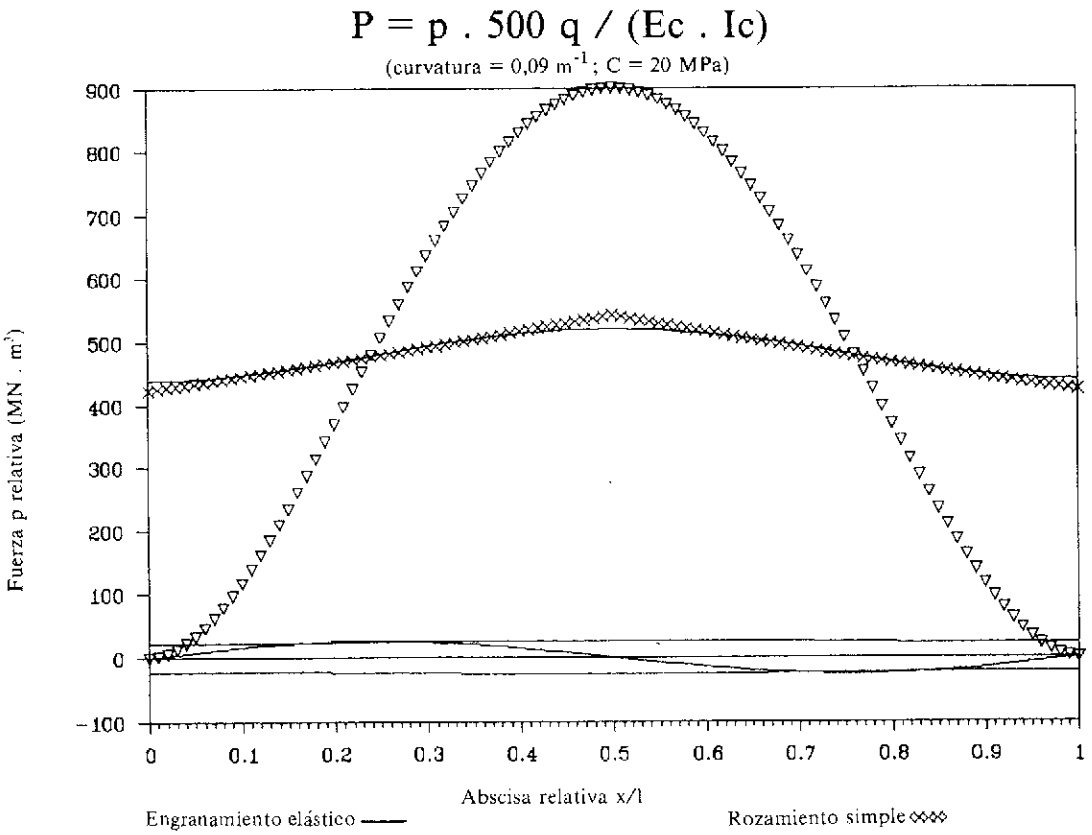
Cuando C es grande, la ley varía mucho porque las pendientes son muy acusadas (valores de P' grandes): sólo en pequeñas zonas, correspondientes a entornos de los puntos en que P' y u se anulan (anclajes y centro en este ejemplo) puede cumplirse la desigualdad $<$ y es posible la vigencia del modelo de engranamiento elástico; en la mayor parte de la estructura rige el de rozamiento simple: aunque, en general, al combinar ambos modelos en el análisis se producen cambios respecto a los cálculos previos de referencia, realmente, en este caso es casi equivalente utilizar en exclusiva el segundo.

De lo anterior puede extraerse la conclusión de que, en la práctica, para los valores normales del rozamiento (y efecto de ondulación) y de las curvaturas en el hormigón pretensado, puede calcularse sólo con el modelo de rozamiento simple, incluso con independencia del valor que C tenga.

De hecho, lo que ocurre es que la curva real P(x) casi coincide con la obtenida para rozamiento simple, la cual se redondea algo en los anclajes (partiendo con pendiente horizontal) y totalmente en el entorno del punto en que u cambia de signo, donde se elimina la discontinuidad. Esto se puede apreciar muy bien en el gráfico adjunto, para lo cual se ha tomado un valor pequeño del coeficiente C (20 MPa) y se ha forzado el de la curvatura a ser muy grande (por supuesto, ya no es en absoluto realista, c = 0,09 m^{-1}): los resultados para ambos modelos coinciden prácticamente, salvo en las zonas citadas.

2. Fase de tesado

En lo que se refiere al tesado, a la vista de todo lo anterior parece claro que las cosas no cambian mucho; en tal sentido, se puede presuponer también que el engranamiento elástico se da solamente en el entorno de los puntos en que u = 0: anclaje opuesto al punto de tesado (o bien, en la práctica, un punto intermedio, si la carga de tesado es pequeña, el rozamiento fuerte y el tendón muy



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

largo, donde se disipan tanto P como u). Lo que hace el engranamiento de esa pequeña zona es, precisamente, permitir la disipación de P, lo que nunca es posible con el rozamiento simple, dada la ley exponencial que posee P para el mismo (la cual se muestra más adelante).

No obstante, desarrollaremos brevemente el análisis de dicha fase con el modelo de *engranamiento elástico.*

Al imponer las condiciones de borde en la solución ya vista, $P(0) = P_{tesado} = P_0$ y $P'(\ell) = 0$, y suponiendo que el tesado moviliza una carga repartida de valor g, se tiene

$$P(x) = \frac{c \cdot g}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c} \left\{ x^4 - 2 \cdot \ell \cdot x^3 + \right.$$

$$+ \left(\ell^2 + \frac{12}{CK}\right) x^2 - \frac{12 \cdot \ell}{CK} \cdot x + \frac{2}{CK} \left(\ell^2 + \frac{12}{CK}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{CK}\,[\exp(\sqrt{CK} \cdot \ell) + \exp(-\sqrt{CK} \cdot \ell)]} \cdot$$

$$\cdot \left[\left\{ \left[p_0 \cdot \sqrt{CK} \cdot \ell^4 - \frac{2}{\sqrt{CK}} \left(\ell^2 + \frac{12}{CK}\right) \right] \cdot \right.\right.$$

$$\left. \cdot \exp(-\sqrt{CK} \cdot \ell) - \frac{12 \cdot \ell}{CK} \right\} \cdot \exp(\sqrt{CK} \cdot x) +$$

$$+ \left\{ \left[p_0 \cdot \sqrt{CK} \cdot \ell^4 - \frac{2}{\sqrt{CK}} \left(\ell^2 + \frac{12}{CK}\right) \right] \cdot \right.$$

$$\left.\left. \cdot \exp(\sqrt{CK} \cdot \ell) + \frac{12 \cdot \ell}{CK} \right\} \cdot \exp(-\sqrt{CK} \cdot x) \right] \Bigg\},$$

donde P_0 se ha reducido a un término adimensional, refiriéndola al factor común de la expresión anterior, tal que $P_0 = p_0 \cdot \frac{c \cdot g \cdot \ell^4}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c}$.

Si se supone que $g = 0$, resulta una expresión más sencilla, cuyos resultados, en general, se aproximan mucho a los anteriores, siendo idénticos prácticamente, en la zona más cercana al origen, para los valores muy grandes y muy pequeños de C. La solución que resulta entonces es

$$P(x) = \frac{P_0}{\exp(\sqrt{CK}.\ell) + \exp(-\sqrt{CK}.\ell)}$$

$$\cdot [\exp(-\sqrt{CK}.\ell) \,.\, \exp(\sqrt{CK}.x) +$$

$$+ \exp(\sqrt{CK}.\ell) \,.\, \exp(-\sqrt{CK}.x)] \cdot$$

Para el modelo de *rozamiento simple*, con los mismos coeficientes anteriores, la solución es (3)

$$P(x) = \frac{c \cdot g}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c} \cdot p_0 \cdot \ell^4 \cdot \exp[-\mu(c + \varphi)\, x],$$

si P_0 se expresa como antes de forma adimensional en función de g, o bien, en todo caso (y siempre que $g = 0$),

$$P(x) = P_0 \cdot \exp[-\mu(c + \varphi)\, x].$$

Al comparar resultados para ambos modelos se confirma lo ya apuntado antes, como puede apreciarse en los gráficos que siguen.

Hay que tener en cuenta que cuando $g \neq 0$, P_0 no es factor común; eso lleva a la necesidad de dar en cada caso un valor concreto a este último parámetro, por lo que no es posible que los resultados sean adimensionales. Por ello, se ha tomado

$$P_0 = 1 \text{ MN} \quad \text{y} \quad p_0 = P_0 / \left(\frac{c \cdot g \cdot \ell^4}{4 \cdot K \cdot E_c \cdot I_c} \right) = 1,$$

con lo cual, manteniendo los valores ya dados a los distintos parámetros ($c = 0{,}01\ m^{-1}$), resulta

$$g = (0{,}002/1600) \cdot E_c \cdot I_c \text{ (en MN/m)}.$$

Por supuesto, si se comparasen exclusivamente los demás resultados, sí sería posible ponerlos en forma adimensional.

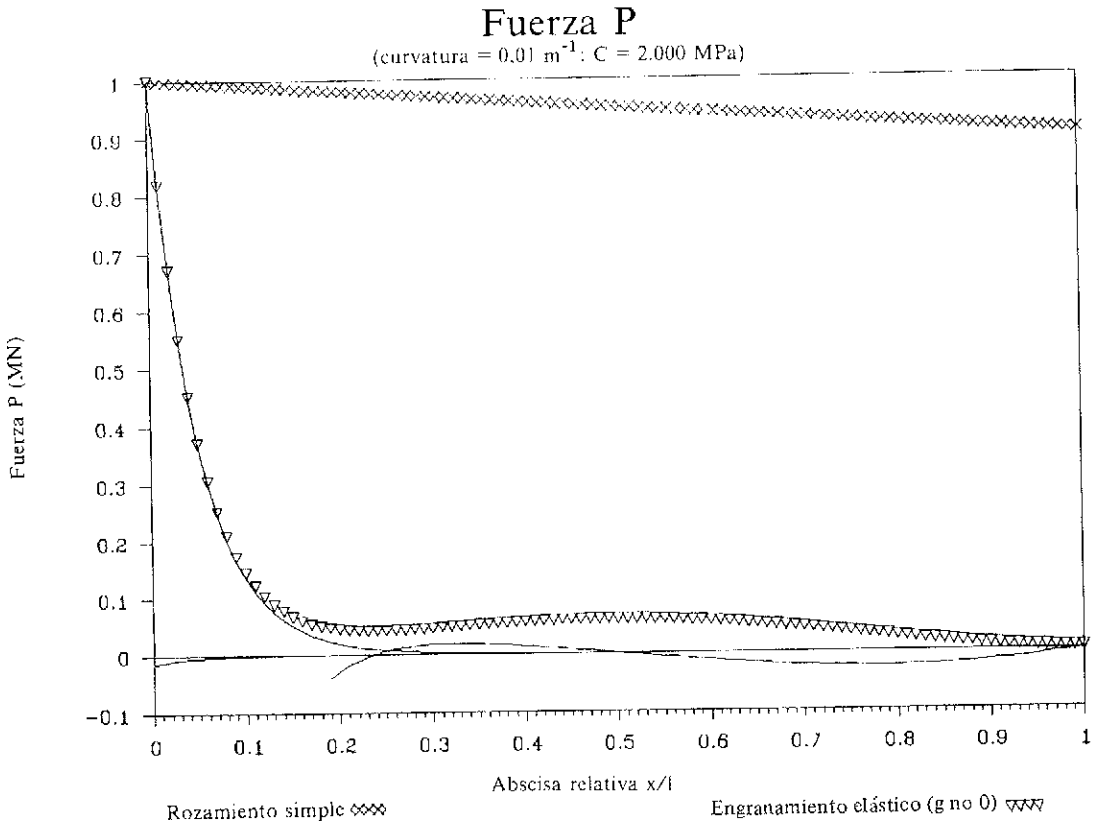
En los gráficos, los resultados ligados al engranamiento elástico con la hipótesis $g = 0$, se muestran en línea continua. En su zona inferior, también en línea continua (y a una escala propia, no indicada), se hallan las curvas que, para los resultados del modelo de engranamiento elástico con $g \neq 0$, corresponden a $P'(x)$ (a $u(x)$, con otra escala) y a $0{,}25 \cdot P(x) \cdot (c + 0{,}01)$, con el mismo objeto: poder conocer, en principio, las zonas en que deja de ser válido dicho modelo (donde se cumple $|P'(x)| > 0{,}25 \cdot P(x) \cdot (c + 0{,}01)$).

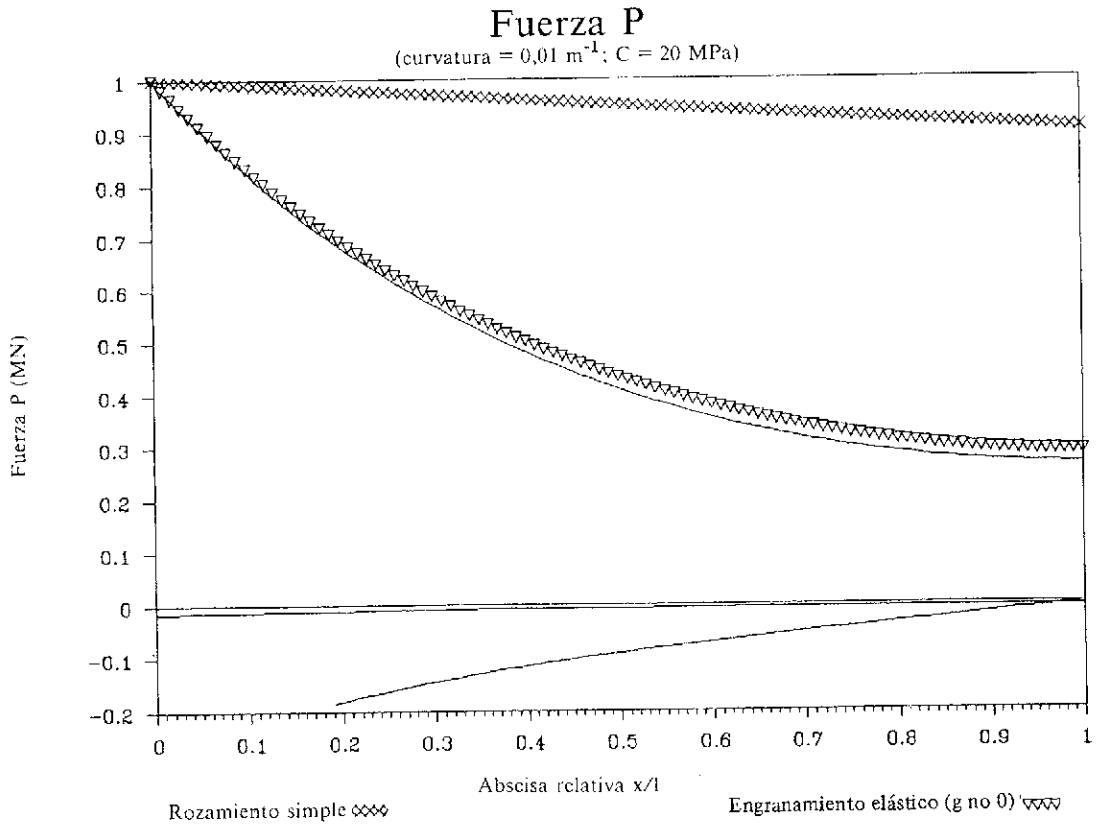
Así, para C = 2000 MPa, rige el rozamiento simple, siendo todavía muy patente el efecto de la carga g en el correspondiente caso para engranamiento elástico.

Para C = 20 MPa, continúa imperando el rozamiento simple, pero el efecto de la carga g en su caso de engranamiento elástico es ya poco apreciable.

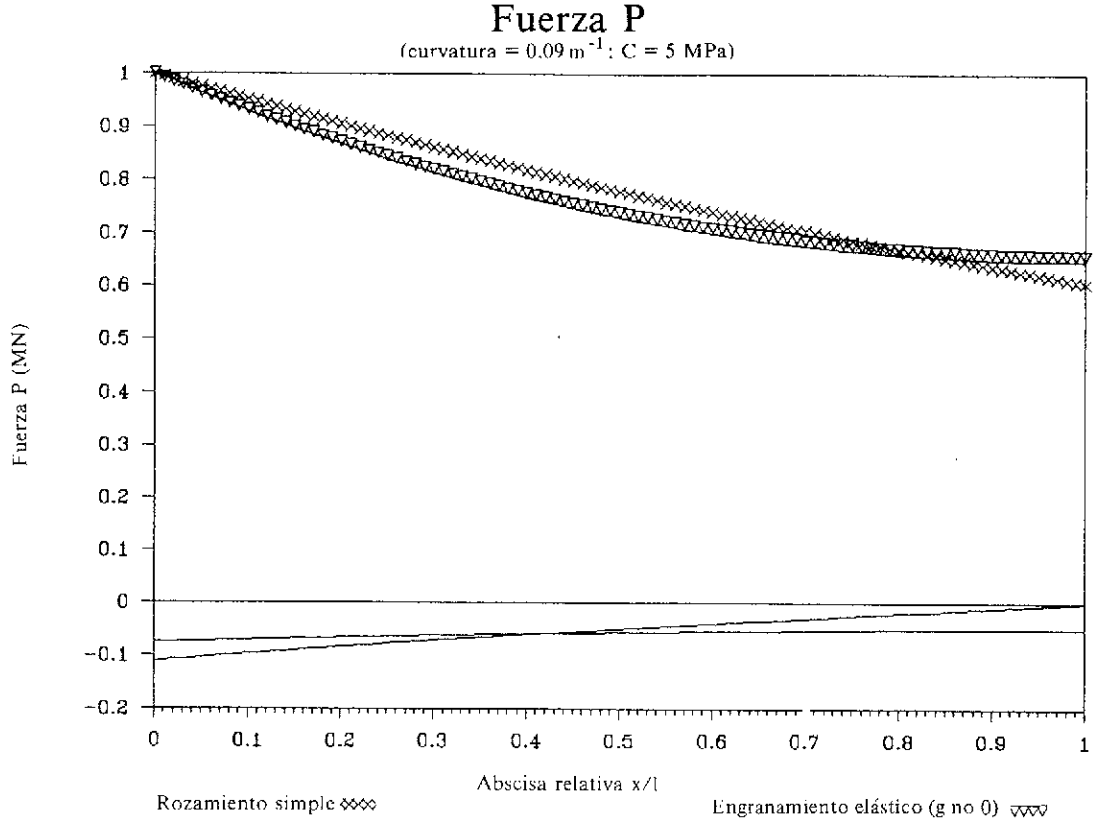
Sin embargo, para C = 5 MPa y $c = 0{,}09\ m^{-1}$, valor éste muy grande y nada realista, y manteniendo los valores anteriores de P_0 y p_0 (con lo que g se modifica), se tiene ya una situación en la que el engranamiento elástico rige en buena parte de la estructura, pudiéndose fácilmente deducir sobre la figura cuál será la curva real.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026





Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



La clave de todo esto se halla en los valores de los exponentes de las distintas expresiones. mientras $\sqrt{CK} >> \mu\,(c + \varphi)$, prácticamente impera el rozamiento simple (salvo en una pequeña zona del extremo en que $u = 0$); cuando $\sqrt{CK}$ y $\mu\,(c + \varphi)$ son del mismo orden de magnitud, entra ya una zona significativa en el dominio del engranamiento elástico, zona que se extiende gradualmente en la medida en que se va invirtiendo la desigualdad anterior.

Con los pequeños valores, tanto del rozamiento y de la ondulación como de las curvaturas, que son normales en el hormigón pretensado, se produce la primera situación citada, siendo casi imposible en la práctica que ambos factores puedan tener el mismo orden de magnitud; a no ser que K tenga un valor bajísimo, lo que sólo puede darse si el área de los tendones A_p (que aquí es la que se tesa a la vez) es muy fuerte, cosa poco verosímil. Ello es así porque, al mismo tiempo, la rigidez de la interacción (esto es, el valor de C) en estas estructuras, aunque puede variar enormemente, siempre se mantiene suficientemente alta con relación al coeficiente de rozamiento.

Comentarios finales

Aunque basados en un caso particular, los resultados obtenidos parecen bastante concluyentes de cara a, generalizando su interpretación (lo que ya se ha tratado de hacer con esa perspectiva), mantener al menos sus conclusiones fundamentales. Ello no es ajeno a que aquél recoge los suficientes elementos relevantes y generales de la técnica en estudio; no siendo, por ejemplo, una limitación al efecto el hecho de que la estructura estudiada sea isostática (3).

Como se ha visto, estas estructuras de hormigón pretensado, en la práctica, *pueden calcularse sólo con el modelo de rozamiento simple;* para el caso general en servicio ello es cierto incluso con independencia del valor que pueda tener el coeficiente C, porque o bien impera casi en exclusiva dicho modelo o, si no es así, los resultados para engranamiento elástico se acercan mucho a los del anterior. Por todo ello, nos remitimos al trabajo anterior antes aludido.

Hablando en términos más generales, todo lo visto anteriormente viene a indicar que la vigencia del engranamiento elástico está totalmente ligada a su rigidez y al valor umbral del rozamiento simple (función del rozamiento y de las curvaturas de los tendones). Así, en la medida en que sea alta la primera y bajo el segundo, los desplazamientos relativos u requeridos (bien, en servicio, por la deformación de la estructura o, en tesado y destesado, directamente por la de los propios tendones) no pueden darse con este mecanismo si no es con grandes fuerzas tangenciales t, por lo que en seguida se da entrada al de rozamiento simple, donde además el deslizamiento es libre; y viceversa.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

CONCLUSION

A la cuestión de qué puede ocurrir antes del deslizamiento con rozamiento en el contacto hormigón-tendón, para las estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes, puede responderse que se produce siempre un mecanismo de engranamiento elástico más o menos acusado.

El comportamiento de la interacción, desde que no existen desplazamientos relativos ni tensiones tangenciales, hasta el deslizamiento con rozamiento, queda establecido al combinar ambos mecanismos; y ello sobre la base de la relación t–u, que resulta así de tipo elasto-plástico.

La formulación global del análisis estructural en el hormigón pretensado, para las técnicas adherente y no adherente, que fue establecida en otro lugar (3), podría ser, por tanto, enriquecida incorporando el modelo de engranamiento elástico cuando sea de aplicación. No obstante, ello no es necesario en la práctica.

En efecto, una vez planteado el análisis estructural con el modelo de engranamiento elástico, se ha desarrollado un ejemplo muy sencillo que permite mostrar, de forma concreta, resultados con dicho modelo y establecer las zonas en que el mismo no puede darse, debiendo combinarse con el de rozamiento simple; los resultados con este último también se muestran, al igual que los que se obtendrían con la hipótesis de perfecta adherencia para la técnica adherente. De todo ello se concluye que el cálculo de estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes puede hacerse empleando sólo el modelo de rozamiento simple; lo que hace el engranamiento elástico es, precisamente, eliminar las discontinuidades obtenidas con aquél, sin modificar apenas lo demás, puesto que los cambios afectan a zonas mínimas.

En consecuencia, la formulación citada, tal como quedó expuesta en su lugar (3), normalmente viene a ser suficiente en la práctica para el análisis de tales estructuras, sabiendo sin más el efecto cualitativo que sobre sus resultados produce el engranamiento elástico; aunque siempre puede ampliarse con lo estudiado más arriba cuando ello sea preciso.

De todas formas, lo visto aquí amplía el campo de actuación, porque proporciona una base teórica y unas pautas prácticas que permiten estudiar estructuras similares con otros materiales; en particular, aquéllas cuya interacción sea relativamente flexible y con alto rozamiento, donde el engranamiento elástico pueda tener gran incidencia y deba ser explícitamente considerado.

Básicamente, cambiando la relación t–u de forma que se plasmara en ella la amplia fase en que existe adherencia perfecta, sería posible incluso extrapolar todo lo anterior, normalmente ya con un análisis no lineal, a la *técnica adherente* en las fases en que la adherencia comienza a fallar y se producen ciertos deslizamientos; y ello tanto para las estructuras de hormigón pretensado como para las de hormigón armado, ya que la formulación global, que se aplica por incrementos para las diversas etapas o fases (3), es general: el hormigón armado es, a estos efectos, un caso particular de la técnica adherente en el que, habiendo adherencia desde un principio y no existiendo fase de tesado, la fuerza P es inicialmente nula en toda la estructura (1). Lo que sucede es que esto no tiene casi nunca interés práctico, porque precisamente se proyecta para que las estructuras de hormigón no fallen por adherencia y, por tanto, en el análisis siempre se cuenta con ella; sin embargo, podría tener interés en algún caso especial (por ejemplo, en la evaluación de la seguridad de una estructura donde se hayan producido tales fallos) y, en general, siempre que se requiera afinar mucho el análisis.

REFERENCIAS

1. MURCIA, J. *Fundamentos para el análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado.* Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 1987.

2. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. *EH-88: Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado.* Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid, 1988.

3. MURCIA, J. Formulación global para el análisis de estructuras de hormigón pretensado con tendones adherentes y no adherentes. *Hormigón y Acero* nº 172 (pp. 59-71). Madrid, 1989.

RESUMEN

En principio, este trabajo trata de responder a la pregunta de qué ocurre, en las estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes, antes de que el tendón comience a deslizar libremente, aunque con rozamiento, respecto a su conducto; a lo que puede responderse que se da un mecanismo de engranamiento elástico.

El comportamiento de la interacción, desde que no existen tensiones hasta el deslizamiento con rozamiento, queda establecido al combinar ambos mecanismos: se tiene una relación t–u (fuerza tangencial unitaria - desplazamiento relativo) de tipo elasto-plástico; ésta resulta más adecuada que la de tipo rígido-plástico (que combina la situación de perfecta adherencia con la de rozamiento simple).

Una vez planteado el análisis estructural con el modelo de engranamiento elástico, se desarrolla un ejemplo sencillo (viga simple) que permite mostrar resultados con dicho modelo y delimitar las zonas en que el mismo no puede darse, debien-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

do combinarse con el de rozamiento simple; también se ofrecen los resultados para este último y para perfecta adherencia. De ello se concluye que, en la práctica, el análisis de estas estructuras puede hacerse empleando sólo el modelo de rozamiento simple; lo que hace el engranamiento elástico es, precisamente, eliminar las discontinuidades obtenidas con aquél, modificaciones que afectan a zonas mínimas.

Se llega así a disponer de una base adecuada para poder estudiar estructuras similares con otros materiales, en particular aquéllos cuya interacción implique una mayor incidencia del engranamiento elástico, debiendo ser explícitamente considerado. E incluso, cambiando la ley t–u de forma que se plasme en ella la fase con adherencia, es posible extrapolar todo lo anterior a la técnica adherente (incluyendo en ella el hormigón armado), cuando la adherencia comienza a fallar y se producen ciertos deslizamientos; ello puede interesar en algún caso especial (por ejemplo, en la evaluación de la seguridad de una estructura con tales fallos) y, en general, siempre que se requiera afinar el análisis.

SUMMARY

In principle, this paper tries to answer to the question of what happens before the tendon begins a free sliding with friction, relatively to the duct, in unbonded prestressed concrete structures; for that, an 'elastic locking' mechanism can be proposed.

Combining both mechanisms, elastic locking and simple friction, on the basis of a t–u (unit tangencial force –relative displacement) relationship, an elasto-plastic model is got, more suitable than the rigid-plastic one (perfect bond and simple friction).

Structural analysis with this model has been set; and also a simple beam example has been solved for having practical results and getting the zones in which this model is no more valid and simple friction model must be used; results for this last one and for perfect bond hypothesis are also shown. It is concluded that, in practice, structural analysis can be only based on the simple friction model; its results are just lightly modified in discontinuity zones.

Then, a general basis for studing structures composed by other materials is reached; in particular, those having such a interaction that elastic locking has already a wider incidence and must be explicitely considered. And even, changing the t–u law, bonded structures (including reinforced concrete ones) can be also studied in phases in which bond tends to fail; for instance, in cases of safety re-evaluation after a bond fault and others concerning refined structural analysis.

* * *

V Edición de Riabitat

Durante los días 24 a 27 de mayo de 1990, se celebrará, en Génova (Italia), la "V Edición de Riabitat", dedicado a los temas "Recuperación, Reestructuración y Mantenimiento en la edificación" "Economía de energía en edificación" y "La accesibilidad urbana y la abolición de las barreras arquitectónicas".

Conviene destacar el interés de estos temas, en relación con los cuales presentarán colaboraciones la Asociación de Ingenieros y Arquitectos especializados en el campo de la restauración de monumentos y el Beta-Gamma de Roma. Recogiendo numerosas e insistentes peticiones, a nivel social y político, se afrontará el problema que ocupa el primer plano de la actualidad, relativo a la necesidad de tener en cuenta las exigencias de las personas afectadas, tanto por las nuevas construcciones como por la recuperación y reestructuración de las antiguas. En las Comunicaciones que se van a presentar, se comentarán las normas italianas relativas a este problema, comparándolas con las vigentes en los demás países europeos. Se prevé la entrega a los participantes, de un volumen que incluye toda la legislación actual sobre este tema, los textos de las Comunicaciones presentadas y un exhaustivo comentario de las mismas. Este volumen constituirá sin duda un instrumento de trabajo de gran utilidad.

Los interesados en participar en estas reuniones, deberán ponerse en contacto con:

RIABITAT
Feria Internacional de Génova
GENOVA (Italia)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

SMOPYC

6. SALON INTERNACIONAL DE MAQUINARIA PARA OBRAS PUBLICAS, CONSTRUCCION Y MINERIA

- AIRE COMPRIMIDO, PERFORACION, SONDEOS, PILOTAJE.
- CENTRALES DE HORMIGON, GRAVA-CEMENTO, ASFALTO. MACHAQUEO Y CLASIFICACION.
- MAQUINARIA PARA MOVIMIENTO DE TIERRAS. EXCAVACION.
- COMPACTACION. VIBRACION.
- MAQUINARIA DE ELEVACION Y TRANSPORTE APLICADA A OBRAS.
- MAQUINARIA Y UTILLAJE PARA PREFABRICADOS.
- MAQUINARIA Y EQUIPOS PARA MINERIA.
- VARIOS.

16. 20. - 02 - 1990

ZARAGOZA ESPAÑA

FERIA DE ZARAGOZA

IBERIA

ICEX
INSTITUTO ESPAÑOL DE COMERCIO EXTERIOR

Carretera Nacional II, Km. 311 • E 50012 ZARAGOZA
Teléfono (976) 70 11 00 * • Telex 58185 FEMU E
Fax (976) 33 06 49 • P.O. Box, 108 • E 50080 ZARAGOZA

SMOPYC 88

681 expositores
españoles 339
extranjeros 342

41.329 visitantes
españoles 39.467
extranjeros 1.862
de 35 países

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Un procedimiento para medir las deformaciones de origen térmico en morteros de cemento y en morteros de resina epoxi

Ernesto Muelas Valdeolivas
Laboratorio Central de Estructuras y Materiales del CEDEX

1. INTRODUCCION

Desde que se introdujeron las resinas epoxi en el ramo de la construcción, hace una treintena de años, el uso de las mismas ha ido incrementándose año tras año, debido a la gran variedad de utilizaciones, dentro de esta industria, por sus magníficas propiedades de adherencia al acero u hormigón, su gran resistencia a los agentes de tipo químico, donde morteros y hormigones de cemento tienen un fracaso más o menos claro, y sus muy probadas propiedades mecánico-resistentes.

Una de sus primeras aplicaciones es la confección de morteros epoxi para la reparación de estructuras en puentes de carreteras.

Cuando, evaluadas las distintas circunstancias de un caso particular, se decide utilizar un mortero de resina epoxi, es conveniente conocer, no solo sus características mecánico-resistentes, sino más bien la compatibilidad de comportamiento entre el material estructural y el de reparación, en lo referente a las deformaciones frente a distintas solicitaciones. Es decir, compatibilidad entre las deformaciones producidas por solicitaciones mecánicas, térmicas e higrométricas, sobre todo teniendo en cuenta el rango de valores en que ellas se vayan a producir en la estructura que se trate. Por tanto, será importante para estos estudios conocer las condiciones de servicio de la estructura, así como las medioambientales del lugar donde se encuentre.

Dicha compatibilidad se verificará si las tensiones originadas en la interfase de ambos materiales, por su distinta deformación frente a las solicitaciones antes aludidas, son inferiores a la capacidad adherente existente entre los dos materiales.

De todo lo anterior, inferimos que se hace necesario determinar esas características, si pretendemos enjuiciar el problema de la reparación de una manera tecnológica aceptable.

La determinación del comportamiento mecánico-resistente de estos materiales se realiza mediante ensayos normalizados, sin mayores problemas, debido a la gran experiencia que se posee de ellos en casi todos los laboratorios del ramo, salvo algunas pruebas, como la de fluencia, para las que se requieren instalaciones especiales.

No se puede decir lo mismo sobre los ensayos necesarios para conocer las variaciones de longitud o volumen producidas por gradientes térmicos o higrotérmicos.

Por ello, y tratando de atender, lo mejor posible, una solicitud al respecto del Servicio de Puentes y Estructuras, de la Dirección General de Carreteras del MOPU, el Laboratorio Central de Estructuras y Materiales del CEDEX ha puesto a punto un procedimiento de ensayo que, a la vista de los resultados obtenidos, parece ser satisfactorio en aspectos tales como sencillez, reproducibilidad y precisión.

2. DESCRIPCION DE LOS ENSAYOS

2.1. Determinaciones previas

Dado que no teníamos experiencia en estos ensayos, se realizaron una serie de pruebas previas tendentes a conocer, por un lado, el sistema que debíamos seguir para medir las deformaciones sin introducir errores inherentes al procedimiento operatorio y, por otro, la temperatura inicial a la que deberíamos calentar o enfriar las probetas, para disponer de unos gradientes más o menos próximos a los prefijados en cada ensayo.

Para valorar los posibles errores en la medida de las deformaciones, se hicieron dos series de medidas:

La primera consistió en ir colocando sucesiva-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

mente cada una de tres de las probetas, objeto de ensayo, en el aparato de medida y tomar las lecturas. Seguidamente, se volvieron a medir en el mismo orden, en igual posición y por el mismo operario, anotando las nuevas tres lecturas.

La segunda serie de medidas se realizaron por el mismo operario y de forma enteramente análoga a la anterior, pero con las probetas colocadas en posición invertida.

Los valores obtenidos, así como las diferencias entre los correspondientes a una misma probeta, pueden verse en los cuadros siguientes:

Primera serie de lecturas en el reloj comparador del retractómetro

Lecturas, en μm

Probeta	1er Ensayo	2° Ensayo	Diferencias
1	1568	1566	2
2	1600	1600	0
3	1716	1708	8

Segunda serie de lecturas (probetas en posición invertida)

Lecturas, en μm

Probeta	1er Ensayo	2° Ensayo	Diferencias
1	1678	1673	5
2	1713	1709	4
3	1651	1653	2

Diferencias máximas obtenidas entre los cuatro valores de cada probeta

Lecturas, en μm

Probeta	Máxima	Mínima	Diferencia
1	1678	1566	12
2	1713	1600	113
3	1716	1651	65

De estas pruebas obtuvimos dos conclusiones: la primera fué que a nuestros retractómetros les debíamos poner algo para que la posición de la probeta fuese estable, y la segunda fué en relación con la forma de hacer el ensayo. Este debería realizarse de manera tal que no hubiese que manipular las probetas entre lecturas consecutivas.

Así, atendiendo a la primera de las conclusiones, se dotó a los retractómetros de una chapa de latón muy fina (0,2 mm de espesor), con una perforación en el centro de igual diámetro que el del índice de acero inoxidable de las probetas (foto 1). Esta chapa permite los movimientos según el eje vertical, en el pequeño rango en el que aquellos se producen, y los impide en el plano horizontal.

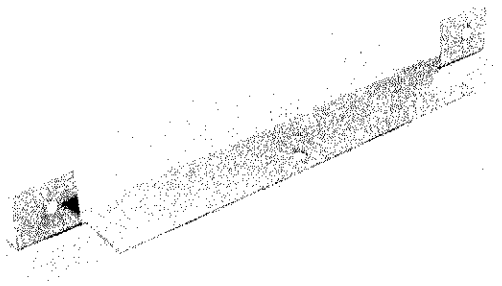


Foto 1.

Respecto a la segunda conclusión, comentaremos que condicionó la manera de realizar el ensayo, en el sentido de tomar la temperatura ambiente como temperatura final; tanto si calentabamos las probetas como si las enfriabamos. Es decir, que para obtener un ciclo de enfriamiento no tomabamos la temperatura ambiente como inicial y como temperatura final la que resultase después de introducirlas en un congelador, sino que calentabamos las probetas, en una estufa, hasta una temperatura superior a la ambiental, se montaban en los retractómetros situados en la sala de ensayo, y se iban tomando lecturas desde ese momento hasta que la temperatura de las probetas igualaba a la de la sala de ensayo, sin necesidad de mover las probetas de su posición inicial.

En relación con sl segundo objetivo, antes enunciado, se realizaron, con la probeta de mortero normalizado preparada para medir temperaturas, las tres pruebas descritas en el apartado siguiente. Las dos primeras fueron de enfriamiento y la tercera de calentamiento y los resultados obtenidos se pueden ver representados en las figuras 1 y 2.

De la observación de dichos gráficos se deduce que si pretendemos estudiar el fenómeno de variaciones de longitud, originadas por gradientes térmicos del orden de ± 40°C, respecto a la temperatura ambiente, hay que calentar o enfriar las probetas unos 15 grados más de los indicados por dichos gradientes, contando con trasladarlas en una caja aislante, desde la estufa o el congelador a la sala de ensayo, y con que el tiempo requerido, para dicho traslado y el montaje total, para estar en disposición de medir, sea de unos 10 minutos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

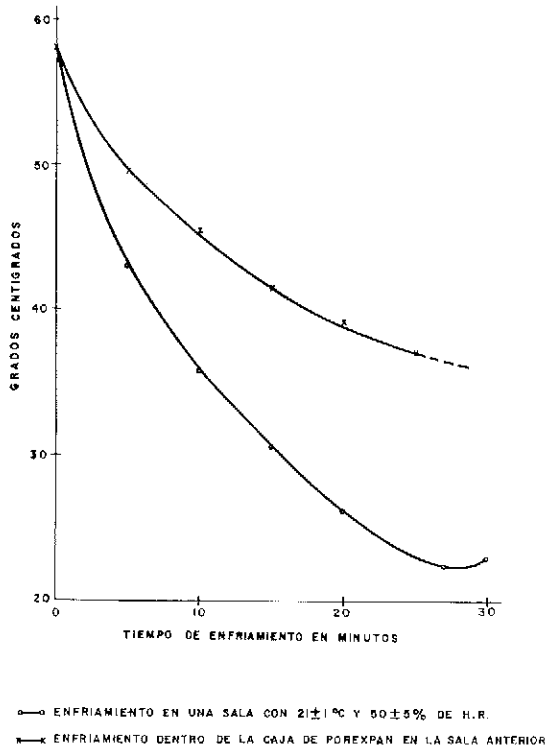


Fig. 1.

