

hormigón

**y ACERO**

*n° 174*

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO  
DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO (C.S.I.C.)  
APARTADO 19.002 – 28080 MADRID

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de “**Miembro Protector**”, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de “**Miembros Protectores**” los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

- ACEROS Y TECNOLOGIA PARA LA CONSTRUCCION, S.A. (ATECSA).**-P.º de la Habana, 14. 28036 Madrid.
- AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.**—Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.
- AGRUPACION DE FABRICANTES DE CEMENTO DE ESPAÑA “OFICEMEN”.**—Velázquez, 23. 28001 Madrid.
- ALCAL.**—Independencia, 4-4.º. 24001 León.
- ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).**-Orense, 10. 28020 Madrid.
- AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.**—Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.
- BIGUETES, S.L.**—Partida Altabix, s/n. 03000 Elche (Alicante).
- CAMARA, S.A.**—Apartado 180. 36080 Pontevedra.
- CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.A.**—Grijalba, 9. 28006 Madrid.
- CEMENTOS MOLINS, S.A.**—C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Viçenc dels Horts (Barcelona).
- CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX).** Gabinete de Información y Documentación.—Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- CENTRO DE TRABAJOS TECNICOS, S.A., C.T.T., S.A.**—Aribau, 185. 08021 Barcelona.
- COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.**—Almagro, 42. 28010 Madrid.
- COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.**—Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.**—Buen Pastor, n.º 5. 08021 Barcelona.
- COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.**—Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.
- COL. LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.**—Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.
- COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE MADRID. Biblioteca.**—Barquillo, 12. 28004 Madrid.
- CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.**—Federico Salmón, 13. 28016 Madrid.
- CONSULTECO, S.L.**—Pintor Lorenzo Casanova, 26. 03003 Alicante.
- CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.**—Ayala, 42. 28001 Madrid.
- DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.**—Orense, 81. 28020 Madrid.
- EMESA-TREFILERIA, S.A.**—Apartado 451. 15080 La Coruña.
- EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI).** Departamento Obras Especiales.—Padilla, 46. 28006 Madrid.
- ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.**—Juan de Mena, 8. 28014 Madrid.
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.**—Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.
- ESTEYCO, S.A.**—Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.
- ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).**-Arapiles, 14. 28015 Madrid.
- EUROCONSULT, S.A.**—Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).
- FERROVIAL, S.A.**—Príncipe de Vergara, 135. 28006 Madrid.

(Continúa en el int. de contraportada)

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO  
 INSTITUTO EDUARDO TORROJA DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO  
 DEL CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

COMITE DE REDACCION

Director:

PIÑEIRO, Rafael

Vocales:

BARREDO, Carlos  
 JODAR, Juan  
 JULIA, Manuel  
 LLOMBART, José Antonio  
 ROMERO, Rafael  
 SANCHEZ-GALVEZ, Vicente

Censores:

ALCALA, Juan Luis  
 CUVILLO, Ramón del  
 ELICES, Manuel  
 GONZALEZ VALLE, Enrique  
 MANTEROLA, Javier  
 MORAN, Francisco  
 MORENO TORRES, Juan  
 MURCIA, Juan  
 POZO VINDEL, Florencio J. del  
 SIEGRIST, Carlos

*hormigón*  
 y *acero*

n.º 174

1.º trimestre 1990

CUOTAS ANUALES

CATEGORIAS	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" (personas naturales) . . . . .	6.000,— ptas.	45,— dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas) . . . . .	15.000,— ptas.	100,— dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.) . . . . .	30.000,— ptas.	200,— dólares

Ni la Asociación ni el Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, se hacen responsables del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocinen su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - 28080 MADRID - ☎ 202 04 40

Depósito Legal: M-853-1958  
 Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID  
 ISSN: 0439-5689

# hormigón y acero n.174

## índice

	Págs.
<b>Principales actividades desarrolladas por la Asociación Técnica Española del Pretensado durante el año 1989. Informe resumido</b>	<b>9 - 16</b>
Principaux activités de l'Association Technique Espagnole de la Précontrainte au cours de 1989. Compte rendu. Short report on the activities of the Spanish Technical Association for Prestressing during 1989. <i>R. Piñeiro.</i>	
<b>457-0-144 Análisis de piezas curvas pretensadas (II)</b> . . . . .	<b>17 - 31</b>
Analyse de poutres courbes précontraintes (II). Analysis of curved prestressed beams (II). <i>M. Martínez Lafuente.</i>	
<b>457-0-145 Aplicación del método de reducción en el cálculo lineal de estructuras condicionadas con matriz de masa singular</b> . . . . .	<b>33 - 45</b>
Application du méthode de réduction dans le calcul lineaire des structures conditionnées avec matrice singulière de masse. Application of the reduction method to the linear computation of constrained structures with singular mass matrix. <i>P. Rubio Pérez.</i>	
<b>457-0-146 Acciones térmicas en tableros de puentes de vigas de hormigón</b>	<b>47 - 59</b>
Actions thermiques pour le calcul des ponts à poutres de béton. Design thermal actions in concrete T-beam bridge. <i>E. Mirambell; A. Aguado y P. Díez.</i>	
<b>457-0-147 Interpretación analítica de la fórmula de Branson para el cálculo de flechas en piezas de hormigón armado</b> . . . . .	<b>61 - 66</b>
Interprétation analytique de la formule de Branson pour le calcul des flèches en poutres en béton armé. Analytical interpretation of Branson's formula for the calculation of deflections in reinforced concrete members. <i>A. Marí; F. López Almansa y E. Mirambell.</i>	

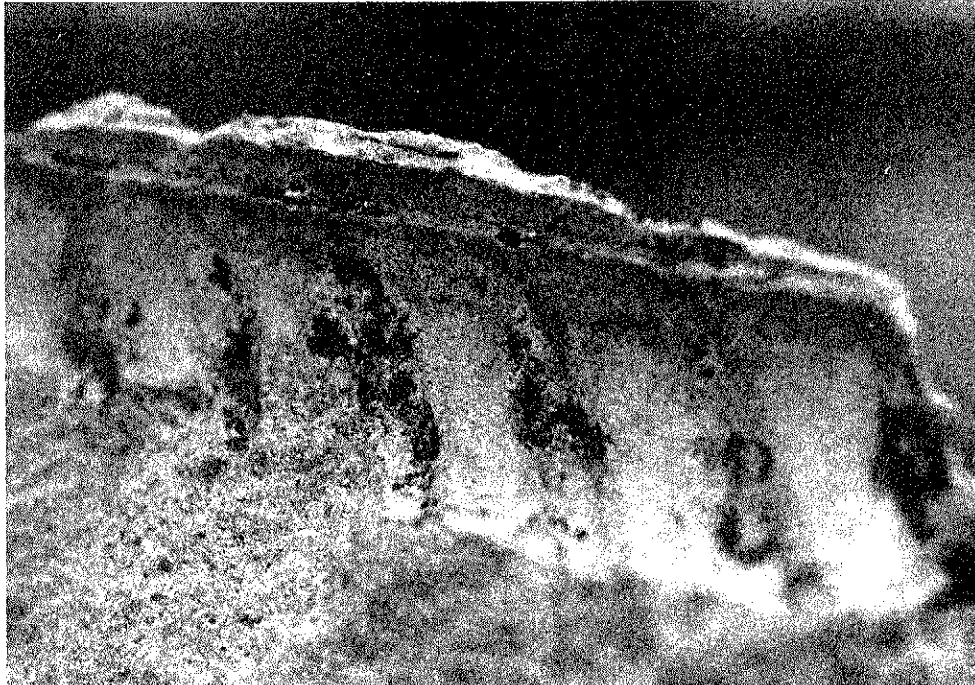
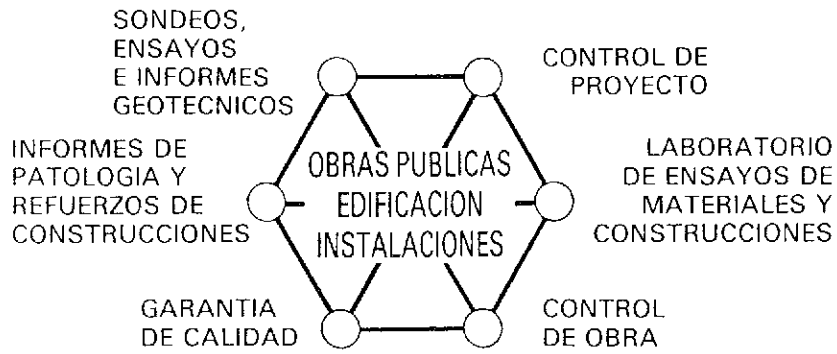


	Págs.
<b>457-0-148</b>	<b>Comportamiento en destesado de armadura activa. Parte I: Modelo teórico</b> . . . . . <b>67 - 76</b>
	Comportement après détendre de la armature active, Partie I: Modèle théorique.
	Behaviour of prestressing tendons after release, Part I: Theoretical model.
	<i>X. Montobbío y A. Aguado.</i>
<b>457-7-5</b>	<b>Condición de adherencia en barras de distinto diámetro</b> . . . . . <b>77 - 80</b>
	Condition d'adhérence en barres de différent diamètre.
	Bond-strength in bars of different diameter.
	<i>L. Martínez Pérez.</i>
<b>591-0-29</b>	<b>Perspectivas de futuro en el campo del hormigón</b> . . . . . <b>81 - 94</b>
	Future développement dans la domaine du béton.
	Future development in the concrete field.
	<i>A. Aguado.</i>
<b>591-2-213</b>	<b>Puente atirantado, sobre el río Nalón, en Sama de Langreo</b> . . . . <b>95 - 102</b>
	Pont haubané, sur la rivière Nalón, à Sama de Langreo.
	Cable stayed bridge over the Nalon River in Sama de Langreo.
	<i>J. Manterola y L. Fernández Troyano.</i>
<b>591-2-214</b>	<b>El puente "Libertador, General San Martín" (Fray Bentos-Puerto Unzue entre Uruguay y Argentina)</b> . . . . . <b>103 - 119</b>
	Le pont "Libertador General San Martín".
	The "Libertador General San Martín" Bridge.
	<i>A. Ponce.</i>
<b>591-9-46</b>	<b>Las estructuras a tracción y sus materiales</b> . . . . . <b>121 - 133</b>
	Les structures à traction et leurs matériaux.
	Tension structures and their materials.
	<i>J. Murcia.</i>



**INTEMAC**

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES



**ENSAYOS SOBRE LA INFLUENCIA DE LA OXIDACION Y MANCHAS DE MORTERO  
EN LA ADHERENCIA DE BARRAS CORRUGADAS**

**MADRID:** Oficina: Monte Esquinza, 30, 4.º D - Teléfs.: (91) 410 51 58 - 62 -66 - Télex: 49987 INTEM E - Fax: 410 25 80 - 28010 MADRID  
**MADRID:** Laboratorio: Carretera de Loeches, 7 - Teléfs.: (91) 675 31 00 - 04 - 08 - 28850 TORREJON DE ARDOZ (Madrid)  
**BARCELONA:** Oficina y Laboratorio: Avda. de la Riera, 10, Nave 2, Pol. Ind. Tres Santos - Teléf.: (93) 372 83 00 - Fax: 473 03 09  
08960 SANT JUST DESVERN (Barcelona)

**RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".**

**ESPAÑA**

ALBISA, S.A.—Algeciras (Cádiz).  
ASOCIACION ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.—Barcelona.  
ASOCIACION DE LABORATORIOS HOMOLOGADOS DE LA COMUNIDAD VALENCIANA.—Valencia.  
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).  
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.—Oviedo.  
CEYD TECNICA, S.A.—Oviedo.  
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT. S.A.".—La Coruña.  
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.  
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.—La Coruña.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.—Murcia.  
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Laboratorio de Ensayos.—Tarragona.  
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.—Palma de Mallorca.  
COLEGI OOFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.—Bilbao.  
CONTROLEX.—Alicante.  
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Barcelona.  
DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTONICAS.—Escuela Técnica Superior de Arquitectura.—Sevilla.  
DIRECCION DE CARRETERAS Y TRANSPORTE. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.  
DITECO, S.L.—Valencia.  
ENAGA, S.A.—Pozuelo de Alarcón (Madrid).  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Barcelona.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Madrid.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. Biblioteca.—San Sebastián.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS. Biblioteca.—Córdoba.  
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES. Departamento de Teoría de Estructuras. Universidad de Zaragoza.—Zaragoza.  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.—Castro de Elviña (La Coruña).  
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.—León.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Burgos.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Córdoba.  
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.—Manresa (Barcelona).  
ESTRUCTURAS Y ENCOFRADOS RETICULADOS, S.A.—Alicante.  
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.  
FORJADOS DOL.—Esquivias (Toledo).  
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.—Madrid.  
GIJON E HIJOS, S.A.—Motril (Granada).  
GIRALDEZ OCAÑA CONTROL, S.L.—Chapela - Vigo (Pontevedra).  
HORMADISA, S.L.—Puentecesures - Cordeiro (Pontevedra).  
IDEAM, S.A.—Madrid.  
INBADELCA, S.A.—Baracaldo (Vizcaya).  
INDUSTRIAS VEYGA, S.A.—Tarrasa (Barcelona).

INGENIERIA Y ECONOMIA DEL TRANSPORTE, S.A.—Centro de Documentación.—Madrid.  
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.  
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.—Madrid.  
INSTITUTO NACIONAL DE REFORMA Y DESARROLLO AGRARIO (IRYDA).—Madrid.  
J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigüeiro (La Coruña).  
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Consejería de Fomento.—Valladolid.  
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Servicio de Obras Públicas.—Ávila.  
LA AUXILIAR DE LA CONSTRUCCION.—Santa Cruz de Tenerife.  
LABORATORIO DE LA EDIFICACION.—Consejería de Obras Públicas.—Las Palmas de Gran Canaria.  
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).  
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.  
LIBRERA RUBIÑOS.—Madrid.  
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).—Castellón de la Plana.  
METALURGICA GALAICA, S.A.—Narón (La Coruña).  
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION GENERAL DE INFRAESTRUCTURA.—Madrid.  
RIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.—Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS, SERVICIO DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.—Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO.—DIRECCION GENERAL PARA LA VIVIENDA Y ARQUITECTURA, SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA BASICA Y TECNOLOGICA.—Madrid.  
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS Y URBANISMO. SUBDIRECCION GENERAL DE INFORMES ECONOMICOS Y TECNOLOGIA.—Madrid.  
POSTENSA, S.A.—Bilbao.  
PRAINSA.—Barcelona.  
PREBETONG CANARIAS, S.A.—Santa Cruz de Tenerife.  
PREFABRICACIONES Y CONTRATAS, S.A.—Madrid.  
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).—Zaragoza.  
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).—León.  
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).—Valladolid.  
PREFABRICADOS POUSA, S.A.—Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).  
PRODUCTOS DERIVADOS DEL CEMENTO, S.A. (HORTE).—Valladolid.  
RODIO. CIMENTACIONES ESPECIALES, S.A.—Madrid.  
RUBIERA, S.A.—León.  
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.—Barcelona.  
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.—Gerona.  
SESTRA, S.A.L.—Andoain (Guipúzcoa).  
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.—Madrid.  
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE AUTOMOVILES DE TURISMO (SEAT). Biblioteca.—Barcelona.  
SPANDECK CATALANA, S.A.—Barcelona.  
TECHOS ESPECIALES PREFABRICADOS, S.A. (TEPSA).—Tarrasa (Barcelona).  
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.—Madrid.  
TEJERIAS "LA COVADONGA".—Muriedas de Camargo (Cantabria).  
TELEFONICA.—Departamento Inmobiliario.—Madrid.  
TERRATEST, S.A.—Madrid.  
TEXSA, S.A.—Barcelona.  
TIGNUS, S.A.—Valencia.  
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPASA).—Madrid.  
UNIVERSIDAD CASTILLA-LA MANCHA.—Albacete.  
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. Biblioteca Universitaria.—Santander.  
UNIVERSIDAD DE OVIEDO. Biblioteca Universitaria.—Oviedo.  
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.—Valencia.  
VIGUETAS MUBEMI.—Torrente (Valencia).  
VISANFER, S.A.—Totana (Murcia).

## EXTRANJERO

ASSOCIACAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.—Sao Paulo (Brasil).  
BIBLIOTECA DEL DEPARTAMENTO DI ENGEENNERIA STRUCTURALE.—Politécnico  
d'Torino: Torino (Italia).  
CONSULAR. CONSULTORES ARGENTINOS ASOCIADOS.—Buenos Aires (Argentina).  
CONSULBAIRES. INGENIEROS CONSULTORES, S.A.—Buenos Aires (Argentina).  
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.—Luanda (República Popular de  
Angola).  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU.—Lima (Perú).  
SARET P.P.B. Cadre Technique.—Le Pontet (Francia).  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.—Biblioteca Integrada de Economía, Ciencias e  
Ingeniería. Dpto. de Selección y Adquisiciones. Mérida (Venezuela).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.—Quito (Ecuador).  
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.—Valparaiso (Chile).  
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.—Mayagüez (Puerto Rico).  
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA.—Biblioteca Central. Valpa-  
raiso (Chile).

## MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

\* \* \*

## AVISO IMPORTANTE

### DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002. 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

# Normas que deben cumplir los artículos que se envíen para su publicación en "Hormigón y Acero"

## 1. CONDICIONES GENERALES

Los originales de los artículos que se desee publicar en "Hormigón y Acero", se enviarán a la Secretaría de la ATEP. Deberán cumplir rigurosamente las normas que a continuación se especifican. En caso contrario, serán devueltos a sus Autores para su oportuna rectificación.

Los que cumplan los requisitos exigidos pasarán al Comité de Redacción de la Revista el cual, previo informe y evaluación de su calidad por el correspondiente Cuerpo de Censores, decidirá si procede o no su publicación, sugiriendo eventualmente al Autor los cambios que, en su opinión, deben efectuarse para su final publicación en "Hormigón y Acero". Toda correspondencia en este sentido se mantendrá directamente con el Autor o primero de los Autores que figuren en el Artículo.

Los originales que por cualquier causa no fueran aceptados serán devueltos al Autor.

## 2. PRESENTACION DE ORIGINALES

Los originales se presentarán mecanografiados a doble espacio, por una sola cara, en hojas tamaño UNE A4. De cada artículo se enviará original y dos copias.

### 2.1. Título

El título, *en español, francés e inglés* deberá ser breve y explícito, reflejando claramente el contenido del artículo. A continuación se hará constar nombre y apellidos del Autor o Autores, titulación profesional y, si procede, Centro o Empresa en el que desarrolla sus actividades.

### 2.2. Resumen

Todo artículo deberá ir acompañado de un resumen, *en español e inglés*, de extensión no inferior a cien palabras (unas ocho líneas mecanografiadas) ni superior a ciento cincuenta palabras (doce líneas).

### 2.3. Gráficos y figuras

Los gráficos y figuras deberán ir numerados correlativamente en el orden en que se citen en el texto, en el cual deberá indicarse el lugar adecuado de su colocación.

Se presentarán delineados en tinta china negra sobre papel vegetal o sobre papel blanco, o en reproducibles de muy buena calidad. Todas las figuras llevarán su correspondiente pie explicativo.

Los rótulos, símbolos y leyendas deberán ser tales que, tras su reducción a la anchura de una o dos columnas de la Revista (setenta y dos o ciento cincuenta mm, respectivamente) queden letras de tamaño no inferior a 1,5 mm y sean, en todo caso, fácilmente legibles.

### 2.4. Fotografías

Se procurará incluir sólo las que, teniendo en cuenta la reproducción, sean realmente útiles, claras y representativas. Podrán presentarse en copias de papel opaco negro o en color, en negativo, o en diapositivas. Se tendrán en cuenta las normas sobre tamaño de rótulos y leyendas dadas en el punto

2.3 anterior. Irán numeradas correlativamente y llevarán su correspondiente pie explicativo.

### 2.5. Tablas y cuadros

Cumplirán las proporciones y dimensiones indicadas para las figuras. Llevarán numeración correlativa, citada en el texto, y un pie con la explicación adecuada y suficiente para su interpretación directa.

### 2.6. Unidades

Las magnitudes se expresarán, preferiblemente, en unidades del Sistema Internacional (S.I.) según las UNE 5001 y 5002.

### 2.7. Fórmulas, letras griegas, subíndices y exponentes

En las fórmulas se procurará la máxima calidad de escritura y emplear las formas más reducidas siempre que no entrañen riesgo de incompreensión. Para su identificación se utilizará, cuando sea necesario, un número entre paréntesis a la derecha de la fórmula.

Se cuidará especialmente que todas las letras griegas, subíndices y exponentes resulten perfectamente identificables, procurando evitar los exponentes complicados y letras afectadas simultáneamente de subíndices y exponentes.

Cualquier expresión que, por su complejidad, pueda dar lugar a interpretaciones equivocadas, se presentará manuscrita. Se diferenciarán claramente mayúsculas y minúsculas y aquellos tipos que puedan inducir a error (por ejemplo, la  $\ell$  y el 1; la O y el cero; la K y la k, etc.).

### 2.8. Referencias bibliográficas

Las referencias bibliográficas citadas en el texto se recogerán al final del mismo dando todos los datos precisos sobre la fuente de publicación, para su localización.

Las citas en el texto se harán mediante números entre paréntesis. En lo posible, se seguirán las normas internacionales utilizadas generalmente en las diversas publicaciones, es decir:

#### Referencias de artículos publicados en revistas

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del artículo; nombre de la publicación; número del volumen y fascículo; fecha de publicación, y número de la primera y última de las páginas que ocupa el artículo al que se refiere la cita.

#### Referencias de libros

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del libro; edición; editorial, y lugar y año de publicación.

## 3. PRUEBAS DE IMPRENTA

De las primeras pruebas de imprenta se enviará una copia al Autor para que, una vez debidamente comprobadas y corregidas, las devuelva en el plazo máximo de quince días, con el fin de evitar el riesgo de que la publicación de su artículo tenga que aplazarse hasta un posterior número de "Hormigón y Acero".

En la corrección de pruebas no se admitirán modificaciones que alteren sustancialmente el texto o la ordenación del artículo original.

# Principales actividades desarrolladas por la Asociación Técnica Española del Pretensado durante el año 1989

## Informe resumido

R. Piñeiro  
Vocal Secretario de la ATEP

En cumplimiento de las normas establecidas y en mi calidad de Vocal Secretario de la Asociación Técnica Española del Pretensado, debo redactar, para que sea incluido en el nº 174 de nuestra Revista "Hormigón y Acero", correspondiente al primer trimestre del presente año 1990, un resumen de las principales actividades desarrolladas por la ATEP durante 1989.

El objeto de estos resúmenes anuales, como tantas veces se ha comentado pero que es necesario volver a explicar aquí para conocimiento de los Miembros que últimamente se han incorporado a nuestra Asociación, es dejar constancia de las actuaciones más destacadas de la ATEP durante los últimos doce meses con el fin de que, de este modo, en cualquier momento, con los datos que en estos resúmenes se incluyen sea posible reconstruir, siquiera a grandes rasgos, lo más destacado de lo que la ATEP ha realizado a lo largo de su historia, que abarca ya un período demasiado prolongado (en 1989 se han cumplido los cuarenta años de su fundación) para que, incluso los que la han vivido desde sus comienzos, puedan recordar todo lo que ha sucedido. Se estima que siempre puede resultar interesante conocer cómo ha ido evolucionando la Asociación, los logros alcanzados, cómo se han resuelto los distintos problemas que han ido surgiendo, cuáles son los actualmente pendientes, etc.

No obstante, como el número de artículos originales últimamente recibidos para ser publicados en "Hormigón y Acero" es grande, todos ellos de gran interés, y no resulta posible aplazar su publicación dado que en el segundo número del año está previsto iniciar la publicación de los textos de las Comunicaciones presentadas en nuestra XIIIª Asamblea Técnica que habrá de celebrarse, en Alicante, del 7 al 11 del próximo mes de mayo, resulta obligado reducir al máximo este Informe anual. Así intentaremos hacerlo.

A pesar de ello, y antes de iniciar la ordenada enumeración de las principales actividades desarrolladas durante 1989, se considera necesario hacer algunos breves comentarios generales sobre lo ocurrido en la Asociación en el transcurso de los últi-

mos doce meses.

Acabamos de mencionar que en 1989 se han cumplido cuarenta años desde la fundación de la ATEP. El que una Asociación de carácter exclusivamente técnico como la nuestra, sin ningún interés de tipo comercial, sea capaz de mantenerse activa durante cuarenta años, con una actividad cada día creciente y de eficacia reconocida, no sólo en nuestro país sino también internacionalmente, como lo confirma el que el número de sus Miembros, en estos momentos, oscile alrededor de los 900, varios de ellos del extranjero, especialmente suramericanos, es un hecho que podríamos calificar de insólito sin pecar de triunfalismo. Así lo estimó la Junta de Gobierno y, en consecuencia, adoptó el acuerdo de conmemorar este XL Aniversario con una actividad especial. Y el día 8 de junio (los cuarenta años se cumplían el día 13) se celebró una Solemne Sesión durante la cual, después de unas palabras de presentación pronunciadas por el Sr. Arredondo, Presidente de la ATEP, D. Alfredo Páez, uno de los Miembros Fundadores de la Asociación, pronunció una Conferencia con el título "Cuarenta años de la ATEP" en la cual glosó las principales actividades de la Asociación, desde su creación, y la evolución que durante todos estos años ha venido experimentando la técnica del pretensado. La asistencia a este Acto fue muy numerosa y, como broche final, tuvo lugar una Cena en el Hotel Wellington.



Mesa presidencial del Acto conmemorativo del XL Aniversario de la A.T.E.P.



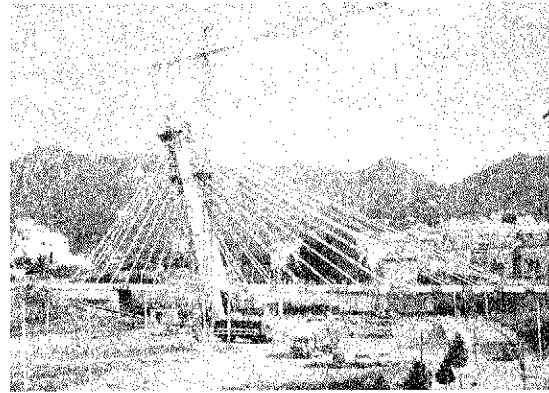
D. Alfredo Páez Balaca.

Otro Acto de carácter especial organizado por la ATEP fue la Jornada Técnica sobre "Puentes Atirantados" que se celebró, en Marbella, el día 20 de octubre. La Firma Internacional "Freyssinet, S.A.", aprovechando la circunstancia de que, en esas fechas, iba a celebrar en dicha ciudad su Convención Anual, con asistencia de todos sus técnicos, delegados de la Firma en los diferentes países, propuso a nuestra Asociación la organización de una Jornada abierta en la que, con la participación de varios destacados Conferenciantes nacionales y extranjeros, de reconocido prestigio internacional, se tratase el tema de los puentes atirantados, de gran actualidad e interés, dado el importante desarrollo que este tipo de puentes está experimentando en España. Para ello nos ofrecía su incondicional colaboración económica.

Estudiada la propuesta, la Junta de Gobierno de la ATEP, teniendo en cuenta que se trataba de una Jornada de carácter exclusivamente técnico, consideró que, de igual forma que se había hecho en anteriores ocasiones análogas, no había inconveniente alguno en organizar esta Jornada con la que, evidentemente se promocionaría en nuestro país la aplicación de la técnica del pretensado en un campo que ofrece grandes posibilidades, cumpliendo así uno de los objetivos que estatutariamente tiene establecidos nuestra Asociación.

Como consecuencia de todo ello y con la colaboración también de "Ferrovial, S.A.", se celebró la Jornada en el día previsto y en ella, después de una breve alocución de apertura del Presidente, Sr. Arredondo, en la que comentó brevemente las razones que habían motivado a la ATEP a convocar este Acto y manifestó su deseo de que, en el futuro se recibieran otras ofertas análogas, de otras Empresas, se pronunciaron las siguientes Conferencias: "La técnica española de los puentes atirantados", por D. Javier Manterola, de la "Oficina Técnica Carlos Fer-

nández Casado, S.A."; "Evolución de los puentes atirantados en los Estados Unidos de América", por Mr. Walter Podolny, de la "Federal Highway Administration de USA"; "Los puentes de tirantes de tablero de poco canto", por Mr. René Walther, Presidente de la Federación Internacional del Pretensado (FIP); "Los puentes de tirantes en Francia", por Mr. Michel Virlogeux, de SETRA; "Exposición sobre tecnología de tirantes", por Mr. Roger Lacroix, Presidente Honorario de la FIP, y "Nuevas concepciones de puentes de tirantes", por Mr. Jean Müller, de la "Figg and Müller Engineers Inc.". Los textos de estas Conferencias se irán incluyendo en nuestra Revista, "Hormigón y Acero", a medida que nos los vayan facilitando los Autores. Por otra parte, se organizaron diversos Actos Sociales y una visita al puente atirantado de Marbella, construido por "Ferrovial, S.A.". Previamente, el Ingeniero D. Santiago Pérez-Fadón, de dicha Firma, explicó las principales características de la obra.



Puente atirantado de Marbella (Ferrovial, S.A.).

El éxito de esta Jornada ha sido rotundo, como lo prueba que, en la misma, participaron 203 técnicos, tanto españoles como extranjeros, con 67 acompañantes, y todos ellos manifestaron su satisfacción por los resultados alcanzados.

Debemos también informar brevemente, para general conocimiento, de los siguientes hechos importantes:

... Se continúan las gestiones para intentar lograr la promoción y difusión de la técnica del pretensado en el campo de la edificación. Se están celebrando conversaciones con la Dirección de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, para organizar unas Jornadas, con tal fin, en dicha Escuela.

Se ha renovado el Convenio de colaboración firmado entre el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (a través del Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja) y la ATEP. Esta renovación ha sido obligada como consecuencia de haberse visto forzado el Consejo a retirarnos la ayuda que, en personal, hasta ahora nos venía prestando. Ello nos ha creado importantes problemas para el normal desarrollo de las actividades que tenemos encomendadas. Se está intentando encontrar la adecuada solución a los mismos. Por el momento, el



Convenio se ha renovado, para el plazo de un año solamente, recogiendo la actual situación real, con la esperanza de que en dicho plazo pueda lograrse la superación de las presentes dificultades y concretar un nuevo Convenio más acorde con nuestras necesidades.

- En el "Resumen de Actividades" correspondiente a 1988, se mencionaba que el Grupo de Trabajo constituido dentro de la ATEP, por encargo del MINER, para preparar el borrador de la normativa que debía regular la homologación y control de los anclajes y sistemas de pretensado, había concluido su labor y que, en fecha inmediata se elevaría al citado Ministerio. Así se hizo en su día y el Ministerio decidió que, en cumplimiento de las nuevas normas actualmente vigentes para estos casos, debía ser el Comité Técnico de Certificación CTC-17, de AENOR, el que se ocupase de la correspondiente tramitación de la propuesta. En vista de ello, se pasó la documentación a dicho Comité y, después de las necesarias reuniones de estudio y discusión, fue aprobada nuestra propuesta como Norma UNE 41 184 "Sistemas de pretensado". El ensayo de tracción desviada exigido para la certificación de los sistemas de pretensado y que figuraba incluido en el texto entregado por la ATEP, se separó del mismo y se describe en la nueva Norma UNE 36 466.

Finalmente, y antes de iniciar la ordenada enumeración de las principales actividades de carácter normal desarrolladas por la ATEP el pasado año, resulta lógico dejar constancia de que, durante 1989, han sido nombrados:

-D. Rafael Fernández Sánchez, Director General de Carreteras.

-D. Vicente Sánchez Gálvez, Director de la E. T. S. de Ingenieros de Caminos de Madrid, y

-D. Antonio Marí Bernat, Director de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona.

Todos ellos, son antiguos Miembros de la ATEP, entrañables amigos y eficaces colaboradores en las distintas actividades que tiene encomendadas nuestra Asociación. Para ellos, nuestra más cordial y sincera enhorabuena.

Y pasamos ya a la información sobre nuestras actividades normales durante 1989.

### **1. REUNIONES PUBLICAS ORGANIZADAS POR LA ATEP, CON LA COLABORACION DEL ICCET, DEL CSIC**

Además de los Actos, ya comentados, para conmemorar el XL Aniversario de la ATEP, y de la Jornada Técnica sobre "Puentes Atirantados", celebrada en Marbella, durante el pasado año se han organizado las siguientes reuniones públicas:

-El día 30 de enero, el Sr. Rui-Wamba pronunció una interesante Conferencia sobre "Losas pretensadas con cables no adherentes, en estructuras de

edificación: concepción, dimensionamiento, realizaciones". La intervención del Sr. Rui-Wamba, ilustrada con la proyección de diapositivas, fue seguida con gran atención por los numerosos asistentes al Acto. Al final, el conferenciante fue calurosamente felicitado.



D. Javier Rui-Wamba Martija.

-El 13 de abril, se celebró una Mesa Redonda para debatir sobre la nueva "Instrucción E.F.-88 para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón armado o pretensado". La Mesa estuvo constituida por D. Manuel Martín Antón; (Presidente de la Comisión Permanente del Hormigón, del MOPU) y D. Francisco Arredondo (Presidente de la ATEP), como Presidentes; D. Alvaro García Meseguer, como Moderador, y los Señores Calavera, Corres, Lleyda, Morán y Piñeiro, como Vocales. Tuvo el carácter de Coloquio abierto y durante él, los participantes plantearon diversas consultas que fueron contestadas por los Miembros de la Mesa, y presentaron algunas sugerencias sobre aspectos de la Instrucción que, a su juicio, merecían aclararse o rectificarse. La asistencia fue muy numerosa, el debate realmente animado y constructivo, y los participantes se mostraron plenamente satisfechos de los resultados obtenidos. Varios de ellos propusieron que se programasen nuevos Actos de esta naturaleza para comentar y discutir las vigentes Instrucciones.

Las reuniones que se han comentado se celebran, como viene siendo normal, en el Salón de Actos del Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja.

Obligado resulta dejar constancia del agradecimiento de la ATEP a cuantos, con total desinterés, vienen prestándonos su valiosa colaboración para la organización de estas actividades cuyo objetivo fundamental es facilitar la más actual información a nuestros Asociados, sobre problemas que afectan a la técnica del pretensado y sobre las novedades que van surgiendo en este campo.

Por último, en relación con este tema, ha de señalarse que la ATEP colaboró también en la organización de la Conferencia que, el 29 de mayo, en el Salón de Actos del Colegio de Ingenieros de Caminos de Madrid, pronunció Mr. Clifford L. Freyermuth, actual Presidente de la "Clifford L. Freyermuth, Inc.", Sociedad asesora del "Post-tensioning Institute" de Estados Unidos, sobre el tema de la utilización de losas pretensadas con cables no adherentes, en edificación.

## 2. PUBLICACIONES DE LA ATEP

Como desde hace años se viene haciendo, a continuación se reproducen, para general conocimiento y debida información de todos nuestros Asociados, los Índices de los cuatro números (170, 171, 172 y 173) de "Hormigón y Acero", correspondientes a los cuatro trimestres de 1989.

### Número 170.—Primer trimestre de 1989

—“Principales actividades desarrolladas por la Asociación Técnica Española del Pretensado, durante el año 1988. Informe resumido”. R. Piñeiro.

*Comunicaciones presentadas a la XIIª Asamblea Técnica Nacional de la ATEP.*

Tema 1º: “Investigaciones y estudios” (Continuación).

—“Caracterización experimental de la fluencia y la retracción del hormigón”.—J.M. Velasco; A. Aguado y A. Vives.

Tema 4º: “Realizaciones: (Continuación).

—“El uso del postensado en estructuras de edificación”.—J. Rui-Wamba.

—“Diversos puentes pretensados”.—I. Granell.

—“Pasarela sobre el río Ebro, en Logroño”.—F. J. Herrero y C. Siegrist.

—“Proyecto del Puente Cochrane, en Alabama (EE.UU)”.—E.J. Ayala.

—“Tres puentes construidos por el método de vanos sucesivos”.—F.J. del Pozo Vindel y J.M. Arrieta.

—“Nuevo puente sobre el río Manzanares en el Nudo Sur de Madrid”.—F. J. del Pozo Vindel y J.M. Arrieta.

—“Control y seguimiento del montaje del puente

atirantado Fernando Reig, sobre el río Barxell, en Alcoy”.—J. A. Fernández Ordoñez; J. Martínez Calzón; F. Millanes Mato; A. Ortiz Bonet y J. Marco Ventura.

—“Últimas realizaciones en puentes pretensados, de Dragados y Construcciones, S.A.”.—L. García de Miguel.

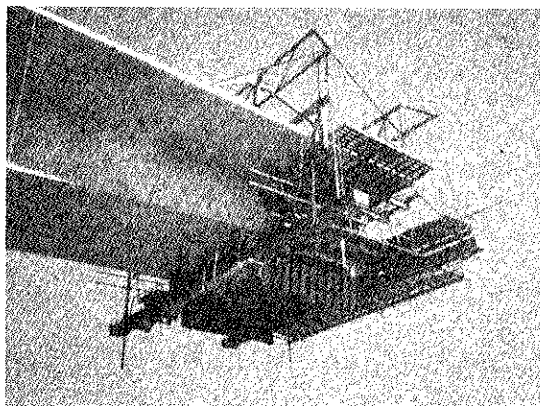
—“Viaductos de la Autopista Urbana 9 de Julio, en Buenos Aires (Argentina)”.—J. A. Llobart y V. Antón.

—“Prefabricación de puentes de gran luz. El puente de Alcoy”.—M. Burón A. Ortiz Bonet y L. Gómez Sanz.

—“Voladizos sucesivos por dovelas prefabricadas. Viaductos de Horta y Cruzul”.—S. Pérez-Fadón.

—“Elevación de vigas en los accesos al puente de Cochrane (EE.UU.)”.—J.B. Ripoll y R. Martí.

—“Anclajes especiales para el nuevo puente del ferrocarril sobre el río Duero, en Oporto (Portugal)”.—J. B. Ripoll y J. Ayats.



Puente del Obispo, en Jaén. Detalle del carro de avance (Euroestudios, S.A.).

### Número 171.—Segundo trimestre de 1989

*Comunicaciones presentadas a la XIIª Asamblea Técnica Nacional de la ATEP.*

Tema 4º: Realizaciones (Continuación).

—“Puente sobre el río Duero, en Zamora”.—J. M. de Villar.

—“Puente y pasarela sobre el río Nervión, en Arrigorriaga (Vizcaya)”.—J.J. Arenas; C. Alonso y M. Pantaleón.

—“Estructuras de la fase I de la Ronda de Langreo (Asturias)”.—J. J. Arenas; C. Alonso y M. Pantaleón.

—“Análisis en teoría de segundo orden de las pilas del Viaducto de Cruzul”.—J. J. Arenas y L. Villegas.

—“Puente sobre el Barranco de Niñodagua (Orense)”.—J. J. Arenas; C. Alonso y M. Pantaleón.

—“Depósitos de agua en Riyadh (Arabia Saudita)”.—J. M. de Villar.

—“Sistema estructural prefabricado para la construcción de naves aperticadas de grandes dimensiones”.—J. R. Atienza Reales; V. J. López Desfilis y J. M. Codina Llopis.

(Con esta Comunicación se concluye la publicación de las que fueron presentadas en la XII<sup>a</sup> Asamblea Técnica Nacional de la ATEP).

—“Análisis de placas circulares con coeficiente de Poisson nulo”.—V. Quintas.

—“Cálculo práctico de pilas altas de viaductos en teoría de segundo orden”.—F. Morán.

—“Método de condensación de grados de libertad para el cálculo no lineal de pórticos planos de hormigón armado. Resumen del método y ejemplos”.—J. Rodríguez Santiago; A. Azcón González y J.A. Torroja Cavanillas.

—“Nueva fórmula de la excentricidad para introducir la fluencia en piezas comprimidas esbeltas de hormigón”.—J. Murcia.

—“Comportamiento de estructuras prefabricadas de hormigón, en el sismo de 1985, en México D. F.”.—F. Robles.

—“Estudio dinámico de vigas continuas simétricas, con aplicación a puentes de tres y cuatro vanos”.—P. Rubio.

—“Ensayos de piezas compuestas con superficies de contacto de diferente adherencia”.—J. J. Vallés.

—“El ensayo de penetración de agua como método para el control de la durabilidad de un hormigón utilizado en estructuras de puentes de carretera”.—J. M. Gállego Estévez y F. Rodríguez García.

—“Los cables de materiales compuestos aplicados a la construcción de puentes de hormigón pretensado”.—C. Iglesias.

#### Número 172.—Tercer trimestre de 1989

—“Sobre la conveniencia de considerar la acción térmica ambiental en el dimensionamiento de estructuras de hormigón frente a estados límites últimos”.—A. R. Marí y E. Mirambell.

—“Cálculo de estructuras espacialmente periódicas. Aplicación a tableros de puente”.—A. Samartín.

—“Estructuras traslacionales en hormigón armado. Deformaciones de segundo orden”.—R. Bernárdez.

—“Formulación global para el análisis de estructuras de hormigón pretensado con tendones adherentes y no adherentes”.—J. Murcia.

—“El cálculo por resistencia a la fatiga en la nueva Norma Cubana”.—J. Bellido.

—“El cálculo por resistencia a la fatiga en secciones de hormigón armado y pretensado”.—J. Bellido.

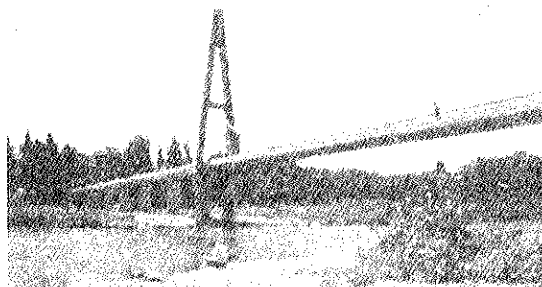
—“Diagnóstico y evaluación de construcciones de hormigón dañadas por el fuego”.—A. Delibes.

—“Optimización de sistemas de anclaje para ensayo de fatiga de armaduras activas pretensadas (alambres y cordones)”.—J.M. Varona Ruiz; F. Gutiérrez-Solana Salcedo y J.J. González Martínez.

—“Estudio experimental de la influencia de la ejecución en la resistencia a rasante de piezas en flexión”.—E. González Valle.

—“Un modelo para el análisis de la transferencia tangencial de esfuerzos en vigas de hormigón armado reforzadas mediante bandas de acero encoladas”.—A. del Río y J. Ortíz.

—“Cuarenta años de la ATEP”.—A. Páez.



Pasarela sobre el río Ebro, en Logroño. (Proyecto de C. Siegrist y F. J. Herrero).

#### Número 173.—Cuarto trimestre de 1989

—“Estudio crítico del cálculo de flechas en vigas de hormigón armado según la Instrucción E.H.—88”.—J. Ortiz y A. del Río.

—“Método simplificado para el cálculo de flechas en vigas de hormigón armado, adaptado al EURO-CODIGO EC-2”.—A. del Río y J. Ortiz.

—“Reducción del ancho de banda de conjuntos de estructuras independientes”.—A. Recuero y J. P. Gutiérrez.

—“Método penalty versus método de condensación en el cálculo lineal de estructuras con restricciones lineales entre desplazamientos”.—P. Rubio.

—“Modelos para la interacción tendón-hormigón en estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes”.—J. Murcia.

—“Un procedimiento para medir las deformaciones de origen térmico en morteros de cemento y en morteros de resina epoxi”.—E. Muelas.

—“Puente atirantado de Marbella”.—S. Pérez-Fadón.

—“Orden de tesado en depósitos de hormigón pretensado de pequeña capacidad”.—A. Aguado; A. R. Marí; E. Mirambell y E. Boixereu.

—“Los cementos reforzados con fibra de vi-

drio".—L. Sánchez Paradela y V. Sánchez-Gálvez.

—“Método práctico para la reparación de fisuras”.—A. González Serrano.

En el número correspondiente al segundo trimestre, se concluyó la publicación de los textos de las Comunicaciones que se presentaron en la XIIª Asamblea Técnica Nacional de la ATEP celebrada en Granada. En los siguientes, se han vuelto a incluir los artículos originales que nuestros amables y valiosos Colaboradores nos envían para su publicación en nuestra Revista, y a quienes deseamos reiterarles nuestro sincero agradecimiento. Resulta muy satisfactorio constatar que, gracias a ellos, el prestigio alcanzado por “Hormigón y Acero” es cada día mayor, tanto dentro de nuestras fronteras como en el extranjero.

Cada año, se reciben nuevas solicitudes de intercambio, que vienen a confirmar cuanto decimos.

Por otra parte, merece también comentarse que, gracias a la generosa ayuda que para ello nos ha sido concedida por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica, del Ministerio de Educación y Ciencia, hemos podido proceder al envío gratuito de nuestra Revista a diversos Organismos y Universidades de Suramérica que, desde hace tiempo, nos habían manifestado su interés en recibirla, pero que no podían inscribirse, a tal efecto en la ATEP, debido a insuperables dificultades económicas. Así, desde el pasado año venimos enviando “Hormigón y Acero” a las siguientes Entidades:

—Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.—Bahía Blanca (Argentina).

—Departamento de Obras Civiles de la Universidad de Chile.—Santiago (Chile).

—Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica.—Lima (Perú).

—Instituto de Ingeniería Civil.—Montevideo (Uruguay).

—Instituto de Pesquisas Tecnológicas.—Sao Paulo (Brasil).

—Universidad del Valle.—Cali (Colombia).

—Facultad de Arquitectura de Montevideo (Uruguay).

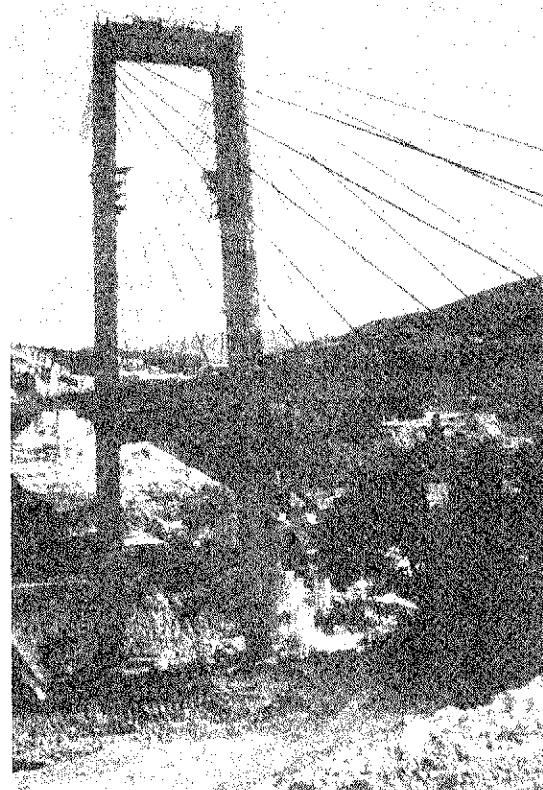
—Escuela de Construcción Civil. Universidad Católica. Valparaíso (Chile).

Escuela de Arquitectura de la Universidad de Chile.—Santiago (Chile).

—Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Córdoba (Argentina).

Para terminar con este tema, es preciso dar cuenta de que, por acuerdo de la Junta de Gobierno de la Asociación, ha sido renovado el Comité de Redacción de nuestra Revista. En la actualidad, dicho Comité está constituido de la siguiente forma: Director: Piñeiro, Rafael. Vocales: Barredo, Carlos; Jódar, Juan; Juliá, Manuel; Llombart, José Antonio;

Romero, Rafael; Sánchez Gálvez, Vicente. Censores: Alcalá, Juan Luis; Cuvillo, Ramón del; Elices, Manuel; González Valle, Enrique; Manterola, Javier; Morán, Francisco; Moreno Torres, Juan; Murcia, Juan; Pozo Vindel, Florencio J. del; Siegrist, Carlos.



Puente de Alcoy. Vista de la pila y el tablero. (Pacadar, S.A.).

### 3. DISTRIBUCION DE PUBLICACIONES EXTRANJERAS

Durante el pasado año y en virtud del acuerdo que tenemos establecido con la FIP, han sido ofertadas a nuestros Asociados, al precio especial que a tal efecto se nos concede, nueve publicaciones últimamente editadas por la citada Federación. Como resultado de esta oferta, se ha distribuido un total de 131 ejemplares de las mencionadas publicaciones, lo que da una idea de la favorable acogida que esta actividad tiene entre los Miembros de la ATEP.

Asimismo, creemos conveniente recordar que todas las publicaciones (libros, manuales, revistas, etc.) editados o recibidos por la ATEP, están a disposición de nuestros Asociados, para su consulta, en los locales de nuestra Secretaría, en el edificio de Costillares del Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, c/Serrano Galvache s/n, del CSIC.

### 4. OTRAS ACTIVIDADES

Nuestra Asociación, de acuerdo con lo dispuesto en sus Estatutos, continúa colaborando con diversos Organismos y Entidades nacionales y extranjeros en

trabajos relacionados con la técnica del pretensado. Entre estas colaboraciones parece oportuno destacar, por su especial importancia e interés, las siguientes:

—En el campo internacional, la ATEP participa en los trabajos y decisiones de los Organos de Dirección de la FIP y en sus Comisiones Técnicas, en las cuales está representada por varios de sus Miembros, especialistas en los temas en los que dichas Comisiones se ocupan.

En distintos números de "Hormigón y Acero" se han publicado reseñas de los principales temas tratados y de los acuerdos adoptados en las diferentes reuniones celebradas, tanto por el Consejo de la FIP como por sus diversas Comisiones.

Debe señalarse que, dentro de la Comisión de Prefabricación, un Grupo especial de trabajo, presidido por el Sr. Calavera, de la ATEP, fue encargado de redactar una normativa sobre "Forjados construidos a base de viguetas y bovedillas". Después de diversas reuniones, el trabajo que le fue encomendado se encuentra terminado y pendiente únicamente de una última revisión por el pleno de la Comisión, lo que hace suponer que, en fecha próxima, podrá ser publicado.

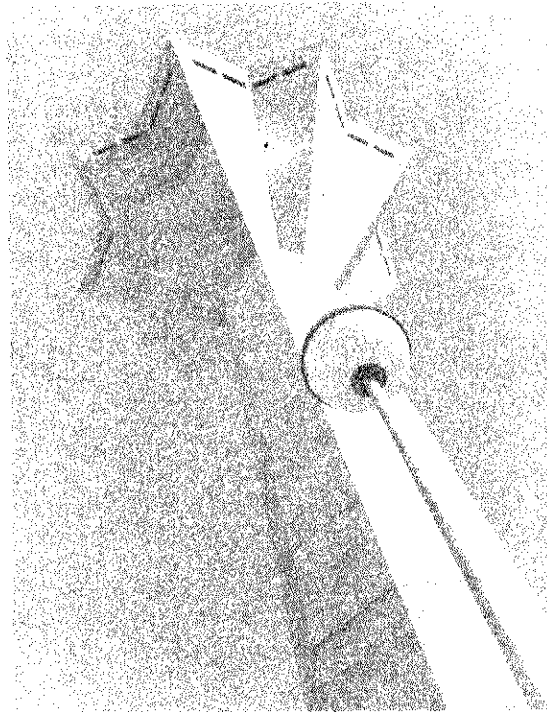
En el ámbito nacional se continúa colaborando en la labor de normalización encomendada a la Comisión Permanente del Hormigón, del MOPU, y que actualmente está realizando la revisión de la Instrucción E.P.—80; en los Grupos de Trabajo que se encargan de la redacción, revisión y actualización de las Normas de UNESID relativas a los aceros y sus métodos de ensayo; y en la Comisión del Sello de Conformidad CIETAN para viguetas de hormigón, homologado por el MOPU.

—Por lo que respecta a los Grupos de Trabajo que tiene constituidos la ATEP, cabe señalar lo siguiente:

\*Continúa su labor el Grupo que prepara el Manual H.P.—7 "Recomendaciones para la conservación de puentes pretensados". En estos momentos se está terminando su revisión final y se confía en que, próximamente, podrá ya editarse.

\*El Subgrupo de Trabajo encargado de redactar la normativa relativa a la utilización de sistemas de pretensado en centrales nucleares está próximo a concluir su labor. En estos momentos queda únicamente por preparar el Artículo sobre "Materiales", en el cual, como es lógico, se tratarán sólo los específicos de los sistemas de pretensado utilizados en las centrales y que no estén recogidos en la E.P.

—También debe mencionarse que de conformidad con lo dispuesto en los Estatutos, la Junta de Gobierno de la ATEP, encargada de encauzar, dirigir, controlar y promocionar las actividades de la Asociación, ha celebrado sus reuniones reglamentarias en los meses de enero, marzo, mayo, julio, septiembre y noviembre de 1989.



Depósito de agua en Riyadh (Arabia Saudita).  
(José A. Torroja, Oficina Técnica, S.A.).

\*\*\*

Para terminar estos comentarios, parece oportuno hacer referencia a algunas de las más destacadas actividades que la ATEP tiene previstas para el año 1990 que ahora comienza.

Como ya se ha informado a todos nuestros Asociados, durante los días 7 al 11, ambos inclusive, del próximo mes de mayo, se celebrará, en Alicante, la XIIIª Asamblea Técnica Nacional de la ATEP. Los trabajos para su organización, iniciados durante el pasado año, se desarrollan de modo totalmente satisfactorio, con la inestimable ayuda de un activo y eficaz Comité Local. Todo ello permite esperar que esta nueva Asamblea habrá de resultar un franco éxito y que cuantos a ella asistan, tanto por el elevado nivel de las diferentes intervenciones previstas para las Sesiones Técnicas como por el programa de visitas y Actos Sociales programados, habrán de guardar un buen recuerdo de su participación en estas Jornadas.

Todos nuestros Asociados están ya informados de los necesarios detalles relacionados con la organización y desarrollo de la Asamblea, que hasta ahora han sido aprobados. Y en fechas próximas continuarán recibiendo noticias sobre los que se vayan concretando.

También el próximo año, del 4 al 9 de junio, tendrá lugar, en Hamburgo (RFA), el XI Congreso Internacional de la FIP, al que es de esperar que, como ya ha ocurrido en los anteriores Congresos, habrá de asistir un elevado número de Miembros de la ATEP. Sobre todo lo relacionado con este tema se ha informado oportunamente a nuestros Asociados y, a me-

dida que se vayan recibiendo nuevos detalles, se dará de ellos noticia.

Como ya se ha dado a conocer, la Junta de Gobierno de la ATEP ha encargado al Sr. Aparicio la presentación, en el Congreso, del Informe Nacional sobre puentes destacados construidos en España durante los últimos cuatro años. Para poder redactar este Informe se han solicitado los oportunos datos a todos los Miembros de la ATEP. Al mismo tiempo, y con el objeto de poder editar un nuevo Tomo (el IV) del libro "Hormigón pretensado. Realizaciones españolas", con la idea de presentarlo en el Congreso, se ha recabado la necesaria información.

De conformidad con lo dispuesto en nuestros Estatutos, con motivo de la celebración de la XIIIª Asamblea, se han de conceder las Medallas de la ATEP correspondientes a los tres últimos años (una por cada año). Para ello, se ha solicitado a nuestros Asociados propongan los nombres de los tres Miembros de la ATEP que, a su juicio, merecen recibir este galardón. Posteriormente, en fecha próxima, se

reunirá la Comisión que, de acuerdo con el Reglamento en vigor, y a la vista de las propuestas recibidas, decidirá a quienes les serán entregadas las Medallas durante la Cena de Clausura de la Asamblea. —

Con esto damos fin a este "Resumen de Actividades", no sin antes dejar constancia de nuestro más sincero agradecimiento a cuantos, con su inestimable y valiosa colaboración de todo tipo, hacen posible que nuestra Asociación, a pesar de sus cuarenta años ya cumplidos de ininterrumpida actividad, siga ostentando el privilegio de ser apreciada como una de las más prestigiosas de entre las existentes en este campo de la técnica. Por ello, os damos gracias a todos y os encarecemos que continuéis favoreciéndonos con vuestra colaboración.

DESEAMOS A TODOS NUESTROS AMIGOS  
ASOCIADOS Y COLABORADORES  
UN PROSPERO Y MUY FELIZ AÑO 1990  
  
LA JUNTA DE GOBIERNO DE LA ATEP

\* \* \*

## Conferencia Internacional sobre "Diagnóstico de las Estructuras de Hormigón"

En Bratislava (Checoslovaquia), durante los días 3-6 de setiembre del año 1991, y organizada por la RILEM, con la colaboración de la "Confederación Internacional de Mediciones" (IMEKO), la "Sociedad Científica y Técnica Checoslovaca", el "Comité Nacional Checoslovaco" de la FIP, la FIP y la Universidad Técnica Eslovaca, se va a celebrar una Conferencia Internacional con el objeto de dar a conocer los últimos avances logrados en la diagnosis de las estructuras de hormigón e intercambiar experiencias sobre los modernos métodos de diagnosis, equipos, mediciones y su automatización, utilizados en el análisis experimental de tensiones, comportamientos estáticos y dinámicos de las estructuras, y la clasificación de los daños que pueden sufrir las estructuras de hormigón armado y hormigón pretensado, especialmente en el caso de edificios, naves industriales y puentes. Se revisarán también las propuestas internacionales para unificar los métodos de diagnóstico, y establecer las bases para valorar las prestaciones y vida útil de servicio de las estructuras de hormigón.