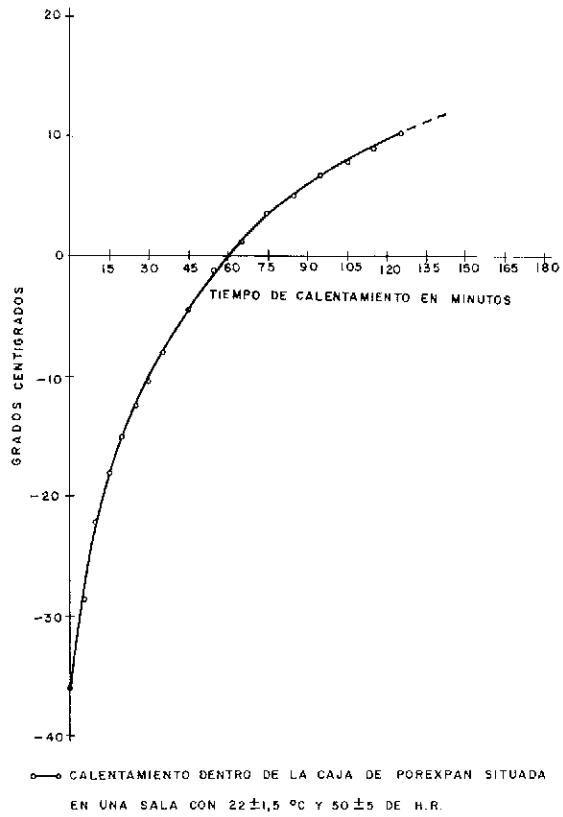


Fig. 2.

2.2. Probetas utilizadas

Para la realización de estos ensayos se han utilizado doce probetas prismáticas, de 25x25x285 mm, aproximadamente; ocho de ellas, remitidas desde una obra, en dos envios en fechas diferentes, eran de un mortero de resina similar al utilizado en la reparación de una estructura de dicha obra, y las cuatro restantes, se fabricaron en este Laboratorio con mortero normal (RC-75), hecho con cemento P-450-ARI.

Por lo tanto, de cada muestra de mortero dispusimos de cuatro probetas, tres de ellas (foto 2), dotadas de unos índices de acero inoxidable en sus extremos, para medir las variaciones de longitud correspondientes a las distintas temperaturas de ensayo, y la cuarta (foto 3) con un termopar de hierro constantan, embutido en el centro geométrico de la probeta, para medir la temperatura de la misma, al tiempo que se tomaban las longitudes de las anteriores.

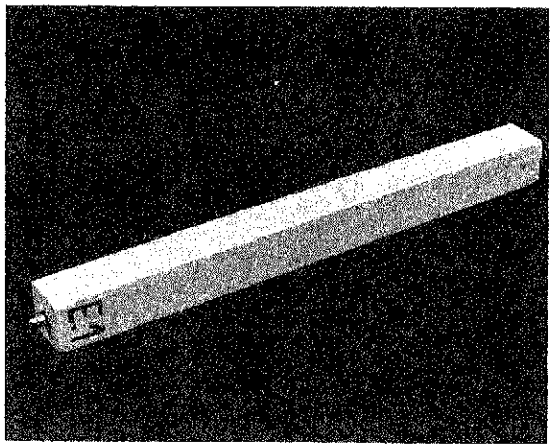


Foto 2.

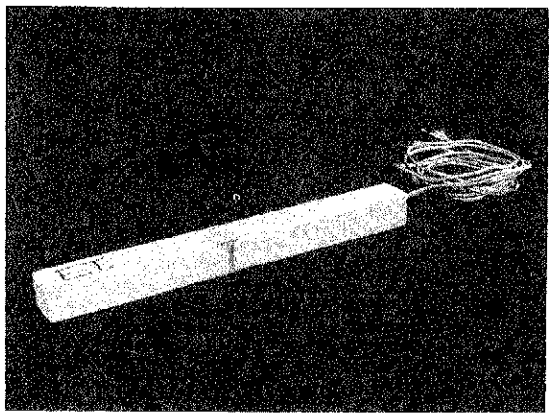


Foto 3.

La colocación del termopar se hizo durante la fabricación de la probeta, en el caso de la de mortero normal, y practicando un taladro adecuado que, posteriormente, se rellenó con el termopar y mortero epoxi, en el caso de las probetas de mortero de resina.

2.3. Metodología de trabajo

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Previamente a los ensayos, las probetas de mortero normalizado se curaron, durante 15 días, en las condiciones que cita el RC-75; es decir, 24 horas en sus moldes, en una cámara a 21 ± 2°C y 95 ± 5 por 100 de humedad relativa, y sumergidas en agua potable a 21 ± 1°C, durante los días siguientes.

Posteriormente, todas las probetas, las de mortero normalizado (en adelante probetas "N") y las de mortero de resina epoxi (en lo sucesivo probetas "E-1" y "E-2"), se desecaron hasta constancia de peso, en una estufa con ventilación forzada y 75 ± 5°C.

Por último, se realizaron los ensayos que hemos denominado de "contracción y dilatación térmica", de forma alternativa y comenzando en ese orden.

El ensayo de "contracción térmica" consiste en lo siguiente:

Las probetas se introducen en una estufa cuya temperatura se encuentra a 75°C, aproximadamente, manteniéndolas dentro de ella durante 23 ± 1 horas, tiempo sobrado para que la temperatura de las mismas, medida mediante los termopares, se haya estabilizado e igualado con la de la estufa.

Seguidamente, se sacan de la estufa, se introducen en una caja aislante (de porexpán) y se trasladan a una sala de ensayo, cuya temperatura y humedad relativa controladas (figura 3), son de 21,5 ± 1,5°C y 50 ± 5 por 100, donde se encuentran los equipos de medida de longitud y temperatura (fotos 4 y 5).

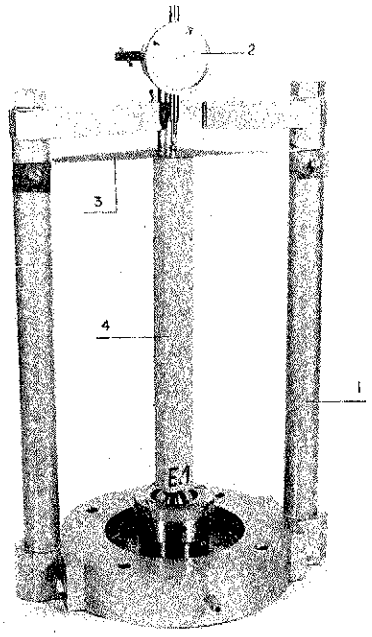
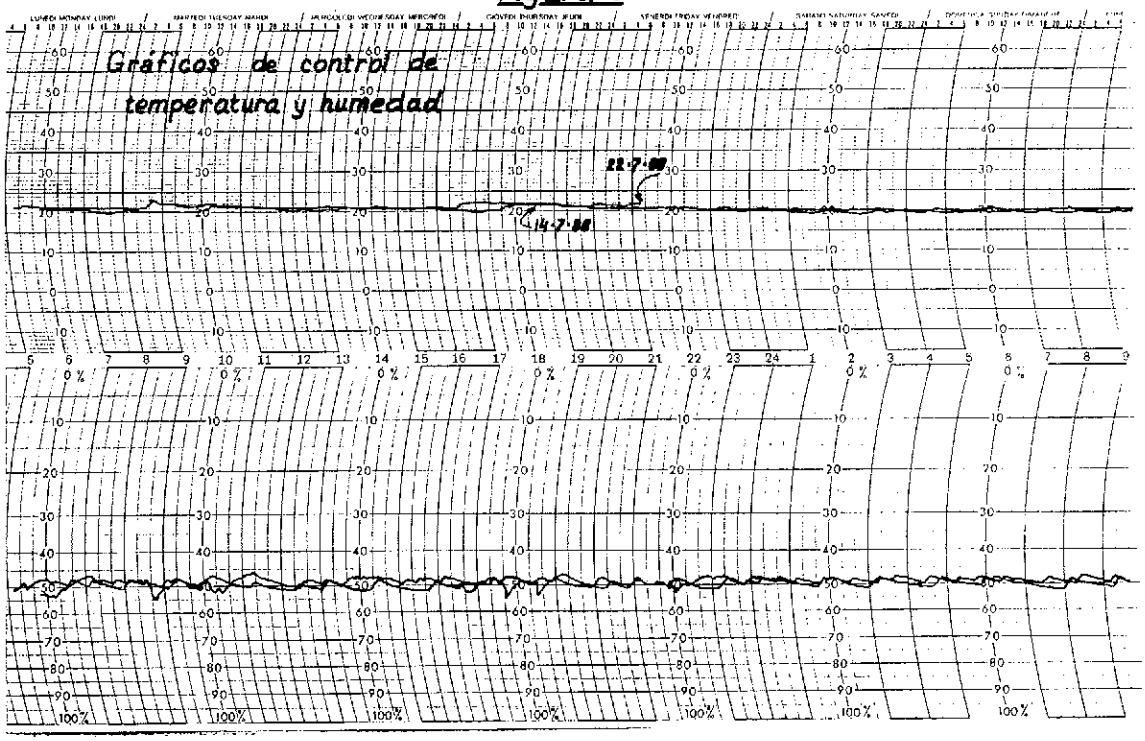


Foto 4. Equipo para la medida de las variaciones de longitud.
1.— Bastidor para medida de deformaciones.
2.— Reloj comparador de 0,001 mm de apreciación.
3.— Chapa de hoja de lata, de 0,2 mm de espesor, utilizada para inmovilizar lateralmente la probeta durante el proceso de medida.
4.— Probeta objeto de ensayo.

Figura 3



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

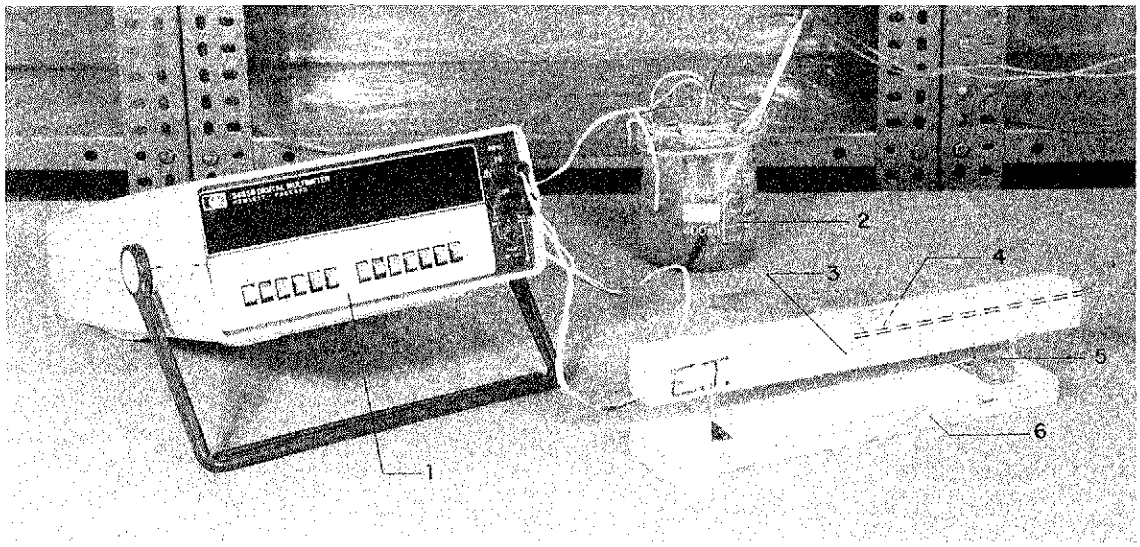


Foto 5. Equipo para la medida de las variaciones térmicas en el interior de las probetas.
1.– Multímetro digital utilizado para medir mV. 2.– Vaso de pyres conteniendo hielo fundente, cubetas con mercurio para termopares y termómetro de vigilancia del 0°C. 3.– Probeta objeto de ensayo. 4.– Extremo del termopar. 5.– Cuchillas para el apoyo de la probeta. 6.– Base de madera del apoyo de la probeta.

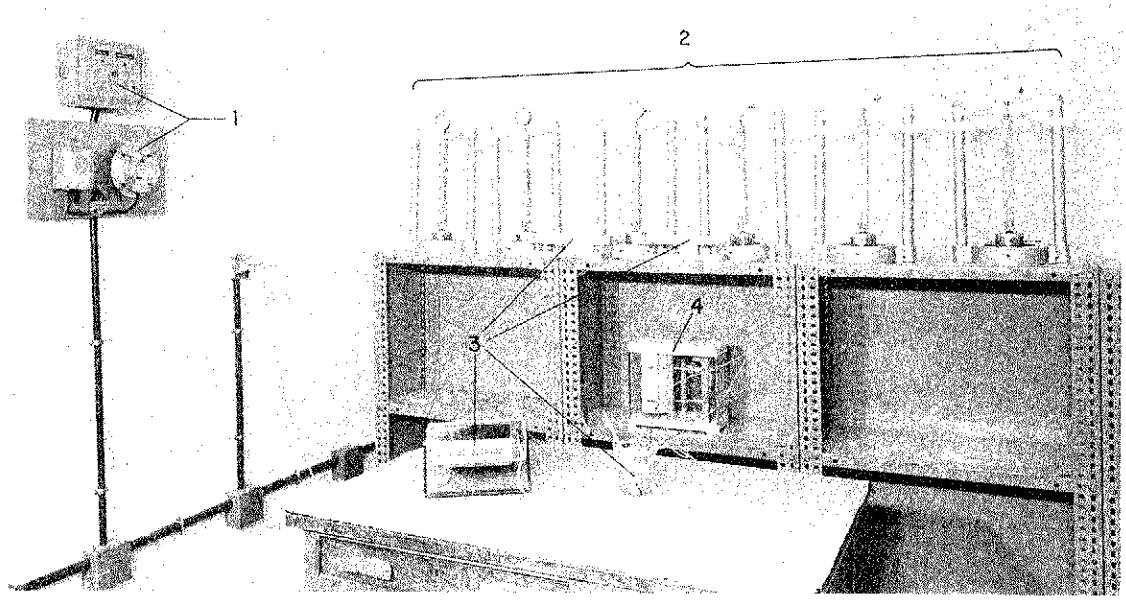


Foto 6. Ensayo de variación de longitud en función de la temperatura.
1.– Elementos para la regulación y control automático de la humedad relativa y temperatura de la sala de ensayo. 2.– Equipos para medir las variaciones de longitud. 3.– Equipo para medir las variaciones de temperatura en el interior de las probetas. 4.– Termohigrógrafo para el registro de humedad y temperatura de la sala de ensayo.

A continuación, se instalan las probetas en sus respectivos equipos de medida y comienza el ensayo, propiamente dicho, leyendo simultáneamente las temperaturas y las correspondientes variaciones de longitud, repitiéndose ambas lecturas, a intervalos de tiempo, hasta que la temperatura de las probetas es la de la sala de ensayo. Además, en nuestro caso, dimos una última lectura al día siguiente, a las 21 ± 3 horas de haber comenzado la prueba.

El ensayo de "dilatación térmica" se realiza de forma análoga al anterior, pero partiendo de las probetas enfriadas durante 3 horas en un congelador a –35°C, aproximadamente.

En la fotografía número 6 pueden verse los distintos elementos durante el proceso de ensayo.

2.4. Valores obtenidos

Siguiendo el proceso operatorio descrito en el apartado anterior, se realizaron tres ensayos de "contracción" y otros tantos de "dilatación", con las probetas "N" y "E-1", y dos ensayos de cada tipo con las probetas "E-2".

Los valores obtenidos figuran en las tablas siguientes:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 1

Probetas "N"

Ensayo de contracción térmica

Prueba 1					Prueba 2					Prueba 3				
Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})
0	53,2	0	0	–	0	59,6	0	0	–	0	61,8	0	0	–
13,5	34,3	18,9	−79	1,42	4	48,8	-10,8	−42	1,32	5	50,5	−11,3	-44	1,32
28,5	27,1	−26,1	-107	1,39	14	38,0	−21,6	81	1,27	15	39,3	22,5	−94	1,42
43,5	24,1	−29,1	−118	1,38	34	28,5	−31,1	−114	1,24	30	30,4	-31,4	125	1,35
58,5	23,2	−30,0	121	1,37	44	26,0	33,6	−119	1,20	45	27,2	-34,6	−134	1,31
93,5	22,0	−31,2	−126	1,37	54	24,8	−34,8	−121	1,18	60	25,4	−36,4	138	1,29
178,5	21,2	−32,0	127	1,35	144	22,8	36,8	−122	1,12	135	23,4	−38,4	−137	1,21
1295	20,8	−32,4	−130	1,36	264	23,0	−36,6	-117	1,08	205	23,8	−38,0	-134	1,20
					1395	22,4	37,2	−96	0,87	1430	22,4	-39,4	−110	0,95
Valor medio de α				1,38	Valor medio de α				1,16	Valor medio de α				1,26

Ensayo de dilatación térmica

Prueba 1					Prueba 2					Prueba 3				
Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})
0	−6,0	0	0	–	0	17,9	0	0		0	16,6	0		
4,5	+0,3	6,3	23	1,24	5	−7,7	10,2	35	1,16	5	−8,6	8,0		
8	8,4	14,4	52	1,22	15	+6,6	24,5	91	1,26	25	+14,4	31,0		
18	14,2	20,2	74	1,24	25	13,3	31,2	117	1,27	40	17,8	34,4		
31	18,5	24,5	90	1,24	35	16,5	34,4	129	1,27	55	18,8	35,4		
46	20,8	26,8	101	1,28	55	18,9	36,8	139	1,28	175	21,4	38,0		
76	21,4	27,4	102	1,26	120	21,3	39,2	146	1,26	235	22,0	38,6		
1190	21,2	27,2	97	1,21	240	22,4	40,3	147	1,24	285	21,6	38,2		
					1400	21,4	39,3	137	1,18	1440	21,6	38,2		
Valor medio de α				1,24	Valor medio de α				1,24	Valor medio de α				

ANULADO POR ERROR

EN MANIPULACION

TABLA 2

Probetas "E-1"

Ensayo de contracción térmica

Prueba 1					Prueba 2					Prueba 3				
Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})
0	54,7	0	0		0	60,9	0	0	–	0	66,7	0	0	–
15	32,6	−22,1	79	1,21	5	51,4	−9,5	-43	1,53	5	54,7	12,0	−49	1,38
30	26,1	-23,6	−107	1,27	15	39,5	−21,4	88	1,39	15	38,8	−27,9	99	1,20
45	23,8	−30,9	118	1,30	35	28,7	−32,2	-122	1,28	30	30,5	36,2	−130	1,22
60	23,0	−31,7	-122	1,31	45	26,1	−34,8	128	1,23	45	27,0	−39,7	-140	1,20
95	22,0	−32,7	125	1,30	55	24,8	-36,1	- 131	1,23	60	25,3	41,4	-145	1,19
180	21,4	-33,3	−125	1,27	180	22,6	-38,8	- 134	1,19	135	23,2	−43,5	−146	1,14
1295	21,0	-33,7	- 124	1,25	285	22,6	- 38,1	-132	1,17	205	23,6	−43,1	145	1,14
					1395	22,4	−38,5	−119	1,05	1430	22,2	44,5	-131	1,00
Valor medio de α				1,27	Valor medio de α				1,26	Valor medio de α				1,18

Ensayo de dilatación térmica

Prueba 1					Prueba 2					Prueba 3				
Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T}$ (°C^{-1} x 10^{-5})
0	−7,2	0	0	–	0	18,4	0	0	–	0	-21,7	0		
3	−2,0	5,2	18	1,18	5	-8,1	10,3	38	1,25	5	-11,7	10,0		
8	+6,6	13,8	48	1,18	15	+5,8	24,2	90	1,27	25	+13,7	35,4		
18	13,7	20,9	72	1,17	25	12,1	30,5	114	1,27	40	17,2	38,9		
31	18,4	25,6	87	1,15	35	15,6	34,0	125	1,25	55	18,4	40,1		
46	21,2	28,4	99	1,18	55	18,7	37,1	135	1,23	175	21,0	42,7		
76	21,6	28,8	100	1,18	120	21,3	39,7	142	1,21	235	21,6	43,3		
1190	21,2	28,4	100	1,19	180	21,8	40,2	143	1,20	285	21,4	43,1		
					1400	21,2	38,6	140	1,23	1440	21,4	43,1		
Valor medio de α				1,18	Valor medio de α				1,24	Valor medio de α				

ANULADO POR ERROR

EN MANIPULACION

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 3
Probetas "E-2"
Ensayo de contracción térmica

Prueba 1					Prueba 2				
Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L\,\Delta T}$ ($^{\circ}C^{-1} \times 10^{-5}$)	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L\,\Delta T}$ ($^{\circ}C^{-1} \times 10^{-5}$)
0	65,8	0	0		0	68,9	0	0	
5	54,1	−11,7	47	1,35	5	56,4	−12,5	−47	1,28
15	39,8	−26,0	−99	1,29	15	41,1	−27,8	99	1,20
30	29,9	−35,9	128	1,21	30	30,5	38,4	−133	1,17
45	24,1	41,7	138	1,12	45	26,1	−42,8	−145	1,15
60	22,7	−43,1	−140	1,10	60	23,7	−45,2	150	1,12
120	22,4	−43,4	−140	1,09	120	22,8	46,1	151	1,10
180	22,2	46,6	137	1,06	180	22,0	−46,9	−146	1,05
1395	22,6	−43,2	−100	0,78	1440	21,4	47,5	109	0,78
Valor medio de α				1,13	Valor medio de α				1,11

Ensayo de dilatación térmica

Prueba 1					Prueba 2				
Tiempo de ensayo (minutos)	T (eC)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L\,\Delta T}$ ($^{\circ}C^{-1} \times 10^{-5}$)	Tiempo de ensayo (minutos)	T (°C)	Variaciones ΔT (°C)	Variaciones ΔL (μm)	$\alpha = \frac{\Delta L}{L\,\Delta T}$ ($^{\circ}C^{-1} \times 10^{-5}$)
0	−23,2	0	0		0	−24,8	0	0	–
5	−8,8	14,4	47	1,10	5	−10,9	13,9	45	1,10
15	+7,5	30,7	105	1,15	15	+7,0	31,8	106	1,13
30	14,0	37,2	136	1,24	30	14,9	39,7	136	1,15
45	17,1	40,3	146	1,22	45	17,4	42,2	145	1,16
60	18,2	41,4	152	1,24	60	18,8	43,6	150	1,16
120	18,6	41,8	157	1,27	90	20,9	45,7	156	1,15
180	22,8	46,0	158	1,16	120	21,2	46,0	158	1,16
1275	22,2	45,4	169	1,26	4200	21,4	46,2	179	1,31
Valor medio de α				1,21	Valor medio de α				1,17

3. ANALISIS DE LOS RESULTADOS Y COMENTARIOS

Con respecto a estos ensayos térmicos, y a través de una detenida observación de los cuadros de resultados, comentaremos lo siguiente:

Con los gradientes que hemos trabajado, ± 40°C, aproximadamente, respecto a la temperatura de la sala de ensayo, las probetas alcanzaban dicha temperatura a las dos horas de comenzar el ensayo, o incluso antes.

Respecto a las variaciones de longitud, vemos que las máximas deformaciones se producen en concordancia con la estabilización de la temperatura; pero, posteriormente, en el ensayo de contracción, se verifica un retroceso en esas deformaciones, llegando a ser significativamente menores que esas máximas alcanzadas. En el ensayo de dilatación se verifica el fenómeno contrario, aunque su manifestación es menos significativa cuantitativamente.

Por otro lado, estos fenómenos se muestran con distinta intensidad en las probetas de uno y otro envío. Así, en las del primer envío, más densas (*) y, por tanto, menos porosas, prácticamente no se notan tales efectos en el primer ciclo de ensayos; se hacen patentes en el segundo ciclo, y se ven claramente en el tercer ciclo de ensayos.

(*) Las densidades aparentes medias de las probetas del primero y segundo envío fueron determinadas en este Laboratorio, resultando ser: 2,07 g/cm^3 y 2,03 g/cm^3, respectivamente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Los ensayos son iguales en todos los casos, por lo que este comportamiento distinto habrá que atribuirlo a que las probetas van teniendo, con cada ciclo de calentamiento-enfriamiento, un crecimiento de su red porosa; y si la causa de esas disminuciones o aumentos en las variaciones de longitud, según sea el ensayo de contracción o dilatación, es la humedad relativa de la sala de ensayo, como sospechamos primero y comprobamos después, los resultados obtenidos son concordantes.

Las probetas del segundo envío tenían una densidad aparente netamente inferior a las del primero, lo que implica un mayor desarrollo de su red porosa, ya que los materiales y proporciones utilizados en su confección eran los mismos, según el remitente. Es, por tanto, factible, que los efectos de la humedad relativa sean más patentes desde el principio, como así ha ocurrido.

3.1. Efecto de la humedad relativa de la sala de ensayos

Es conocido que los cuerpos porosos, aumentan de volumen cuando toman humedad y disminuyen cuando se secan. En el caso que nos ocupa, los morteros no tenían porqué ser una excepción, como en realidad no lo fueron.

Parecía lógico pensar que al pasar las probetas, en el ensayo de contracción térmica, desde una estufa a unos 75°C y 0 por 100 de H.R., donde habían permanecido 24 horas, a una sala climatizada con 21,5 ± 1,5°C y 50 ± 5 por 100 de H.R., no solo les afectaría el gradiente térmico sino que también lo haría la humedad. Si esto era así, en este ensayo la humedad actuaría en sentido contrario a la temperatura, es decir, dilatando las probetas.

Por el contrario, en el ensayo de dilatación térmica, temperatura y humedad actúan en el mismo sentido, aunque de una forma más compleja, ya que al comienzo de cada ensayo la humedad de las probetas es más variable y el efecto de la transformación hielo-agua en los poros de las probetas, con su correspondiente disminución de volumen, es otro factor difícil de evaluar dentro del fenómeno que comentamos.

De cualquier modo, estos efectos quedan muy bien reflejados por la variación del coeficiente "α", cuyos valores, calculados para cada lectura, respecto al origen, aparecen en la última columna de los cuadros de resultados.

Dado que la hipótesis planteada parecía lógica y que los resultados tenían una sistemática acorde con dicha hipótesis, pasamos a intentar medir el efecto de la humedad sobre una de las probetas ensayadas, la marcada E-2-4, pero de forma que no actuase nada más que dicha variable. Para ello, dispusimos la probeta en un retractómetro dentro de una cámara climática, foto 7, cuya temperatura y humedad pueden ser reguladas independientemente dentro de unos márgenes.

La prueba consistió en someter la probeta a 75 ± 1°C durante 24 horas, dejando libres los controles de la humedad. Seguidamente, bajamos la temperatura a 22 ± 1°C y el control de la humedad relativa lo pusimos de forma que estuviese desecando el recinto de la cámara continuamente; es decir, lo más próximo al 0 por 100 de HR que era posible con nuestra cámara (se logró que no subiera del 20 por 100). En estas condiciones se tomó la lectura inicial en el micrómetro del retractómetro.

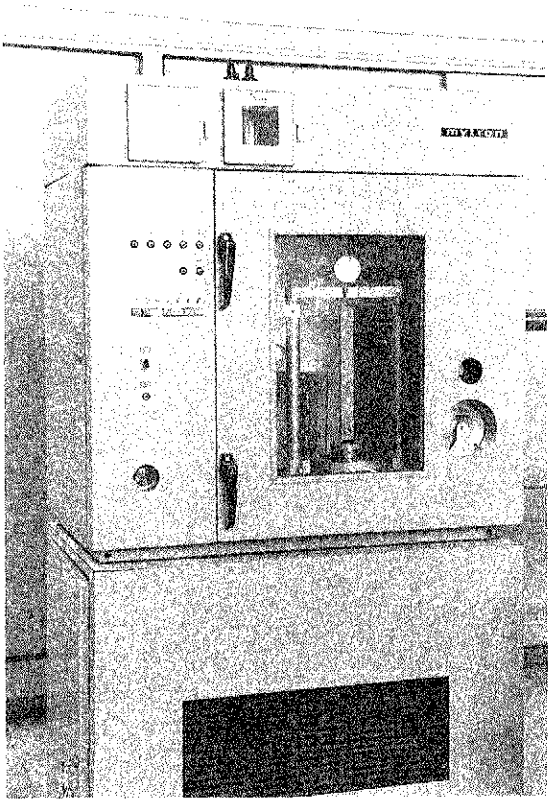


Foto 7.

A continuación, subimos los controles de humedad relativa, de forma que ésta quedase fijada entre 50 ± 5 por 100, y se tomaron lecturas, en el mencionado micrómetro, a las 3, 24 y 48 horas de la inicial.

El mismo ensayo lo repetimos posteriormente tomando lecturas a 3, 24 y 144 horas.

Los resultados fueron los siguientes: (Véase tabla 4).

Según estos resultados podemos decir que por efecto de la humedad relativa, al pasar ésta de un 20 por 100 a un 50 por 100, aproximadamente, la probeta alarga alrededor de 52 μm, a las 24 horas. También, es muy probable que de haber podido partir de una humedad relativa próxima al cero, habríamos obtenido alargamientos del orden de 60 ó 65 μm, a las 24 horas.

Si tenemos en cuenta este efecto de la humedad y recalculamos el coeficiente "α", a las 24 horas, vemos que:

– En el ensayo de contracción (tabla 3, prueba 1).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 4

Ensayo nº	Tiempo desde el origen, en horas	Temperatura, en °C	Humedad relativa, en %	Deformaciones en μm	
				Lecturas	Δ al origen
1	0	22 ± 1	≤20	2117	0
	3	22 ± 1	50 ± 5	2138	21
	24	22 ± 1	50 ± 5	2161	49
	48	22 ± 1	50 ± 5	2169	52
2	0	22 ± 1	≤20	2113	0
	3	22 ± 1	50 ± 5	2136	23
	24	22 ± 1	50 ± 5	2168	55
	144	22 ± 1	50 ± 5	2177	64

$$\alpha_c = \frac{-(104+52)\,10^{-6}}{43,2.296} = 1,22 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$$

– En el ensayo de contracción (tabla 3, prueba 2).

$$\alpha_c = \frac{-(115+52)\times 10^{-3}}{-47,5 \times 296} = 1,19 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$$

En ambos casos, los valores se parecen más a los obtenidos durante las dos primeras horas de ensayo. Por tanto, podemos afirmar que, si pudiésemos eliminar el efecto de la humedad relativa, el coeficiente de variación de longitud de origen térmico, dentro del rango de temperaturas en el que hemos trabajado, tendría un menor grado de variación que el obtenido.

3.2. Gráficos

Al objeto de ver más fácilmente los resultados de los ensayos realizados, hemos dibujado los siguientes gráficos:

– Gráficos temperatura-tiempo, tanto de los ensayos de contracción como de los de dilatación térmica (figura 4).

– Gráficos deformación-tiempo, también de ambos ensayos (figura 5).

En los dos gráficos hemos representado las variaciones (temperatura o deformación) como porcentaje de las obtenidas a los 120 minutos, porque a ese tiempo la temperatura estaba prácticamente estabilizada y, por tanto, la variación de longitud debida a ella, también. Además, el efecto de la humedad relativa, antes visto, es muy pequeño en esas dos primeras horas.

3.3. Rectas de regresión deformación-temperatura

Los gráficos dibujados en las figuras 4 y 5, considerados dos a dos, es decir, los correspondientes a

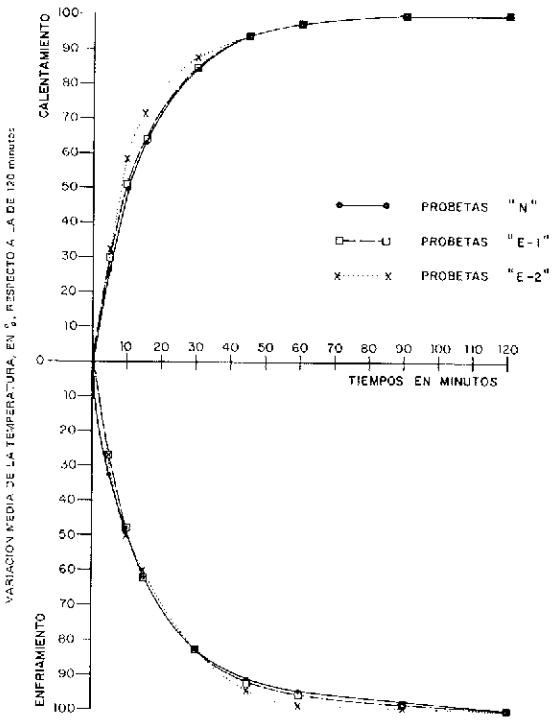


Fig. 4.

unos mismos materiales y ensayos, nos muestran que las curvas representativas de la variación de temperatura con el tiempo son, prácticamente, superponibles con las de deformaciones-tiempo, lo que implica que el fenómeno de variación de longitud originado por variación térmica, en los materiales estudiados y en el rango de temperaturas utilizado, sigue una ley lineal.

Por otro lado, también sabemos que para un incremento de temperatura cero, la variación de longitud será igualmente cero. Es decir, la recta representativa del fenómeno ha de pasar por el origen de coordenadas.

Finalmente, la recta indicativa del ensayo de contracción térmica, tendrá una pendiente ligeramente más pequeña que la de la recta correspondiente al ensayo de dilatación térmica, por el efecto opuesto que sobre ellos tiene la humedad relativa del cuarto donde se realizan las pruebas. Ahora

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

bien, si consideramos los dos ensayos conjuntamente, tendremos una recta única, comprendida entre las dos anteriores, que suprimirá, al menos en parte, el mencionado efecto de la humedad relativa.

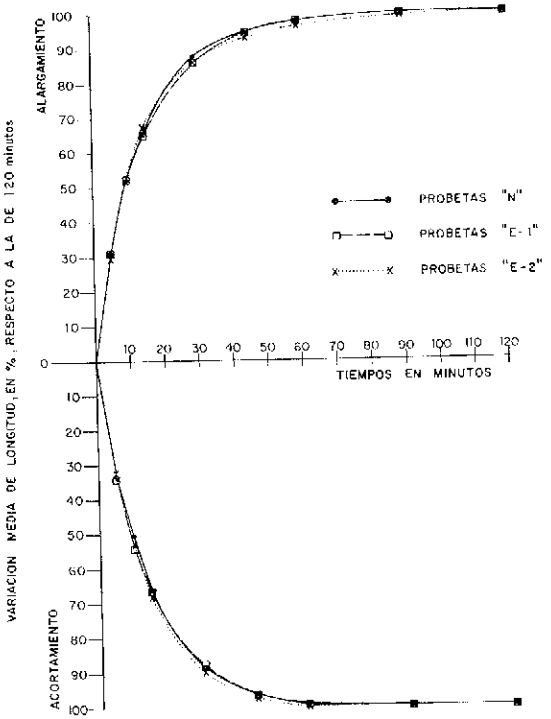


Fig. 5.

Esta recta se puede hallar, mediante interpolación lineal, por mínimos cuadrados, teniendo en cuenta todos los valores temperatura-deformación obtenidos con un mismo material; y la pendiente de dicha recta, dividida por la longitud de las probetas, representará el coeficiente de dilatación térmica lineal "α". Por otro lado, el coeficiente de correlación "r" obtenido, nos dará una idea sobre la "calidad" del ensayo, en el supuesto de que el fenómeno estudiado tenga una ley lineal, como es el caso que nos ocupa, en el rango de temperaturas que hemos trabajado. Dicho de otro modo, cuanto más próximo sea "r" a la unidad, menor habrá sido la influencia de otras variables, ajenas a la temperatura, en el fenómeno estudiado.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se han realizado las regresiones lineales, mediante ordenador, correspondientes a los ensayos efectuados con cada material, considerando todas las parejas de valores ΔT--ΔL disponibles hasta los 120 minutos del comienzo del ensayo.

Las rectas de regresión, dibujadas por un "plotter", con sus correspondientes "r", pueden verse en las figuras 6, 7 y 8; y los coeficientes "α" calculados a partir de ellas, figuran seguidamente:

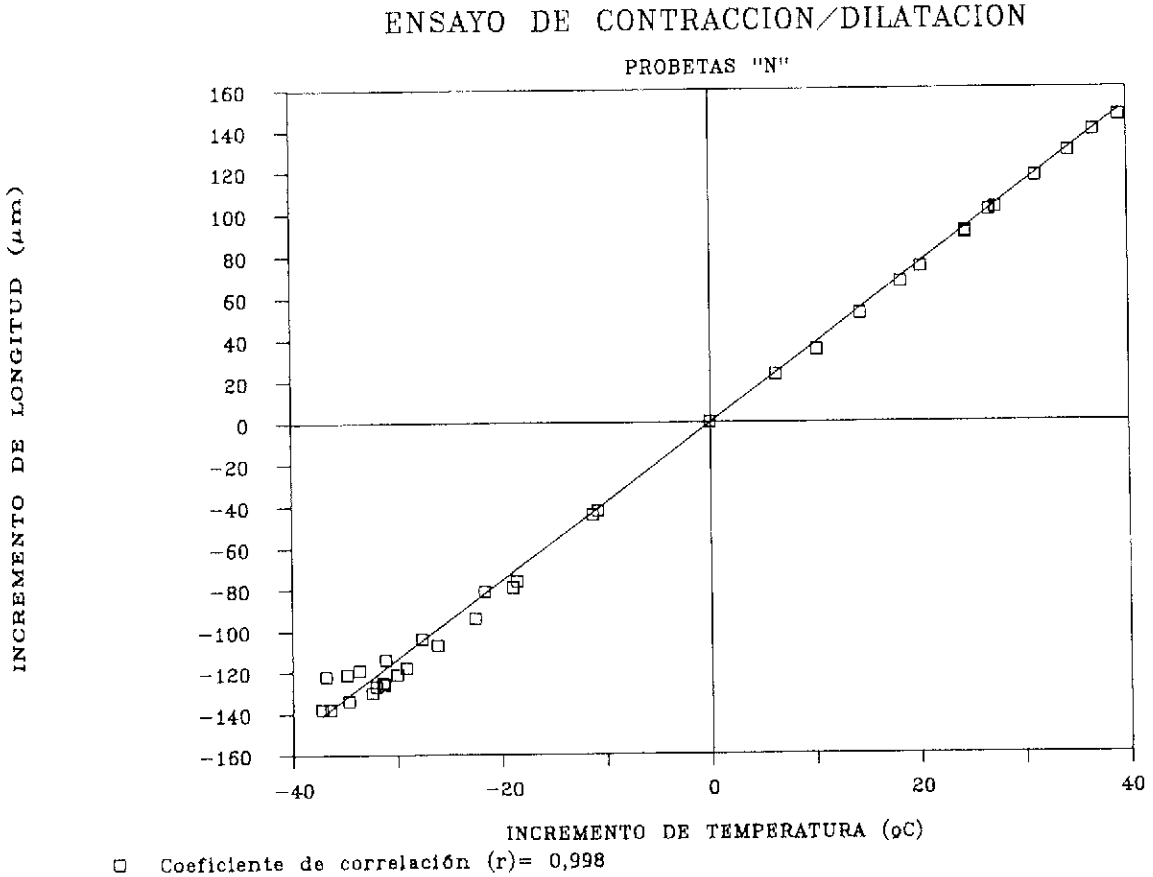


Fig. 6.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

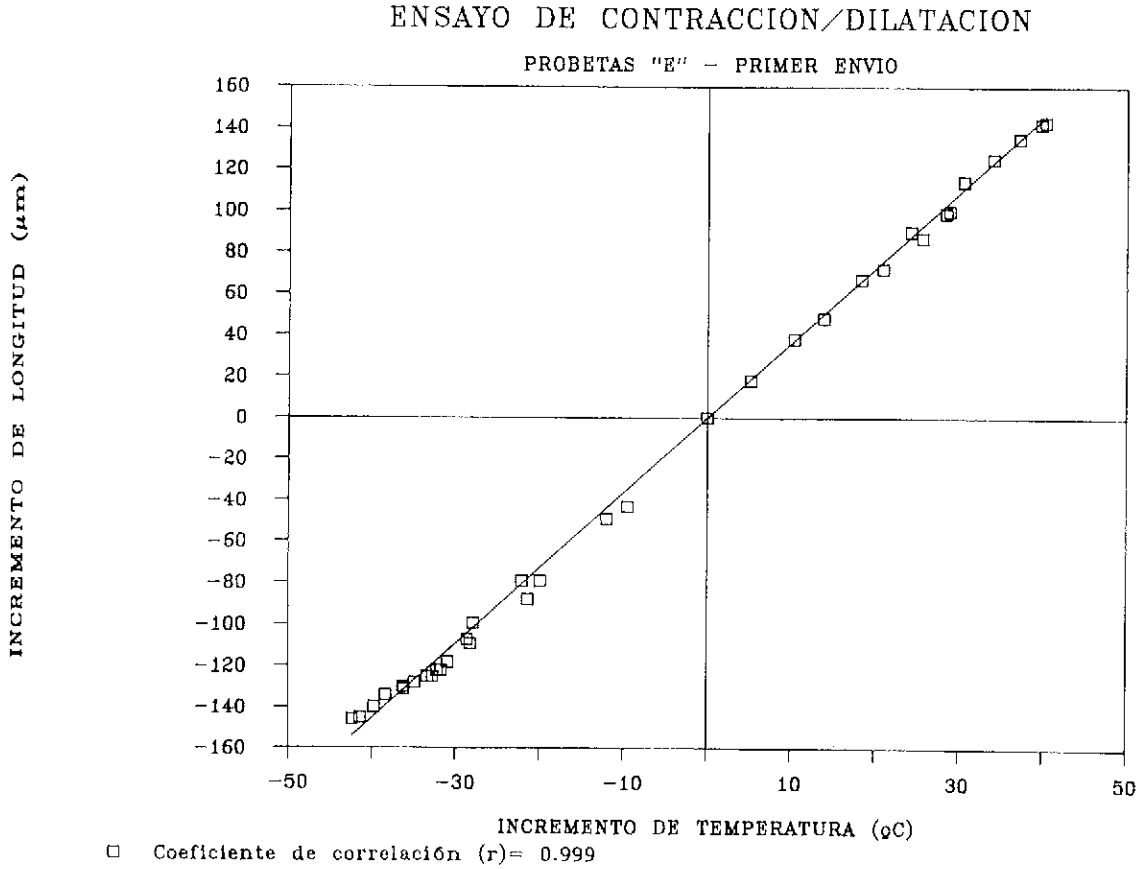


Fig. 7.

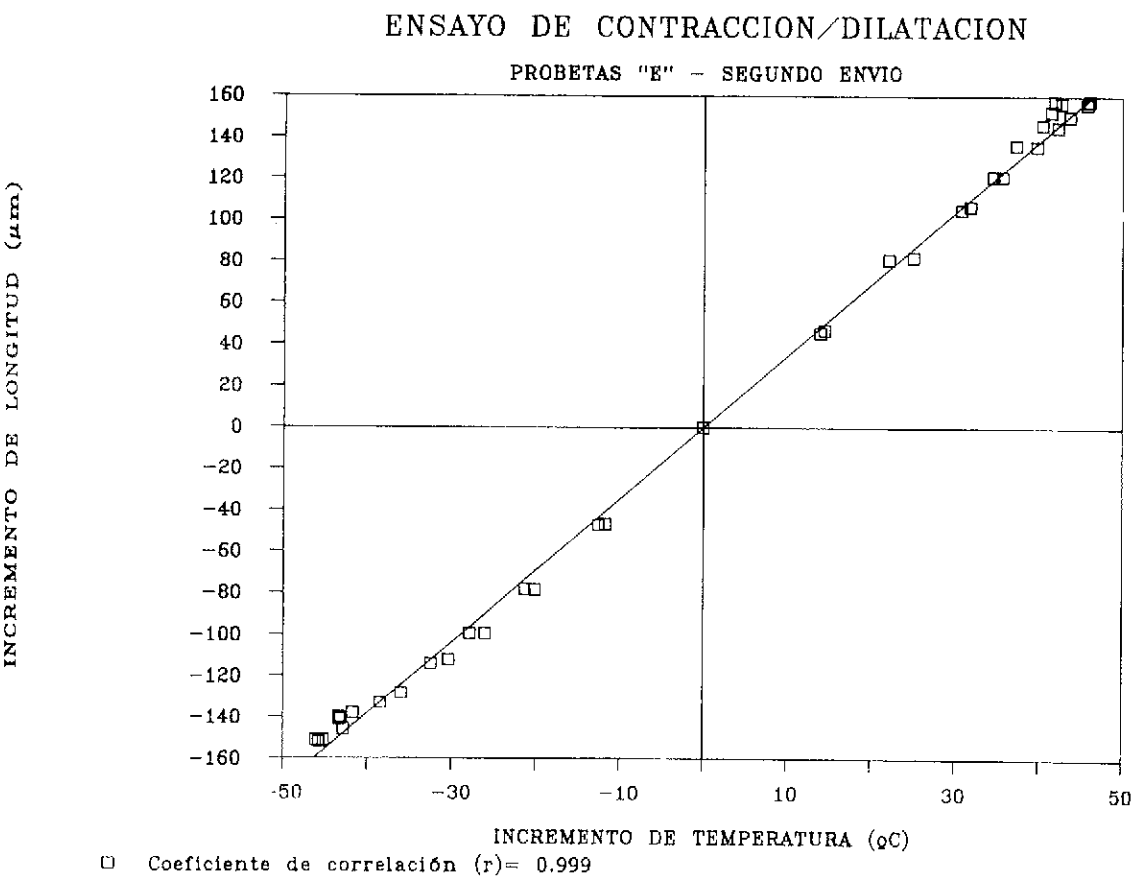


Fig. 8.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tipo de probetas	Valores de "α" ($x10^{-5}$ $°C^{-1}$)		
	Contracción	Dilatación	Contrac. - Dilatac.
"N"	1,29	1,26	1,28
"E-1"	1,24	1,22	1,23
"E-2"	1,15	1,19	1,17

4. CONCLUSIONES

4.1.–El fenómeno "variaciones de longitud de origen térmico" de los morteros estudiados, sigue una ley lineal, dentro del rango de temperaturas con el que hemos trabajado (22 ± 40°C, aproximadamente).

4.2.–La humedad relativa de la sala de ensayo (50 ± 5 por 100) afecta a la variación de longitud de las probetas en los ensayos realizados.

4.3.–El efecto de esta humedad relativa en los dos tipos de ensayos-contracción y dilatación térmicas- es de dilatación.

4.4. Dicho efecto es más notorio en el ensayo de contracción que en el de dilatación, probablemente debido a que la humedad de las probetas, en el momento de comenzar el ensayo, es menor en el primero que en el segundo.

4.5.–Este efecto crece con el tiempo de duración del ensayo y con la porosidad de las probetas, hasta su estabilización.

4.6.–Con los gradientes de temperatura con los que se han realizado los ensayos (22 ± 40°C aproximadamente) la estabilización de la temperatura de las probetas con la de la sala de ensayo se produce antes de las dos horas.

4.7.–El efecto de una humedad relativa del 50 ± 5 por 100, en nuestros ensayos, en ese intervalo de tiempo de dos horas, es muy pequeño (< 10 por 100).

4.8. -Este efecto se autocompensa al realizar una regresión lineal conjuntamente con los resultados de los dos ensayos, contracción-dilatación, haciendo pasar la recta por el origen.

4.9.–La pendiente de esta recta de regresión, de cada material, dividida por la longitud de las probetas es el coeficiente de dilatación térmica lineal.

4.10. -Los coeficientes de correlación "r" obtenidos, permiten asegurar la fiabilidad de los ensayos: $0,95 < r < 0,99$, en todos los casos.

4.11. -Los coeficientes de dilatación térmica lineal obtenidos son muy parecidos, tanto si comparamos los de las probetas de mortero de resina de uno y otro envío, como si la comparación es con el de las probetas del mortero normalizado (RC-75) ensayado.

5. AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento a todo el equipo humano que ha participado en la realización de estos ensayos, por su trabajo meticuloso y eficiente, sin el cual no hubiese sido posible obtener los objetivos marcados con los pocos medios disponibles.

También, a D. Juan Luis Alcalá, Jefe del Sector de Estructuras del Laboratorio Central del CEDEX, por el apoyo y entusiasmo que, a lo largo del trabajo, nos ha prestado.

6. BIBLIOGRAFIA

6.1.–BURTON, Bruce L.: "Thermal expansion measurements as a means of screening cured epoxy resins for toughnees". SAMPE J. V. 24, n° 3 May-Jun 1988, pp. 27-31.

6.2.–CAIRNS, Douglas S. and ADAMS, Donal F.: "Moisture and thermal expansión properties of unidirectional composite materials and the epoxy matrix". J. Renf Plast Compos, V-2, n° 4 Oct. 1983, pp. 239-255.

6.3.–CHOW, T.S.: "Effect of particle shape at finite concentration on thermal expansion of filled polymers". J Polym Sci. Polym. Phys. Ed., V-16, n° 6, Jun. 1978, pp. 967-970.

6.4.–FERNANDEZ CANOVAS, M. y ESCORIHUELA, Mª J.: "Estudio del comportamiento de los revestimientos epoxi a los cambios de temperatura". I.E.T.C.C. n° 28 Junio, 1973 pp. 5-55.

6.5.–HOBRECHT, L.: "Le coefficient de dilatation thermique dans liants et mortiers resineux". CRR Bruxelles, Rapport de recherche. n° 166/LH/1973, pp. 54.

6.6.–GUPTA, V.B.; DRZAL, L.T. and RICH, M.J.: "Phisical basis of moisture transport in a cured epoxy resin system" J. Appl. Polym. Sci., V-30, n° 11, Nov. 1985, pp. 4.467-4.493.

6.7.–MCILROY, H.M.: "Linear thermal expansion of filled epoxy resins". SPI Reinf Plast/Compos Int., Annu. Conf; Proc. 30 th, 1975, for meet Washington DC, Feb. 4-7, 1975, pp. 10.

6.8.–STRIFE, James R. and PREWO, Karl M.: "Thermal expansion behavior of unidirectional and bidirectional kevlar/epoxy composites". J. Compos Mater, V-13, Oct. 1979, pp. 264-277.

RESUMEN

El objeto principal de este trabajo ha sido conocer las deformaciones originadas por variaciones térmicas en probetas de mortero normalizado (RC-75) y en otras de un mortero de resina epoxi utilizado como material de reparación de estructuras de hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Para alcanzar este objetivo, hubo que poner a punto un procedimiento de ensayo que, en esencia, consiste en ir tomando las variaciones de longitud y las temperaturas, de forma simultánea a lo largo del tiempo, de las probetas prismáticas de 25 x 25 x 285 mm objeto de ensayo, situadas en una sala climatizada (21,5 ± 1,5°C y 50 ± 5 por 100 de H.R.), previamente calentadas en una estufa a 75 ± 5°C, durante 24 horas (ENSAYO DE CONTRACCION TERMICA), o enfriadas en un congelador a 32 ± 3°C bajo cero, durante 3 horas (ENSAYO DE DILATACION TERMICA).

A lo largo de la descripción, se tratan en detalle el aparellaje utilizado, el procedimiento operatorio seguido y los resultados obtenidos, finalizando con unos comentarios y conclusiones donde se incide sobre la influencia de la humedad relativa de la sala de ensayos en los resultados de estas pruebas.

Todo el trabajo ha sido realizado en el Laboratorio Central de Estructuras y Materiales del CEDEX.

SUMMARY

The subject matter of this work has been the knowledge of the deformations caused by thermic variations in specimens made of normalized mortar (RC-75) and in similars other made of epoxi resin mortar used as repair material for concrete structures.

For to get away with it, we have to put on trial a new test method, that it is matter of to take the longitudinal variations and temperatures, simultaneously, from the prismatic specimens of 25 x 25 x 285 mm made of the test mortar. These specimens wich are placed in a climatizated room (21 ± ± 1,5°C and 50 ± 5 por 100 of H.R.), have been previously heated into a oven at 75 ± 5°C, during 24 hours (THERMIC CONTRACTION TEST), or cooled into a freezer at 32 ± 3°C under zero, during 3 hours (THERMIC DILATATION TEST).

Along this work, the equipment used, the process and the obtained results are described in detail, finishing with some comments and conclussions about the influence on the results of the relative moisture in the test room.

The wole work has been carried out in the Laboratorio Central de Estructuras y Materiales of CEDEX.

* * *

Seminarios Torroja
Tecnología de la Construcción y de sus Materiales

El Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, del CSIC, viene organizando seminarios monográficos sobre temas de actualidad en el ámbito de la Tecnología de la Construcción y sus Materiales, a cargo de destacados investigadores nacionales y extranjeros del Sector.

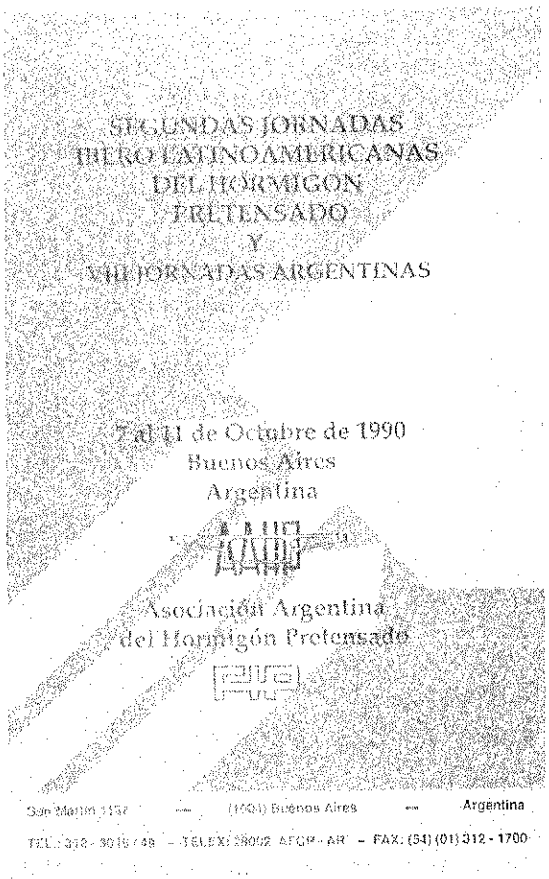
Estos Seminarios se celebran en la Sala de Conferencias del Instituto, situado en la calle Serrano Galvache, s/n (acceso por Arturo Soria frente al núm. 278), y tienen lugar los jueves alternos a las 12:00 horas. Su duración aproximada es de dos horas, incluyendo la ponencia y el coloquio que se realiza a continuación. La asistencia a los mismos tiene carácter libre y gratuito.

Los seminarios programados para el cuarto ciclo, correspondiente al **invierno de 1990**, son los siguientes:

Fecha	Ponente	Tema
18 Ene	Elizabeth VINTZELEOU	Some redesign models for Reinforced Concrete repaired and strenghtened elements.
01 Feb	Alvaro GARCIA MESEGUER	Teoría y práctica de la Garantía de Calidad en Construcción.
15 Feb	Jesús ORTIZ y Alfonso DEL RIO	Cálculo de flechas según la Instrucción EH-88: Una propuesta alternativa.
01 Mar	Francisco MORAN	Pandeo de Estructuras de Hormigón. Situación actual y tendencias.
15 Mar	Vicente SOLANA	Modelación de incertezas y entropía. Aplicación al tiempo de recurrencia de desastres naturales.
29 Mar	César DEL OLMO	Métodos de diagnosis y prevención de corrosividad e incrustaciones en instalaciones de edificios.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Segundas Jornadas Ibero-Latinoamericanas del Hormigón Pretensado y VIII Jornadas Argentinas



La Asociación Argentina del Hormigón Pretensado nos comunica que, con el patrocinio de la FIP, se van a celebrar en Buenos Aires (Argentina), durante los días 7 al 11 de octubre del presente año 1990, las Segundas Jornadas Ibero-Latinoamericanas del Hormigón Pretensado y VIII Jornadas Argentinas.

Las Primeras Jornadas Ibero-Latinoamericanas del Hormigón Pretensado tuvieron lugar, del 3 al 7 de octubre de 1977 en la Ciudad de Buenos Aires. La Asociación Argentina del Hormigón Pretensado ha decidido repetir ahora esa primera experiencia con el doble propósito de reunir nuevamente a todos los técnicos, constructores y profesionales vinculados con esta actividad, y de lograr una continuidad de esta comunicación en el futuro.

Por ello, invita a todos los profesionales vinculados al hormigón pretensado, a participar activamente en estas Jornadas, alentando así la divulgación de problemas específicos, conocimientos adquiridos y resultados de los trabajos realizados, que por su naturaleza revisten interés general entre los ingenieros argentinos y extranjeros que actúan en la investigación, cálculo y ejecución de obras de ingeniería estructural.

El temario que se desarrollará en las Contribuciones Técnicas que se presentarán en las Sesiones de estas Jornadas es el siguiente: Materiales; Proyecto y diseño; Tecnología y equipos; Investigaciones; Métodos constructivos; Realizaciones; Patología estructural, y Resolución de problemas singulares.

Para la presentación de Contribuciones Técnicas, regirá el siguiente cronograma:

Fecha tope para la recepción de resúmenes de trabajos (200 palabras, como máximo): 31-1-90.

Comunicación de la aceptación de trabajos: 8-2-90.

Presentación de los trabajos definitivos: 15-7-90.

Estas Comunicaciones Técnicas deberán redactarse en español o portugués y presentarse en original y copia, ajustándose rigurosamente al formato que oportunamente se dará a conocer a los interesados que lo soliciten de la Secretaría de las Jornadas cuya dirección es:

ASOCIACION ARGENTINA DEL HORMIGON PRETENSADO
San Martín, 1.137
(1004) Buenos Aires
Argentina
Tlf.: 312-3046/49; Télex: 28002 AFCP-AR; Telefax: (54) (1) 312-1700.

El texto de cada Contribución Técnica no podrá exceder de 30 páginas en total, incluyendo fotografías, dibujos, tablas, etc.

Todos los trabajos aceptados definitivamente, serán publicados en las "Memorias de las Jornadas" que se entregarán a los participantes (Autores de los trabajos o asistentes) al iniciarse las reuniones.

La Asociación Argentina del Hormigón Pretensado asignará a los Autores de Contribuciones Técnicas, un tiempo fijo para exponer sus trabajos y, eventualmente, discutirlos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Puente atirantado de Marbella*

Santiago Pérez-Fadón
Ingeniero de C.C. y P.
Oficina Técnica Ferrovial

1. INTRODUCCION

El puente atirantado de Marbella, del Excelentísimo Ayuntamiento de la Ciudad, ha sido recientemente terminado por la empresa constructora Ferrovial. La Dirección de Obra y Proyecto ha estado a cargo del Ingeniero D. Jaime Dionis y el proyecto de construcción ha sido desarrollado por el Ingeniero D. Santiago Pérez-Fadón.

En el artículo sobre este puente publicado en el nº 35 de la revista Cauce 2000, se explican las razones estéticas del diseño del puente y los procesos constructivos del mismo. En esta presentación se trata solamente el esquema de funcionamiento estructural del puente y su cálculo.

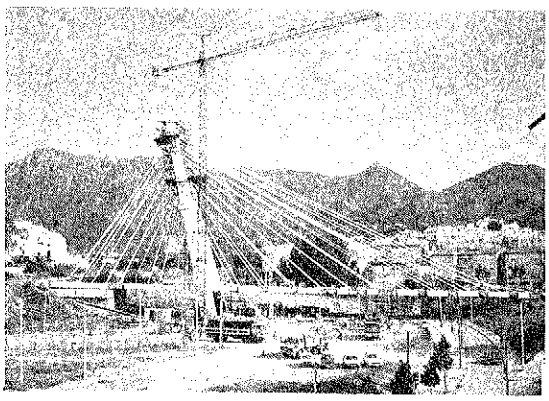


Foto 1. Vista general.

* Este artículo reproduce el texto de la Comunicación presentada por el Autor en la Jornada sobre "Puentes atirantados" que, organizada por la A.T.E.P., se celebró, en Marbella, el 20 de octubre de 1989.

2. DIMENSIONES GENERALES

El puente tiene una longitud total de 106 m que se distribuyen en 72 m de vano principal, 20 m de vano lateral y 14 m de contrapeso. La sección transversal es de 10 m de ancho, capaz para dos aceras de 2 m y una calzada de 6 m. El canto es de 1,00 m bajo aceras y de 0,50 m bajo la calzada. (Fotografía 1).

La pila es en forma de "A", inclinada hacia el contrapeso, y tiene 34,5 m de altura sobre el tablero, más 11 m de altura hasta la cimentación.

El estribo contrapeso tiene una planta de 14 m por 10 m y una altura de 10 m. El interior está relleno de tierras y su peso aproximado es de 3.000 toneladas.

La cimentación es directa a la zona subyacente, mediante zapatas.

3. CONDICIONES DE APOYO

El tablero está soportado verticalmente sólo por los tirantes. No se han dispuesto apoyos verticales en los estribos ni en la pila. Las restricciones horizontales se proporcionan, en el apoyo del contrapeso, que impide los movimientos longitudinales y transversales, y en la pila, donde se impide los movimientos transversales. (Figura 1).

La movilidad vertical entre el tablero y el estribo se logra interponiendo losas de transición entre

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

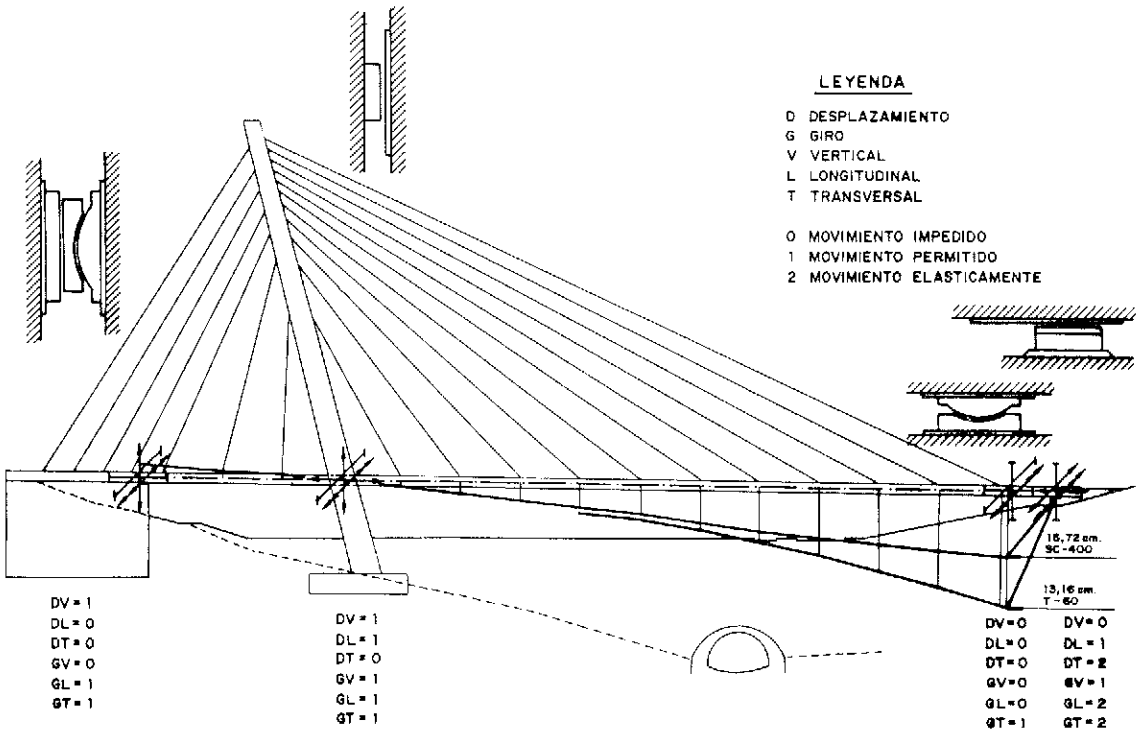


Fig. 1. Condiciones de apoyo y deformada bajo carga máxima.

ambos elementos. De este modo se evitan los "puntos duros" de apoyo en estribo y, con ello, que la ley de flectores aumente en las proximidades de los extremos del puente. En contrapartida, estas losas de transición presentarán una pendiente variable al paso de las sobrecargas. En el caso del puente de Marbella esta pendiente máxima es del 5 por 100; sin embargo, a nuestro juicio, lo que aquí importa no es la pendiente máxima sino la "frecuente", en este caso entre 1 y 1,5 por 100.

4. COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL BAJO CARGA PERMANENTE

A los efectos de carga permanente, el puente se comporta como una estructura plana, dada la simetría de geometría y carga.

Esta estructura, por su pequeña dimensión, puede calcularse como perfectamente elástica.

Para comprender el comportamiento de este tipo de estructuras es básico disponer de las líneas de influencia del esfuerzo axil en cada tirante. A partir de estas líneas de influencia, se obtiene la matriz, F_{ij}, de los coeficientes de influencia de los anclajes de todos los tirantes en el tablero (Figura 2).

Para obtener las fuerzas permanentes en el tablero, se calculan las fuerzas que dejan al tablero sin deformaciones en aquellos puntos. Esto equivale a la ausencia de flexiones generales, pudiendo decirse que el tablero está en comprensión simple.

En esta situación, los tirantes tienen su tracción permanente que es uno de los valores básicos para el dimensionamiento. Hay que hacer notar que no se puede elegir la fuerza vertical total que hay que introducir en los tirantes, ya que ésta es necesariamente igual al peso del tablero más carga permanente. Lo único que se puede elegir es la distribución de fuerza vertical en los tirantes. En este sentido, los tirantes parecen más una armadura pasiva que una activa. De otro lado, en puentes que no tengan simetría longitudinal, se produce una fuerza horizontal, resultante de todas las componentes horizontales de los tirantes, que hay que absorber en algún apoyo (Figura 3).

La torre, bajo carga permanente, se atiranta al contrapeso de tal modo que queda sometida a comprensión simple. Para ello, se dimensionan estos cables del contrapeso con la fuerza necesaria para centrar la resultante de todos los tirantes y del peso de la pila. Esto se puede hacer introduciendo en la matriz F_{ij} los coeficientes de influencia de los anclajes en la torre de los tirantes del contrapeso.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

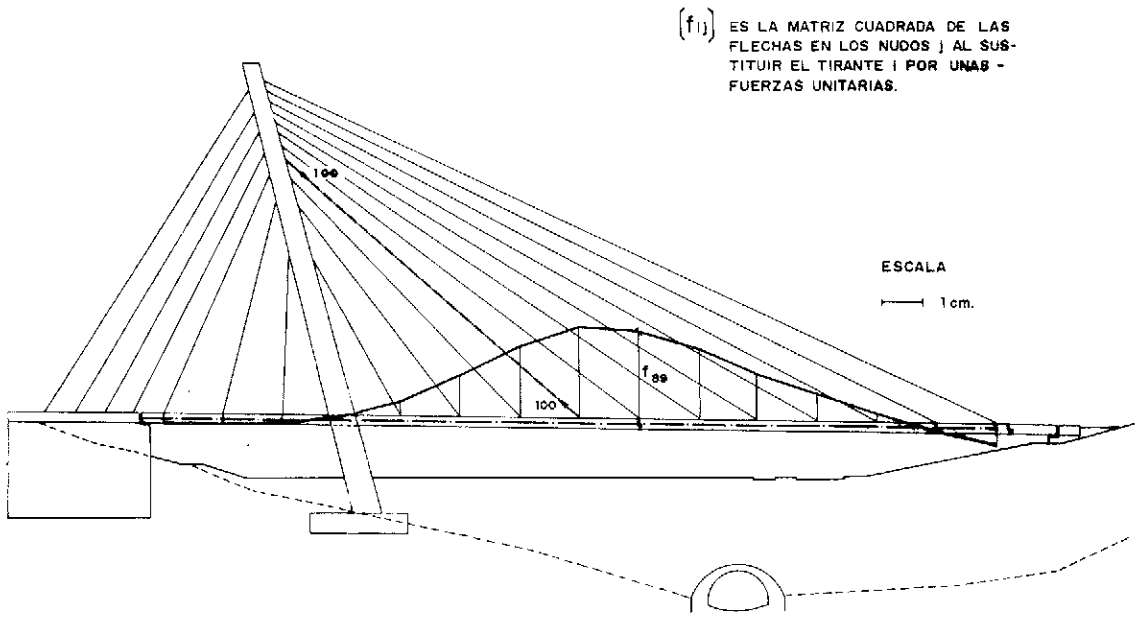


Fig. 2. Línea de influencia de un tirante.

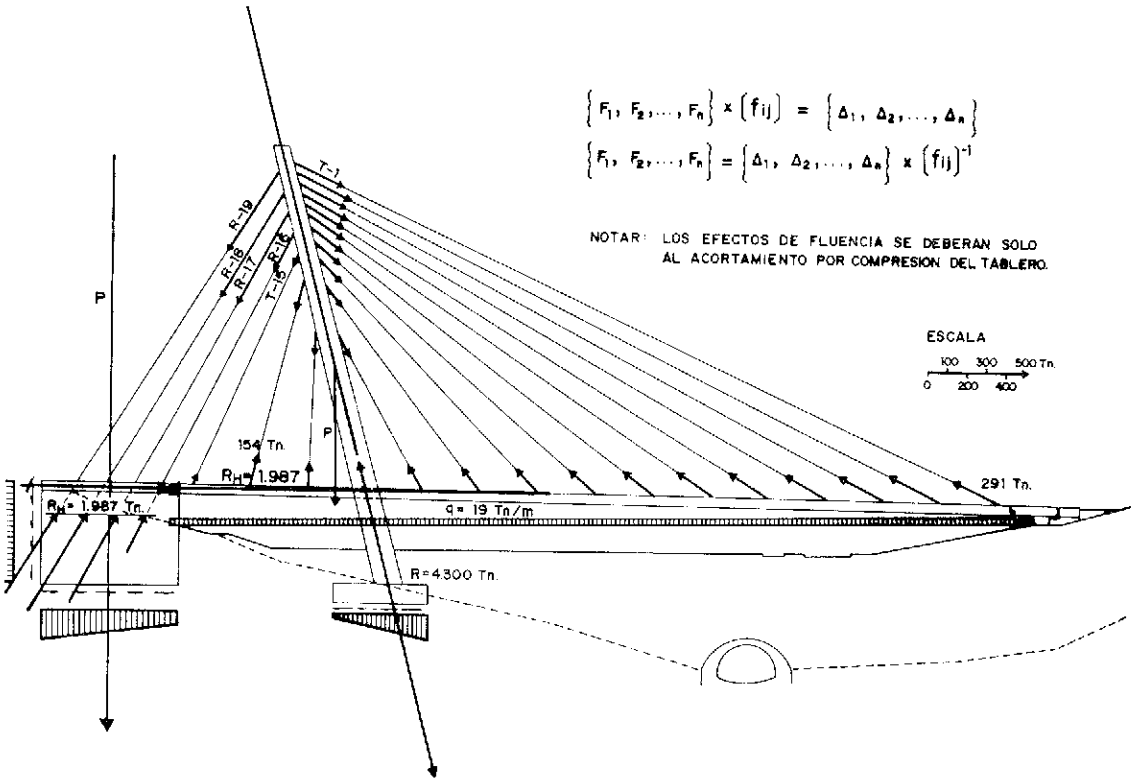


Fig. 3. Fuerza permanente en los tirantes del tablero y tirantes del contrapero. Equilibrio del contrapeso.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Dado que tanto el tablero como la pila están en comprensión simple, los fenómenos de fluencia tienen en estos puentes menos importancia; y en caso de pequeñas dimensiones, como es el caso que nos ocupa, pueden despreciarse.

En la figura 4, se puede ver cómo los esfuerzos permanentes se reducen a las flexiones locales y el esfuerzo axil.

Al paso de la sobrecarga, el tablero toma flexiones que dependen de la rigidez relativa del conjunto de tirantes y del tablero. En los casos de tableros muy flexibles, el reparto de cargas es pequeño y las flexiones del tablero moderadas. En el caso que nos ocupa, el tablero es de rigidez moderada y absorbe la envolvente de los esfuerzos de flexocomprensión como una sección de hormigón arma-

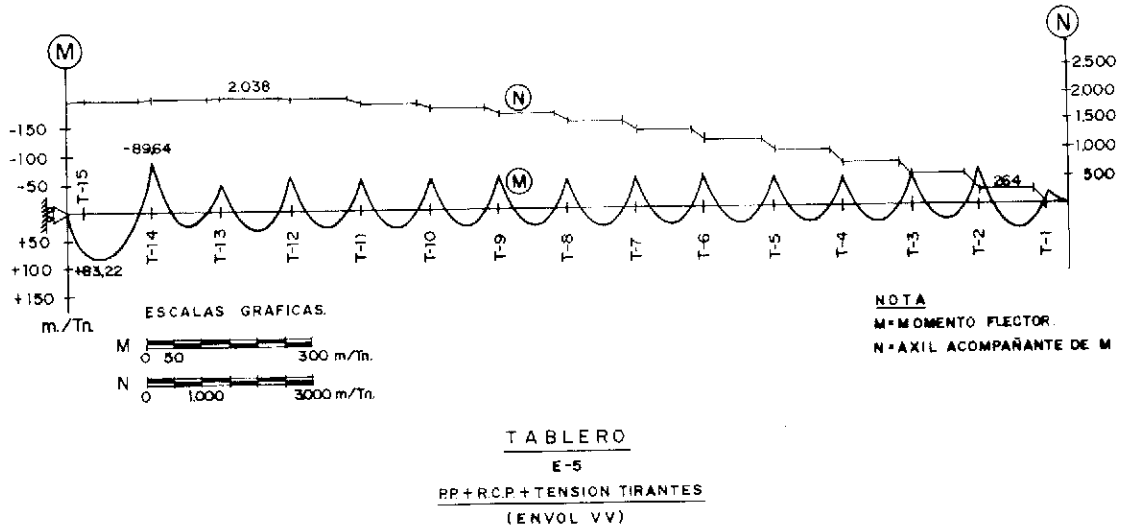


Fig. 4. Envolvente cargas permanentes.

5. COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL BAJO LAS SOBRECARGAS

Al paso de las sobrecargas, el tablero se comporta como una viga en un medio elástico. Se dejan aparte los mecanismos de resistencia transversal que, en este puente, con pequeño ancho, pila en A y doble plano de tirantes, tienen poca importancia. (Fotografías n°s 2 y 3).

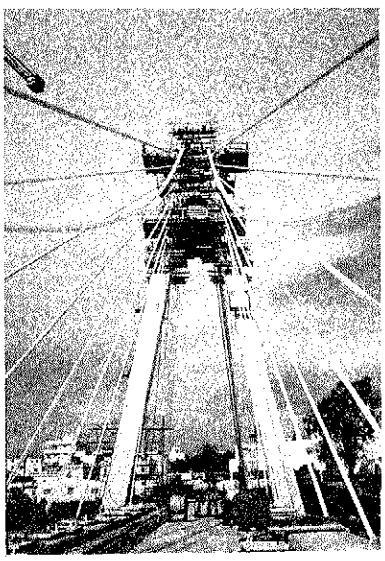


Foto 2. La torre en forma de A.

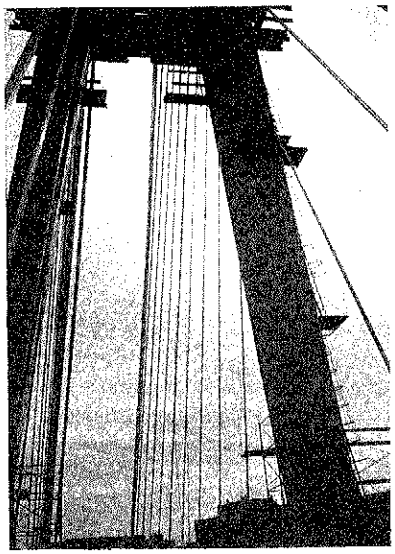


Foto 3. Doble plano de cables.

do, sin necesidad de aplicar pretensado. La figura 5, muestra las envolventes de momentos positivos y de momentos negativos, con sus correspondientes esfuerzos axiles, para las posiciones pésimas de la carga de 400 kg/m^2. La figura 6, muestra las mismas envolventes para el vehículo pesado de 60 toneladas. La figura 7, muestra el diagrama de interacción de una sección del tablero, en hormigón ar-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

mado, con un apoyo de solicitaciones de flexocomprensión.