El programa previsto es el siguiente:

*Sesión 1.*—Métodos técnicos de diagnóstico, mediciones y automatización.

*Sesión 2.*—Comportamiento in situ de las estructuras de hormigón y análisis experimental de tensiones.

*Sesión 3.*—Ensayos estáticos y dinámicos de las estructuras de hormigón.

*Sesión 4.*—Clasificación de daños, aspectos de la durabilidad y vida útil prevista de las estructuras.

Los idiomas oficiales de estas reuniones serán inglés, francés y checo. Habrá traducción simultánea.

Cada Sesión se iniciará con un informe general de introducción del tema, al que seguirá la presentación oral de las Comunicaciones recibidas. Se concluirá con un coloquio abierto.

Los textos de las Comunicaciones, se recogerán en los Proceedings de la Conferencia.

Los interesados en participar en estos Actos, deberán ponerse en contacto con el Presidente del Comité Organizador, Dr. Ing. Tibor JAVOR, en la dirección siguiente:

VÜIS Lamacská, 8, 81714  
Bratislava.  
Checoslovaquia

## Análisis de piezas curvas pretensadas (II)

Manuel Martínez Lafuente  
Profesor Titular de Universidad  
Departamento de Estructuras de  
Edificación de la E.T.S.A.M.

### ACLARACION PREVIA

El presente trabajo da continuidad al artículo publicado en el número 164 de la revista Hormigón y Acero ("Análisis de piezas curvas pretensadas (I)", particularizando las relaciones básicas generales establecidas en el mismo para la viga de tipo circular. Por este motivo, y con objeto de evitar repeticiones innecesarias, se han numerado las fórmulas y figuras siguiendo orden correlativo y secuencial entre ambos trabajos.

### ESTUDIO DE LA VIGA CIRCULAR

#### INTRODUCCION

En los apartados que siguen se particulariza el estudio anterior para el caso de una viga de planta circular, de sección constante, en la que el plano OXY contiene al centro de esfuerzos cortantes de dirección radial ( $d_c = 0$ ). Tras obtener las relaciones geométricas básicas aplicables a este caso concreto, se deducen las expresiones generales de las solicitaciones internas y movimientos estructurales, para diferentes condiciones de sustentación en los extremos. Por último, se analizan los efectos del pretensado sobre la viga circular antedicha, en determinados casos usuales, despreciando los efectos debidos al rozamiento entre los cables y la vaina.

#### RELACIONES GEOMETRICAS BASICAS

Sea  $R$  el radio de la directriz y  $\gamma$  su amplitud angular. Escogiendo los ejes generales de manera que su origen coincida con el extremo dorsal de

la viga ( $x_a = y_a = 0$ ) y el eje de ordenadas resulte tangente a la directriz en dicho punto ( $\alpha_a = 0$ ), las coordenadas y la abscisa curvilínea se expresan en la forma (véase figura 17):

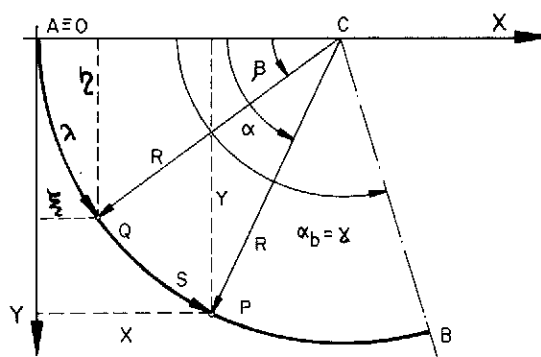


Fig. 17. Geometría de la viga de planta circular

$$\begin{aligned}x &= R (1 - \cos \alpha) \\y &= R \cdot \operatorname{sen} \alpha \\s &= R \cdot \alpha\end{aligned}\quad (50)$$

donde  $\alpha$  designa al ángulo de contingencia, expresado en radianes ( $0 \leq \alpha \leq \gamma$ ). Sustituyendo en las expresiones anteriores el valor de  $\alpha$  por el de  $\beta$ , resultan las coordenadas y la abscisa curvilínea correspondiente al punto genérico Q ( $0 \leq \beta \leq \alpha$ ). Procediendo de esta forma y reemplazando los resultados obtenidos en las expresiones (11), se obtienen las funciones geométricas básicas que intervienen en la determinación de las solicitaciones y

movimientos estructurales. Se llega así a las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} r(s, \lambda) &= R \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) \\ d(s, \lambda) &= R \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] \\ r'(s, \lambda) &= R \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) \\ d'(s, \lambda) &= -R \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned} \quad (51)$$

Cuando  $\beta = 0$ , las fórmulas anteriores coinciden con la particularización de las (9) para el caso de viga circular. Su valor es:

$$\begin{aligned} r(s, 0) &= R \cdot \text{sen} \alpha \\ d(s, 0) &= R \cdot (1 - \cos \alpha) \\ r'(s, 0) &= R \cdot \text{sen} \alpha \\ d'(s, 0) &= -R \cdot (1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (52)$$

Partiendo de estas relaciones y de las formulaciones generales deducidas en apartados precedentes, pueden obtenerse fácilmente las expresiones de las solicitaciones internas y movimientos de la viga circular, para los casos de carga más frecuentes en la práctica.

### SOLICITACIONES INTERNAS EN LA PIEZA

Sustituyendo los valores que acaban de obtenerse en las fórmulas (8), se llega a la siguiente expresión para las solicitaciones internas en la viga circular:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z &= \mathcal{V}_z^a + \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\alpha) \\ \mathcal{V}_n &= \mathcal{N}^a \cdot \text{sen} \alpha + \mathcal{V}_n^a \cdot \cos \alpha + \\ &\quad + \mathcal{V}_n^{\text{ext}}(\alpha) \\ \mathcal{N} &= \mathcal{N}^a \cdot \cos \alpha - \mathcal{V}_n^a \cdot \text{sen} \alpha + \\ &\quad + \mathcal{N}^{\text{ext}}(\alpha) \\ \mathcal{M}_z &= \mathcal{M}_z^a - R \cdot \mathcal{N}^a \cdot (1 - \cos \alpha) - \\ &\quad - R \cdot \mathcal{V}_n^a \cdot \text{sen} \alpha + \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\alpha) \\ \mathcal{M}_n &= \mathcal{M}_n^a \cdot \cos \alpha + \tau^a \cdot \text{sen} \alpha + \\ &\quad + R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot \text{sen} \alpha + \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\alpha) \\ \tau &= \tau^a \cdot \cos \alpha - \mathcal{M}_n^a \cdot \text{sen} \alpha - \\ &\quad - R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot (1 - \cos \alpha) + \tau^{\text{ext}}(\alpha) \end{aligned} \quad (53)$$

donde la contribución de las acciones exteriores, definida en un caso genérico por las fórmulas (10), se particulariza para la viga circular en:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \int_0^\alpha q_z(\beta) \cdot d\beta \\ \mathcal{V}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \int_0^\alpha [q_t(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) + \\ &\quad + q_n(\beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)] \cdot d\beta \\ \mathcal{N}^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \int_0^\alpha [q_t(\beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \end{aligned}$$

$$- q_n(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)] \cdot d\beta$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \int_0^\alpha [m_z(\beta) - R \cdot (q_t(\beta) \cdot \\ &\quad \cdot \{1 - \cos(\alpha - \beta)\} + q_n(\beta) \cdot \\ &\quad \cdot \text{sen}(\alpha - \beta))] \cdot d\beta \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \int_0^\alpha [m_n(\beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \\ &\quad + m_t(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) + R \cdot q_z(\beta) \cdot \\ &\quad \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)] \cdot d\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^{\text{ext}}(\alpha) &= R \int_0^\alpha [m_n(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) - \\ &\quad - m_t(\beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + R \cdot \\ &\quad \cdot q_z(\beta) \{1 - \cos(\alpha - \beta)\}] \cdot d\beta \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \beta \leq \alpha$ .

Particularizando las fórmulas anteriores para el extremo frontal de la viga ( $\alpha = \alpha_b$ ), se obtienen las ecuaciones de equilibrio del conjunto, cuya aplicabilidad es general, cualquiera que sean las coacciones extremas de la pieza.

Admitiendo que sólo existen coacciones extremas en los puntos A y B, las expresiones integrales (54) quedan totalmente definidas en cuanto se conozcan las cargas y momentos que actúan sobre la pieza. Efectuando dicha integración para los casos más frecuentes, se llega a los resultados que se exponen a continuación:

a) Sobrecarga vertical uniforme, extendida a toda la viga. Las acciones exteriores se reducen en este caso a:

$$\begin{aligned} q_z(\beta) &= q_z = \text{Cte.} \\ q_n(\beta) &= q_t(\beta) = 0 \\ m_n(\beta) &= m_t(\beta) = m_z(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

y las expresiones (54) se convierten en:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \cdot q_z \cdot \alpha \\ \mathcal{V}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= \mathcal{N}^{\text{ext}}(\alpha) = 0 \\ \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= 0 \\ \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= -R^2 \cdot q_z \cdot (1 - \cos \alpha) \\ \tau^{\text{ext}}(\alpha) &= R^2 \cdot q_z \cdot (\alpha - \text{sen} \alpha) \end{aligned} \quad (56)$$

b) Sobrecarga radial uniforme, extendida a toda la viga. En este caso, las acciones exteriores valen:

$$\begin{aligned} q_z(\beta) &= q_t(\beta) = 0 \\ q_n(\beta) &= q_n = \text{Cte} \\ m_n(\beta) &= m_t(\beta) = m_z(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (57)$$



y las integrales (54) se convierten en:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= 0 \\ \mathcal{V}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \cdot q_n \cdot \text{sen } \alpha \\ \mathcal{N}^{\text{ext}}(\alpha) &= R \cdot q_n \cdot (1 - \cos \alpha) \\ \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= R^2 \cdot q_n \cdot (1 - \cos \alpha) \\ \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= \tau^{\text{ext}}(\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

c) Momento torsor uniforme, extendido a toda la longitud de la pieza. Las acciones exteriores vienen definidas por:

$$\begin{aligned} q_z(\beta) &= q_n(\beta) = q_t(\beta) = 0 \\ m_t(\beta) &= m_t = \text{Cte} \\ m_n(\beta) &= m_z(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (54), e integrando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= \mathcal{V}_n^{\text{ext}}(\alpha) = \mathcal{N}^{\text{ext}}(\alpha) = \\ &= \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\alpha) = 0 \\ \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \cdot m_t \cdot (1 - \cos \alpha) \\ \tau^{\text{ext}}(\alpha) &= -R \cdot m_t \cdot \text{sen } \alpha \end{aligned} \quad (60)$$

d) Momento torsor con distribución parabólica, actuando en toda la viga. Si se supone nulo el valor de dicho momento en los extremos de la pieza, las acciones exteriores son:

$$\begin{aligned} q_z(\beta) &= q_n(\beta) = q_t(\beta) = 0 \\ m_t(\beta) &= \frac{4 \cdot m_t}{\gamma^2} \cdot \beta \cdot (\gamma - \beta) \\ m_n(\beta) &= m_z(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

En este caso, las expresiones (54) se particularizan en:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\alpha) &= \mathcal{V}_n^{\text{ext}}(\alpha) = \mathcal{N}^{\text{ext}}(\alpha) = \\ &= \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\alpha) = 0 \\ \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\alpha) &= \frac{4 \cdot R}{\gamma^2} \cdot m_t \cdot [\gamma \cdot \text{sen } \alpha - \\ &\quad - \alpha(\gamma - \alpha) - 2 \cdot (1 - \cos \alpha)] \\ \tau^{\text{ext}}(\alpha) &= \frac{8 \cdot R}{\gamma^2} \cdot m_t \cdot [\alpha \cdot \text{sen } \alpha - \\ &\quad - \frac{\gamma}{2}(1 - \cos \alpha)] \end{aligned} \quad (62)$$

Las fórmulas que acaban de exponerse serán

utilizadas, con posterioridad, para estudiar los efectos introducidos por el pretensado en las vigas circulares simples que se analizan más adelante.

## MOVIMIENTOS ESTRUCTURALES

Si se sustituyen las relaciones geométricas (51) y (52) en las expresiones generales (19), se obtiene:

$$w = w^a - \varphi_n^a \cdot R \cdot \text{sen } \alpha - \varphi_t^a \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) -$$

$$- \frac{R^2}{E \cdot I_n} \int_0^\alpha \text{sen } (\alpha - \beta) \cdot \mathcal{M}_n(\beta) \cdot d\beta -$$

$$- \frac{R^2}{G \cdot K} \int_0^\alpha [1 - \cos(\alpha - \beta)] \cdot \tau(\beta) \cdot d\beta$$

$$\delta_n = \delta_n^a \cdot \cos \alpha + \delta_t^a \cdot \text{sen } \alpha + \varphi_z^a \cdot R \cdot$$

$$\cdot \text{sen } \alpha + \frac{R}{E \cdot \Omega} \int_0^\alpha \text{sen } (\alpha - \beta) \cdot \mathcal{N}(\beta) \cdot$$

$$\cdot d\beta + \frac{R^2}{E \cdot I_z} \int_0^\alpha \text{sen } (\alpha - \beta) \cdot \mathcal{M}_z(\beta) \cdot d\beta$$

$$\delta_t = \delta_n^a \cdot \text{sen } \alpha + \delta_t^a \cdot \cos \alpha - \varphi_z^a \cdot R \cdot$$

$$\cdot (1 - \cos \alpha) + \frac{R}{E \cdot \Omega} \int_0^\alpha \cos(\alpha - \beta) \cdot$$

$$\cdot \mathcal{N}(\beta) \cdot d\beta - \frac{R^2}{E \cdot I_z} \int_0^\alpha [1 - \cos(\alpha - \beta)] \cdot$$

$$\cdot \mathcal{M}_z(\beta) \cdot d\beta \quad (63)$$

$$\varphi_z = \varphi_z^a + \frac{R}{E \cdot I_z} \int_0^\alpha \mathcal{M}_z(\beta) \cdot d\beta$$

$$\varphi_n = \varphi_n^a \cdot \cos \alpha + \varphi_t^a \cdot \text{sen } \alpha +$$

$$+ \frac{R}{E \cdot I_n} \int_0^\alpha \cos(\alpha - \beta) \cdot \mathcal{M}_n(\beta) \cdot d\beta +$$

$$+ \frac{R}{G \cdot K} \int_0^\alpha \text{sen } (\alpha - \beta) \cdot \tau(\beta) \cdot d\beta$$

$$\varphi_t = -\varphi_n^a \cdot \text{sen } \alpha + \varphi_t^a \cdot \cos \alpha -$$

$$- \frac{R}{E \cdot I_n} \int_0^\alpha \text{sen } (\alpha - \beta) \cdot \mathcal{M}_n(\beta) \cdot d\beta +$$

$$+ \frac{R}{G \cdot K} \int_0^\alpha \cos(\alpha - \beta) \cdot \tau(\beta) \cdot d\beta$$

Reemplazando las fórmulas (53) en los términos subintegrales anteriores, se llega a la siguiente

formulación para los movimientos estructurales en la viga circular:

$$\begin{aligned}
 w &= w^a - \varphi_n^a \cdot R \cdot \operatorname{sen} \alpha - \varphi_t^a \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) - \\
 &\quad - \frac{R^2}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot \{\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - x \cdot \\
 &\quad \cdot [2(1 - \cos \alpha) - \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha]\} \cdot \mathcal{M}_n^a - \\
 &\quad - \frac{R^2}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot [\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha] \cdot (1 + x) \cdot \\
 &\quad \cdot \tau^a - \frac{R^3}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot \{\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha - x \cdot \\
 &\quad \cdot [\alpha(2 + \cos \alpha) - 3 \cdot \operatorname{sen} \alpha]\} \cdot \\
 &\quad \cdot \mathcal{V}_z^a + w^{\text{ext}}(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_n &= \delta_n^a \cdot \cos \alpha + \delta_t^a \cdot \operatorname{sen} \alpha + \varphi_z^a \cdot R \cdot \\
 &\quad \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{R^2}{E \cdot I_z} \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \mathcal{M}_z^a + \\
 &\quad + \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \{\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot i_z^2 - R^2 \cdot \\
 &\quad \cdot [2(1 - \cos \alpha) - \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha]\} \cdot \mathcal{N}^a - \\
 &\quad - \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot (R^2 + i_z^2) \cdot (\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \alpha) \cdot \mathcal{V}_n^a + \delta_n^{\text{ext}}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_t &= -\delta_n^a \cdot \operatorname{sen} \alpha + \delta_t^a \cdot \cos \alpha - \varphi_z^a \cdot R \cdot \\
 &\quad \cdot (1 - \cos \alpha) - \frac{R^2}{E \cdot I_z} \cdot (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \cdot \\
 &\quad \cdot \mathcal{M}_z^a + \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \{[\alpha(2 + \cos \alpha) \\
 &\quad \cdot 3 \operatorname{sen} \alpha] \cdot R^2 + (\alpha \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) \cdot \\
 &\quad \cdot i_z^2\} \cdot \mathcal{N}^a + \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \{[2(1 - \cos \alpha) - \\
 &\quad - \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha] \cdot R^2 - \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot i_z^2\} \cdot \\
 &\quad \cdot \mathcal{V}_n^a + \delta_t^{\text{ext}}(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_z &= \varphi_z^a + \frac{R}{E \cdot I_z} \cdot \alpha \cdot \mathcal{M}_z^a - \frac{R^2}{E \cdot I_z} \cdot \\
 &\quad \cdot (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \cdot \mathcal{N}^a - \frac{R^2}{E \cdot I_z} \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \\
 &\quad \cdot \mathcal{V}_n^a + \varphi_z^{\text{ext}}(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_n &= \varphi_n^a \cdot \cos \alpha + \varphi_t^a \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot \\
 &\quad \cdot [\alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 + x) + \operatorname{sen} \alpha \cdot (1 - x)] \cdot \\
 &\quad \cdot \mathcal{M}_n^a + \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot (1 + x) \cdot \\
 &\quad \cdot \tau^a + \frac{R^2}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot \{\alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha - x \cdot \\
 &\quad \cdot [2(1 - \cos \alpha) - \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha]\} \cdot \mathcal{V}_z^a + \varphi_n^{\text{ext}}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_t &= -\varphi_n^a \cdot \operatorname{sen} \alpha + \varphi_t^a \cdot \cos \alpha - \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot \\
 &\quad \cdot \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot (1 + x) \cdot \mathcal{M}_n^a + \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot \\
 &\quad \cdot [\alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 + x) - \operatorname{sen} \alpha \cdot (1 - x)] \cdot \\
 &\quad \cdot \tau^a + \frac{R^2}{2 \cdot E \cdot I_n} \cdot (\alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) \cdot \\
 &\quad \cdot (1 + x) \cdot \mathcal{V}_z^a + \varphi_t^{\text{ext}}(\alpha)
 \end{aligned}$$

siendo:

- $x = E \cdot I_n / (G \cdot K)$
- $i_z^2 = I_z / \Omega$
- $w^{\text{ext}}(\alpha) = -\frac{R^2}{E \cdot I_n} \cdot \int_0^\alpha \{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \cdot \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\beta) + x \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] \cdot \tau^{\text{ext}}(\beta)\} \cdot d\beta$
- $\delta_n^{\text{ext}}(\alpha) = \frac{R}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^\alpha \{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \cdot i_z^2 \cdot \mathcal{N}^{\text{ext}}(\beta) + R \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \cdot \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\beta)\} \cdot d\beta$
- $\delta_t^{\text{ext}}(\alpha) = \frac{R}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^\alpha \{\cos(\alpha - \beta) \cdot i_z^2 \cdot \mathcal{N}^{\text{ext}}(\beta) - R \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] \cdot \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\beta)\} \cdot d\beta$
- $\varphi_z^{\text{ext}}(\alpha) = \frac{R}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^\alpha \mathcal{M}_z^{\text{ext}}(\beta) \cdot d\beta$
- $\varphi_n^{\text{ext}}(\alpha) = \frac{R}{E \cdot I_n} \cdot \int_0^\alpha [\cos(\alpha - \beta) \cdot \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\beta) + x \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \cdot \tau^{\text{ext}}(\beta)] \cdot d\beta$

$$\begin{aligned} & \cdot \tau^{\text{ext}}(\beta)] \cdot d\beta \\ \bullet \varphi_t^{\text{ext}}(\alpha) &= -\frac{R}{E \cdot I_n} \cdot \int_0^\alpha [\sin(\alpha - \beta) \cdot \\ & \cdot \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\beta) - x \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \\ & \cdot \tau^{\text{ext}}(\beta)] \cdot d\beta \end{aligned}$$

Las expresiones (64) proporcionan, pues, los movimientos estructurales en cualquier sección de la viga, en función de las sollicitaciones exteriores y de las sollicitaciones y movimientos en el extremo dorsal de la misma. La determinación de estos valores, doce en total, siempre es factible, al disponerse en todos los casos del mismo número de ecuaciones que de incógnitas, cuando se particularizan las relaciones precedentes para los extremos de la pieza. El proceso de cálculo se desarrolla siguiendo las etapas siguientes:

- Formulación de las condiciones de contorno.
- Resolución del sistema de ecuaciones resultante.
- Obtención de las sollicitaciones internas en la viga, a partir de las relaciones (53).
- Determinación de los movimientos estructurales, mediante las fórmulas (64).

A continuación se particulariza el estudio para determinados supuestos de interés práctico, sin flexiones de eje vertical.

### VIGA CON APOYO EN HORQUILLA EN SUS DOS EXTREMOS

En este caso, las condiciones de contorno se formulan como:

$$\mathcal{M}_n^a = \mathcal{M}_n^b = w^a = w^b = \varphi_t^a = \varphi_t^b = 0 \quad (66)$$

Las condiciones de equilibrio del conjunto, se escriben en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^b &= \mathcal{V}_z^a + \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\gamma) \\ 0 &= \tau^a \cdot \sin \gamma + R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot \\ & \cdot \sin \gamma + \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\gamma) \\ \tau^b &= \tau^a \cdot \cos \gamma - R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot \\ & \cdot (1 - \cos \gamma) + \tau^{\text{ext}}(\gamma) \end{aligned} \quad (67)$$

Cuando se dan condiciones de carga simétricas, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^b &= -\mathcal{V}_z^a \\ \tau^b &= -\tau^a \end{aligned} \quad (68)$$

Sustituyendo (68) en (67), resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^b &= \frac{1}{2} \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\gamma) \\ \tau^a &= -\frac{1}{\sin \gamma} [R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot \sin \gamma + \mathcal{M}_n^{\text{ext}}(\gamma)] \end{aligned} \quad (69)$$

Para los casos considerados con anterioridad, se obtienen los resultados siguientes:

a) Sobrecarga vertical uniforme, extendida a toda la viga. Las reacciones en los extremos son:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^a &= \frac{R}{2} \cdot q_z \cdot \gamma = -\mathcal{V}_z^b \\ \tau^a &= -R^2 \cdot q_z \cdot \left[ \frac{\gamma}{2} - \text{tg} \frac{\gamma}{2} \right] \end{aligned} \quad (70)$$

Si se reemplazan estos valores en las expresiones (53), se obtienen las sollicitaciones internas en la viga, que resultan ser:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z &= \frac{R}{2} \cdot q_z \cdot (\gamma - 2 \cdot \alpha) \\ \mathcal{M}_n &= 2 \cdot q_z \cdot R^2 \cdot \frac{\sin \alpha/2 \cdot \sin (\gamma - \alpha)/2}{\cos \gamma/2} \\ \tau &= q_z \cdot R^2 \cdot \frac{\sin (\gamma/2 - \alpha)}{\cos \gamma/2} - \left( \frac{\gamma}{2} - \alpha \right) \end{aligned} \quad (71)$$

En el centro de la viga, el momento flector vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= 2 \cdot q_z \cdot R^2 \cdot \frac{\sin^2 \gamma/4}{\cos \gamma/2} \approx q_z \cdot \\ & \cdot \frac{\ell^2}{8} \cdot \left[ 1 + \frac{5 \cdot \gamma^2}{48} \right] \end{aligned} \quad (72)$$

donde se ha introducido la notación  $\ell = R \cdot \gamma$ .

El momento torsor en el extremo, se aproxima suficientemente por:

$$\tau^a \approx q_z \cdot \frac{\ell^3}{24 R} \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{10} \right] \quad (73)$$

b) Sobrecarga radial uniforme, extendida a toda la viga. Suponiendo que está autocquilibrada en los extremos mediante esfuerzos axiales de valor:

$$\mathcal{N}^a = \mathcal{N}^b = q_n \cdot R \quad (74)$$

las sollicitaciones internas en la pieza son:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= q_n \cdot R \\ \mathcal{V}_n &= \mathcal{M}_z = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

c) Momento torsor uniforme, extendido a toda la viga. Las reacciones en los extremos de la misma son:

$$\mathcal{V}_z^a = 0$$

$$\tau^a = R \cdot m_t \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\gamma}{2} \right) \simeq R \cdot m_t \cdot \frac{\gamma}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right] \quad (76)$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones (53), se obtienen las solicitaciones internas en la viga, que se escriben en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z &= 0 \\ M_n &= R \cdot m_t \cdot \frac{\operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} \quad (77) \\ \tau &= R \cdot m_t \cdot \frac{\operatorname{sen}(\gamma/2 - \alpha)}{\cos \gamma/2} \end{aligned}$$

El momento flector en el centro de la viga es:

$$M_n = 2 \cdot R \cdot m_t \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma/4}{\cos \gamma/2} \simeq m_t \cdot \frac{\ell^2}{8R} \left[ 1 + \frac{5\gamma^2}{48} \right] \quad (78)$$

d) Momento torsor, con distribución parabólica, extendido a toda la viga. En este caso, las reacciones extremas se expresan por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^a &= 0 \\ \tau^a &= -\frac{4 \cdot R}{\gamma^2} \cdot m_t \cdot \left[ \gamma \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right] \simeq m_t \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{10} \right] \quad (79) \end{aligned}$$

Las solicitaciones internas en la viga valen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z &= 0 \\ M_n &= -\frac{4 \cdot R}{\gamma^2} \cdot m_t \cdot \left[ 2(1 - \cos \alpha) + \alpha(\gamma - \alpha) - 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha \right] \quad (80) \\ \tau &= \frac{4 \cdot R}{\gamma^2} \cdot m_t \cdot \left[ 2(\alpha - \operatorname{sen} \alpha) - \gamma + 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

En el centro de la viga, el momento flector viene definido por:

$$M_n = -\frac{4 \cdot R}{\gamma^2} \cdot m_t \cdot \left[ 2 \left( 1 - \cos \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\gamma^2}{4} \right] \simeq \frac{5}{48} \cdot R \cdot m_t \cdot \gamma^2 \quad (81)$$

## VIGA BIEMPOTRADA

Cuando ambos extremos de la pieza curva tienen impedido el movimiento vertical, el giro sobre el eje normal y el giro sobre el eje tangencial, las condiciones de contorno se expresan en la forma siguiente:

$$w^a = w^b = \varphi_n^a = \varphi_n^b = \varphi_t^a = \varphi_t^b = 0 \quad (82)$$

Las condiciones de equilibrio del conjunto son:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^b &= \mathcal{V}_z^a + \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\gamma) \\ \tau^b &= \tau^a \cdot \cos \gamma - M_n^a \cdot \operatorname{sen} \gamma - R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot (1 - \cos \gamma) + \tau^{\text{ext}}(\gamma) \quad (83) \\ M_n^b &= M_n^a \cdot \cos \gamma + \tau^a \cdot \operatorname{sen} \gamma + R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot \operatorname{sen} \gamma + M_n^{\text{ext}}(\gamma) \end{aligned}$$

Cuando las cargas son simétricas, se tiene:

$$\mathcal{V}_z^b = -\mathcal{V}_z^a; \quad \tau^b = -\tau^a; \quad M_n^b = M_n^a \quad (84)$$

con lo que resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^b &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\gamma) \\ M_n^a &= \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma} \left[ (1 + \cos \gamma) \cdot \tau^a - R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot (1 - \cos \gamma) + \tau^{\text{ext}}(\gamma) \right] \quad (85) \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones (82) en la última de las expresiones (64), se llega a la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (1 + x) \cdot \operatorname{sen} \gamma \cdot M_n^a - [\gamma \cdot (1 + x) \cdot \cos \gamma \cdot \\ - (1 - x) \cdot \operatorname{sen} \gamma] \cdot \tau^a - R \cdot (1 + x) \cdot (\gamma \cdot \cos \gamma - \\ - \operatorname{sen} \gamma) \cdot \mathcal{V}_z^a = \frac{2 \cdot E \cdot I_n}{R} \cdot \varphi_t^{\text{ext}}(\gamma) \quad (86) \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última en la segunda de las relaciones (85), resulta:

$$\begin{aligned} \tau^a = \frac{1}{\gamma \cdot (1 + x) + (1 - x) \cdot \operatorname{sen} \gamma} \cdot \\ \cdot \left\{ (1 + x) \cdot [(\gamma - \operatorname{sen} \gamma) \cdot R \cdot \mathcal{V}_z^a - \gamma \cdot \right. \\ \left. \cdot \tau^{\text{ext}}(\gamma)] + \frac{2 \cdot E \cdot I_n}{R} \cdot \varphi_t^{\text{ext}}(\gamma) \right\} \quad (87) \end{aligned}$$

donde el término  $\varphi_t^{\text{ext}}(\gamma)$  se obtiene, particularizando para el extremo frontal de la viga, a partir de la última de las expresiones (65).

Las relaciones (85) y (87) permiten, pues, de-

terminar las reacciones extremas en la viga biempotrada, simétricamente cargada, en función de las acciones externas, cuya contribución al equilibrio y deformación del conjunto puede determinarse mediante las fórmulas generales (54) y (65).

Particularizando el estudio para los casos de carga considerados anteriormente, se llega a los resultados que se exponen a continuación:

a) Sobrecarga vertical, uniforme, extendida a toda la viga. Las reacciones en los extremos valen:

$$Q_z^a = \frac{R}{2} \cdot q_z \cdot \gamma$$

$$\tau^a = \frac{R^2}{2} \cdot q_z \cdot (1+x) \cdot \frac{4(1-\cos \gamma) - \gamma(\gamma + \operatorname{sen} \gamma)}{\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma} \quad (88)$$

$$M_n^a = R^2 \cdot q_z \cdot \frac{(1+3x) \operatorname{sen} \gamma - \gamma[1+x(2+\cos \gamma)]}{\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma}$$

Sustituyendo estas expresiones en las fórmulas (53), e introduciendo en las mismas los valores definidos en (56), se obtienen directamente las sollicitaciones internas en cualquier sección de la pieza. Particularizando los resultados para el centro del vano, se llega a la siguiente expresión para el momento flector radial:

$$M_n = R^2 \cdot q_z \cdot \left[ \frac{4(1+x) \cdot \operatorname{sen}(\gamma/2) - 2\gamma x \cos(\gamma/2)}{\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma} - 1 \right] \quad (89)$$

Desarrollando en serie de Taylor las relaciones anteriores y conservando sólo los primeros términos, resulta:

$$\tau^a \approx -\frac{1+x}{1440} \cdot R^2 \cdot q_z \cdot \gamma^5 \cdot \left[ 1 - \frac{7x}{84} \cdot \frac{4}{\gamma^2} \right]$$

$$M_n^a \approx -\frac{R^2}{12} \cdot q_z \cdot \gamma^2 \cdot \left[ 1 + (2+x) \cdot \frac{\gamma^2}{60} \right] \quad (90)$$

$$M_n(\gamma/2) \approx \frac{R^2}{24} \cdot q_z \cdot \gamma^2 \cdot \left[ 1 - \frac{1+8x}{240} \cdot \gamma^2 \right]$$

Tomando como valor representativo de la relación  $E \cdot I_n / (G \cdot J)$  a la unidad ( $x = 1$ ), se obtiene:

$$\tau^a \approx -\frac{\ell^2 \cdot \gamma^3}{720} \cdot (1 - \gamma^2/28) \cdot q_z$$

$$M_n^a \approx -\frac{\ell^2}{12} \cdot (1 + \gamma^2/20) \cdot q_z \quad (91)$$

$$M_n(\gamma/2) \approx \frac{\ell^2}{24} \cdot (1 - 3 \cdot \gamma^2/80) \cdot q_z \quad (91)$$

Estas últimas expresiones muestran la influencia de la curvatura sobre las sollicitaciones internas en la viga, si se las compara con las que se obtendrían en la pieza recta de igual luz. Resulta evidente que se incrementa el momento flector negativo en los empotramientos extremos y se reduce, aunque en menor magnitud, el momento en el centro del vano.

b) Sobrecarga radial, uniforme, extendida a toda la viga. Cuando las secciones extremas de la pieza tienen libertad de movimiento según la dirección radial y, a su vez, se encuentran equilibradas bajo la acción de esfuerzos axiales de valor  $q_n \cdot R$ , las sollicitaciones internas en la viga se reducen a esfuerzos axiales constantes, siendo aplicables las fórmulas (75), como en el caso de la viga con apoyo en horquilla en sus extremos.

c) Momento torsor, uniforme, extendido a toda la viga. Las sollicitaciones que se producen en los extremos de la misma, vienen definidas por las expresiones siguientes:

$$Q_z^a = 0$$

$$\tau^a = \frac{2 \cdot R \cdot (1 - \cos \gamma)}{\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma} \cdot m_t \quad (92)$$

$$M_n^a = \frac{(1+x) \cdot R \cdot (\operatorname{sen} \gamma - \gamma)}{\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma} \cdot m_t$$

Sustituyendo los valores anteriores y la segunda de las expresiones (60), en las fórmulas (56), se obtienen los momentos flectores radiales en la viga. Para el centro de la luz, se deduce:

$$M_n = R \cdot \left[ \frac{4 \operatorname{sen}(\gamma/2)}{\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma} - 1 \right] \cdot m_t \quad (93)$$

Desarrollando en serie, pueden aproximarse las sollicitaciones en los extremos y en el centro de la viga mediante las fórmulas:

$$\tau^a \approx \frac{R \cdot \gamma}{2} \cdot [1 - x \gamma^2/12] \cdot m_t$$

$$M_n^a \approx -\frac{(1+x) \cdot R \cdot \gamma^2}{12} \cdot [1 + (2-5x) \cdot \gamma^2/60] \cdot m_t \quad (94)$$

$$M_n^a(\gamma/2) \approx \frac{R \cdot \gamma^2}{24} \cdot [1 - 2x - (1 + 36x - 40x^2) \cdot \gamma^2/240] \cdot m_t$$

Para el caso en que  $x = 1$ , se obtendría:

$$\tau^a \approx \frac{\ell}{2} \cdot [1 - \gamma^2/12] \cdot m_t$$

$$M_n^a \approx -\frac{\ell \cdot \gamma}{6} \cdot [1 - \gamma^2/20] \cdot m_t \quad (95)$$

$$M_n^a(\gamma/2) \approx -\frac{\ell \cdot \gamma}{24} \cdot [1 - \gamma^2/80] \cdot m_t$$

d) Momento torsor, con distribución parabólica, extendido a toda la viga. En este caso, las sollicitaciones en el extremo dorsal de la pieza son:

$$\mathcal{V}_z^a = 0$$

$$\tau^a = -\frac{4R}{\gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2 + 3\gamma \sin \gamma \cdot 8(1 - \cos \gamma) + x[\gamma^2 + \gamma \sin \gamma - 4(1 - \cos \gamma)]}{\gamma(1+x)(1-x) \cdot \sin \gamma} \cdot m_t$$

$$M_n^a = \frac{8R}{\gamma^2} \cdot \frac{(1+x) \cdot (3\sin \gamma - \gamma \cos \gamma - 2\gamma)}{\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \sin \gamma} \cdot m_t \quad (96)$$

Desarrollando en serie la segunda y tercera de las expresiones anteriores y conservando sólo los primeros términos, se llega a las fórmulas simplificadas siguientes:

$$\tau^a = \frac{R \cdot \gamma}{3} \cdot [1 - x \gamma^2/10] \cdot m_t$$

$$M_n^a = -\frac{(1+x) \cdot R \cdot \gamma^2}{15} \cdot [1 + (3-7x) \cdot \gamma^2/84] \cdot m_t \quad (97)$$

El momento flector radial en el centro del vano, se obtiene a partir de las expresiones (53) y (62), particularizadas para el valor  $\alpha = \gamma/2$ . Su valor viene definido por:

$$M_n(\gamma/2) = M_n^a \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \tau^a \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{4 \cdot R}{\gamma^2} \cdot [\gamma \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\gamma^2}{4} - 2(1 - \cos \frac{\gamma}{2})] \cdot m_t \quad (98)$$

### VIGA CONTINUA, SOBRE APOYOS EN HORQUILLA

El análisis de vigas curvas continuas, solicitadas por cargas verticales y momentos de dirección radial y tangencial, puede abordarse fácilmente, cuando en todos los apoyos existen coacciones rígidas al giro de torsión (Apoyos en "horquilla"), mediante el método de superposición. Así, teniendo en cuenta que en estos casos sólo se movilizan los esfuerzos y desplazamientos que corresponden al trabajo de la pieza como "viga balcón", las eta-

pas del cálculo se desarrollan de la forma siguiente:

a) Se determinan los giros a flexión que se producen en los extremos de cada tramo parcial bajo la acción de las cargas externas, así como las reacciones verticales y de torsión, suponiendo dicho tramo como simplemente apoyado (en horquilla) en sus extremos. Para ello, basta con utilizar la primera, quinta y sexta de las expresiones (64) y (53), anulando los desplazamientos verticales, giros a torsión y momentos flectores radiales en ambos extremos. Procediendo de esta forma, se obtienen los resultados siguientes:

—Solicitaciones en las secciones extremas:

$$\mathcal{V}_z^a = \frac{1}{R \cdot x \cdot \gamma} \cdot \left\{ [R \cdot \varphi_t^{\text{ext}}(\gamma) - w^{\text{ext}}(\gamma)] \frac{E \cdot I_n}{R^2} - x \cdot M_n^{\text{ext}}(\gamma) \right\}$$

$$\tau^a = -R \cdot \mathcal{V}_z^a - \frac{M_n^{\text{ext}}(\gamma)}{\sin \gamma} \quad (99)$$

$$\mathcal{V}_z^b = \mathcal{V}_z^a + \mathcal{V}_z^{\text{ext}}(\gamma)$$

$$\tau^b = \tau^a \cdot \cos \gamma - R \cdot \mathcal{V}_z^a \cdot (1 - \cos \gamma) + \tau^{\text{ext}}(\gamma)$$

—Giros a flexión en las secciones extremas:

$$\varphi_n^a = \frac{1}{R \cdot \sin \gamma} \left\{ \frac{R^2}{2 \cdot E \cdot I_n} [2Rx(\gamma - \sin \gamma) \cdot \mathcal{V}_z^a + (1+x) \frac{\sin \gamma - \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma} \cdot M_n^{\text{ext}}(\gamma)] + w^{\text{ext}}(\gamma) \right\} \quad (100)$$

$$\varphi_n^b = \varphi_n^a \cdot \cos \gamma - \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_n} [2Rx(1 - \cos \gamma) \cdot \mathcal{V}_z^a + \gamma(1+x) \cdot M_n^{\text{ext}}(\gamma)] + \varphi_n^{\text{ext}}(\gamma)$$

b) Se obtienen los giros a flexión y las reacciones verticales y de torsión que se producen en cada tramo aislado, supuesto apoyado en horquilla en sus extremos, bajo la acción de momentos flectores radiales genéricos actuando en dichos apoyos (véase Figura 18). Utilizando de nuevo las expresiones (53) y (64) y anulando los desplazamientos verticales y giros a torsión en las secciones extremas, se obtienen los resultados siguientes:

—Solicitaciones en las secciones extremas:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^a &= \mathcal{V}_z^b = -\frac{1}{R \cdot \gamma} (M_n^a - M_n^b) \\ \tau^a &= \frac{1}{\gamma \cdot \sin \gamma} [(\sin \gamma - \gamma \cdot \cos \gamma) \cdot \\ &\quad \cdot M_n^a + (\gamma \cdot \cos \gamma - \sin \gamma) \cdot M_n^b] \quad (101) \\ \tau^b &= \frac{1}{\gamma \cdot \sin \gamma} [(\sin \gamma - \gamma) \cdot M_n^a + \\ &\quad + (\gamma \cdot \cos \gamma - \sin \gamma) \cdot M_n^b] \end{aligned}$$

—Giros a flexión en las secciones extremas:

$$\begin{aligned} \varphi_n^a &= \frac{R}{2 \cdot E \cdot I_n \cdot \gamma \sin^2 \gamma} \{2 \times \sin^2 \gamma (M_n^a - \\ &\quad - M_n^b) + (1-x) \gamma \sin \gamma (\cos \gamma M_n^a - \\ &\quad - M_n^b) - (1+x) \cdot \gamma^2 (M_n^a \cdot \cos \gamma \cdot \\ &\quad M_n^b)\} = C_1 \cdot M_n^a + C_2 \cdot M_n^b \quad (102) \\ \varphi_n^b &= -C_2 \cdot M_n^a - C_1 \cdot M_n^b \end{aligned}$$

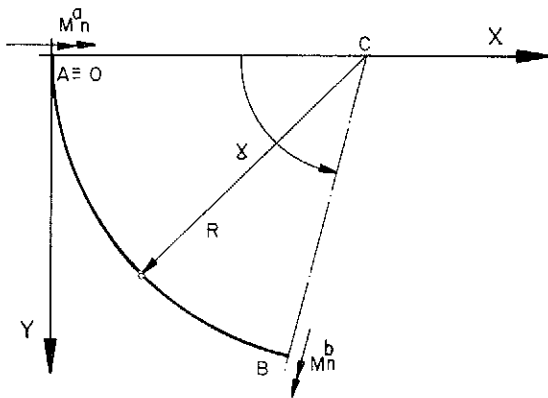


Fig. 18. Viga simple solicitada por momentos flectores extremos

c) Se imponen las condiciones de compatibilidad de movimientos y de continuidad de solicitaciones internas, en las secciones extremas adyacentes de cada dos tramos consecutivos. Procediendo de esta forma se obtienen, admitiendo que no hay momentos exteriores radiales sobre las secciones de apoyo, las siguientes relaciones entre tramos consecutivos ( $m-1$  y  $m$ ):

$$\begin{aligned} (\varphi_{n,i}^b)_{m-1} - (\varphi_{n,i}^a)_m &= [(C_1)_m + (C_1)_{m-1}] \cdot \\ &\quad \cdot (M_n^a)_m + (C_2)_{m-1} \cdot (M_n^a)_{m-1} + \\ &\quad + (C_2)_m \cdot (M_n^b)_m \quad (103) \end{aligned}$$

que son formalmente análogas a las que proporciona la "ecuación de los tres momentos" en el análisis convencional de vigas rectas continuas. En la ecuación (102) el subíndice "i" designa a los giros iniciales que se producen en cada tramo, bajo la acción de las cargas exteriores, y que se deducen de las expresiones (100).

Agrupando las ecuaciones correspondientes a cada apoyo intermedio de la viga con las dos condiciones representativas de las coacciones existentes en los extremos dorsal y frontal de la misma, se obtiene un sistema completo, cuya resolución proporciona los momentos flectores, radiales, sobre las secciones de apoyo.

d) Se superponen los efectos debidos a las cargas exteriores y a los momentos flectores radiales extremos en cada tramo, para obtener las solicitaciones internas en los mismos.

### SOLICITACIONES Y MOVIMIENTOS INTRODUCIDOS POR EL PRETENSADO

Si se pretensa la viga circular mediante un cable cuyo trazado viene definido por la excentricidad radial ( $e_c$ ) y por su coordenada vertical ( $z$ ), las acciones equivalentes sobre la viga pueden obtenerse particularizando las relaciones (48) para  $\rho = R$  y  $s = R \cdot \alpha$  (véase Figura 19). Se llega de esta forma a los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} q_z &= F \cdot \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{F}{R^2} \cdot \frac{d^2 z}{d\alpha^2} \\ q_n &= F \cdot \left[ \frac{d^2 e_c}{ds^2} - \frac{1}{R} \right] = \frac{F}{R^2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \frac{d^2 e_c}{d\alpha^2} - \frac{R}{R} \right] \\ q_t &= \frac{F}{R} \cdot \frac{d e_c}{ds} = \frac{F}{R^2} \cdot \frac{d e_c}{d\alpha} \\ m_z &= 0 \quad (104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{F}{R} \left[ z \cdot \frac{d e_c}{ds} - e_c \cdot \frac{dz}{ds} \right] = \\ &= \frac{F}{R^2} \left[ z \cdot \frac{d e_c}{d\alpha} - e_c \cdot \frac{dz}{d\alpha} \right] \\ m_t &= \frac{F}{R} \left[ z - R \left( z \cdot \frac{d^2 e_c}{ds^2} - e_c \cdot \frac{d^2 z}{ds^2} \right) \right] = \\ &= \frac{F}{R^2} \left[ z \left( R - \frac{d^2 e_c}{d\alpha^2} \right) + e_c \cdot \frac{d^2 z}{d\alpha^2} \right] \end{aligned}$$

donde  $F$  designa al esfuerzo de pretensado, que, como simplificación, se supondrá constante en toda la pieza.

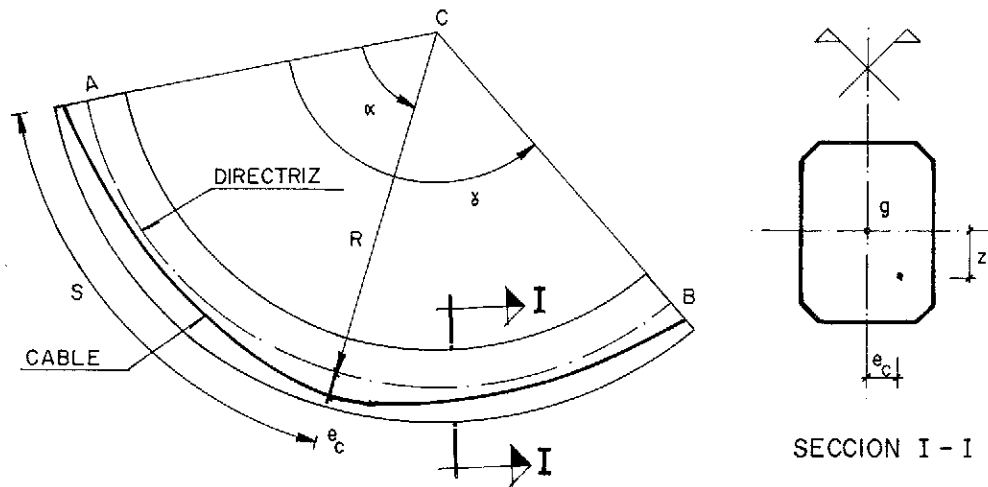


Fig. 19. Geometría del pretensado en la viga circular.

Los esfuerzos isostáticos en cualquier sección de la viga, vienen definidos por las expresiones (46), que se particularizan para la pieza de directriz circular en:

$$\begin{aligned} N_i &= -F \\ V_{ni} &= -F \cdot \frac{d e_c}{d s} = -\frac{F}{R} \cdot \frac{d e_c}{d \alpha} \\ V_{zi} &= -F \cdot \frac{d z}{d s} = -\frac{F}{R} \cdot \frac{d z}{d \alpha} \\ \tau_i &= F \left[ z \cdot \frac{d e_c}{d s} - e_c \cdot \frac{d z}{d s} \right] = \\ &= \frac{F}{R} \left[ z \cdot \frac{d e_c}{d \alpha} - e_c \cdot \frac{d z}{d \alpha} \right] \end{aligned} \quad (105)$$

$$M_{ni} = -F \cdot z$$

$$M_{zi} = F \cdot e_c$$

Los esfuerzos totales debidos al pretensado, se obtienen sustituyendo las expresiones (104) en las relaciones (54) y, tras la integración, reemplazando los términos asociados a las acciones exteriores, en las fórmulas (53). Procediendo de esta forma, se llega a los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} V_z &= V_{zh}^a + V_{zi} = V_{zh} + V_{zi} \\ V_n &= N_h^a \cdot \sin \alpha + V_{nh}^a \cdot \cos \alpha + \\ &+ V_{ni} = V_{nh} + V_{ni} \\ N &= N_h^a \cdot \cos \alpha + V_{nh}^a \cdot \sin \alpha + \\ &+ N_i = N_h + N_i \\ M_z &= M_{zh}^a - R(1 - \cos \alpha) \cdot N_h^a - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- R \cdot \sin \alpha \cdot V_{nh}^a + M_{zi} = \\ &= M_{zh} + M_{zi} \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} M_n &= M_{nh}^a \cdot \cos \alpha + \tau_h^a \cdot \sin \alpha + \\ &+ R \cdot \sin \alpha \cdot V_{zh}^a + M_{ni} = \\ &= M_{nh} + M_{ni} \\ \tau &= \tau_h^a \cdot \cos \alpha - M_{nh}^a \cdot \sin \alpha - \\ &- R \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot V_{zh}^a + \tau_i = \\ &= \tau_h + \tau_i \end{aligned}$$

en donde se ha designado con el subíndice "h" a los esfuerzos hiperestáticos de pretensado, mientras que el superíndice "a" denota, como siempre, a los esfuerzos en el extremo dorsal de la viga.

Teniendo en cuenta la total similitud formal entre las expresiones (106) y las fórmulas (53), los movimientos estructurales debidos al pretensado pueden obtenerse mediante relaciones análogas a las (64), en las que deben reemplazarse los esfuerzos correspondientes al extremo dorsal, por los esfuerzos hiperestáticos de pretensado que se producen en este último, y sustituirse los términos debidos a las acciones exteriores, por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} w_n^{\text{ext}}(\alpha) &= \frac{F \cdot R^2}{E \cdot I_n} \int_0^\alpha \left\{ z \cdot \sin(\alpha - \beta) - \right. \\ &- \frac{x}{R} [1 - \cos(\alpha - \beta)] \cdot \left[ z \cdot \frac{d e_c}{d \beta} - \right. \\ &- e_c \cdot \left. \frac{d z}{d \beta} \right] \left. \right\} \cdot d\beta \\ \delta_n^{\text{ext}}(\alpha) &= \frac{F \cdot R}{E \cdot I_z} \int_0^\alpha (R \cdot c_c - i_z^2) \cdot \end{aligned} \quad (107)$$



$$\begin{aligned}
& \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot d\beta \\
\delta_t^{\text{ext}}(\alpha) &= -\frac{F \cdot R}{E \cdot I_z} \int_0^\alpha \{i_z^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) + \\
& + R \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] \cdot e_c\} \cdot d\beta \quad (107) \\
\varphi_z^{\text{ext}}(\alpha) &= \frac{F \cdot R}{E \cdot I_z} \int_0^\alpha e_c \cdot d\beta \\
\varphi_n^{\text{ext}}(\alpha) &= -\frac{F \cdot R}{E \cdot I_n} \int_0^\alpha \left\{ z \cdot \cos(\alpha - \beta) - \right. \\
& - \frac{x}{R} \cdot \sin(\alpha - \beta) \cdot \left[ z \cdot \frac{d e_c}{d\beta} - \right. \\
& \left. \left. - e_c \cdot \frac{dz}{d\beta} \right] \right\} \cdot d\beta \\
\varphi_t^{\text{ext}}(\alpha) &= \frac{F \cdot R}{E \cdot I_n} \int_0^\alpha \left\{ z \cdot \sin(\alpha - \beta) + \right. \\
& + \frac{x}{R} \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \left[ z \cdot \frac{d e_c}{d\beta} - \right. \\
& \left. \left. - e_c \cdot \frac{dz}{d\beta} \right] \right\} \cdot d\beta
\end{aligned}$$

A partir de las fórmulas que acaban de exponerse, pueden determinarse, siguiendo la metodología habitual, las sollicitaciones y movimientos introducidos en la viga circular por la acción del pretensado. En casos simples, pueden utilizarse, alternativamente, las fórmulas obtenidas para las sollicitaciones internas en apartados precedentes, tal como se expone a continuación.

#### VIGA SIMPLE BIAPOYADA EN HORQUILLA, PRETENSADA CON UN CABLE PARABOLICO CENTRADO CON LA DIRECTRIZ

Cuando el cable está centrado con la directriz ( $e_c = 0$ ) y acomoda su perfil en alzado a un trazo parabólico de segundo grado, con flecha máxima "f", en el centro, y flecha nula en los extremos (véase Figura 20), las acciones exteriores

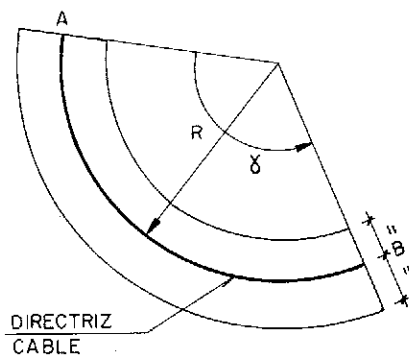


Fig. 20. Viga simple biapoyada pretensada con cable parabólico centrado.

equivalentes, que se obtienen en general a partir de las fórmulas (104), se particularizan en:

$$\begin{aligned}
q_z(\beta) &= -\frac{8 \cdot F \cdot f}{l^2} \\
q_n(\beta) &= -\frac{F}{R} \\
q_t(\beta) &= m_z(\beta) = m_n(\beta) = 0 \\
m_t(\beta) &= -\frac{4 \cdot F \cdot f \cdot R}{l^2} \cdot \beta(\beta - \gamma)
\end{aligned} \quad (108)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las fórmulas (70), (74) y (79), se obtienen las sollicitaciones correspondientes a la sección dorsal de la viga, cuyo valor es:

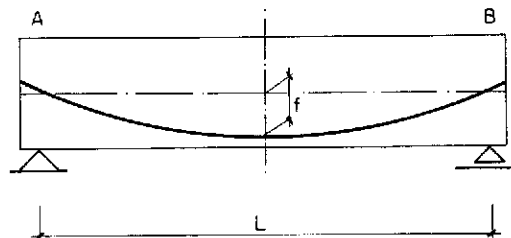
$$\begin{aligned}
N^a &= -F \\
V_z^a &= -\frac{4 \cdot F \cdot f}{l} \\
V_n^a = \tau^a = M_n^a = M_z^a &= 0
\end{aligned} \quad (109)$$

Reemplazando estos valores en las expresiones generales (53), e introduciendo en las mismas los valores que resultan de sustituir las acciones definidas en (108), en las fórmulas (56), (58) y (62), se deducen las leyes de variación de las sollicitaciones internas en la viga, que se escriben en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
V_z &= -\frac{4 \cdot F \cdot f}{l \cdot \gamma} (\gamma - 2\alpha) \\
N &= -F \\
V_n = M_z = \tau &= 0 \\
M_n &= -4 \cdot F \cdot f \cdot \alpha \cdot (\gamma - \alpha) / \gamma^2
\end{aligned} \quad (110)$$

En el centro de la viga, el momento flector radial debido al pretensado es:

$$M_n(\gamma/2) = -F \cdot f \quad (111)$$



A la vista de estas expresiones, resulta evidente que, en el caso frecuente de sollicitación vertical uniforme, una disposición del pretensado como la que acaba de describirse, si bien permite contrarrestar eficazmente los esfuerzos cortantes verticales y los momentos flectores radiales que se producen en la viga por efecto de aquélla, no altera en modo alguno los esfuerzos de torsión sobre la pieza. Para conseguir reducir dichas torsiones habría que descentrar el cable respecto de la directriz lo que, en general, introduciría también esfuerzos cortantes radiales y momentos flectores verticales en la viga.

### VIGA BIEMPOTRADA, PRETENSADA CON UN CABLE PARABOLICO CENTRADO CON LA DIRECTRIZ

Supóngase, en primer lugar, que la excentricidad vertical del cable es nula en las secciones extremas de la viga, cuyo giro sobre el eje radial está impedido. Las acciones exteriores equivalentes son las mismas que en el caso precedente y las sollicitaciones actuantes sobre las secciones extremas, se obtienen al sustituir las expresiones (108) en las fórmulas (88), (74) y (96). Se llega así al resultado siguiente:

$$\begin{aligned} N^a &= -F \\ V_z^a &= -\frac{4 \cdot F \cdot f}{l} \\ V_n^a = M_z^a &= 0 \\ M_n^a &= -\frac{8 \cdot F \cdot f \cdot [\gamma - 2 \operatorname{sen} \gamma + \gamma \cdot \cos \gamma]}{\gamma^2 \cdot [\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma]} \\ \tau^a &= -\frac{8 \cdot F \cdot f \cdot [\gamma \cdot \operatorname{sen} \gamma - 2(1 - \cos \gamma)]}{\gamma^2 \cdot [\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma]} \end{aligned} \quad (112)$$

En el centro del vano, el momento flector radial viene definido por:

$$\begin{aligned} M_n(\gamma/2) &= M_n^a \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \\ &+ \tau^a \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} - F \cdot f \end{aligned} \quad (113)$$

siendo  $M_n^a$  y  $\tau^a$  los valores resultantes de la particularización de las fórmulas cuarta y quinta, respectivamente, de las expresiones (112), para los datos de cada caso concreto.