Desde el punto de vista de los tirantes, son los esfuerzos adicionales debidos a la sobrecarga máxima y mínima los que nos dan el valor de la carga de fatiga o de la carga máxima para dimensionar los tirantes.

En el cuadro 1, se indican las fuerzas permanentes en los tirantes y su variación máxima por el paso de las sobrecargas. No se han calculado los valores mínimos pues, en este tipo de puentes de carretera, es determinante el valor máximo y no la oscilación de la tracción. Se han tenido en cuenta la excentricidad del vehículo pesado, coeficiente K_1, y la inclinación transversal de los cables, coeficiente K_2. Las dos últimas columnas representan la variación de tensión y la tensión máxima, que es la que se usa para el dimensionamiento de los tirantes.

Al igual que el tablero, la pila se ve sometida a esfuerzos de flexocomprensión por la actuación de las sobrecargas; no obstante, en la pila son determinantes los esfuerzos de construcción, que también se resuelven con armadura ordinaria (Figura 8).

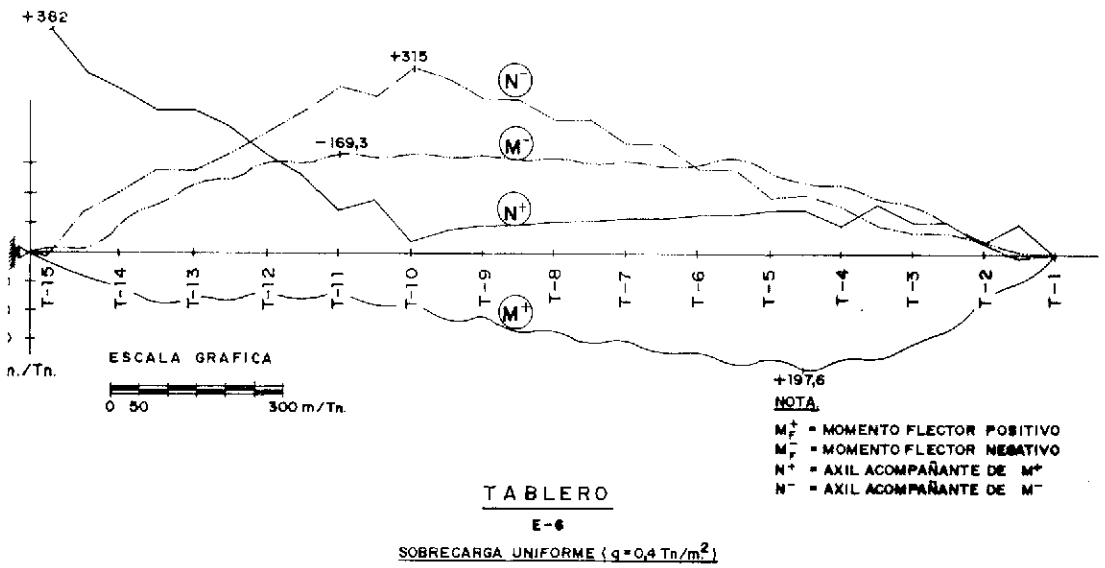


Fig. 5. Envolvente de sobrecarga de 400 kg/m^2.

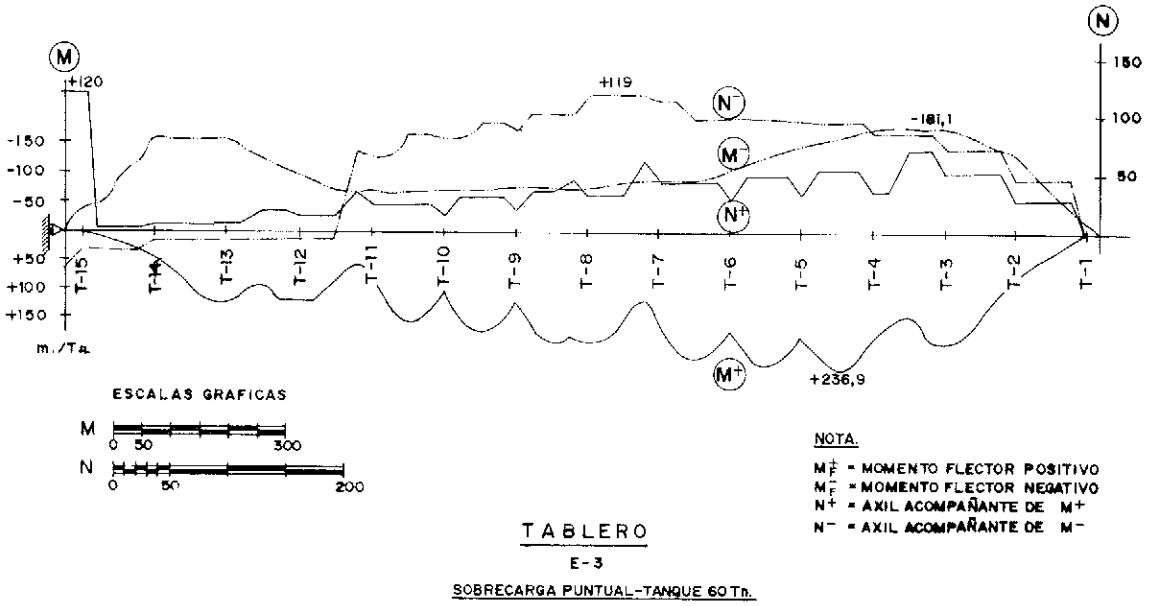


Fig. 6. Envolvente de vehículo de 60 Tn.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

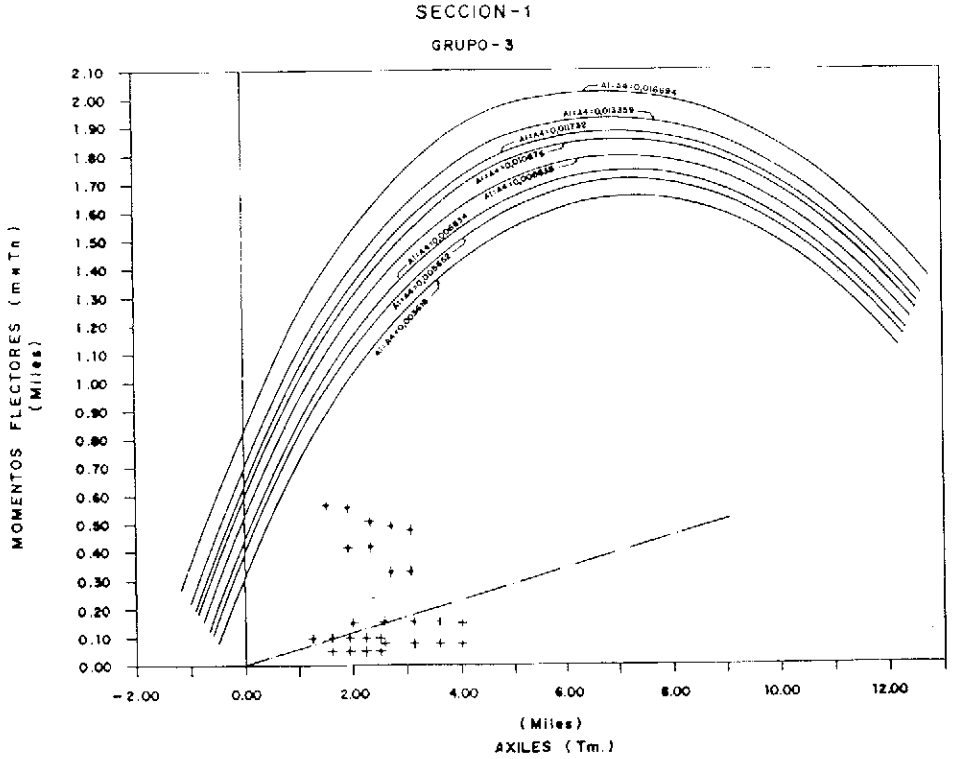


Fig. 7. Diagrama interacción del tablero.

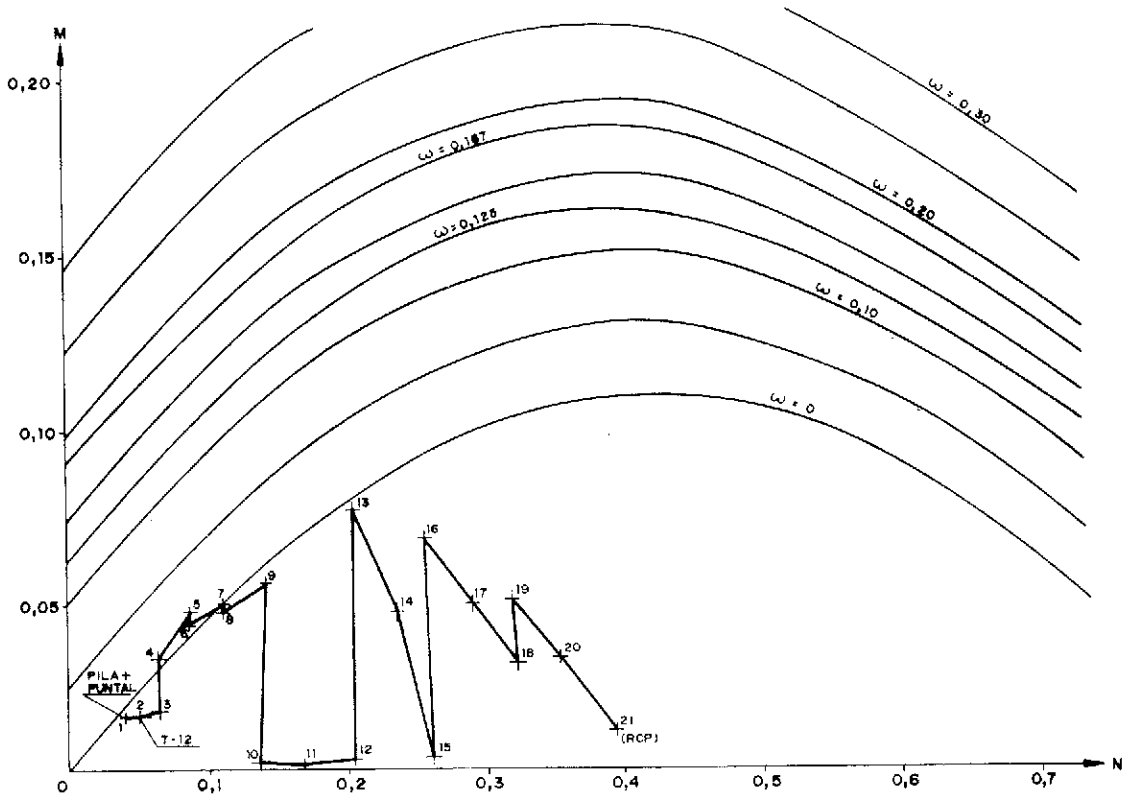


Fig. 8. Diagrama de interacción de la pila.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Nº Barra	Tirante	Nº Cordones Sección (cm2)	① PP+RCP EnvolVV.	② SC-400	③ SC-60T	③A x R_1	②+③A	K2	②+③A K2	① K2+④ Variac.	Max
100	1	2x28Ø0,6" 78,04	291	67	52	69	136	1,105	150	472	1922	6048
95	2	2x20Ø0,6" 55,74	312	51	28	37	88	1,095	96	438	1722	7858
90	3	2x18Ø0,6" 50,17	270	49	24	32	81	1,084	88	381	1754	7594
84	4	2x17Ø0,6" 47,38	258	48	21	28	76	1,074	82	359	1730	7577
79	5	2x16Ø0,6" 44,59	240	47	21	28	75	1,064	80	335	1794	7513
73	6	2x15Ø0,6" 41,81	223	45	21	28	73	1,055	77	312	1842	7462
68	7	2x14Ø0,6" 39,02	206	43	21	28	71	1,046	74	289	1896	7406
62	8	2x12Ø0,6" 33,44	187	36	18	24	60	1,039	62	256	1854	7656
56	9	2x12Ø0,6" 33,44	172	36	19	25	61	1,032	63	241	1884	7207
50	10	2x11Ø0,6" 30,66	153	35	18	24	59	1,026	61	218	1990	7110
44	11	2x11Ø0,6" 30,66	139	36	22	29	65	1,021	66	208	2153	6784
43	12	2x20Ø0,6" 55,74	129	30	21	28	58	1,017	59	190	1058	3409
45	13	2x9Ø0,6" 25,08	112	25	20	27	52	1,015	53	167	2113	6659
51	14	2x11Ø0,6" 30,66	154	22	24	32	54	1,016	55	211	1794	6882
57	15	2x11Ø0,6" 30,66	26	23	40	53	76	1,019	77	104	2511	3392
63	16	2x29Ø0,6" 80,82	204	95	31	41	136	1,019	139	347	1720	4293
74	17	2x33Ø0,6" 91,97	537	99	33	44	143	1,020	146	694	1587	7546
85	18	2x37Ø0,6" 103,12	640	102	36	48	150	1,021	153	806	1484	7816
96	19	2x33Ø0,6" 91,97	490	104	37	49	153	1,022	156	657	1696	7144

① = Axil (Ton.)

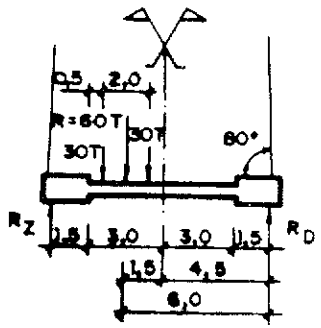
$\sigma = \frac{\text{Axil} \times 10^3}{\text{Sección}}$ (KG/cm2.)

sección 1 Ø 0,6 = 1,3935 cm2.

σ Max < 0,45 x 19.000 (KG/cm2.)

σ Variab < 2.500 (KG/cm2.)

Cuadro 1. Tensiones en tirantes.



$R_Z = 0 - 60 \times 6,0 = 0$

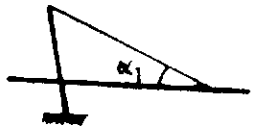
$R_Z = \frac{60 \times 6,0}{9,0} = 40\ T$

R (Media) = 50 T. (TANQUE CENTRAL)

$K_1 = \frac{40}{50} = 1,33$ $\boxed{K_1 = 1,33}$

$K_2 = \frac{\cos \alpha_1 \text{ (PLANO)}}{\cos \alpha_2 \text{ (ESPACIO)}}$

$\alpha_2 = \text{ARC. cos} \left(\sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 60} \right)$



El contrapeso recibe el tiro máximo de los tirantes de retenida, al paso de la sobrecarga. Son estos estados los que rigen para el dimensionamiento del contrapeso, con los adecuados coeficientes de estabilidad general al vuelco, deslizamiento y levantamiento (Fotografía 4).

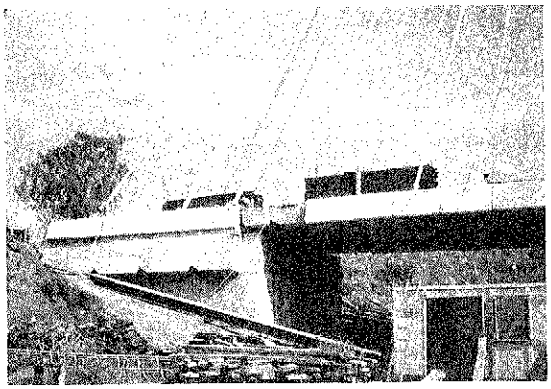


Foto 4. Detalle del contrapeso.

6. ESFUERZOS DE CONSTRUCCION

El cálculo de las distintas fases por las que pasa el puente durante a construcción y, en particular, la obtención de la fuerza de montaje de cada tirante, se obtienen por un procedimiento de cálculo que consiste en ir desmontando el puente, desde la situación de puente terminado, con carga permanente.

Así, la primera etapa de cálculo será la retirada de la carga permanente, obteniéndose las cargas en los tirantes después de la puesta en tensión del último en el orden de tesado.

Tomando en consideración que el tablero se hormigona sobre cimbra, la segunda etapa será la retirada del último tirante y de la zona de peso propio del tablero que gravita sobre él. Aquí aparece una dificultad, pues no es fácil determinar por cálculo esa zona. Se ha empleado un método simplificado, consistente en suponer que, cada tirante, toma la zona de tablero cobaricéntrica con él.

De este modo, se calculó el proceso completo de montaje y las fuerzas que hay que poner en los cables para el orden de tesado establecido. Hay que tener en cuenta, además, que el cálculo se ha hecho tomando en consideración que la pila está apuntalada durante la construcción y que este puntal se descarga, precisamente, al poner en tensión el tirante nº 6 (cuadro 2). Los datos y medidas tomados durante la construcción, permiten afirmar que la aproximación lograda es razonablemente buena, pero no suficiente para estar en un entorno de error menor del 10 por 100.

6.1. Regulación final de los tirantes

Para la regulación final de los tirantes, a fin de que la dispersión de los mismos fuera menor de un 10 por 100 sobre los valores teóricos, se intentó un cálculo similar al descrito para la obtención del valor de la tracción permanente en los tirantes. Este cálculo consiste en determinar los movimientos ne-

CUADRO DEFINICION DE PUESTA EN TENSION

BARRA	100	95	90	84	79	73	68	62	56	50	44	43	45	51	57	63	74	85	96	PUNTAL		
PUESTA EN TENSION / TIRANTE	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5	T-6	T-7	T-8	T-9	T-10	T-11	T-12	T-13	T-14	T-15	T-16	T-17	T-18	T-19	Sin fuerza inicial	Con fuerza inicial	
RCP	291	312	269	257	241	223	206	187	172	153	139	128	111	154	25	203	537	641	491			
TIRANTE-12(2x20)	245	277	236	224	210	193	178	165	148	133	100	128	93	144	22	145	475	575	424	- 182		SIN PUNTAL
TIRANTE- 1(2x28)	245	277	236	224	210	193	178	165	156	153	149		141	160	22	145	475	575	424	- 182		
TIRANTE-19(2x33)		266	228	219	207	192	178	165	156	153	148		143	163	26	79	402	495	337	- 267		
TIRANTE- 2(2x20)		265	228	219	207	192	178	165	157	154	150		141	162	27	191	526	631		- 113		
TIRANTE- 3(2x18)			237	225	210	193	178	164	156	152	147		143	165	31	106	432	529		- 232		
TIRANTE-18(2x37)				226	210	193	178	164	155	151	145		145	167	31	29	349	440		- 351		
TIRANTE- 4(2x17)				225	209	193	178	164	156	152	147		142	166	32	240	577			- 7		
TIRANTE- 5(2x16)					211	194	178	164	155	151	145		144	168	35	134	464			- 175		
TIRANTE-17(2x33)						196	179	164	155	150	143		145	170	38	42	366			- 330		
TIRANTE- 6(2x15)						195	178	164	156	151	145		142	169	39	333				+ 141	+ 0	
TIRANTE- 7(2x14)							181	167	160	156	151		137	165	41	242				- 77	- 218	CON PUNTAL
TIRANTE-16(2x29)								172	165	161	156		133	162	39	168				- 265	- 406	
TIRANTE- 8(2x12)								170	162	157	151		137	166	43					- 64	- 205	
TIRANTE-15(2x11)									171	165	158		131	161	39					- 336	- 477	
TIRANTE- 9(2x12)									168	162	154		122	131						- 210	- 351	
TIRANTE-14(2x11)										175	163		117	129						- 426	- 567	
TIRANTE-10(2x11)										179	161		127							- 269	- 410	
TIRANTE-13(2x9)											173		125							- 431	- 572	
TIRANTE-11(2x11)											162									- 312	- 453	
PUNTAL+PESO PILA																				- 393	- 534	
PUNTAL																				0	- 70	

Cuadro 2. Proceso de montaje.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

cesarios para llevar la deformada real resultante del montaje del tablero, a la rasante teórica (cuando el tablero estaba en la cimbra). La matriz de los coeficientes, multiplicada por este vector de deformaciones, nos debería dar el vector corrección de fuerzas en los tirantes. Al realizar este cálculo se comprobó que el problema estaba matemáticamente mal condicionado y, por lo tanto, daba resultados no utilizables. Igual ocurría si se utilizaban fuerzas en lugar de desplazamientos. Al final, se realizó un cálculo ingenieril, en lugar de este cálculo matemático. Se tomaron las líneas de influencia de los tirantes, se eligieron los que presentaban mayores desajustes y, tocando unos pocos (seis de cada lado), se llevó el conjunto a dispersiones inferiores al 10 por 100. Una comprobación final de flechas y fuerzas, arrojó un resultado suficientemente satisfactorio. En los cuadros números 3 y 4 se muestran los valores de las fuerzas en los tirantes, antes y después de la regulación. En la figura 9 se muestran las deformadas del tablero, antes de la regulación, después de la regulación y después de extender el pavimento, colocar las impostas, etc.

7. OTROS ASPECTOS

Hasta aquí, una descripción general del cálculo.

En este último apartado se quieren mencionar brevemente dos temas diferentes e interesantes en este tipo de puentes:

En primer lugar, citar la experiencia de utilización de cordones monoprotegidos con tres barreras (galvanizado, brea-epoxi y plástico blanco levasint). Nuestro juicio sobre estos cordones es que son el futuro de los cables para tirantes, debiendo sustituirse la brea-epoxi por algún otro componente sin brea que evite los problemas de coloración habidos en el puente de Marbella y procurando que los plásticos que se empleen tengan mayor dureza frente a los deterioros que el manejo de obra tiende a producir en el revestimiento externo.

—Referente al coste de estos pequeños puentes atirantados, cuya facilidad de construcción es notable, cabe decir que su precio de venta está por encima de las 250.000 ptas/metro cuadrado.

De este precio, casi la cuarta parte es el precio de los tirantes y su tecnología, que en el caso que nos ocupa han sido 30 toneladas de acero, con una cuantía aproximada de 30 kg/m².

	NORTE					SUR				
	N Kg/cm²	Tn.	Tn. teóricas	Δ	Porcentaje	S	Tn.	Tn. teóricas	Δ	Porcentaje
T-1	320	127	122,5	+ 4,5	+ 3,7%	320	127	122,5	+ 4,5	+ 3,7%
T-2	320	127	138,5	-11,5	- 8,3%	320	127	138,5	-11,5	- 8,3%
T-3	250	99	118	-19,0	-16,1%	285	113	118	- 5,0	- 4,2%
T-4	310	123	112	+11,0	+ 9,8%	310	123	112	+11,0	+ 9,8%
T-5	280	111	105	+ 6,0	+ 5,7%	284	112,5	105	+ 7,5	+ 7,1%
T-6	260	103	96,5	+ 6,5	+ 6,7%	265	105	96,5	+ 8,5	+ 8,8%
T-7	216	85,6	89	- 3,4	- 3,8%	220	87,2	89	- 1,8	- 2,0%
T-8	211	83,6	82,5	+ 1,1	+ 1,3%	210	83,2	82,5	+ 0,7	+ 0,85%
T-9	180	71,3	74	- 2,7	- 3,6%	181	71,7	74	- 2,3	- 3,1%
T-10	180	71,3	66,5	+ 4,8	+ 7,2%	176	69,7	66,5	+ 3,2	+ 4,8%
T-11	185	73,3	50	+23,3	+46,6%	180	71,3	50	+21,3	+42,6%
T-12	125	49,8	64	-14,8	-23,1%	134	53,1	64	-10,9	-17,0%
T-13	157	62,2	46,5	+15,7	+33,8%	157	62,2	46,5	+15,7	+33,8%
T-14	164	64,9	72,0	- 7,1	- 9,9%	157	62,2	72,0	- 9,8	+13,6%
T-15	20	7,9	11,0	- 3,1	-28,2%	35	13,8	11,0	+ 2,8	+25,4%
T-16	218	86,4	72,5	+13,9	+19,2%	212	84	72,5	+11,5	+15,9%
T-17	586	232	237,5	- 5,5	- 2,3%	656	260	237,5	+22,5	+ 9,5%
T-18	770	305	287,5	+17,5	+ 6,1%	755	299,2	287,5	+11,7	+ 4,1%
T-19	495	196,2	212	-15,8	- 7,5%	500	198,2	212	-13,8	- 6,5%

Nota: Las fuerzas que figuran en los tirantes son antes de lastrar y después de hormigonadas las aceras

Cuadro 3. Regulación de fuerzas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

	NORTE					SUR				
	N_T	N_P	N_D	% N_T	% N_P	N_T	N_P	N_D	% N_T	% N_P
1	122,50	116,21	123,98	101,2	106,7	122,50	119,07	125,16	102,2	105,1
2	138,50	131,47	133,82	96,6	101,8	138,50	133,76	129,89	93,8	97,1
3	118,00	115,53	116,51	98,7	100,8	118,00	119,31	116,90	99,1	98,0
4	112,00	115,22	118,08	105,4	102,5	112,00	117,16	118,08	105,4	100,8
5	105,00	104,07	102,34	79,5	98,3	105,00	107,14	110,21	105,0	102,9
6	96,50	96,39	97,22	100,7	100,9	96,50	99,36	102,34	106,1	103,0
7	89,00	91,65	96,43	108,3	105,2	89,00	93,72	94,46	106,1	100,8
8	82,50	77,41	81,48	98,8	104,9	82,50	77,23	81,87	99,2	106,0
9	74,51	77,64	77,54	104,1	99,9	74,39	78,04	78,72	105,8	100,9
10	66,72	68,44	70,85	106,2	103,5	66,48	66,35	70,85	106,6	106,8
11	70,63	71,18	74,78	105,9	105,1	70,23	68,31	72,82	103,7	106,6
12	45,86	70,42	62,98	137,3	89,4	45,62	72,20	59,04	129,4	81,8
13	55,39	64,93	64,94	117,2	100,0	55,95	64,17	64,94	116,1	101,2
14	71,46	41,15	43,30	60,6	105,2	73,14	43,15	43,30	59,2	100,3
15	7,68	25,73	31,49	410,0	122,4	10,72	28,06	35,42	330,4	126,2
16	73,14	90,31	93,28	127,5	103,3	72,26	84,90	80,69	111,7	95,0
17	238,00	242,29	244,03	102,5	100,7	237,20	245,78	238,92	100,7	97,2
18	287,96	299,15	303,07	105,2	101,3	287,24	306,97	300,32	104,6	97,8
19	212,49	188,75	194,83	91,7	103,2	211,81	200,48	197,56	93,3	98,6

N_T: Valor Teórico (Tn)

N_P: Valor Previsto (Tn)

N_D Valor de despegue (Tn)

% N_T: Porcentaje s/v. Teórico

% N_P: Porcentaje s/v. Previsto

Cuadro 4. Regulación de fuerzas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

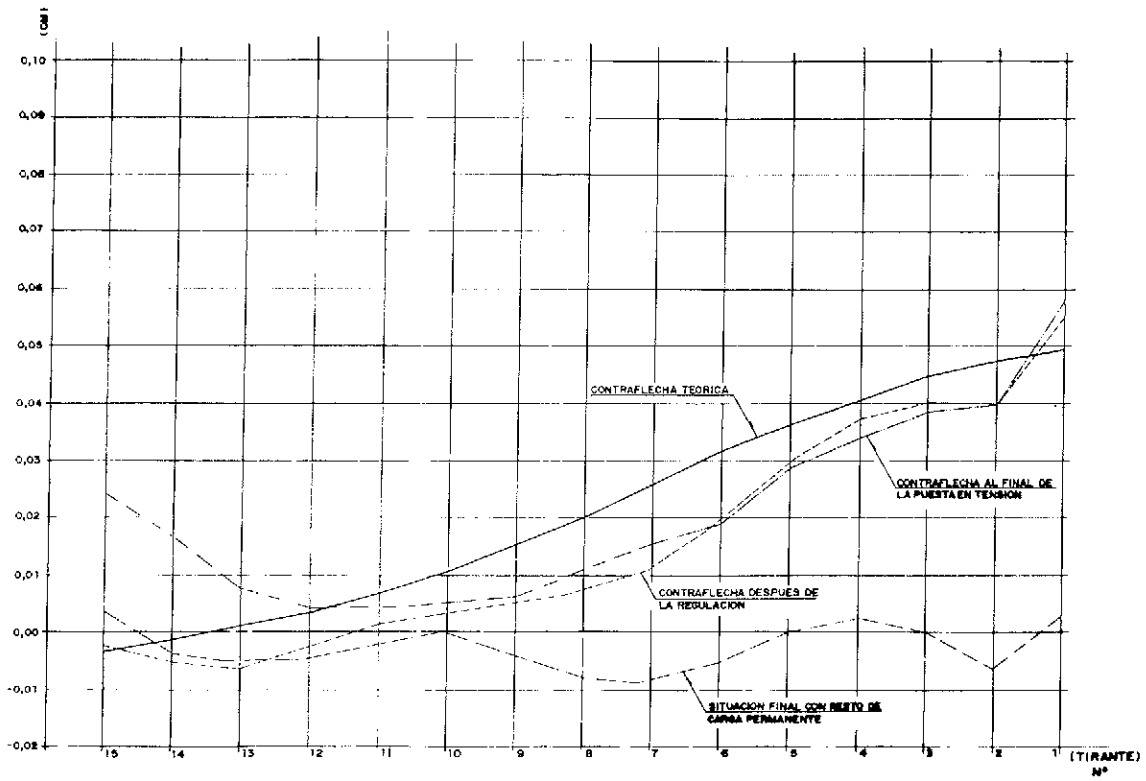


Fig. 9.

RESUMEN

En este artículo, correspondiente a la comunicación presentada en la Jornada Técnica sobre "Puentes Atirantados" celebrada en Marbella el 20 octubre pasado, se explican los cálculos estructurales simplificados y relativamente sencillos que se pueden hacer para este tipo de puentes, cuando se trata de casos de poca luz, poco ancho y pilas en A con doble plano de tirantes.

En primer lugar, se describe el puente, sus dimensiones generales y sus condiciones de apoyo. Después, se expone el cálculo bajo cargas permanentes, bajo las sobrecargas de uso y durante las etapas de construcción. Finalmente, se explica el cálculo de las fuerzas de tesado en los tirantes y la estimación de los valores de variación de estas fuerzas para el ajuste final.

Además, se dan algunas indicaciones sobre el nuevo cordón monoprotegido y sobre el coste unitario resultante para este tipo de puentes de poca luz.

SUMMARY

This article, which has been presented at the Technical Journey on cable-stayed bridges hold in Marbella on the 20th october last, explains the simplified and relatively simple structural calculations which can be made for these kind of bridges when they present little span, little width and A-Towers with double plane of cables.

First and foremost, the bridge is described, its general dimensions and its support conditions. It goes on to explain the calculation under dead loads, under live loads and during construction phases. Lastly, the calculation of the assembling forces in the cables and an estimation of the regulation of such forces for the final adjustment is explained.

Furthermore, some explanations are given on the new single-protected strand and the resulting unit cost for bridges of this kind with little span.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

II Conferencia Internacional del "Oleg Kerensky Memorial" Las estructuras hoy y mas allá del año 2000

Durante los días 9 al 11 de mayo de 1990, en el Hotel Albany, de Glasgow, y organizada por la Institution of Structural Engineers, con la colaboración de la American Society of Civil Engineers y la Internacional Association for Bridge and Structural Engineering, se va a celebrar esta Conferencia Internacional con el fin de estudiar y discutir los actuales problemas de la ingeniería estructural, intercambiar experiencias sobre el tema y examinar la probable evolución y futuros avances en el proyecto, la tecnología y las aplicaciones de nuevos materiales y técnicas.

Están invitados varios ilustres conferenciantes del Reino Unido, Europa, USA, Australia y Japón. Después de sus intervenciones, habrá amplios coloquios libres. Además, uno de los días, se dedicará a la presentación de las comunicaciones que hayan sido libremente enviadas, por los participantes en estas reuniones, sobre temas relacionados con sus experiencias particulares en la ingeniería estructural.

Los temas principales seleccionados para esta Conferencia, son los siguientes:

– Nuevos horizontes para la ingeniería estructural.

– Materiales tradicionales y nuevas aplicaciones de los elementos estructurales prefabricados, el hormigón armado y el hormigón pretensado.

– Durabilidad y calidad de las construcciones.

– Filosofía del proyecto.

– Rehabilitación de estructuras.

– Información sobre tecnologías utilizadas en la ingeniería estructural.

– El futuro en la ingeniería estructural.

Se han programado, además, una visita técnica a los puentes del Forth (de ferrocarril y de carretera), diversos actos sociales y viajes post-Conferencia.

Los interesados en participar en esta Conferencia o recibir información más amplia y detallada sobre la misma, deberán dirigirse a:

The Institution of Structural Engineers
11 Upper Belgrave Street
London SW1X8BII
Inglaterra.

Jornadas Europeas del Hormigón 21-23 de Mayo de 1990

Organizadas por la "Asociación Danesa del Hormigón", durante los días 21 a 23 del mes de mayo del presente año 1990, se van a celebrar, en el atractivo entorno del famoso Tívoli de Copenhague, y en la más agradable estación del año, unas "Jornadas Europeas del Hormigón" para intercambiar conocimientos técnicos sobre la tecnología de las construcciones en hormigón.

El programa incluye dos días de Sesiones Técnicas, con Conferenciantes de diferentes países europeos, y un tercer día dedicado a visitar el "Gran cinturón de enlace", una de las mayores obras actualmente en construcción, en Europa.

Programa

Los temas de las Sesiones serán:

1ª Sesión: El Mercado Común.
2ª Sesión: Durabilidad del hormigón.
3ª Sesión: Materias primas y dosificación del hormigón.
4ª Sesión: Curado del hormigón.
5ª Sesión: Mantenimiento de los puentes de hormigón.

Visita técnica

El día 23 de mayo se realizará la visita a las obras del "Gran cinturón de enlace". Actualmente se han iniciado ya los trabajos de construcción del mayor puente y del mayor túnel hasta ahora construidos en Dinamarca, y que formarán el enlace fijo a través del Great Belt-Storebaelt. Este gran cinturón de enlace constará de:

– Un puente, de 6 km de longitud, que unirá Funen a la isla de Sprogoe, en el centro del Great Belt. Será un puente de carretera y ferrocarril.

– El enlace ferroviario desde Sprogoe a Zealand, se realizará mediante dos túneles, de 8 km, bajo el Eastern Channel. Irán entre 10 y 40 m por debajo del fondo del mar y terminarán en Halsskov Odde, en Zealand.

– La carretera seguirá, desde Sprogoe a Zealand, por un puente de 6,7 km de longitud, con una luz máxima de 70 m.

Se tiene previsto que la línea férrea esté concluida en 1993 y la carretera en 1996.

Actos sociales

Se han programado también diversos actos sociales para los participantes y sus acompañantes.

Los interesados en recibir mayor información, deberán ponerse en contacto con:

Danish Concrete Association
Ingeniorhuset
Vester Farimagsgade 29
DK-1606 Copenhaguen V
Dinamarca.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Orden de tesado en depósitos de hormigón pretensado de pequeña capacidad

A. Aguado
A.R. Mari
E. Mirambell
E. Boixereu
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Departamento de Ingeniería de la Construcción
E.T.S.I.C.C.P. Barcelona

1. INTRODUCCION

En depósitos de pequeña capacidad, que en el presente artículo entendemos entre 500 m^3 y 8.000 m^3, es frecuente emplear soluciones en hormigón armado (prefabricado o in situ) y diferente geometría en planta (cuadrada, rectangular, circular).

En los últimos años, dentro de este rango de capacidades, se está abriendo camino una solución cilíndrica, en hormigón proyectado, con armaduras postesas no adherentes. Esta solución, presentada por Jimenez (1987), se ha utilizado en numerosos depósitos en Cataluña y en otras comunidades del área Mediterránea. En las fotos 1 y 2 se muestra una perspectiva de la construcción de uno de estos depósitos y un detalle de la zona de anclaje.

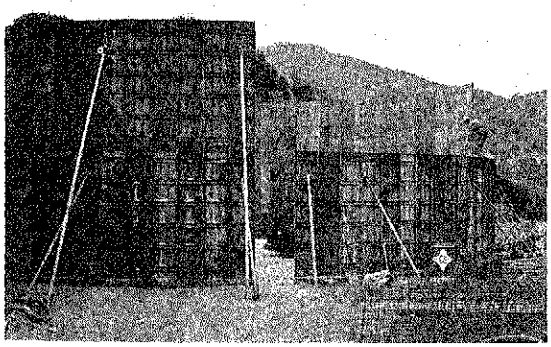


Foto 1. Perspectiva de la construcción de un depósito de la tipología estudiada.

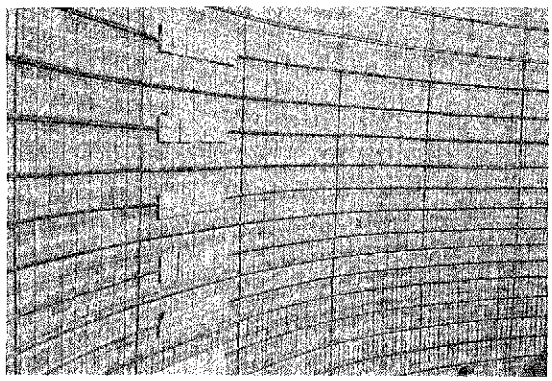


Foto 2. Detalle del trazado y zona de anclaje de la armadura activa.

Diversos factores técnicos pueden favorecer el auge de esta tipología; entre ellos podemos citar: empotramiento de la pared con la losa de la base, evitando problemas de juntas; tendones formados por cordones unifilares no adherentes, lo que implica un manejo cómodo y sin necesidad de inyección; anclajes mediante conectores, lo cual significa un ahorro en elementos de anclaje; pequeños espesores y necesidad de un sólo encofrado, que redunda en una economía general de la obra; facilidad de puesta en tensión (gato alcvín), etc.

Este tipo de estructuras no presenta, en general, dificultades especiales en su construcción, siendo la operación de tesado la más singular, dada la importancia de los esfuerzos que, en vacío, introduce el pretensado. La magnitud de estos esfuerzos, y por tanto la cuantía de armadura pasiva, es en gran medida función del orden de tesado de los cordo-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

nes. En este sentido, es frecuente encontrarse en la práctica con un orden de tesado en el que se tesan, en cada contrafuerte, los tendones (cordones unifilares) de abajo-arriba al 50 por 100 y a continuación de arriba-abajo al 50 por 100 restante.

El presente artículo tiene por objeto estudiar un sistema racional del orden de tesado, de acuerdo con las características de estos depósitos (pequeña capacidad) y con las particularidades de la puesta en obra (equipos humanos y técnicos pequeños o medios).

2. CRITERIOS DE TESADO

En general, no se tiene conocimiento de estudios sistemáticos sobre el orden de tesado en depósitos de hormigón pretensado. Esta situación puede responder, por un lado, a la gran diversidad de tipologías existentes para este tipo de depósitos y, por otro lado, a la escasa repetición de una determinada tipología, por parte de las Administraciones que puedan incidir en este campo.

No obstante, existen algunas recomendaciones sobre el tema, recogidas en la bibliografía, si bien usualmente están dirigidas a depósitos de mayor capacidad que los que aquí se estudian. Así por ejemplo Ghali (1979) señala:

—..."*En la práctica, resulta conveniente escoger la secuencia de tesado de los tendones de tal forma que en ninguna sección se produzcan momentos flectores excesivos*"... *(p. 61).*

y en esta misma línea, Anton y Llombart (1980) indican:

—..."*Conviene establecer un orden de tesado de los cables, de manera que se disminuyan, en lo posible, los momentos flectores verticales que se producen en las paredes en fase de construcción, hasta el momento de estar tesos todos los cables*"... *(p. 152).*

Estos criterios conducen a Ghali a proponer la secuencia de tesado dada en la fig. 1, mientras que Anton y Llombart dan como criterio posible para establecer dicha secuencia el siguiente:

—..."*Se parte de tesar el cable más próximo al borde superior, ya que en esta zona los cables son más pequeños y por tanto producen menores esfuerzos locales en las paredes. A continuación, se va eligiendo el cable en cuya sección el momento flector vertical acumulado es mínimo...*" *(p. 152).*

En estos dos casos, se comienza a dar tensión por el tendón superior, lo cual contrasta con el criterio anteriormente citado como la práctica usual en esta tipología. Por otro lado, las dos referencias citadas a manera de ejemplo, más otras que podrían añadirse en relación al pretensado en edificios de contención de centrales nucleares, implican un orden de tesado no contiguo (se tesan tendones dispuestos no consecutivamente a lo largo de la pared del depósito).

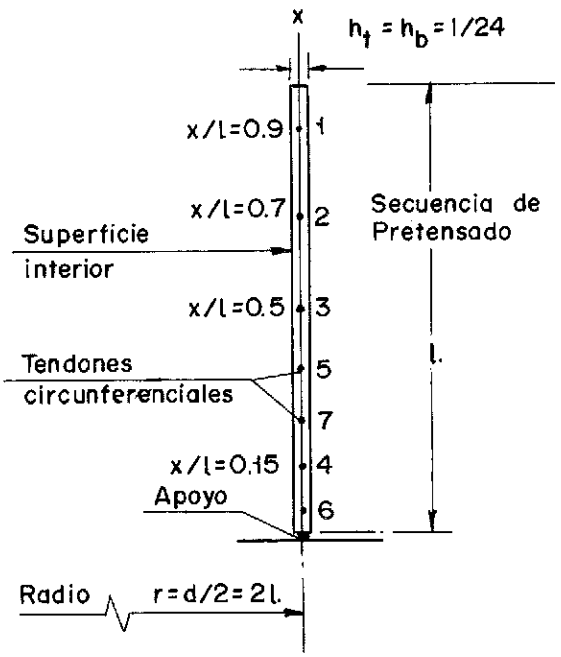


Fig. 1. Secuencia de tesado propuesta por Ghali (1979) para un depósito específico.

Esta situación tiene su razón de ser en depósitos de gran capacidad, debido, entre otros factores, a:

—La escasa influencia de los costes de movimientos de los equipos técnicos en el coste total del pretensado.

La alta cualificación técnica de los equipos humanos que realizan la puesta en tensión.

La repercusión estructural de un fallo con tendones con fuerzas de pretensado elevadas.

Ahora bien, para las capacidades de depósitos señaladas en este artículo, un orden de tesado no contiguo se vería con frecuencia incumplido en la práctica, debido a la incomodidad que representaría a los operarios.

Asimismo, pueden existir otros factores que propicien este incumplimiento como son, en muchos casos, las escasas medidas de control asociadas a este tipo de obra y el hecho de que la operación de tesado es llevada a cabo, con frecuencia, por empresas no especializadas en esta tarea.

Para resolver los problemas planteados cara a depósitos de pequeña capacidad con cordones unifilares, los criterios que se establecen en este artículo son:

—Limitar los momentos flectores verticales durante todo el proceso de tesado, de forma que no se produzca fisuración horizontal (se han seguido las recomendaciones BS 5336 (1976)).

—Dar una secuencia continua de tesado (no dejar sin tensión cordones intermedios ubicados en el mismo contrafuerte).

Así pues, ante criterios, como se han visto, con-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

trapuestos, tanto en el orden como en el tendón origen de tesado, se precisa buscar un orden de tesado óptimo, basado en una justificación de tipo tensional, sin olvidar que dicho orden de tesado debe responder a una secuencia continua.

El criterio tensional seguido en este artículo es que los máximos momentos flectores verticales (positivos y negativos) correspondientes a una etapa genérica de tesado, no superen los valores de los flectores verticales una vez finalizada la puesta en tensión de todos los tendones.

El cálculo de los depósitos se ha realizado mediante un método analítico, considerando la pared como una lámina cilíndrica, empotrada en la losa inferior de la base, la cual se encuentra simplemente apoyada sobre un medio elástico. Se tiene en cuenta, por tanto, la rigidez de la losa en la respuesta estructural de la pared, a través del establecimiento del equilibrio y compatibilidad en el nudo de unión de ambos elementos. Aguado et alt. (1985).

3. CASOS ESTUDIADOS

Para el estudio que se plantea se han elegido depósitos con dos contrafuertes y un trazado que implica cordones de $2\pi r$ de longitud, con anclajes al tresbolillo (los anclajes están alternados en contrafuertes diametralmente opuestos), tal como se muestra en la fig. 2. Esta solución es muy frecuente en la práctica y obedece, en la mayoría de los casos, a razones económicas, tal como demuestra Boixereu (1988).

relación diámetro interior/altura total (D/H=6,8 y D/H=3,6), con el fin de analizar su influencia sobre el orden de tesado.

Tras estudios paramétricos desarrollados previamente, las relaciones D/H reseñadas anteriormente representan, de forma aproximada, los extremos del rango de variación de D/H para el cual dicha relación se muestra óptima desde un punto de vista resistente y económico.

En la tabla 1 se presentan los datos correspondientes a los cuatro depósitos estudiados. En ella puede verse la inclusión de las cotas donde se ubican los cordones unifilares de 7 alambres de 0,6 pulgadas. La altura de la lámina de agua en estos depósitos es la altura total del depósito, menos el resguardo (0,5 m) y menos el espesor de la solera.

La distribución de tendones de pretensado, obtenida según la formulación propuesta en Aguado et alt. (1988), se racionaliza posteriormente para su implementación práctica en obra. Dicha distribución racionalizada de tendones de pretensado (cota medida desde solera) es la que se presenta en la tabla 1.

Una vez acotados los valores de diversas variables referentes a la geometría de los depósitos, se analizan a continuación algunos parámetros definitorios de la operación de tesado, manteniendo para ésta una secuencia continua. Tales parámetros son:

–Número de etapas de tesado (1 ó 2).

–Porcentaje de la fuerza de tesado en cada etapa (50 por 100 ó 100 por 100 de P_o).

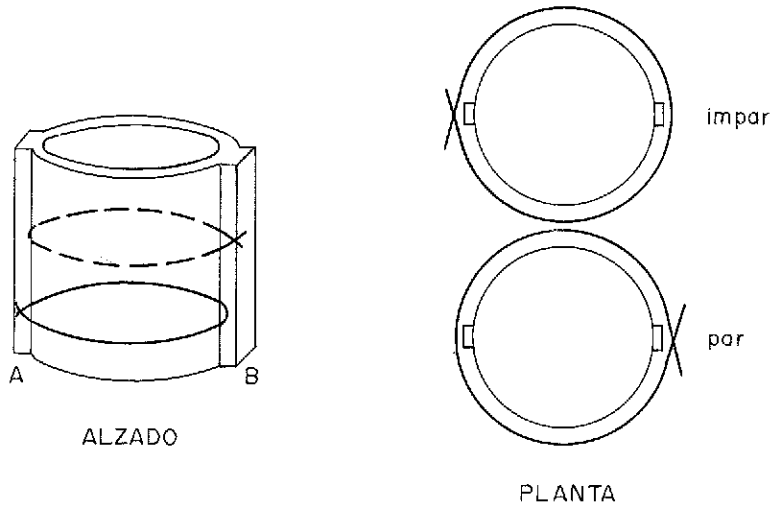


Fig. 2. Tipología y trazado de los depósitos analizados en el presente artículo.

Con objeto de estudiar la posible influencia de la capacidad del depósito en relación al orden de tesado, se han tomado tres capacidades diferentes V=1.000 m³, V=4.000 m³ y V=7.000 m³. Asimismo, para la capacidad intermedia (V=4.000 m³), se han empleado dos valores diferentes de la

–Extremo por el que se comienza (superior o inferior de la pared).

–Constancia o no del criterio anterior para cada contrafuerte.

Combinando las variables anteriores se obtienen

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tabla 1

Depósitos estudiados para analizar el orden de tesado

Casos estudiados	V = 1.000 m³ D = 17,16 m H = 5 m	V = 4.000 m³ D = 34,36 m H = 5 m	V = 4.000 m³ D = 27,42 m H = 7,5 m	V = 7.000 m³ D = 36,22 m H = 7,5 m
Tendón nº	Cota en (m)	Cota en (m)	Cota en (m)	Cota en (m)
1	0,10	0,10	0,10	0,05
2	0,35	0,25	0,20	0,15
3	0,60	0,45	0,30	0,25
4	0,85	0,65	0,45	0,35
5	1,15	0,85	0,60	0,45
6	1,45	1,05	0,75	0,55
7	1,80	1,25	0,90	0,65
8	2,20	1,50	1,05	0,75
9	2,70	1,80	1,20	0,90
10	3,35	2,10	1,35	1,05
11	4,00	2,45	1,50	1,20
12		2,90	1,65	1,35
13		3,45	1,80	1,50
14		4,00	2,00	1,65
15			2,20	1,80
16			2,40	1,95
17			2,60	2,10
18			2,80	2,25
19			3,00	2,40
20			3,25	2,55
21			3,50	2,70
22			3,75	2,85
23			4,05	3,00
24			4,40	3,20
25			4,75	3,40
26			5,25	3,60
27			6,00	3,80
28			6,75	4,05
29				4,30
30				4,60
31				5,00
32				5,40
33				6,05
34				6,70

8 opciones racionales de tesado que se presentan esquemáticamente en la tabla 2. Dichas opciones reflejan secuencias de tesado fácilmente sistematizables en construcción, independientemente de la capacidad y tipología del depósito.

4. RESULTADOS OBTENIDOS Y ANALISIS DE LOS MISMOS

En este apartado se evaluan los resultados obtenidos (momentos máximos negativos y positivos) al final de cada una de las etapas de tesado, para las 8 opciones tomadas en los cuatro casos de depósitos estudiados dados en la tabla 1.

Estos resultados se presentan en tablas, excepto los correspondientes a los depósitos con altura H= =7,5 m que dan lugar a 28 y 34 tendones (cordones unifilares) de 4.000 m³ y 7.000 m³. Ello se debe a que algunas de las opciones planteadas originan 56 y 68 operaciones de tesado, conduciendo a tablas excesivamente densas y farragosas para su análisis.

4.1. Depósitos de 1.000 m³

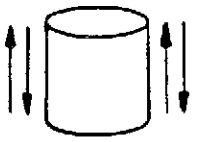
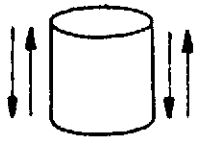
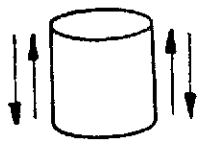
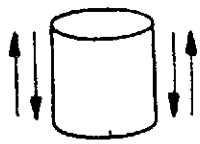
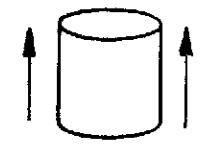
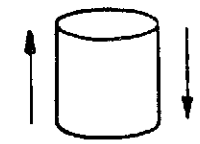
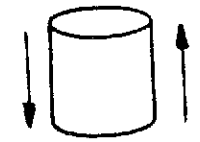
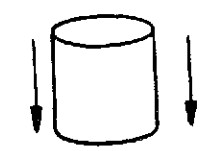
En la tabla 3 se presentan los resultados correspondientes al depósito de 1.000 m³. En la misma puede verse, para las distintas secuencias de tesado, el orden en que se da tensión a cada cordón y los valores de los máximos momentos negativo y positivo que se obtienen al final de cada etapa de tesado.

El criterio de análisis seguido es, tal como se ha expuesto con anterioridad, que los valores citados no superen los correspondientes valores obtenidos al final de la puesta en tensión.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tabla 2

Opciones analizadas sobre las secuencias de tesado

Opción	Esquema		Orden de tesado
	A	B	
1			Subir por A al 50% de Po –Bajar por A del 50% al 100% de Po Análoga secuencia en el contrafuerte B
2			–Bajar por A al 50% de Po –Subir por A del 50% al 100% de Po –Análoga secuencia que el contrafuerte B
3			–Bajar por A al 50% de Po –Subir por A del 50% al 100% de Po –Subir por B al 50% de Po –Bajar por B del 50% al 100% de Po
4			–Subir por A al 50% de Po –Bajar por A del 50% al 100% de Po –Bajar por B al 50% de Po Subir por B del 50% al 100% de Po
5			Subir por A al 100% de Po –Subir por B al 100% de Po
6			Subir por A al 100% de Po Bajar por B al 100 % de Po
7			–Bajar por A al 100% de Po Subir por B al 100% de Po
8			–Bajar por A al 100% de Po Bajar por B al 100% de Po

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tabla 3

Momentos positivos y negativos máximos. Depósitos 1.000 m³

	Opción 1 50%/50%			Opción 2 50%/50%			Opción 3 50%/50%			Opción 4 50%/50%		
Tesado N°	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo
1	1	0,033	0,037	11	0,065	−0,085	11	0,065	−0,085	1	0,033	−0,037
2	3	0,138	0,251	9	0,110	0,054	9	0,220	−0,054	3	0,138	−0,251
3	5	0,218	0,435	7	0,129	0,080	7	0,129	−0,080	5	0,218	−0,435
4	7	0,220	−0,518	8	0,154	−0,261	5	0,154	−0,261	7	0,220	−0,518
5	9	0,179	−0,521	3	0,185	0,475	3	0,185	−0,475	9	0,179	−0,521
6	11	0,178	0,512	1	0,178	−0,512	1	0,178	−0,512	11	0,178	−0,512
7	11	0,177	0,504	1	0,171	−0,549	1	0,171	−0,549	11	0,177	−0,504
8	9	0,155	−0,507	3	0,206	0,763	3	0,206	−0,763	9	0,155	−0,507
9	7	0,263	0,590	5	0,396	0,947	5	0,396	0,947	7	0,263	−0,590
10	5	0,328	0,774	7	0,398	−1,030	7	0,398	−1,030	5	0,328	−0,774
11	3	0,363	−0,988	9	0,357	−1,033	9	0,357	−1,033	3	0,363	−0,988
12	1	0,356	1,025	11	0,356	−1,025	11	0,356	−1,025	1	0,356	−1,025
13	2	0,361	−1,188	10	0,334	−1,015	2	0,361	−1,188	10	0,334	−1,015
14	4	0,451	−1,405	8	0,223	−1,006	4	0,451	−1,405	8	0,223	−1,006
15	6	0,530	−1,541	6	0,302	−1,142	6	0,530	1,541	6	0,302	−1,142
16	8	0,419	−1,532	4	0,392	−1,359	8	0,419	−1,532	4	0,392	−1,359
17	10	0,397	−1,522	2	0,397	−1,522	10	0,397	−1,522	2	0,397	−1,522
18	10	0,375	−1,512	2	0,402	−1,686	10	0,375	−1,512	2	0,402	−1,686
19	8	0,264	−1,503	4	0,492	−1,902	8	0,264	−1,503	4	0,492	1,902
20	6	0,343	−1,640	6	0,571	−2,039	6	0,343	1,640	6	0,571	−2,039
21	4	0,433	−1,856	8	0,460	−2,029	4	0,433	1,856	8	0,460	−2,029
22	2	0,438	−2,020	10	0,438	−2,020	2	0,438	−2,020	10	0,438	−2,020

Tabla 3 (Cont.)

Momentos positivos y negativos máximos. Depósito 1.000 m³

	Opción 5 100%			Opción 6 100%			Opción 7 100%			Opción 8 100%		
Tesado N°	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo
1	1	0,067	−0,074	1	0,067	−0,074	11	0,131	−0,170	11	0,131	−0,170
2	3	0,276	−0,502	3	0,276	−0,502	9	0,220	−0,108	9	0,220	−0,108
3	5	0,436	−0,870	5	0,436	−0,870	7	0,257	−0,160	7	0,257	−0,160
4	7	0,440	−1,036	7	0,440	1,036	5	0,308	−0,522	5	0,308	−0,522
5	9	0,359	−1,042	9	0,359	−1,042	3	0,370	−0,951	3	0,370	−0,951
6	11	0,356	−1,025	11	0,356	−1,025	1	0,356	1,025	1	0,356	1,025
7	2	0,365	−1,351	10	0,312	−1,005	2	0,365	−1,351	10	0,312	1,005
8	4	0,564	−1,784	8	0,116	−0,987	4	0,546	−1,784	8	0,116	−0,987
9	6	0,704	2,058	6	0,266	−1,260	6	0,704	−2,058	6	0,266	−1,260
10	8	0,482	−2,039	4	0,429	−1,693	8	0,482	−2,039	4	0,429	−1,693
11	10	0,438	−2,020	2	0,438	2,020	10	0,438	−2,020	2	0,438	−2,020

En la primera secuencia de tesado (véase tabla 2) se obtiene, para la decimoquinta etapa de tesado, un valor del máximo momento positivo (M^{+}_{max} =0,530 m.t) superior al obtenido al final del tesado (M^{+}_{max} =0,438 m.t). Esto mismo ocurre en las etapas vigésima y vigésima primera de la segunda secuencia de tesado, produciéndose además, en este caso, que el máximo momento negativo correspondiente a estas etapas (M^{-}_{max}=−2,039 m.t y −2,029 m.t respectivamente) es superior, asimismo, al máximo momento negativo al final del tesado (M^{-}_{max} = −2,020 m.t).

La tercera y cuarta secuencia tienen, respectivamente, un comportamiento análogo al expuesto para las secuencias una y dos.

Las secuencias quinta y séptima dan, en las novena y décima etapas de tesado, valores de los momentos máximos positivos y negativos superiores a los obtenidos al final de la puesta en tensión.

Por su parte, la secuencia sexta da, en su cuarta etapa de tesado, un momento positivo un poco superior al obtenido al final, mientras que en la secuencia octava los máximos momentos se obtienen en la fase final de tesado, lo cual nos presentaría ésta como la solución óptima. Recordemos que esta solución corresponde a iniciar la puesta en tensión de arriba-abajo, primero en uno de los contrafuertes y luego en el otro. Esta solución está en línea con los criterios dados con anterioridad por otros autores.

Si comparamos esta solución (opción 8) con la solución adoptada en la actualidad (opción 1) vemos, en este segundo caso, que si bien el momento máximo negativo se alcanza como en la opción 8 en la etapa final, el momento máximo positivo supera en un 21 por 100 el valor obtenido para el correspondiente de la secuencia óptima (opción 8). El valor del (M^{+}_{max} =0,530 m.t) daría lugar a unas tensiones de tracción, según meridianos, del orden de 14 kp/cm², que con un hormigón como el de estos depósitos no debe, en condiciones normales, dar lugar a fisuración horizontal según paralelos.

Por otro lado, si comparamos la solución actual (opción 1) con esa misma opción conceptual pero dando tensión en una etapa al 100 por 100, es decir opción 5, se tiene, tal como se ha dicho, que es-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ta última supera los valores máximos correspondientes a la secuencia óptima.

Además, en lo referente al valor de M^{+}_{max}, éste supera en un 60 por 100 el valor correspondiente al óptimo, lo que representa tensiones de tracción, según meridianos, del orden de 19 kp/cm², es decir, un 40 por 100 superiores a las obtenidas según la secuencia actual. Dicho orden de magnitud podría, si actúan concomitantemente otros factores negativos, dar lugar a fisuras según paralelos.

4.2. Depósitos de 4.000 m³ y 7.000 m³

Depósito de 4.000 m³ (D=34,36 m y H=5 m)

En la tabla 4 se presentan los resultados correspondientes al depósito de 4.000 m³ (D=34,36 m y H=5 m de la tabla 1). Por otro lado, tal como se ha dicho al principio de este apartado, no se incluyen las tablas correspondientes a los depósitos de 4.000 m³ (D=27,42 m y H=7,5 m de la tabla 1) y de 7.000 m³, por la farragosidad de las mismas, si bien se hace un análisis de los resultados obtenidos para estos depósitos.

Es interesante observar en la tabla 4, que para esta tipología de depósitos, el criterio de análisis seguido se verifica en cuatro de las opciones planteadas. Estas son:

– Opción 1.–Tesado de abajo-arriba al 50 por 100 por contrafuerte A.

Tesado de arriba-abajo del 50 por 100 al 100 por 100 por el mismo contrafuerte.

–Igual operación en el otro contrafuerte.

– Opción 3.–Tesado de arriba-abajo al 50 por

Tabla 4

Momentos positivos y negativos máximos. Depósito 4.000 m³

	Opción 1 50%/50%			Opción 2 50%/50%			Opción 3 50%/50%			Opción 4 50%/50%		
Tesado N°	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo
1	1	0,013	–0,024	13	0,090	0,037	13	0,090	0,037	1	0,013	–0,024
2	3	0,048	–0,141	11	0,110	–0,070	11	0,110	0,070	3	0,048	0,141
3	5	0,117	–0,298	9	0,154	–0,189	9	0,154	0,189	5	0,117	0,298
4	7	0,181	0,452	7	0,175	–0,344	7	0,175	–0,344	7	0,181	–0,452
5	9	0,210	–0,571	5	0,190	–0,500	5	0,190	–0,500	9	0,210	–0,571
6	11	0,226	–0,638	3	0,191	–0,617	3	0,191	–0,617	11	0,226	–0,638
7	13	0,189	–0,642	1	0,189	–0,642	1	0,189	–0,642	13	0,189	–0,642
8	13	0,181	–0,645	1	0,186	–0,666	1	0,186	–0,666	13	0,181	–0,645
9	11	0,264	–0,712	3	0,187	–0,783	3	0,187	–0,783	11	0,264	–0,712
10	9	0,315	–0,831	5	0,224	0,940	5	0,224	–0,940	9	0,315	–0,831
11	7	0,364	–0,985	7	0,336	1,094	7	0,336	–1,094	7	0,364	–0,985
12	5	0,379	–0,142	9	0,384	–1,213	9	0,384	1,213	5	0,379	–1,142
13	3	0,380	0,259	11	0,415	–1,280	11	0,415	1,280	3	0,380	–1,259
14	1	0,378	0,283	13	0,378	–1,283	13	0,378	1,283	1	0,378	1,283
15	2	0,376	1,355	14	0,325	–1,261	2	0,376	1,355	14	0,325	–1,261
16	4	0,382	–1,499	12	0,315	–1,296	4	0,382	–1,499	12	0,315	–1,296
17	6	0,432	–1,658	10	0,399	–1,391	6	0,432	–1,658	10	0,399	–1,391
18	8	0,525	–1,800	8	0,479	–1,532	8	0,525	–1,800	8	0,479	1,532
19	10	0,575	–1,894	6	0,508	–1,691	10	0,575	–1,894	6	0,508	–1,691
20	12	0,566	–1,929	4	0,514	–1,835	12	0,566	–1,929	4	0,514	–1,835
21	14	0,513	–1,907	2	0,513	–1,907	14	0,513	–1,907	2	0,513	–1,907
22	14	0,461	1,885	2	0,511	–1,979	14	0,461	1,885	2	0,511	–1,979
23	12	0,450	–1,919	4	0,517	–2,122	12	0,450	–1,919	4	0,517	2,122
24	10	0,534	–2,014	6	0,572	2,282	10	0,534	–2,014	6	0,572	2,282
25	8	0,614	2,155	8	0,696	–2,423	8	0,614	–2,155	8	0,696	–2,423
26	6	0,645	2,315	10	0,725	–2,517	6	0,645	2,315	10	0,725	–2,517
27	4	0,663	–2,458	12	0,701	–2,552	4	0,663	–2,458	12	0,701	2,552
28	2	0,664	–2,530	14	0,664	2,530	2	0,664	–2,530	14	0,664	–2,530

Tabla 4 (Cont.)

	Opción 5 100%			Opción 6 100%			Opción 7 100%			Opción 8 100%		
Tesado N°	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo	Cordón	Máximo Positivo	Máximo Negativo
1	1	0,026	–0,049	1	0,262	–0,049	13	0,179	0,074	13	0,179	–0,074
2	3	0,097	0,282	3	0,097	–0,282	11	0,220	–0,140	11	0,220	–0,140
3	5	0,235	–0,596	5	0,235	–0,596	9	0,309	–0,378	9	0,309	0,378
4	7	0,362	–0,905	7	0,362	–0,905	7	0,350	0,687	7	0,350	–0,687
5	9	0,421	–1,143	9	0,421	–1,143	5	0,381	–1,001	5	0,381	–1,001
6	11	0,452	1,276	11	0,452	–1,276	3	0,383	–1,234	3	0,383	1,234
7	13	0,378	–1,283	13	0,378	–1,283	1	0,378	1,283	1	0,378	–1,283
8	2	0,374	–1,427	14	0,272	–1,239	2	0,374	–1,427	14	0,272	–1,239
9	4	0,387	–1,714	12	0,253	–1,309	4	0,387	1,714	12	0,253	–1,309
10	6	0,553	–2,033	10	0,459	1,498	6	0,553	–2,033	10	0,459	–1,498
11	8	0,728	–2,316	8	0,580	–1,780	8	0,728	–2,316	8	0,580	–1,780
12	10	0,786	–2,505	6	0,638	–2,099	10	0,786	2,505	6	0,638	–2,099
13	12	0,754	–2,575	4	0,663	2,386	12	0,754	–2,575	4	0,663	–2,386
14	14	0,664	–2,530	2	0,664	–2,530	14	0,664	–2,530	2	0,664	2,530

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

100 por contrafuerte A.

–Tesado de abajo-arriba del 50 por 100 al 100 por 100 por el mismo contrafuerte.

Inversa operación en el otro contrafuerte.

Opción 6.–Tesado de abajo-arriba al 100 por 100 por contrafuerte A.

–Tesado de arriba-abajo al 100 por 100 por contrafuerte B.

–Opción 8. Tesado de arriba-abajo al 100 por 100 por contrafuerte A.

–Igual operación por contrafuerte B.

En las otras opciones de tesado (2, 4, 5 y 7) los valores máximos de los momentos positivos y negativos al final de etapas de tesado intermedias, superan los correspondientes valores en el final de la puesta en tensión. En consecuencia, dichas opciones son desestimadas.

Las opciones 1 y 3 cumplen con el criterio impuesto de unos escalones, en los valores de los máximos momentos (positivo y negativo), menores que las opciones 6 y 8; si bien con un mayor número de operaciones de tesado (doble).

Ante estos resultados, el proyectista puede fijar la secuencia de tesado que estime oportuna, atendiendo a las características propias de la obra; si bien la opción que desde el punto de vista tensional cumple el criterio definido en las dos tipologías estudiadas hasta ahora (1.000 m³ y 4.000 m³) es la opción 8 y en su defecto la opción 1.

Depósito de 4.000 m³ (D=27,42 m y H=7,5 m)

En la otra tipología de depósitos de 4.000 m³ analizados (D=27,42 m y H=7,5 m) cuyos resultados, tal como se ha dicho, no se presentan aquí, se han estudiado asimismo las ocho opciones de tesado.

Para aquéllas que hacen el tesado en dos etapas, las opciones 1 y 3 alcanzan valores del máximo momento positivo en la etapa 55 (sobre 56 etapas) tomando el valor de $M^{+}_{max} = 1{,}067$ m.t, mientras que el máximo momento negativo se alcanza en la última etapa de tesado ($M^{-}_{max} = -4{,}040$ m.t). Ahora bien el máximo momento positivo al final del tesado es $M^{+}_{max} = 1{,}064$ m.t, por lo que el valor alcanzado en la etapa 55 es un 0,3 por 100 superior a este valor y, en consecuencia, prácticamente despreciable.

Las opciones 2 y 4, en las cuales la secuencia de tesado termina subiendo, se obtiene el máximo valor del momento positivo en la etapa 50 ($M^{+}_{max} = 1{,}163$ m.t). Este valor representa un incremento del 9,3 por 100 con respecto al correspondiente valor al final de la puesta en tensión. En cuanto al máximo valor del momento negativo alcanzado en la etapa 52 ($M^{-}_{max} = 4{,}056$ m.t) supera en un 0,4 por 100 al correspondiente valor obtenido al final del tesado.

Para aquellas opciones de tesado que sólo emplean una etapa de tesado al 100 por 100, las opciones 6 y 8 alcanza el máximo momento positivo en la etapa 27 ($M^{+}_{max} = 1{,}070$ m.t) lo cual representa un incremento del 0,56 por 100 respecto al correspondiente valor obtenido al final del tesado. El máximo momento negativo ($M_{max} = 4{,}040$ m.t) se obtiene en la última etapa de tesado.

En las opciones 5 y 7, cuya secuencia de tesado termina subiendo, el valor máximo del momento positivo se alcanza en la etapa 22 ($M^{+}_{max} = 1{,}262$ m.t) lo cual representa un incremento del 18,6 por 100 respecto al correspondiente valor obtenido al final del tesado. En lo que a momentos negativos se refiere, el valor máximo se alcanza en la etapa 24 ($M^{-}_{max} = 4{,}072$ m.t) que representa un incremento del 0,8 por 100 respecto al alcanzado en el último tesado. Como consecuencia de los resultados obtenidos, especialmente en lo que hace referencia a M^{+}_{max}, estas secuencias se estiman como no idóneas.

Como resumen, cabe reseñar que ninguna de las opciones verifica que los momentos máximos se alcancen en la etapa final de tesado. No obstante, las opciones 1, 3, 6 y 8 están muy próximas a cumplir dicho requisito. Por ello, cualquiera de ellas podría utilizarse en la práctica y serán otro tipo de consideraciones, vistas con anterioridad, las que permitirán que el proyectista y/o constructor decida en uno u otro sentido.

En cuanto a la posible influencia de la relación D/H analizada para estos depósitos (V=4.000 m³) sobre la secuencia de tesado, vemos que la misma es insignificante, habiéndose encontrado las mismas secuencias como las más idóneas, si bien con pequeñas diferencias en cuanto a los valores máximos de los momentos.

Depósito de 7.000 m³ (D=36,22 m y H=7,5 m)

Para esta tipología de depósitos, de forma análoga a como se ha visto con anterioridad, se han analizado las 8 secuencias de tesado. Para aquéllas que hacen el tesado en dos etapas, las opciones 1 y 3 alcanzan valores del máximo momento positivo en la etapa 65 (sobre 68), tomando el valor de $M^{+}_{max} = 1{,}1618$ m.t. Comparando este valor con el correspondiente obtenido en la última etapa ($M^{+}_{max} = 1{,}1563$ m.t), vemos que la diferencia es de un 0,48 por 100 superior. En cuanto a momentos negativos, el valor máximo se alcanza para la etapa final de tesado.

Las opciones 2 y 4, en las cuales la secuencia de tesado termina subiendo, se obtiene el máximo valor del momento positivo en la etapa 62 ($M^{+}_{max} = 1{,}249$ m.t). Este valor representa un incremento del 8 por 100 con respecto al correspondiente valor al final de la puesta en tensión. En cuanto al máximo valor del momento negativo, éste se alcanza, en la etapa 64 ($M^{-}_{max} = 4{,}534$ m.t), superando en un 0,3 por 100 al correspondiente valor obtenido en la etapa final de tesado.

Para aquellas opciones de tesado que sólo emplean una etapa de tesado al 100 por 100, las opciones 6 y 8 alcanzan el máximo momento positivo en la etapa 31 ($M^{+}_{max} = 1{,}167$ m.t) lo cual representa un incremento del 0,95 por 100 respecto al correspondiente valor obtenido al final de la puesta en tensión. El máximo momento negativo se obtiene en la última etapa de tesado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

En las opciones 7 y 7, cuya secuencia de tesado termina subiendo, el valor máximo del momento positivo se alcanza en la etapa 28 (M^{+}_{max} = 1,342 m.t) lo cual representa un incremento del 16 por 100 respecto al correspondiente valor obtenido al final del tesado. En lo que a momentos negativos se refiere, el valor máximo se alcanza en la etapa 30 (M^{-}_{max} = 4,549 m.t), que representa un incremento del 0,65 por 100 respecto al alcanzado en el último tesado. Como consecuencia de los resultados obtenidos, especialmente en lo que hace referencia a M^{+}_{max}, estas secuencias se estiman como no idóneas.

Como resumen, cabe reseñar que ninguna de las opciones verifica que los momentos máximos se alcancen en la etapa final de tesado. No obstante las opciones 1, 3, 6 y 8 están muy próximas a cumplir dicho requisito. Por ello, y tal como se ha dicho con anterioridad, el proyectista y/o constructor tiene la opción de elegir aquella secuencia que estime más oportuna en relación a su obra.

5. CONCLUSIONES

En la tipología de depósitos de hormigón pretensado de pequeña capacidad (entre 500 y 8.000 m³) con armaduras postesas no adherentes, objeto de estudio en este trabajo, es razonable desde distintos puntos de vista (económico, estructural, simplicidad de trabajo) plantear una secuencia continua de tesado (no dejar sin tesar tendones contiguos anclados en el mismo extremo).

Dentro de esta secuencia, el orden de tesado que minimiza los momentos flectores verticales y las operaciones de tesado es la opción 8 que se ha descrito con anterioridad. Ella consiste en tesar al 100 por 100 de arriba a abajo en un contrafuerte y posteriormente en el otro.

La secuencia comúnmente utilizada en la actualidad (opción 1) conduce a valores de momentos flectores similares a la opción 8, si bien duplica las operaciones de tesado.

6. AGRADECIMIENTOS

Sirva este párrafo para dar las gracias a la disuelta Corporación Metropolitana de Barcelona y a la empresa Hormigones Proyectados, S.A., por su contribución económica y técnica, a través de los convenios TC-197 y TC-652 con la U.P.C., que han hecho posible los estudios allí recogidos, parte de los cuales se incluyen en este artículo.

7. BIBLIOGRAFIA

–AGUADO, A., MARI, A.R., PEÑALVA, C. (1985). "Proyecto tipo de depósitos cilíndricos, para agua, de hormigón proyectado, con armaduras postesas. 2 tomos. Convenio TC-197 entre Universidad Politécnica de Cataluña y Corporación Metropolitana de Barcelona.

–AGUADO, A., MARI, A.R., MIRAMBELL, E. y BOIXEREU, E. (1988). "Informe relativo a criterios de diseño y orden de tesado en depósitos de hormigón proyectado, con armaduras postesas. 2 tomos. Convenio TC-652 entre Universidad Politécnica de Cataluña y Hormigones Proyectados, S.A.

–ANTON, V. y LLOMBART, J.A. (1980). "Depósitos cilíndricos pretensados. Consideraciones sobre proyecto". Rev. Hormigón y Acero nº 157.

–B.S.I. (1976). "Code of Practice for the Structural Use of Concrete for Retaining Aqueous Liquids". BS-5337. British Standard Institute London.

BOIXEREU, E. (1988). "Diseño y orden de tesado en depósitos de hormigón proyectado, con armaduras postesas". Tesina de especialidad. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

–GHALI, A. (1979). "Circular Storage Tanks and Silos". Ed. E & I.N. Spon Ltd. London.

–JIMENEZ, O. (1987). "Depósitos de hormigón proyectado, con armaduras postesas, realizados por Hormigones Proyectados, S.A.". Video de divulgación presentado en la XII Asamblea Técnica Nacional de la A.T.E.P. Granada.

RESUMEN

Los estudios sistemáticos sobre el orden de tesado en depósitos circulares de hormigón pretensado con armaduras postesas son escasos y más cuando se trata de depósitos de pequeña capacidad. Sin embargo, un estudio adecuado del orden de tesado puede proporcionar criterios para minimizar la cuantía de armadura pasiva, encontrar un correcto estado tensional en cada etapa y, en general, ayudar a reducir el coste global de la ejecución de la estructura.

El presente artículo incide en el tema indicado y, tras un detallado estudio, se propone un orden de tesado para depósitos de pequeña capacidad (hasta 8.000 m³) atendiendo a razones resistentes y constructivas.

SUMMARY

Systematic studies about tensioning order of tendons in circular post-tensioned concrete water tanks are rather scarce and specially when dealing with small tanks. However a study of the adequate order of post-tensioning may provide criteria to minimize the amount of mild steel, to find the right stress state at each tensioning stage and, in general, to reduce the total construction cost of the structure.

In this paper a proposal of postensioning order for small capacity water tanks (until 8000 m³) is made, taking into account resistant and constructive criteria.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Jornadas sobre "la Protección del Hormigón"

Organizadas por la Cátedra de Tecnología del Hormigón, del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Dundee, se van a celebrar, durante los días 11-13 de setiembre del presente año 1990, en Dundee (Escocia), unas Jornadas para el estudio de la "protección del hormigón".

El hormigón está considerado como el material constructivo más utilizado actualmente en todo el mundo. Generalmente, su comportamiento es satisfactorio; pero algunas veces se presentan fallos y no llega a satisfacer todas las prestaciones requeridas. Los avances logrados en materiales y ejecución, han ampliado el campo de la utilización del hormigón, pero también han producido efectos contraproducentes en su comportamiento. El objetivo fundamental de estas Jornadas, es lograr una puesta al día de los actuales conocimientos sobre los métodos utilizados para lograr una mejor protección del hormigón y asegurar su adecuado comportamiento en la práctica constructiva.