Desarrollando en serie las relaciones anteriores y conservando sólo los términos más significativos, se obtienen las relaciones siguientes:

$$\tau^a = \frac{F \cdot f \cdot \gamma}{3} \left[ 1 + \frac{1-5x}{60} \cdot \gamma^2 \right] \quad (114)$$

$$M_n^a \approx \frac{2 \cdot F \cdot f}{3} \left[ 1 - \frac{4+5x}{60} \cdot \gamma^2 \right] \quad (114)$$

$$M_n(\gamma/2) \approx -\frac{F \cdot f}{3} \left[ 1 - \frac{7-10x}{60} \cdot \gamma^2 \right]$$

Si se levanta el cable en los extremos una magnitud  $z_0$  (en valor absoluto) y se sigue manteniendo un trazado parabólico de flecha "f" (véase figura 21), las acciones exteriores equivalentes son las definidas por las expresiones (108), exceptuando los momentos de torsión tangenciales, cuyo valor es ahora:

$$\begin{aligned} m_t(\beta) &= -F \cdot \left[ \frac{4 \cdot f \cdot R}{l^2} \cdot \beta(\beta - \gamma) + \frac{z_0}{R} \right] \\ z &= -z_0 - \frac{4 \cdot f}{\gamma^2} \cdot \beta(\beta - \gamma) \end{aligned} \quad (115)$$

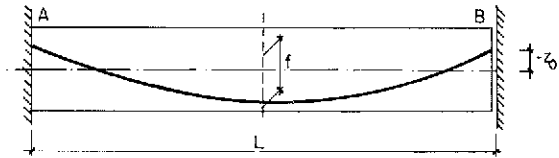


Fig. 21. Trazado parabólico, en viga biempotrada

Las sollicitaciones en los extremos, se obtienen superponiendo, a las definidas en (112), las debidas a un momento torsor, uniforme, de valor  $-F \cdot z_0/R$ , que se obtienen directamente a partir de las expresiones (92). Esta distribución de momentos torsores, provoca una modificación en los esfuerzos de torsión y en los momentos radiales, cuyos valores en el extremo dorsal son:

$$\begin{aligned} \tau^a &= -\frac{F}{\gamma^2 \cdot [\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma]} \cdot \\ &\cdot \{ 8f [\gamma \cdot \operatorname{sen} \gamma - 2(1 - \cos \gamma)] + \\ &+ 2z_0 \gamma^2 (1 - \cos \gamma) \} \\ M_n^a &= -\frac{F}{\gamma^2 \cdot [\gamma(1+x) + (1-x) \cdot \operatorname{sen} \gamma]} \cdot \\ &\cdot \{ 8f [\gamma - 2 \operatorname{sen} \gamma + \gamma \cdot \cos \gamma] + \\ &+ (1+x) z_0 (\operatorname{sen} \gamma - \gamma) \} \end{aligned} \quad (116)$$

En el centro de la viga, el momento flector radial es:

$$\begin{aligned} M_n(\gamma/2) &= (M_n^a - F \cdot z_0) \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \\ &+ \tau^a \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} - F(f - z_0) \end{aligned} \quad (117)$$

La condición de pretensado "concordante"

(nulidad de esfuerzos hiperestáticos), se satisface cuando se verifica la relación siguiente:

$$z_0 = -\frac{4f}{\gamma^2(1-\cos\gamma)} [\gamma \cdot \operatorname{sen} \gamma - 2(1-\cos\gamma)] \simeq -\frac{2 \cdot f}{3} \left(1 + \frac{\gamma^2}{60}\right) \quad (118)$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se pone de manifiesto, nuevamente, que el pretensado centrado con la directriz, si bien puede resultar eficaz para contrarrestar las sollicitaciones de flexión y cortante introducidas por las sobrecargas exteriores, no es el más adecuado frente a las sollicitaciones de torsión. De hecho, como muestran las relaciones (88) y (90), para amplitudes angulares reducidas, el momento de torsión debido a la sobrecarga uniforme es prácticamente despreciable en las secciones extremas, mientras que dichas sollicitaciones pueden ser significativas con un pretensado parabólico centrado, tal como prueban las fórmulas (114) y (116), salvo si se adopta un pretensado "concordante", que no suele resultar el más adecuado bajo el punto de vista del diseño estructural.

De cuanto se ha expuesto se desprende la conveniencia de descentrar el pretensado en planta, en las vigas curvas. Dicho descentramiento debería ajustarse, al menos bajo una perspectiva teórica, en función de los porcentajes de sollicitaciones exteriores que se desee corregir con el pretensado, en cada sección de la viga curva. Como consecuencia de dicho descentramiento se producirán, en general, flexiones de eje vertical y cortantes radiales en la pieza. La solución práctica del problema no es simple, tal como se expone a continuación.

### OPTIMIZACION DEL TRAZADO DE LOS CABLES DE PRETENSADO, EN LAS VIGAS CURVAS

La selección del trazado más adecuado para el pretensado de las vigas curvas depende de diversos factores, que deberá considerar en cada caso el proyectista, de acuerdo con las características específicas de cada diseño. Intentar establecer criterios generales de "optimación" suele resultar utópico, ante la dificultad de ponderar adecuadamente los factores de carácter constructivo, que suelen tener, en muchos casos, un "peso" mayor que la deseable "economía" de los materiales, a la hora de tomar las decisiones básicas de cada proyecto. No obstante, desde una perspectiva teórica, puede plantearse la posibilidad de dicha optimación. Si se prescinde de las sollicitaciones de "tipo arco" ( $N$ ,  $V_n$  y  $M_z$ ) puede efectuarse una aproximación al problema, desde dos planteamientos alternativos sugerentes:

-Equilibrar con el pretensado las acciones generalizadas producidas en la viga por las acciones exteriores.

-Contrarrestar con el pretensado las sollicitaciones producidas en la viga por las acciones exteriores.

Puede demostrarse fácilmente que no tiene solución el problema con cualquiera de los dos planteamientos anteriores; circunstancia que no representa por sí misma mayor inconveniente práctico, al resultar "variables" las sobrecargas de uso en las estructuras reales.

Siguiendo criterios análogos a los formulados por SALSE, podría establecerse una condición de diseño "óptimo" del pretensado, tratando de contrarrestar con su trazado determinado porcentaje de los momentos flectores radiales y de los momentos de torsión de la viga. Cuando el pretensado es "concordante" se llega a las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} M_n^s - F \cdot z &= 0 \\ \tau^s + \frac{F}{R} \left( z \cdot \frac{de_c}{d\alpha} - \frac{dz}{d\alpha} \cdot e_c \right) &= 0 \end{aligned} \quad (119)$$

donde  $M_n^s$  y  $\tau^s$  son, respectivamente, los momentos radiales y torsores debidos a las acciones exteriores.

Partiendo de dichas expresiones, se deduce:

$$\begin{aligned} z &= \frac{M_n^s}{F} \\ e_c \cdot \frac{dM_n^s}{d\alpha} - \frac{de_c}{d\alpha} \cdot M_n^s &= R \cdot \tau^s \end{aligned} \quad (120)$$

La primera de las fórmulas anteriores define el trazado en alzado del pretensado, en función de los momentos flectores y del esfuerzo de pretensado, tal como resultaría en una viga recta. La segunda, pone de manifiesto que la excentricidad horizontal " $e_c$ " resulta independiente del esfuerzo de pretensado y se obtendría en función de las sollicitaciones en la viga, mediante la integración siguiente:

$$e_c = \left[ C - R \cdot \int \frac{\tau^s}{[M_n^s]^2} d\alpha \right] \cdot M_n^s \quad (121)$$

donde "C" es una constante arbitraria que habrá que ajustar en cada caso, en función de la geometría de la sección.

La integración de la expresión anterior presenta singularidades en los puntos de momento flector nulo, aunque pueden obviarse en la práctica estableciendo transiciones adecuadas (de tipo parabólico, por ejemplo) en el entorno de dichos puntos y resolviendo la integral entre tramos en los que no se anule dicho momento.

Procediendo de esta forma, se deduce el trazado "óptimo", en planta, en cada caso concreto. Particularizando el estudio para la viga biapoyada en horquilla, se llegaría a los resultados que se re-

presentan en la Figura 22, donde se ha supuesto  $C = 0$  y se define el ángulo  $\theta$  desde la sección central de la pieza, para el caso de sobrecarga uniforme.

Examinando dicha figura, se observa que para amplitudes angulares ( $\gamma$ ) grandes, las excentricidades requeridas obligarían al cable a situarse en el exterior de la sección, lo que, en la práctica, volvería a dejar sin solución el problema planteado.

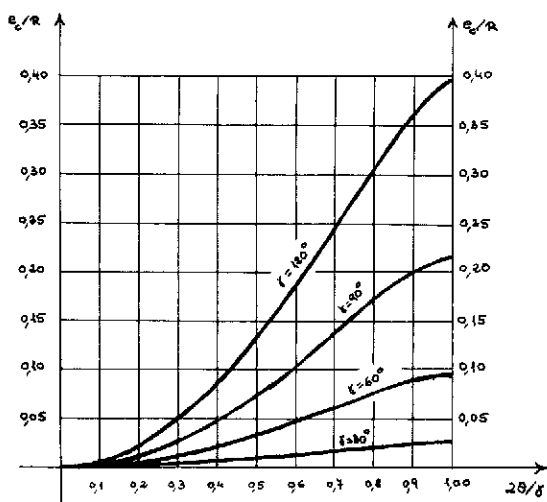


Fig. 22. Excentricidad en planta, "óptima" para el pretensado de una viga circular, biapoyada en horquilla, bajo sobrecarga uniforme.

Aunque el trazado "concordante" no suele resultar el más conveniente, la conclusión anterior tiene validez para cualquier tipo de trazado que se seleccione. Así, si se adoptara un trazado parabólico, en alzado, para la viga biapoyada y se le diera una excentricidad constante en planta, las solicitaciones sobre la viga serían las definidas por las expresiones (110), complementadas por unas torsiones definidas por:

$$\tau = \frac{4 \cdot F \cdot f}{\ell} \left( \frac{2\alpha}{\gamma} - 1 \right) \cdot e_c \quad (122)$$

Si, como suele ser frecuente, se supone la viga solicitada por una sobrecarga vertical, uniforme, de valor  $q_z$ , la flecha del cable vendría definida a partir del momento flector radial en el centro de la viga y la excentricidad en planta se ajustaría en función del momento torsor en los extremos de la misma. Utilizando las relaciones (72), (73), (110) y (112) se llegaría a:

$$f = \frac{q_z \cdot \ell^2}{8F} \left( 1 + \frac{5\gamma^2}{48} \right) \quad (123)$$

$$f \cdot e_c = \frac{q_z \cdot \ell^4}{96 \cdot F \cdot R} \left( 1 + \frac{\gamma^2}{10} \right)$$

Dividiendo la segunda expresión por la primera, se obtiene:

$$\frac{e_c}{R} = \frac{\gamma^2 (1 + \gamma^2/10)}{12 \cdot (1 + 5\gamma^2/48)} \approx \frac{\gamma^2}{12} \quad (124)$$

resultando, en este caso, una excentricidad en planta aproximadamente proporcional al "cuadrado" de la amplitud angular total de la viga. Su valor sería igual al 8,3% del radio medio de la pieza, cuando dicha amplitud fuera igual a un radián; valor que exigiría unas dimensiones de la viga poco usuales en la práctica, lo que supondría que la posición del cable quedaría fuera de la sección transversal.

Una posibilidad atractiva en estos casos, consiste en especializar el pretensado de torsión frente al de flexión, aunque siempre será difícil llegar a una solución "óptima" para grandes amplitudes angulares.

## CONCLUSIONES

De cuanto se ha expuesto se desprende que el encaje del pretensado en las vigas de planta curva, plantea siempre un interesante problema de diseño, específico de este tipo de piezas. Las conclusiones más relevantes del estudio efectuado con la viga de planta circular, pueden resumirse en las siguientes:

—El trazado del pretensado debe conjugar excentricidades, tanto en planta como en alzado, ya que un pretensado centrado en el eje medio de la pieza no es eficaz frente a las solicitaciones de torsión.

—Las excentricidades necesarias en planta, no guardan una relación directa con el valor del esfuerzo de pretensado y resultan demasiado elevadas cuando la amplitud angular de la pieza es grande (mayor de un radián, por ejemplo).

En cualquier caso, sea cual fuere la solución que se adopte, la propia curvatura en planta de la viga y la que se derivase del trazado en planta del pretensado, introducirán en las piezas unas fuerzas de desviación radiales que convendrá tener en cuenta para justificar la necesidad, o no, de disponer unas armaduras adicionales en previsión de un eventual "despegue" del hormigón en el momento de la transferencia del pretensado.

## BIBLIOGRAFIA

- M. ALBIGES, A. COIN Y H. JOURNET: "Estudio de las estructuras por los métodos matriciales". Editores técnicos Asociados S.A., 1971.
- J. COURBON: "Tratado de Resistencia de Materiales", Tomo II. Aguilar, S.A. de Ediciones, 1969.

—C. FERNANDEZ CASADO: "Cálculo de Arcos". Editorial Dossat S.A. 1955.

—C.F. KOLLBRUNNER y K. BASLER: "Torsión. Application à l'étude des structures". Ediciones SPES, 1970.

—R.K. LIVESLEY: "Métodos matriciales para Cálculo de Estructuras". Editorial Blume, 1970.

—J. RENAULT: "Complexe d'échange de la porte de Bagnolet. Précontrainte dans les viaducs courbes et biais". ANNALES I.T.B.T.P. n° 269, 1970.

—R.J. ROARK y W.C. YOUNG: "Formulas for Stress and Strain". Mc Graw-Hill Book Company, 1975.

—E.A.B. SALSE: "Analysis and design of prestressed concrete circular bow girders for bridge structures". Publicación A.C.I. SP-26, 1971.

—S. TIMOSHENKO: "Resistencia de Materiales". Espasa Calpe S.A., 1967.

—G. TONIOLO: "La funzione di trasmissione delle travi ad asse curvilineo". Costruzioni Metalliche n° 5, 1975.

—W. VREDEN: "Curved continuous beams for Highway bridges". Frederik Ungar Publishing Co., 1969.

—A.A. WITECKI: "Simplified method for the analysis of torsional moment as an effect of a horizontally curved multispan continuous bridge". Publicación A.C.I. SP-23, 1969.

## RESUMEN

En el presente artículo se exponen las relaciones básicas que gobiernan el análisis de las vigas de planta circular, obtenidas como particularización de las expresiones generales deducidas con anterioridad (véase N° 164 de esta Revista). Para el caso de vigas continuas con giro torsional impedido en los apoyos, se llega a una generalización de la "ecuación de los tres momentos", utilizada habitualmente en el análisis de vigas rectas por el método de compatibilidad. Al analizar las solicitaciones debidas al pretensado, se pone de manifiesto la conveniencia de contrarrestar las torsiones debidas a las solicitaciones exteriores, mediante un trazado excéntrico en planta y se demuestra que el trazado "óptimo" requerido está limitado, en la práctica, para vigas de gran amplitud angular.

## SUMMARY

This paper particularizes the basic relationships stated previously (see n° 164 of this Journal) to the circular beam. For the members continuous with torsional restraints at supports a generalization of the "three bending moments equation" is obtained. The analysis of prestressed members stands out the suitability of a eccentric plan cable in order to reduce the torsional moments. The horizontal eccentricity is independent of the applied cable force and, for optimum design, is very large for angular spans in excess of 1 radian.

\* \* \*

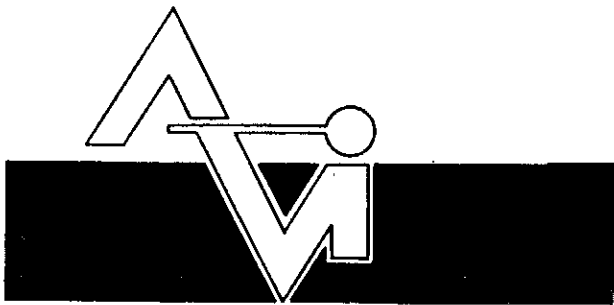
## IX Congreso Internacional sobre la Química del Cemento"

El Presidente del "National Council for Cement and Buildings Materials" de Nueva Delhi, India, nos comunica que están organizando, para los días 23-28 de noviembre de 1992, el IX Congreso Internacional sobre la Química del Cemento, cuyo objetivo fundamental es la puesta al día y discusión de los últimos avances logrados en este campo de la química del cemento, material fundamental para la construcción de todo tipo de estructuras.

Aunque más adelante se darán noticias concre-

tas sobre el programa de este Congreso, los interesados en principio en participar en él, que deseen obtener más amplia información, deberán dirigirse a:

The Organising Secretary, 9th ICC  
National Council for Cement and Building Materials.  
M 10 South Extension Part II Ring Road  
New Delhi 110049 (India)  
Tfno.: 644 01 33. Telefax: 91-011,884 21 00

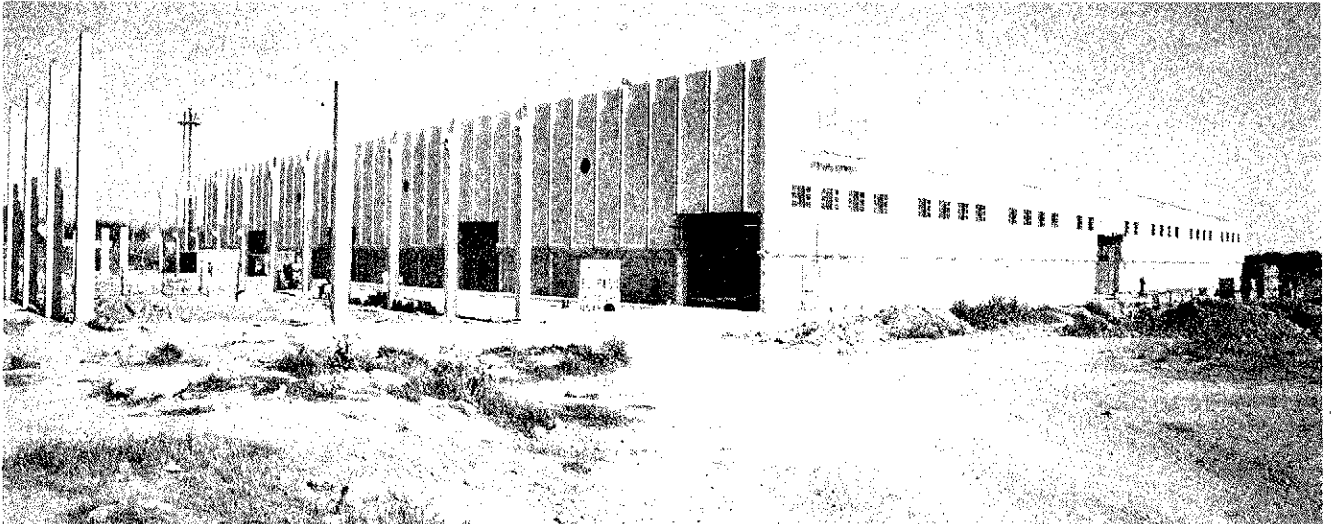


PREFABRICACION LIGERA Y PESADA

**ALVISA**

PREFABRICADOS ALBAJAR

**PUENTES - NAVES INDUSTRIALES - FORJADOS  
BOVEDILLAS - LADRILLOS - TEJAS - TUBOS DRENAJE**



**HUESCA:**

Oficina Comercial y Fábrica: P.º Lucas Mallada, s/n - Teléfono 22 39 00 - HUESCA

Oficina y Fábrica: Ctra. de Lérida, s/n - Teléfono 40 07 80 - MONZON

Oficina y Fábrica: Ctra. de Huesca - Teléfono 39 00 41 - GRAÑEN

**MADRID**

Oficina Comercial: Orense, 10, 1.º - Teléfonos 455 05 35 - 6 - 7 - MADRID-10

Oficina y Fábrica: Ctra. Torrejón a Loeches, Km 4,200 - Teléfonos 675 04 50 - 4 - 8 -

TORREJON DE ARDOZ

Oficinas y Fábrica: Ctra. de Toledo, Km 7,300 - Teléfono 688 27 72 - LEGANES

**ZARAGOZA**

Oficina Comercial: P.º de la Constitución, 31 - Teléfonos 23 75 02 - 3 - ZARAGOZA-1

# Aplicación del método de reducción en el cálculo lineal de estructuras condicionadas con matriz de masa singular

Pablo Rubio Pérez  
Dr. Ingeniero de Caminos  
Dragados y Construcciones, S.A.

## 1. INTRODUCCION

En la Ref. [1] se formuló el planteamiento general del problema del cálculo lineal, estático y dinámico, de estructuras condicionadas por restricciones lineales entre desplazamientos, y su solución, mediante aplicación alternativa, en primer término, del método de condensación habitual, conocido como algoritmo master-slave, seguido de la utilización de un método penalty generalizado, objetivo principal de la exposición allí efectuada. La equivalencia de ambos métodos se justificó para ambos tipos de cálculos estructurales, estático y dinámico, en el segundo, con una condición restrictiva de la matriz de masa del sistema global, que comentamos a continuación.

En efecto, los desarrollos particularizados de uno y otro método, relativos al cálculo dinámico, expuestos en [1], se restringieron allí al caso de matriz de masa no singular, con la condición de matriz definida positiva, inherente a la propia significación física de esta matriz regular. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, con un número importante de grados de libertad, no se verifica la condición de regularidad de la matriz global del sistema, siendo normal, en la definición conceptual del modelo estructural, la inclusión de desplazamientos generalizados con masa nula asignada. En esta última hipótesis, la matriz de masa del sistema global resulta una matriz hermítica singular, semidefinida positiva. Este es el caso, por ejemplo, de los desplazamientos rotacionales cuando se aplica el concepto de masas concentradas, que tiene realidad física, y se desprecian los esfuerzos inerciales debidos al giro. En la anterior y sucesivas utilidades de las expresiones desplazamientos con/sin masa, sacrificaremos el rigor conceptual a la mayor sencillez expositiva.

En el supuesto indicado de existencia de desplazamientos sin masa, existe una dependencia lineal entre los desplazamientos con masa nula asociada,

considerados como desplazamientos generalizados dependientes, con relación a los desplazamientos con masa o independientes. A continuación, se destaca la formulación usual de tal relación para el problema ordinario, esto es, sin imponer otras restricciones adicionales, y su incidencia en el problema dinámico.

Designaremos como  $n_+$  y  $n_0$  a los números respectivos de grados de libertad con/sin masa, que cumplen la relación

$$n_+ + n_0 = n \quad (1.1)$$

siendo  $n$  el número total de desplazamientos generalizados, o sea, el número inicial de grados de libertad del sistema.

Efectuando una ordenación adecuada de las variables, en la que los  $n_+$  desplazamientos con masa, preceden a los  $n_0$  desplazamientos sin masa, y prescindiendo de términos de amortiguamiento, como se explicó en la Ref. [1], el sistema diferencial se escribe en la siguiente forma particionada

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} n_+ & n_0 \\ n_+ \left[ \begin{matrix} M_1 & \Omega \\ \Omega & \Omega \end{matrix} \right] n_+ \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} x_1'' \\ x_2'' \end{matrix} + \\ + & \begin{matrix} n_+ & n_0 \\ n_+ \left[ \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12}^T & k_{22} \end{matrix} \right] n_+ \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} n_+ \\ n_0 \end{matrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \quad (1.2) \end{aligned}$$

donde  $M_1$  es una submatriz simétrica, definida positiva, de orden:  $n_+ \times n_+$ ;  $k_{11}$ ,  $k_{12}$  y  $k_{22}$  son submatrices de la matriz global de rigidez,  $K$ , de órdenes respectivos  $n_+ \times n_+$ ,  $n_+ \times n_0$  y  $n_0 \times n_0$ ; y  $x_1$  y  $x_2$  son subvectores de desplazamientos generalizados con  $n_+$  y  $n_0$  elementos. El símbolo  $\Omega$  representa cual-

quier matriz/vector idénticamente nulos. En la expresión anterior se han indicado en negritas los órdenes matriciales, como haremos en toda la exposición posterior, para facilitar el seguimiento de las formulaciones.

El sistema (1.2) se descompone en dos ecuaciones separadas

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = f_1 \quad (1.3.1)$$

$$k_{12}^T x_1 + k_{22} x_2 = f_2 \quad (1.3.2)$$

La segunda ecuación ordinaria representa las relaciones lineales arriba apuntadas. La operativa seguida es la previa eliminación de los desplazamientos  $x_2$ , para lo cual una condición necesaria y suficiente es la no singularidad de la matriz  $k_{22}$ . Si se cumple esta condición, se escribe

$$x_2 = -k_{22}^{-1} k_{12}^T x_1 + k_{22}^{-1} f_2 \quad (1.4)$$

luego, sustituyendo (1.4) en (1.3.1), se obtiene el siguiente sistema reducido en los desplazamientos  $x_1$

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 + (k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{12}^T) x_1 = \\ = f_1 - k_{12} k_{22}^{-1} f_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

que cumple ya la condición de definición positiva de la matriz de masa  $M_1$ , por lo que este sistema se trata en la forma habitual.

La no singularidad de la matriz  $k_{22}$  se ha revelado como una condición necesaria y suficiente para la obtención de la relación (1.4), explícita en los desplazamientos dependientes  $x_2$ . Además, la estabilidad dinámica del sistema (1.5) requiere, como condición necesaria y suficiente, la definición positiva de la matriz virtual de rigidez del sistema reducido, o sea la matriz  $k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{12}^T$ . Ambas condiciones se cumplen si se verifica la definición positiva de  $K$ , lo que supone una condición suficiente, no necesaria (ver Lemas 1A y 2A del Apéndice).

Para finalizar esta exposición preliminar, señalaremos que el sistema (1.3) incluye dos situaciones extremas, en las que permanece, únicamente, una u otra de las dos ecuaciones (1.3.1) y (1.3.2). Si se cumple  $n_0 = 0$ , la matriz de masa del sistema global es definida positiva y la segunda ecuación es superflua, encontrándonos en la hipótesis tratada en la Ref. [1]. Por el contrario, si admitimos  $n_+ = 0$ , el sistema físico puede asimilarse a un sistema virtual con matriz de masa nula, y nos encontramos en el supuesto del cálculo estático. La realidad física del cálculo estático corresponde, obviamente, a una aplicación de las cargas suficientemente lenta, y no a la anulación de la masa, aunque la analogía antes indicada mantiene su validez desde el punto de vista matemático operacional.

Siguiendo el proceso de la Ref. [1], el problema siguiente que analizamos es la consideración de restricciones lineales adicionales, que se expresan mediante el sistema ordinario

$$R^T x = d_m \quad (1.6)$$

donde  $R$  es una matriz de orden  $n \times m$  y rango  $m$ , con  $m < n$ ;  $R^T$  es la matriz traspuesta de  $R$ , de orden  $n \times m$ ; y  $d_m$  es un vector conocido de orden  $m \times 1$ .

La relación (1.6) se aplica a cualesquiera desplazamientos, con o sin masa, manteniendo la misma ordenación de los desplazamientos aplicada en (1.2), es decir, precediendo los desplazamientos con masa a los desplazamientos sin masa.

La incidencia de las restricciones (1.6) en el comportamiento del sistema no resulta inmediata y el análisis de sus implicaciones requiere nuevas formulaciones, algo más complicadas que las desarrolladas en [1]. La solución de este problema estructural puede efectuarse, igualmente, mediante aplicación discrecional de cualquiera de los dos métodos anteriores, de reducción y asintótico, cuyos desarrollos alternativos, y equivalencia de tratamiento, seguiremos analizando en detalle, resaltando principalmente las implicaciones teóricas. Debido a la extensión de los desarrollos, el presente artículo se dedica al método de reducción, posponiendo para presentación ulterior el desarrollo del método penalty y las comparaciones finales.

Así pues, en la Sección 2, a continuación, se describe el método usual de reducción a partir de la previa aplicación de la transformación contragradiente (Ref. [2]), para eliminación de  $m$  grados de libertad que resultan condicionados por las restricciones (1.6). La solución subsiguiente del sistema reducido resultante, podrá realizarse, o bien directamente, si resultara en la forma ya tratada en la aplicación de este método en la Ref. [1], o mediante aplicación sucesiva del método de condensación estática, antes aplicado al sistema (1.2), esto es, según la naturaleza, no singular o singular, de la matriz virtual de masa del sistema reducido resultante del paso primero. En el análisis que efectuaremos en cada sub-Sección 2.1 y 2.2, se establecerán las condiciones y operativa detallada en uno y otro caso.

La Sección 3 se dedica a la consideración de algunos casos particulares de peculiar interés en las aplicaciones prácticas, entre los que se incluye el cálculo estático.

En relación con esta última inclusión, observamos de nuevo, que si bien el concepto de matriz de masa, eje central de la exposición, está directamente asociado al cálculo dinámico, el cálculo estático puede considerarse una extensión del anterior, en el supuesto teórico de matriz de masa nula, es decir para el valor  $n_+ = 0$ , que incide, por tanto, en la hipótesis aquí considerada. El cálculo estático de cualquier estructura condicionada, ya consi-



derado en la Ref. [1], se trata así nuevamente, en la Sección 3, como un ejemplo particular más, de estructuras con matriz de masa singular, en este caso nula.

A lo largo de los desarrollos que se presentan, se efectúa una aplicación profusa de algunas propiedades del algebra lineal que se resumen en Apéndice, como simples enunciados de Lemas, indicándose, en cada caso, la referencia correspondiente. Como limitación al interés específico estructural, la definición de cada Lema se considera información suficiente, con exclusión de su demostración.

## 2. METODO DE REDUCCION

Como hemos indicado en la Introducción, en el procedimiento de reducción se opera, en primer término, de forma similar al caso de matriz global definida positiva, esto es, expresando el vector global de desplazamientos generalizados en función de desplazamientos independientes asociados únicamente a las relaciones (1.6), e introduciendo esta expresión en la formulación del principio variacional, obteniéndose, en resumen, el sistema indicado en la Ref. [1]

$$(S^T MS)x''_{n-m} + (S^T KS)x_{n-m} = S^T f - S^T T d_m \quad (2.1)$$

Las matrices  $S$  y  $T$  son las matrices coeficientes en la siguiente expresión del vector  $x$  de los desplazamientos globales, en función del vector  $x_{n-m}$  de los desplazamientos independientes, que se deriva directamente de las relaciones (1.6)

$$x = Sx_{n-m} + Td_m \quad (2.2)$$

Las matrices  $S$  y  $T$  tienen órdenes respectivos  $n \times (n-m)$  y  $n \times m$ , y rangos  $n-m$  y  $m$ , y están asociadas a una partición adecuada de  $R$ , explicitando la submatriz regular de orden superior que representa el coeficiente del subvector  $x_m$  de desplazamientos dependientes en (1.6). Las expresiones particularizadas de estas matrices, en las que, a diferencia de las deducidas para aquellas en la Ref. [1], debe tenerse en cuenta la nueva ordenación de los desplazamientos, se precisan después, refiriéndonos primero a algunas observaciones de interés general sobre el sistema (2.1).

El tratamiento posterior de este sistema reducido depende, en primer término, de la no singularidad o singularidad de la matriz de masa virtual, esto es de la matriz  $S^T MS$ , en adelante  $M_R$ , ya que, si no es regular, debe efectuarse, como paso inmediato, la operación de condensación, similar a la efectuada en (1.4), para eliminación de los grados de libertad que puedan resultar con masa virtual asociada nula. Las consideraciones siguientes se basan en la naturaleza semidefinida positiva de  $M$ :

Las matrices  $S$  y  $M$  tienen rangos respectivos

$n-m$  y  $m_+$ , luego la matriz  $M_R$ , de orden  $(n-m) \times (n-m)$ , tendrá rango no superior al menor de aquellos valores. En consecuencia, si se cumple  $n_+ < n-m$ , o bien  $n_0 > m$ , la matriz  $M_R$  es una matriz singular, mientras una condición necesaria, no suficiente, para la no singularidad es  $n_+ \geq n-m$ , o también  $n_0 \leq m$ . La singularidad eventual de la matriz  $M_R$  depende, en definitiva, de relaciones entre los vectores columna de las matrices  $M$  y  $S$ , esto es, de la posición relativa de los dos subespacios, de dimensiones respectivas  $n_+$  y  $n-m$ , definidos por cada conjunto de vectores columna, de una y otra matriz.

Posteriormente, analizaremos en detalle el rango de la matriz  $M_R$  y deduciremos las condiciones que determinan uno y otro caso de no singularidad o singularidad de esta matriz, anticipando ya, únicamente, que la matriz  $M_R$  no se anula si la matriz  $M$  no es nula, es decir, solamente en el supuesto de cálculo estático.

En cualquiera de los casos del cálculo dinámico que se produzcan, la matriz  $S^T MS$  es una matriz hermítica, con autovalores no negativos. Ello se demuestra a partir de la descomposición factorial de  $M$ , deducida de la forma producto Cholesky de la matriz definida positiva  $M_1$ , esto es

$$M = \begin{matrix} n_+ \\ n_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} M_1 & \Omega \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} = \begin{matrix} n_+ \\ n_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} LL^T & \Omega \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} = \begin{matrix} n_+ \\ n_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} L \\ \Omega \end{bmatrix} |L^T \Omega| = \varrho \varrho^T \quad (2.3)$$

luego

$$S^T MS = S^T \varrho \varrho^T S = (S^T \varrho) (S^T \varrho)^T \quad (2.4)$$

donde  $L$  es una matriz triangular superior no singular, de orden  $n_+ \times n_+$ , y  $\varrho$  es de orden  $n \times n_+$  y rango  $n_+$ .

El seguimiento del análisis requiere ahora nuevas particiones ordenadas de los vectores  $x_1$  y  $x_2$ , que se efectúan en la forma siguiente

$$x_1 = \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

$$x_2 = \begin{matrix} e_0 \\ m_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^2 \\ x_2^1 \end{bmatrix} \quad (2.5.2)$$

donde

$x_1^1$  es el vector de  $m_+$  desplazamientos con masa, considerados independientes en las relaciones (1.6).

$x_1^2$  es el vector de  $e_+$  desplazamientos con masa,

considerados dependientes en las relaciones (1.6).  $x_2^2$  es el vector de  $e_0$  desplazamientos sin masa, considerados dependientes en las relaciones (1.6).  $x_2^1$  es el vector de  $m_0$  desplazamientos sin masa, considerados independientes en las relaciones (1.6).

Resaltemos que en las notaciones anteriores, los subíndices 1 y 2 se refieren, respectivamente, a desplazamientos con/sin masa, y los superíndices 1 y 2 a desplazamientos independientes/dependientes, cumpliéndose, por tanto

$$e_+ + e_0 = m \quad (2.6.1)$$

$$m_+ + m_0 = n \cdot m \quad (2.6.2)$$

$$m_+ + e_+ = n_+ \quad (2.6.3)$$

$$m_0 + e_0 = n_0 \quad (2.6.4)$$

La matriz  $R^T$ , coeficiente del vector de desplazamientos en el sistema (1.6), debe expresarse también en forma particionada, en correspondencia con la ordenación anterior de desplazamientos. Para simplicidad de las fórmulas, podemos suponer, además, sin pérdida de generalidad, que la submatriz no singular, coeficiente del subvector de desplazamientos dependientes, es una matriz unidad, esto es, se tiene la matriz particionada siguiente

$$R^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 & m_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_+ \\ e_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_{11}^T & I_1 & \Omega & R_{21}^T \\ R_{12}^T & \Omega & I_2 & R_{22}^T \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.7)$$

Como se indica con el convenio de señalamiento de órdenes matriciales, las submatrices de la expresión particionada de la matriz  $R$  tienen los órdenes siguientes

$$R_{11} (m_+ x e_+) \quad (2.8.1)$$

$$R_{12} (m_+ x e_0) \quad (2.8.2)$$

$$R_{21} (m_0 x e_+) \quad (2.8.3)$$

$$R_{22} (m_0 x e_0) \quad (2.8.4)$$

$$I_1 (e_+ x e_+) \quad (2.8.5)$$

$$I_2 (e_0 x e_0) \quad (2.8.6)$$

Descomponiendo también el vector  $d_m$  en sendos subvectores  $d_1$  y  $d_2$ , con  $e_+$  y  $e_0$  elementos, la transformación (2.2) de los desplazamientos libres a los desplazamientos globales, se escribe

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} m_+ & m_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} I & \Omega \\ -R_{11}^T & -R_{21}^T \\ -R_{12}^T & -R_{22}^T \\ \Omega & I \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_2^1 \\ x_2^1 \end{matrix} + \begin{matrix} & 1 \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \Omega \\ d_1 \\ d_2 \\ \Omega \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.9)$$

Las matrices  $S$  y  $T$  correspondientes a la indicada ordenación de variables, toman las siguientes expresiones, equivalentes a las expresiones (11) y (12) en la Ref. [1], suponiendo en aquellas  $e_0 = m_0 = 0$ , y teniendo además en cuenta la nueva ordenación de desplazamientos, y que la matriz regular  $R_m$  es ahora una matriz unidad:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_+ & m_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} I & \Omega \\ R_{11}^T & -R_{21}^T \\ -R_{12}^T & -R_{22}^T \\ \Omega & I \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.10)$$

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_+ & e_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \Omega & \Omega \\ I & \Omega \\ \Omega & I \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.11)$$

que cumplen relaciones análogas a las (13) y (14) en la Ref. [1], esto es

$$R^T S = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 & m_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_{11}^T & I_1 & \Omega & R_{21}^T \\ R_{12}^T & \Omega & I_2 & R_{22}^T \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} m_+ & m_0 \\ e_+ & e_0 \\ e_0 & \Omega \\ m_0 & I \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_+ & m_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} I & \Omega \\ R_{11}^T & -R_{21}^T \\ R_{12}^T & R_{22}^T \\ \Omega & I \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_+ & m_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_{11}^T & R_{11}^T & -R_{21}^T + R_{21}^T \\ R_{12}^T - R_{12}^T & -R_{22}^T + R_{22}^T \end{bmatrix} \end{matrix} = \Omega \quad (2.12)$$

$$R^T T = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_+ & e_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_{11}^T & I_1 & \Omega & R_{21}^T \\ R_{12}^T & \Omega & I_2 & R_{22}^T \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 \\ e_+ & \Omega & \Omega \\ e_0 & I_1 & \Omega \\ e_0 & \Omega & I_2 \\ m_0 & \Omega & \Omega \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_+ & e_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} I_1 & \Omega \\ \Omega & I_2 \end{bmatrix} \end{matrix} = I_m \quad (2.13)$$

Sustituyendo la expresión (2.10), la matriz virtual de masa del sistema reducido (2.1), o sea, la matriz que hemos denominado  $\mathbf{M}_R$ , que es de orden  $(m_+ + m_0) \times (m_+ + m_0)$ , o también  $(n-m) \times (n-m)$ , resulta

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} = \begin{matrix} m_+ & e_+ \\ m_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{11} \\ \Omega & -\mathbf{R}_{21} \end{bmatrix} \begin{matrix} n_+ & m_+ \\ n_+ \mathbf{M}_1 & e_+ \end{matrix} \begin{bmatrix} m_+ & m_0 \\ \mathbf{I} & \Omega \\ -\mathbf{R}_{11}^T & -\mathbf{R}_{21}^T \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Como hemos comentado con anterioridad, la condición, no singular o singular, de la matriz  $\mathbf{M}_R$ , determina dos situaciones distintas en la resolución subsiguiente del problema estructural, que consideramos a continuación.

### 2.1. Caso de matriz $\mathbf{M}_R$ regular ( $|\mathbf{M}_R| \neq 0$ )

El análisis del rango de la matriz  $\mathbf{M}_R$  se efectúa fácilmente a partir de la descomposición factorial del segundo miembro de la expresión (2.14). En efecto, puesto que la matriz central del producto es definida positiva, y las otras dos matrices factores son matrices traspuestas, el rango de  $\mathbf{M}_R$  coincide con el rango de cada una de las matrices traspuestas, esto es

$$\text{rango}(\mathbf{M}_R) = \text{rango} \left\{ \begin{matrix} m_+ & e_+ \\ m_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{11} \\ \Omega & -\mathbf{R}_{21} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.15)$$

y, de la forma particular de la matriz del segundo miembro, se deduce también

$$\text{rango}(\mathbf{M}_R) = m_+ + \text{rango}(\mathbf{R}_{21}) \quad (2.16)$$

Puesto que  $\mathbf{M}_R$  es de orden  $(m_+ + m_0) \times (m_+ + m_0)$ , será una matriz regular si se cumple

$$r(\mathbf{M}_R) = m_+ + \text{rango}(\mathbf{R}_{21}) = m_+ + m_0 \quad (2.17)$$

o sea, si se cumple

$$\text{rango}(\mathbf{R}_{21}) = m_0 \quad (2.18)$$

condición que requiere, a su vez, la siguiente condición necesaria, no suficiente

$$m_0 \leq e_+ \quad (2.19)$$

En definitiva, si se cumple la condición (2.17), o sea, la igualdad (2.18), la matriz  $\mathbf{M}_R$  es no singular y definida positiva, y el sistema reducido (2.1)

se resuelve ya directamente, sin necesidad de ninguna nueva operación de condensación. El número de variables independientes,  $n-m$ , o bien  $m_+ + m_0$ , coincidirá con el número de frecuencias del sistema, supuesto estable, como en el caso de matriz global de masa definida positiva, tratado en la Ref. [1].

Observemos que esta situación se producirá, por ejemplo, si  $m_0 = 0$ , es decir, si no existen desplazamientos dominantes con masa nula, en cuyo caso las matrices  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{R}_{22}$  son matrices nulas, y la matriz  $\mathbf{M}_R$  resulta

$$\mathbf{M}_R = \begin{matrix} m_+ & e_+ \\ (n-m) & m_+ \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{11} \\ \mathbf{I} & \Omega \\ -\mathbf{R}_{11}^T & -\mathbf{R}_{11}^T \end{bmatrix} \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \end{matrix} \begin{bmatrix} m_+ \\ \mathbf{I} \\ -\mathbf{R}_{11}^T \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

y la matriz de rigidez del sistema reducido, que llamaremos  $\mathbf{K}_R$

$$\mathbf{K}_R = \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 & n \\ m_+ & e_+ & e_0 & n \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{11} & -\mathbf{R}_{12} \\ -\mathbf{R}_{11}^T & -\mathbf{R}_{11}^T & -\mathbf{R}_{12}^T \\ -\mathbf{R}_{12}^T & -\mathbf{R}_{12}^T & -\mathbf{R}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} m_+ \\ \mathbf{I} \\ -\mathbf{R}_{11}^T \\ -\mathbf{R}_{12}^T \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Para finalizar el análisis de la hipótesis (2.18), que incluye como caso particular el arriba indicado, con  $m_0 = 0$ , para la estabilidad de la solución estructural, deberá ser definida positiva la matriz  $\mathbf{K}_R$  del caso general

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} = \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 & m_0 \\ m_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{11} & -\mathbf{R}_{12} & \Omega \\ \Omega & \mathbf{R}_{21} & -\mathbf{R}_{22} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ n \mathbf{K} \end{matrix} \begin{matrix} m_+ \\ e_+ \\ e_0 \\ m_0 \end{matrix} \begin{bmatrix} m_+ & m_0 \\ \mathbf{I} & \Omega \\ -\mathbf{R}_{11}^T & -\mathbf{R}_{21}^T \\ -\mathbf{R}_{12}^T & -\mathbf{R}_{22}^T \\ \Omega & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Una condición suficiente, no necesaria, para que  $\mathbf{K}_R$  sea definida positiva, es que la matriz  $\mathbf{K}$  sea definida positiva. Asimismo, una condición necesaria, pero no suficiente, es que el número de autovalores positivos y *a fortiori* su rango, sean ambos no inferiores a  $n-m$  (Lema 3A).

### 2.2. Caso de matriz $\mathbf{M}_R$ singular ( $|\mathbf{M}_R| = 0$ )

Pasemos ya a la hipótesis más general, en que no se verifica la condición (2.18), es decir, al supuesto

$$r = \text{rango}(\mathbf{R}_{21}) < m_0, m_0 \neq 0 \quad (2.23)$$

En adelante, retendremos la designación del valor  $r$  para el rango de la matriz  $R_{21}$ . En la hipótesis (2.23), la matriz  $M_R$  es todavía una matriz singular, por lo que, en general, será preciso efectuar sobre el sistema (2.1) las dos operaciones sucesivas siguientes: en primer lugar, la reducción de la matriz  $M_R$  a una forma canónica reducida, similar a la de la matriz de masa global  $M$ , en el sistema (1.2), mediante una transformación congruente que detallaremos después (Lema 4A). Y, en segundo lugar, la operación habitual de condensación de las variables no correspondientes a la submatriz principal regular, cuyo número, que designamos  $p_0$ , resulta

$$\begin{aligned} p_0 &= (m_+ + m_0) - \text{rango}(M_R) = \\ &= (m_+ + m_0) - (m_+ + r) = m_0 - r \end{aligned} \quad (2.24)$$

A su vez, el número final de frecuencias del sistema, llamado  $n_f$ , toma el valor

$$n_f = (m_+ + m_0) - p_0 = m_+ + r \quad (2.25)$$

El anterior valor  $n_f$  es el rango de la matriz virtual de masa del sistema resultante de las dos reducciones efectuadas. A partir de la expresión (2.25) se comprueba fácilmente que esta matriz no se anula si la matriz global de masa del sistema no es nula. En efecto, la anulación de  $n_f$  requiere que se anulen simultáneamente  $m_+$  y  $r$ . Recordemos, además, que la matriz  $R_{21}$  expresa la dependencia de los  $e_+$  desplazamientos dependientes con masa, de los  $m_0$  desplazamientos sin masa. Puesto que  $m_0 \neq 0$ , la anulación simultánea de  $m_+$  y de  $r$  implica la anulación adicional de  $e_+$ , de manera que no existen desplazamientos con masa, y la matriz  $M$  es nula. Nos encontramos, pues, en esta hipótesis, en el supuesto de cálculo estático de la estructura condicionada, que fué ya analizado en detalle en la Ref. [1]. En la Sección 3 se hace una nueva referencia al problema estático, considerado como caso hipotético particular del caso general de matriz de masa singular, en este caso nula.

Centrándonos, pues, nuevamente, en el problema dinámico, es decir, con matrices de masa, global y reducida, no nulas, recordaremos que, puesto que se cumple en todos los casos la relación

$$r = \text{rango } R_{21} \leq \min(m_0, e_+) \quad (2.26)$$

una condición suficiente, no necesaria, para que  $M_R$  sea matriz singular, es la relación

$$e_+ < m_0 \quad (2.27)$$

Para continuar el análisis de este supuesto, definiremos la transformación congruente de  $M_R$ , antes mencionada, que la reduce a la forma canónica. Para ello aplicaremos la siguiente expresión general de la matriz  $R_{21}$ , que cumple la relación (2.26), según el Lema 4A.

$$\begin{aligned} R_{21} &= \begin{matrix} r & e_+ - r \\ m_0 - r \end{matrix} \begin{bmatrix} u & v \\ w & wu^{-1}v \end{bmatrix} = \\ &= \begin{matrix} r & e_+ - r \\ m_0 - r \end{matrix} \begin{bmatrix} r & \\ & u^{-1}v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ & u^{-1}v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde  $u$  es una submatriz regular, de orden  $rxr$ , y  $v$  y  $w$  son submatrices de órdenes respectivos  $rx(e_+ - r)$  y  $(m_0 - r)xr$ , habiéndose efectuado, nuevamente, una reordenación adecuada de las variables dentro de cada uno de los dos vectores  $x_1^{21}$  y  $x_2^{11}$ , es decir, considerando nuevos subgrupos con las denominaciones y número de elementos siguientes

$$r = \text{número de variables } x_1^{21} \quad (2.29.1)$$

$$e_+ - r = \text{número de variables } x_1^{22} \quad (2.29.2)$$

$$r = \text{número de variables } x_2^{11} \quad (2.29.3)$$

$$m_0 - r = \text{número de variables } x_2^{12} \quad (2.29.4)$$

En la formulación (2.28), se supone que la matriz  $R_{21}$  no es nula, esto es  $r \neq 0$ , excluyendo, por el momento, el caso de matriz  $R_{21}$  nula, con  $m_0 \neq 0$ , que será también objeto de consideración posterior.

Haciendo, ahora, una partición paralela de la matriz  $R_{11}$ , atendiendo a los subgrupos  $x_1^{21}$  y  $x_1^{22}$ , la matriz  $M_R$  se escribe, según (2.14)

$$\begin{aligned} M_R &= \begin{matrix} m_+ & r & m_0 - r \\ r & & \\ m_0 - r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & -R_{11}^1 & -R_{11}^2 \\ \Omega & -u & -v \\ \Omega & -w & -wu^{-1}v \end{bmatrix} \begin{matrix} n_+ \\ n_+ \\ n_+ \end{matrix} M_1 \\ &= \begin{matrix} m_+ & r & m_0 - r \\ m_+ & r & m_0 - r \\ r & & \\ e_+ - r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ -R_{11}^{1T} & -u^T & -w^T \\ -R_{11}^{2T} & -v^T & -v^T(u^{-1})^T w^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

La transformación equivalente, buscada, de la matriz  $M_R$ , se obtiene a partir de la siguiente identidad matricial

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & r & m_0-r \\ r & & \\ m_0-r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ \Omega & I & \Omega \\ \Omega & -wu^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{matrix} m_+ & r & e_+-r \\ m_+ & r & e_+-r \\ r & & \\ m_0-r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & -R_{11}^1 & -R_{11}^2 \\ \Omega & -u & -v \\ \Omega & -w & -wu^{-1}v \end{bmatrix} \\ & = \begin{matrix} m_+ & r & e_+-r \\ m_+ & r & e_+-r \\ r & & \\ m_0-r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & -R_{11}^1 & -R_{11}^2 \\ \Omega & -u & -v \\ \Omega & \Omega & \Omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Teniendo en cuenta (2.30) y (2.31), se obtiene finalmente la transformación canónica congruente de  $M_R$ , buscada

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & r & m_0-r \\ r & & \\ m_0-r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ \Omega & I & \Omega \\ \Omega & -wu^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{matrix} n_+ & m_+ & r & m_0-r \\ n_+ & m_+ & r & m_0-r \\ r & & & \\ m_0-r & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ \Omega & I & -(u^{-1})^T w^T \\ \Omega & \Omega & I \end{bmatrix} \\ & = \begin{matrix} m_+ & r & e_+-r \\ m_+ & r & e_+-r \\ r & & \\ m_0-r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & -R_{11}^1 & -R_{11}^2 \\ \Omega & u & -v \\ \Omega & \Omega & \Omega \end{bmatrix} = \begin{matrix} n_+ & m_+ & r & m_0-r \\ n_+ & M_1 & r & \\ e_+-r & & & \\ & & \Omega & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & \Omega \\ -R_{11}^1 & -u^T \\ -R_{11}^2 & v^T \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde la submatriz principal superior regular, en el segundo miembro de (2.32), que tiene orden  $(m_+ + r) \times (m_+ + r)$ , es definida positiva, por ser  $M_1$  definida positiva y  $u$  no singular.

Puesto que los vectores de desplazamientos restantes en el sistema reducido son los  $x_1^1$  y  $x_2^1$ , se deduce, en resumen, el siguiente cambio de base que permite llevar el sistema (2.1) a la forma adecuada para aplicar el procedimiento usual de condensación

$$\begin{matrix} 1 & m_+ & r & m_0-r & 1 \\ m_+ & \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} & & & m_+ & \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{bmatrix} \\ r & & & & r & \\ m_0-r & & & & m_0-r & \begin{bmatrix} y_2^{12} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & r & m_0-r \\ r & & \\ m_0-r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ \Omega & I & -(u^{-1})^T w^T \\ \Omega & \Omega & I \end{bmatrix} \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & r & m_0-r \\ r & & \\ m_0-r & & \end{matrix} \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ y_2^{12} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

y, limitándonos a las variables  $x_2^1$

$$\begin{aligned} x_2^1 &= \begin{matrix} r & m_0-r \\ r & m_0-r \end{matrix} \begin{bmatrix} x_2^{11} \\ x_2^{12} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{matrix} r & m_0-r \\ r & m_0-r \end{matrix} \begin{bmatrix} I & -(u^{-1})^T w^T \\ \Omega & I \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ r & m_0-r \\ r & m_0-r \end{matrix} \begin{bmatrix} y_2^{11} \\ y_2^{12} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{matrix} r & m_0-r \\ r & m_0-r \end{matrix} \begin{bmatrix} I & -(u^{-1})^T w^T \\ \Omega & I \end{bmatrix} y_2^1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

En las expresiones (2.33) y (2.34), se comprueba que las únicas variables que cambian son las variables  $x_2^{11}$ , cuyo número es  $r$ , en tanto que las variables que deben eliminarse a continuación por condensación, son las variables  $y_2^{12}$ , o bien  $x_2^{12}$ , cuyo número es  $m_0 - r$ . El cambio de variables que hay que realizar, restringido, como decimos, a los desplazamientos  $x_2^{11}$ , se expresa, en resumen

$$x_2^{11} = y_2^{11} - (u^{-1})^T w^T x_2^{12} \quad (2.35)$$

Completaremos el análisis estructural mediante el estudio de la matriz virtual de rigidez resultante de las dos transformaciones ya efectuadas. Al efecto, la matriz de rigidez resultante del cambio (2.33), se obtiene aplicando la correspondiente transformación contragradiente, a la anterior matriz reducida  $K_R$ , es decir, a la matriz  $S^T K_S$ , dada, también en este caso, por la expresión (2.22). Llamando a esta nueva matriz  $K_C$ , resulta la expresión

$$K_C = \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ \Omega & I & \Omega \\ \Omega & u^{-1}w & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_{11} & -R_{12} & \Omega \\ \Omega & -R_{21} & -R_{22} & I \end{bmatrix} K_S$$

$$\begin{bmatrix} I & \Omega \\ -R_{11}^T & -R_{21}^T \\ -R_{12}^T & R_{22}^T \\ \Omega & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ \Omega & I & -(u^{-1})^T w^T \\ \Omega & \Omega & I \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Recordando la expresión (1.4), que permite efectuar la condensación de desplazamientos sin masa en el problema no restringido, la condición para que pueda llevarse a cabo dicha operación de condensación de las variables  $y_2^{1,2}$ , es que sea no singular la siguiente submatriz principal inferior, de orden  $(m_0-r) \times (m_0-r)$ , de la matriz  $K_C$ , que denominamos  $k_R$

$$k_R = \begin{bmatrix} \Omega & -wu^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_{11} & -R_{12} & \Omega \\ \Omega & -R_{21} & -R_{22} & I \end{bmatrix} K \bullet$$

$$\bullet \begin{bmatrix} I & \Omega \\ R_{11}^T & -R_{21}^T \\ -R_{12}^T & -R_{22}^T \\ \Omega & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ -(u^{-1})^T w^T \\ I \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

o bien, operando en la expresión anterior

$$k_R = \begin{bmatrix} -wu^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega & -R_{21} & -R_{22} & I \end{bmatrix} K \bullet$$

$$\bullet \begin{bmatrix} \Omega \\ -R_{21}^T \\ -R_{22}^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ -(u^{-1})^T w^T \\ I \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.28) de la matriz  $R_{21}$ , se anula el siguiente producto

$$\begin{matrix} r & m_0-r & e_+ \\ m_0-r & \begin{bmatrix} -wu^{-1} & I \end{bmatrix} & m_0 R_{21} \end{matrix} =$$

$$= m_0-r \begin{bmatrix} r & m_0-r \\ -wu^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{matrix} r & e_+ \\ \begin{bmatrix} u & v \\ w & wu^{-1}v \end{bmatrix} & m_0-r \end{matrix} = \Omega \quad (2.39)$$

luego resulta, en definitiva, para la matriz  $k_R$

$$k_R = m_0-r \begin{bmatrix} r & m_0-r & e_0 & m_0 & n_0 \\ -wu^{-1} & I & m_0 & \begin{bmatrix} -R_{22} & I \end{bmatrix} & n_0 k_{22} \end{bmatrix} \bullet$$

$$\bullet \begin{matrix} e_0 & m_0 \\ \begin{bmatrix} -R_{22}^T \\ I \end{bmatrix} & r \end{matrix} \begin{matrix} m_0-r \\ \begin{bmatrix} -(u^{-1})^T w^T \\ I \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.40)$$

Una condición suficiente, no necesaria, para que la matriz  $k_R$  sea regular, es que sea definida positiva la submatriz  $k_{22}$ , es decir, la submatriz principal inferior de  $K$ , de orden  $n_0 \times n_0$ ; condición que se cumple, a su vez, si  $K$  es definida positiva.

Asimismo, una condición necesaria, no suficiente, es que el número de autovalores no nulos de  $k_{22}$ , y por tanto su rango, no sea inferior a  $m_0-r$  (Lema 3A).

Si se cumple la condición de no singularidad de la matriz  $k_R$ , la condición adicional finalmente requerida para la estabilidad del sistema dinámico, es que sea definida positiva la matriz virtual de rigidez del sistema reducido definitivo, una vez efectuada la condensación de las  $m_0-r$  variables  $y_2^{1,2}$ . Para analizar esta última condición, la matriz de rigidez indicada, de orden  $(m_++r) \times (m_++r)$ , que llamamos  $K_{RC}$ , se escribe, según (1.5), en la forma siguiente:

$$K_{RC} = AK A^T - AK B^T (BKB^T)^{-1} BKA^T =$$

$$= AK [I - B^T (BKB^T)^{-1} BK] A^T \quad (2.41)$$

donde

$$A = \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ \Omega & I & \Omega \end{bmatrix} & m_0 \end{matrix} \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 & m_0 \\ \begin{bmatrix} I & -R_{11} & -R_{12} & \Omega \\ \Omega & -R_{21} & R_{22} & I \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.42)$$

$$B = \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_0-r & \begin{bmatrix} \Omega & -wu^{-1} & I \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 & m_0 \\ \begin{bmatrix} I & -R_{11} & R_{12} & \Omega \\ \Omega & -R_{21} & -R_{22} & I \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.43)$$

Operando en el segundo miembro de (2.42), se obtiene la siguiente forma alternativa de A

$$A = \begin{matrix} m_+ & e_+ & e_0 & m_0 \\ m_+ & \begin{bmatrix} I & -R_{11} & -R_{12} & \Omega \end{bmatrix} \\ r & \begin{bmatrix} r p_0 & e_+ & r p_0 & e_0 & r p_0 \\ \Omega & -[I \ \Omega] m_0 R_{21} & -[I \ \Omega] m_0 R_{22} & [I \ \Omega] \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.44)$$

De la expresión anterior se deriva que  $\mathbf{A}$  contiene una submatriz unidad, de orden  $(m_+ + r) \times (m_+ + r)$ ; luego el rango de  $\mathbf{A}$  es  $m_+ + r$ .

Operando igualmente en el segundo miembro de (2.43), resulta la siguiente expresión, más sencilla, de  $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{matrix} r & m_0-r & n_+ & e_+ & m_0 & e_0 \\ m_0-r & [-wu^{-1} & I] & m_0 & [\Omega & -R_{21} & -R_{22} & I] \end{matrix} = \\ &= \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r & m_0 & e_0 \\ m_0-r & [\Omega & [-wu^{-1} & I] & m_0 & [-R_{22} & I]] \end{matrix} \quad (2.45) \end{aligned}$$

A partir de la expresión (2.45), se comprueba nuevamente el resultado (2.40) obtenido para la matriz  $\mathbf{k}_R$ , equivalente al producto  $\mathbf{BKB}^T$ , que debe ser matriz regular.

En primer término, aplicando el Lema 2A, una condición suficiente, no necesaria, para la definición positiva de  $\mathbf{K}_{RC}$  es la definición positiva de  $\mathbf{K}$ .

Estudiemos a continuación el supuesto en que  $\mathbf{K}$  no es definida positiva. La matriz  $\mathbf{K}_{RC}$ , según (2.41), tiene los mismos autovalores no nulos que la siguiente matriz,  $\mathbf{K}_{RC}^*$ , que es una transformada cíclica del mismo producto matricial (Lema 6A)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{RC}^* &= [\mathbf{I} - \mathbf{B}^T(\mathbf{BKB}^T)^{-1}\mathbf{BK}]\mathbf{A}^T\mathbf{AK} = \\ &= [\mathbf{I} \quad \mathbf{B}^T\mathbf{k}_R^{-1}\mathbf{BK}]\mathbf{A}^T\mathbf{AK} \quad (2.46) \end{aligned}$$

Consideremos, ahora, la matriz primer factor del producto anterior. Primero, la matriz  $\mathbf{B}^T(\mathbf{BKB}^T)^{-1}\mathbf{BK}$  tiene los mismos autovalores no nulos que la matriz transformada mediante producto cíclico  $(\mathbf{BKB}^T)^{-1}\mathbf{BKB}^T = \mathbf{I}_{m_0-r}$ ; es decir, la primera matriz tiene  $m_0-r$  autovalores iguales a la unidad y  $n - (m_0-r) = m_+ + e_+ + e_0 + r$  autovalores nulos.

Por consiguiente, la matriz primer factor en (2.46) tiene  $m_0-r$  autovalores nulos y  $m_+ + e_+ + e_0 + r$  autovalores iguales a la unidad, y es, por tanto, definida no negativa. A su vez, puesto que el rango de  $\mathbf{A}$  es  $m_+ + r$ , el producto  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  tiene  $m_+ + r$  autovalores positivos y  $m_0 + e_+ + e_0 - r$  autovalores nulos. En consecuencia, el producto de las dos matrices anteriores será una matriz definida no negativa, de rango inferior a  $m_+ + r$ . Como resumen de estas consideraciones, la matriz  $\mathbf{K}$  debe ser una matriz de rango no inferior a  $m_+ + r$ , con, al menos,  $m_+ + r$  autovalores positivos, lo que constituye una condición suficiente, no necesaria, para la estabilidad de la solución.

### 3. ESTUDIO DE CASOS PARTICULARES

A partir de las expresiones derivadas en la solución del caso más general en la Sección 2.2 anterior, es interesante la deducción de la/s condición/es que deban verificarse para que sea superflua la operación del cambio de variables (2.35), de manera que el sistema quede dispuesto para la operación de condensación, si resulta precisa, una vez obtenida la expresión (2.14), o la más detallada (2.30), de la matriz  $\mathbf{M}_R$ .

Teniendo en cuenta (2.14) y (2.28), o bien directamente (2.30), la única condición necesaria y suficiente es, obviamente, que se anule la matriz  $\mathbf{w}$ , esto es, que  $\mathbf{R}_{21}$  sea una matriz de la forma

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{matrix} r & e_+-r \\ m_0-r & \begin{bmatrix} u & v \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Haciendo  $\mathbf{w} = \Omega$  en (2.30), resulta, en efecto

$$\mathbf{M}_R = \begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & \begin{bmatrix} I & -R_{11}^1 & -R_{11}^2 \\ \Omega & -u & -v \\ \Omega & \Omega & \Omega \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_+ \\ n_+M_1 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & \begin{bmatrix} I & \Omega & \Omega \\ -R_{11}^{1T} & -u^T & \Omega \\ -R_{11}^{2T} & -v^T & \Omega \end{bmatrix} & = \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} m_+ & r & e_+-r \\ m_+ & \begin{bmatrix} I & -R_{11}^1 & -R_{11}^2 \\ \Omega & -u & -v \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_+ \\ n_+M_1 \end{matrix} \\ m_0-r & & \Omega \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m_+ & r & m_0-r \\ m_+ & \begin{bmatrix} I & \Omega \\ -R_{11}^{1T} & -u^T \\ -R_{11}^{2T} & -v^T \end{bmatrix} & \begin{matrix} \Omega \\ \Omega \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.2)$$

que coincide con la transformada congruente obtenida en (2.32) en el caso general, ya que, tanto aquella transformación, como el cambio de variables (2.35), resultan, ahora, transformaciones idénticas.

La matriz de rigidez  $K_C$ , obtenida en (2.36), resultante del cambio (2.35), coincide también con la matriz virtual de rigidez del sistema reducido, o sea la matriz  $K_R$ , dada por la expresión (2.22), debiendo verificarse la no singularidad de la submatriz principal  $k_R$ , que, en este caso se escribe, según (2.40)

$$k_R = m_0 \begin{bmatrix} r & m_0 - r & e_0 & m_0 & n_0 \\ \Omega & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{22} & I & 0 \end{bmatrix} k_{22} \quad (3.2)$$

$$k_R = m_0 \begin{bmatrix} e_0 & m_0 \\ m_0 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_{22}^T & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 & m_0 - r \\ r & \Omega \\ p_0 & I \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Un caso particular en el cual se verifica directamente la forma (3.1) de la matriz  $R_{21}$ , corresponde al valor anteriormente excluido  $r = 0$ , es decir, si la matriz  $R_{21}$  es una matriz nula, siendo además  $m_0 \neq 0$ , pues si  $m_0$  es nulo, estaríamos sin más en el caso 2.1, de matriz  $M_R$  del sistema reducido no singular y definida positiva, según hemos visto en (2.20). La anulación de la matriz  $R_{21}$  con  $m_0$  no nulo, que supone la anulación simultánea de las matrices  $u$ ,  $v$  y  $w$ , implica físicamente que los desplazamientos dependientes con masa, dependen únicamente de desplazamientos libres, igualmente con masa asociada, que es, efectivamente, una hipótesis realista en la práctica. Haciendo, pues,  $R_{21} = \Omega$  en la expresión (2.14) de  $M_R$ , se obtiene

$$M_R = m_+ \begin{bmatrix} m_+ & e_+ \\ I & -R_{11} \\ \Omega & \Omega \end{bmatrix} n_+ M_1 e_+ \begin{bmatrix} m_+ & m_0 \\ I & \Omega \\ -R_{11}^T & \Omega \end{bmatrix} =$$

$$= m_+ \begin{bmatrix} m_+ & e_+ & n_+ \\ m_+ [I & -R_{11}] & n_+ M_1 \\ \Omega & \Omega & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_+ \\ I \\ -R_{11}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

y la matriz virtual de rigidez, correspondiente a la misma reducción inicial de desplazamientos, es, según (2.22)

$$K_R = m_+ \begin{bmatrix} m_+ & e_+ & e_0 & m_0 \\ I & -R_{11} & -R_{12} & \Omega \\ \Omega & \Omega & -R_{22} & I \end{bmatrix} n K \quad (3.5)$$

En la expresión (3.4) se comprueba, una vez más, que el sistema queda dispuesto para efectuar directamente la operación de condensación. El número de variables que se eliminarán en esta operación, que hemos llamado  $p_0$ , es, ahora, según (2.24)

$$p_0 = m_0 \quad (3.6)$$

como se comprueba, además, directamente, en la forma (3.4) de la matriz  $M_R$ . La eliminación de los desplazamientos forzados, mantiene, por tanto, en este caso, el mismo número de grados de libertad libres, sin masa asociada, de la estructura no restringida.

En la hipótesis aquí analizada, esto es, si se cumplen simultáneamente  $r = 0$ ,  $m_0 \neq 0$ , la operación de condensación de las  $m_0$  variables  $y_2^{12}$ , podrá efectuarse si es no singular la matriz  $k_R$ , de orden  $m_0 \times m_0$ , dada por la expresión (2.40), después de hacer nula, en la misma, la matriz  $w$ , o bien, haciendo  $r = 0$  en (3.3), esto es, resultando

$$k_R = m_0 \begin{bmatrix} e_0 & m_0 & n_0 \\ -R_{22} & I & 0 \\ m_0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} e_0 \begin{bmatrix} m_0 \\ -R_{22} \\ I \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

y para que se cumpla la condición indicada, una condición suficiente, no necesaria, es que la submatriz  $k_{22}$  sea definida positiva, lo que se cumple, a su vez, si  $K$  es definida positiva; mientras una condición necesaria, no suficiente, es que dicha submatriz  $k_{22}$  tenga rango no inferior a  $m_0$ . Para la estabilidad de la solución, se deberá verificar, además, la definición positiva de la matriz virtual de rigidez del sistema definitivo, de orden  $m_+ \times m_+$ . Una condición necesaria, no suficiente, es que la



matriz  $\mathbf{K}$  tenga un número de autovalores positivo no inferior a  $m_+$  (Lema 3A). Asimismo, una condición suficiente, no necesaria, para dicha estabilidad, es, nuevamente, la definición positiva de  $\mathbf{K}$ .

Destacaremos el caso simple, presentado en la práctica, de anulación de la matriz  $\mathbf{R}_{21}$ , con  $m_0 \neq 0$ , en el que se verifica, además, la igualdad, uno a uno, de cada desplazamiento dependiente, con un desplazamiento libre asociado. En este supuesto, en el que se cumple la relación  $e_+ \leq m_+$ , ordenando adecuadamente los  $m_+$  desplazamientos libres con masa, la submatriz  $\mathbf{R}_{11}$  es de la forma

$$\mathbf{R}_{11} = \begin{matrix} e_+ \\ m_+ - e_+ \end{matrix} \begin{bmatrix} e_+ \\ -\mathbf{I} \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Llevando (3.8) a la expresión (3.4) de la matriz  $\mathbf{M}_R$ , se obtiene la forma siguiente de la matriz virtual de masa del sistema definitivo, después de efectuadas las dos operaciones de reducción y condensación, referido por tanto a las  $m_+$  variables libres con masa

$$\mathbf{M}_R^* = \begin{matrix} e_+ & m_+ - e_+ & e_+ \\ e_+ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Omega \\ \Omega & \mathbf{I} \end{bmatrix} & e_+ \\ m_+ - e_+ & \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \Omega \end{bmatrix} & e_+ \end{matrix} \begin{matrix} m_+ \\ m_+ \mathbf{M}_1 \end{matrix} \quad (3.9)$$

Si se aplica el criterio de masas concentradas, la matriz  $\mathbf{M}_1$  es diagonal, y la matriz  $\mathbf{M}_R^*$  resulta

$$\mathbf{M}_R^* = \begin{matrix} e_+ & m_+ - e_+ & e_+ \\ e_+ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Omega \\ \Omega & \mathbf{I} \end{bmatrix} & e_+ \\ m_+ - e_+ & \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \Omega \end{bmatrix} & e_+ \end{matrix} \begin{matrix} e_+ & m_+ - e_+ & e_+ \\ m_{11} & \Omega & \Omega \\ \Omega & m_{12} & \Omega \\ \Omega & \Omega & m_{13} \end{matrix} \cdot$$

$$= \begin{matrix} e_+ & m_+ - e_+ \\ e_+ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Omega \\ \Omega & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ m_+ - e_+ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Omega \\ \Omega & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix} e_+ & m_+ - e_+ \\ m_+ - e_+ & \begin{bmatrix} m_{11} + m_{13} & \Omega \\ \Omega & m_{12} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.10)$$

luego se suman las masas de los grados de libertad dependientes, a cada grado independiente asociado.

Llevando, igualmente, (3.8) a (3.5), se obtiene

la matriz virtual de rigidez del sistema después de la primera reducción, en los  $n_+$  desplazamientos independientes, cuya expresión omitimos.

En la Introducción nos hemos referido al cálculo estático como una extensión *a fortiori* de los desarrollos aplicados al cálculo dinámico en estructuras con matriz de masa singular, en el caso límite, teórico, de matriz nula de masa, es decir, si no existen desplazamientos con masa, o sea, si se anulan ambos valores  $m_+$  y  $e_+$ . En tal caso, desaparece la primera ecuación (1.3.1) de la solución general del problema dinámico, y se mantiene únicamente la ecuación ordinaria (1.3.2), referida al sistema global. En esta última ecuación, la submatriz  $\mathbf{k}_{12}^T$  se anula y la submatriz  $\mathbf{k}_{22}$  coincide con la matriz  $\mathbf{K}$  completa. Refiriéndonos al mismo caso del problema condicionado, se anulan las submatrices  $\mathbf{R}_{11}$ ,  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{R}_{22}$  en la ecuación de condición (2.7) y no es nula, únicamente, la submatriz  $\mathbf{R}_{22}$ . El problema se reduce al cálculo estático de una estructura con  $m_0$  grados de libertad, con una matriz virtual de rigidez dada por la expresión (3.7), y vector de fuerzas modificado, como indica el segundo miembro de (2.1), tal como fué analizado en la Ref. [1]. Para establecer esta analogía, debe tenerse en cuenta que la matriz regular, allí llamada  $\mathbf{R}_m$ , se ha tomado, en esta continuación, como matriz unidad de orden  $m \times m$ , sin pérdida de generalidad, y que se ha invertido la ordenación de los  $m_0/e_0$  grados de libertad, respectivamente independientes/dependientes.

Observemos, por último, que la hipótesis  $r = m_0$ , sea  $m_0$  nulo o no nulo, estudiada en la Sección 2.1, en la cual no son necesarias ninguna de las dos operaciones, ni la (2.33), de cambio de variables, ni la de condensación posterior, puesto que la matriz  $\mathbf{M}_R$ , dada por la expresión (2.14), es ya definida positiva, corresponde, en el caso más general, a la siguiente forma de la matriz  $\mathbf{R}_{21}$

$$\mathbf{R}_{21} = m_0 \begin{bmatrix} m_0 & e_+ - m_0 \\ u & v \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

que es, como era de suponer, una forma particular de (3.1), que integra como caso extremo el supuesto  $r = m_0 = 0$ .

#### 4. CONCLUSIONES

La aplicación efectuada del método de reducción, denominado comunmente algoritmo master-slave, al cálculo de estructuras condicionadas con matriz de masa singular, requiere, en el caso más general, la ejecución de las tres operaciones sucesivas siguientes:

En primer término, la eliminación de los  $m = e_+ + e_0$  grados de libertad dependientes, mediante aplicación directa de la transformación contragradoiente, deducida de las restricciones, en la definición del principio variacional. En segundo

lugar, una transformación lineal de un grupo determinado de variables, para reducción de la matriz virtual de masa del sistema reducido, resultante del paso primero, a su forma reducida canónica, mediante aplicación de una transformación congruente; y, por último, la eliminación por condensación estática, de los grados de libertad sin masa, aún incluidos en el sistema reducido, que pertenecen, por tanto, al grupo de variables iniciales independientes. El número final de variables libres que se eliminan en este último paso, que hemos llamado  $p_0$ , no es superior al número inicial  $m_0$ , de variables libres sin masa.

Se han considerado, especialmente, en primer término, condiciones particulares de reducción al paso primero, con  $p_0=0$ , es decir, de manera que el sistema reducido a los desplazamientos libres resulte con matriz virtual de masa definida positiva, y, en segundo lugar, de eliminación del paso segundo, con ejecución restringida, por tanto, a las operaciones primera y tercera. Un caso de interés de esta última situación, se produce si los desplazamientos dependientes con masa dependen únicamente de desplazamientos libres con masa, en el cual se mantiene el número de variables libres sin masa, en la condensación definitiva, es decir, se cumple  $p_0=m_0$ .

El problema del cálculo estático de estructuras condicionadas, se ha asociado también a una hipótesis teórica de matriz de masa singular (nula), con ejecución limitada al paso primero.

## APENDICE

Se resumen, en este Apéndice, en forma de enunciados de Lemas, algunas propiedades matriciales aplicadas en los desarrollos efectuados:

**Lema 1A:** Sea A una matriz cuadrada definida positiva:

Cualquier submatriz principal de A es definida positiva.

**Lema 2A:** Sea K una matriz cuadrada simétrica, escrita en la forma particionada siguiente

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12}^T & k_{22} \end{bmatrix}$$

siendo  $k_{22}$  una submatriz cuadrada no singular:

a) Se verifica la siguiente relación entre determinantes

$$|K| = |k_{22}| |k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{12}^T|$$

b) Si K es definida positiva, es también definida positiva la matriz  $k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{12}^T$ .

La formulación anterior ha sido utilizada para mayor facilidad expresiva. No obstante, se cumplen propiedades análogas para cualquier partición similar de K, con independencia de la posición de la submatriz principal elegida de K.

**Lema 3A:** Sea A una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ , y B una matriz rectangular, de orden  $n \times m$ , con  $m \leq n$  y rango m. El producto  $B^T A B$  es una matriz cuadrada, de orden  $m \times m$ :

a) El número de autovalores positivos del producto  $B^T A B$  no es superior al número de autovalores positivos de A.

b) Si la matriz A es definida positiva, la matriz  $B^T A B$  es definida positiva.

c) Si la matriz B es regular, es decir  $m = n$ , el producto  $B^T A B$  conserva el rango y signatura de A, es decir, comparten el mismo número de autovalores positivos, negativos y nulos.

**Lema 4A:** Sea A una matriz cuadrada, de orden  $n \times n$  y rango r, con  $r \leq n$ :

Existe una forma canónica reducida de A, con una submatriz principal superior regular, de orden  $r \times r$ , y nulos todos los elementos restantes, que se obtiene por aplicación de una transformación congruente.

**Lema 5A:** Sea  $R^*$  una matriz rectangular, de orden  $m \times e$  y rango r, con  $r \leq \min(m, e)$ :

Efectuando una ordenación adecuada de las filas/columnas de  $R^*$  mediante transformaciones elementales, la matriz resultante, que llamamos R, se escribe en la forma producto general

$$R = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} [I \quad u^{-1}v]$$

donde u es una matriz regular de orden  $r \times r$ , y v y w son matrices de órdenes respectivos  $(m-r) \times r$  y  $r \times (e-r)$ .

**Lema 6A:** Sea  $P = ABC$ . K una matriz cuadrada, que es el producto matricial de matrices rectangulares o cuadradas A, B, C,., K de órdenes diferentes, compatibles con la operación producto:

a) Cualquier producto deducido del anterior mediante permutaciones cíclicas de las matrices factores es una matriz cuadrada.

b) Todos los productos cíclicos así formados, comparten un conjunto común de autovalores no nulos, y sus autovalores restantes, si existen, son todos nulos.

## REFERENCIAS

[1] RUBIO, P., Método Penalty versus Método de Condensación en el cálculo lineal de estructuras con restricciones lineales entre desplazamientos, Hormigón y Acero (A.T.E.P), núm. 173, pp. 49-62, 4º trimestre, 1989.

[2] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, p. 353, McGraw-Hill, London, 1971.

## RESUMEN

Como continuación del planteamiento general del cálculo lineal de estructuras con restricciones lineales entre desplazamientos, presentado en la Ref. [1], para estructuras con matriz regular de masa, con formulación alternativa de ambos procedimientos, de reducción y asintótico, se desarrolla, en detalle, la aplicación del método de reducción al caso de estructuras, igualmente condicionadas, con matriz de masa singular. En un trabajo posterior, se desarrollará la aplicación paralela del método penalty, en el mismo supuesto.

El análisis que se efectúa, pone de manifiesto la existencia de dos situaciones, según se requiera o no la condensación adicional de grados de libertad del sistema reducido a los desplazamientos independientes.

Se consideran algunos ejemplos particulares, con mención especial del cálculo estático, como extensión del procedimiento, en el caso, que implica una abstracción teórica, de matriz de masa nula.

## SUMMARY

The exposition relative to the linear computation of structures with nonsingular mass matrix, under linear constraints, earlier presented in Ref. [1], through alternative applications of the reduction and the penalty methods, is followed. Firstly, in this paper, the application of the reduction method, or master-slave algorithm, to constrained structures with singular mass matrix, is achieved, while successive further presentations would be dedicated to the parallel asymptotic method.

Through the application of the reduction method, two different situations are referred, according to an additional condensation were or not were necessary of anyone free d.o.f relative to the reduced system after elimination of the slave displacements.

Some particular examples are also considered. In particular, special mention is done of the static computation like an extension of the foregoing procedures to the case in which a theoretically virtual mass matrix becomes a null matrix.

\* \* \*

## Simposio de la IABSE sobre "Durabilidad de las estructuras", celebrado en Lisboa, durante los días 6-8 de setiembre de 1989

Unos 800 técnicos, procedentes de 50 distintos países, participaron en el Simposio anual de la IABSE celebrado en Setiembre de 1989, en Lisboa, para estudiar y discutir el importante tema de la "Durabilidad de las estructuras".

El amistoso y tranquilo ambiente del Laboratorio Nacional de Ingeniería Civil de Lisboa, junto con el bien elegido programa técnico y de actividades sociales desarrollado, facilitaron el intercambio de ideas y los contactos, siempre provechosos, entre los participantes.

Los cuatro temas del Simposio fueron magní-

ficamente planteados por destacados y bien seleccionados Ponentes invitados.

Posteriormente, en el Curso de las Sesiones Plenarias, de Posters y Mesas Redondas, se presentaron y discutieron más de cien Comunicaciones.

Mr. H.H. Gotfredsen, de Dinamarca, Presidente del Comité Científico del Simposio, en las Conclusiones expuestas durante la Sesión de Clausura, resumió, con las siguientes frases, la situación actual del problema de la "durabilidad de las estructuras".

— La durabilidad es un requisito cuyo cumpli-

miento no exige gasto alguno si se tiene en cuenta durante el proyecto, pero que tiene un coste prohibitivo si se trata de cumplir después.

— Con frecuencia, no resulta fácil que la Dirección Comercial de las Empresas acepte las condiciones que exige el asegurar la durabilidad de las estructuras.

— Las estructuras de hormigón, en ambientes agresivos, se comportan mucho mejor que las metálicas, por lo que se refiere a la durabilidad, siempre y cuando hayan sido adecuadamente proyectadas y ejecutadas.

— Se están haciendo grandes esfuerzos para encontrar métodos de ensayo capaces de determinar las características de durabilidad del hormigón, pero aún no se han hallado métodos que resulten plenamente reproducibles y confiables.

Indudablemente, la durabilidad constituye actualmente uno de los temas de estudio fundamen-

tales e ineludibles en la ingeniería civil. Por este motivo, la IABSE está dispuesta a dedicar los máximos esfuerzos, en el futuro, a este problema.

Los textos de las 140 Comunicaciones presentadas en este Simposio, han sido recogidos en dos volúmenes publicados por la IABSE.

De estas Comunicaciones, 109 son en inglés, 12 en francés y 19 en alemán, y se incluyen resúmenes de todas ellas en inglés, francés y alemán.

Los interesados en adquirir estas publicaciones, que contienen 955 páginas y numerosas ilustraciones, deben dirigirse a:

IABSE  
ETH Hönggerberg  
CH — 8093 Zurich  
(Suiza)

Su precio es de 126 francos suizos para los Miembros de la IABSE y 189 francos suizos para los no Miembros.

\* \* \*

## **Coloquio de la IABSE sobre "Interacción entre las grandes estructuras de Ingeniería y el Ambiente Marino"**

Organizado por la IABSE, se va a celebrar en Nyborg, Dinamarca, durante los días 27 a 29 de mayo del próximo año 1991, un Coloquio para discutir el tema "Interacción entre las grandes estructuras de ingeniería y el ambiente marino".

Las reuniones tendrán lugar en el Hotel Nyborg Strand, situado en la costa del Gran Belt, en Dinamarca.

La construcción y la utilización de las grandes obras de ingeniería, tales como aeropuertos, carreteras, líneas férreas, puentes, túneles, puertos, presas, canales, etc., ocasionan cambios en el medio ambiente, no solo en el propio lugar en que están ubicadas las estructuras sino incluso también, en numerosas ocasiones, en lugares situados a considerable distancia de ellas.

Con el convencimiento de que estos cambios ambientales pueden dañar, más o menos gravemente, valiosos recursos naturales, la opinión pública, frecuentemente, y haciendo uso de sus derechos, exige un detenido estudio previo de las consecuencias que puede tener para el medio ambiente la construcción de estas grandes obras de ingeniería. Y el resultado de estos estudios previos, muchas veces influye en la elección entre las diversas soluciones posibles, llegándose incluso a rechazar la realización de la estructura prevista.

El objetivo fundamental de este Coloquio es llegar a fijar los parámetros esenciales que puedan servir de guía a cuantos intervienen en el proyecto y realización de las grandes estructuras ingenieriles, en lo relativo al posible impacto ambiental, especialmente cuando se trate de estructuras marítimas que vayan a construirse, tanto en las costas como en alta mar. El conocimiento de estos parámetros podrá facilitar la labor de los proyectistas, constructores, etc., de este tipo de estructuras.

Se estima que el proyecto y construcción de las estructuras que facilitan el tráfico a través del Gran Belt, cuya ejecución se inició en 1988, puede constituir un interesante ejemplo de la influencia que las circunstancias ambientales pueden tener en la elección entre diversas soluciones alternativas.

Los interesados en participar en este Coloquio y recibir posterior información sobre el mismo y la invitación preliminar, deberán ponerse en contacto con la Secretaría del Coloquio, dirigiéndose a:

IABSE  
Editor  
ETH Hönggerberg  
CH — 8093 ZURICH (Suiza)  
Teléfono: Int. + 41 1 377 26 47  
Telefax: Int. + 41 1 371 55 48  
Att. IABSE  
Telex: 822 186 IABS CH

# Acciones térmicas en tableros de puentes de vigas de hormigón

Enrique Mirambell  
Antonio Aguado  
Pedro Díez

Departamento Ingeniería de la Construcción  
E.T.S. Ingenieros de Caminos. Barcelona

## 1. INTRODUCCION

Cabe señalar que el presente artículo pretende ser continuación de dos artículos ya publicados anteriormente en los números 163 y 165 de la revista "Hormigón y Acero", escritos por los dos primeros autores de este artículo y relativos al comportamiento de los puentes losa y los puentes cajón de hormigón frente a los efectos térmicos ambientales (Mirambell y Aguado (7), (8)). Por consiguiente, no se incidirá aquí en aspectos generales, ya desarrollados y expuestos en dichos artículos previos, como son el estudio de la influencia de algunos parámetros sobre la respuesta térmica de los puentes de vigas o el planteamiento de la metodología general de obtención de las acciones térmicas que se deben considerar, en el proyecto y construcción de los puentes de hormigón.

Sí se analizarán aquellos aspectos relativos a la propia geometría de los tableros de puentes de vigas y los relativos a las posibles modificaciones de las condiciones de contorno que hay que imponer para resolver la ecuación diferencial de transmisión del calor. En cualquier caso, el objetivo final que persigue el presente artículo es aportar una serie de pautas de actuación y de criterios, útiles para el proyectista de puentes, con el objeto de contemplar la acción térmica ambiental en el análisis y diseño de los puentes de vigas de hormigón de una forma simple, pero a la vez realista.

## 2. LA RESPUESTA TERMICA EN TABLEROS DE PUENTES DE VIGAS

De cara a analizar la respuesta térmica de los tableros de puentes de vigas, se ha adoptado, como sección transversal de referencia, la mostrada en la figura 1.a. Dicha sección transversal correspondería al caso genérico de un puente de carretera, con un ancho de tablero aproximado de 12,0 metros y con una luz de vano de 30,0 metros, aproximadamente. El número de vigas del tablero es cinco, adoptándose para las mismas un canto de 1,50 metros. Sobre dichas vigas se hormigona in situ una losa de reparto de hormigón, de 0,20 metros de espesor. Por otra parte, en la tipología transversal adoptada se ha supuesto que no existe vuelo de la losa o acera sobre el borde del ala superior de la viga extrema.

En la figura 1.b se muestra la geometría de la sección transversal contemplada en el modelo numérico de análisis térmico del tablero de vigas. Como puede observarse, la sección transversal de las vigas ha sido simplificada de cara a llevar el análisis, pero manteniendo, de forma muy aproximada, los valores de las características mecánicas y resistentes —área, momentos de inercia, canto y posición relativa del centro de gravedad—. Asimismo, también se presenta la malla de discretización utilizada en los estudios numéricos, necesarios para poder conocer la evolución en el tiempo de la distribución de temperaturas a través de la sección transversal del tablero.

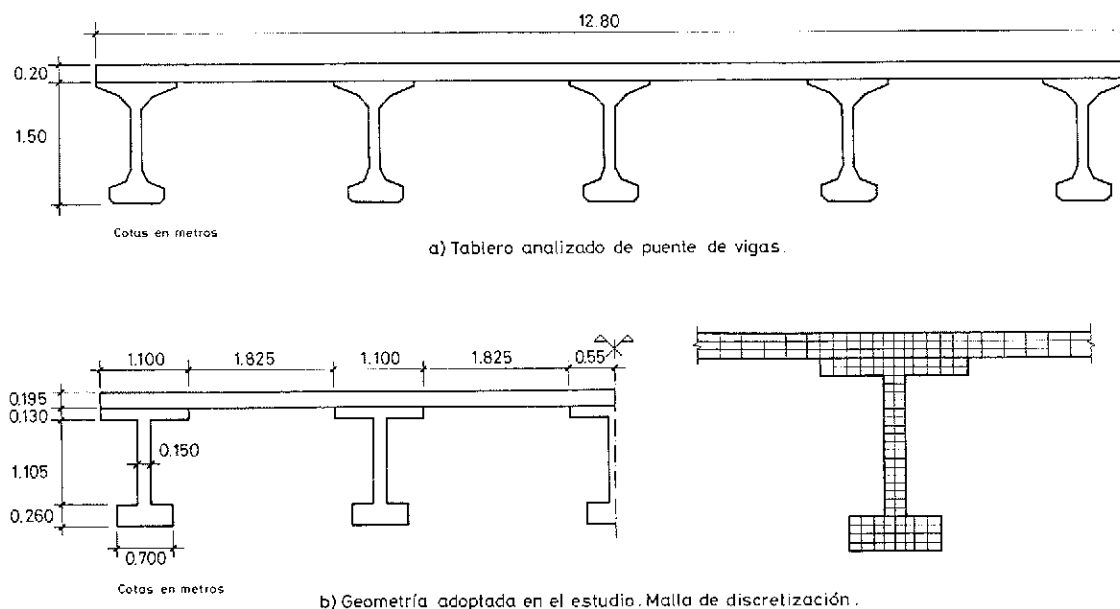


Fig. 1. Sección transversal de referencia, del tablero de vigas. Geometría de la sección analizada y malla de discretización

Por otra parte, en la tabla 1 se presentan los valores de las propiedades térmicas y estructurales del hormigón, y del asfalto si existiera capa asfáltica de rodadura, adoptados en el estudio de referencia.

**Tabla 1**  
Valores, de las propiedades térmicas y estructurales, adoptados en el presente estudio

Propiedad	Hormigón	Asfalto
Conductividad (W/m °C)	1,5	0,83
Calor específico (J/kg °C)	960,0	880,0
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2.400,0	2.200,0
Factor de absorción solar	0,5	0,9
Emisividad	0,88	0,92
Coefficiente dilatación térmica (°C <sup>-1</sup> )	10x10 <sup>-6</sup>	
Módulo de elasticidad (Kp/cm <sup>2</sup> )	300.000,0	—

El modelo numérico empleado en este estudio se basa en un esquema bidimensional en diferencias finitas correspondiente al método explícito de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La descripción general del modelo y programa desarrollados para las tipologías transversales de puentes losa y puentes cajón, así como aquellos aspectos que conciernen a la convergencia y estabilidad numéricas, pueden encontrarse en la bibliografía referenciada (Mirambell y Aguado (9), (10)). La consideración de la tipología transversal

de tableros de vigas, en el modelo de análisis térmico, conlleva el resolver explícitamente la ecuación en diferencias finitas para todos aquellos nodos situados entre vigas. No aparecen diferencias notables en dicha ecuación explícita, salvo en el valor que hay que adoptar para el coeficiente de transferencia de calor por convección en los paramentos situados entre vigas.

De la bibliografía consultada no se desprende ninguna conclusión respecto al valor de dicho coeficiente. No obstante, en una primera aproximación, parece idóneo adoptar un valor medio entre el coeficiente de transferencia de calor por convección, suponiendo velocidad del viento nula, y el coeficiente de transferencia de calor por convección para paramentos exteriores laterales, adoptando como velocidad del viento la existente en el lugar de emplazamiento.

Expuestas de forma esquemática las bases de cálculo de partida para abordar el análisis térmico, se presentan a continuación los resultados correspondientes al tablero de vigas con la sección transversal de la figura 1.b. Dicho tablero se ubica en tres lugares de emplazamiento de la geografía peninsular —Madrid, Barcelona y Sevilla— y las condiciones climáticas y ambientales supuestas en el análisis son tales que, para los tres emplazamientos, se alcanza el gradiente térmico vertical de diseño del tablero. Un análisis comparativo de los resultados obtenidos, los cuales se muestran en la figura 2, permite visualizar la influencia de determinados parámetros climáticos sobre la respuesta térmica de los tableros de puentes de vigas.

En la figura 2.a se presentan las distribuciones de temperaturas según el eje vertical de simetría

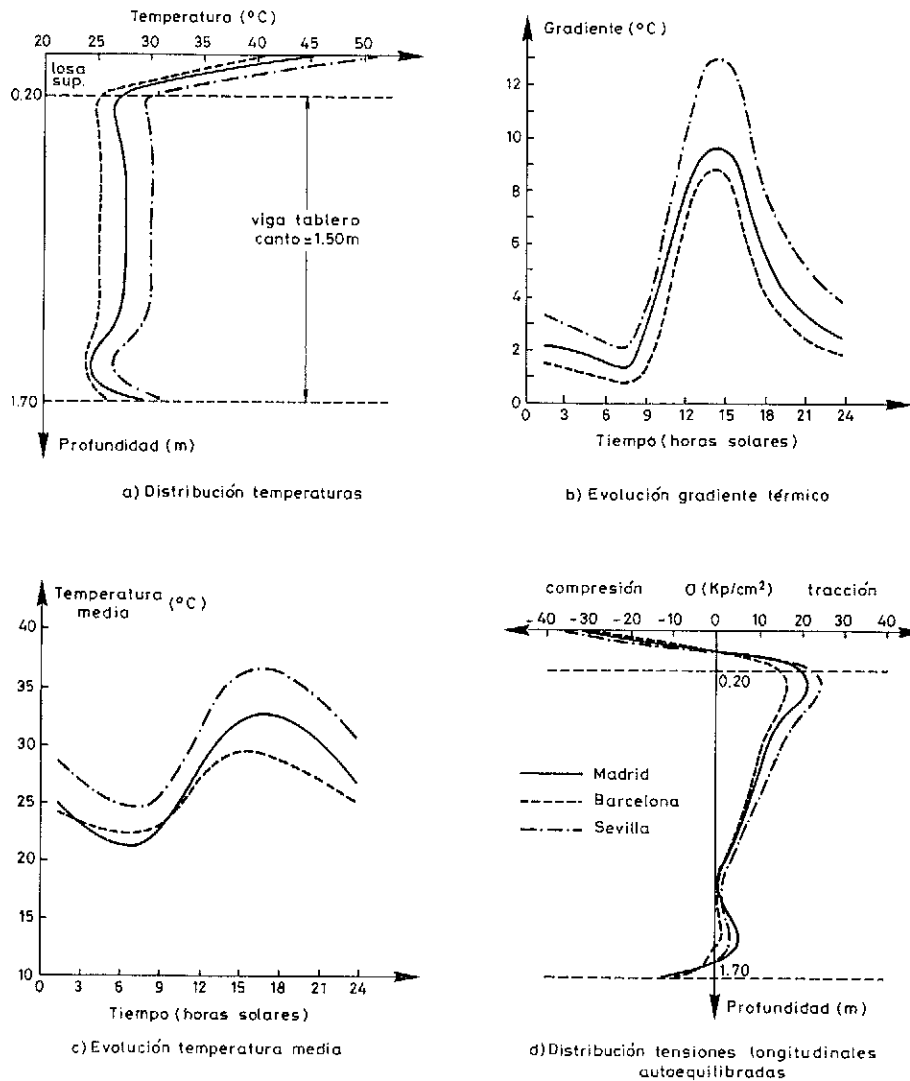


Fig. 2. Resultados derivados de los análisis térmicos llevados a cabo para un tablero de puente de vigas emplazado en Madrid, Barcelona y Sevilla.

del tablero, correspondientes al instante en el que se alcanza el máximo gradiente térmico vertical para los distintos lugares de emplazamiento. De la observación de las gráficas se desprende que cuanto mayor es la radiación solar y menor es la velocidad de viento en el lugar de emplazamiento —Sevilla— mayor es la temperatura en la fibra superior. Asimismo, se observa que la no linealidad de la distribución de temperaturas se concentra, fundamentalmente, en los 20 centímetros superiores de la sección transversal, es decir, en la losa de reparto. Ello es resultado directo de la influencia de la radiación solar incidente sobre el tablero del puente. Por otra parte, en la zona central de la viga, la temperatura se mantiene constante, con un valor ligeramente superior a la temperatura ambiente media diaria.

Las figuras 2.b y 2.c muestran las evoluciones diarias del gradiente térmico vertical y de la tempe-

ratura media de la sección transversal del tablero, respectivamente. Puede apreciarse que, al igual que ocurría para las tipologías transversales de puentes losa y puentes cajón, el gradiente térmico vertical máximo y el rango de variación de dicha acción térmica son más elevados en el emplazamiento de Sevilla. Asimismo, como podía esperarse, la temperatura media del tablero en este emplazamiento es claramente superior a las correspondientes a los emplazamientos de Barcelona y Madrid.

Como se ha visto con anterioridad, las distribuciones de temperaturas a través del tablero son claramente no lineales. Adoptando la hipótesis de Navier-Bernouilli, dicha no linealidad induce tensiones longitudinales y transversales autoequilibradas en la sección transversal, las cuales son independientes de las condiciones de apoyo de la estructura. Las distribuciones de tensiones longitudi-

nales pueden obtenerse a través de la siguiente expresión:

$$\sigma(x,y) = E [\epsilon_o + \psi_{xy} + \psi_y x - \alpha T(x,y)_{n\ell}] \quad (1)$$

en donde

$$\epsilon_o = \frac{\alpha}{A} \iint T(x,y)_{n\ell} dx dy \quad (2)$$

$$\psi_x = \frac{\alpha}{I_x} \iint T(x,y)_{n\ell} y dx dy \quad (3)$$

$$\psi_y = \frac{\alpha}{I_y} \iint T(x,y)_{n\ell} x dx dy \quad (4)$$

En estas ecuaciones,  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica del hormigón,  $A$  es el área de la sección transversal,  $I_x$  e  $I_y$  son los momentos principales de inercia, y  $\epsilon_o$ ,  $\psi_x$  y  $\psi_y$  son la elongación y las curvaturas térmicas impuestas, inducidas por la distribución no lineal de temperaturas  $T(x,y)_{n\ell}$ .

La figura 2.d muestra, para el día analizado y para los tres emplazamientos, las distribuciones de tensiones longitudinales autoequilibradas según el eje de simetría del tablero. Dichas distribuciones corresponden al instante del día para el cual se genera la máxima tensión longitudinal de tracción en el hormigón. Para los tres casos analizados, tal instante se encuentra muy próximo al instante en que se alcanza el máximo gradiente térmico vertical. En dicha figura puede observarse que, debido a que la no linealidad de la distribución de temperaturas es más acusada para el caso del tablero empleado en la ciudad de Sevilla, la magnitud de las tensiones longitudinales autoequilibradas, tanto de compresión como de tracción, es superior a la de los otros dos casos contemplados en el estudio. Cabe señalar que, para otros instantes del día, comprendidos aproximadamente entre las 2:00 horas solares y las 5:00 horas solares, las fibras solicitadas a tracción son las fibras superiores e inferiores del tablero, mientras que las fibras intermedias se ven sometidas a compresión.

En cualquier caso, de este estudio y de otros referenciados en la bibliografía [Mirambel (6), Priestley y Buckle (13), Imbsen et al. (2)], se desprende que los parámetros analizados que influyen en la respuesta térmica y tensional de los puentes de vigas actúan en el mismo sentido en el que lo hacen en puentes losa maciza, pudiendo despreciarse, en la mayoría de los casos, el efecto de la posible radiación solar lateral, incidente sobre la viga extrema del tablero.

### 3. ACCIONES TERMICAS DE DISEÑO EN PUENTES DE VIGAS

La metodología de obtención de las acciones térmicas de diseño en puentes de vigas es idéntica a la ya utilizada para la tipología de puentes losa [Mirambell y Aguado (7)] y puentes cajón [Mirambell y Aguado (8)].

Para la determinación de las acciones térmicas

de diseño se hace necesario conocer datos relativos a diversos parámetros climáticos existentes en hipotéticos lugares de emplazamiento (estaciones meteorológicas principales del país). Tal información puede extraerse de las diferentes publicaciones del Instituto Nacional de Meteorología, contemplándose 58 estaciones, las cuales cubren nuestra geografía peninsular y la diversidad de climas [Instituto Nacional de Meteorología (3), (4), (5)].

El procedimiento o la metodología seguida en el estudio, ha sido la de adoptar una sección transversal de referencia de un tablero genérico de vigas, realizándose diferentes análisis térmicos de puentes de vigas con la misma sección transversal de referencia, pero ubicados en los diferentes emplazamientos (58) de la geografía peninsular. Dicha sección transversal de referencia es la presentada en la figura 1 del presente artículo.

Con posterioridad, los resultados derivados de los análisis térmicos, en lo que se refiere a los valores de las acciones térmicas que hay que considerar en diseño, se ven corregidos en base a la determinación de factores de corrección que contemplan la influencia de diversos parámetros sobre la respuesta térmica de los puentes de vigas, y que no han sido considerados, de forma implícita, en los estudios previos.

De cara a la determinación de los factores correctores, se hace necesario realizar numerosos análisis térmicos que pueden conllevar, a su vez, cambios en la geometría de la tipología transversal del tablero. Así, en particular, una reducción del canto de las vigas puede traducirse en un cambio del número de vigas que se deben disponer en el tablero y, por consiguiente, de la distancia entre ejes de vigas contiguas. La casuística existente sería muy extensa y la interpretación de resultados sería ciertamente farragosa, debido a que los parámetros de diseño de la geometría de la sección transversal de un tablero de vigas están claramente interrelacionados. Debido a ello, para la determinación de los factores correctores, se ha optado por realizar los análisis térmicos sobre una viga exenta —viga central del tablero— facilitándose así el análisis paramétrico y la interpretación de resultados.

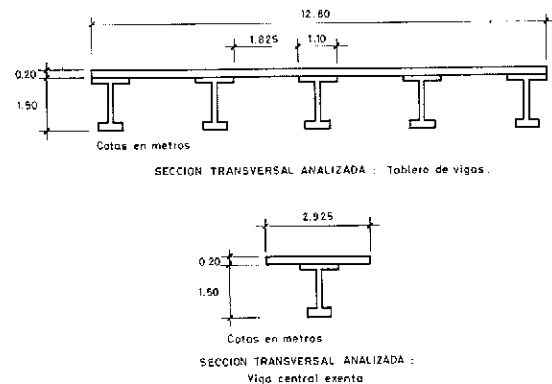


Fig. 3. Tablero de vigas analizado, obteniendo su respuesta térmica a través de la consideración de la viga central, como exenta.



Para corroborar dicha forma de actuar, se ha obtenida la respuesta térmica de un tablero genérico de vigas como el de la figura 1 y la respuesta térmica de la viga central de dicho tablero, adoptando un ancho de losa superior, igual a la distancia interjez correspondiente al tablero (figura 3).

Para ambos análisis térmicos, la malla de discretización, las condiciones de emplazamiento y las condiciones climatológicas y ambientales son idénticas (emplazamiento en Tarifa, bajo unas condiciones climáticas de verano y con una velocidad de viento distinta y superior a la existente en los emplazamientos considerados con anterioridad). En la figura 4 se presentan los resultados derivados de ambos análisis térmicos, relativos a la evolución del gradiente térmico y del incremento uniforme de la temperatura media con respecto a la temperatura inicial de partida.

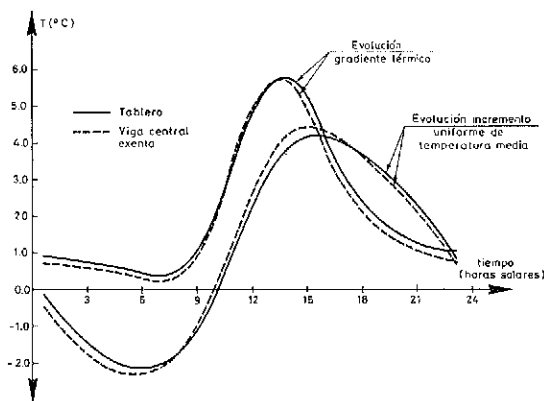


Fig. 4. Resultados derivados del análisis térmico, como tablero de vigas y como viga central exenta.

Como puede apreciarse en dicha figura, las diferencias son muy poco significativas. El máximo gradiente térmico vertical que solicita el tablero de vigas es  $5,7^{\circ}\text{C}$  y tiene lugar a las 13,60 horas solares, mientras que en el caso de la viga central exenta, representativa del tablero en su conjunto, el gradiente máximo es también  $5,7^{\circ}\text{C}$  y aparece para el mismo instante del día analizado. En cuanto al incremento uniforme de la temperatura media de las dos secciones transversales analizadas, el máximo de dicha función, para el caso del tablero, es  $4,3^{\circ}\text{C}$  a las 15,40 horas solares, mientras que para la viga exenta es  $4,5^{\circ}\text{C}$ , a las 15,10 horas solares.

Por otra parte, en lo que se refiere a las distribuciones de tensiones longitudinales autoequilibradas, inducidas por la no linealidad de la distribución de temperaturas, la tensión máxima de tracción a lo largo de todo el período de tiempo analizado, tiene lugar en el mismo nodo de la malla de discretización, para los dos análisis térmicos llevados a cabo. Dicho nodo se encuentra sobre el eje de simetría de ambas secciones transversales y a una profundidad, con respecto a la fibra superior del tablero, de 0,26 metros (dicho nodo es el cen-

tro geométrico del ala superior de la viga). Para el caso del tablero, dicha tracción máxima es de  $13,30\text{ Kp/cm}^2$  a las 13,60 horas solares, mientras que para la viga exenta es de  $13,60\text{ Kp/cm}^2$ , también a las 13,60 horas solares. A la vista de los resultados obtenidos, se desprende que el análisis térmico de un tablero de vigas puede afrontarse adoptando la hipótesis de flujo bidireccional y analizando una única viga con la porción de losa superior de hormigón que le corresponda. Lógicamente, en el caso de que las vigas contiguas se encuentren en íntimo contacto creándose volúmenes cerrados, la sección transversal, desde un punto de vista térmico, se comportará como una sección losa aligerada.

### 3.1. Rango anual de la temperatura media del tablero

#### 3.1.1. Rango de referencia

El rango anual de la temperatura media del tablero, viene definido por la diferencia entre la temperatura media máxima y la temperatura media mínima del puente, a lo largo del año, en el lugar de emplazamiento considerado, y depende fundamentalmente del rango anual de la temperatura ambiente existente en dicho lugar de emplazamiento. Las temperaturas ambiente adoptadas en los diferentes emplazamientos, correspondientes a cada una de las estaciones meteorológicas contempladas en el estudio, pueden encontrarse en Mirambell (6). Los resultados obtenidos para el rango anual de la temperatura media del puente de vigas analizado, se presentan de forma gráfica en la figura 5. Conviene puntualizar que la sección transversal adoptada en el estudio de determinación del rango de referencia es la sección presentada en la figura 1 del presente artículo y que los valores adoptados de las propiedades físicas y térmicas son los recogidos en la tabla 1.

En el mapa de isótermas de dicha figura se aprecian, al igual que ocurría en las tipologías de tableros de puentes losa y puentes cajón, cuatro regiones claramente diferenciadas:

- Las vertientes cantábrica y atlántica.
- La zona sur.
- El levante.
- La meseta.

Los rangos más elevados de la temperatura media del puente se presentan en la zona de la meseta, siendo las ciudades de Albacete y Ciudad Real las que muestran el valor máximo absoluto de  $44,4^{\circ}\text{C}$ . Los valores de las isótermas disminuyen a medida que nos acercamos al litoral peninsular, encontrándose los mínimos en las vertientes atlántica y cantábrica —Finisterre,  $21,0^{\circ}\text{C}$ , La Coruña,  $22,1^{\circ}\text{C}$ , Santander,  $21,4^{\circ}\text{C}$ —.

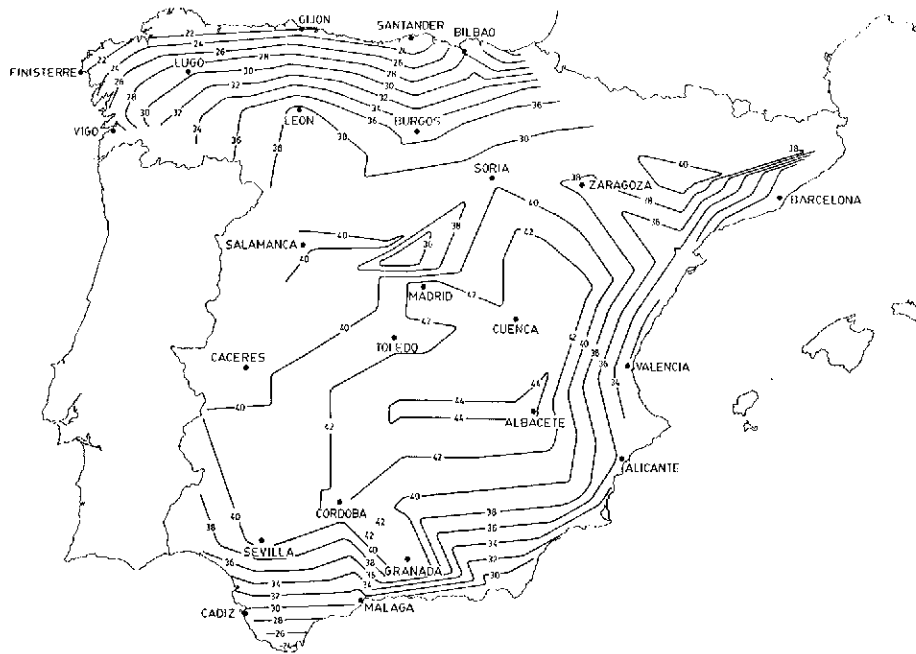


Fig. 5. Mapa peninsular de isoclinas para la obtención del rango anual de referencia de la temperatura media en tableros de puentes de vigas.

### 3.1.2. Factores de corrección

Del conjunto de variables no contempladas en el análisis de forma intrínseca, se analizará la influencia del canto del tablero, o lo que es lo mismo, el canto de la viga, puesto que se adopta un espesor constante de la losa superior, de 0,20 metros; también se analizará la influencia del ancho de la losa de hormigón, o lo que es lo mismo, la distancia entre ejes de vigas. Los restantes parámetros no influyen de forma significativa sobre la magnitud del rango anual de la temperatura media del tablero.

Los estudios paramétricos se han llevado a cabo para vigas con cantos de 1,0 m, 1,5 m, 2,0 m y 2,5 metros. La variación de dicho canto conlleva la variación de anchos de alas y espesores de ala y alma, y ello se ha hecho de acuerdo con catálogos de empresas dedicadas a la prefabricación de vigas de hormigón pretensado para tableros de puentes. Asimismo, para cada uno de los cantos adoptados, los cuales cubren, de forma amplia, las posibles luces de vano que hay que salvar, se ha variado el ancho de porción de losa superior correspondiente a la distancia entre ejes de vigas. Los valores adoptados para el estudio paramétrico han sido 2,0 m, 2,5 m, 3,0 m y 3,50 metros. La combinación de los valores adoptados por el canto y el ancho de losa superior, da lugar a una serie de vigas exentas que se deben analizar, las cuales se ubican en 20 de las 58 estaciones meteorológicas principales del país. El postproceso de los 340 análisis térmicos llevados a cabo, permite definir el valor del factor

de corrección  $k_{\Delta T}$ , necesario para determinar el rango anual de la temperatura media del tablero de vigas.

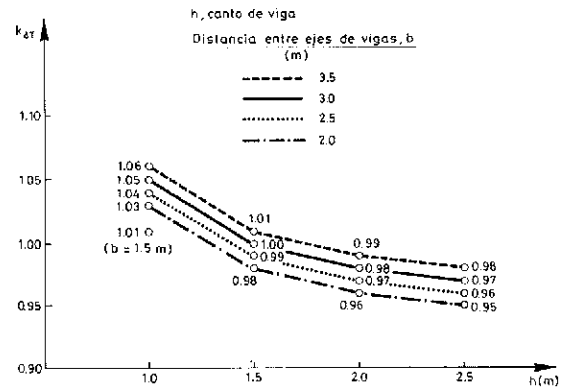


Fig. 6. Valores del coeficiente corrector  $k_{\Delta T}$  para la obtención del rango anual de diseño de la temperatura media en puentes de vigas.

De los resultados obtenidos se desprende que cuanto menor sea el canto de la viga, y mayor sea la distancia entre ejes de vigas del tablero, mayor será el rango anual de la temperatura media del puente de vigas.

### 3.1.3. Método de obtención

El método que se debe seguir de cara a la obtención del rango anual de la temperatura media de un puente de vigas es el siguiente:

– Situación del lugar de emplazamiento del puente.

– Obtención, para dicho lugar, del rango anual de referencia de la temperatura media del puente, en base a lo representado en el mapa peninsular de isolíneas de la figura 5.