Para estas Jornadas se han seleccionado seis temas principales, para cada uno de los cuales habrá siete Ponencias individuales.

Estos temas son los siguientes:

Tema 1.–El Hormigón, como material de construcción

- Ventajas del hormigón como material de construcción.
- Protección proporcionada por el hormigón.
- Mecanismos de ataque.

Tema 2.–Métodos para la protección del hormigón

- Recubrimientos superficiales para mejorar su comportamiento.
- Recubrimientos de impermeabilización.
- Recubrimientos decorativos.
- Recubrimientos inorgánicos.
- Recubrimiento de las armaduras.
- Impregnaciones superficiales.

Tema 3.–Protección de las estructuras de hormigón

- Ambientes interiores.
- Ambientes exteriores.
- Climas extremos.
- Aplicaciones en ambientes marítimos.
- Aplicaciones en estructuras marítimas.
- Ambientes subterráneos agresivos.
- Depósitos de líquidos y tanques de almacenamiento.

Tema 4.–Protección a través del cálculo

- Ajuste de las deformaciones y control de la fisuración.
- Características de impermeabilidad.
- Importancia de los detalles constructivos.
- Aspectos arquitectónicos del hormigón.
- Compatibilidad de los constituyentes del hormigón.
- Utilización de armaduras no férricas.
- Proyecto de las reparaciones.

Tema 5.–Protección a través de la ejecución

- Control de calidad de la fabricación y la ejecución.
- Curado.
- Buena apariencia y requisitos de impermeabilidad.
- Utilización de elementos prefabricados.
- Aplicación in situ de recubrimientos.
- Seguridad durante el transporte y manejo de los elementos constructivos.
- Mantenimiento de las estructuras de hormigón.

Tema 6.–Influencia del Mercado Unico Europeo, sobre las habituales prácticas constructivas

- Normas armonizadas Europeas.
- Directiva de materiales de construcción.
- EC2.- Estructuras de hormigón.

Simultáneamente con estas Jornadas, se celebrará una exposición de materiales de construcción.

El idioma oficial será el inglés.

Para mayor información, los interesados deberán dirigirse a:

Dr R. K Dhir
Concrete Technology Unit
Department of Civil Engineering
The University
Dundee DD1 4HN
ESCOCIA

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Los cementos reforzados con fibra de vidrio

L.Sánchez Paradela y V. Sánchez Gálvez
Departamento de Ciencia de Materiales
E.T.S. de Ing. de Caminos.
Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

Como es conocido, los morteros y hormigones son materiales que poseen excelentes propiedades para su utilización en la construcción. Sin embargo, su escasa resistencia a la tracción y baja ductilidad exigen la utilización de armaduras de refuerzo y así, durante décadas, se han utilizado el hormigón armado primero y el hormigón pretensado después con excelentes resultados. En estos materiales, el hormigón resiste los esfuerzos de compresión, mientras que las armaduras de acero soportan los esfuerzos de tracción, lo que obliga a una disposición ordenada de dichas armaduras, con el consiguiente encarecimiento en mano de obra.

Desde hace más de 100 años, se pensó en la posibilidad de mejorar la resistencia a tracción de los cementos y morteros mediante adición de fibras de refuerzo. Así nacieron los fibrocementos, en los que en el momento del amasado se añaden al cemento fresco fibras de alta resistencia a la tracción que quedan dispersas en la masa del cemento y distribuidas al azar. El inconveniente de tener fibras en zonas en las que el material trabaja a compresión y por tanto no serían necesarias, se compensa por la reducción de costes de mano de obra al permitir un proceso muy automatizado. Las fibras utilizadas en un principio, fueron casi exclusivamente las de asbesto o amianto, por ser fibras naturales de bajo coste y fácil empleo.

Desde hace varias décadas se viene experimentando con la utilización de nuevas fibras para el refuerzo de cementos, en sustitución de las de asbesto que han sido prohibidas en varios países, por problemas de salud. Entre las fibras experimentales investigadas se hallan las de acero, vidrio, nylón, polipropileno, sisal, carbono, aramida, etc. Como puede verse, el número de posibles fibras de refuerzo es muy elevado y cada una presenta ventajas e inconvenientes frente a sus competidoras. Sin embargo, por razones fundamentalmente económicas, muy pocas de estas fibras han llegado, hasta el momento presente, a industrializarse y emplearse de forma extensa en el campo de la construcción.

Entre ellas se encuentra la fibra de vidrio, objeto de este trabajo, que utilizada para el refuerzo de cementos da origen al denominado GRC ("Glass Reinforced Cement") que viene empleándose desde hace unos treinta años en el campo de la construcción. Presenta indudables ventajas frente a otros tipos de cementos reforzados con fibras (ligereza, resistencia frente a la corrosión) y también problemas que conviene conocer para evitarlos o al menos tenerlos presentes.

Las realizaciones prácticas del GRC en el campo de la construcción son numerosísimas y no cabría en este trabajo realizar un inventario, siquiera somero, de las utilizaciones más destacadas. Sin embargo, a modo de ejemplo de la extensión e importancia de su utilización, pueden citarse algunas obras en España en las que se emplearon paneles de GRC para construcción de fachadas y en terminación de interiores (1). Entre las primeras, pueden mencionarse el edificio de la Delegación del Ministerio de Economía, en Córdoba, el edificio de 24 plantas de oficinas y apartamentos de la Plaza de Castilla de Madrid, la sede de la Televisión de Galicia, cerca de Santiago de Compostela y el Cen-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

tro de Seguimiento de Satélites de la Compañía Telefónica, en la provincia de Guadalajara. Entre las segundas, citaremos el interior de la terminal nacional del aeropuerto de Barajas y el decorado del techo en el nuevo vestíbulo de la estación de Sol del metro madrileño.

2. MATERIALES Y PROCESOS DE FABRICACION

El GRC es, en esencia, cemento reforzado con fibras de vidrio, si bien pueden añadirse a la pasta aditivos, tales como humo de sílice, cenizas volantes, aireantes, aceleradores de fraguado, etc., además de la arena en el caso de fabricar un mortero. Los cementos utilizados son idénticos a los empleados en hormigón armado, por lo que no es precisa mención especial.

Por su especificidad, conviene en cambio detenerse en el tipo de fibra de vidrio utilizada en la fabricación del GRC.

Los fabricantes de fibra de vidrio usualmente producen lana de vidrio, en la cual filamentos de vidrio de pocas micras de diámetro se entrecruzan formando una masa esponjosa, de muy baja conductividad térmica, por lo que se utiliza como aislante. La lana de vidrio es muy difícil de utilizar para el refuerzo de cementos, por la dificultad de amasado.

La forma usual de obtener fibra de vidrio de refuerzo es la bobina o "roving". El vidrio fundido sale del tanque a través de un número elevado de hileras (normalmente 204) constituyendo los filamentos. Estos se recogen en un tambor giratorio, formando un hilo de dicho número de filamentos. Finalmente el hilo se enrolla para formar una bobina.

La fibra se vende en forma de bobina que puede alimentar una máquina de corte para producir cualquier longitud deseada. Dependiendo del tipo de proceso de fabricación del GRC, puede también utilizarse la fibra de vidrio en la forma de hilos cortados o de mantas. Estas últimas están constituidas por hilos de vidrio cortados a una longitud apropiada (usualmente una mezcla de 50 mm y 25 mm) depositados al azar sobre una cinta transportadora y mantenidos unidos entre sí por medio de un pegamento.

En cuanto a los tipos de vidrio utilizados en la fabricación del GRC, inicialmente se empleó el vidrio E, empleado comúnmente en la fabricación del poliéster reforzado. Tras observar que esta fibra sufría un ataque químico en presencia de los álcalis, se comenzó a utilizar en la fabricación del GRC el vidrio AR ("alkalí resistant") desarrollado por la Compañía Pilkinton Brothers con el nombre comercial CEN-FIL. Las composiciones químicas y propiedades mecánicas de ambas fibras se recogen en la Tabla 1 (2). Posteriormente, en distintos países se han desarrollado otras composiciones resistentes a los álcalis, con base en el óxido de circonio, esencialmente similares a la inicial del CEN-FIL.

La fabricación del GRC puede realizarse siguiendo la técnica del premezclado ("pre-mix") en la que los hilos, previamente cortados a la longitud requerida, se añaden durante el amasado como un aditivo más. Por este procedimiento puede utilizarse hasta un 7,5 por 100 en peso de fibra de vidrio, empleando aditivos que faciliten la mezcla. En cualquier caso, los fabricantes de fibra lo desaconsejan por el posible daño de la fibra durante el amasado. En el método de rociado ("spray up") se amasa solamente el cemento, el agua y los aditivos (incluida la arena). La pasta se bombea alimentando a la máquina rociadora que lleva incorporada una máquina cortadora de los hilos de la bobina. La máquina proyecta simultáneamente la pasta de cemento junto con los hilos de vidrio cortados, sobre el molde; a continuación se compactan y curan según el procedimiento usual. Este proceso exige una mezcla suficientemente fluida para permitir el bombeo continuo, lo que facilita la compactación pero reduce la resistencia del material. En la producción industrial de paneles de GRC se obvia este inconveniente añadiendo, al final del proceso de

Tabla 1

Composiciones químicas y propiedades mecánicas de fibras de vidrio utilizadas en el refuerzo de cementos

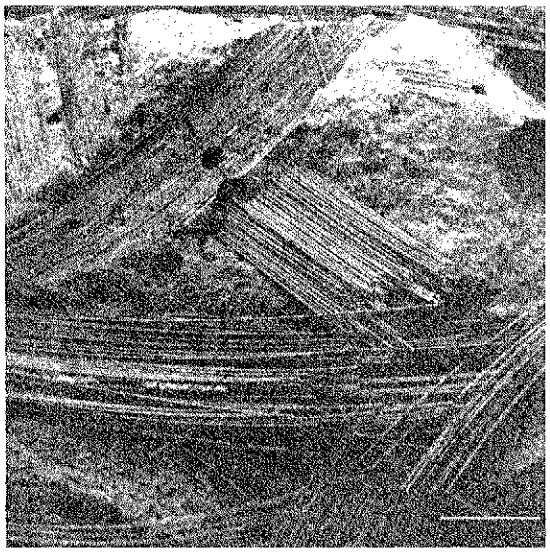
	SiO_2	Na_2O	B_2O_3	Al_2O_3	MgO	CaO	ZrO_2	Li_2O
Fibra E	52,4	0,8	10,4	14,4	5,2	16,6	–	
Fibra AR	71	11		1	–	–	16	1

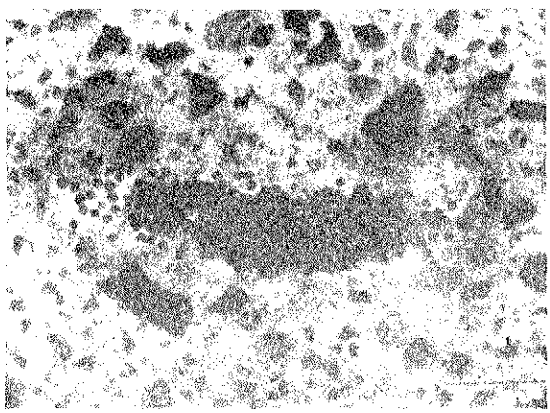
	Tensión de rotura MPa	Módulo de Elasticidad GPa	Alargamiento en rotura %
Fibra E	3.500	72,5	4,8
Fibra AR	2.500	70	3,6

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

fabricación, la succión del exceso de agua ("spray suction"), proceso bien conocido por los fabricantes de fibrocementos. Las láminas producidas tras la succión del agua, pueden remoldearse para fabricar paneles corrugados, tuberías, etc. Gracias a su versatilidad, uniformidad del producto y la ventaja de la orientación en dos dimensiones y al azar de las fibras, este método es el más idóneo para la fabricación de GRC.

Por lo que respecta a la microestructura del GRC, es una de las características diferenciales con relación a otros cementos reforzados con fibras. Como puede verse en las micrografías de la figura 1 (3), las fibras aparecen en forma de hilos de 204 filamentos, cada uno de los cuales tiene un diámetro de unas 13 μm. Las partículas de cemento, con un tamaño medio de unas 20 μm, son incapaces de penetrar en los hilos, por lo que éstos permanecen íntegros en forma de haces de filamentos separados del cemento. El espesor de la pasta de cemento entre dos hilos es del orden de 560 μm, mucho mayor del espesor medio entre fibras si éstas estuvieran finamente dispersas. Los haces de filamentos tienen una sección oval o casi rectangular, de unas 650 x 110 μm, y aparecen distribuidos al azar en dos dimensiones en paneles fabricados por el método de "spray".





1. Micrografías que muestran la estructura del cemento reforzado con fibra de vidrio.

3. PROPIEDADES MECANICAS

3.1. Tracción y flexión

La figura 2 (4) muestra una curva tensión-deformación típica del GRC, obtenida en un ensayo de tracción simple o en ensayo de flexión. En ella se observan tres regiones claramente diferenciadas:

a) Una región I de comportamiento elástico y lineal hasta un punto A, que marca el límite de proporcionalidad LOP.

b) Una región intermedia II en la que la ley tensión-deformación se aparta progresivamente de la línea recta sin que se observen en el material fisuras apreciables. Esta región se asocia a fenómenos de microfisuración de la matriz que conducen a un comportamiento seudoplástico.

c) A partir de un punto B ("Bend Over Point", BOP) aparecen fisuras a todo lo ancho del material, que sin embargo puede seguir deformándose a base de abrir progresivamente dichas fisuras. La tensión en esta región III está soportada exclusivamente por las fibras que cosen las fisuras, y dependiendo del contenido de fibras y de la longitud de éstas, puede observarse en esta región un aumento de la tensión o una caida de ésta. La rotura del material sucede tras una deformación macroscópica importante, bien por arrancamiento de las fibras o bien por rotura de las mismas.

La figura 3 (5) muestra la influencia del contenido de fibras y de la longitud de las mismas sobre la resistencia a tracción del GRC, a los 28 días, en dos condiciones distintas de almacenamiento. El refuerzo es con fibra de vidro AR. Se observa que la resistencia aumenta, con la longitud de la fibra, de forma que se considera que longitudes inferiores a unos 25 mm no son eficientes, y con el contenido de fibras hasta un 6 por 100 en volúmen, aproximadamente. La mejora de resistencia con contenidos superiores se ve compensada por la mayor dificultad de compactación de la mezcla.

La figura 4 (2) muestra la influencia de la composición y del método de fabricación, sobre el módulo de rotura a flexión del GRC. Se han utilizado tres mezclas: Cemento Portland ordinario, (OPC), Cemento Portland más arena y Cemento Portland más cenizas volantes (OPC/pfa). En todos los casos el contenido de fibra es el mismo, 2,5 por 100 en volúmen, y la longitud de las fibras es la misma, 22 mm.

3.2. Compresión

Por lo que respecta a la resistencia a compresión (6, 7) se observa una anisotropía en el comportamiento. La resistencia en dirección normal al plano de disposición de las fibras es del orden del 20 al 30 por 100 mayor que la resistencia en dirección paralela a dicho plano. No se observa aumento sustancial de la resistencia a compresión con relación a la de la pasta de cemento sin refuerzo. Sin em-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

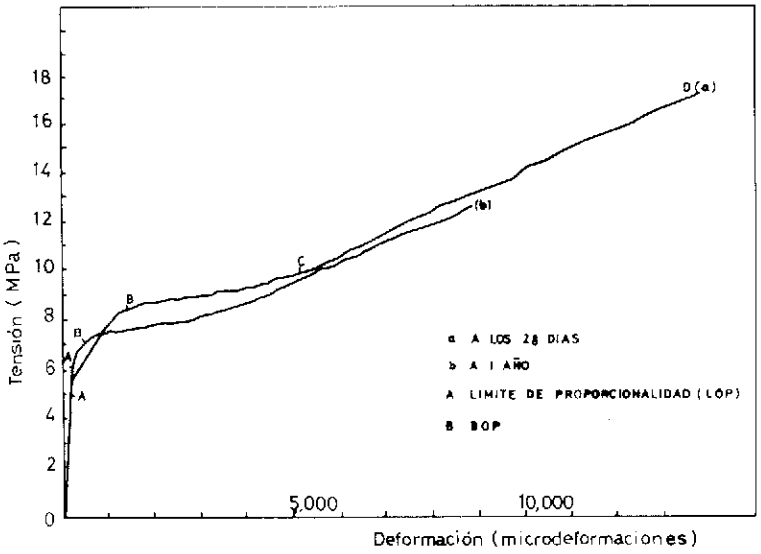
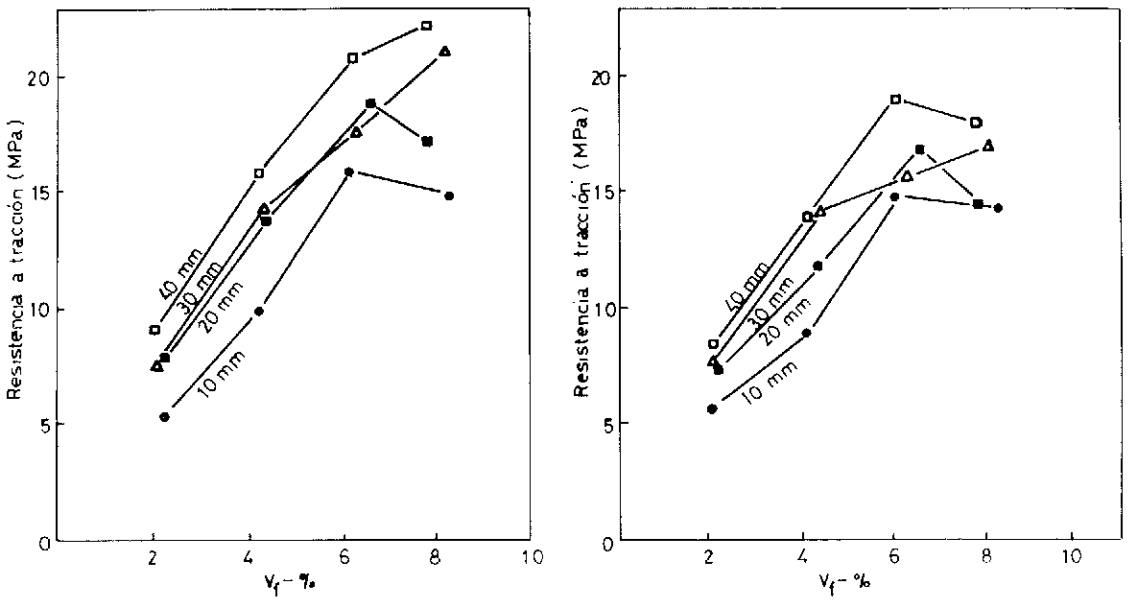


Fig. 2. Curvas tensión-deformación típicas del GRC, de dos edades distintas.



(a) Almacenado en aire (b) Almacenado en agua

Fig. 3. Variación de la resistencia a tracción del GRC en función de la fracción volumétrica de fibras (V_f) y de la longitud de las mismas, para dos condiciones distintas de almacenamiento.

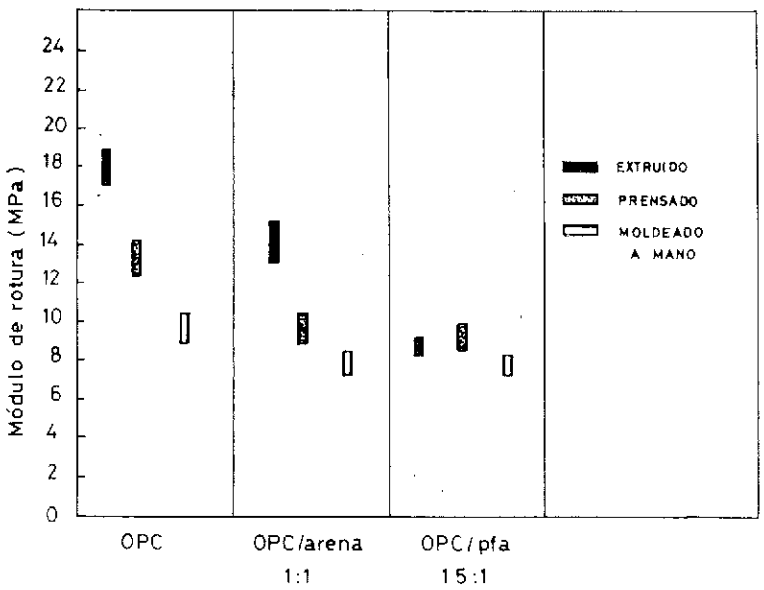


Fig. 4. Influencia de la composición y del método de fabricación sobre el módulo de rotura a flexión del GRC.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

bargo, se observa un aumento de la deformación de rotura y una menor inclinación de la curva tensión-deformación tras la carga máxima, lo que se traduce en un aumento de la ductilidad y de la tenacidad del material.

3.3. Impacto

De la observación de las curvas tensión-deformación en tracción, se deduce que se necesita una gran cantidad de energía (área bajo la curva) antes de la rotura final del material. Este hecho implica que la adición de fibras produce una notable mejora de la resistencia a impacto de la matriz de cemento. La resistencia a impacto suele medirse con péndulos convencionales, como el Izod o el Charpy.

La tabla 2 muestra la relación entre la resistencia al impacto del GRC, con matriz de cemento Portland y fibras de vidrio AR de longitudes entre 10 y 40 mm y la fracción volumétrica de fibras comprendida entre el 2 por 100 y el 10 por 100. La resistencia al impacto del GRC, a los 28 días, para un contenido de fibras del 6 por 100 en volúmen fue de 15 a 20 veces mayor que la de la matriz sin refuerzo.

Sin embargo, como muestran las figuras 5 y 6 (8), la resistencia a impacto del GRC disminuye con el tiempo, aunque el material aún muestra un comportamiento seudo dúctil al cabo de 5 años. La pérdida de resistencia es mayor para probetas almacenadas en agua que para probetas almacenadas al aire.

La figura 7 (9) muestra la variación con el tiempo de la resistencia al impacto de distintos GRC. El P-GRC es un cemento reforzado con fibra de vidrio E y modificado por un polímero termoplástico "Forton". Se observa que a los 28 días la resistencia al impacto del AR-GRC es del orden de 3 a 4 veces superior a la del P-GRC. La resistencia al impacto disminuye en los primeros años, pero incluso a los 3 años el AR-GRC tiene una resistencia al impacto mayor que el Forton P-GRC, si bien ambos materiales son frágiles a dicha edad.

Tabla 2

Resistencia al impacto de GRC para distintos contenidos y longitudes de fibra

Contenido de fibra (%)	Longitud de fibra (mm)	Resistencia al impacto (kJ/m^2)		
		Edad 7 días	28 días en aire	28 días en agua
2,5	10	6	8	7
	20	9	9	7
	30	7	10	6
	40	9	12	7
5,0	10	13	14	10
	20	18	17	16
	30	17	22	17
	40	22	22	15
7,5	10	20	–	–
	20	24	29	20
	30	23	28	22
	40	25	31	24
10,0	10	32	30	28
	20	30	47	25
	30	26	38	27
	40	30	35	27

3.4. Otras propiedades

El comportamiento de fluencia en flexión del GRC, para tensiones inferiores al límite de proporcionalidad, es similar al de probetas de pasta de cemento y es sensiblemente proporcional al valor de la tensión aplicada (5, 8). Las deformaciones de fluencia son mucho menores que las deformaciones de expansión-contracción debidas a las variaciones de humedad.

Por lo que respecta al comportamiento en fatiga del GRC, se observa que para tensiones cíclicas que no superen el 90 por 100 del límite de proporcionalidad, la vida de fatiga supera los 10^6 ciclos, pero para niveles de tensión superiores al LOP, la vida en fatiga disminuye rápidamente (10). Dado el elevado número de probetas necesarias para caracterizar el comportamiento en fatiga para cada nivel de tensión, los resultados se representan en la forma tensión - número de ciclos a rotura, para

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

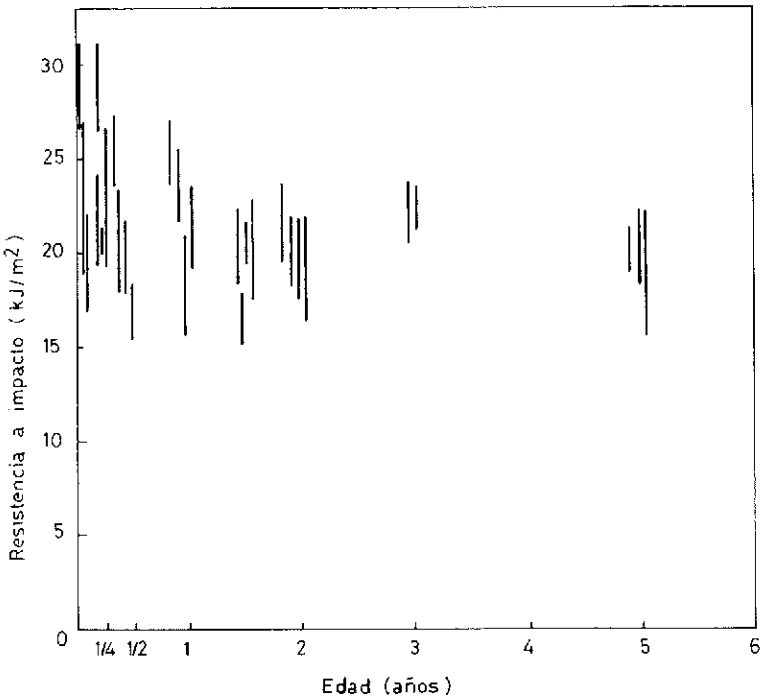


Fig. 5. Variación de la resistencia al impacto del GRC, con la edad, para probetas almacenadas al aire.

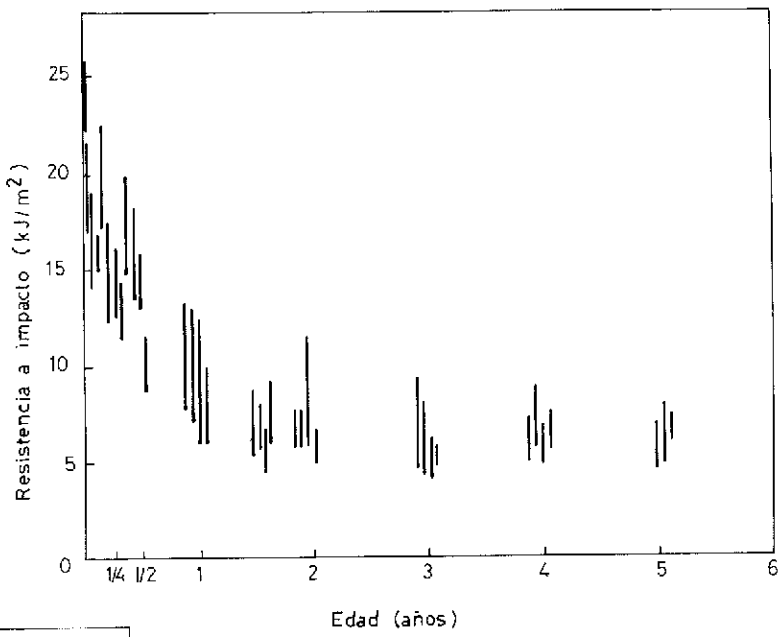


Fig. 6. Variación de la resistencia al impacto del GRC con la edad, para probetas almacenadas en agua.

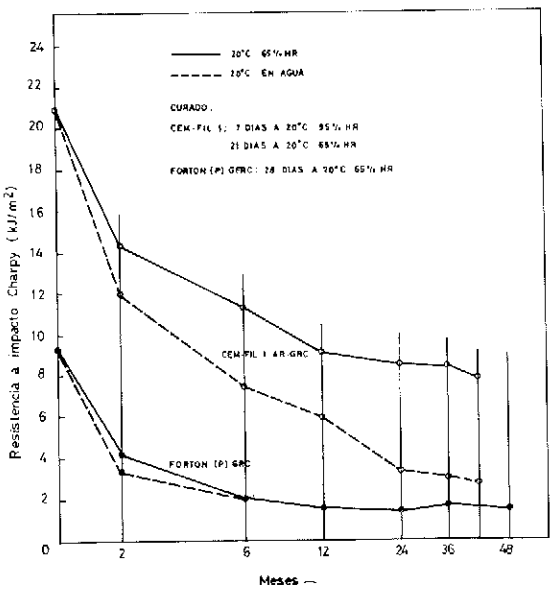


Fig. 7. Variación de la resistencia al impacto con la edad, para distintos tipos de GRC en condiciones diferentes de almacenamiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

una determinada probabilidad de fallo, tal como representa la figura 8 (10). El Building Research Establishment indica asimismo que para tensión máxima igual al BOP la vida a fatiga, en tracción directa, es de 2.10^4 ciclos y para una tensión máxima de 4,5 MPa la vida a fatiga supera los 10^6 ciclos (8).

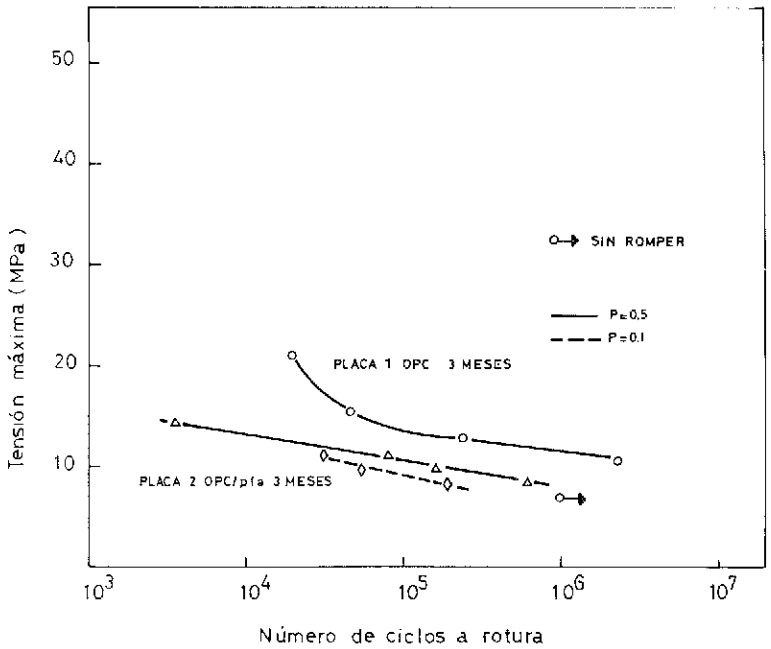


Fig. 8. Número de ciclos a rotura en función de la tensión máxima, para ensayos de fatiga de probetas de GRC con distintas composiciones y distintas probabilidades de rotura.

4. EL PROBLEMA DEL ENVEJECIMIENTO DEL GRC

Es un hecho conocido desde hace ya más de 15 años que los cementos reforzados con fibra de vidrio sufren un deterioro con el tiempo que afecta a sus propiedades mecánicas, y muy especialmente a su ductilidad volviéndose frágiles y agrietándose bajo pequeñas deformaciones. El problema es sencillo de comprender "a priori", por cuanto la cal libre que desarrolla el cemento ataca a los óxidos de la fibra de vidrio destruyendo ésta de forma progresiva.

El problema del ataque de los álcalis a la fibra impidió el desarrollo de cementos reforzados con fibra de vidrio E, utilizada profusamente para la producción de plásticos reforzados, y condujo al desarrollo de las fibras AR (1972) descritas anteriormente. Como se observa en las figuras 9 y 10 (2), las fibras AR presentan un menor envejecimiento que las fibras E, si bien el problema dista de estar totalmente resuelto.

Con el fin de resolver el problema del envejecimiento y poder utilizar la fibra E, más barata y más resistente para el refuerzo de cementos, en

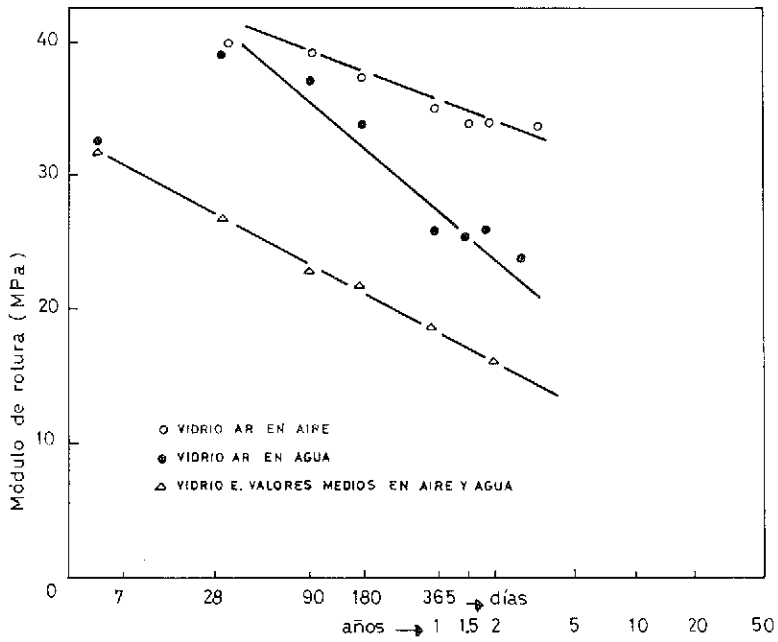


Fig. 9. Variación del módulo de rotura a flexión con la edad, para GRC, con distintos tipos de fibra de vidrio y distintas condiciones de almacenamiento.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

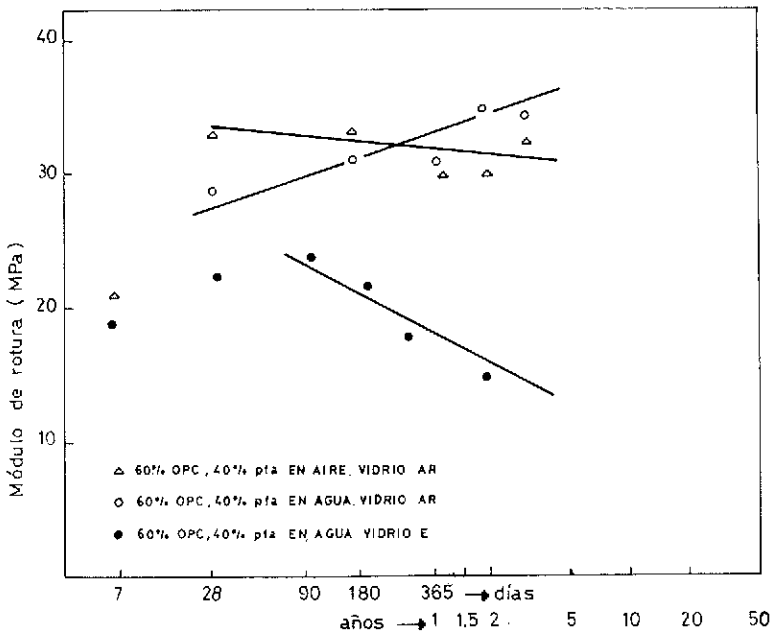


Fig. 0. Variación del módulo de rotura a flexión con la edad, para GRC, con distintas composiciones de la matriz (OPC=cemento portland ordinario; pfa = cenizas volantes).

1979 se lanza al mercado una fibra de vidrio E y un polímero termoplástico, que se mezcla con el cemento, para proteger a la fibra del ataque de los álcalis. Este procedimiento se comercializa con el nombre de Forton y los compuestos se denominan en forma abreviada como PGRC. En 1982 se presentan los primeros resultados (11) de envejecimiento acelerado (inmersión en agua a 50°C) y de envejecimiento natural del nuevo procedimiento, en comparación con resultados de GRC utilizando fibras AR. Como se observa en las figuras 11, 12 y 13 (9), el P-GRC presenta un ligero descenso de propiedades con el tiempo, en condiciones de envejecimiento natural, y un descenso menos acusado que el GRC con fibras AR, en condiciones de envejecimiento acelerado.

En 1986 Daniel y Schultz (12) y en 1987, Shah, Daniel y Ludirdja (13) publicaron trabajos experimentales completos sobre durabilidad del GRC utilizando fibra de vidrio AR (CENFIL 1) y fibra de vidrio E con matriz modificada por polímero Forton (PGRC) en dos cantidades distintas. Los resultados de límite elástico (LOP) y módulo de rotura (MOR) a flexión, en función del tiempo, para envejecimiento acelerado (inmersión en agua a 50°C) se muestran en las figuras 14 y 15 (13). Como se observa en dichas figuras, tanto el GRC con fibra de vidrio AR como el PGRC muestran un valor decreciente del MOR con la edad, que tiende a aproximarse al límite elástico (LOP), el cual a su vez es igual al de la matriz sin refuerzo, lo que indica que la contribución a la resistencia por parte de las fi-

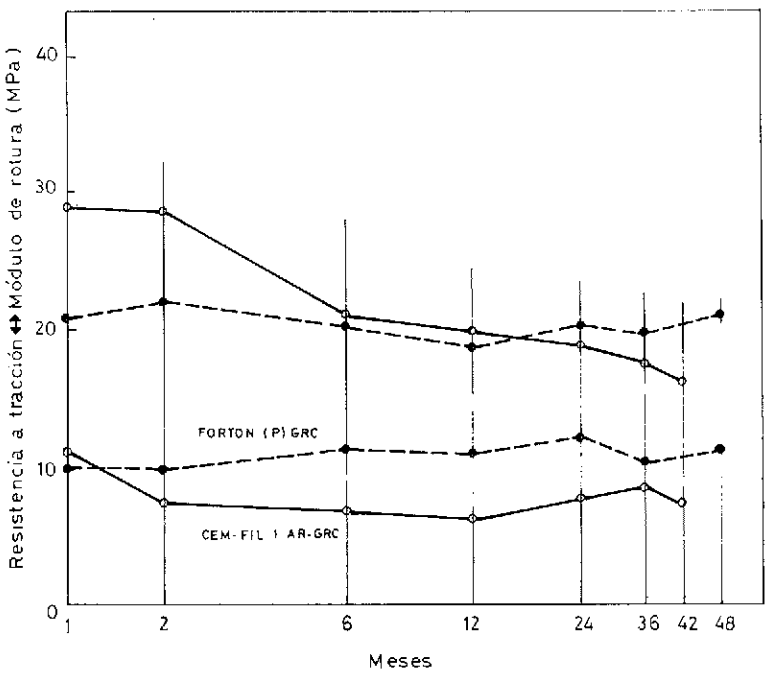


Fig. 11. Variación de la resistencia a tracción y del módulo de rotura a flexión, con la edad, para GRC con fibra de vidrio AR y Forton P-GRC. Almacenamiento en agua.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

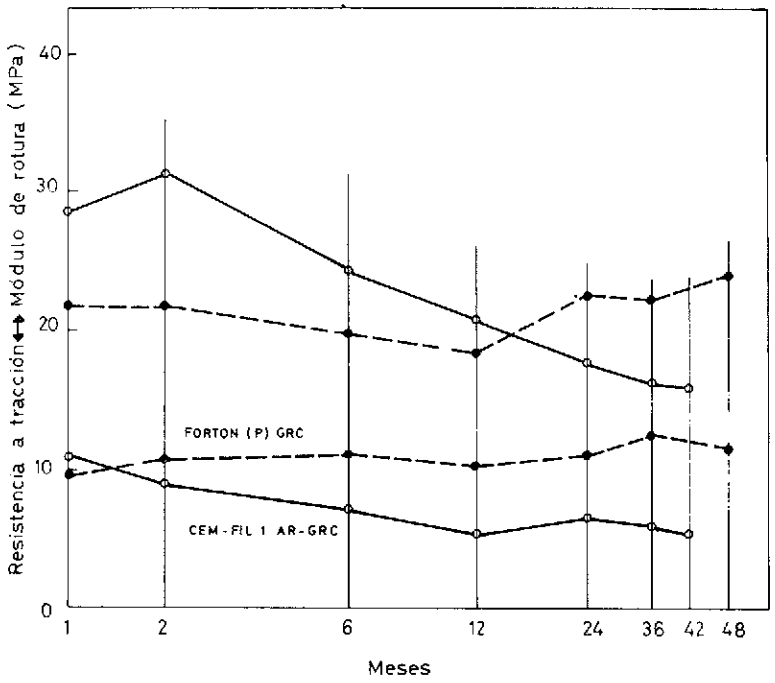


Fig. 12. Variación de la resistencia a tracción y del módulo de rotura a flexión, con la edad, para GRC con fibra de vidrio AR y Forton P-GRC. Almacenamiento al aire con 65 por 100 de humedad.