– Obtención del factor de corrección  $k_{\Delta T}$ , relativo al canto del tablero y a la distancia entre ejes de vigas, a partir de las gráficas mostradas en la figura 6.

– El rango anual de la temperatura media del tablero que hay que considerar en diseño es:

$$\Delta T = k_{\Delta T} \cdot \Delta T_{\text{referencia}} \quad (5)$$

**3.1.4. Valores de diseño del rango anual de la temperatura media de tableros de vigas, atendiendo a la división de la Península Ibérica en grandes regiones climáticas**

Como se ha comentado con anterioridad, el factor climático que influye de forma determinante en el valor del rango anual de la temperatura media del tablero es el rango anual de la temperatura ambiente en el lugar de emplazamiento del puente.

En base a los valores del rango anual de la temperatura media del tablero mostrados en el mapa de isolíneas de la figura 5 y a los valores del factor corrector en función del canto del tablero y del ancho de la losa superior, y atendiendo a la división de la Península Ibérica en regiones climáticas, tal como se expone en las publicaciones del Instituto Nacional de Meteorología, es posible definir una serie de valores de diseño del rango anual de la

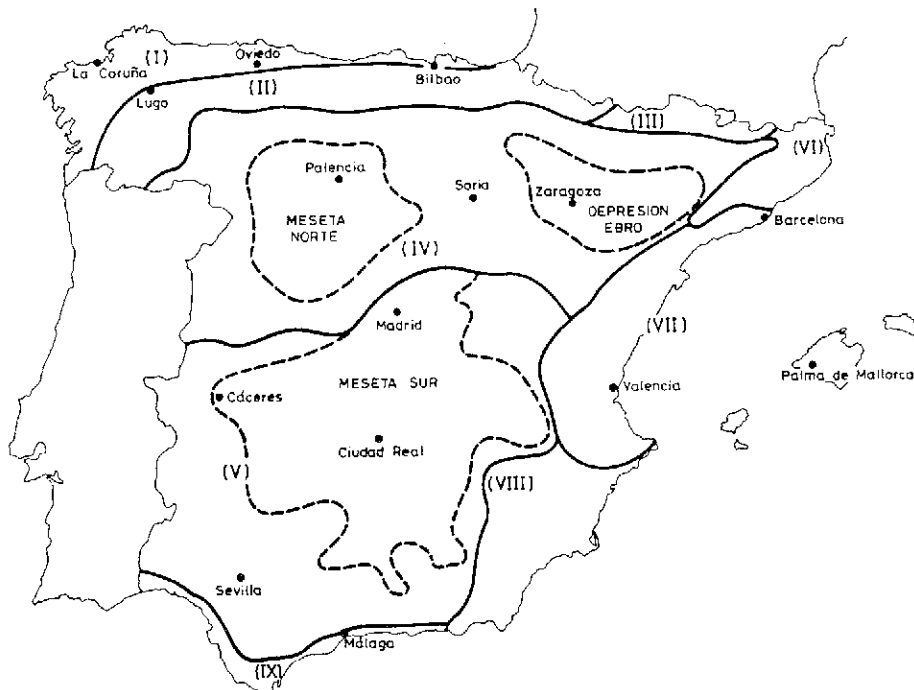
temperatura media para tableros de puentes de vigas ubicados a lo largo y ancho de la geografía española peninsular. En la tabla 2 y en la figura 7 se definen las diferentes regiones climáticas y el valor de diseño del rango anual de referencia para cada una de dichas regiones climáticas (dicho valor del rango de referencia se ha obtenido para la sección transversal de tablero de la figura 1 del presente artículo).

**TABLA 2**

**Regiones climáticas de la Península Ibérica**

Región Climática	Zona
Zona litoral norte del Cantábrico y de Galicia	I
Zona prelitoral norte del Cantábrico y de Galicia	II
Zona pirenaica	III
Zona centro septentrional, meseta norte y depresión del Ebro	IV
Zona centro meridional y meseta sur	V
Zona nordeste	VI
Levante y Baleares	VII
Zona sudeste	VIII
Zona litoral sur	IX

Considerando ahora los valores del factor de corrección que contempla la influencia del canto de la viga y del ancho de losa superior, se ha confeccionado una tabla de valores de diseño del rango anual de la temperatura media del tablero de vigas, en función de los dos parámetros geométricos anteriores y en función de la zona climática de la Península Ibérica en donde se encuentre emplazado el puente.



**Fig. 7. Mapa de las diferentes regiones climáticas de la Península Ibérica.**

**TABLA 3**

**Rangos anuales de diseño de la temperatura media del tablero, para puentes de vigas emplazados en la Península Ibérica**

Rango anual de la temperatura media del tablero, para puentes de vigas (°C)						
Zona climática	Canto (m)	Distancia entre ejes de vigas (m)				
		1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
I y III	1,0	28,3	28,8	29,1	29,4	29,7
	1,5	—	27,4	27,7	28,0	28,6
	2,0	—	26,9	27,2	27,4	27,7
	2,5	—	26,6	26,9	27,2	27,4
II	1,0	32,3	33,0	33,3	33,6	33,9
	1,5	—	31,4	31,7	32,0	32,6
	2,0	—	30,7	31,0	31,4	31,7
	2,5	—	30,4	30,7	31,0	31,4
VI, VII VIII y IX	1,0	39,4	40,2	40,6	41,0	41,3
	1,5	—	38,2	38,6	39,0	39,8
	2,0	—	37,4	37,8	38,2	38,6
	2,5	—	37,1	37,4	37,8	38,2
IV	1,0	41,4	42,2	42,6	43,1	43,5
	1,5	—	40,2	40,6	41,0	41,8
	2,0	—	39,4	39,8	40,2	40,6
	2,5	—	39,0	39,4	39,8	40,2
V	1,0	45,5	46,4	46,8	47,3	47,7
	1,5	—	44,1	44,6	45,0	45,9
	2,0	—	43,2	43,7	44,1	44,6
	2,5	—	42,8	43,2	43,7	44,1

Dichos valores de diseño corresponden a los valores máximos obtenidos para emplazamientos del puente en alguna de las estaciones meteorológicas de las distintas regiones climáticas y, por lo tanto, son valores que quedan del lado de la seguridad. Debe señalarse que tales rangos atienden a las diferentes características ambientales y climatológicas del lugar de emplazamiento del puente (rangos anual y diario de la temperatura ambiente, intensidad de radiación solar, velocidad de viento—).

cia, la presentada en la figura 1 del presente artículo) se muestran, de forma gráfica, en el mapa peninsular de isolíneas de la figura 8.

En esta figura puede observarse que, al igual que ocurría en puentes losa y puentes cajón, la zona geográfica en donde los gradientes térmicos de diseño son más elevados es la cuenca del río Guadalquivir —gradientes en torno a los 13°C—. Las zonas de mínimos se sitúan próximas al litoral, y en particular, al litoral gallego —gradientes en torno a los 6°C—.

### 3.2. Gradiente térmico vertical positivo

#### 3.2.1. Gradiente de referencia

La determinación del valor de diseño de dicha acción térmica depende, fundamentalmente, de la radiación solar global media mensual máxima existente en el lugar de emplazamiento del puente, a lo largo del año. Los valores de radiación adoptados en este estudio pueden encontrarse en Mirambell (6). Los resultados obtenidos para el gradiente térmico de referencia (sección transversal de referen-

#### 3.2.2 Factores de corrección

En lo referente a los parámetros geométricos de la sección transversal de un tablero genérico de vigas, se tendrá en cuenta, tanto la influencia del canto de la viga, como la influencia del ancho de losa superior de hormigón, o lo que es lo mismo, la distancia entre ejes de vigas del tablero. Los diferentes valores adoptados por ambos parámetros geométricos son los mismos que los utilizados en la obtención del factor corrector para la determina-

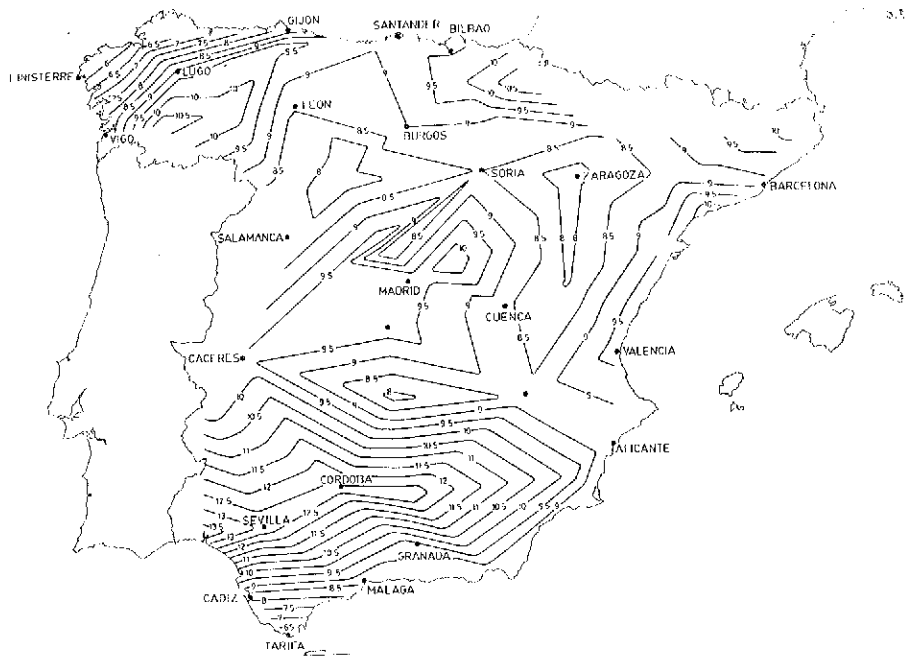


Fig. 8. Mapa peninsular de isolíneas para la obtención del gradiente térmico de referencia en tableros de puentes de vigas.

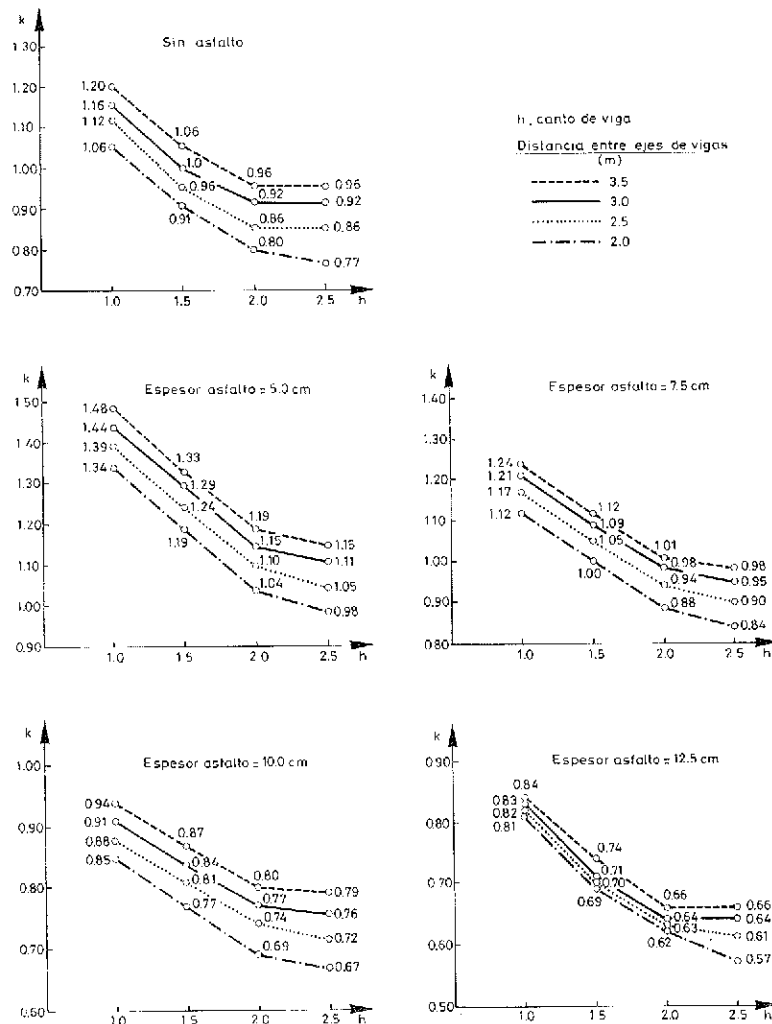


Fig. 9. Valores del coeficiente corrector  $k_{GRAD}$  para la obtención del gradiente térmico de diseño en puentes de vigas.

ción del rango anual de la temperatura media del tablero.

Del resto de parámetros que influyen en la respuesta térmica de puentes de hormigón, únicamente el espesor de capa asfáltica de rodadura afecta de forma significativa al valor del gradiente térmico de diseño. En el presente estudio, los valores adoptados para el espesor de capa asfáltica son 5,0 cm, 7,5 cm, 10,0 cm y 12,5 cm. La combinación de los valores de los diferentes parámetros contemplados da lugar a la realización de 80 análisis térmicos para cada lugar de emplazamiento considerado —estación meteorológica—. De cara a la definición del factor de corrección, se han considerado 20 emplazamientos de los 58 contemplados en el estudio de referencia, lo que da lugar a un número total de análisis térmicos de 1.600.

La interpretación final de los resultados derivados de los análisis térmicos se traduce en la definición de un factor corrector  $k_{GRAD}$  que considerará, simultáneamente, la influencia del canto de la viga, el ancho de losa superior y el espesor de capa asfáltica de rodadura, si ésta existe. Ello se recoge de forma gráfica en la figura 9.

En base a lo expuesto en dicha figura, el gradiente térmico vertical que se debe considerar en el diseño de puentes de vigas será mayor cuanto menor sea el canto de la viga, mayor sea la distancia entre ejes de vigas del tablero y, si existe capa asfáltica, cuanto menor sea el espesor de dicha capa.

### 3.2.3. Método de obtención

El método que hay que seguir de cara a la obtención del gradiente térmico vertical positivo de un puente de vigas es el siguiente:

— Situación del lugar de emplazamiento del puente.

— Obtención, para dicho lugar, del gradiente de referencia, en base a lo representado en el mapa de isolíneas de la figura 8.

— Obtención del factor de corrección  $k_{GRAD}$ , relativo al canto de la viga, a la distancia entre ejes de vigas del tablero y al espesor de capa asfáltica, a partir de las gráficas mostradas en la figura 9.

— El gradiente térmico vertical positivo que corresponde considerar en diseño es:

$$GRAD = k_{GRAD} \cdot GRAD_{referencia} \quad (6)$$

Conviene señalar que para el gradiente térmico no se han determinado valores concretos de diseño, en función de la zona climática de emplazamiento del puente, tal como se ha hecho para el rango anual de la temperatura media del tablero (veáanse tabla 2 y figura 7). Ello es debido, por una parte, a la existencia de microclimas dentro de las grandes zonas climáticas del país, los cuales pueden venir definidos a través de una alta o baja ra-

diación solar, de una alta o baja insolación y de una alta o baja velocidad del viento, parámetros éstos que influyen de forma significativa en la respuesta térmica del tablero. Por otra parte, observando el mapa peninsular de isolíneas del gradiente de referencia, se llega a la conclusión de que la subdivisión de la Península Ibérica en grandes zonas climáticas no puede llevarse a cabo de forma tan directa como en el caso del mapa de isolíneas del rango anual de la temperatura media del tablero.

### 3.3. Otras acciones térmicas

En lo referente al gradiente térmico inverso (negativo), en base a los resultados derivados de los estudios paramétricos llevados a cabo [Mirambell et al. (11)], puede adoptarse un valor de diseño de  $-2,0^{\circ}\text{C}$ , quedando dicho valor del lado de la seguridad. En el caso de que se disponga capa asfáltica de rodadura, independientemente de su espesor, no es necesaria la consideración de esta acción térmica en diseño.

En cuanto al gradiente térmico horizontal, dada la propia tipología transversal de los tableros de puentes de vigas, puede considerarse que aquél es prácticamente despreciable. La influencia de la radiación solar lateral incidente sobre la viga extrema no afecta a la respuesta térmica del tablero de vigas en su conjunto, en sentido horizontal.

Por último, en lo que se refiere a la sollicitación térmica transversal, contenida en el plano de la sección, cabe hacer hincapié en la necesidad de evaluar, en algunos casos, los efectos estructurales que producen en el tablero de vigas y, en concreto, en tableros con sección transversal en  $\pi$ , las dilataciones o contracciones y las curvaturas térmicas impuestas en la losa superior del tablero. Ello genera la aparición de torsores en los nervios, en la sección transversal en  $\pi$  (presencia de diafragmas rígidos) y de momentos flectores transversales en la losa superior de hormigón, los cuales pueden inducir tensiones, tangenciales en los nervios, y transversales de flexión en la losa, de cierta magnitud [Mirambell (6), Priestley y Buckle (13)].

## 4. ANALISIS COMPARATIVO PRESENTE ESTUDIO-NORMATIVA

Puede intuirse que los valores de las acciones térmicas que se deben considerar en el dimensionamiento de puentes de hormigón, preconizados por la normativa nacional vigente [CPH-MOPU (1), MOPU (12)], parecen atender a un valor medio peninsular, no considerando la diversidad de climas existentes en la geografía peninsular y la influencia de la propia tipología transversal del tablero analizado sobre la respuesta térmica y tensional frente a los efectos térmicos ambientales.

En concreto, en el presente estudio, los parámetros contemplados de forma intrínseca en la confección de los mapas peninsulares de isolíneas del

rango anual de la temperatura media y del gradiente térmico de referencia son:

- El propio lugar de emplazamiento del puente.
- Los rangos diario y anual de la temperatura ambiente, en el lugar de emplazamiento del puente.
- La velocidad del viento en el lugar de emplazamiento.
- La radiación solar.

Los parámetros no contemplados de forma directa en el análisis y que influyen de forma significativa en la respuesta térmica de los tableros de puentes de vigas son considerados a través de la definición de los pertinentes factores de corrección, factores éstos relativos a:

- La tipología transversal del tablero y, concretamente, el canto de la viga y la distancia entre ejes de vigas del tablero.
- El espesor de capa asfáltica de rodadura.

En la tabla 4 se recogen, de forma muy concisa, las diferencias más significativas entre lo derivado

del presente estudio y lo preconizado por la normativa nacional vigente, en lo que se refiere a la cuantificación de las acciones térmicas de diseño en puentes de vigas de hormigón.

En lo referente al rango anual de la temperatura media del tablero, la corrección relativa al espesor ficticio de la pieza que recomienda la normativa, de cara a la obtención del incremento y decremento uniforme de la temperatura media del puente, refleja, de forma más o menos fiel, la influencia del canto del tablero. Asimismo, comparando los resultados obtenidos para puentes losa maciza [Mirambell y Aguado (7), Mirambell et al. (11)] con los derivados de este estudio para puentes de vigas, se desprende que, desde el punto de vista de la determinación de esta acción térmica, el espesor ficticio de un tablero de vigas, con un canto total 1,70 metros (canto de la viga 1,50 m y espesor de losa 0,20 m) y una distancia entre ejes de vigas de 3,0 metros, es aproximadamente el mismo que el espesor ficticio de un tablero losa maciza, de canto comprendido entre 0,30 m y 0,40 metros. En cualquier caso, la expresión preconizada por la normativa no contempla la diversidad de climas del país,

**TABLA 4**

**Valores de las acciones térmicas de diseño en puentes de vigas, según la normativa nacional vigente y según el presente estudio**

Acciones térmicas de diseño en puentes de vigas de hormigón (°C)		
Rango anual de la temperatura media del tablero	Normativa	$\Delta T = \pm (20 - 0,75 \sqrt{e})$ <p>La única variable considerada es el espesor ficticio. No se parte de ninguna información climatológica. La temperatura de 20°C parece atender a un valor medio peninsular.</p>
	Presente estudio	$\Delta T = k_{\Delta T} \cdot \Delta T_{\text{referencia}}$ <p>Se considera el canto de las vigas y la distancia entre ejes de vigas del tablero. Se consideran las condiciones ambientales y climatológicas existentes en el lugar de emplazamiento del puente</p>
Gradiente térmico	Normativa	$\text{GRAD} = 10,0$ <p>No considera ninguna variable. Queda a juicio del proyectista.</p>
	Presente estudio	$\text{GRAD} = k_{\text{GRAD}} \cdot \text{GRAD}_{\text{referencia}}$ <p>Se considera el canto de las vigas y la distancia entre ejes de vigas, el espesor de capa asfáltica y la climatología existente en el lugar de emplazamiento del puente.</p>
Gradiente térmico inverso	Normativa	
	Presente estudio	$\text{GRAD}_{\text{neg}} = - 2,0$ <p>Si se dispone capa asfáltica de rodadura, no es necesaria su consideración.</p>

lo cual se traduce en unas variaciones anuales de la temperatura media del tablero mucho más acusadas que las que podrían provenir de la influencia del canto del tablero y de la distancia entre ejes de vigas. Por último, conviene señalar que, para algunas de las zonas climáticas en las que se ha dividido la Península Ibérica, el rango anual de la temperatura media del tablero de vigas supera claramente el valor de  $\pm 20^{\circ}\text{C}$ .

En cuanto a la determinación del valor del gradiente térmico de diseño, ésta debe hacerse de tal forma que se contemplen las condiciones ambientales en el lugar de emplazamiento del puente y, en particular, la radiación solar global media mensual máxima a lo largo del año. Por otra parte, se observa que, para tableros de puentes de vigas emplazados en amplias zonas de la geografía peninsular, el valor del gradiente de diseño derivado de este estudio supera el valor de  $10^{\circ}\text{C}$  preconizado por la normativa vigente, si bien dicho efecto se ve amortiguado a medida que aumenta el canto del tablero, disminuye la distancia entre ejes de vigas y aumenta el espesor de capa asfáltica de rodadura. Una cota inferior adecuada de dicho espesor, desde el punto de vista del comportamiento térmico y tensional asociado —aparición de tensiones autoequilibradas— de los tableros de puentes de vigas, es 7,0 cm.

## 5. CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados derivados del presente estudio se desprenden las siguientes conclusiones:

— La aplicación de la metodología de obtención de acciones térmicas que se deben considerar en el proyecto de puentes de hormigón [Mirambell et al. (11)] al caso de tableros de puentes de vigas, ha permitido obtener diferentes mapas peninsulares de isoféncas del rango anual de la temperatura media del tablero y del gradiente térmico vertical y determinadas expresiones de diseño que facilitarán la labor de definición de las acciones térmicas que hay que considerar en el proyecto y dimensionamiento de los puentes de vigas.

— La diversidad de climas de nuestro país se traduce en unas variaciones del rango anual de la temperatura media del tablero, mucho más acusadas que las que puedan provenir de la influencia del canto de las vigas y de la distancia entre ejes de las vigas del tablero.

— En no pocos emplazamientos de las diferentes zonas climáticas del país, el gradiente térmico de diseño del tablero de vigas, supera el valor de  $10^{\circ}\text{C}$ , preconizado por la normativa nacional vigente.

— En la tipología transversal de puentes de vigas, cuanto menor es el canto del tablero y mayor

es la distancia entre ejes de vigas, mayores son el rango anual de la temperatura media y el gradiente térmico vertical positivo de diseño.

— La influencia del espesor de la capa asfáltica es únicamente significativa a la hora de evaluar el gradiente térmico de diseño. Cuanto menor sea dicho espesor, mayor será el gradiente térmico.

Como resumen final, cabe señalar que en el presente artículo se proporcionan los criterios y pautas de actuación, útiles al proyectista de puentes, de cara a evaluar, de forma simple, pero realista, las acciones térmicas que es preciso considerar en el proyecto y dimensionamiento de los puentes de vigas de hormigón, teniendo en cuenta su lugar de emplazamiento, las condiciones ambientales y climáticas en las que se encuentra inmerso y los parámetros que pueden influir de forma significativa en la respuesta térmica y tensional de los puentes de vigas de hormigón.

## AGRADECIMIENTOS

Sirva este apartado para agradecer a la Dirección General de Carreteras, del Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo, el soporte económico necesario para realizar el proyecto "Redacción de unas recomendaciones sobre acciones térmicas a considerar en el proyecto de puentes de hormigón". Parte del informe final relativo a dicho proyecto se presenta en este artículo.

## BIBLIOGRAFIA

1.—COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON. MOPU. "Instrucción EP-80 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado". Comisión Permanente del Hormigón. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. 1980.

2.—IMBSEN, R.A., VANDERSHAF, E., SCHAMBER, R., NUTT, R.V. "Thermal Effects in Concrete Bridge Superstructures". Report 276. National Cooperative Highway Research Program. Transportation Research Board. Washington D.C., September 1985.

3.—INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA. "Guía resumida del clima de España". Servicio de Climatología. Ministerio de Transportes, Turismo y Comunicaciones. Madrid, 1982.

4.—INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA. "Atlas climático de España". Ministerio de Transportes, Turismo y Comunicaciones. Madrid, 1983.

5.—INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA. "Atlas de la radiación solar en España". Ministerio de Transportes, Turismo y Comunicaciones. Madrid, 1984.



6.—MIRAMBELL, E. "Criterios de diseño en puentes de hormigón frente a la acción térmica ambiental". Tesis Doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, Marzo 1987.

7.—MIRAMBELL, E., AGUADO, A. "Estudio del comportamiento de puentes losa de hormigón frente a la acción térmica ambiental. Criterios de diseño". *Hormigón y Acero*, N° 163. Abril, 1987.

8.—MIRAMBELL, E., AGUADO, A. "Acciones térmicas de diseño en puentes cajón de hormigón". *Hormigón y Acero*, N° 165. Octubre, 1987.

9.—MIRAMBELL, E., AGUADO, A. "Modelo de obtención de distribuciones de temperatura y de tensiones longitudinales autoequilibradas en puentes de hormigón". *Métodos Numéricos en Ingeniería*. Vol. 3, N° 2. Abril 1987.

10.—MIRAMBELL, E., AGUADO, A. "Temperature and Stress Distributions in Concrete Box Girder Bridges". *ASCE Journal of Structural Engineering*. American Society of Civil Engineers. (in press).

11. MIRAMBELL, E., AGUADO, A., DIEZ, P. "Acciones térmicas a considerar en el proyecto de puentes de hormigón". Documento Convenio TC-664. Dirección General de Carreteras. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Diciembre, 1989.

12.—MOPU. "Instrucción relativa a las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera". Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid, 1972.

13.—PRIESTLEY, M.J.N., BUCKLE, I.G. "Ambient Thermal Response of Concrete Bridges".

Road Research Unit Bulletin N° 42. National Roads Board, New Zealand. Wellington, 1979.

## RESUMEN

En este artículo se presenta un estudio sobre la respuesta térmica de puentes de vigas frente a los efectos térmicos ambientales. La aplicación de una metodología general de obtención de las acciones térmicas que hay que considerar en el proyecto de puentes de vigas de hormigón emplazados en la geografía española peninsular, permitirá determinar el rango anual de la temperatura media del tablero y el gradiente térmico vertical al que se ven solicitados. Los resultados derivados de este estudio se analizan comparativamente con lo obtenido mediante la aplicación de la normativa nacional vigente.

## SUMMARY

In the present paper, the thermal response of concrete T-beam bridges in front of environmental thermal effects is analysed. The application of a general methodology in order to determine the thermal actions to be considered in design of concrete bridges allows to know the effective temperature range of the deck and thermal gradients in concrete T-beam bridges located on the Iberian Peninsula. The results derived from this study are compared with those obtained by means of several expressions existing in national codes.

\* \* \*

## Reunión de la Comisión N.º 2 de la FIP "Prestressing Materials and Systems"

Los días 4 y 5 de abril 1990 tuvo lugar en el L.C.P.C. de París la reunión de la citada Comisión, con una asistencia de 22 miembros representando un total de 12 países.

Los temas más relevantes tratados en la misma, fueron:

### 1. Durability-case histories

La Comisión ha publicado el segundo informe y se hace difícil continuar con el mismo, dada la poca o nula información que se recibe. De cualquier forma, parece que las causas de mayor incidencia son el almacenamiento, tratamientos de limpieza inadecuados antes del galvanizado y la instalación.

Ante la intención de prohibir el uso de cordones y barras galvanizados en los EE.UU., la Comisión decide crear un Grupo de trabajo que clarifique el por qué de los fallos de los aceros galvanizados. Este Grupo presentará sus conclusiones en un plazo máximo de 2 meses.

### 2. Multi-axial behaviour

Se está imponiendo como obligatorio en varias normas europeas el ensayo a tracción desviada que ya rige en Francia, Suiza y Holanda, en tanto que Alemania lo incorporará en breve.

Es importante tener en cuenta que para que el valor obtenido "D" sea representativo, se debe tomar la media, de por lo menos 5 ensayos.

media, de por lo menos 5 ensayos.

En los países que lo han adoptado, se exige que el ensayo figure en los procedimientos de C.C. de todas las fábricas, aun cuando no es obligatoria su realización en cada envío.

### 3. Barras de alta resistencia

La producción mundial se estima en unas 950.000 t para barras de diámetros comprendidos entre 10 y 40 mm. El 70 por 100 de la producción se realiza en la Unión Soviética.

### 4. Pretensado exterior

El Grupo de trabajo presenta la tercera versión del mismo, que será presentada en Hamburgo. Se decide incluir detalles de las zonas de anclaje, paso en pilas y centro de vano en la versión definitiva.

### 5. Fibras de alta resistencia

El Profesor Rostasy presenta el trabajo realizado por su Grupo, y como resumen del mismo pueden, por el momento, señalarse los siguientes aspectos:

—Pérdidas a largo plazo inferiores, debido a módulo de Elasticidad más bajo que el acero.

—Gran diferencia de propiedades físicas entre la fibra y los compuestos de fibras.

—Se está produciendo una importante aplicación de las mismas (como elemento de pretensado activo) en el campo del pretensado, principalmente en Francia y Holanda.

—Se prevé que uno de los campos de aplicación futura sean los tirantes, aun cuando el costo actual haga que por razones económicas sea, de momento, difícil su implantación.

### 6. Materiales y sistemas para tirantes

R. Martí presenta el primer borrador de este documento, que en su versión original será una Recomendación FIP, acordándose que en Hamburgo se ponga especial énfasis en explicar el proceso de ensayo y homologación.

### 7. Tendones

Se va a preparar un nuevo documento por la Comisión, que analizará los tendones, tanto desde el punto de vista del acero, como vainas, anclajes e inyección.

Asimismo, se discutieron los dos documentos que, junto con la Comisión 4 se van a revisar:

—Protección ante la corrosión de los aceros de pretensado.

—Homologación de los sistemas de pretensado.

Con referencia a este último, y en vista a la situación de la CEE en 1993, se intentará recomendar la existencia de organismos de homologación en todos los países, que actúen con idénticos criterios.

Finalmente, se decidió que las próximas reuniones tendrían lugar el próximo 8 de junio en Hamburgo, y del 10 al 12 de abril de 1991 en Budapest.

\* \* \*

## Reunión del Grupo de Trabajo "Composite beam-block floor systems", de la Comisión de Prefabricación de la FIP.

El día 10 de octubre de 1989 se celebró en París la reunión del Grupo de Trabajo "Composite beam-block floors systems" de la Comisión de Prefabricación de la Federación Internacional del Pretensado. Bajo la presidencia del Profesor J. Calavera, asistieron a la misma las siguientes personas:

Sr. Dardare (Francia).  
Sr. Fafé (Holanda).  
Sr. Catania (Italia).

Sr. Piñeiro (España).  
Sr. León (España).  
Sr. Ley (España).

Se discutió el 4º borrador del documento "Composite beam-block floors systems". Con las observaciones recogidas en esta reunión, se está preparando una versión final que se presentará en el XI Congreso Internacional de la F.I.P. que habrá de celebrarse, en Hamburgo (R.F.A.) del 4 al 9 de junio del presente año 1990.

# Interpretación analítica de la fórmula de Branson para el cálculo de flechas en piezas de hormigón armado

A. Marí

Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona  
Universidad Politécnica de Cataluña

F. López Almansa

Escuela T.S. de Arquitectura de Barcelona  
Universidad Politécnica de Cataluña

E. Mirambell

Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona  
Universidad Politécnica de Cataluña

## 1. INTRODUCCION

La utilización de materiales de alta resistencia en las estructuras de hormigón armado y hormigón pretensado, ha permitido disminuir las dimensiones  $y$ , en particular, los cantos de los elementos estructurales hasta el punto de que ello, aún satisfaciendo los requisitos resistentes, puede dejar la estructura fuera de servicio a causa de su excesiva deformabilidad. Se establece así el estado límite de deformaciones.

Al igual que en cualquier estado límite, se precisa establecer la comparación sollicitación-respuesta ( $S-R$ ). En la inecuación  $S \leq R$ ,  $S$  es el movimiento o flecha producido por las cargas actuales y  $R$  es la tolerancia o flecha máxima admisible, cuyo valor depende en gran medida del tipo de estructura y de la funcionalidad que debe satisfacer. En este aspecto, la vigente Instrucción EII-88 [5] suprime (en el Artículo 45) las limitaciones prácticas de flechas recogidas en la antigua EH-82 [6] por considerar que dichas restricciones dependerán, en general, de cada situación particular. No obstante, para casos tipificados, tales como las estructuras y forjados de edificación no singulares, puede ser conveniente establecer un conjunto de limitaciones prácticas que faciliten la comprobación del estado límite de deformabilidad en estos casos. Un conjunto de recomendaciones de este tipo se contiene en la Instrucción EF-88 [7].

En lo referente al cálculo del parámetro  $S$  (sollicitación, movimiento o flecha), un análisis realista de la deformabilidad de las estructuras de hormigón presenta numerosas dificultades debido, entre otras, a las siguientes razones:

—Relaciones  $\sigma-\epsilon$  no lineales para los materiales hormigón y acero. Resistencia a tracción del hormigón casi nula, con la consecuente formación de fisuras y la propagación de éstas.

—Trabajo conjunto de dos materiales (hormigón y acero) adheridos de forma imperfecta y con propiedades reológicas notablemente distintas.

Fenómenos de retracción y fluencia del hormigón, con variación de su módulo de deformación (ya de por sí altamente incierto) y de otras propiedades, con el tiempo.

Carácter discreto de la fisuración, existiendo una zona traccionada entre fisuras que colabora a la rigidez gracias a la adherencia con el acero.

—Existencia de cargas permanentes y variables, frecuentes e infrecuentes.

Efectos de segundo orden en estructuras esbeltas y necesidad de considerar, en algunos casos, las deformaciones provocadas por el esfuerzo constante.

De estos fenómenos, el que más influye en la respuesta estructural en servicio de piezas sometidas fundamentalmente a flexión, es la fisuración.

Aunque ésta es limitada y aparece de forma reparada, produce una notable variación de la rigidez estructural. En este aspecto, la normativa EH-88 [5] introduce un cambio sustancial con respecto a la EH-82 [6] al adoptar, para el cálculo de flechas instantáneas, el método del ACI, el cual se basa en la determinación de una inercia equivalente  $I_e$  de la pieza que se va a analizar, que contempla la existencia de posibles zonas fisuradas, según la fórmula propuesta por Branson [1].

La fórmula de Branson, deducida por su autor a partir de resultados experimentales [1, 2] es:

$$I_e = \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 I_b + \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] I_f \geq I_b \quad (1)$$

en donde  $I_e$ ,  $I_b$  e  $I_f$  son, respectivamente, las inercias equivalente, bruta y fisurada.  $M_f$  es el momento de fisuración de la sección y  $M_a$  es el momento máximo de servicio a que está sometida la pieza.

La inercia fisurada  $I_f$  puede obtenerse a través de las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad, a nivel sección, adoptando relaciones tensión-deformación lineales (para el hormigón y el acero) y despreciando la resistencia a tracción del hormigón.

En sección rectangular,  $I_f$  se obtiene a través de la expresión:

$$I_f = n A_s (d - x) (d - x/3) \quad (2)$$

en donde  $n$  es el coeficiente de equivalencia,  $A_s$  es el área de la armadura de tracción,  $d$  es el canto útil de la sección y  $x$  es la profundidad de la fibra neutra.

En el presente artículo se analizan los fundamentos teóricos en que se apoya la fórmula de Branson (1), llegando a la conclusión de que el parámetro de interpolación entre las inercias bruta y fisurada es precisamente  $(M_f/M_a)^3$ . De ello pueden extraerse conclusiones de interés que permitan extender los resultados de Branson a otros casos no contemplados en sus ensayos.

## 2. DEFORMACION DE LA VIGA EN CONDICIONES DE SERVICIO

Se considera una viga isostática, de directriz recta, simplemente apoyada en sus extremos, tal como la que se presenta en la Figura 1. La sección transversal y la cuantía de armadura se mantienen constantes a lo largo de la directriz. La viga está sometida a una carga uniformemente distribuida sobre toda su longitud.

Si la viga ha sido dimensionada en condiciones de rotura siguiendo, por ejemplo, las recomendaciones de la EH-88 [5] existirá un tramo central en el que, por exceder allí el momento flector  $M$  al momento de fisuración de la sección  $M_f$ , la viga es-

tará fisurada; las coordenadas  $x$  de las secciones que limitan dicho tramo se han representado en la Figura 1 como  $x_1$  y  $x_2$ , correspondiendo el valor  $x_1$  a la sección más próxima al apoyo izquierdo. El origen de coordenadas se sitúa en dicho apoyo, el sentido positivo del eje horizontal " $x$ " es hacia la derecha y el del eje vertical " $y$ " hacia abajo. Esta disposición de los ejes de coordenadas implica que el valor positivo de la segunda derivada, " $y$ " corresponde al caso en que la parte cóncava está orientada hacia abajo.

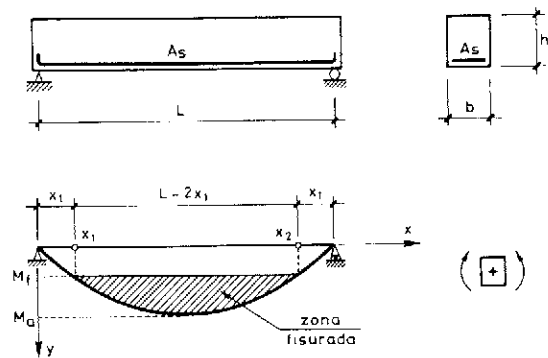


Fig. 1. Barra biapoyada sometida a una carga uniforme.

En la Figura 1 se muestra el diagrama parabólico de momentos flectores a que se encuentra sometida la viga a causa de la carga repartida " $q$ " que gravita sobre ella. La expresión que proporciona el momento flector  $M$  en una sección situada a una distancia  $x$  del apoyo izquierdo es

$$M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad (3)$$

En (3) se ha considerado (tal como suele hacerse habitualmente) que los momentos positivos son los que comprimen las fibras superiores de la sección. El valor de la longitud  $x_1$  de los tramos no fisurados adyacentes a los apoyos, se obtiene igualando el valor dado en (3) al momento de fisuración  $M_f$

$$M(x) = M_f \quad (4)$$

resultando la ecuación de segundo grado

$$x^2 - Lx + \frac{2M_f}{q} = 0 \quad (5)$$

cuyas soluciones son

$$\frac{L \pm \sqrt{L^2 - \frac{8M_f}{q}}}{2} \quad (6)$$

La solución que corresponde al signo menos (es decir, la de menor valor absoluto) es la distan-

cia buscada  $x_1$ . Teniendo en cuenta que el valor del momento máximo  $M_a$  es

$$M_a = M(L/2) = \frac{qL^2}{8} \quad (7)$$

se tiene que  $x_1$  obedece a la expresión

$$x_1 = \frac{L}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{M_f}{M_a}} \right\} \quad (8)$$

Teniendo en cuenta que el cociente  $M_f/M_a$  es menor que la unidad

$$\frac{M_f}{M_a} < 1 \quad (9)$$

la expresión (8) que proporciona el valor de  $x_1$  puede ser desarrollada en serie de Taylor en función de dicho cociente, resultando

$$x_1 = \frac{L}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{M_f}{M_a} \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 + \dots \right\} \quad (10)$$

Los términos no representados en (10) corresponden a potencias de exponente mayor que 3. El radio de convergencia de la serie es igual a 1.

Si el momento máximo  $M_a$  es notablemente superior al momento de fisuración  $M_f$  (tal como suele ocurrir si la viga ha sido dimensionada aprovechando adecuadamente la capacidad resistente de la sección) el cociente  $M_f/M_a$  es muy inferior a la unidad y puede obtenerse una aproximación suficiente para  $x_1$ , considerando únicamente el primer término del desarrollo contenido en (10)

$$x_1 = \frac{L}{4} \left( \frac{M_f}{M_a} \right) \quad (11)$$

En la siguiente sección se formulan, a partir de los resultados obtenidos en ésta, las ecuaciones diferenciales de la curva deformada, en los tramos fisurado y no fisurado.

### 3. ECUACION DIFERENCIAL DE LA CURVA DEFORMADA

Las ecuaciones diferenciales que rigen la deformación vertical de la viga debida a su flexión son

$$y_I''(x) = -\frac{M(x)}{k_I} \quad 0 \leq x \leq x_1; \quad x_2 \leq x \leq L \quad (12a)$$

$$y_{II}''(x) = -\frac{M(x)}{k_{II}} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (12b)$$

En las expresiones (12) el subíndice I corresponde a los tramos laterales no fisurados, mientras que el subíndice II corresponde al tramo cen-

tral. Esta notación viene sugerida por el hecho de que la sección no fisurada trabaja en la fase I y la fisurada lo hace ordinariamente en la fase II [3, 4]. Los términos  $k_I$  y  $k_{II}$  son las rigideces en cada fase [3, 4] y son iguales a

$$k_I = E I_b \quad k_{II} = E I_f \quad (13)$$

en donde  $I_b$  es el momento de inercia de la sección completa e  $I_f$  el de la sección fisurada.

Sustituyendo en (12a) y (12b) el valor del momento flector  $M(x)$  dado en (3), se obtienen las ecuaciones diferenciales dadas en (12), en la forma siguiente

$$y_I''(x) = \frac{q}{2k_I} x^2 - \frac{qL}{2k_I} x \quad (14a)$$

$$y_{II}''(x) = \frac{q}{2k_{II}} x^2 - \frac{qL}{2k_{II}} x \quad (14b)$$

En la siguiente sección se describe el proceso de integración de las ecuaciones diferenciales (14).

### 4. INTEGRACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE LA DEFORMADA

Las expresiones (14) son ecuaciones de variables separadas y pueden ser integradas directamente. Integrando una vez, resultan los valores de las primeras derivadas  $y_I'$  e  $y_{II}'$  (giros)

$$y_I'(x) = \frac{q}{2k_I} \frac{x^3}{3} - \frac{qL}{2k_I} \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (15a)$$

$$y_{II}'(x) = \frac{q}{2k_{II}} \frac{x^3}{3} - \frac{qL}{2k_{II}} \frac{x^2}{2} + C_3 \quad (15b)$$

Integrando nuevamente, se obtienen los valores de las flechas,  $y_I$  e  $y_{II}$

$$y_I(x) = \frac{q}{2k_I} \frac{x^4}{12} - \frac{qL}{2k_I} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (16a)$$

$$y_{II}(x) = \frac{q}{2k_{II}} \frac{x^4}{12} - \frac{qL}{2k_{II}} \frac{x^3}{6} + C_3 x + C_4 \quad (16b)$$

Considerando únicamente, por simetría, la mitad izquierda de la viga representada en la Figura 1, las condiciones de contorno que es preciso imponer para hallar los valores de las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son

$$y_I(0) = 0 \quad (17a)$$

$$y_I'(x_1) = y_{II}'(x_1) \quad (17b)$$

$$y_I(x_1) = y_{II}(x_1) \quad (17c)$$

$$y_{II}'(L/2) = 0 \quad (17d)$$

La formulación de la condición (17a) permite deducir inmediatamente, sustituyendo en (16a), que

$$C_2 = 0 \quad (18)$$

La condición (17d) conduce, utilizando (15b), a

$$C_3 = \frac{q L^3}{24 k_{II}} \quad (19)$$

El valor de la constante  $C_1$  se obtiene imponiendo la condición (17b) a los valores de  $y'$  dados en las igualdades (15). Resulta

$$C_1 = \frac{q L^3}{24 k_{II}} - \frac{q x_1^2}{12} \left( \frac{1}{k_{II}} - \frac{1}{k_I} \right) (3 L - 2 x_1) \quad (20)$$

Por último, el valor de  $C_4$  se obtiene sustituyendo (17c) en (16)

$$C_4 = -\frac{q x_1^3}{24} \left( \frac{1}{k_{II}} - \frac{1}{k_I} \right) (4 L - 3 x_1) \quad (21)$$

Sustituyendo los valores de  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  dados, respectivamente, en (20), (18), (19) y (22), en las expresiones (16), se obtienen las ecuaciones de la curva deformada de la viga.

El valor de la flecha máxima se obtiene sustituyendo  $x = L/2$  en la expresión (16b), resultando

$$y_{\text{máx}} = y_{II}(L/2) = \frac{5 q L^4}{384 k_{II}} - \frac{q x_1^3}{24} \left( \frac{1}{k_{II}} - \frac{1}{k_I} \right) (4 L - 3 x_1) \quad (22)$$

Si se particulariza para el valor de  $x_1$  dado en (11) y teniendo en cuenta (7) resulta

$$y_{\text{máx}} = y_{II}(L/2) = \frac{5 M_a L^2}{48 k_{II}} \left\{ 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right\} + \frac{5 M_a L^2}{48 k_I} \frac{1}{5} \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \quad (23)$$

La expresión (23) puede escribirse, de forma condensada

$$y_{\text{máx}} = y_2 (1 - \lambda) + y_1 \lambda \quad (24)$$

en donde  $y_2 = \frac{5 M_a L^2}{48 k_{II}}$  es la flecha máxima que se produciría considerando la rigidez fisurada,  $k_{II}$ , a lo largo de toda la longitud de la pieza, e  $y_1 = \frac{5 M_a L^2}{48 k_I}$  es la flecha máxima que se obtendría considerando la rigidez íntegra,  $k_I$ . El térmi-

no  $\lambda$  es igual a  $\frac{1}{5} \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3$ .

La igualdad (24) indica que la flecha de una pieza de hormigón armado puede obtenerse por interpolación lineal entre las flechas  $y_1$  e  $y_2$ , siendo el parámetro de interpolación  $\lambda$  un factor de  $\left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3$ .

Aunque la expresión (23) presenta errores no despreciables para valores de  $M_f/M_a$  próximos a la unidad, no deja de ser interesante observar que el parámetro de interpolación sea proporcional al cubo del cociente  $M_f/M_a$ , tal como ocurre en la fórmula de Branson (1).

## 5. OBTENCION DEL MOMENTO DE INERCIA EQUIVALENTE $I_e^*$

El valor del momento de inercia equivalente  $I_e^*$  se halla imponiendo que la flecha de la viga, en su punto medio, sea igual a la flecha de una viga ideal de sección constante y momento de inercia igual a  $I_e^*$ . Teniendo en cuenta que la flecha de dicha viga es igual a  $\frac{5 q L^4}{384 E I_e^*}$  se puede despejar en (22) la inercia equivalente teórica  $I_e^*$ , siendo su valor

$$I_e^* = \frac{I_b}{\alpha + \frac{I_b}{I_f} (1 - \alpha)} \quad (25)$$

siendo

$$\alpha = \frac{16}{5} \left( \frac{x_1}{L} \right)^3 \left( 4 - 3 \frac{x_1}{L} \right) \quad (26)$$

Particularizando para el valor de  $x_1$  dado en (11) y despreciando en (26) el sumando  $3 \frac{x_1}{L}$  frente a 4, se obtiene

$$I_e^* = \frac{I_f}{1 - \frac{1}{5} \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \left( 1 - \frac{I_f}{I_b} \right)} \quad (27)$$

Puesto que, habitualmente, los cocientes  $M_f/M_a$  e  $I_f/I_b$  son menores que la unidad, la expresión (27) puede ser desarrollada en serie de Taylor. Tomando únicamente los dos primeros términos del desarrollo, se obtiene la siguiente aproximación para el momento de inercia equivalente  $I_e^*$

$$I_e^* = I_f \left\{ 1 + \frac{1}{5} \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \left( 1 - \frac{I_f}{I_b} \right) \right\} \quad (28)$$

La simple observación de (28) muestra que dicha igualdad proporciona, para el momento de inercia  $I_e^*$ , un valor siempre superior al del momento de inercia de la sección fisurada,  $I_f$ , lo cual con-

cuerda plenamente con el significado físico del problema. En particular, si el momento de fisuración  $M_f$  es nulo, (lo cual equivale a despreciar completamente la resistencia a tracción del hormigón) el valor de  $I_e^*$  es igual al de  $I_f$ , tal como la coherencia de una solución correcta exige. Sin embargo, para valores de  $M_f$  de superior magnitud, la hipótesis  $\frac{M_f}{M_a} < 1$  en que se basa la obtención de (28)

pierde validez y la aproximación dada por dicha expresión es de peor calidad. En el caso extremo en que  $M_f = M_a$  (es decir, ausencia de fisuración) el resultado dado por (28) carece absolutamente de sentido y no coincide con el resultado que cabe esperar, es decir, el momento de inercia de la sección completa  $I_b$ .

Para evitar los errores en (28), para valores de  $M_f/M_a$  próximos a la unidad, dado que se ha identificado como parámetro decisivo en el cálculo de flechas el cociente  $\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3$ , podría plantearse, para la obtención de  $I_e^*$ , una interpolación entre las inercias fisurada,  $I_f$ , e íntegra,  $I_b$ , utilizando  $\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3$  como parámetro de interpolación. En el caso más simple de interpolación lineal se tiene que

$$I_e^* = I_f + \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 (I_b - I_f) = \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 I_b + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3\right] I_f \quad (29)$$

expresión que coincide, obviamente, con la fórmula de Branson (1).

## 6. COMPARACION ENTRE LOS RESULTADOS TEORICOS Y LOS DE BRANSON

Si se comparan los valores de la inercia equivalente,  $I_e$ , proporcionada por Branson en (1), con el valor  $I_e^*$  obtenido teóricamente en (27), se obtienen los resultados contenidos en la Tabla 1.

$I_f/I_b$	$M_f/M_a=0,1$	$M_f/M_a=0,2$	$M_f/M_a=0,3$
0,2	0,996	0,970	0,907
0,3	0,998	0,983	0,945
0,4	0,999	0,989	0,965
0,5	0,999	0,993	0,977

Los datos de la Tabla 1 muestran que, tal como se ha justificado previamente, el ajuste entre  $I_e$  e  $I_e^*$  es muy alto para relaciones  $M_f/M_a$  reducidas.

En los casos prácticos, la comprobación de flechas se realiza para la situación de servicio más desfavorable en que la estructura está sometida a la carga máxima. En tal caso, la relación entre el momento de fisuración  $M_f$  y el momento máximo  $M_a$  suele ser inferior a 0,3. Se presenta a continuación una breve justificación a partir de un ejemplo concreto.

Se considera la viga de la Figura 1, de sección rectangular, de ancho  $b$  y canto  $h$ , biapoyada, con luz de cálculo  $L$  y sometida a una carga uniformemente distribuida  $q$ . La resistencia  $f_{ct}$  del hormigón a tracción se toma igual al 10 por 100 de la resistencia característica  $f_{ck}$  y, por tanto, igual al 15 por 100 de la resistencia de cálculo  $f_{cd}$ .

El momento de fisuración es

$$M_f = \frac{I_b f_{ct}}{h/2} = \frac{b h^2 f_{ct}}{6} \approx 0,025 f_{cd} b h^2 \quad (30)$$

Considerando que se ha dimensionado en rotura, con armadura infracrítica, el momento de servicio  $M_a$  valdrá, como mínimo

$$M_a = \frac{M_d}{\gamma_f} \approx \frac{0,20 f_{cd} b h^2}{\gamma_f} = 0,125 f_{cd} b h^2 \quad (31)$$

Por tanto

$$\frac{M_f}{M_a} = \frac{0,025}{0,125} = 0,2 \quad (32)$$

Se observa, por tanto, que estamos en el rango de relación  $M_f/M_a$  en el que la inercia teórica y la propuesta por Branson difieren menos de un 5 por 100.

## 7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha obtenido, a partir de consideraciones teóricas, una expresión de la inercia equivalente de una viga simplemente apoyada. Se ha tenido en cuenta la fisuración de la pieza en los tramos de la misma en que el momento flector actuante supera al momento de fisuración de la sección.

La expresión (28) que se ha deducido, presenta una notable semejanza con la fórmula de Branson (1) obtenida a partir de resultados experimentales y permite justificar el exponente cúbico que afecta al parámetro  $M_f/M_a$  en la citada fórmula.

Las diferencias existentes entre la expresión (28) obtenida analíticamente y la fórmula (1) propuesta por Branson, responden a diversas razones. Por una parte, el estudio experimental incluye fenómenos no tenidos en cuenta en el análisis teórico, tales como la contribución del hormigón traccionado y el menor nivel de armado en las zonas próximas a los apoyos, entre otros. Por

otra parte, el valor de la inercia equivalente se ha obtenido desarrollando en serie de potencias de  $M_f/M_a$  en torno al origen, de forma que, para valores de dicho cociente próximos a la unidad, los errores son importantes.

En los casos habituales de comprobación de flechas, la relación  $M_f/M_a$  oscila entre 0,20 y 0,30, rango en el cual la fórmula de Branson y la obtenida teóricamente coinciden sensiblemente.

El presente trabajo puede constituir un primer paso para extrapolar los resultados obtenidos por Branson a otras situaciones no contempladas en sus ensayos.

## REFERENCIAS

1. BRANSON, D.E.: "Deformation of Concrete Structures". Ed. Mc Graw-Hill, 1977.
2. CALAVERA, J.: "Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado para Edificios". Intemac, 1985.
3. MURCIA, J., AGUADO, A. y MARI, A.R.: "Hormigón Armado y Pretensado I". Publicación docente, ETSICC y P., U.P.C. Barcelona, 1990.
4. MIRAMBELL, E.: "Estado límite de deformabilidad". Memoria para concurso de Profesor Titular de Universidad, 1987.
5. "Instrucción EH-88 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado". MOPU, 1988.
6. "Instrucción EH-82 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado". MOPU, 1982.
7. "Instrucción EF-88 para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón armado o pretensado". MOPU, 1988.

8. ALVAREZ BALERIOLA, J.I., BAQUEDANO, F., GUTIERREZ, J.P. y RECUERO, A.: "Fisuración y cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado". I.E.T.C.C., Monografía 376-377, 1984.

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio sobre la deformabilidad de vigas de hormigón armado, basado en consideraciones de tipo teórico. Las vigas que se han considerado tienen características similares a las que fueron utilizadas por Branson para deducir, de forma prácticamente empírica, su conocida expresión para el momento de inercia equivalente de la sección. En el análisis presentado aquí se simula, mediante un modelo matemático, la deformación de la viga en fase de fisuración y se llega a una expresión que presenta interesantes coincidencias formales y cuantitativas con la obtenida por Branson.

## SUMMARY

In this paper a theoretical study about deformations in reinforced concrete beams is presented. The beams have similar characteristics to those considered by Branson to obtain the equivalent inertia. In this study the deformation of the beam is simulated by a mathematical model taking into account cracking. An expression for the equivalent inertia for the calculation of deflections in reinforced concrete cracked beams which is very similar to the one obtained by Branson has been obtained.

\* \* \*

## Reunión de la Comisión de Prefabricación de la FIP, celebrada en Auckland y Taupo (Nueva Zelanda), los días 7, 8 y 9 de diciembre de 1989

Presidió la reunión Mr. Van Acker, de Bélgica, acudiendo representantes de siete países, entre ellos el Prof. J. Calavera de España. Se trataron los asuntos siguientes:

Losas pretensadas huecas. Proyecto de piezas prefabricadas mediante resultado de ensayos. Cálculo estructural de piezas pretensadas y conservación de energía. Estructuras compuestas de hormigón prefabricado y hormigón in situ. Sistemas de forjados unidireccionales de viguetas pretensadas. Enlaces entre piezas estructurales. Piezas prefabri-

cadas de pared delgada. Garantía de Calidad. Construcción por dovelas. Curado acelerado.

En particular se discutió la 5ª versión del texto correspondiente a los "Forjados unidireccionales de viguetas pretensadas" de cuyo Grupo de Trabajo es Presidente el Prof. Calavera y miembros los técnicos españoles R. Piñeiro, J. Ley y J. León.

La próxima reunión quedó fijada para el mes de junio, durante la celebración del Congreso de la F.I.P. en Hamburgo.



# Comportamiento en destesado de armadura activa. Parte I: Modelo teórico

Xavier Montobbio  
Ingeniero de Caminos  
Antonio Aguado  
Dr. Ingeniero de Caminos  
Departamento de Ingeniería de la Construcción  
E.T.S. Ingenieros de Caminos. Barcelona

## 1. INTRODUCCION

Desde los inicios de la técnica del pretensado, es conocido el hecho, durante la puesta en tensión, de la existencia de unas pérdidas de fuerza de pretensado a lo largo del trazado de la armadura, debidas al rozamiento entre el acero y la vaina.

Como consecuencia de dicho rozamiento, aparecen unas fuerzas longitudinales que actúan en los contactos vaina-armadura. El sentido de estas fuerzas que se oponen al movimiento de la armadura es contrario al sentido del desplazamiento relativo de la armadura respecto al hormigón. Por tanto, al existir una inversión de dicho movimiento, las fuerzas de rozamiento cambian de signo.

Esta inversión del movimiento, frente al usual producido en el tesado, puede venir dado por la propia deformabilidad de la estructura (con tendones no adherentes) en servicio, o bien por un destesado de la armadura activa. En este último caso, el destesado puede estar originado por una disminución exterior de carga, o bien por una pérdida de carga ocasionadas por un acortamiento de la armadura (por ejemplo, por penetración de cuña en los anclajes).

En una estructura pretensada, con anclaje de cuñas, el comportamiento del tendón al producirse la penetración de las mismas es un tema de poco interés cara al proyecto, ya que, en general, las secciones críticas que van a condicionar el cálculo de

la fuerza de pretensado suelen estar relativamente alejadas de las zonas de anclajes, donde se producen las mayores pérdidas por penetración de cuñas. Este hecho ha dado lugar a que los mecanismos físicos y matemáticos que rigen el fenómeno del destesado son, en gran medida, desconocidos y, en caso de querer superar el modelo "simétrico" habitual, se recurre al modelo simplificado propuesto por Leonhardt (1977), el cual indica:

*"... en el caso de alambres lisos y tubos envolventes lisos, los coeficientes de rozamiento positivo y negativo son aproximadamente iguales, mientras que con alambres corrugados y tubos ondulados, el coeficiente de rozamiento negativo alcanza el valor de 1,5 veces el correspondiente al rozamiento positivo..."*

En los últimos años, existe un creciente interés por analizar el comportamiento en destesado de armadura activa. Este interés tiene una *vertiente científica*, en la que, para diversas tipologías estructurales con tendones no adherentes, se han dado significativos pasos hacia una formulación global del comportamiento. Murcia (1989), Roca (1988).

Este interés, se manifiesta asimismo en la *vertiente técnica*, en especial para aquellas estructuras con tendones no adherentes sujetas a programas de vigilancia del pretensado que incluyan el ensayo de despegue. Tal como señalan Aguado et al (1988), en la determinación de las bandas de tolerancia

asociadas al pretensado del edificio de contención de distintas centrales nucleares españolas, las tolerancias asignadas a las pérdidas por penetración de cuña, son incorrectas, lo que con frecuencia está conduciendo a la obtención, en distintos tendones, de fuerzas de pretensado, en el ensayo de despegue, por encima del valor obtenido mediante la estimación de cálculo correspondiente a la banda de tolerancia para la edad de referencia.

Dentro del marco reseñado, este artículo tiene por objeto presentar un modelo del comportamiento en el destesado de armadura activa, haciendo especial hincapié en las primeras etapas del mismo, que pueden ser equivalentes al comportamiento por penetración de cuña.

En este artículo, el modelo propuesto se contrasta numéricamente, dejando para un artículo posterior la contrastación del mismo desde un punto de vista experimental. Asimismo, el modelo propuesto, se contrapone al modelo habitual recogido por Leonhardt (1977), mostrando la inconsistencia de esta última formulación para la etapa del destesado.

## 2. MODELO PROPUESTO

### 2.1. Introducción

En la mayoría de libros de pretensado viene detalladamente desarrollado el tema del tesado de armaduras activas, incluyendo la demostración matemática de la ley que gobierna el fenómeno (Fórmula 1 de Euler-Eytelwein-Grashof).

$$\text{En tensión: } P_x = P_0 \cdot e^{-(\mu \sum \alpha + kx)} \quad (1)$$

donde las distintas variables tienen el significado conocido por todos.

Por otro lado, la mayoría de autores asume, para el cálculo de las pérdidas de pretensado por penetración de cuñas, una formulación similar a la fórmula (1), si bien con exponente positivo. Dentro de estos autores, Leonhardt (1977), tal como se ha dicho antes, admite variar el valor del coeficiente de rozamiento (Fig. 1).

*Por penetración de cuña:*

$$P_x = (P_0 - \Delta P_0) e^{+(\mu' \sum \alpha + kx)} \quad (2)$$

El planteamiento expuesto es el comúnmente seguido en la actualidad para determinar la pérdida de fuerza de pretensado debida a la penetración de cuña, en aquellos sistemas que emplean este tipo de anclaje. Este planteamiento (tomando como es usual en proyecto  $\mu = \mu'$ ) tiene la ventaja de simplicidad y la práctica nula incidencia en estructuras pretensadas con tendones adherentes, si bien, como se demuestra en lo que sigue, es incorrecto.

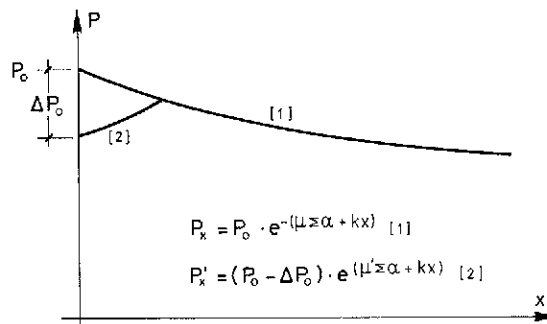


Fig. 1. Leyes de la fuerza de pretensado, en tesado y destesado.

### 2.2. Método propuesto. Hipótesis del mismo

#### Hipótesis

A fin de obtener una ley capaz, al mismo tiempo, de reproducir numéricamente el fenómeno del destesado de armaduras previamente puestas en carga, y de ser suficientemente simple para poder ser aplicable en la práctica, vamos a realizar una serie de hipótesis simplificadoras, que van a definir conceptualmente el problema que nos proponemos desarrollar, desde el punto de vista teórico-matemático. Estas hipótesis, que se exponen y justifican a continuación, son:

1. Comportamiento elástico de los materiales.
2. Existencia de dos coeficientes de rozamiento. (Durante tesado y destesado).
3. Coeficientes de rozamiento constantes.
4. Principio de superposición.
5. Igual ondulación en las dos etapas.

1.—Para el nivel tensional con el que previsiblemente se trabaja, supondremos que tanto el acero como el hormigón son materiales perfectamente elásticos, con unos módulos de elasticidad constantes. Si bien es cierto que en el caso del hormigón esta hipótesis es discutible, en el caso del acero, la aplicación de esta hipótesis es factible para los niveles tensionales que van a resultar de proyecto, siguiendo la normativa existente MOPU (1980).

2.—En relación al coeficiente de rozamiento supondremos dos valores distintos,  $\mu$  y  $\mu'$ , actuantes durante el tesado y el destesado, respectivamente, en línea con el planteamiento de Leonhardt (1977). En la realidad, estos dos valores se podrían desglosar a su vez en otros dos, tal como se explica más adelante.

3.—En cada uno de los escalones, tanto de tesado como de destesado, supondremos que el coeficiente de rozamiento respectivo se mantiene constante. Ello no es óbice para suponer un distinto rozamiento en los diversos escalones de puesta o retirada de carga; pero de cara a la integración de las ecuaciones matemáticas, lo supondremos constante.

4.—Para estudiar el destesado de una armadura activa, vamos a suponer válido el principio de superposición, el cual nos permitirá descomponer el problema en dos fases o etapas: una fase inicial en la cual el tendón es tesado (sometido a una fuerza de tracción), y una segunda fase en que el tendón es destesado (sometido a una fuerza de compresión).

Esta segunda etapa, si bien por si sola no es posible (no podemos someter a una armadura activa a compresión), dentro del contexto del problema estudiado, y considerando que inicialmente la armadura ha sido traccionada, podemos interpretar la retirada de una carga, equivalente a la aplicación de otra carga de igual módulo pero sentido contrario; y por tanto, bajo esta perspectiva, es viable considerar la fase 2, en la cual sometemos la armadura a compresión (obviamente dicha carga de compresión jamás podrá superar en valor absoluto la carga de tracción aplicada durante la etapa 1).

Dado que en este problema, como veremos más adelante, superponemos directamente fuerzas, estimamos razonable la aplicación del principio de superposición.

5.—De igual forma a como se procede al formular matemáticamente el tesado, vamos a considerar, análogamente, las ondulaciones como un ángulo girado por unidad de longitud de tendón ( $\beta = K/\mu$ ) y de igual valor al considerado en la puesta en tensión.

En todo el desarrollo matemático que sigue, por simplicidad formal, obviaremos el ángulo de ondulación, considerándolo ya incluido en el ángulo girado,  $\alpha$ . Para obtener las ecuaciones finales, bastaría con substituir el término ( $\alpha$ ) por el término ( $\alpha + \beta \cdot x$ ), lo cual no incide en la argumentación que se expone con posterioridad.

Seguidamente, vamos a proceder, basándonos en las hipótesis consideradas, a la obtención de la ley matemática del destesado. Para ello, en aplicación del principio de superposición, vamos a descomponer el problema en dos fases: fase primera o de tesado, y fase segunda o de destesado, utilizando la siguiente nomenclatura:

- $P_0$  Fuerza de tesado en el extremo activo.
- $P$  Fuerza de tesado en la sección estudiada.
- $\Delta P_0$  Incremento de destesado en extremo activo.
- $\Delta P$  Incremento de destesado en sección estudiada.
- $\alpha$  Ángulo total girado por el tendón desde el extremo activo hasta la sección estudiada.
- $\mu$  Coeficiente de rozamiento durante tesado.
- $\mu'$  Coeficiente de rozamiento durante destesado.

#### Fase de tesado

Esta fase inicial corresponde al tesado, partiendo de una situación inicial de carga nula, y por tan-

to coincide con el problema que responde a la ley de Euler-Eytelwein-Grashof.

El decremento de fuerza de pretensado, respecto a la fuerza en el extremo activo, que se produce a lo largo de la longitud del tendón, derivando directamente la ecuación (1) es:

$$dP = -\mu \cdot P_0 \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} \cdot d\alpha \quad (3)$$

Por tanto, el esquema de fuerzas actuante en la fase de tesado, a lo largo de un diferencial de armadura, considerando la ecuación (3), será, tal como muestra la figura 2.

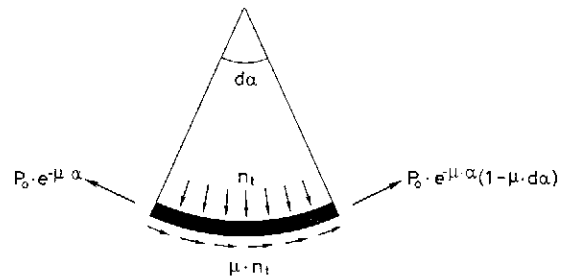


Fig. 2. Esquema de fuerzas correspondiente a la fase de tesado.

#### Fase de destesado

Tal como hemos explicado con anterioridad, esta etapa sólo tiene significado (armadura sometida a compresión) si consideramos que previamente el acero ha sido traccionado, y en el contexto del problema estudiado globalmente.

El esquema de fuerzas actuante sobre un diferencial de armadura, ( $ds$ ), viene reflejado en la figura 3.

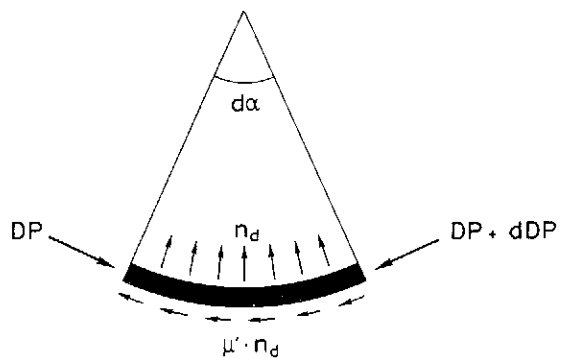


Fig. 3. Esquema de fuerzas correspondiente a la fase de destesado.

Superponiendo ambos estados, (tesado y destesado) podemos establecer el equilibrio de fuerzas actuantes a lo largo de un diferencial de armadura, en la configuración final. Recordemos que la fase

1, dado que se trata de una etapa que, a diferencia de la segunda, sí puede darse por sí sola, debe estar autoequilibrada.

Imponiendo el equilibrio de fuerzas en la configuración final, suma de ambas fases, obtenemos:

$$P_0 \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} - DP = P_0 \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} \cdot (1 - \mu \cdot d\alpha) - (DP + dDP) + \mu \cdot P_0 \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} \cdot d\alpha - \mu' \cdot DP \cdot d\alpha \quad (4)$$

Simplificando y reordenando convenientemente, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$dDP/d\alpha - \mu' \cdot DP = 0$$

Integrando la ecuación (5) e imponiendo la condición inicial correspondiente ( $DP = DP_0$  para  $\alpha = 0$ ), obtenemos la ley de los incrementos de la fuerza de destesado a lo largo de la armadura, en función del valor inicial de destensión, en el extremo activo:

$$DP(\alpha) = DP_0 \cdot e^{-\mu' \cdot \alpha} \quad (6)$$

Recordando el valor de la fuerza de pretensado en el tesado (ecuación 1), podemos escribir la ley de la fuerza total resultante tras el destesado como:

$$P - DP = P_0 \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} - DP_0 \cdot e^{-\mu' \cdot \alpha} \quad (7)$$

La expresión (6) nos indica el escalón de descarga que obtenemos en una sección dada, a partir del escalón de destesado aplicado en el extremo activo de la armadura. Pero dado que es de aplicación el principio de superposición, así lo hemos considerado, el origen de dichos escalones de descarga no tiene porque ser la ley de tesado obtenida. Es decir, el cero correspondiente a la descarga lo podemos situar a voluntad, ya sea a partir del inicio de la destensión, como del inicio de cada escalón de destensión, obteniendo, al aplicar la ecuación (6), idénticos resultados absolutos, si bien diferentes resultados relativos. Obviamente, si aplicamos la ecuación (7) para obtener la fuerza total resultante, dado que se trata de resultados absolutos, deberemos fijar un único origen de descarga en el punto final del tesado.

### 2.3. Análisis teórico de la ley obtenida

En lo que sigue se presenta un contraste de la formulación propuesta, ante distintas hipótesis y fases de destesado. Estas son:

- Rozamiento nulo durante destesado.

- Igual rozamiento en el tesado y en el destesado.

- Escalón de destesado nulo.

- Destensión total.

#### Rozamiento nulo durante el destesado ( $\mu' = 0$ )

Sustituyendo  $\mu' = 0$  en la ecuación (6) obtenemos

$$DP = DP_0 \quad (8)$$

Lo cual, como era de suponer, nos viene a indicar que si durante el destesado no existe rozamiento (rozamiento nulo), el escalón de descarga se mantiene constante a lo largo de toda la longitud de la armadura, es decir, las pérdidas de la fuerza de destesado a lo largo del tendón son constantes e iguales al valor en la sección de anclaje. El mismo decremento de carga que se aplique en el extremo activo de la armadura se obtendrá en el extremo pasivo.

#### Igual rozamiento en el tesado y en el destesado ( $\mu = \mu'$ )

Si suponemos igual rozamiento actuante durante el tesado y el destesado, es decir  $\mu = \mu'$ , la ley de fuerzas resultante después del destesado será, sustituyendo en la ecuación (7):

$$P - DP = (P_0 - DP_0) \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} \quad (9)$$

Si comparamos la ecuación (9) con la expresión correspondiente a la ley de tesado [ecuación (1)], observaremos que formalmente son idénticas. Esto nos viene a indicar que si tenemos igual rozamiento durante el tesado y el destesado, la trayectoria de los pares  $P - \alpha$  que vamos obteniendo es la misma, tanto al tesar como al destesar.

Este hecho nos viene a confirmar, a nivel teórico, que tesar una armadura hasta un cierto grado es equivalente (siempre que  $\mu' = \mu$ ) a tesarla a un grado superior y posteriormente destesar la diferencia (por ejemplo, obtendríamos idéntica ley de fuerzas, a lo largo de toda la armadura, al tesar un tendón a 800 t o bien tesarlo a 1.200 t y posteriormente destesar 400 t). Ello es del todo lógico, dadas las hipótesis realizadas (en especial las referentes al comportamiento elástico de los materiales y a la constancia del coeficiente de rozamiento).

#### Escalón de destesado nulo ( $DP_0 = 0$ )

El hecho de que el decremento de destesado en el extremo activo sea idénticamente nulo, debería traducirse en un escalón de destesado nulo a lo largo de toda la longitud del tendón. Efectivamente, si sustituimos  $DP_0 = 0$  en la expresión (6), obtenemos

mos, en cualquier sección y como era de esperar:

$$DP = 0 \quad (10)$$

*Destensión total* ( $DP_o = P_o$ )

Durante las primeras etapas tanto del tesado como del destesado, dando pequeños incrementos de carga en el extremo activo, el extremo pasivo no registra, en la práctica, modificación de la carga. Por tanto, desde el punto de vista teórico, cabe pensar en la posibilidad de que, si destesamos totalmente la armadura, es decir, si llevamos el extremo activo a carga nula, pueda aparecer en el extremo pasivo una cierta fuerza remanente. Veamos si la ley formulada nos permite esta posibilidad (teórica cuanto menos). Si sustituimos  $DP_o = P_o$  en la ecuación (7):

$$P - DP = P_o \cdot (e^{-\mu \cdot \alpha} - e^{-\mu' \cdot \alpha}) \quad (11)$$

Estudiando con detalle la ecuación (11), desde el punto de vista teórico, podemos diferenciar tres casos en relación a la posibilidad de existencia de una fuerza remanente de pretensado a lo largo del tendón.

- 1.- Si  $\mu' = \mu$ ,  $P - DP = 0$  no aparece fuerza remanente.
- 2.- Si  $\mu' > \mu$ ,  $P - DP > 0$  aparece fuerza remanente a lo largo de la armadura activa.
- 3.- Si  $\mu' < \mu$ ,  $P - DP < 0$  carece de sentido práctico, pues indica que el acero está sometido a una fuerza de compresión.

Los resultados obtenidos en el supuesto de destesado total de la armadura son coherentes. Efectivamente, si ambos coeficientes de rozamiento son iguales, como ya hemos visto con anterioridad, la trayectoria del tesado y del destesado es la misma y por tanto no hay posibilidad de fuerza remanente a lo largo del tendón.

Si el rozamiento actuante durante el destesado es superior al actuante durante el tesado, parece lógico pensar en la posibilidad de una fuerza remanente en el extremo pasivo, aún cuando el extremo activo no tenga carga.

La aparente incongruencia del supuesto 3 ( $\mu' < \mu$ ), del que se deriva que la armadura se ve sometida a compresiones, podría explicarse por el hecho de que, en la segunda fase del destesado, obtenida al aplicar el principio de superposición, se ha considerado como posible el someter una armadura a compresión. Se trata, por tanto, de una consecuencia del afán simplificador de las hipótesis consideradas, y que en modo alguno afecta los resultados buscados.

### 3. ANALISIS CRITICO SOBRE LA FORMULACION USUAL EN LA DETERMINACION DE PERDIDAS POR PENETRACION DE CUÑA

Para el cálculo de las pérdidas de la fuerza de pretensado debido a la penetración de cuñas en la zona de anclajes, se emplea como ley de destesado de la armadura activa, la correspondiente a la formulación dada por Leonhardt (1977), suponiéndola dogmáticamente válida. Sin embargo, como pretendemos demostrar en este apartado, su origen es ciertamente ambiguo, presentando su estudio minucioso, cierta invitación a la duda acerca de su validez.

Leonhardt (1977) propone, para la fuerza resultante tras el destesado, la expresión (2), dando a entender que la diferencia entre el tesado y el destesado estriba en un cambio de signo del coeficiente de rozamiento, considerándolo positivo en el tesado y negativo en el destesado (rozamiento negativo). Respetando la nomenclatura que hemos empleado a lo largo de este trabajo, la ley citada quedaría:

$$P - DP = (P_o - DP_o) \cdot e^{\mu' \cdot \alpha} \quad (12)$$

Efectivamente, si tomamos la ley de tesado (1) y consideramos un rozamiento negativo, con la hipótesis realizada  $\alpha = \alpha + \beta x$  obtenemos la ley correspondiente al destesado (12). Estudiando con detalle la bibliografía citada por Leonhardt y otros autores, no ha sido posible encontrar una base teórica sobre la cual sustentar la ley formulada en (12).

A nuestro juicio, desde el punto de vista teórico, ambos fenómenos (tesado y destesado) presentan los mismos mecanismos físicos (independientemente del valor que tomen los diversos coeficientes que intervienen en dichos fenómenos), por lo cual no parece lógico que tesado y destesado estén gobernados por funciones matemáticas distintas. Esta misma opinión la expresa Murcia (1989), al presentar, en un modelo global de comportamiento de tendones no adherentes, un coeficiente de rozamiento negativo en fases de destensión.

Restando de la ecuación (12) la ecuación (11), podemos obtener el escalón de destensión, según la formulación hoy en uso:

$$DP = P_o \cdot e^{-\mu \cdot \alpha} - (P_o - DP_o) \cdot e^{\mu' \cdot \alpha} \quad (13)$$

De forma análoga a como se ha procedido anteriormente con la ley de destesado propuesta, vamos, a continuación, a someter la formulación dada por Leonhardt (1977) a una contrastación teórica frente a distintas hipótesis y fases de destesado.

**Rozamiento nulo durante el destesado ( $\mu' = 0$ )**

Sustituyendo  $\mu' = 0$  en la ecuación (12), obtenemos:

$$P - DP = P_0 - DP_0 \quad (14)$$

lo cual indica que si durante el destesado el rozamiento es idénticamente nulo, la fuerza final resultante se mantiene constante a lo largo de toda la armadura, independientemente de la ley obtenida tras el tesado de la misma.

Asimismo, si estudiamos con detalle la figura 4, para pequeños escalones de destesado, y suponiendo un rozamiento  $\mu'$  idénticamente nulo, podemos constatar cómo, forzosamente, para alcanzar el estado final previsto por Leonhardt (1977) de tensión constante a lo largo de toda la armadura, se debe producir un cambio de comportamiento a lo largo de la misma, estando una parte sometida a compresión y la otra sometida a tracción, como consecuencia de destesar  $DP_0$ .

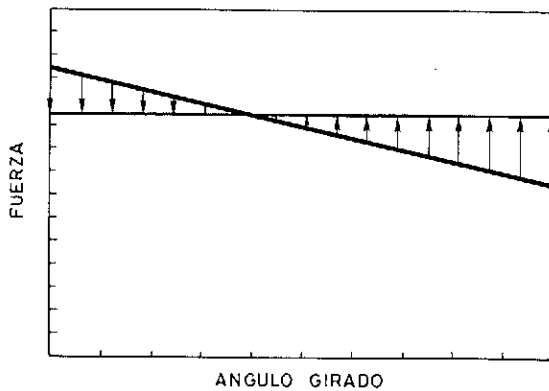


Fig. 4. Paradoja de la formulación de Leonhardt (1977), frente al destesado con rozamiento nulo.

**Igual rozamiento en el tesado y en el destesado ( $\mu = \mu'$ )**

Si sustituimos  $\mu' = \mu$  en la ecuación (12), obtenemos:

$$P - DP = (P_0 - DP_0) \cdot e^{\mu \cdot \alpha} \quad (15)$$

Como es inmediato deducir de la ecuación (15), en el caso de tener igual rozamiento en el tesado y en el destesado, la trayectoria de los pares  $P - \alpha$  no coincide en ambos procesos.

**Escalón de destesado nulo ( $DP_0 = 0$ )**

Si suponemos un escalón de descarga nulo, sustituyendo en la ecuación (13), resulta:

$$DP = P_0 \cdot (e^{-\mu \cdot \alpha} - e^{\mu' \cdot \alpha}) \quad (16)$$

Evidentemente, DP debe ser idénticamente nulo en cualquier sección de la armadura, y de la ecuación (16) deducimos que ello sólo es posible si suponemos  $\mu' = -\mu$ , lo cual nos reafirma en nuestra suposición del hecho de que Leonhardt consideraba el rozamiento como una magnitud con signo, y de ahí esa simetría entre las leyes de tesado y destesado que propone.

**Destensión total ( $DP = P_0$ )**

De la ecuación (12) deducimos que la formulación al uso no permite la existencia de una fuerza remanente de pretensado a lo largo de la armadura, en el supuesto de destesar totalmente su extremo activo.

Por último y para finalizar con este análisis, a nivel teórico, de ambas formulaciones de destesado, en la figura 5 podemos observar las curvas de pretensado  $P-x$  correspondientes a las leyes de destesado dadas por la formulación propuesta en el presente artículo y por Leonhardt (1977), respectivamente, obtenidas a partir de las ecuaciones (7) y (12). En ambos casos hemos considerado tres escalones de descarga (30 t, 100 t y 200 t, sobre las 200 t totales de tesado), así como en el caso de la formulación propuesta, diferentes valores de  $\Phi$  (siendo  $\Phi = \mu'/\mu$ , relación entre los coeficientes de rozamiento en destesado y tesado). Dichas curvas, teóricas, han sido calculadas para una longitud de armadura activa de 30 m, y un valor del producto ángulo-rozamiento  $\mu \cdot \alpha$  de 0,0075.

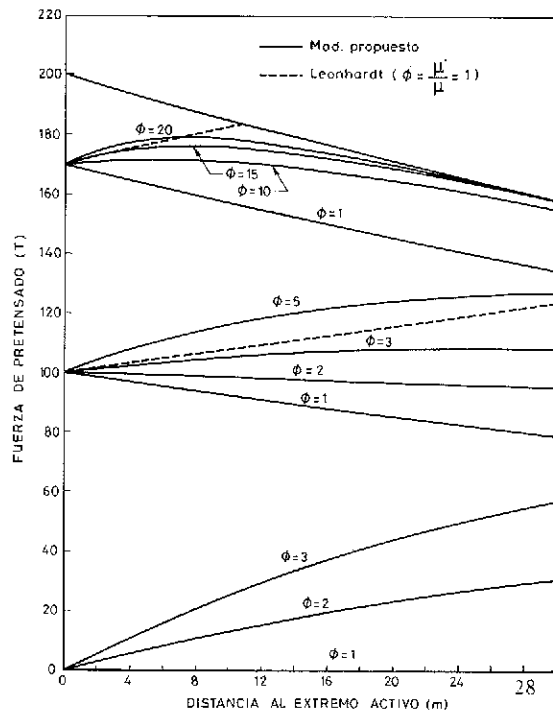


Fig. 5. Curva de pretensado,  $P-x$ , según el modelo propuesto y el modelo formulado por Leonhardt (1977).

Del estudio comparativo de ambas curvas, podemos constatar cómo, linealizando la curva de pretensado correspondiente a la formulación propuesta, para un escalón de descarga de 30 t y un  $\Phi$  de 15, considerando una pendiente igual a su tangente en el extremo activo ( $x=0$ ), obtenemos una recta de pendiente aproximadamente igual a  $\mu$ , lo cual coincide con lo previsto por Leonhardt (1977). Es decir, en el caso de penetración de cuña (pequeños escalones de descarga), el hecho de considerar una ley final de fuerzas "simétrica" a la ley de tesado, equivale, de acuerdo a la formulación propuesta, a suponer unos valores del rozamiento en destesado muy superiores al rozamiento en tesado. Por otra parte, en el caso de escalón de descarga de 100 t, si nos fijamos únicamente en las fuerzas resultantes en los extremos activo y pasivo, Leonhardt (1977) coincide con la formulación propuesta sin más que suponer un valor de  $\Phi$  cercano a 3. En el caso de destensión total, Leonhardt (1977), a diferencia de la formulación propuesta, no permite la existencia de fuerza remanente a lo largo de la armadura; sin embargo, para valores de  $\mu'$  iguales a  $\mu$ , ambas formulaciones coinciden.

#### 4. PLANTEAMIENTO EN DEFORMACIONES

##### 4.1. Cálculo de los alargamientos

De forma análoga a como se ha planteado el problema en términos de carga, puede realizarse un planteamiento en deformaciones, ligando ambos a través de las ecuaciones constitutivas de los materiales.

A partir de las leyes de tesado y destesado dadas, respectivamente, por las ecuaciones (1) y (6), vamos a proceder a calcular el alargamiento del acero durante la puesta en tensión, y su acortamiento al retirar parte de la fuerza de pretensado.

Realizando el cálculo con precisión, deberíamos tener en cuenta la influencia de la deformabilidad del hormigón, compatibilizando las deformaciones del acero con las de aquél. Dado que en el caso estudiado no existe adherencia entre el acero y el hormigón, dicha compatibilidad debería establecerse a nivel de elemento estructural, y no a nivel seccional. Sin embargo, puesto que las deformaciones del hormigón son muy pequeñas en relación a las del acero, su influencia es insignificante, en el total de la deformación, por lo que podemos despreocuparla, sin que ello altere conceptualmente los resultados alcanzados.

En el cálculo de deformaciones de la armadura activa, de acuerdo a lo expuesto se considera que el acero es un material elástico, manteniéndose constantes el módulo de elasticidad y la sección, a lo largo de todo el ensayo.

De esta forma, la deformación que experimenta el acero será:

$$\delta = \int_0^l \epsilon_p \cdot ds = \int_0^l P(x)/E_p \cdot \Omega dx = 1/E_p \cdot \Omega \int_0^l P(x) \cdot dx \quad (17)$$

donde  $P(x)$  viene dada por la ecuación (1) en caso de tesado, y la expresión (6) en caso de destesado,  $E_p$  es el módulo de elasticidad de la armadura activa y  $\Omega$  es la sección de la misma.

##### Tesado de la armadura

Si tesamos la armadura, la deformación obtenida será un alargamiento, de valor:

$$\delta_1 = P_0/E \cdot \Omega \int_0^l e^{-\mu \cdot x} \cdot dx = (P_0/E \cdot \Omega) \cdot A_1 \quad (18)$$

donde  $P_0$  es la fuerza de pretensado inicial, en el anclaje activo;  $E_p$  y  $\Omega$  tienen el mismo significado que anteriormente y  $A_1$  corresponde al área encerrada por la curva  $e^{-\mu \cdot x}$  con el eje de abscisas, entre el extremo activo y pasivo (0 a  $l$ ) siendo independiente de la carga  $P_0$  aplicada en el extremo activo (figura 6).

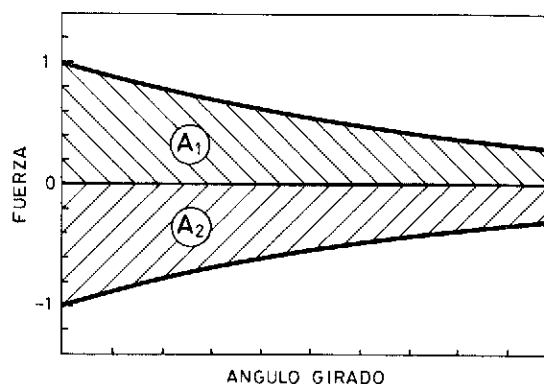


Fig. 6. Áreas correspondientes al cálculo de alargamiento, en tesado,  $A_1$ , y destesado,  $A_2$ .

El cociente entre dicha área y el producto  $E_p \cdot \Omega$ , al que llamaremos  $u_1$ , corresponde al alargamiento unitario del acero, es decir, al alargamiento que experimentará esa armadura al ser tesada con una fuerza unidad aplicada en su extremo activo:

$$\delta_1 = P_0 \cdot A_1/E \cdot \Omega = P_0 \cdot u_1 \quad (19)$$

Suponiendo un trazado geométrico del tendón, de tipo parabólico, de segundo grado, lo cual, además de ser relativamente próximo a lo usado en la práctica, no incide en el planteamiento y si ayuda en la exposición, el ángulo girado por el tendón será del tipo:

$$\alpha(x) = \alpha_0 \cdot x \quad (20)$$

En este caso, el alargamiento unitario será:

$$u_1 = (1 - e^{-\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) / (\mu \cdot \alpha_0 \cdot E_p \cdot \Omega) \quad (21)$$

Bajo este supuesto, podemos calcular el alargamiento del tendón como:

$$\delta_1 = (P_0 / E_p \cdot \Omega) \cdot (1 - e^{-\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) / \mu \cdot \alpha_0 \quad (22)$$

#### Destesado de la armadura

En el caso de destesado, la deformación corresponderá a un acortamiento. Tal como procederíamos de acuerdo con la formulación de Leonhardt (1977), el límite superior de la integral (17) correspondería a la longitud de armadura afectada por la destensión (en general distinta a la longitud total). Ahora bien, de acuerdo con la nueva formulación propuesta, dada la tipología matemática de la función adoptada para la ley de destesado, dicho límite corresponde a la longitud total de la armadura, sea cual sea el valor de  $\mu'$  y el de  $DP_0$ . A nivel teórico, la destensión siempre alcanza el extremo pasivo (otro tema distinto es que DP, en el extremo pasivo, sea tan pequeño que a nivel práctico no sea medible, y por tanto se considere cero). Por tanto, una vez establecidos los límites de la integral (17), el acortamiento del acero debido al destesado será:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= DP_0 / E_p \cdot \Omega \int_0^\ell e^{-\mu' \cdot \alpha} \cdot dx = \\ &= (DP_0 / E_p \cdot \Omega) \cdot A_2 \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $A_2$ , análogamente al caso del tesado, representa el área encerrada por la curva de destesado correspondiente a una carga unidad y el eje de abscisas (figura 6). Idénticamente, el cociente  $A_2 / E_p \cdot \Omega$  corresponderá al acortamiento unitario del acero:

$$\delta_2 = DP_0 \cdot A_2 / E_p \cdot \Omega = DP_0 \cdot u_2 \quad (24)$$

Si suponemos un trazado parabólico, donde el ángulo girado viene dado por la ecuación (19), la expresión (22) queda como sigue:

$$\delta_2 = (DP_0 / E \cdot \Omega) \cdot (1 - e^{-\mu' \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) / \mu' \cdot \alpha_0 \quad (25)$$

Como podemos observar, las expresiones correspondientes a los fenómenos de tesado y destesado son idénticas, sin más que sustituir el coeficiente de rozamiento correspondiente a cada caso.

#### 4.2. Curvas P - $\delta$

De las ecuaciones (19) y (24), podemos fácil-

mente deducir que existe una proporcionalidad directa entre la carga aplicada en el extremo activo y el alargamiento, durante el tesado del acero; y entre la carga retirada en dicho extremo y el acortamiento de la armadura, durante el destesado. Dichas constantes de proporcionalidad, tanto para el tesado como, análogamente, para el destesado son:

$$tg\theta_1 = P_0 / \delta_1 = 1 / u_1 = E_p \cdot \Omega / A_1 \quad (26)$$

$$tg\theta_2 = DP_0 / \delta_2 = 1 / u_2 = E_p \cdot \Omega / A_2 \quad (27)$$

Manteniendo la hipótesis de un trazado parabólico de segundo grado (ecuaciones (22) y (25)), las mencionadas constantes de proporcionalidad quedan como sigue:

$$tg\theta_1 = E_p \cdot \Omega \cdot \mu \cdot \alpha_0 / (1 - e^{-\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) \quad (28)$$

$$tg\theta_2 = E_p \cdot \Omega \cdot \mu' \cdot \alpha_0 / (1 - e^{-\mu' \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) \quad (29)$$

Si representamos en una misma gráfica la fuerza actuante en el extremo activo de la armadura, y el alargamiento de la misma (ambas son las magnitudes que con mayor facilidad nos es dado medir en cualquier obra o ensayo), obtenemos curvas del tipo de las de la figura 7.

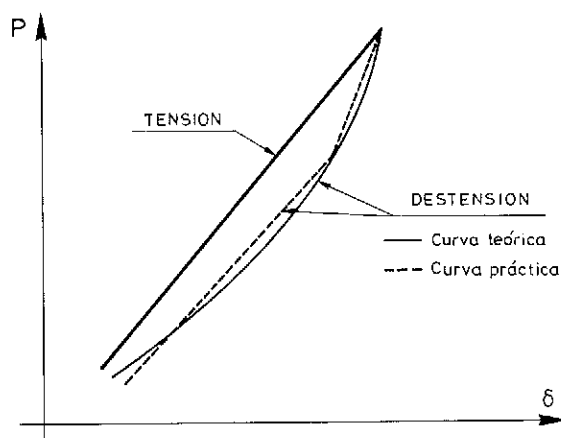


Fig. 7. Curvas P -  $\delta$ , teóricas y prácticas (Tensión y destensión).

Como acabamos de ver, existe una proporcionalidad directa entre cargas y alargamientos, tanto en tesado como en destesado. Pero dicha proporcionalidad no se mantiene constante. Tal como señalan Leonhardt (1977), Montobbio (1989) y otros, el coeficiente de rozamiento  $\mu$  viene sensiblemente afectado por el nivel de carga aplicada. Por tanto, las curvas P -  $\delta$  que deberíamos obtener teóricamente son del tipo de la figura 7, curvas con una cierta curvatura, especialmente en las primeras etapas del destesado. Pero en la práctica, dado que se obtienen a partir de unas cuantas mediciones de tipo discontinuo, que nos marcarán un número finito (y por lo general muy limitado) de puntos, las



curvas que obtenemos son del tipo discontinuo. Sería interesante, llegados a este punto, el poder disponer de mediciones continuas de pares  $P-\delta$ , lo cual nos permitiría dibujar las curvas tal como realmente son.

Si observamos con detenimiento la figura 7, notaremos dos ramas: la superior correspondiente al tesado (\*) y la inferior correspondiente al destesado. Esta, a su vez, está compuesta por una primera fase con mayor pendiente, y una segunda con una pendiente que se aproxima sensiblemente a la correspondiente a la fase de tesado.

Si comparamos las pendientes de las curvas de tesado y destesado, que nos vienen definidas respectivamente por las ecuaciones (26) y (27), obtenemos:

$$\operatorname{tg}\theta_2/\operatorname{tg}\theta_1 = u_1/u_2 = A_1/A_2 \quad (30)$$

Como podemos apreciar, la relación entre ambas pendientes equivale a la relación existente entre las áreas definidas en la figura 6. Como ya hemos visto, dichas áreas sólo dependen de dos factores:  $\mu$  y  $\alpha$ . El ángulo girado por el tendón es una característica geométrica de la estructura (trazado), y se mantiene constante, tanto en el tesado como en el destesado. Por tanto, esa variación en la relación de pendientes debe venir motivada por una variación en el valor del coeficiente de rozamiento.

Tal como hemos procedido anteriormente, si suponemos un trazado parabólico de segundo grado, las tangentes correspondientes a las curvas  $P-\delta$  de tesado y destesado vienen definidas, respectivamente, por las ecuaciones (28) y (29). La relación entre ambas pendientes será:

$$\operatorname{tg}\theta_2/\operatorname{tg}\theta_1 = (\mu'/\mu) \cdot (1 - e^{-\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) / (1 - e^{-\mu' \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) \quad (31)$$

Llamando  $\Phi = \mu'/\mu$ , relación entre los coeficientes de rozamiento en destesado y tesado, la ecuación (31) queda como sigue:

$$\operatorname{tg}\theta_2/\operatorname{tg}\theta_1 = \Phi \cdot (1 - e^{-\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) / (1 - e^{-\Phi \cdot \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell}) \quad (32)$$

Desarrollando la expresión (32) en serie, hasta los términos de segundo grado:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_2/\operatorname{tg}\theta_1 &= \frac{1 - [1 - (\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell/1!) + ((\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell)^2/2!) + \dots]}{1 - [1 - (\Phi \cdot \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell/1!) + ((\Phi \cdot \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell)^2/2!) + \dots]} = \\ &= \Phi \cdot \frac{2 \cdot \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell - (\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell)^2}{2 \cdot \Phi \cdot \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell - (\Phi \cdot \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell)^2} = (2 - \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell) / (2 - \Phi \cdot \mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell) \quad (33) \end{aligned}$$

(\*) No se plantean aquí las primeras etapas de tesado que, debido al ajuste que se produce en los distintos cordones de un tendón, puede dar una rama con una pendiente diferente a la expuesta en la fig. 7 [Aguado et al (1988)].

Lo que realmente nos es dado medir con suma facilidad, es la relación entre ambas pendientes. Por tanto, despejemos de (33) el valor de  $\Phi$ :

$$\Phi = (2/\mu \cdot \alpha_0 \cdot \ell) \cdot [1 - \operatorname{tg}\theta_1/\operatorname{tg}\theta_2] + \operatorname{tg}\theta_1/\operatorname{tg}\theta_2 \quad (34)$$

De la ecuación (34) podemos deducir que si ambas pendientes son parecidas,  $\Phi$  tiende a la unidad, es decir, los coeficientes de rozamiento en el tesado y en el destesado son sensiblemente similares. Sin embargo, el hecho de que la pendiente de la rama de descarga sea mayor que la correspondiente a la rama del destesado, implica que el coeficiente de rozamiento de destesado debe ser mayor al rozamiento de tesado.

## 5. CONCLUSIONES

Las conclusiones principales que se derivan del presente artículo son:

— Se propone un modelo teórico para estudiar el comportamiento en destesado de armadura activa. Este modelo, análogo al usual en la puesta en tensión, verifica una serie de hipótesis planteadas y es fácil de aplicar en la práctica.

— El modelo constata la posible variación del coeficiente de rozamiento en función del nivel de destensión (Primeras o últimas etapas del destesado).

— Asimismo, el presente artículo evidencia las posibles lagunas e incorrecciones de la formulación usual, en la práctica, para el cálculo de las pérdidas por penetración de cuña.

— El planteamiento en deformaciones permite, en la práctica, a través de las mediciones de carga de pretensado y alargamientos, evaluar los distintos coeficientes de rozamiento globales ( $\mu$ ) que se produzcan en las diferentes etapas de la tensión y destensión.

Cabe señalar por último, que la contrastación del modelo propuesto con dos casos (vigas y edificio contención central nuclear) donde se han realizado diversos tipos de medidas, se expondrá en un artículo posterior, dentro de esta misma revista.

## BIBLIOGRAFIA

- A. AGUADO, J.J. EGOZCUE, J.M. VELASCO, A. VIVES y E. MIRAMBELL (1988). "El pretensado y su vigilancia en centrales nucleares". Publicación ES020-1988. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. U.P.C. Barcelona.

- F. LEONHARDT (1977). "Hormigón pretensado. Proyecto y construcción". Ed. Instituto Eduardo Torroja. Madrid.

- X. MONTOBBIO (1989). "Comportamiento en destesado de armadura activa". Tesina de especialidad. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. U.P.C. Barcelona. Julio.

- M.O.P.U. (1980). "Instrucción EP-80 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado". M.O.P.U. Comisión Permanente del Hormigón. Madrid.

- J. MURCIA (1989). "Formulación global para el análisis de estructuras de hormigón pretensado con tendones adherentes y no adherentes". Rev. Hormigón y Acero nº 172.

- P. ROCA (1988). "Un modelo de análisis no lineal para el estudio del comportamiento de estructuras laminares de hormigón pretensado". Tesis doctoral. Departamento de Ingeniería de la

Construcción de la U.P.C. E.T.S.I.C.C.P. Barcelona.

## RESUMEN

El presente artículo muestra un modelo teórico de comportamiento de la fuerza de pretensado, a lo largo del trazado, en el destesado de armadura activa. Este modelo es contrastado ante distintas hipótesis y fases del destesado, dando un comportamiento coherente en todas ellas. Asimismo, el modelo propuesto se compara con el empleado usualmente en el cálculo de pérdidas por penetración de cuña, poniendo de manifiesto el planteamiento incorrecto del mismo.

## SUMMARY

This paper presents a theoretical model to describe the behaviour of a prestressed tendon after release of the prestressing force. The model is verified under different hypotheses and phases of the force-release process, showing good agreement with the observed experimental behaviour. The proposed model is also compared to the usual techniques for computing prestress loss due to anchor slip at anchorages.

\* \* \*

## Simposio Internacional sobre "Modernas Aplicaciones del Hormigón Pretensado"

Organizado por la Asociación China de Ingeniería Civil (CCES) y la Federación Internacional del Pretensado (FIP), con la colaboración de la Asociación China de Ciencia y Tecnología (CAST) y la Academia China de Investigación de la Construcción (CABR), se va a celebrar en Beijing, China, durante los días 22 a 25 de octubre de 1991, un Simposio Internacional sobre "Modernas Aplicaciones del Pretensado".

Durante los últimos años, el hormigón pretensado ha tenido amplias e innovadoras aplicaciones en la construcción de puentes, edificios y estructuras especiales. El objetivo fundamental de este Simposio es proporcionar un foro en el cual los técnicos de todo el mundo puedan intercambiar y exponer sus conocimientos y experiencias sobre el análisis, proyecto y construcción de estructuras de hormigón pretensado.

El programa técnico del Simposio incluirá los siguientes temas: Puentes pretensados de gran luz; Aplicaciones del pretensado parcial en la ingeniería estructural; Aplicaciones del hormigón pretensado con tendones no adherentes; Cálculo y comportamiento de las estructuras de hormigón pretensado

en zonas sísmicas; Aplicaciones del hormigón pretensado en la construcción de vasijas de presión y otras estructuras especiales.

Los textos de todas las Comunicaciones presentadas en el Simposio serán recogidos en los correspondientes Proceedings que se entregarán a todos los participantes al inicio de las reuniones.

El idioma oficial del Simposio será el inglés.

Los que deseen presentar alguna Comunicación, deberán enviar, antes del 1 de julio de 1990, un resumen en inglés de la misma, de no más de 500 palabras, por duplicado. En el resumen se hará constar el nombre y dirección del Autor. Antes del 1 de setiembre del 90, se les notificará si su Comunicación ha sido o no aceptada.

Los resúmenes o cualquier consulta que desee formularse sobre este Simposio, deberán dirigirse a:

Prof. Liu Yongyi  
China Academy of Building Research  
P.O. Box 752  
Beijing 100013 (China)

## Condiciones de adherencia en barras de distinto diámetro

Luis Martínez Pérez  
Dr. Ingeniero Aeronáutico  
Catedrático E.U. de Construcción  
Departamento de Ingeniería de la Construcción  
de la Universidad Politécnica de Valencia  
Escuela Universitaria Politécnica de Alicante

### CONDICION DE ADHERENCIA EN BARRAS DE DISTINTO DIAMETRO

#### 1.- Nota preliminar

La recién publicada "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado" EH-88, establece, en su artículo 42º, (de igual forma que lo venía haciendo en sus anteriores ediciones) como condición para garantizar la adherencia entre la armadura y el hormigón, el cumplimiento de la relación:

$$\tau_b = \frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot n \cdot u} \leq \tau_{bd} \quad (1)$$

siendo:

$d$  = canto útil de la sección.

$n$  = número de barras.

$u$  = perímetro de cada una de las barras.

$V_d$  = esfuerzo cortante mayorado, en la sección de comprobación.

y los valores de  $\tau_{bd}$ :

en barras lisas,

$$\tau_{bd} = \frac{1,2}{\gamma_c} \sqrt{f_{ck}}$$

en barras corrugadas,

$$\tau_{bd} = \frac{\tau_{bu}}{1,6} \cdot \left(\frac{f_{ck}}{225}\right)^{0,66}$$

admitiendo para  $\tau_{bu}$ , tensión de rotura por adherencia, los siguientes valores, en función del diámetro de las barras:

$$\begin{aligned} \phi &\leq 8 & \tau_{bu} &= 115 \\ 8 &\leq \phi &\leq 32 & \tau_{bu} = 130 - 1,9 \phi \\ \phi &> 32 & \tau_{bu} &= 69 \end{aligned}$$

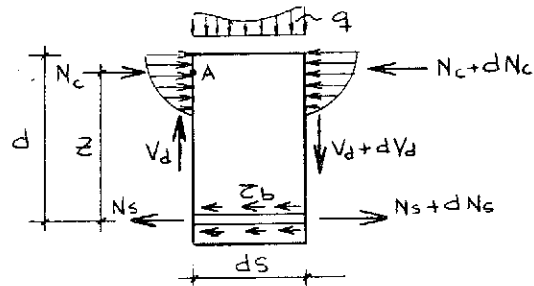
En todas las fórmulas,  $\tau_b$ ,  $\tau_{bd}$ ,  $\tau_{bu}$  y  $f_{ck}$  se expresan en  $\text{Kp}/\text{cm}^2$  y  $\phi$  en mm.

La fórmula expresada es aplicable a secciones armadas con  $n$  barras de igual diámetro.

A continuación se plantea una fórmula, de sencilla deducción y, también, fácil aplicación, que contempla la disposición de barras de distinto diámetro y de la que aquella es un caso particular, abarcándola del lado de la seguridad. (\*)

#### 2.- Deducción de la fórmula

El esfuerzo tangencial de adherencia,  $\tau_b$ , de las armaduras, se deduce estableciendo el equilibrio de una rebanada elemental:



siendo:

$V_d$  = esfuerzo cortante mayorado.

$N_c$  y  $N_s$  = resultantes de las compresiones en el hormigón y tracciones en el acero, respectivamente.

$z$  = brazo mecánico  $\approx 0,9 d$

$d$  = canto útil.

(\*) Esta fórmula se le transmitió a la Comisión Permanente del Hormigón, redactora de la EH-73, a través de uno de sus Miembros, en carta de fecha 26 de enero de 1978.

Tomando momentos respecto al punto A de paso de  $N_c$ , se obtiene:

$$dN_s \cdot z = (V_d - dV_d) ds - q ds (ds/2) = 0$$

De donde, despreciando infinitésimos de segundo orden, se deduce el valor:

$$dN_s = \frac{V_d}{z} \cdot dS = \frac{V_d}{0,9 \cdot d} \cdot dS$$

La diferencia de esfuerzo a tracción de la armadura a uno y otro lado de la rebanada, estará absorbido por la adherencia de las barras a lo largo de su superficie de contacto:

$$dN_s = \tau_b \cdot \sum u_i \cdot dS$$

sustituyendo y despejando  $\tau_b$  en la fórmula anterior, se obtiene como valor de la adherencia:

$$\tau_b = \frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot \sum u_i} \quad (2)$$

siendo  $\sum u_i$  la suma de los perímetros de todas las barras traccionadas de la sección:

$$\sum u_i = \pi \cdot \sum \phi_i \quad (3)$$

Ordenando las barras de menor a mayor diámetro y siendo  $\phi_g$  el de la más gruesa, podrá expresarse:

$$\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_g$$

$$\phi_1 = \alpha_1 \phi_g; \phi_2 = \alpha_2 \phi_g; \dots \phi_g = 1 \cdot \phi_g$$

siendo  $\alpha_i$  coeficientes que cumplirán  $\alpha_i \leq 1$  y en consecuencia:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + 1 \geq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + 1 \quad (4)$$

donde el segundo miembro es el cociente entre las capacidades mecánicas de la armadura  $U_s$  y de la barra más gruesa  $U_g$ :

$$U_s = \frac{\pi}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_g^2) \cdot f_{yd} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \phi_g^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + 1) \cdot f_{yd}$$

$$U_g = \frac{\pi}{4} \cdot \phi_g^2 \cdot f_{yd}$$

$$\frac{U_s}{U_g} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + 1$$

Sustituyendo (3) en la fórmula de adherencia (2) y teniendo en cuenta la desigualdad (4), se obtiene:

$$\tau_b = \frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot \sum u_i} = \frac{V_d}{0,9 \cdot d} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \sum \phi_i} =$$

$$= \frac{V_d}{0,9 \cdot d} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \phi_g (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + 1)} \leq$$

$$\leq \frac{V_d}{0,9 \cdot d} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \phi_g (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + 1)} =$$

$$= \frac{V_d}{0,9 \cdot d} \cdot \frac{1}{u_g \cdot U_s/U_g}$$

siendo  $u_g = \pi \cdot \phi_g$  el perímetro de la barra más gruesa.

La condición de adherencia resulta:

$$\tau_b \leq \frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot \frac{U_s}{U_g} \cdot u_g} \leq \tau_{bd} \quad (5)$$

con  $\tau_{bd}$  correspondiente a la barra más gruesa.

La expresión del denominador:  $\frac{U_s}{U_g} \cdot u_g$ , equivale a adoptar, como perímetro de contacto de toda la armadura, su equivalente en el de la barra más gruesa  $u_g$ .

Lógicamente, esta fórmula "castiga" la disposición de barras gruesas, haciendo que  $\tau_b$  sea directamente proporcional a  $\phi_g$  e, indistintamente, mínimo cuando todas las barras son iguales, en cuyo caso:

$$\frac{U_s}{U_g} \cdot u_g = n \cdot u$$

siendo  $n$  el número de barras iguales y  $u$  el perímetro de cada una.

La fórmula de la Instrucción EH-88:

$$\frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot n \cdot u} \leq \tau_{bd}$$

queda como un caso particular de la fórmula (5).

### 3.- Aplicación Práctica

Comprobar la condición de adherencia de la viga de hormigón armado de la figura, en una sección donde la sollicitación a flexión exige una armadura de capacidad mecánica  $U_{s,nec} = 55 \text{ t}$  y que tiene un esfuerzo cortante  $V = 30 \text{ t}$

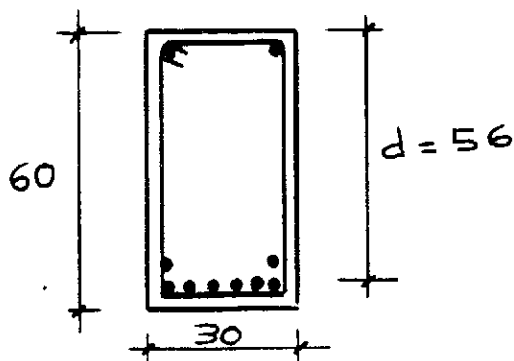
Hormigón H-175      Acero AEH-400

$f_{ck} = 175 \text{ Kp/cm}^2$        $f_{yk} = 4100 \text{ Kp/cm}^2$

$\gamma_c = 1,5$        $\gamma_f = 1,6$        $\gamma_s = 1,15$

$V_d = V \cdot \gamma_f = 30 \cdot 1,6 = 48 \text{ t}$

Se disponen barras corrugadas.



Caso a) Disponiendo como armadura:  $2 \phi 32$

$$U_s (2 \phi 32) = 57,32 \text{ t} \simeq U_{nec} = 55,00 \text{ t}$$

las fórmulas (1), (2) y (5) dan igual resultado: ya que se obtiene:

$$n \cdot u = \Sigma u_i = \frac{U_s}{U_g} \cdot u_g = 2 \cdot \pi \cdot 3,2 = 20,11 \text{ cm}$$

Sustituyendo valores en la fórmula (1):

$$\tau_b = \frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot n \cdot u} = \frac{48000}{0,9 \cdot 56 \cdot 20,11} = 47,36 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{bd} = \frac{130 - 1,9 \phi}{1,6} \left( \frac{f_{ck}}{225} \right)^{0,66} = \frac{130 - 1,9 \cdot 32}{1,6} \cdot \left( \frac{175}{225} \right)^{0,66} = 36,6 \text{ Kg/cm}^2$$

Se verifica:  $\tau_b > \tau_{bd}$ ; luego, no cumple la condición de adherencia.

Caso b): Disponiendo como armadura:  $1 \phi 32 + 4 \phi 16$

$$U_s (1 \phi 32 + 4 \phi 16) = 57,32 \text{ t} \simeq U_{nec} = 55,00 \text{ t}$$

La fórmula (1) que da la Instrucción, no es aplicable por tratarse de barras de distinto diámetro.

Si sustituimos en la fórmula (2) el valor:

$$\Sigma u_i = \pi \cdot 3,2 + 4 \cdot \pi \cdot 1,6 = 30,16 \text{ cm}$$

se obtendría el resultado:

$$\tau_b = \frac{48000}{0,9 \cdot 56 \cdot 30,16} = 31,58 \text{ Kg/cm}^2 \leq \tau_{bd}$$

que podrá interpretarse como que no existe fallo por adherencia, lo cual resulta absurdo teniendo en cuenta que el  $\phi 32$  debe fallar por adherencia, en

este caso, de igual forma que lo hizo en el caso anterior, ya que el esfuerzo necesario para evitar su fallo por adherencia es independiente del diámetro con que se disponga el resto de la armadura.

Aplicando la fórmula (5) se obtiene:

$$U_s = 57,32 \text{ t}$$

$$U_g = 28,66 \text{ t}$$

$$u_g = \pi \cdot 3,2 = 10,05 \text{ cm}$$

$$\frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot \frac{U_s}{U_g} \cdot u_g} = \frac{48000}{0,9 \cdot 56 \cdot \frac{57,32}{28,66} \cdot 10,05} = 47,38 \text{ Kg/cm}^2 > \tau_{bd}$$

luego la fórmula (5) expresa que hay fallo por adherencia, como es lógico que suceda.