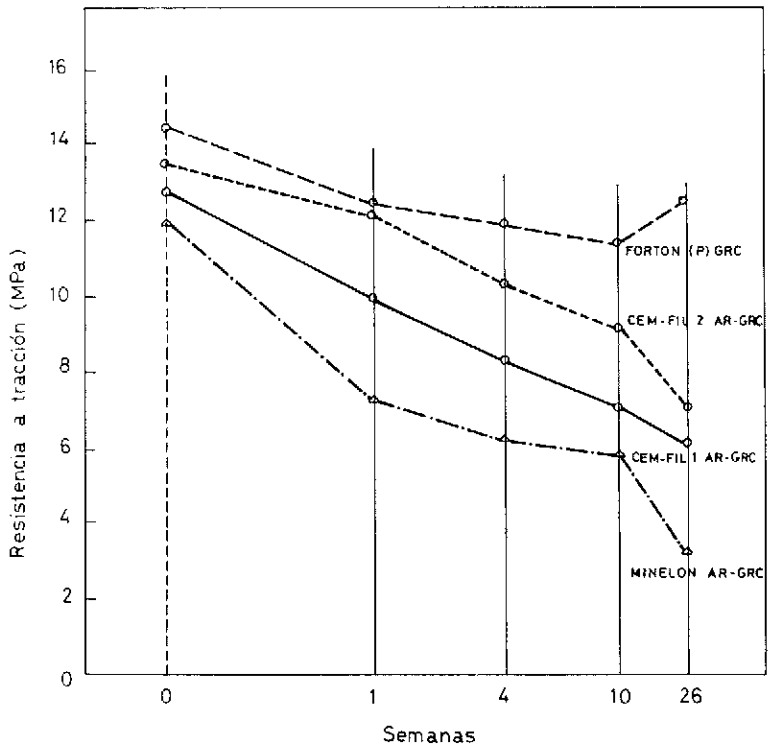


Fig. 13. Variación de la resistencia a tracción, con el tiempo, en ensayos de envejecimiento acelerado en agua a 50°C, para GRC con distintos tipos de fibra de vidrio AR y Forton P-GRC.

bras disminuye con la edad. Así pues, puede concluirse que la utilización del sistema Forton fue un buen intento, que no resolvió el problema del envejecimiento del GRC. Pero además, como ya indicamos antes, se observa también que los cementos reforzados con fibras de vidrio resistentes a los álcalis (AR) también se fragilizan con la edad.

Este último hecho es quizás el más decepcionante, por cuanto investigaciones realizadas sobre fibras extraidas de una matriz de cemento (14, 15) muestran que el vidrio E, efectivamente, sufre un prolongado y gradual debilitamiento, llegando a las 9 semanas a una resistencia de solamente el 20 por 100 del valor inicial. Por el contrario, las fibras AR, aunque también pierden al principio parte de su resistencia, se mantienen después estables con el tiempo, por lo que es difícil explicar la fragilidad observada en los GRC fabricados con fibras de vidrio AR a partir de pérdidas de resistencia de la fibra. Ensayos de arrancamiento ("pull-out") muestran que la adherencia fibra - matriz aumenta con el tiempo (16), por lo que podría en este hecho encontrarse la explicación de la fragilidad a largo plazo de los GRC, incluso con fibras resistentes a los álcalis. La mayor adherencia fibra - matriz

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

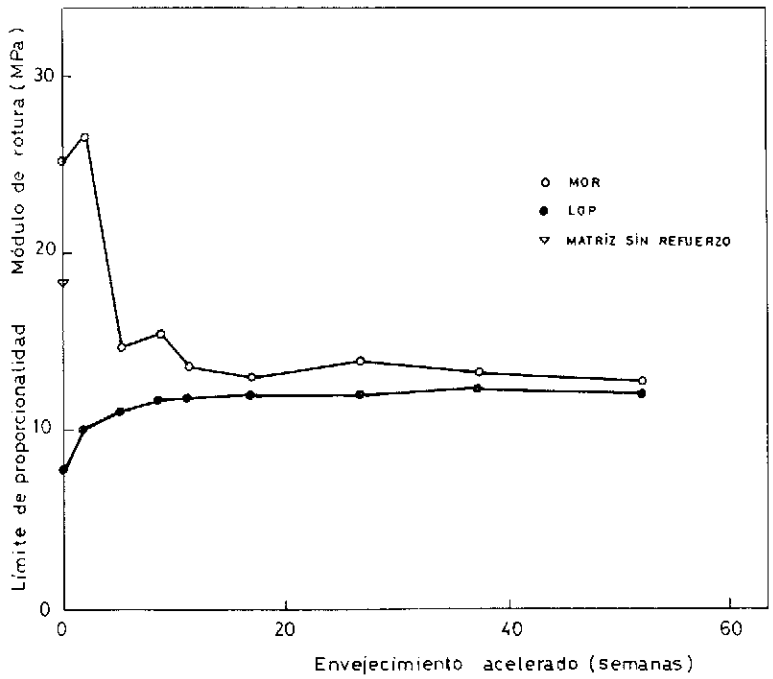


Fig. 14. Variación del límite de proporcionalidad y del módulo de rotura a flexión de GRC con fibra de vidrio AR, en función del tiempo, en ensayos de envejecimiento acelerado en agua a 50°C.

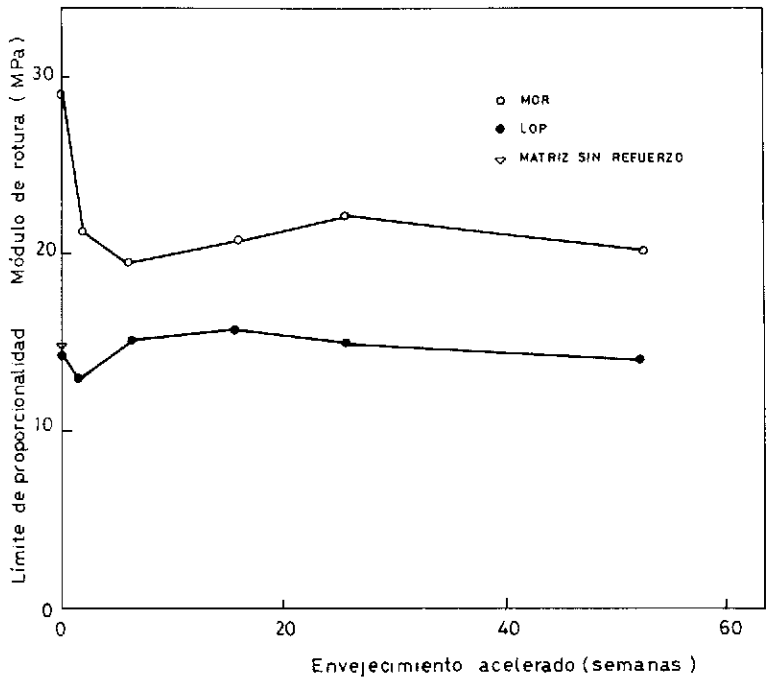


Fig. 15. Variación del límite de proporcionalidad y del módulo de rotura a flexión de P-GRC con fibra de vidrio E, en función del tiempo, en ensayos de envejecimiento acelerado en agua a 50°C.

reduce la capacidad de abertura de las fisuras de la matriz, rompiendo las fibras con una deformación del material muy pequeña.

Los intentos de resolver el problema del envejecimiento de los GRC se han dirigido hacia la utilización de aditivos que protejan a la fibra o a la utilización de cementos con menor contenido alcalino. La utilización de puzolanas, (17) aunque beneficiosa, no parece ser un remedio efectivo. Se han hecho investigaciones también utilizando cenizas volantes y tampoco se elimina completamente la fragilidad del material (2). Por lo que respecta a la utilización de distintos cementos, se ha investigado el uso de cementos siderúrgicos (18) que presentan una menor reducción de resistencia con el tiempo que el cemento Portland ordinario, para almacenamiento al aire. El empleo de cementos experimentales de baja alcalinidad, reduce sustancialmente el problema del envejecimiento de los GRC, especialmente si además se utilizan fibras de vidrio AR para el refuerzo (7, 19, 20). Como ejemplo, se presenta la figura 16, tomada de estos últimos autores, que ilustra la variación de la resistencia a flexión de GRC, con el tiempo, en ensayos de envejecimiento acelerado, para tres matrices de cemento (baja alcalinidad (LASC), siderúrgico + cenizas volantes (PBSC+SF) y siderúrgico sin aditivos (PBSC)).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

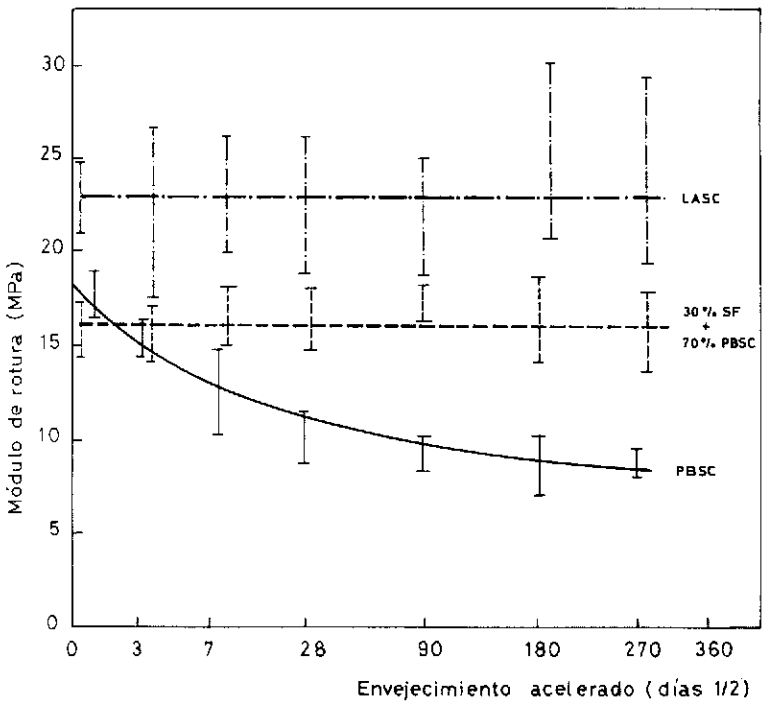


Fig. 16. Variación del módulo de rotura a flexión del GRC, en función del tiempo en ensayos de envejecimiento acelerado, para distintas matrices.

Para terminar este apartado citaremos los trabajos recientes de Bentur (21) que muestran que el problema del envejecimiento de los GRC tiene solución técnica. Este investigador trató los hilos de la fibra de vidrio con dispersiones de polímeros y con humo de sílice, antes de incorporarlos manualmente a la pasta de cemento. Utilizó, tanto fibras de vidrio E como AR, y estudió el comportamiento de los GRC tras ensayos de envejecimiento acelerado. Como muestran las figuras 17 y 18 (21), el tratamiento mejora el comportamiento del material en ambos tipos de fibra respecto del material base sin tratamiento. Pero además se observa que el tratamiento con humo de sílice de la fibra de vidrio AR es muy efectivo, eliminando de forma prácticamente total la reducción del módulo de rotura durante todo el período de envejecimiento acelerado estudiado. La explicación de este efecto beneficioso parece encontrarse en el poder cubriente del humo de sílice que previene el aumento de la adherencia fibra - matriz permitiendo un comportamiento dúctil tras la fisuración de la matriz.

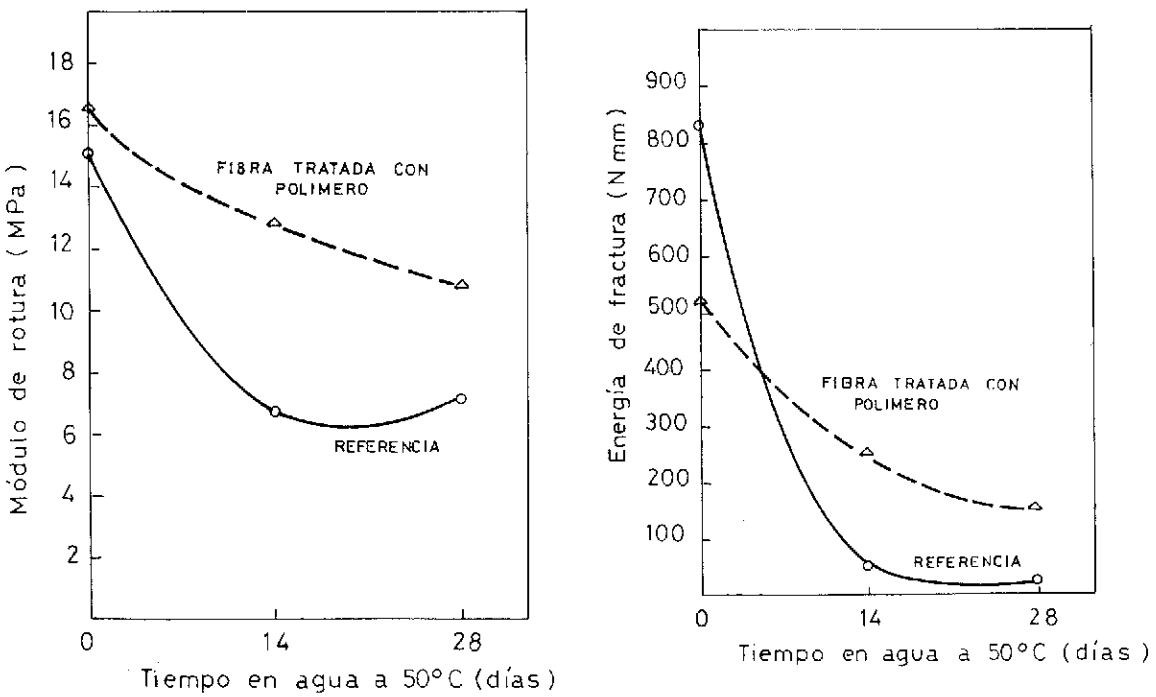


Fig. 17. Variación del módulo de rotura y de la energía de fractura a flexión del GRC con fibra de vidrio E, modificada con polímero y sin tratar, en función del tiempo, en ensayos de envejecimiento acelerado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

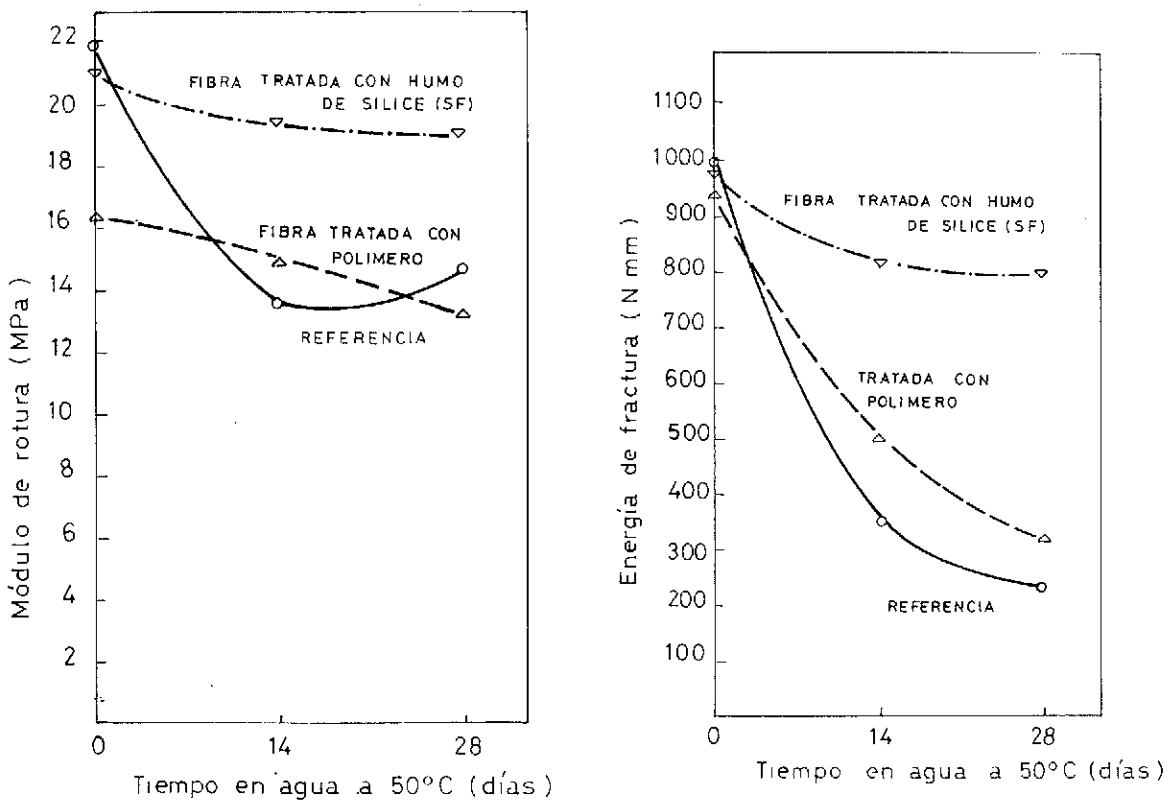


Fig. 18. Variación del módulo de rotura y de la energía de fractura a flexión del GRC con fibra de vidrio AR, tratada con humo de sílice, con polímero y sin tratar, en función del tiempo, en ensayos de envejecimiento acelerado.

5. MODELIZACION DEL COMPORTAMIENTO MECANICO

Una de las principales ventajas de los cementos reforzados con fibras es que las propiedades del material pueden controlarse, dentro de ciertos límites, variando ciertos parámetros, como son la geometría y contenidos de fibra y matriz. Ahora bien, para determinar los requisitos de la fibra y optimizar el diseño del GRC en una aplicación concreta, se necesitan expresiones que relacionen las propiedades del material con las de los componentes del mismo. Asimismo, el diseño de elementos estructurales requiere conocer las ecuaciones constitutivas del material, tanto en régimen elástico como tras la fisuración de la matriz. Con estos fines, se han elaborado diversas teorías que modelizan el comportamiento mecánico de cementos reforzados con fibras (22, 23, 24, 25, 26, 27), aunque pocas son directamente aplicables al caso concreto de los GRC (4, 28).

De forma general, puede afirmarse que, en la región elástica de la curva tensión - deformación, el comportamiento es lineal, y el módulo de Young del compuesto viene dado por una expresión del tipo siguiente:

$$E = E_m V_m + E_f V_f k_1 k_2 \qquad (1)$$

donde E_m y E_f son los módulos de matriz y fibra respectivamente, V_m y V_f las fracciones volumétricas de matriz y fibra ($V_m + V_f = 1$) y k_1 y k_2 dos factores de corrección para considerar, el primero, que las fibras no tienen longitud indefinida, y el segundo, que las fibras están orientadas al azar y por tanto no están orientadas en la dirección de aplicación de la tensión. El factor k_1 es prácticamente igual a 1 para fibras mayores de 25 mm, como es usual, mientras que el factor k_2 es igual a 3/8 (26) para fibras orientadas al azar en 2 dimensiones, como es el caso típico en la fabricación de paneles.

Una vez superado el límite de proporcionalidad (LOP), el comportamiento del material es seudoplástico, microfisurándose la matriz de forma progresiva. No existen expresiones contrastadas experimentalmente para esta región de la curva. Finalmente, se alcanza el BOP para el cual se propagan macrofisuras a lo largo de todo el material y se entra en la región III en la que la tensión está soportada sólo por las fibras. Tampoco conocemos expresiones del BOP que concuerden con resultados experimentales de comportamiento de los GRC.

En general, en la región III se supone un comportamiento lineal de la curva tensión - deformación, con un módulo de elasticidad dado por:

$$E' = k_3 E_f V_f \qquad (2)$$

donde E_f y V_f tienen el significado antedicho y k_3

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

es un factor de corrección para considerar el efecto de la longitud de las fibras y su distribución al azar. Los valores experimentales de k_3 son del orden de 0,26 (28). Finalmente, un dato que interesa mucho al proyectista de elementos de GRC es la resistencia del material. Supuesto que en la región III de la curva tensión - deformación la tensión está soportada exclusivamente por las fibras, se puede asimismo proponer una expresión simplista de la resistencia del material, σ_c, en la forma:

$$\sigma_c = k_4 \sigma_f V_f \qquad (3)$$

donde σ_f es la tensión de rotura de las fibras y k_4 un nuevo factor de corrección. La mayoría de las teorías existentes han desarrollado expresiones de la resistencia del material en función de parámetros tales como longitud, diámetro y contenido de fibras, adherencia fibra - matriz y resistencia de las fibras. Comparando con la expresión simplificada (3), ello se traduce en distintos valores del factor de corrección k_4. Para las longitudes de fibra usuales, los valores experimentales de k_4 están comprendidos entre 0,2 y 0,3 y se aproximan mejor a las predicciones teóricas de Laws (26) que a las de otras teorías existentes.

Como puede observarse, en el campo de la modelización de los cementos reforzados con fibras de vidrio existen lagunas importantes. Por ello, hemos emprendido una investigación propia, utilizando las técnicas de la Mecánica de la Fractura, para tratar de predecir la curva completa tensión - deformación del material a partir de las propiedades de los componentes.

Esperamos publicar en breve los resultados de esta investigación.

Para finalizar, indicaremos que el comportamiento en flexión del GRC, como el de todos los cementos reforzados con fibras, resulta sorprendente a primera vista. Si se calculan las tensiones utilizando las expresiones de la Resistencia de Materiales, se observa que la tensión para la que se produce la rotura del material (módulo de rotura) es entre 2 y 3 veces superior a la resistencia del material en tracción, σ_c. Esta aparente anomalía desaparece si se tiene en cuenta la curva tensión - deformación real del material en tracción (tal como la que se muestra en la figura 2) que, como es obvio, se aleja totalmente de una ley lineal, pudiendo demostrarse con un sencillo ejercicio de cálculo que efectivamente el MOR calculado a partir de Resistencia de Materiales es del orden de 2 a 3 veces la resistencia real del material en tracción.

REFERENCIAS

1. Rodríguez J. y Jordán M. "The Use of GRC in Spain and Algeria". Third International Symposium on Fibre reinforced cement and concrete. Sheffield 1986.

2. Majumdar A.J. y Nurse R.W. "Glass fibre reinforced cement". Building Research Establishment. Current Paper CP 79/74-1974.

3. Litherland, K.L. y Jaras A.C., Proc. RILEM Symposium. Fibre Reinforced Cement adn Concrete. London. 1975. The Construction Press. 1975.

4. Nair, N.G. Proc. RILEM Symposium. Fibre Reinforced Cement and Concrete. London 1975. The Construction Press 1975.

5. Majumdar, A.J., Proc. RILEM Symposium. Fibre Reinforced Cement and Concrete. London 1975. The Construction Press. 1975.

6. Fanella, D. y Naaman, A.E., "Stress - Strain Properties of Fiber Reinforced Mortar in Compression". American Concrete Institute Journal. Jul - Ag. 1985. pp. 475-483.

7. Akihama, S., Suenaga, T., Tanaka, M. y Kayashi, M. "Properties of GFRC with Low Alkaline Cement". American Concrete Institute. Special Technical Publication 105 - 11. 1987. pp. 190-209.

8. Building Research Establishment "A study of the properties of CEM - FIL/OPC Composites" Current Paper CP 38/76. 1976.

9. Bijen, J. "Durability of Some Glass Fiber Reinforced Cement Composites". American Concrete Institute Journal. Jul - Ag. 1983, pp. 305-311.

10. Hibbert, A.P. y Grimer, F.J. "Flexural fatigue of glass fibre reinforced cement". Building Research Establishment. Current Paper CP 12/76. 1976.

11. Bijen, J. y Jacobs, M. "Properties of glass fibre-reinforced polymer-modified cement". Materiaux et Constructions. Vol. 15 n° 89. 1982 pp. 445-452.

12. Daniel, J. y Schultz, D. "Long-Term Strength Durability of Glass Fibre Reinforced Concrete". Third International Symposium on Fibre Reinforced Cement and Concrete. Sheffield 1986.

13. Shah, S., Daniel J. y Ludirdja, D. "Toughness of Glass Fiber Reinforced Concrete Panels Subjected to Accclerated Aging". Prestressed Concrete Institute Journal. Sep-Oct. 1987 pp. 82-99.

14. Cohen, E. y Diamond, S. "Validity of flexural strength reduction as an indication of alkali attack on glass in fibre reinforced cement composites". Proc. RILEM Symposium on Fibre Reinforced Cement and Concrete. London 1975. The Construction Press 1975.

15. Majumdar, A.J., West, J.M. y Larner, L.J. "Properties of glass fibres in cement environment" Building Research Establishment - Current Paper CP 24/77 - 1977.

16. De Vekey, R.C. y Majumdar, A.J. "Interfacial Bond Strength of Glass Fibre Reinforced Cement Composites", J. Materials Science, Vol. 15. 1970 pp. 183-185.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

17. Singh, B. y Majumdar, A.J. "Properties of GRC containing inorganic fillers". Int. J. of Cement Composites and Ligthweight Concrete. Vol. 3 n° 2, May 1981. pp. 93-102.

18. Majumdar, A.J., Sing, B. y Evans, T.J. "Glass fibre-reinforced supersulphated cement", Composites, Jul 1981, pp. 177-183.

19. Huitang, L., Chongming, Y. "Research on Durability of GRC". Proc. of the 4th. International Conference on Durability of Building Materials and Components. Singapore 1987.

20. Rongxi, S., Ruishan, Y. y Yiping, M. "Effect of Cement Matrix on Durability of Glass Fibre Reinforced Cement Composite". Proc. of the 4th International Conference on Durability of Building Materials and Components. Singapore 1987.

21. Bentur, A. "Treatment of glass fibre strands in polymer and silica fume dispersions to improve the ageing performance of glass fibre - reinforced cements". Advances in Cement Research, Vol. 1, n° 3, Jul. 1988 pp. 147-154.

22. Romualdi J.P. y Batson, G.B. "Mechanics of Crack Arrest in Concrete". Proceedings of ASCE, Vol. 89, N° EM3, 1963, pp. 147-168.

23. Argon, A.S. y Shack, W.J. "Theories of Fibre Cement and Fibre Concrete" RILEM Simposium Fibre reinforced Cement and Concrete. London 1975. Construction Press.

24. Naaman, A.E. "A Statistical Theory of Strength for Fibre Reinforced Concrete". Tesis Doctoral. Department of Civil Engineering. M.I.T. (1972).

25. Aveston, J., Cooper G.A. y Kelly, A. "Single and Multiple Fracture". The Properties of Fibre Composites. IPC Science and Technology Pres. 1971, pp. 15-26.

26. Laws, V. "The efficiency of fibrous reinforcement of brittle matrices" J. Phys. D: Appl. Phys. Vol. 4, 1971, pp. 1.737-1.746.

27. Wang, Y., Backer, S. y Li., V.C. "A Statistical tensile model of fibre reinforced cementitious composites". Composites, Vol. 20, N° 3, May 1989, pp. 265-274.

28. Oakley, D.R. y Proctor, B.A. "Tensile stress strain behaviour of glass fibre reinforced cement composites". RILEM Symposium Fibre reinforced cement and concrete. London 1975. Construction Press.

RESUMEN

Este artículo presenta una puesta al día de las propiedades mecánicas, materiales y procesos de fabricación de los cementos reforzados con fibras de vidrio. Se hace especial énfasis en el problema del envejecimiento del material, producido por el ataque de los álcalis a la fibra y las distintas soluciones que se han propuesto para resolver el problema: empleo de aditivos, cementos de baja alcalinidad y fibras resistentes a los álcalis. El artículo se completa con un resumen de los métodos de modelización del comportamiento mecánico, destacando las lagunas existentes.

SUMMARY

This paper presents a state of the art of mechanical properties, materials and processing methods of glass fiber reinforced cements. Particular attention is paid to material ageing produced by alkali attack to the fiber as well as different solutions used to solve this problem, such as the utilization of fillers, low alkalinity cements or alkali-resistant fibers. The paper is accomplished with an outline of models of mechanical behaviour pointing out the existing defficiencies.

* * *

NUEVA PUBLICACION

Análisis Matricial de Estructuras en ordenadores personales compatibles

Francisco Morán Cabré
Dr. Ing. de Caminos
Profesor de Investigación del
Instituto Eduardo Torroja

Encuadernado en tela con sobrecubierta
25 x 17 cm, 216 págs.
Contiene disquete de programas
EDITORIAL RUEDA
Porto Cristo, 13 - Tf. 619 27 79
28924 ALCORCON - Madrid

Los programas de ordenador existentes en nuestro país para el análisis de estructuras pueden clasificarse en académicos y comerciales. Los *académicos,* presentados en los libros, no pueden usarse en la práctica por la pobreza de sus prestaciones. Los *comerciales,* muy complejos, son paquetes cerrados que unen a su elevado precio la falta de información suficiente acerca de su forma de trabajo, por lo que, cada vez, más proyectistas encuentran inconvenientes en su uso.

Esta obra presenta cinco programas generales de análisis estructural de características intermedias entre los tipos mencionados. Son sencillos, de forma que resulta fácil la explicación y comprensión de sus listados en BASIC, que sólo tienen unas 300 líneas. Ofrecen, sin embargo, una elevada capacidad (hasta 1.000 nudos), una notable rapidez de cálculo (trabajan exclusivamente en memoria interna) y una aceptable comodidad de uso. La obra incluye un disco con los fuentes y los ejecutables compilados, que corren en ordenadores IBM compatibles con sólo 256 k y un disco floppy, y multitud de ejemplos. De esta forma resulta posible usarlos para calcular estructuras concretas o modificarlos para adaptarlos a tipos estructurales o condiciones de proyecyo particulares.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Método práctico para reparación de fisuras

Antonio Gonzalez Serrano
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Patología, Análisis y Reparación de Estructuras
Peritajes e Informes

Mais son probe e, ¡mal pecado!,
a miña terra n'é miña,
que hasta lle dan de prestado
a beira por donde camiña
ó que nacéu desdichado.

(Rosalia de Castro)

A Rosa:
mi mujer, compañera y amiga.

DESCRIPCION DE LA FISURACION DE LOS CERRAMIENTOS DE UN CHALET

Aunque el sistema que se va a exponer le parezca muy sencillo al lector, por lo que se va a explicar no debió de ser tal; ya que el propietario, que era un Catedrático de Química, tenía una decena de informes con soluciones de otros tantos Técnicos Superiores, que no había puesto en práctica porque no le habían dado ninguna explicación satisfactoria de las causas de las grietas. Las soluciones aportadas, que después de arreglarlo conocí, eran totalmente ilusorias, no eficaces para eliminar las grietas y mucho más caras que la solución propuesta, cuyo coste fué ridículo.

El chalet tenía una estructura formada por muros de carga de ladrillo hueco y un forjado plano sobre el que se apoyaba la cubierta. Los cerramientos estaban formados por doble tabique que en su base estaban unidos a una viga corrida de cimentación y en su coronación estaban también unidos a una viga zuncho.

En la figura 1 (que se corresponde con la figura 9.30 "Accommodating differential construction", del libro "Structural Masonry Designer', Manual" de W.G. Curtin & Partners. Consulting Structural & Civil Engineers) se ve que el muro que no es de carga está separado de la viga zuncho de cabeza por un material deformable. Esta solución, aparentemente tan pueril, no se llegó a hacer en el chalet en cuestión y por esta causa ambos muros estaban unidos entre sí, en sus extremos, por la viga zuncho de coronación y la viga corrida de cimentación.

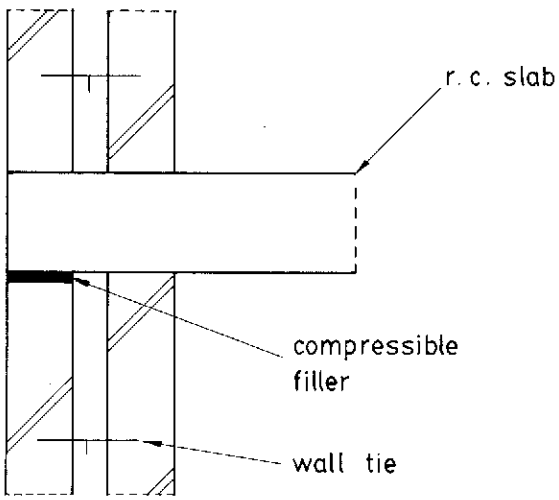
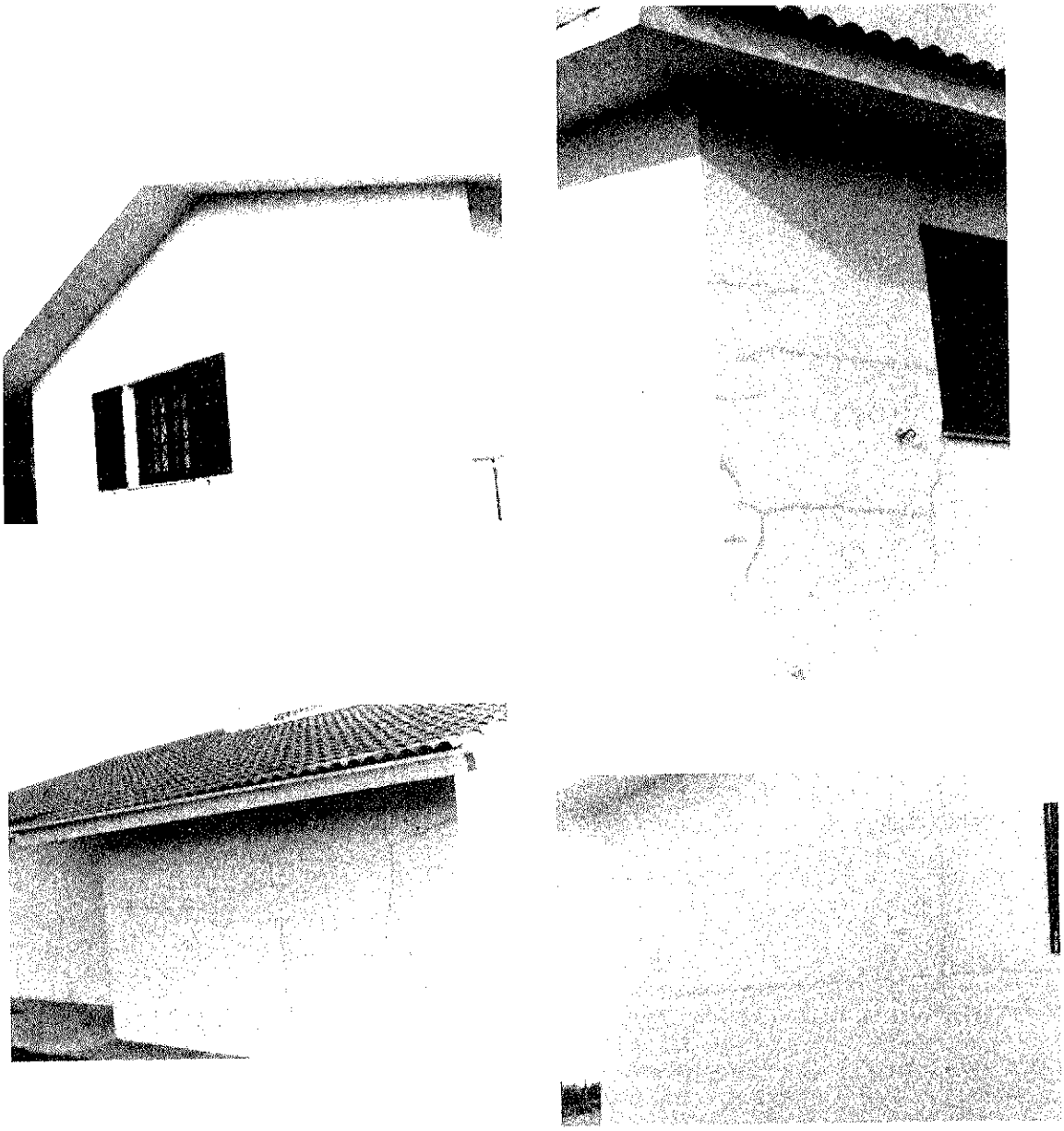


Fig. nº 1

Como las temperaturas externa e interna del chalet son muy diferentes, el muro exterior sufre un acortamiento relativo con respecto al muro interior, que lo tracciona y lo fisura, tal y como se ve en las fotografías que se adjuntan. Las grietas verticales son debidas también a la misma causa, ya que el quiebro a 45° es un punto fijo en la deformación. Las grietas verticales se disipan al llegar al zuncho superior, ya que su acortamiento es mucho más débil, y desaparecen al aproximarse a la viga zuncho de cimentación cuya variación térmica, al estar enterrada, es mucho menor.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



Fisuración que presentaba el chalet, al que se hace referencia en el artículo, antes de ser reparado.