Caso c): Disponiendo la armadura:  $8 \phi 16$

$$U_s (8 \phi 16) = 57,33 \text{ t} \simeq U_{nec} = 55,00 \text{ t}$$

Utilizando cualquiera de las 3 fórmulas (1), (2) ó (5), se obtiene el mismo resultado:

$$\Sigma u_i = n \cdot u = \frac{U_s}{U_g} \cdot u_g = 8 \cdot \pi \cdot 1,6 = 40,21 \text{ cm}$$

$$\tau_b = \frac{V_d}{0,9 \cdot d \cdot n \cdot u} = \frac{48000}{0,9 \cdot 56 \cdot 40,21} = 23,69 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{bd} = \frac{130 - 1,9 \cdot 16}{1,6} \cdot \left( \frac{175}{225} \right)^{0,66} = 52,65 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_b \leq \tau_{bd}$$

Es decir, en este caso sí se cumple la condición de adherencia.

## RESUMEN

La comprobación de la condición de adherencia expresada en el Artículo 42° de la "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado" en su reciente edición EH 88, mantiene la misma expresión matemática que en sus anteriores ediciones, aplicable únicamente cuando toda la armadura se dispone en barras de igual diámetro.

En el presente artículo se plantea una nueva expresión de la condición de adherencia, de sen-

cilla deducción y fácil aplicación, que contempla la disposición de barras de distinto diámetro y de la que aquélla es un caso particular, abarcándola del lado de la seguridad.

## SUMMARY

The verification of the state of bond-strength mentioned in the 42nd article of the "Instruction

for the project and performance of plain and reinforced concrete works", in its latest edition EH 88, keeps the same mathematical expression than in previous editions, which is only applicable when the whole reinforcement is made up of bars of equal diameter.

In the present paper we are going to set up a new expression for the bond-strength condition, with a very simple development and easy use, taking into account the location of bars of different diameter as a particular case, from the point of view of security.

\* \* \*

## Coloquio Internacional de la IABSE sobre "Estructuras de Hormigón"

En Stuttgart (RFA) se va a celebrar, durante los días 10 al 12 de abril de 1991, un Coloquio Internacional, organizado por la IABSE, sobre "Estructuras de hormigón".

El inicio del segundo centenario de la historia del hormigón armado, se considera el momento apropiado para realizar la revisión crítica de los métodos de proyecto y cálculo que se vienen utilizando. La situación actual de los reglamentos y normas de buena práctica en estos momentos vigentes son muy dispares de unos países a otros y dan lugar a numerosos problemas y casos conflictivos. Constantemente, se introducen modificaciones en las normas de cálculo e incluso en la terminología técnica. Con frecuencia, los reglamentos y las publicaciones técnicas, tratan los siguientes temas de un modo casi totalmente independiente: Hormigón armado frente a hormigón pretensado; Las estructuras con armaduras pretensas frente a las realizadas con armaduras postesas; Las estructuras totalmente pretensadas y las parcialmente pretensadas; Las armaduras adherentes y las no adherentes; Los tendones internos frente a los externos. El resultado es que se producen evidentes conflictos y que para un mismo problema pueden darse soluciones ampliamente diferentes según el reglamento utilizado.

En este Coloquio de Stuttgart se intentará promover la unificación de los métodos de cálculo utilizados para todas las aplicaciones del hormigón,

cualquiera que sea la técnica utilizada, bajo el lema general "Estructuras de hormigón".

Con esta intención se tratarán los siguientes temas:

Hormigón estructural: Definición y situación actual del problema.

—Métodos adecuados de cálculo y análisis: Requisitos de ejecución; dimensionamiento; detalles constructivos; seguridad respecto a la resistencia a tracción del hormigón.

—Tratamiento de tema en los "Códigos de buena práctica".

— El impacto de las futuras estructuras.

Los que deseen participar o presentar alguna Comunicación en este Coloquio, deberán ponerse en contacto con:

IABSE SECRETARIAT  
ETH Hönggerberg  
CH - 8093 ZURICH (Suiza)  
Tel: Int. + 41 1 377 26 47  
Fax: Int. + 41 1 371 55 48  
att. IABSE  
Tlx: 822 186 IABS CH

Todas las Comunicaciones serán presentadas, exclusivamente, en inglés, tanto por escrito como oralmente.

## Perspectivas de futuro en el campo del hormigón (\*)

Antonio Aguado de Cea  
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.  
Departamento de Ingeniería de la Construcción.  
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y  
Puertos U.P.C.

### 1. INTRODUCCION

Predecir es siempre una difícil tarea y si bien se ha avanzado en las técnicas de pronóstico superando la antigua bola de cristal, aún hay un gran camino por realizar en esta línea.

Antes de nada, quisiera señalar que las predicciones que aquí se plantean sobre las perspectivas futuras en el campo del hormigón son fruto de una detallada reflexión sobre el pasado y el presente, y no una consecuencia de un estudio cuantitativo del mismo. Así pues, son ideas abiertas a la discusión que espero animen al lector a enviar sus propias reflexiones y así poder, entre todos, llegar a madurar las mismas.

Esta reflexión se hace considerando unas hipótesis que enmarcan lo que entiendo puede ser la futura evolución de la sociedad española y europea, salvo catástrofes no previstas a corto y medio plazo (por ejemplo: Guerras en territorio europeo, etc.). Algunas de estas hipótesis son:

—Mayor esperanza de vida, lo cual puede representar ciertos cambios en las tipologías estructurales.

—Una mayor conciencia social sobre temas ecológicos, lo cual incidirá fuertemente sobre todas las etapas del proceso constructivo.

—Potenciación en la búsqueda de recursos y nuevas energías en el mar o en el espacio, lo que, asimismo, incidirá en todas las etapas del proceso constructivo.

—Transvases de cierta población urbana a medios semi-urbanos, lo cual puede incidir en la potenciación de ciertas estructuras para infraestructura viaria.

(\*) Este artículo corresponde básicamente a la conferencia impartida por el autor, en el Seminario "Nous Materials" dentro de las actividades que la Universitat Tècnica d'Estiu de Catalunya ha desarrollado en Sitges (Barcelona) en septiembre de 1989.

—Evidente desarrollo individual y colectivo por la estética, lo que incidirá tanto en el proyecto como en los materiales, principalmente.

—Fuerte competencia individual y empresarial que se traducirá en una evolución del material y de los procedimientos de construcción.

Todas estas hipótesis no dejan de ser síntomas de una evolución hacia una mayor exigencia de calidad en nuestras estructuras y materiales, lo cual, inmediatamente, se traduce en un cambio de valores de los requisitos estructurales, estando al alza, si hablamos en términos bursátiles, la estética y la durabilidad, frente a requisitos más consolidados como es la resistencia, etc. El puente de la fig. 1 puede reflejar las ideas de la situación que se ha descrito.

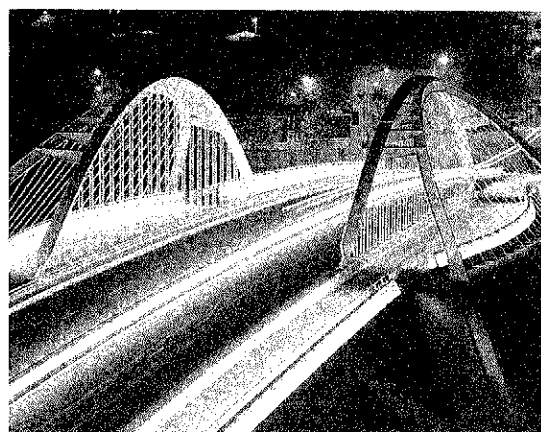


Fig. 1. Puente Felipe II (Barcelona)

En lo que sigue se analizan las perspectivas futuras, atendiendo a cada una de las etapas del proceso constructivo: Planificación, proyecto-cálculo, materiales, ejecución y mantenimiento. En las mismas, dado el ámbito en el que se mueve este artículo, se presentará lo que entiendo como características principales, dejando para trabajos o aportaciones posteriores o en trabajos referenciados, un

desarrollo más matizado de estas características.

Por último, el éxito de estas predicciones se basaría en distintos factores, si bien entiendo que el más importante es el factor humano, tal como señala indirectamente García Meseguer (1983). Por ello, se dedica una reflexión específica a la formación del técnico, como clave en la evolución futura.

## 2. PLANIFICACION

En épocas recientes de crisis, el técnico, como tal, ha tenido escasa incidencia en la planificación, primando los aspectos financieros sobre los aspectos técnicos. Ahora bien, una situación de mercado con una baja inflación, entre otros factores, favorece la figura del técnico gerente frente a la del gerente económico, lo cual repercute, en general, en una mayor sensibilidad sobre soluciones técnicas innovadoras.

Esta situación, que se ajusta más al sector privado, puede venir en parte alterada dentro del sector público, donde las decisiones pueden tener un marcado carácter político. Asimismo, en este caso, la necesidad de votos, puede propiciar tipologías estructurales y materiales donde la estética sea factor predominante, convirtiendo las estructuras en algo emblemático asumible por el gran público. Con frecuencia, muchas de estas estructuras vienen asociadas al tiempo libre, tal como se muestra en las figs. 2 y 3.

El hormigón representa una solución satisfactoria, tanto para las tipologías más tradicionales como en otras tipologías en las que las prestaciones que se le exige son más amplias que las habituales. Así, como muestra de estas tipologías se pueden citar: edificios singulares (rascacielos, edificios tercera edad sin barreras arquitectónicas, edificios

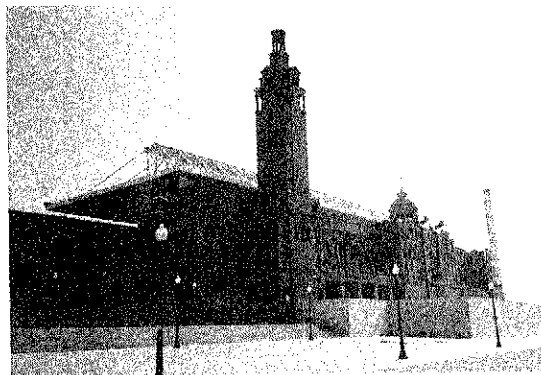


Fig. 2. Estadio olímpico de Montjuïc (Barcelona)

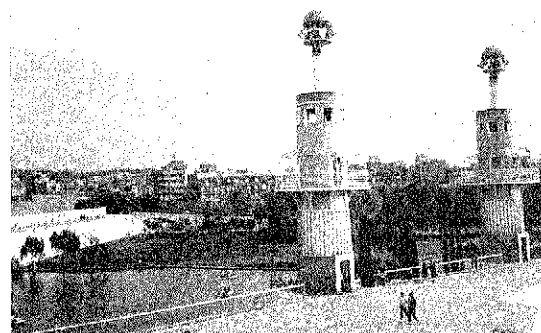


Fig. 3. Plaza de la España Industrial (Barcelona)

educativos, etc.), estructuras marinas (barcos, plataformas, etc.), aplicaciones industriales (depósitos criogénicos, moldes, bancadas para máquinas herramientas, etc.) cementerios nucleares e incluso estaciones permanentes en la luna, tal como señala Lin (1987).

Esta potencialidad del hormigón en un gran número de tipologías frente a otros materiales, obedece a la gran versatilidad que tiene, pudiendo dar

TABLA 1

Valores usuales de energía empleada en la fabricación de distintos materiales de ingeniería.  
Los valores entre paréntesis hacen referencia a la resistencia a compresión.

Materiales de Construcción	Energía por t (GJ)	Energía por m <sup>3</sup> (GJ)	Energía/t por unidad de rigidez GJ/t (GPa)	Energía/t por unidad resist. trac. GJ/t (MPa)
Aluminio	130	360	1,90	1,30
Cobre	60	530	0,46	0,30
Hierro fundido	45	360	0,30	0,30
Acero dulce	40	300	0,19	0,13
Vidrio	20	50	0,30	0,33
Cemento Portland Normal	7	22	—	—
Pasta CPN (a/c = 0,3)	5	12	0,17	0,33 (0,08)
Hormigón	1,4	3,4	0,05	—
Hormigón alta resistencia	2,0	4,8	0,11	0,13 (0,02)
Hormigón armado	1,5	3,9	0,04	0,05
Hormigón con f. de vidrio	2,5	5,5	0,08	0,08
Hormigón con f. de acero	3,5	8,4	0,12	0,35



respuesta satisfactoria ante distintas exigencias (características mecánicas, durabilidad frente a distintos factores, coloración, etc.) con un contenido energético bajo, en relación a otros materiales (Tabla 1) [Pomeroy (1978)]. Este hecho es un aspecto importante, ya que la energía es un bien escaso y se precisa un empleo racional de la misma.

Estas favorables expectativas pueden verse razonablemente limitadas por razones de tipo ecológico y no tanto por el impacto ambiental directo o indirecto de la propia estructura, por el que hay una creciente preocupación a la que el técnico cada vez está más concienciado, sino por la creciente dificultad de encontrar materias primas de calidad próximas a los centros de consumo. Esto está motivado por la creciente oposición social al impacto ambiental que puedan originar estas explotaciones y, aunque incipiente, al impacto visual que representa. No obstante, en este caso puede resolverse el problema reutilizando dicha zona en servicio a la comunidad, tal como se recoge en la fig. 4.

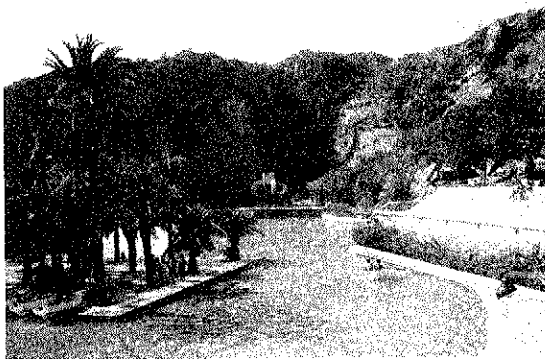


Fig. 4. Parque de la Creueta del Coll (Barcelona)

La problemática planteada propicia, por un lado, la reutilización de residuos, en la que se vuelve a incidir en el apartado 5 y, por otro lado, tal como señala el CUR-VB (1985), un creciente interés por el empleo de estructuras desmontables. Por ejemplo: Puentes, pasarelas, centros educativos, edificios industriales, etc., que sean versátiles a las modificaciones de las necesidades sociales en cada momento. La fig. 5 muestra el esquema de una escuela desmontable construida en Bélgica.

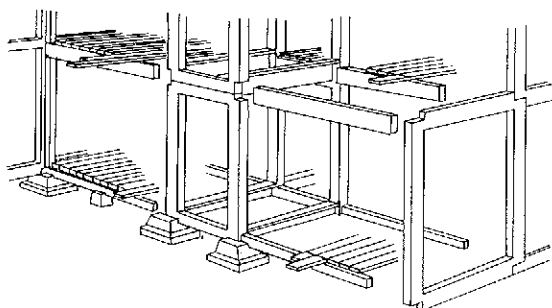


Fig. 5. Estructura de una escuela desmontable construida en Bélgica.

Esta concepción requiere una muy precisa y profunda definición del proyecto y respeto del mismo por parte del contratista, lo cual choca, en la actualidad, con la práctica usual en la que en obra se introducen numerosas modificaciones sobre el proyecto inicial. Hay que llamar la atención sobre estas modificaciones ya que las mismas pueden ser fruto de factores no sólo técnicos, sino de otro tipo: económicos, políticos, etc. Ahora bien, la existencia de un mercado único europeo en 1992, puede actuar positivamente modificando estos hábitos y haciendo más viable el empleo de estructuras desmontables en España.

La viabilidad de estas estructuras estarán condicionadas a la versatilidad de las mismas para dar adecuada respuesta a distintas aplicaciones. No obstante, en el extremo opuesto se están desarrollando últimamente grandes equipos (machacadoras, cortadoras, etc.) encaminados a demoler las estructuras de hormigón. Muestra de ello era la abundante información existente sobre las mismas en la reciente edición del Mundo del Hormigón (World of Concrete) celebrada en Barcelona.

Por último, dentro de esa modificación de hábitos citada, favorecida por la existencia de primas de seguros en edificación y obras públicas, es de esperar una implementación más amplia de sistemas de garantía de calidad, si bien adaptados de una forma racional a las características específicas de cada proyecto, es decir, no deben copiarse, por ejemplo, para una obra hidráulica, los programas de garantía de calidad empleados en centrales nucleares en estos últimos 15 años. Evidentemente, la calidad debe alcanzar a cada una de las etapas del proceso constructivo, superando concepciones más clásicas del control de calidad asociado a determinadas etapas: materiales y construcción principalmente.

### 3. PROYECTO-CALCULO

#### 3.1. Consideraciones generales

Como señalan numerosos estudios internacionales y ratifican Vieitez y Ramirez (1984) a nivel nacional, la etapa de proyecto-cálculo es la causa principal de patología en estructuras de hormigón. Este hecho, potenciado por otros factores, entre los que destacaremos:

- Equipos multidisciplinares.
- Internacionalización del mercado.
- Empleo de ordenadores.

reflejan un creciente interés por la etapa de proyecto-cálculo, lo que redundará en una mayor calidad del proyecto. Ahora bien, para ello habrá que vencer numerosos vicios de la práctica usual, debiendo empezar por una mayor valoración del mismo.

### *Equipos multidisciplinares*

La creciente complejidad de las estructuras debido a un aspecto más amplio de usos (edificios inteligentes, control activo de estructuras, estructuras en el mar, estructuras criogénicas, etc.) requieren para su desarrollo equipos multidisciplinares de técnicos.

Estos equipos deberán actuar conjuntamente para resolver dos tipos de problemas principales: *Problemas de coordinación* entre los distintos organismos que intervienen en las obras (distintas administraciones, proyectistas, constructores, control de distintas etapas, suministradores, etc.), que pueden dar lugar a nuevas figuras dentro del campo de la construcción para resolver dichos problemas y, por otro lado, están *los problemas técnicos* y la necesidad cada vez más imperiosa de establecer equipos multidisciplinares (arquitectos, ingenieros estructuralistas, ingenieros de instalaciones, etc.) que superen la estructura actual con una gran carga gremial, donde los profesionales, en gran medida, se ven más como elementos antagónicos de un mismo proceso que como miembros de un mismo equipo con un objetivo común.

### *Internacionalización del mercado*

No es nada nuevo descubrir la actual internacionalización del mercado de la construcción. Este hecho conlleva la necesidad de unas reglas unificadas a nivel internacional, con el fin de poder evaluar con el mismo criterio las distintas soluciones estructurales presentadas para un determinado proyecto. A ello se une el hecho de que el fallo, en algunas estructuras, puede tener consecuencias supranacionales. (Por ejemplo: escapes en centrales nucleares y/o plantas industriales con residuos altamente agresivos, etc.).

De esta necesidad se han hecho eco diversos organismos tales como: Comunidad Europea (C.E.), Comité Eurointernacional del Hormigón (C.E.B.), Federación Internacional del Pretensado (F.I.P.), International Standards Organization (I.S.O.), que han desarrollado reglas, dentro del campo del hormigón, algunas de las cuales se citan en la bibliografía adjunta. Ahora bien, en mi opinión, estos organismos deberían incidir sobre los aspectos principales que se considerasen básicos para todo el mundo, tales como: seguridad, economía, resistencia, servicio e incidencias ambientales, dejando para los reglamentos nacionales, autonómicos, etc. el desarrollo, si lo estiman conveniente, de los aspectos básicos. En cualquier caso, entiendo se debe huir de reglamentaciones muy pormenorizadas que actúen negativamente sobre el encasillamiento del técnico usuario de las mismas.

### *Empleo de ordenadores*

El uso generalizado del ordenador en distintas

vertientes: diseño asistido, cálculo, gestión, explotación, etc. es ya, en mayor o menor medida, una realidad. No obstante, son aún numerosos los pasos para dar, entre los que se podrían citar: adecuación de grandes programas a microordenadores, generalización de las tipologías estructurales que se pueden resolver, facilitar comunicación entre el usuario y el programa, implementación de leyes constitutivas más precisas, etc. En esta línea, un paso importante que se debe dar aprovechando la gran rapidez de cálculo de los ordenadores, el desarrollo de algoritmos matemáticos y, como se ha dicho con anterioridad, la aparición de equipos multidisciplinares, es todo lo relativo a la optimización de los problemas planteados.

Hay que llamar la atención sobre el hecho de que la mayor aceptación social del ordenador y la receptividad de los jóvenes técnicos en esta herramienta, comportan riesgos no desdeñables; entre ellos, el más destacable en mi opinión es la confianza que se deposita en los resultados dados por el ordenador sin un análisis de los mismos, sin olvidar la práctica frecuente de contraponer el volumen de dichos estudios por ordenador a la argumentación técnica. No obstante este panorama, tengo confianza en que una maduración social sobre esta herramienta (el ordenador) permita disminuir significativamente los riesgos expuestos y encontrar un equilibrado e idóneo empleo del mismo.

### **3.2. Hipótesis. Bases de cálculo**

El gran impulso dado en las últimas décadas a los métodos numéricos gracias al ordenador, ha dejado desfasada algunas de las hipótesis de partida hacia las que se ha vuelto la mirada en los últimos años y entiendo que recibirán un fuerte desarrollo en los venideros. Entre estos podrían citarse:

- Teorías de seguridad. Factor humano.
- Ecuaciones constitutivas. Interacción ordenador-experimentación.
- Definición más precisa de las acciones.
- Tratamiento conjunto.
- Condiciones del contorno donde se ubica la estructura.

#### *Teorías de seguridad. Factor humano*

Los detallados estudios de investigadores sobre la teoría probabilista de fiabilidad, han puesto las bases para superar el actual tratamiento semiprobabilista de las normativas y poder implementar en éstas, a medio plazo, un tratamiento totalmente probabilista. En este planteamiento, el factor humano adquirirá una gran importancia, tal como señala García Meseguer (1983) al comentar unos resultados del Instituto Federal de Tecnología de

Zurich que señalan que sobre 800 fallos estructurales, el 75 por 100 de los casos, que totalizaban el 90 por 100 de las pérdidas, podían ser clasificados como riesgos residuales, es decir derivados de la falta de fiabilidad humana.

### *Ecuaciones constitutivas*

El aumento de prestaciones que exigimos cada vez más a las estructuras de hormigón, unido al creciente desarrollo de nuevos hormigones, hacen necesario una mayor profundización de las ecuaciones constitutivas de los mismos, tal como señala Ferry Borges (1982) (comportamiento multiaxial, sísmico, criogénico, al fuego, etc.).

En esta línea, adquiere especial relevancia la obtención de las mismas mediante técnicas experimentales. El mayor coste económico de estas técnicas, aparte de otros factores (por ejemplo: tiempo, etc.), impulsará que, en paralelo, se desarrollen nuevos modelos numéricos que recojan aspectos de la microestructura, superando a los macromodelos hoy en uso. Ahora bien, este desarrollo debe ser sincronizado y equilibrado ya que si no se podrían producir desfases entre las dos vertientes (experimental y numérica) con lo que el rendimiento en el avance del conocimiento no sería satisfactorio.

### *Definición más precisa de las acciones*

En esta línea hay dos actuaciones principales cara al futuro. Por un lado, dada las nuevas tipologías estructurales o los cambios de usos en las convencionales (proyecto de rehabilitación, etc.), hay que avanzar, tal como señala Calavera (1984), en el

establecimiento racional de los valores de las acciones, (prácticamente de las cargas), pues actualmente se está trabajando con valores característicos antiguos correspondientes a los métodos clásicos de seguridad (deterministas). Por otro lado, hay que profundizar en la definición de las acciones indirectas, por ejemplo: gradientes térmicos, etc., que tengan en cuenta las condiciones específicas del emplazamiento de la estructura. A manera de ejemplo, la fig. 6 muestra un mapa de gradientes térmicos para el empleo en proyectos de puentes, presentado por Mirambell y Aguado (1987).

Otro aspecto que hay que considerar es el avance en la definición más precisa de los coeficientes de mayoración de las acciones y la combinación de éstas frente a los distintos estados límites. Este camino, ya iniciado en normativas internacionales, CEB-FIP (1978), encuentra, a mi entender, cierta resistencia a nivel nacional, bajo el argumento de que la calidad usual de nuestras estructuras no es la idónea y en consecuencia hay que considerar coeficientes de mayoración elevados. Mantener el mismo es ir en contra al avance social, en relación a la calidad, expuesto con anterioridad; y en consecuencia, es un argumento sin futuro.

Un caso especial es la definición de la acción del pretensado en el que hay que trabajar en una mejor precisión de las distintas pérdidas de la fuerza de pretensado, en especial en aquellas estructuras con tendones no adherentes en las que la existencia de programas de vigilancia de las mismas puedan llevar a decisiones de aceptación o rechazo con las consiguientes repercusiones (económicas, sociales, políticas, etc.). Un ejemplo característico de este tema es la incorrecta valoración de la penetración de cuñas en las bandas de tolerancia, dentro de los programas de vigilancia de pretensado de al-

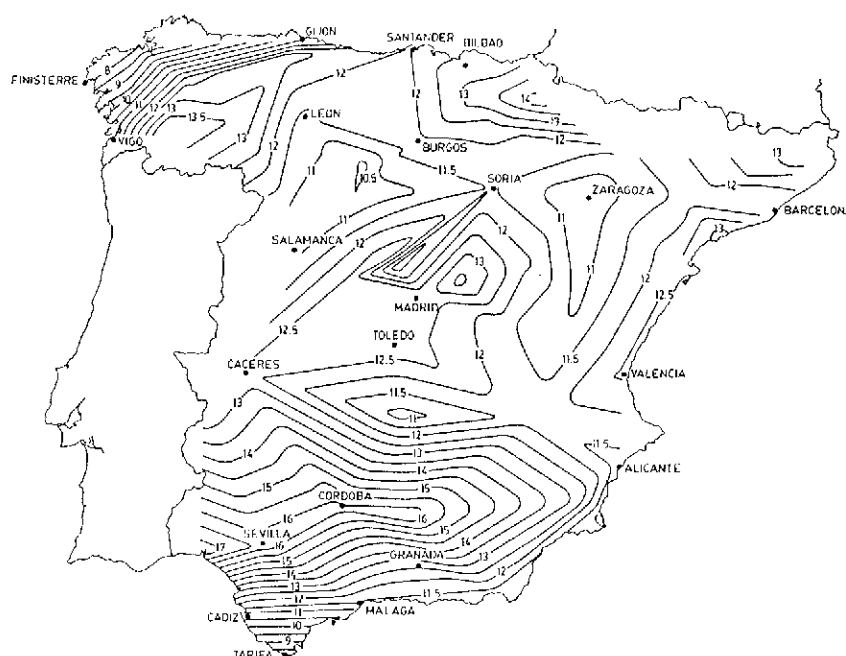


Fig. 6. Mapa peninsular de isótermas del gradiente térmico de referencia en puentes losa maciza.

gunas centrales nucleares españolas, tal como señalan Aguado et al. (1988). Una justificación teórica de esta incorrecta evaluación la presenta Montobio (1989) en un reciente trabajo.

#### *Tratamiento conjunto*

En cualquier campo del conocimiento es usual que las primeras etapas estén constituidas por modelos simples que si consolidan puedan suponer cierta inercia hacia cambios posteriores. El campo del hormigón no es ajeno a esta situación y así hoy día aún se trabaja con planteamientos separativos del hormigón armado y el hormigón pretensado o bien modelos separados en los distintos estados límites.

En el primero de los casos, tal como señala Murcia (1984) hay que seguir avanzando en un planteamiento conjunto y hablar en general de estructuras de hormigón con armaduras. Ahora bien en este camino, hay que dejar claro el concepto activo que representa pretensar una estructura y las diferencias tecnológicas que conllevan los distintos tipos de armadura que hay que emplear, incluyendo aquí los nuevos materiales para armaduras.

En el segundo de los casos señalados, hay que recordar que una estructura, a nivel sección, está sometida simultáneamente a distintos esfuerzos, si bien la práctica habitual hoy en día en elementos lineales es, aún, estudiarlos de forma separada con correcciones posteriores para tener en cuenta dicha actuación conjunta. Para superar esta situación se está trabajando en la actualidad a nivel investigación en esta línea, por lo que cabe esperar que, en los años venideros, los resultados de todas estas investigaciones puedan implementarse en la práctica cotidiana y contemplarse en las normativas.

#### *Condiciones de contorno donde se ubica la estructura*

Estas condiciones han sido con frecuencia olvidada o no consideradas, tanto en la vertiente activa, la incidencia que las mismas tienen sobre la estructura, como en su vertiente pasiva, la incidencia que la estructura tiene sobre las estructuras vecinas y el entorno.

Una consecuencia fundamental de la primera vertiente enunciada es la aparición de problemas de durabilidad en numerosas estructuras de hormigón, lo cual ha venido a desmitificar la idea de que el hormigón es eterno y no necesita mantenimiento. Este hecho no debe ser caldo de cultivo utilizado hoy en día en ciertos medios, para irse al otro extremo en el que se indica que no se pueden dejar estructuras con hormigón visto. El camino de futuro está en una solución equilibrada, en la que criterios de durabilidad se incluyan en los requisitos de diseño, lo cual puede, en unos casos, conducir a proteger el hormigón visto, y en otros no, función de la vida útil de dicha estructura.

La vertiente pasiva contempla todo el tema de impacto ambiental. La creciente preocupación por esta área, centrada inicialmente en el impacto biológico, debe dar lugar a un abanico más amplio de preocupaciones, entre las que se pueden citar: sociales, históricas, estéticas y estructurales sobre las estructuras vecinas.

#### **4. MATERIALES**

La situación actual del hormigón como material viene enmarcada, por un lado, por un creciente aumento de las prestaciones requeridas, y por otro lado, por una escasa atención del mismo. Esto último puede ser fruto de épocas anteriores con poca tecnificación y una industria pequeña, con mano de obra de escasa formación.

No obstante, esta idea subyacente del hormigón como material poco noble se mantiene aún, por desgracia, en muchos pliegos de condiciones de obras singulares y en las prioridades nacionales sobre investigación, olvidando que el hormigón es el material base del sector de la construcción, el cual representa en España entre el 5 y el 10 por 100 del Producto Interior Bruto (P.I.B.). Sector, por otro lado, en el que se está en condiciones de exportar tecnología. El apoyo a otros materiales, bajo la denominación de nuevos materiales, puede resultar altamente positivo, tanto para la formación y consolidación de equipos nacionales de investigación como para las empresas multinacionales implicadas en dichas áreas temáticas.

En mi opinión, un adecuado equilibrio en las dos direcciones es necesario.

El avance significativo del hormigón como material, vendrá asociado a un cambio de mentalidad sobre la concepción del mismo. Este tiene que surgir como consecuencia de un proyecto específico del material, con los requisitos correspondientes y no, únicamente, como una cuestión histórica (empleo en obras anteriores).

Este cambio de mentalidad tiene que venir apoyado por una potenciación del hormigón como un producto industrial, un mayor equilibrio de las exigencias sobre características resistentes en relación a otras características (no tomar éstas como una consecuencia derivada de aquellas) y una mayor formación del personal implicado, ante los cambios que representan los nuevos hormigones.

Tras esta perspectiva general, veamos a continuación algunos aspectos específicos de los materiales constituyentes y de los hormigones especiales, no incidiendo en detalle en los mismos ya que estos pueden consultarse en algunas de las conferencias englobadas en el seminario de la UNTEC citado al principio de este artículo, o bien en la literatura especializada.

#### *Conglomerante*

El conglomerante hidráulico tradicional del hor-

hormigón es el agua y el cemento no siendo previsibles significativos cambios a corto y medio plazo. No obstante, pueden señalarse algunos casos particulares en los que existe una substitución parcial o total de algunos de los componentes. Así, la solución adoptada en bases lunares [LIN, T.D. (1987)] o bien la substitución del conglomerante hidráulico por resinas que den lugar a los hormigones de polímeros, aunque estos tienen un campo muy específico de aplicación [Aguado y Salla (1987)] en creciente desventaja frente al hormigón de cemento modificado con polímero.

Así pues, el cemento seguirá siendo la base principal del conglomerante y sobre él se dirigirán en gran medida los pasos a dar. Estos, de acuerdo con Meric (1985) se encaminarán a obtener un ahorro de energía, unas mejores y más amplias características mecánicas y una mayor durabilidad. Entre ellos puede citarse:

–Diversificación de los tipos, adecuándose a la demanda (por ejemplo en alta resistencia-albañilería, rápidos-lentos, etc.).

–Regularización de los clinkers. Sistemas de control. Trabajabilidad del hormigón.

–Adición de otros componentes al clinker. Aumento de los valores actuales para cenizas y puzolanas.

– Mejora de rendimientos en los hornos.

–Automatización. Diseño de mezclas (componentes del cemento) en relación a requisitos exigidos para morteros y hormigones.

–Control de la cinética de reacción.

–Adecuación a las características exigidas. Muy reducida retracción y fluencia. Buen comportamiento frente a agentes agresivos mecánicos (impacto, fatiga, etc.), físicos (hielo, cambios térmicos) y químicos.

–Optimizar rendimientos (por ejemplo: características mecánicas, etc.) con mínimas cantidades de cemento.

No quiero acabar este subapartado sin reseñar que la substitución parcial, en planta, de cemento por otro conglomerante, principalmente cenizas volantes, tiende a disminuir su práctica debido a una mayor exigencia de calidad, lo que conllevaría a una mayor manipulación (mezclado previo de cemento y cenizas), mayores instalaciones, etc., lo cual puede resultar no competitivo desde un punto de vista económico.

Esta incorporación de cenizas volantes, ya sea en planta de hormigonado o bien en fábrica de cemento, tiene por otro lado una vida limitada, cuyo horizonte será la obtención de energía por fusión, a nivel industrial, en substitución de centrales térmicas y nucleares, principalmente. Ello no quita para que puedan aparecer nuevos residuos industriales de industrias de gran implantación geográfica o bien en zonas específicas localizadas, que ten-

gan actividad hidráulica y puedan ser empleados de forma análoga a las actuales cenizas volantes.

## Aridos

Con anterioridad se ha explicado la creciente dificultad de encontrar canteras o graveras de buenas características, próximas a los centros de consumo. Esto potenciará la búsqueda de soluciones alternativas, entre las que se podrían citar:

–Explotación de depósitos marinos próximos a la costa.

–Empleo de residuos industriales.

–Potenciación del uso de áridos artificiales.

El empleo de residuos industriales, no sólo apunta a los casos más conocidos, entre ellos las cenizas volantes, sino también a la reutilización de materiales de construcción, entre ellos hormigón, provenientes del derribo de estructuras. Este último caso puede hoy día ser competitivo, tanto en zonas puntuales (la fig. 7 muestra un equipo de machaqueo y clasificación de este tipo de material que se va a emplear en diferentes obras de la Villa Olímpica de Barcelona) como en obras de carácter lineal, principalmente pavimentos de carreteras, túneles.

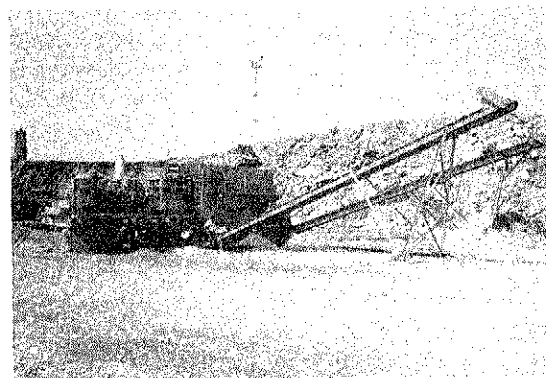


Fig. 7. Instalación de machaqueo y clasificación de árido proveniente de materiales del derribo de estructuras.

En cuanto a volver la vista a la potenciación del uso de áridos artificiales, ello será posible siempre y cuando pueda disminuirse el coste energético de su fabricación. En esta situación se podría conseguir, tal como señala Tassios (1987), aumentar la longitud de los vanos en puentes de grandes luces, mejorar soluciones en condiciones sísmicas y resolver problemas de construcción en la cimentación de edificios en suelos difíciles, dado el menor peso de la estructura, especialmente en edificios de gran altura (la fig. 8 muestra el edificio más alto de España, con árido ligero como material constituyente del hormigón del forjado).

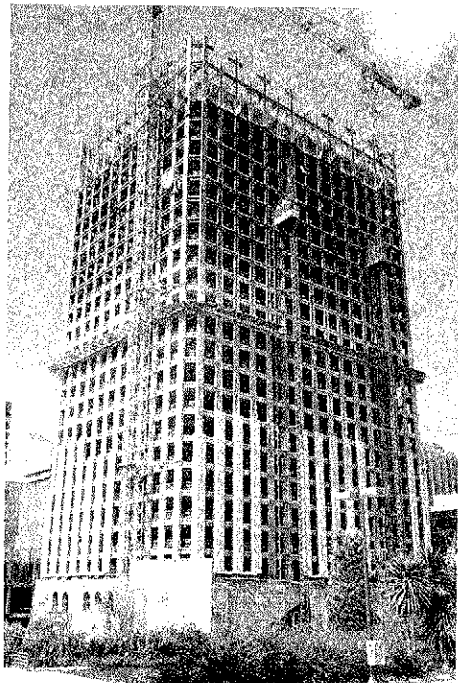


Fig. 8. Torre Picasso. Forjado: Placa metálica y hormigón ligero (Madrid).

Si la búsqueda de alternativas a las fuentes tradicionales de áridos será el objetivo principal, entiendo que no hay que despreciar otros pequeños pasos en relación a la manipulación, transporte, dosificación, pesada antes de verter a la amasadora y control, especialmente, de la humedad durante la fabricación y de distintas propiedades más amplias que las actuales en la caracterización general de los áridos. (Estudios del espectro con difracción de rayos X, microscopio electrónico de barrido, etc.).

#### *Aditivos*

Los aditivos adquirirán carta de naturaleza como componente base de los hormigones del futuro. La evolución, de acuerdo con Kesler (1980), va dirigida hacia una mejora de las características mecánicas del hormigón (comportamiento bajo presión, calor, otros), una reducción del coste, un incremento significativo de la durabilidad (por ejemplo: aditivos ante corrosión, etc.) y una más fácil puesta en obra de los hormigones, actuando sobre la reología, tanto en el hormigón fresco como en el endurecido: disminución de retracción y fluencia.

Si bien los pasos descritos son fruto de un mayor esfuerzo de la industria química en esta dirección, en los últimos años se está detectando asimismo un gran esfuerzo, por parte de las administraciones, encaminado a la normalización de dichos materiales como tales y en su aplicación en el hormigón. En esta línea habrá que desarrollar métodos de control que detecten fácilmente variaciones superiores a las tolerancias exigidas para una determinada característica, lo que puede dar lugar a al-

gún tipo de agente que podríamos denominar espia. Este agente (aditivo) añadido al hormigón podría, por ejemplo, cambiar de coloración ante una relación agua/cemento por encima de lo permitido.

Asimismo, pueden añadirse aditivos con una acción directa en el conglomerante. Este es el caso de ciertas resinas (acrílicas, epoxi, etc.) compatibles con el agua, que conducen a una modificación significativa de las características del hormigón, dando lugar a un nuevo tipo denominado hormigón modificado con polímeros. Esto abre un amplio abanico de posibilidades, estructurales o no, a hormigones que requieran unas elevadas prestaciones mecánicas y un buen comportamiento frente a agentes agresivos mecánicos, físicos y químicos [Aguado y Salla (1987)].

#### *Armadura*

En la armadura tradicional de acero, la evolución no será prioritaria en el sentido de alcanzar mayores resistencias a tracción, hoy en día ya importantes, sino en que el comportamiento de la misma se ajuste mejor a requisitos cada vez más exigentes: ambientes muy agresivos, altas y bajas temperaturas, etc. Ello no quita para que la tendencia de producir aceros menos dúctiles y de altas resistencias puede deparar algunos problemas estructurales, con roturas frágiles, motivadas por un incorrecto empleo de los mismos. Si a ello se le añade la creciente preocupación en Europa por los temas sísmicos, puede hacer volver la vista a los técnicos en los próximos años hacia aceros dúctiles.

El otro camino principal de avance en cuanto a la armadura es la búsqueda de soluciones no metálicas (diversos tipos de fibras) que aparte de sus altas prestaciones mecánicas tengan un buen comportamiento frente a distintos agentes agresivos.

#### *Hormigón*

Tal como muestra la figura 9 [Breen (1987)], el hormigón, como otros materiales y actividades humanas, ha experimentado una evolución casi exponencial en las últimas décadas, especialmente desde un punto de vista mecánico. Estos cambios exigen, lógicamente, una adecuación del técnico para adaptarse a los mismos (programas de formación continua), ya que el técnico (factor humano) será la clave del éxito de dichos cambios.

Si en laboratorio se pueden alcanzar valores muy elevados de resistencia (hormigones de alta resistencia), será en los próximos años cuando este tema experimente un gran auge en su implementación práctica, especialmente en edificios de altura y puentes de grandes luces. Cabe señalar, para ilustrar este punto, que de las peticiones de proyectos de investigación y desarrollo a la C.E. en estos úl-

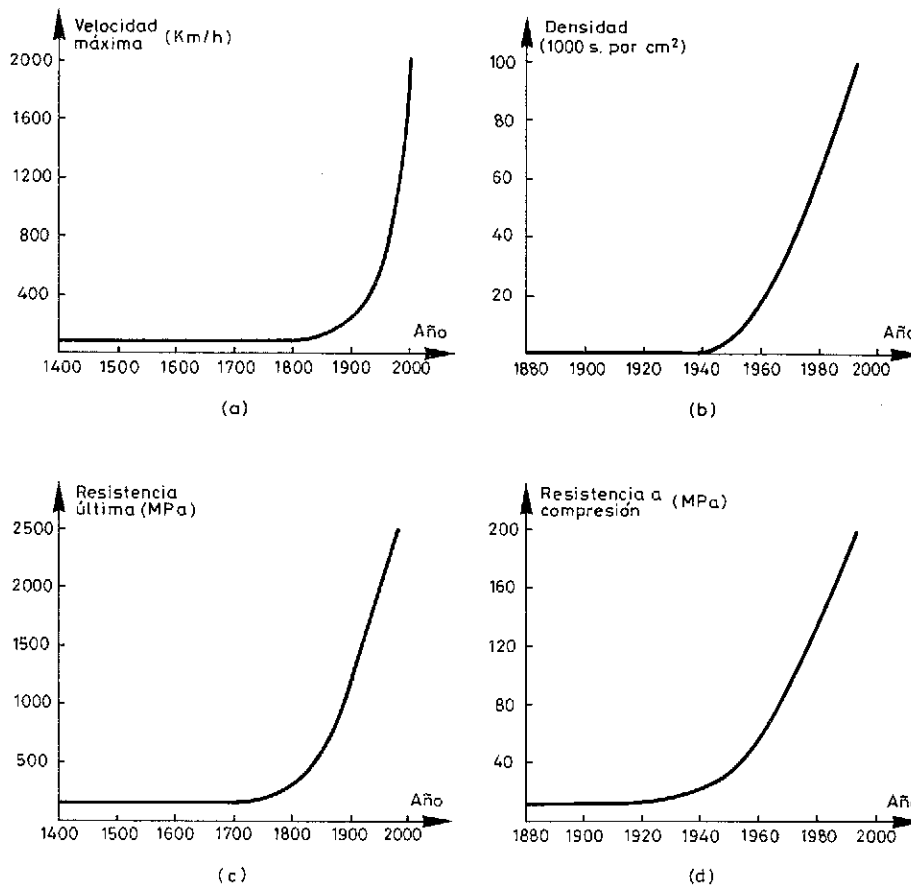


Fig. 9. Evolución en función del tiempo de la: a.— Velocidad del transporte humano. b.— Densidad de circuitos electrónicos. c.— Resistencia a tracción de los metales. d.— Resistencia a compresión del hormigón.

timos cinco años dentro del campo del hormigón, el mayor número hacían referencia a hormigones de alta resistencia.

Ahora bien, la evolución futura no sólo está en la resistencia sino en una mayor identidad de otras propiedades, como criterios principales que conduzcan a un mejor conocimiento y desarrollo de lo que hoy en día denominamos hormigones especiales [Aguado (1984)], entre los que podrían citarse: hormigones porosos, hormigones refractarios, hormigones ligeros, hormigones de alta densidad, hormigones de polímeros, hormigones modificados con polímeros, hormigones impregnados de polímeros y/o de azufre, hormigones con fibras de acero, de vidrio u otras fibras, hormigones compactados con rodillo y un numeroso grupo de otros hormigones.

La posible mayor industrialización del hormigón como material (hay que recordar que en España se ha duplicado en los últimos cinco años la producción de hormigón preamasado en central) potenciará el desarrollo de sistemas de control de producción. En paralelo, las mayores exigencias de calidad darán lugar asimismo al incremento del control de recepción y de sistemas intersección (control de producción - control de recepción).

Todo ello, lo que hará evidentemente, es contribuir a una profundización de las técnicas de ensayos encaminadas a conocer, en menores plazos que los actuales, diferentes características, tanto del hormigón fresco como del hormigón endurecido (relación agua/cemento, resistencia a compresión, resistencia a tracción, permeabilidad, etc.).

A este significativo avance contribuye asimismo la creciente informatización de las empresas productoras de hormigón y de las empresas de control, lo cual está siendo aprovechado positivamente para crear importantes bancos de datos de cuyo análisis y profundización del conocimiento se puedan derivar actuaciones a más corto plazo. Uno de los primeros trabajos en este sentido lo presenta Cañadas (1989) con hormigones realizados en los últimos años en Cataluña.

## 5. CONSTRUCCION

El principio básico actual y futuro en la construcción es, en mi opinión, conseguir la calidad requerida para la obra, en el plazo previsto y con el mínimo coste. Ahora bien, dado por un lado, el elevado coste financiero de muchas obras, una puesta rápida en servicio de las mismas, reduce di-

cho coste, por lo que nuevamente el factor tiempo adquiere gran importancia. Por otro lado, de los distintos componentes: materiales, equipos y personal, que intervienen en la obra, el incremento del coste de la mano de obra es, en condiciones normales, el que tiene una evolución más rápida. Todo ello favorece a una industrialización de la construcción, lo cual puede manifestarse entre otros factores en:

- Automatización y robotización.
- Hormigonado in situ.
- Prefabricación.
- Métodos alternativos.

cuyas características principales se presentan a continuación.

#### *Automatización y robotización*

La automatización y robotización en la industria es un paso irreversible del que la construcción participa. Ahora bien, el avance en este caso viene condicionado a las peculiaridades de la construcción (fragmentación del proyecto, carácter nómada, influencia condiciones ambientales, etc.) lo que no quita para que la robotización se adapte bien a las partes más industrializadas del proceso, entre las cuales se pueden citar las siguientes: Centrales de hormigonado, equipos de proyección, cortadoras, distribuidores de hormigón, verificación de acabados y otros.

Especial mención merecen distintos aspectos relacionados con la preparación y colocación de armaduras. Así, cabe señalar el futuro empleo de robots para la preparación de armadura, especialmente en mallas electrosoldadas, que pueden ampliar con ello su campo de aplicación, por ejemplo, en elementos lineales tipo viga con diversas geometrías, en sustitución parcial de los tradicionales cercos para absorber esfuerzos cortantes. Esta robotización puede alcanzar asimismo a la colocación de armadura, verificación de recubrimientos, etc.

Evidentemente, el ordenador estará presente en los procesos señalados y en toda la gestión de la obra, tanto desde el punto de vista administrativo como desde el punto de vista técnico. Los bancos de datos obtenidos serán empleados como bagaje de conocimiento para nuevas obras dentro de la misma empresa, superando la actual compartimentación de éstas.

Por último, como consecuencia de lo expuesto cabe señalar el previsible aumento de usos en la construcción de sistemas inteligentes. Estos, a partir de mediciones in situ y análisis de los bancos de datos disponibles, permitirán una toma rápida de decisiones (automática o no) en relación a la construcción. Un caso característico en esta línea es el control de deformaciones, geometría, condiciones climáticas, etc. en un puente atirantado en cons-

trucción, cara a la puesta en tensión de los sucesivos cables [Momoshima (1987)].

#### *Hormigón in situ*

Tal como señalan Rogge y Tucker (1987), de las diferentes etapas en la construcción de un elemento de hormigón con armaduras, son las previas a la colocación de éstas (replanteo, construcción de encofrados, etc.) las que consumen normalmente más del 50 por 100 del tiempo total. Así pues, a reducir estos tiempos se encaminarán en gran medida las actuaciones futuras y, entre ellas, especialmente las relacionadas con los encofrados.

Algunas de estas medidas podrían ser:

- Encofrados más ligeros y más duraderos, con el fin de ser más fácilmente manejables, aumentando el uso de los mismos; ello conllevará una evolución en los materiales empleados en su fabricación.

-Búsqueda de soluciones constructivas simples que cubran grandes superficies, lo que puede potenciar ciertas tipologías estructurales. Por ejemplo: forjados macizos de hormigón pretensado con armaduras postesas.

Eliminación o reducción significativa de encofrados. A manera de ejemplo puede citarse un mayor empleo de hormigón proyectado, en elementos estructurales (muros, depósitos, otros); o bien de hormigón compactado con rodillos, en presas y pavimentos. En ambos casos puede verse que esta medida viene asociada a un determinado tipo de hormigón (material) que la hace factible.

-Racionalización de formas y elementos de sujeción, apoyo, atado, que permitan disminuir tiempo de manipulación. Ello propiciará una generalización en la especialización de este sector, ganando los encofrados y cimbras carta de naturaleza como estructura con entidad propia.

-Encofrados perdidos (prefabricados de mortero de cemento o de microhormigón) que lleven incorporada cierta armadura y contribuyan estructuralmente, dando lugar a secciones mixtas.

El mayor tiempo consumido en las etapas citadas, no excluye una evolución en el resto de las etapas, si bien en la mayoría de los casos vienen asociadas a otros aspectos ya señalados, tales como: mejores rendimientos en la colocación del hormigón que conducen a un hormigonado continuo y una compactación mediante rodillos; disminución de tiempos de desencofrado que exige una racionalización en la estructura soporte del encofrado; o bien el empleo de robots para colocación y verificación geométrica de armaduras.

#### *Prefabricación*

En gran medida, la mayoría de los factores señalados en el marco social descrito (apartado 1) en



relación a la construcción, ayudan a realizar una previsión optimista de la prefabricación, superando la actual etapa de horas bajas de la prefabricación pesada, en especial en arquitectura.

Para que se cumplan estas favorables perspectivas es necesario, en mi opinión, una evolución del concepto de prefabricación, en el sentido de que el prefabricado sea muy versátil (no rígido) y se adapte fácilmente a distintos criterios. Entre ellos pueden citarse:

—Adaptabilidad a nuevos usos y formas. Por ejemplo: Urinarios públicos, imbornales, barreras antiruido, nichos, etc.

—Aumento en el número de elementos para buscar soluciones estructurales con alto grado de prefabricación. Por ejemplo: Palau Sant Jordi, en Barcelona, con más de 500 elementos diferentes.

—Diferentes opciones de acabados (textura) para adaptarse a los criterios estéticos del proyecto y técnicas del mismo. Por ejemplo: Mayor o menor absorción de ruido en barreras antiruido.

—Posibilidades de color y tonalidad, con objeto de dar libertad al proyectista en la concepción estética de su obra.

Adaptabilidad a la evolución, expresada con anterioridad, del hormigón como material.

Ahora bien, esta mayor versatilidad del prefabricado no supondrá la consolidación del mismo sino viene acompañada de otras actuaciones encaminadas a una mejora de su calidad final puesto en

obra (control estricto de tolerancias, correcta definición de uniones, mejora de medios de transporte y manipulación, etc.).

Esta calidad, que exige en definitiva un proyecto y una construcción más cuidados, ayudará a cambiar la idea, bastante extendida entre el ciudadano, de que el prefabricado es feo y de baja calidad (Puentes de vigas y fachadas de viviendas sociales, en etapas anteriores). Al reflujó de esta idea y de la situación actual de mercado, especialmente en edificación, el proyectista estándar no conoce todas las posibilidades del mismo; por lo que apoyar la formación continua en esta área parece otra tarea necesaria.

#### *Métodos alternativos*

La creciente capacidad de los medios auxiliares de construcción está abriendo expectativas de una mayor generalización de métodos alternativos de construcción. Estos medios pueden cubrir cuatro funciones básicas: traslación, rotación, elevación, transporte, con las que se consiguen unas condiciones intermedias de construcción más favorables, disponiendo con posterioridad la estructura en su posición final.

La *traslación* puede conseguirse, bien mediante el empuje de la estructura con gatos hidráulicos, técnica hoy en día empleada en el lanzamiento, tanto de tableros de puentes empujados como de estructuras subterráneas, o bien mediante la puesta

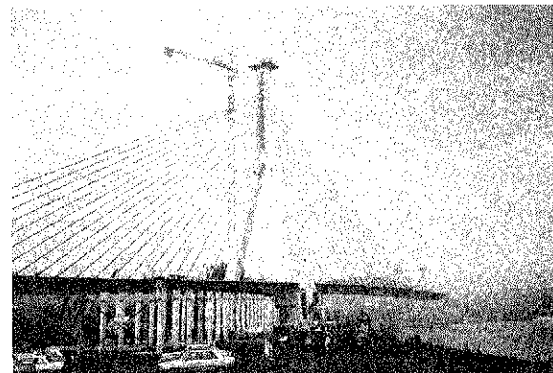
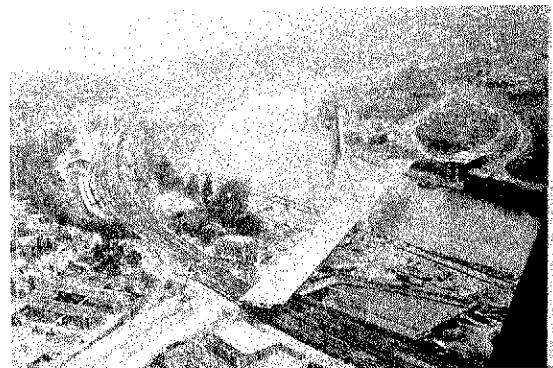
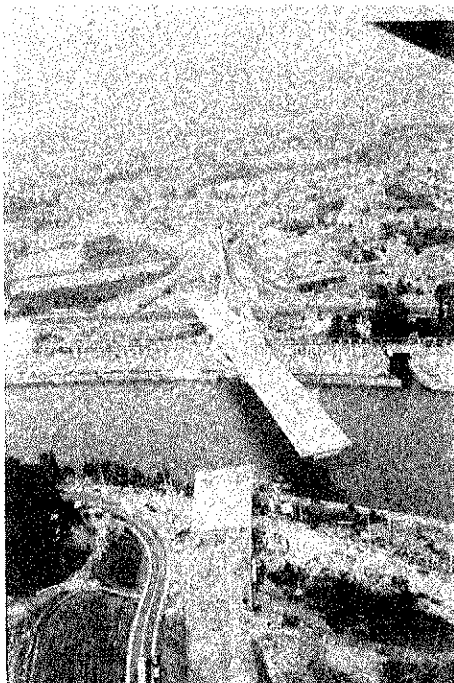


Fig. 10. Panorámica general del giro del puente de Ben Ahin (Bélgica).

en tensión de cables con lo que se modifica la posición inicial de la estructura. Esta técnica es más usada para estructuras de cubierta, y un ejemplo reciente es la cubierta del Centro de Convenciones Moscone, en San Francisco [Lin and Chow (1983)].

La *rotación*, de creciente aplicación en puentes, puede ser en un plano vertical o en un plano horizontal. En el primero de los casos, el tablero o parte de él se construye en posición vertical, o próxima a ella, para posteriormente girar hacia un plano horizontal. En el segundo de los casos, el tablero se construye paralelo al margen del río para con posterioridad, tras un giro en la pila, situarle en posición definitiva. En la fig. 10 se muestra el puente de Ben Ahin durante el giro del mismo.

La *elevación* es una técnica conocida, que puede abrirse nuevos caminos en tableros completos de puentes, potenciar otros al amparo de unas perspectivas favorables, como es el caso de forjados de edificación (técnica lift slab) o bien generalizar su uso en tipologías ya consolidadas, por ejemplo, depósitos elevados.

El *transporte* hace referencia a un desplazamiento significativo de la estructura. Esta situación presenta su caldo principal de cultivo en estructuras marinas, las cuales pueden ser construidas en seco o en zonas de poca profundidad para ser transportadas con posterioridad, por flotación, mediante remolcadores o barcos especiales. Entre estas estructuras, aparte de los conocidos cajones, se encuentran plataformas marinas, estructuras de disipación de energía, estructuras soportes multiuso (Plan Delta en Países Bajos), etc.

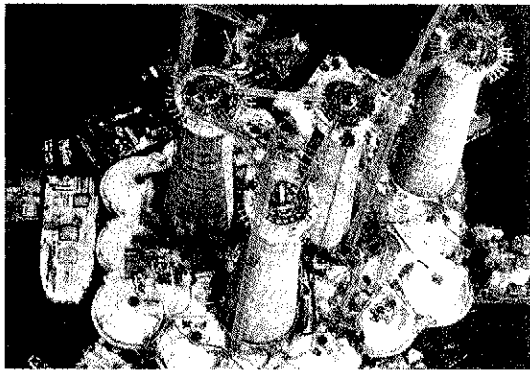


Fig. 11. Plataforma petrolífera, en el Mar del Norte.