OTRAS CAUSAS DE FISURACION EN CERRAMIENTOS

Los cerramientos, tanto exteriores como interiores, suelen agrietarse y fisurarse. Entre las posibles causas de las fisuras caben citar las siguientes:

—Deformaciones excesivas de los forjados.

Los forjados se suelen diseñar con métodos anelásticos de cálculo, avalados actualmente por la E. F.88, sin exigir ninguna limitación de ductilidad a cambio, y con redistribuciones muy altas y muy superiores a lo autorizado en el art. 52.1 de la E.H.–80. Estas redistribuciones también van más allá de lo permitido por otros Reglamentos Internacionales de peso, como lo es El Código ACI, El Código Modelo, la C.P.110 o las Règles BAEL 80, por ejemplo. Conviene decir, para terminar, que no es usual verificar correctamente el estado límite de deformación en los forjados, en base a mi experiencia con respecto a cómo se comporta el mercado.

Una redistribución alta, además de los problemas de fisuración que puede conllevar y que no se van a tratar aquí, origina una plastificación de las secciones y, por lo tanto, unas flechas totales (elásticas + diferidas) importantes.

A este punto suele añadirse la elevada deforma-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ción de las vigas planas, que se utilizan, mucho más de lo deseado, por las ventajas arquitectonicas que supone el no tener resalto inferior. Ambos factores conjugados conllevan a unas flechas diferidas importantes que son las que fisuran los cerramientos al no poder soportar las tracciones derivadas de las mismas.

- Deformaciones excesivas de los voladizos.

La sensibilidad ante este aspecto, queda patente en el art. 6.3.5 de la E.F. 88 cuando indica que se adopte, para la luz equivalente, 1,6 veces la real.

Han de temerse acumulaciones de carga de unos pisos a otros, ocasionadas por el propio proceso constructivo, sobre todo cuando existen muros de cerramiento en su extremo. Por esta causa se fisuran muchas veces los cerramientos de las plantas 1^a y 2^a en las estructuras con voladizos, con discontinuidad de cerramientos en la planta baja.

–Fisuras de tipo térmico.

Las fisuras descritas en el chalet anterior son un ejemplo de este tipo de fisuración.

Otras fisuras son las que se producen en los cerramientos situados en las proximidades de los focos de calor. Problema que ya se me ha presentado y que he corregido en el caso de una parrilla de un restaurante.

También estoy corrigiendo unas fisuras de tipo térmico en los cerramientos del edificio de duchas de una factoría que lleva una calefacción interior muy importante.

–Fisuras de retracción excesiva.

En la documentación fotográfica que se adjunta, puede verse la reparación efectuada para la eliminación de fisuras debidas a la retracción excesiva de unos cementos PA, bastantes deficientes, que hubo en el mercado hace unos 10 ó 12 años. Estas fisuras son estocásticas, en piel de serriente y con encuentros a 90° ó a 60°.

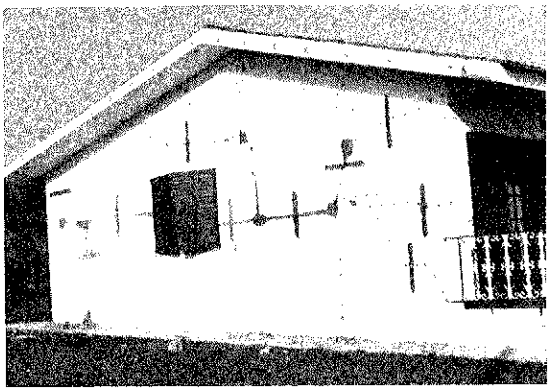
-Otras causas de fisuras.

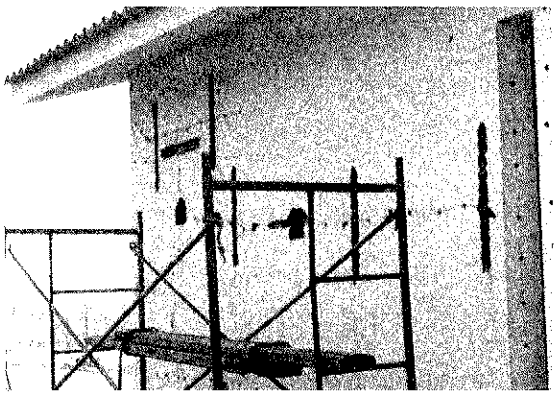
Otras causas pueden ser asientos diferenciales, corrimientos relativos, fisuras por no cumplirse condiciones de compatibilidad de deformaciones, etc.

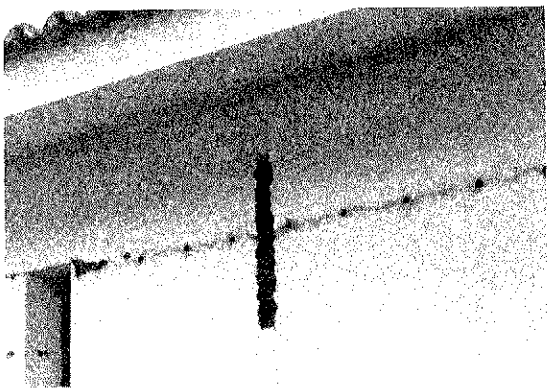
DESCRIPCION DEL SISTEMA DE REPARACION DE FISURAS

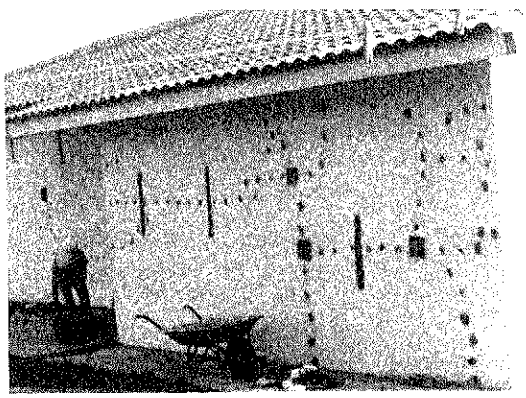
Las fisuras, si se emplastecen y se pintan, sin repararlas convenientemente, vuelven a manifestarse al cabo de muy poco tiempo, partiendo la pintura si ésta es frágil o produciendo un abombamiento de la misma si es muy deformable.

Este hecho es debido a que la fisura, una vez que se ha producido, funciona como una auténtica junta de dilatación de la estructura y los movimientos inducidos térmicamente en la misma la vuelven a manifestar.









Sistemas de reparación de fisuras comentados en el artículo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Cuando se quiera reparar una fisura, lo primero que hay que hacer es conocer y eliminar la causa que la originó. Una vez que se ha conseguido este objetivo, se ha de impedir que, en el futuro, la fisura actúe como una junta de dilatación.

Para este fin, algunas casas especializadas proponen métodos de inyección costosos y laboriosos por la dificultad que implica la inyección de un elemento profundo y de muy débil espesor.

El método aquí propuesto consiste en hacer unos tapones de mortero, en el mismo plano de la fisura, que impidan que ésta se cierre, con el fin de que deje así de actuar como una junta de dilatación. La fisura se ha de reparar un día que no sea cálido y a primeras horas de la mañana, que es cuando la dilatación térmica es baja; es decir, se ha de reparar cuando esté lo más abierta posible.

Una vez que, por el procedimiento descrito, se ha conseguido que la fisura deje de funcionar como una auténtica junta de dilatación, se puede sellar superficialmente y volver a pintar o a tratar el paramento con el sistema elegido. La fisura no escupirá al sellado superficial, porque los tapones se lo impiden.

En las fotografías adjuntas se aprecia claramente el método propuesto, que es notablemente sencillo y económico.

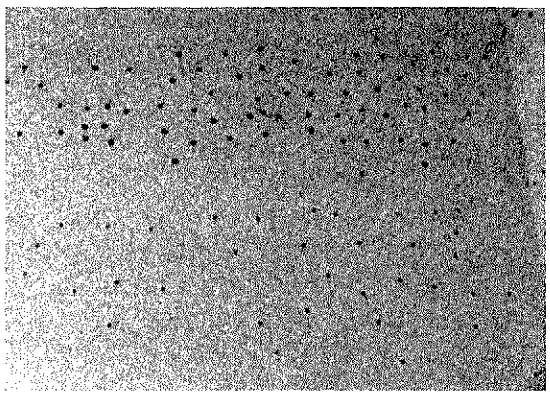
Algunas veces conviene, además, coser las fisuras con rozas hechas ortogonalmente al plano de las mismas, en las que se dejarán embebidos varios redondos de pequeño diámetro. El pequeño diámetro viene impuesto por la necesidad de reducir la longitud de las rozas, ya que es necesario que los redondos tengan su longitud de anclaje a ambos lados de la fisura. Esta forma de grapar las fisuras se debe hacer cuando se produzcan deslizamientos relativos de los bordes de las fisuras en sentido ortogonal al paramento.

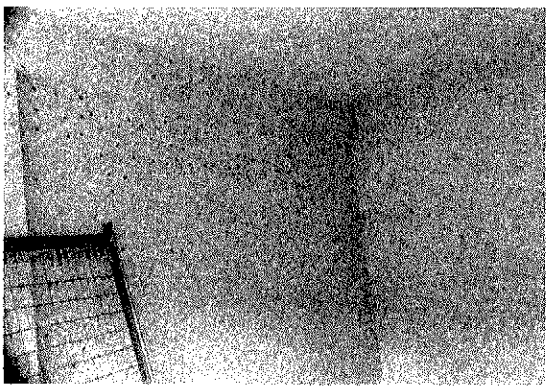
Incluso se han dispuesto llaves conectando ambos cerramientos, en el caso del chalet expuesto, (hecho que se puede observar en la documentación fotográfica que se aporta), porque no existía ningún tipo de conexión entre el cerramiento exterior e interior. Esta conexión es preceptiva en diversos Reglamentos y se recoge también en la citada figura 1. Estas llaves se dispusieron, además, porque se temieron movimientos importantes de trozos de cerramiento delimitados por 4 fisuras que existían según los lados de un rectángulo.

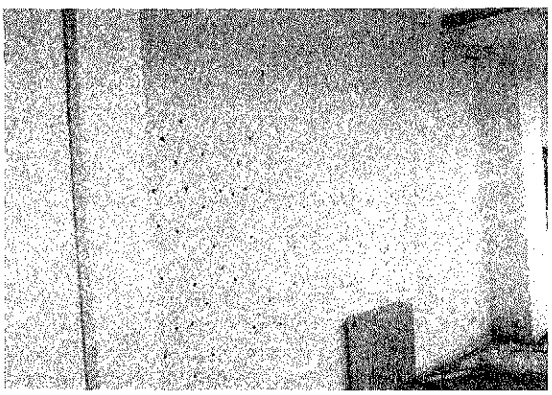
EJECUCION DE TESTIGOS EN FISURAS

Normalmente, se suele colocar un testigo de yeso o de escayola en el mismo plano de la fisura. Otras veces, se dispone un cristal pegado con resinas epoxídicas a ambos lados de la fisura, porque el cristal es más frágil y por lo tanto más sensible.

Si esto se hace así y no se toma ninguna precaución adicional, la fisura se puede cerrar por efecto térmico, llegando a romper o a desprender el testigo; dándonos, por lo tanto, una información falsa. Por ello, es conveniente disponer el testigo entre dos tapones de mortero que impidan que se cierre térmicamente la fisura. De este modo el testigo sólo se romperá si la fisura está activa, como así se desea.







Sistema de reparación de fisuras con tapones, en unos muros que estaban plagados de fisuras de retracción.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

BIBLIOGRAFIA

(1) "Comentarios al título 3° del control de la E.H.–73". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N° 129. 4° trimestre de 1978.

(2) "Patología: Reparación de un Forjado Reticular". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N° 136. 3er trimestre de 1980.

(3) "Patología. Refuerzo de encepados sobre pilotes. Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N° 142. 1er trimestre de 1982.

(4) "La demolición de los halles centrales de Reims. Una propuesta alternativa de salvación y recuperación". Por José Antonio Fernández Ordoñez y Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N° 148. 3er trimestre de 1983.

(5) "Patología 3. Reparación de pilares de hormigón mediante zunchado". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N° 153. 4° trimestre de 1984.

(6) "Proyecto de reparación del viaducto sobre la ría de Navia, de la línea Ferrol-Gijón de los Ferrocarriles de vía estrecha (F.E.V.E.)". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero N° 157. 4° trimestre de 1985.

(7) "Reparación de varios silos de áridos, en batería, mediante un recrecido de hormigón proyectado, puesto en compresión sin el empleo de gatos". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero Na 157. 4° trimestre de 1985.

(8) "Reparación de una estructura de edificación, de hormigón armado, que presentaba una degradación por carbonatación muy avanzada del hormigón y una corrosión alarmante en sus armaduras". Por Antonio González Serrano. Hormigón y Acero Na 157. 4° trimestre de 1985.

(9) "Rigidización, mediante un pretensado con armaduras postesas, de las estructuras de dos silos gemelos en batería". Por A. González Serrano y C. Lorente de Nó. Hormigón y Acero N° 157. 4° trimestre de 1985.

(10) "El pretensado como solución ejemplar en zapatas y encepados con grandes cargas portantes". Por Antonio González Serrano. Primeras Jornadas Nacionales sobre Técnicas en Centrales Nucleares. Madrid 1982.

(11) "Sistema de excavación a cielo abierto, en una estación del metro de Madrid. Un método que eliminó el peligro de derrumbamientos en un talud de quince metros de altura". Por Antonio González Serrano y Pedro A. Domingo Zaragozá. Arte y Cemento N° 1.119. Octubre de 1976.

(12) E.H.–88. Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado.

(13) E.F.–80. Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón armado o pretensado.

(14) C.E.B F.I.P. Model Code for Concrete Structures.

(15) Plasticity in reinforced concrete. W.F. Chen. McGraw-Hill Book Company.

(16) Règles Techniques de conception & de calcul des ouvrages & constructions en Béton Armé suivant la méthode des Etats Limites. Règles B.A.E.L.–80.

(17) Structural Design Guide to the ACI Building Code. Paul F. Rice. Edward S. Hoffman. Van Nostrand Reinhold Company.

(18) Building Code Requirements for Reinforced Concrete. (ACI 318 M-83).

(19) Handbook of Concrete Engineering. Mark Fintel. Van Nostrand Reinhold Company.

(20) "Structural Masonry Designer' Manual". W.G. Curtin. G. Shaw. J.K. Beck. W.A. Bray. W.G. Curtin & Partners. Consulting Structural & Civil Engineers".

(21) Calcul practique des Planchers-Dalles et Planchers-Champignons. Comité Européen du Béton. Bulletin D'Information N° 67.

RESUMEN

En el presente artículo se expone el sistema más eficaz y más barato que se conoce para reparar fisuras. El sistema propuesto, que vengo utilizando con éxito desde hace unos 12 años, es un método totalmente personal, muy simplista, que consiste en impedir que la fisura se comporte, una vez detenida la causa que la originó, como una auténtica junta de dilatación.

Como complemento, en el artículo se expone el análisis y la reparación de unas fisuras térmicas en un chalet que resultó ser muy conflictivo y la forma correcta de colocar testigos en fisuras, cosas que muy pocas veces, a mi entender, se hacen bien.

SUMMARY

This work contains a good way for repair cracks. This easy method is basis in to prevent crack performs as a termic joint.

This paper explains also how to repair cracks in masonry walls, and the correct way to detect displacements in cracks.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Reunión del Consejo F.I.P.

Durante los días 29 de setiembre a 1 de octubre, con la participación de veintitres Delegados representantes de quince de los Grupos Nacionales integrados en la Federación, se celebró en Singapur la segunda de las reuniones del Consejo de la FIP correspondientes al pasado año 1989. En representación de la ATEP, participó el Vocal Secretario de la Asociación, Sr. Piñeiro.

Para general conocimiento de nuestros Asociados, se estima oportuno comentar, resumidamente, algunos de los acuerdos adoptados en relación con los principales temas discutidos dentro del amplio Orden del día previsto.

– Ultimamente, las publicaciones de la FIP venían siendo distribuidas por la Firma "Thomas Telford Ltd.". En virtud del nuevo convenio firmado entre la FIP y la "Institución of Structural Engineers. - I.S.E.", de Londres, a partir de ahora, todo el tema de las publicaciones correrá a cargo de la citada I.S.E.

Se intentará conseguir una más amplia colaboración con las Organizaciones norteamericanas afines. Actualmente, esta colaboración no es todo lo satisfactoria que sería deseable. Se están haciendo gestiones con el A.C.I., el Prestress Concrete Institute y el Precast Institute; pero aún no se han obtenido los resultados apetecidos. Se confía en que, con motivo de la organización del Congreso de la FIP que, en 1994, se va a celebrar en Estados Unidos, pueda superarse la actual situación.

– Se acordó que sería preferible designar como sede del XII Congreso de la FIP que habrá de celebrarse en 1994, la ciudad de San Francisco en lugar de la de Washington, actualmente prevista. Se realizarán las oportunas gestiones para intentar se efectúe este cambio.

– Se estima que, sin menoscabo de la independencia que deben mantener las diversas Asociaciones Técnicas Internacionales en la programación de sus actividades, sería muy conveniente una coordinación de las convocatorias a reuniones internacionales. Debido al número cada día mayor de este tipo de reuniones, parece lógico intentar una coordinación general, para evitar las numerosas coincidencias en fechas que en la actualidad se vienen dando. Se acuerda gestionar que sea la IABSE la que se ocupe de coordinar estas convocatorias.

– Con respecto a la programación de futuros Simposios Internacionales de la FIP, se informó que, para el año 1991 está programado el de Beijing (China), durante los días 22 a 25 de octubre, sobre "Modernas aplicaciones del hormigón pretensado". En mayo del 92 se celebrará el de Budapest (Hungría), que ya en anteriores ocasiones se ha anunciado, en cuyo programa se incluyen los siguientes temas: Nuevos métodos constructivos; Nuevos métodos de prefabricación; Protección ambiental, y Rehabilitación. Finalmente, el previsto para 1993 en el Japón, se acordó, en principio, que se celebrará en Kyoto, en el mes de octubre. El tema elegido para este Simposio es "Puentes atirantados".

– Por lo que respecta al programa del próximo XI Congreso de la FIP, convocado para los días 4 a 9 de junio de 1990, en Hamburgo, se acordó lo siguiente (*):

• En la Sesión de Apertura, el Presidente de la FIP, Profesor Walther (S), hará entrega de las Medallas Freyssinet y de la FIP creadas para premiar a quienes se han destacado por su contribución al desarrollo de la técnica del pretensado o por haber ideado nuevas aplicaciones de la misma. Para esta ocasión se ha modificado el modelo de las Medallas de la FIP.

• En la Sesión dedicada al tema "Estructuras de hormigón I: Puentes" habrá tres Informes Generales a cargo de los Señores Menn (S), Lacroix (F) y Podolny (US), y nueve Comunicaciones seleccionadas de entre todas las recibidas. Los textos de otras dieciocho más se incluirán también en los Proceedings del Congreso. Además, habrá otra Sesión dedicada a la presentación de los Informes sobre "Puentes" de nueve Grupos Nacionales, uno de ellos el Grupo español (ATEP).

• En la Sesión dedicada al tema "Estructuras de hormigón I: Túneles", habrá un Informe General a cargo de Mr. Glerum (H), y seis Comunicaciones seleccionadas entre las recibidas. En los Proceedings, se incluirá además el texto de otra. También habrá otra Sesión dedicada a la presentación de los Informes sobre este tema redactados por tres Grupos Nacionales.

• Otra Sesión estará dedicada al tema: "Mejora de la calidad". En ella se presentarán siete Comunicaciones seleccionadas y habrá también un amplio "Coloquio abierto" para discutir "¿Qué puede hacerse para mejorar y asegurar la calidad?".

• Habrá otra Sesión sobre "Ultimos avances en la actual tecnología", durante la cual los Señores Breen (US), Nojiri (J) y Matt (S) presentarán sus Informes Generales. A continuación, se leerán diecisiete Comunicaciones seleccionadas y los textos de seis más se incluirán en los Proceedings.

• En la Sesión sobre "Racionalización del proceso constructivo", se presentarán quince Comunicaciones seleccionadas. Otras cuatro se incluirán en los Proceedings.

• En la Sesión sobre "Estética de las formas estructurales", presentarán Informes Generales los Señores: Tallibert (F), Menn (S), Schlaich (RF) y Lee (UK).

(*) En lo que sigue, se ha utilizado el siguiente Código de letras para la designación de los países a los que pertenecen los Ponentes de las diferentes Sesiones: (D) Dinamarca; (F) Francia; (G) Grecia; (H) Holanda; (J) Japón; (RF) República Federal Alemana; (S) Suiza; (UK) Reino Unido, y (US) Estados Unidos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

• Dos Sesiones se dedicarán a la presentación del texto revisado del Model Code CEB/FIP que se publicará en 1990. Intervendrán: El Presidente del Comité de Redacción, Mr. Tassios (G) y los Miembros de dicho Comité, Señores Skettrup (D), Litzner (RF), Perchat (F), y Miehlbradt (S). Además, habrá otra Sesión para, en coloquio abierto, discutir el nuevo texto ahora redactado.

• En otra Sesión, el Profesor Walther comentará el nuevo "Manual de cálculo" preparado por la Comisión 3 de la FIP que él preside. Este Manual constituye una muy valiosa ayuda para el cálculo de las estructuras de hormigón pretensado. Estará a la venta durante el Congreso.

• Se dedicarán tres Sesiones a informar sobre el estado actual de los trabajos que vienen desarrollando las nueve distintas Comisiones Técnicas que la FIP tiene constituidas.

• Finalmente, en la Sesión de Clausura, se darán a conocer los ganadores del nuevo "Premio de la FIP" creado para galardonar a los autores de estructuras singulares que se consideren aplicaciones excepcionales del hormigón estructural en edificios y obras de ingeniería civil. El premio consistirá en una placa metálica, que será colocada en la construcción seleccionada, y certificados otorgados a las distintas personas que hayan intervenido en su proyecto y construcción. En esta ocasión se concederán, como máximo, cinco de dichos premios. A continuación el Profesor Walther pronunciará el Discurso de Clausura del Congreso (1).

– La próxima reunión del Consejo, primera del año 1990, se celebrará en Hamburgo (RFA), en los días inmediatamente anteriores a la iniciación del XI Congreso.

En setiembre del 90 se celebrará la segunda reunión de dicho año, en Lausana (Suiza).

– Se acordó que, en 1991, la primera reunión del Consejo se celebrará en primavera, en Stavanger (Noruega), y la segunda, en Beijing (China), coincidiendo con el Simposio de la FIP programado, para ese año, en octubre, en dicha ciudad.

– Por último, se decidió que en 1992, coincidiendo con el Simposio que en el mes de mayo se celebrará en Budapest (Hungría), tendrá lugar la primera de las reuniones que el Consejo de la FIP debe tener ese año.

11th INTERNATIONAL CONGRESS OF THE FIP, HAMBURG 1990

Draft
Sept. 89

	0900 1030	C	1100 1230	L	1400 1600	C	1630 1730	EVENING
SUNDAY 3 June	Optional sightseeing excursions							Dinner of FIP Council
MONDAY 4 June	FIP Council Meeting						Registration	Get - together Party
			Concrete Canoe Race (heats)				Canoe Race Finals	
TUESDAY 5 June			1000 1200 Opening Ceremony Medals *Chairman + org.: Stiller* / Opening of exhibition		1530 Latest developments in Modern Technology Breen Nojiri Matt *Chairman: Lacroix Org.: Matt*		Modern Technology (selected contributions in 3 parallel sessions) *Chairmen: Breen, Lindgren, Matt* *Org.: Matt*	
WEDNES. 6 June	Concrete Structures I : Bridges & Tunnels Menn, Lacroix, Podolny, Gjerum *Chairman: Virlogeux Org.: Virlogeux, Oud*		Concrete Structures I : Bridges & Tunnels (selected reports) *Chairman: Oud Org.: Virlogeux, Oud*		Concrete Structures I : Bridges (nat. reports) *Chairman + org.: Virlogeux* / Improvement of quality *Chairman + org.: Vos*		Concrete Structures I : Tunnels (nat. reports) *Chairman + org.: Oud* / Panel Discussion "What can be done to improve and ensure quality ?" *Chairman + org.: Vos*	Opera or Concert
THURSD. 7 June	CEB / FIP Model Code Tassios, Litzner, Skettrup, Perchat, Miehlbradt *Chairman + org: Rowe*		CEB / FIP Model Code (invited speakers) *Chairman + org.: Rowe* / Selected reports from Commissions *Com. 1: 20', 2: 50', 7: 20' Chair.: Crozier, org.: Andrew*		Design Handbook Teach-in Walther, Miehlbradt, Appleton, Peter, Friedrich *Chairman: Walther Org.: Miehlbradt* / Selected reports from Commissions *Com. 4: 40', 5: 40', 8 : 40' Chair.: Crozier, org.: Andrew*		Panel Discussion on CEB / FIP Model Code (open to the floor) *Chairman + org.: Lee* / Selected reports from Commissions *Com. 6: 20' Com. 9: 40' Chair.: Crozier, org.: Andrew*	
FRIDAY 8 June	Concrete Structures II (selected reports) *Chairman + org.: Moksnes*		Concrete Structures II (selected reports) *Chairman + org.: Moksnes*		Concrete Structures II (nat. reports) *Chairman: Subba Rao Org.: Moksnes* / Rationalization of the building process *Chairman + org.: Van Acker*		Concrete Structures II (selected reports) *Chairman: Subba Rao Org.: Moksnes* / Rationalization of the building process *Chairman + org.: Van Acker*	Banquet
SATURD. 9 June	Aesthetics and the Structural Form Tallibart, Menn, T.Y. Lin, Schlaich *Chairman: Wittfoht Org.: Schlaich*		Closing Ceremony Awards *Chairman: Walther Org.: Stiller*		FIP '90			

simultaneous translation provided in the main hall

no simultaneous translation in the afternoon sessions

(1) Para mejor información sobre el desarrollo de las diferentes Sesiones, al final de la presente Nota se reproduce un cuatro (en inglés) en el que se resume el programa general del Congreso. Fue presentado y distribuido en la reunión, por el Secretario General de la FIP, Mr. Andrew.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El Dr. Hans Wittfoht ha sido galardonado con el "Premio Internacional al Mérito" de Ingeniería Civil

En la Solemne Sesión de Apertura del Simposio sobre "Durabilidad de las Estructuras", celebrado por la IABSE, en Lisboa, en setiembre de 1989, el Presidente de la IABSE entregó al Dr. h.c. Hans Wittfoht el "Premio Internacional al Mérito" de Ingeniería Civil. Este premio, le ha sido concedido en consideración a sus extraordinarias contribuciones al arte y la ciencia del hormigón pretensado, y en reconocimiento a su destacada actividad en el campo del proyecto y construcción de puentes.

Hans Wittfoht, nació en Wittingen (RFA); recibió su Diploma de Ingeniería Civil en 1951 y su grado de Doctor en 1963, en la Universidad Técnica de Karlsruhe. Ya en 1946, inició su colaboración en la empresa Polensky and Zöllner, la cual debe a él, en gran parte, muchos de sus éxitos. Durante los cuarenta años que permaneció trabajando en la citada empresa, llegó a ser miembro de su Consejo Directivo, en 1968, y posteriormente, desde 1970 a 1987, uno de sus más activos y eficaces Socios. En este cargo, ha sido el responsable de los sucesivos avances técnicos y de las actividades en ultramar.

Imaginación e intrepidez son dos de los atributos esenciales de Hans Wittfoht y los que le han permitido llevar a cabo sus osados proyectos y realizaciones en el campo de los puentes. Es el inventor de métodos, hoy día internacionalmente aceptados, para la construcción de puentes de hormigón pretensado, utilizando encofrados trepadores y el sistema de voladizos sucesivos. Sus más destacadas obras, admiradas por todos los expertos, son el puente de Krahnenberg sobre el Rin (1961-64), el de la autopista Siegen-Eiserfeld (1965-69), el de Köhlbrand en Hamburgo (1970-74) y el primer puente de hormigón pretensado situado por rotación, sobre el río Tigris, en Bagdag (1980-82).

A pesar de su intensa actividad como miembro de una importante empresa, Hans Wittfoht siempre ha encontrado ocasiones para transmitir sus experiencias profesionales a sus colegas, mediante numerosas conferencias y publicaciones. Además está integrado en varias Asociaciones Técnicas nacionales e internacionales.

Desde 1984 hasta 1988 ha sido Presidente de la F.I.P. Desde 1985 es Presidente de la Asociación Alemana del Hormigón (DBV). Desde 1983 hasta 1987 fue Presidente del Comité Técnico de la IABSE, y desde 1987 ocupa el cargo de Vicepresidente de la IABSE.

Nuestra más cordial enhorabuena a Mr. Wittfoht.

* * *

El Profesor Julio Ferry Borges ha sido designado Miembro de Honor de la IABSE

En la Solemne Sesión de Apertura del Simposio sobre "Durabilidad de las Estructuras", celebrado por la IABSE, en Lisboa, en setiembre de 1989, el Presidente de la IABSE entregó al Profesor Doctor h.c. Julio Ferry Borges el nombramiento de Miembro de Honor de la citada Asociación, en reconocimiento a los destacados servicios prestados a la misma y por su eficacísima contribución al desarrollo de la cooperación técnica internacional.

Julio Ferry Borges, nacido en 1922, fue uno de los fundadores del Laboratorio Nacional de Ingeniería Civil (L.N.E.C.) de Lisboa, Portugal. En este Laboratorio fue el primer Jefe del Departamento de Estructuras y, posteriormente el Director. En la actualidad es el Presidente del Consejo Asesor. Las principales contribuciones de su actividad en la investigación, se refieren al análisis estructural y muy especialmente al campo de las estructuras de hormigón, de la ingeniería sísmica, y de las teorías probabilísticas y de la garantía de calidad.

Proyectó importantes estructuras de hormigón en Lisboa, tales como el Mercado de Pescado, el Teatro Nacional, el Palacio de Justicia, y el Banco Espíritu Santo. Actuó también como Asesor en el proyecto y construcción del famoso puente colgante sobre el Tajo.

Ha publicado más de 150 artículos y es miembro activo de varias Asociaciones Internacionales.

Merece destacarse su actuación como Presidente del "Joint Committee on Structural Safety", Comisión creada por las Organizaciones internacionales CEB, CIB, ECCS, FIP, IABSE y RILEM.

Es Doctor honoris causa de la Universidad Técnica de Lisboa y ha sido invitado a impartir diversos cursos para postgraduados sobre teorías probabilistas, durabilidad, garantía de calidad y sobrecargas en estructuras.

Es fundador de la Asociación Portuguesa del Pretensado y de la de Ingeniería Sísmica y es, así mismo, Miembro de la Academia de Ciencias de Lisboa.

En 1985, la IABSE le concedió el "Premio Internacional al Mérito" de Ingeniería Civil, en reconocimiento a sus aportaciones en los campos de la durabilidad de las estructuras y garantía de calidad.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Simposio Internacional sobre "un edificio totalmente textil"

Materiales compuestos, con armadura textil, utilizados en la construcción de edificios y otras aplicaciones afines

Organizado por el "Forum Internacional de Tecnologías de las Aplicaciones Textiles" (FITAT), con la colaboración de la Universidad Claude Bernard, de Lyon; el "Fashion Institute of Technology" de la Universidad del Estado de New-York; el "Instituto Textil de Francia", en Lyon, y bajo los auspicios del Ministerio de Investigación y Tecnología francés, se va a celebrar en Lyon, durante los días 16, 17 y 18 de julio del presente año 1990, este Simposio Internacional en el que se estudiarán los últimos avances en la aplicación de los materiales compuestos, y sus componentes textiles, utilizados como elementos estructurales o no estructurales, tanto en edificación como en la ingeniería civil.

Los temas seleccionados para este Simposio son los siguientes:

A.—Temas fundamentales:

1. Propiedades físicas y químicas de los materiales compuestos, con armadura textil.
2. Propiedades de las armaduras, en relación con las técnicas textiles.
3. Propiedades reológicas.
4. Comportamiento mecánico.
5. Durabilidad y fiabilidad.
6. Métodos de cálculo y dimensionamiento.

B.—Aplicaciones tecnológicas:

1. Ejemplos de materiales rígidos y flexibles.
2. Estructuras actuales y posibles (inflables, de cables, tridimensionales, etc.).
3. Elementos no estructurales para edificación.
4. Aspectos económicos.

Los idiomas oficiales de este Simposio son el francés y el inglés.

Los interesados en recibir mayor información, deberán dirigirse a:

FITAT
Forum International des Technologies Appliquées du Textile.
34, rue de la Charité.
69002 LYON
FRANCIA

* * *

Cuartas Jornadas de Calidad en Siderurgia Madrid, Mayo 1990

Presentación y Objetivos

Como es tradicional, el Comité de Calidad de las Industrias Siderúrgicas, convoca las cuartas Jornadas, que deberán celebrarse en la primera quincena de mayo de 1990. Se pretende que, de una forma eminentemente práctica, los fabricantes y los utilizadores intercambien sus experiencias en el campo de la Gestión de la Calidad.

La Calidad será un factor decisivo para la supervivencia de las empresas en el marco del Mercado Unico Europeo.

La implantación de las normas ISO de la serie 9.000 (UNE serie 66.900) está impulsando el Sistema de Certificación de Empresas que será exigido en breve en las relaciones entre fabricante-utilizador, lo que representará un notable esfuerzo de adaptación a las nuevas filosofías.

Estas razones aconsejan que las próximas Jornadas se dediquen, íntegramente, a las Técnicas de Gestión de la Calidad. En ellas se pretende que, con un marcado enfoque práctico, se debatan, entre fabricantes y utilizadores, las técnicas que los primeros necesitan implantar para satisfacer las exigencias de los segundos y, entre todos, buscar las soluciones unificadas que eviten duplicaciones y exigencias suplementarias, en muchos casos innecesarias.

TEMARIO

Técnicas de Gestión de la Calidad:

- Aseguramiento de la Calidad.
- Calidad Concertada.
- Clasificación de Proveedores.
- Calidad Total.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Sistemas de Evaluación de la Calidad.
– Control de procesos y productos.
Formación.

Certificación de:

– Empresas.
– Productos.
– Acreditación de Laboratorios.

Ensayos

– Nuevos ensayos.
– Calibración de equipos y aparatos de medida.
– Certificados.

INSCRIPCIONES

Derechos de inscripción: 60.000 ptas.

– Miembros de UNESID y/o AECC: 50.000 ptas.
– La 4ª inscripción y siguientes de una misma Empresa: 40.000 ptas.

La inscripción da derecho a:

– Comida de trabajo los días de las Jornadas.
– Libro de las Ponencias.
Documentación de las Jornadas.

Para mayor información, los interesados deberán dirigirse a:

Secretaría de las Jornadas
UNESID
Apdo. 13098
28080 Madrid.

* * *

II Conferencia Internacional sobre "Modernas Técnicas Constructivas" Singapur, 27 - 28 Marzo 1990

Durante los días 27 y 28 de marzo del presente año 1990, se celebrará, en Singapur, la Segunda Conferencia Internacional sobre "Modernas Técnicas Constructivas", bajo el lema general "Hacia la construcción CERO DEFECTOS".

En ella se estudiarán y discutirán temas relativos a:

– Métodos y técnicas constructivos.
– Materiales de construcción.
– Maquinaria para la construcción.
– Productividad en la construcción.
– Financiación de la construcción.
– Legislación sobre la construcción.

Los interesados en participar en esta Conferencia, deberán dirigirse a:

Conference Director: John S. Y. Tan
150 Orchard Road -07-14
Singapore 0923

El importe de los derechos de inscripción es:

Para los Autores ó Co-Autores de Comunicaciones 390.–S$
Para los participantes – 480.–S$

En este importe están incluídos, refrescos, comidas y la documentación de la Conferencia.

* * *

Jornada sobre "Presente y Futuro del Pretensado"

Organizada por el Instituto Valenciano de la Edificación, con la colaboración de la Asociación Técnica Española del Pretensado (ATEP), se va a celebrar, en Alicante, el martes día 3 del próximo mes de abril, una Jornada sobre "Presente y futuro del pretensado".

El programa de la Jornada será el siguiente:

1ª Conferencia: Generalidades. Fundamentos de la técnica del pretensado. Por: F. Regalado.

2ª Conferencia: Aplicaciones del pretensado en obra civil. Sistemas de pretensado. Prefabricación. Por: A. Páez.

3ª Conferencia: Aplicaciones del pretensado en edificación. Forjados. Reparaciones. Por: R. López Palanco.

4ª Conferencia: Realizaciones en edificación. Por: M. Fisac.

5ª Conferencia: Realizaciones en obra civil. Comparación de las técnicas del hormigón armado y pretensado. Por: A. Páez.

Los interesados en participar en esta Jornada deberán dirigirse a:

INSTITUTO VALENCIANO DE LA EDIFICACION
Camino de Vera, 14
46022 VALENCIA

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

HUARTE, S.A.—HASA.—Oficina Técnica.—Avda. General Perón, 40-C-4.º. 28020 Madrid.
IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.—Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.—Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).— Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.—Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPSA).—General Díaz Porlier, 49-51. 28001 Madrid.
INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).—Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES (IECA).—Velázquez, 11-3.º-izda. 28001 Madrid.
INSTITUTO TECNICO DE CONTROL, ALICANTE S.A.—Avda. de Elche, 164. 03008 Alicante.
INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).—Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA). Biblioteca.—Orense, 70. 28020 Madrid.
JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.—Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.—Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
MECANOGUMBA, S.A.—Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
OBRAS Y CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES, S.A. (OCISA).—Princesa, 3-7.º. 28008 Madrid.
PACADAR, S.A.—Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
PRENSOLAND, S.A.—Calle Industria, s/n. 08592 Sant Martí de Centelles (Barcelona).
PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.—Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.—Avda. del Triunfo, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
SIKA, S.A.—Carretera Madrid-Irún, Km. 14,500. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SECEGSA).—Estébanez Calderón, 3-1.º-A. 28020 Madrid.
TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).—Velázquez, 105. 28006 Madrid.
TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.—Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
TREFILERIAS QUIJANO, S.A.—Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).—Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



asociación técnica
española del pretensado

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026