Como paradigma de estos métodos alternativos podría citarse el puente de Linn Cove, enclavado en un parque nacional de E.E.U.U., en el cual tanto cimentación, pilas como tablero han sido construidos avanzando desde el tablero, reduciendo de forma significativa el impacto ambiental y consiguiendo una estructura muy integrada en el entorno.

## 6. MANTENIMIENTO Y USO

El avance cualitativo más significativo en esta dirección debería ser una mayor toma de conciencia de la importancia de esta etapa, reflejándose la misma en una mayor participación del técnico y una organización propia dentro de la Administración, Empresas y período de formación en la Universidad (implantar asignaturas específicas de esta temática).

Dado el evidente retraso que, como término medio, se lleva en esta etapa hay que trabajar, como se ha dicho, en la formación y en la definición de metodologías de trabajo ajustadas a las estructuras que hay que controlar. Nuevamente surge aquí el ordenador como una herramienta muy práctica en la gestión de los bancos de datos que se obtengan de la vigilancia.

Dentro de esta etapa de uso estructural hay, tal como señalan Aparicio et al. (1989), un camino muy importante por donde avanzar, que es el control activo de estructuras. Ello, aparte de contribuir a un mejor comportamiento estructural, redundaría asimismo en una mayor durabilidad. Los campos de aplicación de esta técnica, en primeras épocas, serán estructuras singulares tales como: puentes de determinadas características, estructuras colgantes, estructuras de contención de fuentes térmicas extremas, etc.

En la potenciación de esta etapa contribuirá, asimismo, de forma muy favorable, el avance en equipos experimentales que permitan conocer el estado de la variable analizada (por ejemplo profundidad de fisuras, etc.) en un corto plazo de tiempo y de forma fiable.

La etapa de mantenimiento y uso es la última de un proyecto específico pero, al mismo tiempo, las enseñanzas derivadas de ella, deben hacer de la misma la primera etapa de un nuevo proyecto específico. Por ello entiendo que hay unas cuestiones básicas de mantenimiento que deben plantearse en proyecto como un criterio más. Entre estas cuestiones, aparte de la durabilidad repetida en todo el artículo están:

- La accesibilidad para la inspección y

La facilidad de reparación.

en definitiva, tener presente en la valoración del proyecto, no sólo los costes iniciales sino también los de mantenimiento en el momento de evaluar una solución.

Dado que cierto tipo de propietarios (individuales, pequeñas empresas, ayuntamientos, etc.) no disponen de técnicos de mantenimiento en la panorámica aquí planteada, entiendo que los colectivos profesionales y las Administraciones y, en definitiva, la Sociedad, debería tomar conciencia de dicha laguna y potenciar la investigación, desarrollo y principalmente divulgación, para transmi-

tir al técnico general los puntos principales que deberá tener en cuenta en relación al mantenimiento.

## 7. CONSIDERACIONES FINALES

Se ha insistido con anterioridad, en cada una de las etapas, en la importancia del factor humano como clave de éxito en el cumplimiento de las predicciones realizadas. Dentro del factor humano existen distintas variables que actúan en sentido positivo o negativo, algunas de las cuales las reflejan en trabajos recientes: García Meseguer (1983) Breen (1987), Santana (1987).

De todas estas variables me interesa destacar, como profesor de universidad, la importancia de la formación continuada. En la fig. 12.a) [Ovesen (1980)] puede verse el modelo actual, donde el graduado, una vez sale de la Universidad, apenas tiene unos contactos puntuales con la misma u otros centros de formación académica. Es de esperar, ya que así lo entienden en la actualidad algunos países europeos, la gradual implantación de modelos de formación continuada (Fig. 12.b) que contribuyan a un mejor rendimiento profesional de los técnicos.

La vigorosa y ágil respuesta que España ha dado en numerosos temas, tras su incorporación a la Comunidad Europea, hacen prever un esperanzador futuro en esta temática, especialmente si existiesen medidas gubernamentales que lo potenciasen. Por ejemplo desgravaciones fiscales por actividades relacionadas con la formación continua, etc.

Y para acabar, tomando unas palabras de Walther (1987), el objetivo para el futuro debería ser cultivar lo mejor posible una buena imagen y aceptación social del hormigón, a través de crear estructuras estéticas, técnicamente perfectas y mantenidas en buenas condiciones.

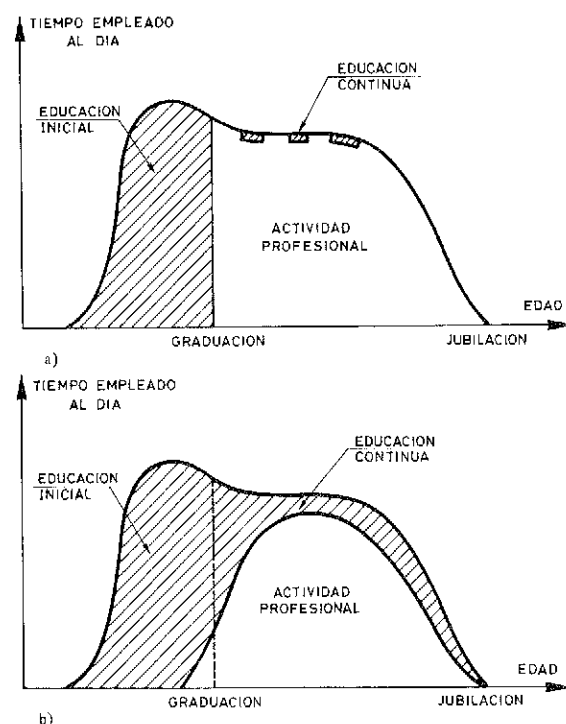


Fig. 12. Educación continua frente a actividad profesional. a.- Concepto actual. b.- Concepto futuro.

## AGRADECIMIENTOS

Estas líneas sirven para agradecer a todos aquellos compañeros que con sus opiniones han ayudado a conformar las aquí expresadas. En especial quiero agradecer a D. Alvaro García Meseguer, a D. Jordi Joan Rosell Selvas y D. José Calavera Ruiz, los acertados comentarios que han hecho del manuscrito de este artículo.

Asimismo, quiero agradecer a la Fundació Narcís de Monturiol, la oportunidad que me dió como director y profesor del Seminario citado, así como el permiso para publicar esta conferencia.

Por último, quiero agradecer a las empresas Comsa, Construcciones y Contratas, S.A. y C.T.T. las fotos suministradas que figuran como fig. 1,8 y 10, respectivamente, del presente artículo.

## 8. BIBLIOGRAFIA

—AGUADO, A. (1984). "Introducción a los hormigones especiales". Capítulo 1 apuntes docentes asignatura optativa Hormigones Especiales de la E.T.S.I.C.C.P. de la Universidad Politécnica de Cataluña. 320 pp.

—AGUADO, A. y SALLA, J.M. (1987). "Los hormigones con polímeros en la construcción. Propiedades y aplicaciones". Rev. Informes de la Construcción nº 389. pp. 61-72.

—AGUADO, A., EGOZCUE, J.J., VELASCO, J.M., VIVES, A. y MIRAMBELL, E. (1988). "El pretensado y su vigilancia en centrales nucleares". Pub. ES020-1988. Servicio de publicaciones de la E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Cataluña. 224 pp.

—APARICIO, A.C. et al (1989). "Aplicaciones del control activo al paso de convoyes especiales sobre puentes de carretera". Informe final proyecto CAICYT 1176/84. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. U.P.C.

—BREEN, J.E. (1987). "Challenge of Innovation in Materials for Structural Concrete". IABSE Symposium. Paris-Versailles. pp. 297-306.

—CALAVERA, J. (1984). "Concepto de seguridad". Curso de Rehabilitación. Mod. 5. La estructura. Servicio de publicaciones del Colegio Oficial de Arquitectos de Madrid. pp. 9-17.

—CAÑADAS, J.E. (1989). "Factores que influyen en la prognosis de la resistencia a compresión del hormigón. Estudio efectuado a partir de las materias primas y condiciones de Cataluña". Tesis doctoral. E.T.S. Arquitectura de Barcelona. U.P.C. 327 pp.

—CEB-FIP (1978). "Código Modelo C.E.B.-F.I.P. para las estructuras de hormigón". Traducción y edición del Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento. IET'cc. Madrid 340 pp.

—CUR-VB (1985). "Demountable Construction in Precast Concrete" 85-1. Netherlands Committee for Research, Codes and Specifications for Concrete. 107 pp.

FERRY BORGES, J. (1982). "Objetivos y perspectivas de la investigación europea en el campo del hormigón". Rev. Informes de la Construcción n° 337 Enero-Febrero. pp. 43-51.

—GARCIA MESEGUER, A. (1983). "Para una teoría de la calidad en la construcción". Rev. Informes de la Construcción n° 348 Marzo. pp. 5-22.

—KESLER, C.E. (1980). "Concrete for the Year 2000". Chapter 1 Progress in Concrete Technology. Ed. by V.M. Malhotra. CANMET Ottawa, Canadá pp. 1-23.

—LIN, R.S. (1987). "Concrete for Lunar Base Construction". Concrete International. July pp. 48-53.

—LIN, T.Y. and CHOW, P.Y. (1983). "Looking into the Future" Chapter 1. Handbook of Structural Concrete. Ed. by F.K. Kong, R.H. Evans, E. Cohen and F. Roll. Pitman Advanced Publishing Program London pp. 1-28.

—MERIC, J.P. (1985). "Les ciments et les bétons d'aujourd'hui et de demain". Ciments, Bétons, Plâtres, Chaux n° 752 - 1/85 pp. 13-17.

—MIRAMBELL, E. y AGUADO, A. (1987). "Estudio del comportamiento de puentes losa de hormigón frente a la acción térmica ambiental. Criterios de diseño". Hormigón y Acero n° 163. 2° Trimestre pp. 65-106.

—MOMOSHIMA, S. (1987). "Innovations in Construction Equipment, Machinery and System". Concrete Structures for the Future. Paris-Versailles. pp. 307-316.

—MONTORBIO, X. (1989). "Comportamiento en destesado de armadura activa". Tesina de Especialidad E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. U.P.C. Junio. 240 pp.

—MURCIA, J. (1984). "Planteamiento hormigón armado-hormigón pretensado y tendencias futuras de la normativa". Rev. Hormigón y Acero n° 150. pp. 69-84.

—POMEROY, C.D. (1978). "Concrete, an Alternative Material". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Vol. 192 pp. 135-144.

—ROGGE, D.F. and TUCKER, R.L. (1987). "Research Needs in Steel and Concrete Construction". Journal of Construction Engineering and Management. Vol. 113 n° 13 Sep. pp. 440-446.

—SANTANA, G. (1987). "La investigación en ingeniería de la construcción". Revista de Obras Públicas. Diciembre pp. 803-818.

TASSIOS, T.P. (1987). "Concrete Structures for the Year 2000". IABSE Symposium. "Concrete Structures for the Future". Paris-Versailles pp. 639-646.

—VIEITEZ, J.A. y RAMIREZ, J.L. (1984). "Patología de la construcción en España: Aproximación estadística". Rev. Informes de la Construcción. Vol. 36 n° 364 Octubre. pp. 5-15.

WALTHER, R. (1987). "Concrete Structures for the Year 2000". IABSE Symposium. "Concrete Structures for the Future". Paris-Versailles pp. 631-638.

## RESUMEN

En este artículo se presenta la opinión del autor sobre las perspectivas de futuro en el campo del hormigón. Dichas perspectivas se enmarcan dentro de unas premisas sobre la evolución de la sociedad en el futuro y abarcan todas las etapas del proceso constructivo (planificación, proyecto-cálculo, materiales, ejecución y mantenimiento). En las mismas se hace énfasis en la importancia del factor humano como clave de éxito de dichas predicciones basadas en una evolución social hacia la calidad.

## SUMMARY

This paper present the author's point of view about the future development in the concrete field. The different predictions must be interpreted within the frame of social evolution, and cover all steps of the construction process (planning, project, materials, constructions itself and maintenance). In the paper, the human factor is presented as key of the success of these predictions.

# Puente atirantado, sobre el río Nalón, en Sama de Langreo

Javier Manterola y Leonardo Fdz. Troyano  
Ingenieros de Caminos

**Administración:**

Principado de Asturias.  
Ings. José Manuel Páramo, Guillermo Quintana, Manuel Serrán.

**Proyecto:**

Carlos Fernández Casado, S.A. Oficina de Proyectos.  
Ings. Javier Manterola, Leonardo Fernández Troyano, José Cuervo.

**Construcción:**

Construcciones y Contratas, S.A.  
Ings. Enrique Bofill, José Miguel Janices, Emilio Giraldo, Javier Ubierna.

## 1. ANTECEDENTES

El puente atirantado de Sama de Langreo queda encuadrado en el cruce que la nueva ronda de Langreo realiza sobre el río Nalón. Constituye parte de un viaducto muy largo, iniciado por otro proyectista y otra empresa constructora, y que nosotros seguimos ante un cambio de planes de la Administración Autónoma de Asturias, después de ganar un concurso de proyecto-construcción.

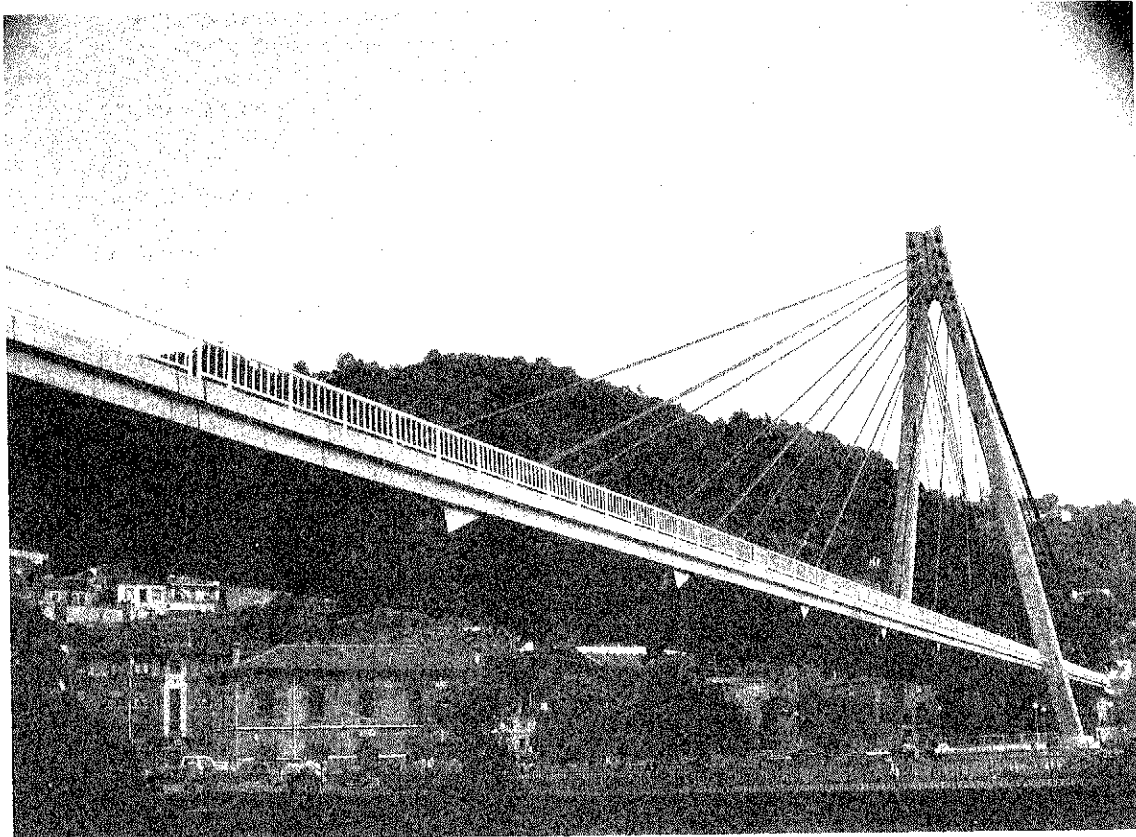


Fig. 1. Vista general del puente.

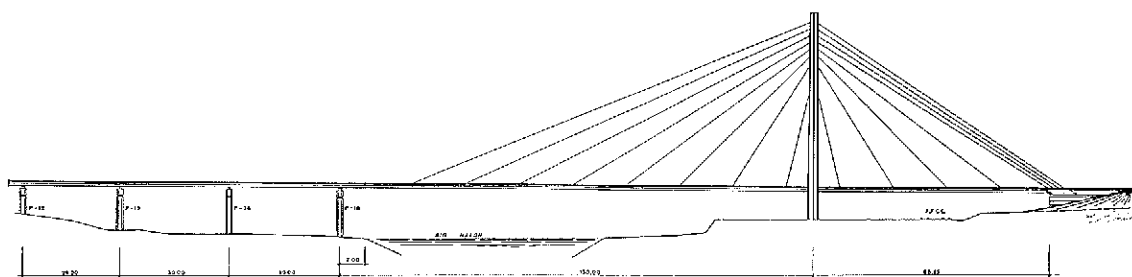


Fig. 2. Alzado general del puente.

La parte del viaducto objeto de este proyecto y que construimos, consta de tres zonas. Una primera zona de viaducto de acceso que no era sino prolongación del ya construido y que reproducimos fielmente. Una segunda zona de viaducto, constituida por cinco vanos, que se diferencia del resto del viaducto de acceso por dos causas: la transición entre el viaducto ya existente y el nuevo puente atirantado, con características de dintel diferente, y el hecho de que este viaducto llega a introducirse en la parte del río no inundada, abandonando la vía pública normal. Una tercera zona, que es el puente atirantado propiamente dicho, el cual cruza con una oblicuidad extrema, del orden de  $15^\circ$  a  $20^\circ$ , sobre el río Nalón y sobre un puente metálico existente y que da acceso a la estación de FF.CC. de vía estrecha.

Las condiciones viales determinadas en las bases eran una plataforma, de dos carriles de 3,5 m de anchura, con arcones laterales de 1,5 m y aceras del mismo tamaño, lo que da lugar a una plataforma de 13 m.

El perfil longitudinal tiene una ligera pendiente del 7,5 por mil; la planta del puente es recta y la rasante se sitúa a unos 7 m de la calle.

## 2. SOLUCION ADOPTADA

La extremada oblicuidad con que se cruza el río, determinaba un salto de 215 m, a todas luces excesivo para salvarlo de una sola vez dado que en la margen izquierda, Sama de Langreo, con casas de 5 y 6 plantas, se ordena paralelamente a su ribera y era imposible disponer dinteles gruesos a tan poca distancia del suelo. La única solución que se nos antojó posible, dentro del marco de la voluntad de la Administración de hacer un puente especial, fué realizar un puente atirantado, con torre situada en la margen derecha, donde el pueblo se convierte en una serie de casas dispersas en la falda del monte y una modesta estación de FFCC de vía estrecha. De esta manera la pila no imponía su presencia a las casas próximas; muy al contrario, se presenta como visión de referencia lejana, enmarcada por el monte próximo. El dintel puede mantener cantos y tamaños similares a los del viaducto de acceso y, en su conjunto, aparece como una cinta continua que, desarrollándose sin transición de continuidad de un lado a otro del pueblo, se soporta por cables allí donde el río impone su presencia.

Este concepto de continuidad visual y estructural es deseable cuando la obra se desarrolla en zona urbana y a tan poca distancia del suelo. Es la razón por la cual decidimos prolongar la parte existente del viaducto —que esta bien— allí donde nada cambia y solo hacer una suave transición en las proximidades del río.

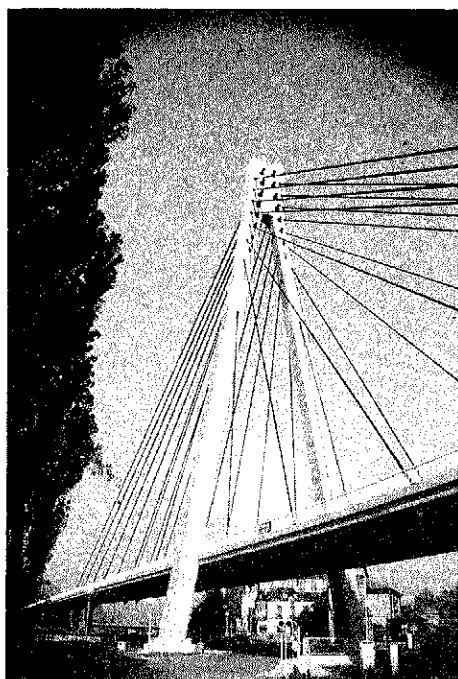


Fig. 3. Pila principal.

La adopción de luces en el puente atirantado, también fué objeto de compromiso. Por un lado, y desde el principio, pensamos que la pila principal debía estar en la orilla protegida por el muro de encauzamiento existente en la margen derecha. El tramo principal, con 130 m de luz, si no salvaba de lado a lado el río, sí sobrepasaba con mucho al actual puente metálico y la zona normalmente ocupada por las aguas. El puente podía ir, a nuestro entender, hasta 160 m de luz sin que su presencia, cifrada en altura de torre, fuese muy avasalladora; pero razones económicas, siempre presentes en un concurso de proyecto-construcción, nos aconsejaron adoptar una solución suficiente, sin el encarecimiento que suponen los 30 últimos metros más alejados de la torre.

El vano de compensación, de 65,15 m, era obligado por la presencia de las vías de FFCC que se desarrollan por esa margen. El puente quedó así configurado en dos luces atirantadas, de 65 m y 130 m, seguidas por vanos de 30 m y 26,6 m de luz, los cuales se unen a los del resto del viaducto, de 26,5 m de luz.

En cuanto al sistema de atirantamiento y su situación en el tablero, no era discutible; debía ir a los bordes si no se quería introducir graves limitaciones al tráfico en una calzada de dos carriles. Para la forma de la torre elegimos una "v" invertida

que abarcaba entre sus brazos la calzada del puente y, en la parte inferior, la vía de ribera situada en la margen derecha.

### 3. DISPOSICION ESTRUCTURAL

En todo dintel colgado de los bordes, ya corresponda a un puente atirantado o a un puente en arco, surge la pregunta de si concentrar la inercia longitudinal en los bordes o en el centro. La primera solución es de una lógica aplastante si consideramos el camino de las compresiones longitudinales del dintel y el hecho de que el cortante se encamina por la misma línea de apoyos. Sin embargo, tiende a ser algo más cara que si disponemos la inercia longitudinal centrada, pues obliga a disponer un segundo tejido resistente transversal, situado entre las vigas de borde, que poco contribuye al trabajo longitudinal del puente. La situación de la inercia longitudinal de la estructura, centrada con el tablero, resuelve más fácilmente el problema general de la flexión, tanto longitudinal como transversal, aunque plantea un problema complementario, de no difícil solución, en el punto de anclaje de los tirantes de borde y su conexión con la espina central.

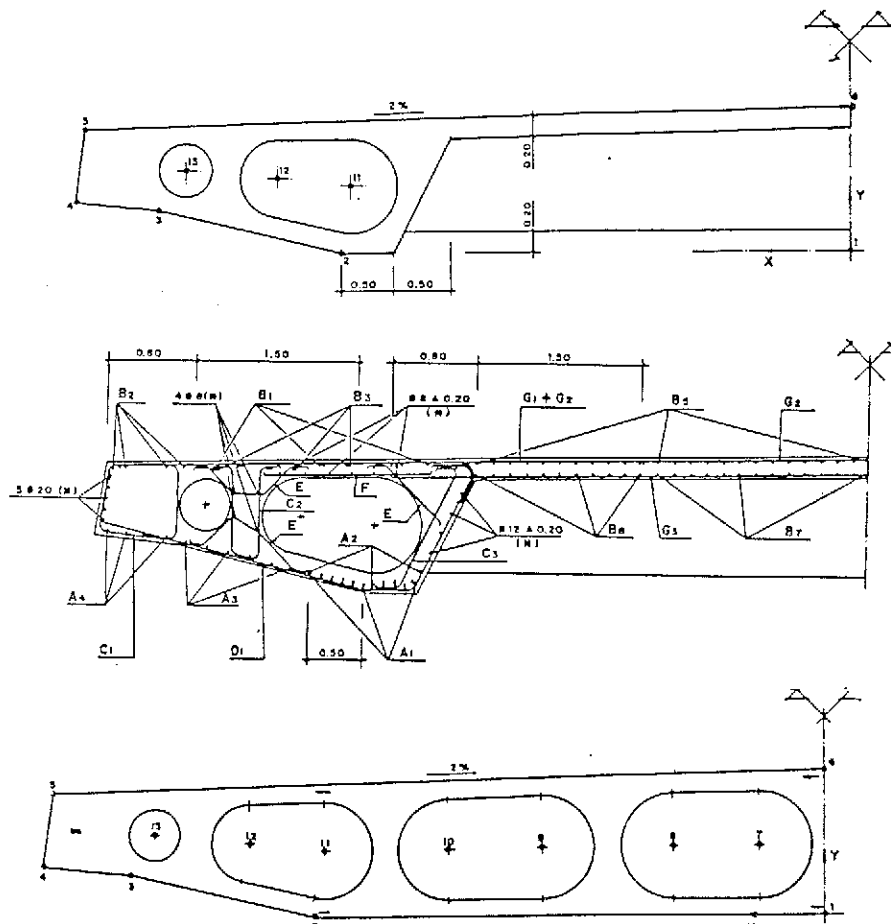


Fig. 4. Sección transversal en tramo principal y viaducto de acceso.

Nosotros adoptamos aquí la solución de concentrar la inercia longitudinal al borde y disponer un tejido de vigas transversales que los unen.

El sistema de tirantes constituye un pretensado natural del dintel, tanto más intenso cuanto más cerca de la pila nos encontremos; es por lo que el dintel es de hormigón armado. Únicamente en la zona próxima a la pila del tramo de acceso, el dintel está pretensado. Allí no existen compresiones de los tirantes o son muy pequeñas y se desarrollan flexiones positivas significativas, por corresponder a zonas donde los tirantes son más flexibles.

Resulta de particular importancia la forma de vinculación del tramo atirantado con el viaducto de acceso. Nosotros hemos adoptado la disposición de una junta a "media madera", situada a 7 m del apoyo fijo y dentro del vano atirantado. Esta disposición tiene más ventajas que inconvenientes. Realmente, el apoyo del vano atirantado, por ese extremo, es esta rotula, que resulta además ser un apoyo flexible, lo cual es ventajoso para las flexiones del vano principal. Llevar el apoyo a la pila habría incrementado grandemente las flexiones positivas en el dintel y la necesidad probable de disponer otro tirante.

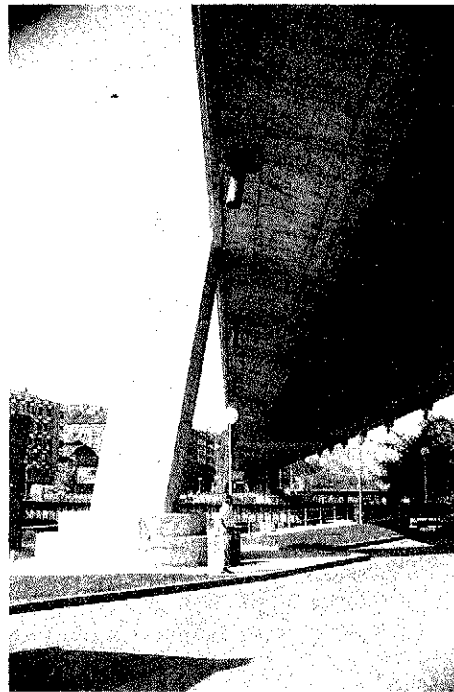


Fig. 6. Vista inferior del puente.

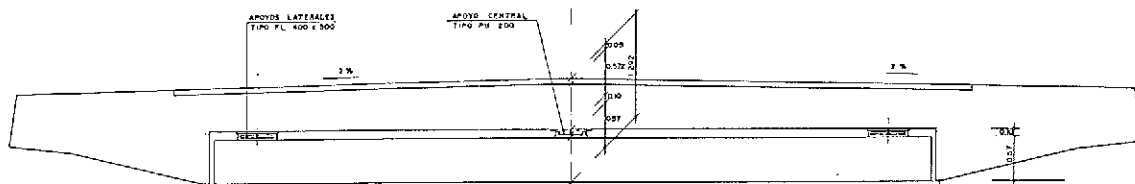


Fig. 5. Junta de unión entre tramo principal y viaducto de acceso.

Como inconveniente, tiene el hecho de que el último vano del viaducto de acceso se ve afectado, en sus flexiones propias, por el "latigazo" que le produce el vano principal; pero este efecto es menor que los beneficios obtenidos en el vano principal.

Con respecto a la vinculación del dintel con el estribo contrapeso, hemos adoptado el empotramiento perfecto. Este hecho incrementa las flexiones del dintel que, en parte, son compensadas, en sus tracciones correspondientes, por la compresión de los tirantes. Por otro lado, disponer una articulación muy comprimida es extraordinariamente caro. Ha bastado con reforzar la armadura positiva en esta zona.

El dintel, configurado como ya hemos dicho, por dos vigas laterales unidas entre sí por una serie de vigas transversales separadas entre sí 3 m, llega a cuajarse en losa aligerada de uno a otro borde, en las proximidades de la pila del tramo de acceso, para hacer frente a las flexiones que allí se desarrollan.

## 4. DESCRIPCIÓN DE LA OBRA

### 4.1. Pila principal

Tiene 54 m de altura sobre el suelo; su forma es la de "V" invertida y cada uno de los pilares tiene espesores variables entre 2,8 m x 2,06 m en la base y 2 m x 2 m en coronación.

La cimentación está formada por dos grupos de 3 pilotes de 2 m de diámetro, unidos entre sí por encepados y viga riostra pretensados.

La oblicuidad del encepado de uno de los pilares se debe a la presencia del muro de canalización del río en dicho lado.

### 4.2. Tirantes

Son españoles, Stronghold de C.T.T., y están constituidos con torones de 0,6" en números variables entre 24 y 60 torones, introducidos dentro de vainas de P.V.C. Su separación longitudinal en el dintel es de 15 m.



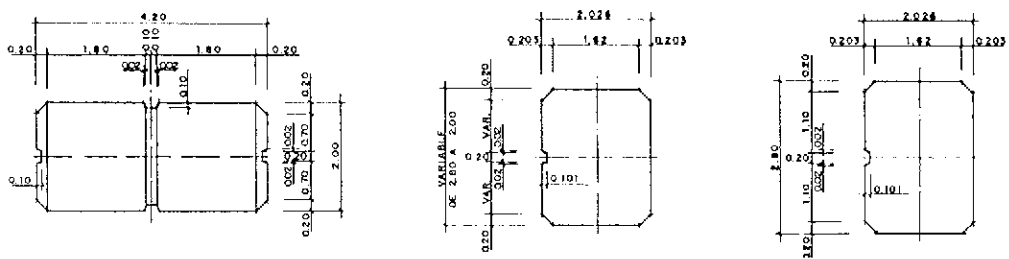
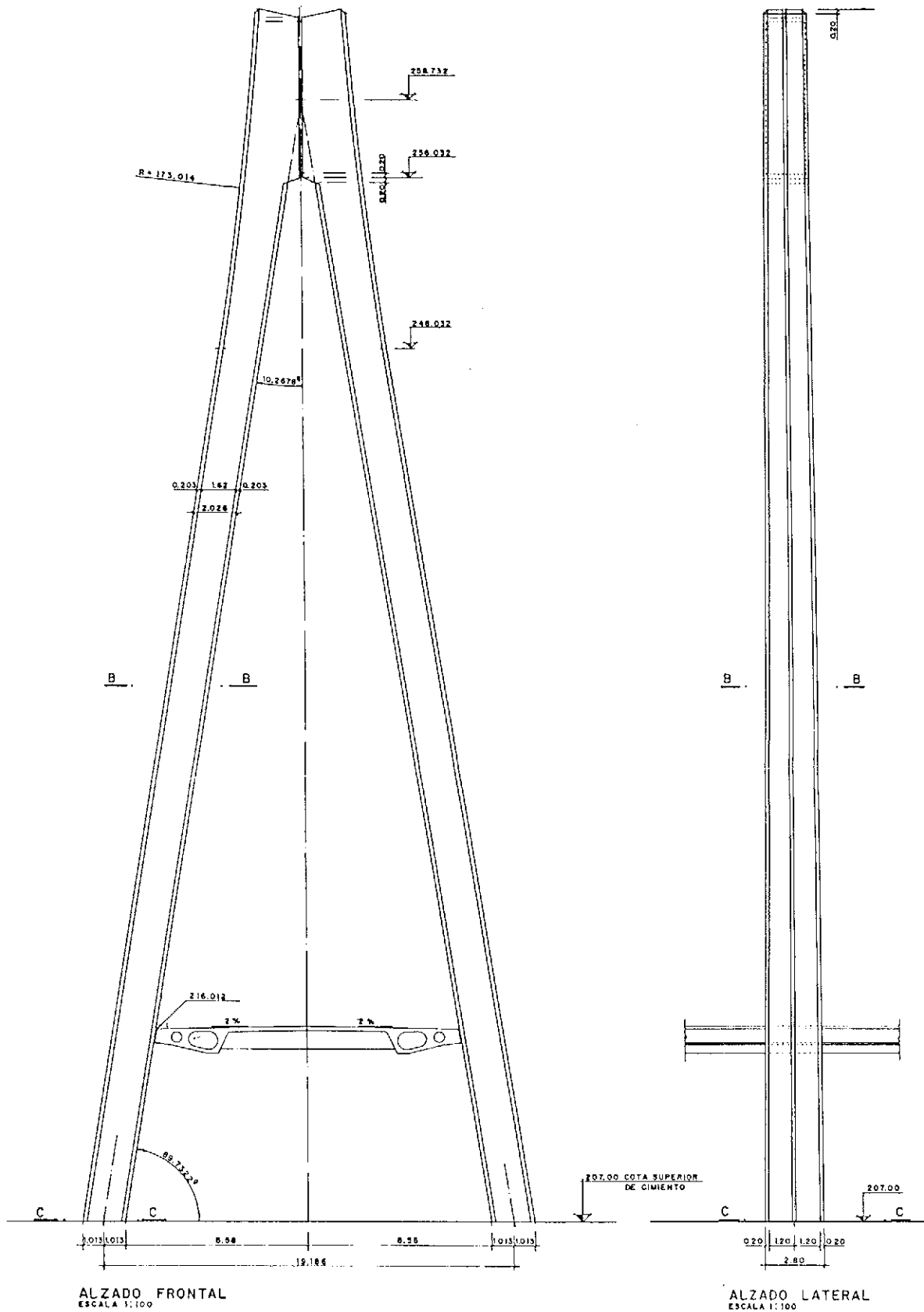


Fig. 7. Características geométricas pila principal.

### 4.3. Dintel

Los 13 m obligados por la funcionalidad del tablero, se incrementan a 14,26 m para proteger y alojar los tirantes en el borde del tablero. Su canto es de 1,3 m, lo que determina una esbeltez del tablero de 1/200, habida cuenta de que existe una sola pila de atirantamiento. Las dos vigas laterales están aligeradas. Los espesores de las losas son de 20 cm y las vigas transversales tienen una anchura variable entre 0,25 y 0,3 m, con un canto máximo en el centro de 1 m.

Se arma con armadura pasiva, salvo en la zona próxima al viaducto de acceso que se pretensa longitudinalmente con unidades de  $12 \phi 0,6''$ .

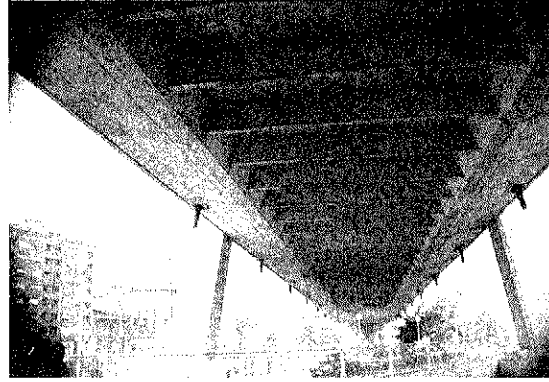


Fig. 8. Vista inferior del dintel.

### 4.4. Estribo - Contrapeso

En la parte exterior es rectangular, de 9 m de altura y 7,1 x 12,6 m de base. La parte enterrada, en forma de copa invertida, exagonal, de 5 m de profundidad, completa la masa necesaria para equilibrar, con el correspondiente coeficiente de seguridad, el tiro vertical de los cables de compensación del dintel. Se encuentra pretensado horizontal y verticalmente.

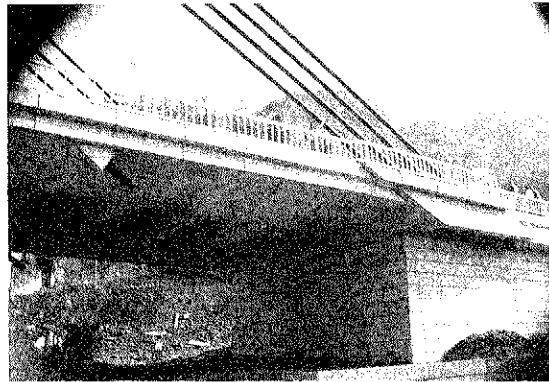


Fig. 10. Detalle de anclaje de tirantes de compensación en el estribo contrapeso.

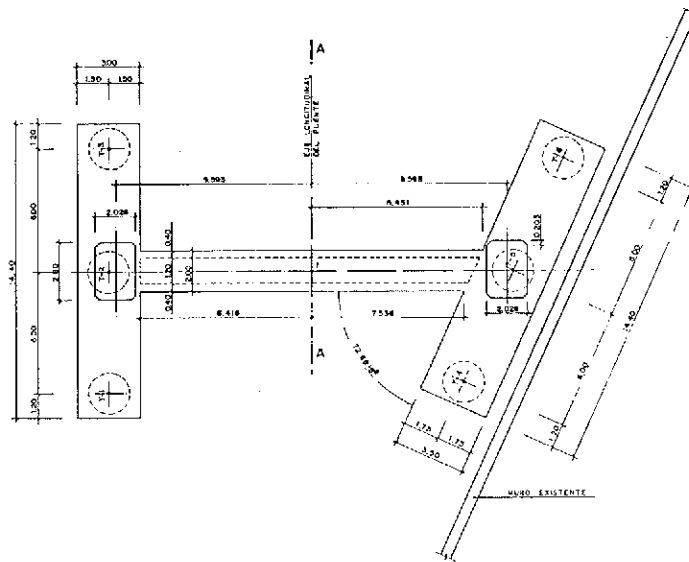


Fig. 9. Cimentación pila principal.

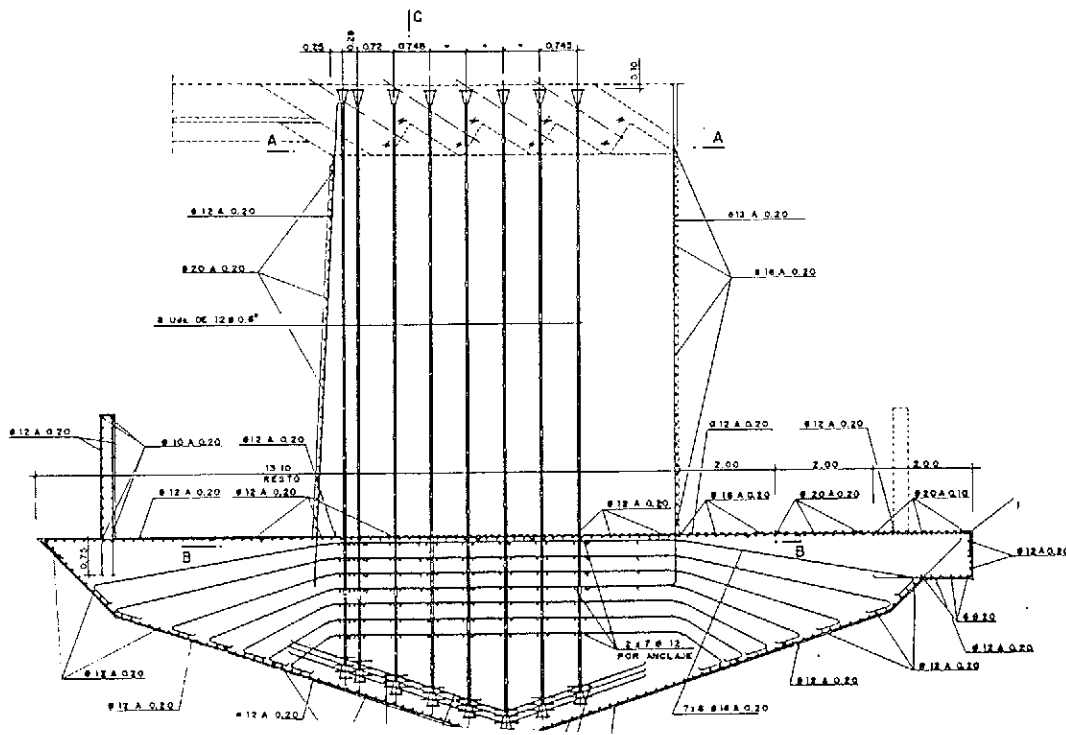


Fig. 11. Estribo contrapeso.

## 5. PROCESO CONSTRUCTIVO

La pila se construyó por medio de un encofrado trepador, apuntalada a dos alturas, provisionalmente, con el fin de reducir las flexiones de peso propio que se producirían mientras los dos pilares no estuviesen unidos en cabeza.

El dintel se construyó por avance en voladizo, partiendo desde el estribo contrapeso. La cimbra no iba colgada, como es habitual, del dintel, sino que se apoyaba en el suelo, debido a su proximidad. Se construían dovelas de 15 m que, una vez endurecidas, se colgaban del dintel. Este procedimiento, cuando es posible, tiene grandes ventajas. Evita la construcción de costosos carros de avance, permite la ejecución de dovelas de gran tamaño y elimina el pretensado necesario para soportar el peso de la dovela en fase de endurecimiento y sin el tirante puesto, lo cual es muy importante. La única precaución especial que hay que tomar es que las variaciones de temperatura de los tirantes no despeguen la parte colgada del dintel de la parte que se está hormigonando sobre cimbra, lo que se consigue nivelando la cimbra con la situación de tirantes encogidos —temperaturas tempranas— y reforzando la cimbra en la zona de solape con el dintel, para resistir el apoyo obligado del dintel colgado, cuando las temperaturas crecen. La velocidad de ejecución del dintel fué de 1 m diario.

Especiales precauciones hubo que tomar en la última dovela, que se iba a apoyar sobre la ménsula del viaducto de acceso.

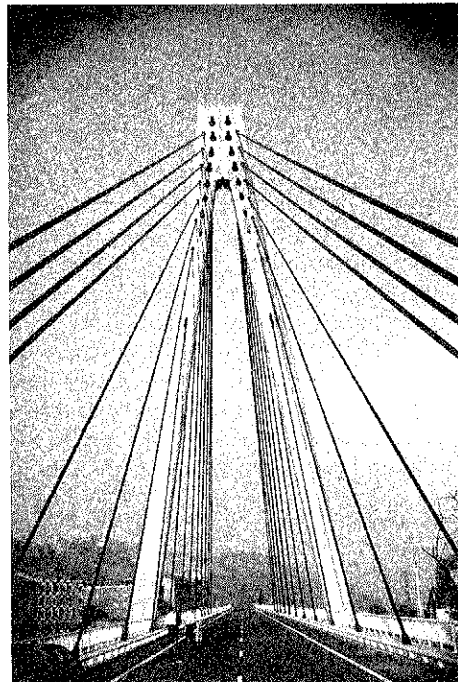


Fig. 12. Vista del puente desde la calzada.

## 6. VIADUCTO DE ACCESO

La parte del viaducto de acceso proyectada por nosotros, tiene como misión realizar la transición entre el dintel con rigidez centrada en el tablero del tramo de acceso existente y las exigencias del puente atirantado. Esta transición se desarrolla a lo largo de 140 m, repartidos en tres vanos de 26,6 m y dos vanos de 30 m.

Esta transición tiene dos misiones: aumentar el canto de 1,2 m a 1,3 m, y la anchura del núcleo resistente, que pasa de 4,1 m a 8,2 m.

Toda la transición, pensada en un principio para resolverla en 5 vanos, se optó finalmente por resolverla en el primer vano, de 26,6 m y seguir en el resto con la anchura y canto total que después tendrá el dintel atirantado.

También la pila cambió su forma, de una pila rectangular a otra cilíndrica, con aligeramientos exteriores verticales que le proporcionan esbeltez, a la vez que permiten su ensanchamiento en cabeza, de una forma natural. La cimentación de estas pilas se realizó con pilotes de 1,25 m de diámetro.

### RESUMEN

El cruce del río Nalón en la localidad de Sama de Langreo (Asturias, España), se realiza con un puente atirantado de una sola torre, con luces de 130 m y 65 m. El dintel de 1,3 m de canto y 14,26 m de anchura es de hormigón armado en casi toda su longitud, salvo en la zona próxima a la pila del viaducto de acceso donde se dispone pretensado longitudinal. A este puente principal se accede por un viaducto de hormigón pretensado con luces de 26,5 a 30 m.

### SUMMARY

A single pier cable-stayed bridge with spans of 130 and 65 m crosses over Nalón River in Sama de Langreo village (Asturias - Spain). With 1.30 m depth and 14.26 m width, the concrete deck is reinforced in almost its whole length and it is longitudinally prestressed in the approach bridge pier area. The spans of the prestressed concrete approach bridge are 26.5 m and 30 m long.

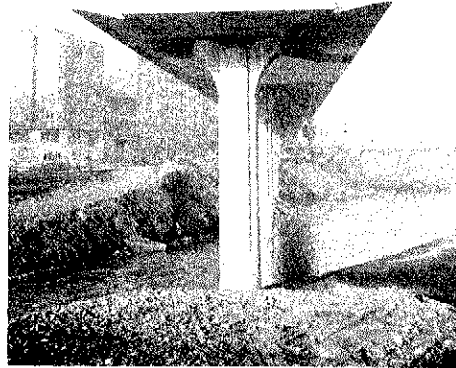


Fig. 13. Vista del viaducto de acceso en su conexión con tramo principal.

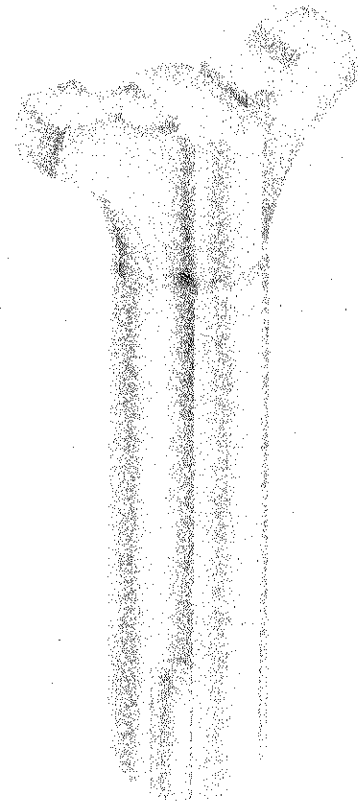


Fig. 14. Perspectiva de pila tramo de acceso.

## El puente "Libertador, General San Martín" (Fray Bentos - Puerto Unzue entre Uruguay y Argentina)

Alberto Ponce Delgado  
Ing. Civil

Catedrático de Puentes. Facultad de Ingeniería.  
Montevideo (Uruguay)

En el año 1967, los Gobiernos de Uruguay y Argentina, obedeciendo al llamado de Integración Regional, deciden la realización de la primera conexión física entre ambas naciones, aprobando la construcción de un gran puente sobre el río que hasta entonces las separaba.

Dicho puente se erigiría sobre las aguas del río Uruguay, uniendo las ciudades de Fray Bentos (Uruguay) con Gualeguaychú (Argentina) (Figura 1).

Tras un llamado a Concurso Internacional, la responsabilidad de la ejecución del Proyecto y la Dirección de las obras le fue asignada al grupo de técnicos dirigidos por el autor.

Se elaboró un proyecto previo en hormigón pretensado, con una utilización máxima del sistema de prefabricación. Se salvaron luces hasta entonces no logradas en estructuras de este tipo, constituyendo un antecedente enriquecedor para la Ingeniería Vial de la región.

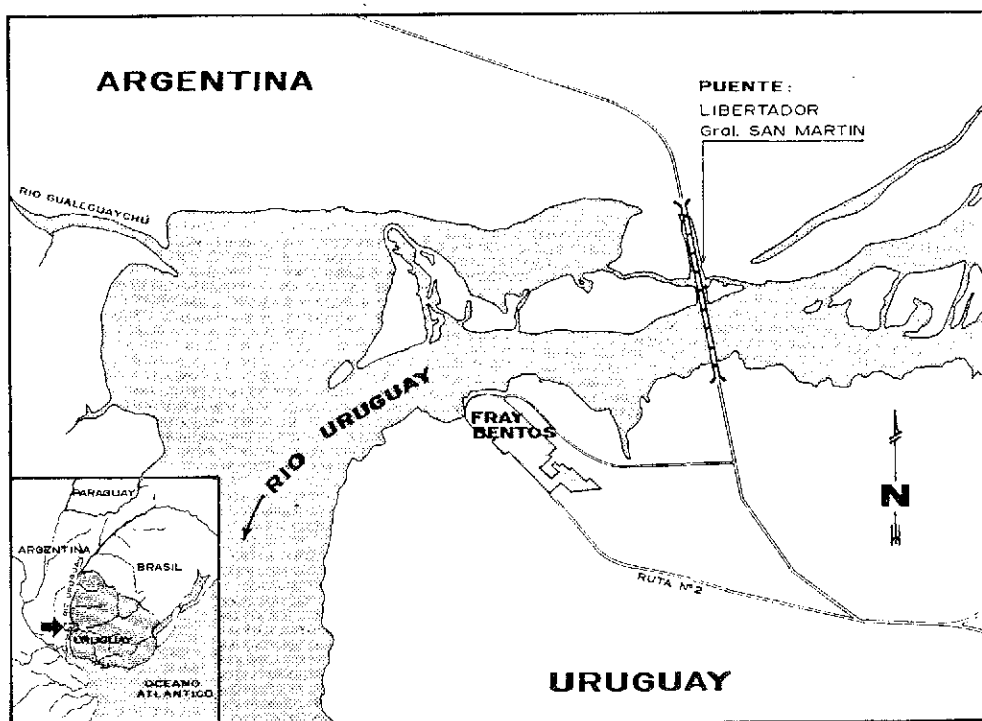


Fig. 1

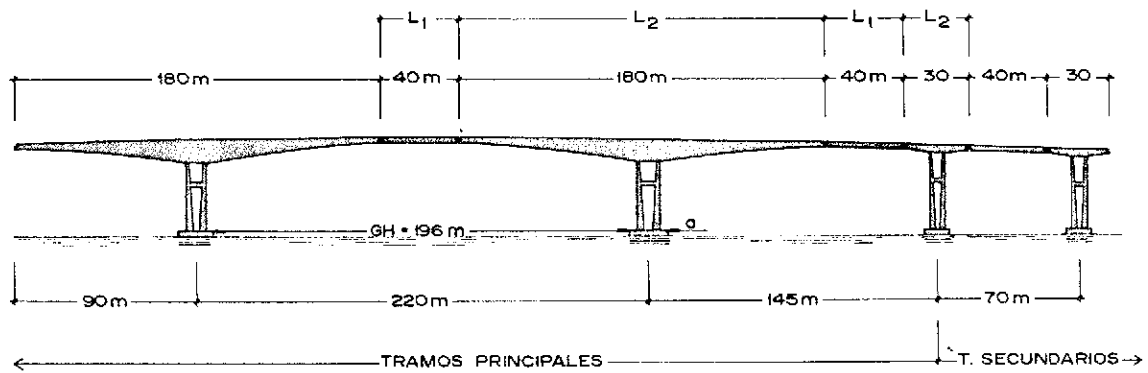


Fig. 2

### DESCRIPCION GENERAL DE LA OBRA

El Río Uruguay, con un caudal máximo de 35.000 m<sup>3</sup>/s y con una variación de niveles de aproximadamente 7 m, tiene, en la ubicación elegida, un ancho de aproximadamente 2 kms en su cauce normal y de 5 kms en su valle de inundación.

El Puente Internacional Libertador General San Martín, tiene una longitud total de 3.408,35 metros, con un tramo central de 220 metros de luz.

Dicho tramo central superó al Puente Bendorf, sobre el Rhin, de 209 m de luz central, record mundial en hormigón pretensado sin tirantes, en el momento de este Proyecto (1970).

Todo el Puente —salvo los tramos centrales— ha sido construido solamente con dos tipos de vigas prefabricadas y postensadas, de 30 y 40 metros de longitud.

Combinando su disposición a lo largo del puente, sólo con dos moldes, se prefabricaron los elementos necesarios para construir luces de 70 metros, 40 metros, y también para completar el tramo central de 220 metros de luz, y los contiguos a

éste de 145 metros de luz, todos ellos resueltos en forma isostática (Figura 2).

Bajo el tramo central, la profundidad del agua del Río Uruguay es de 20 metros. Las dos cimentaciones centrales se construyeron con cajones de hormigón, semi-prefabricados, y la excavación correspondiente se realizó con aire comprimido.

El resto de las cimentaciones se realizó con pilotes de gran diámetro, contruidos con camisas de hormigón pretensado, prefabricadas, en su longitud total. Sus longitudes variaron entre 20 y 57 metros.

La altura de la calzada sobre el cero de las aguas, en el tramo central, es de 47,30 metros.

Las pilas fueron construidas con encofrados deslizantes.

La construcción se realizó de acuerdo al cronograma y al presupuesto previsto inicialmente.

La Dirección del Proyecto, así como la Dirección de la Obra en todos sus aspectos técnicos y económicos, estuvo a cargo del autor de este artículo.

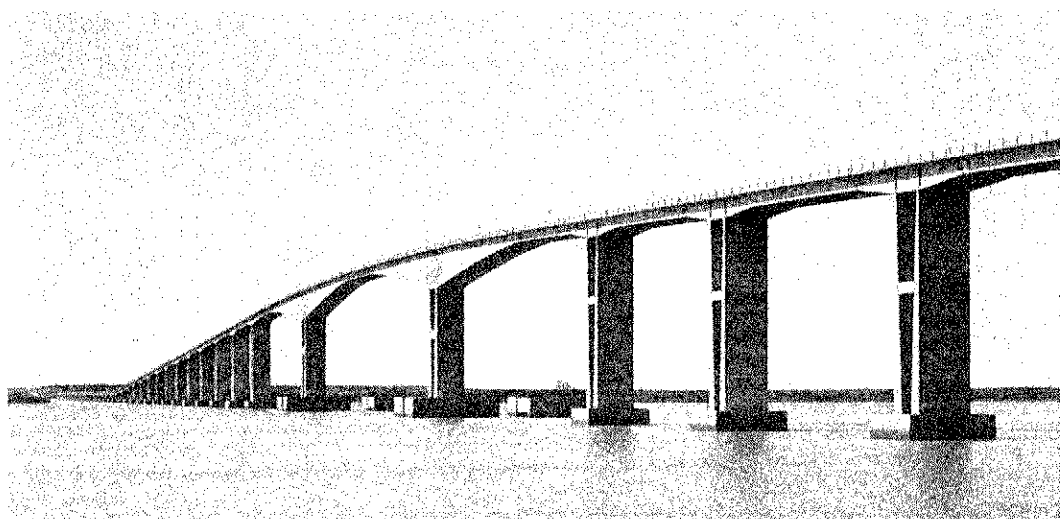


Fig. 3

## DESCRIPCION GENERAL DE LA SUPERESTRUCTURA

La superestructura de este puente de 46 tramos, cubre una distancia total de 3.408,35 metros entre el estribo en la margen uruguaya y el estribo en la margen argentina (Figura 3).

En el Cuadro adjunto aparece la descripción física del puente.

## CIMENTACION DE LAS PILAS PRINCIPALES

Un detalle de la disposición que corresponde a los 4 cajones cilíndricos que constituyen la cimentación de cada pila principal, se aprecia en la Figura 5.

Los cuatro cajones reciben la carga de la estructura superior a través de un cabezal de hormigón

Descripción física del puente			
Sector	Cant. de tramos	Luz de c/tramo	Long. del sector
Primer tramo	1	55,00 m	55,00 m
Tramos secundarios	7	70,00 m	490,00 m
Tramos adyacentes al tramo principal	1	145,00 m	145,00 m
Tramo principal	1	220,00 m	220,00 m
Tramos adyacentes al tramo principal	1	145,00 m	145,00 m
Tramos secundarios	17	70,00 m	1.190,00 m
Tramo de transición	1	55,00 m	55,00 m
Tramos de viaducto	27	41,05 m	1.108,35 m
Total de tramos	46	Long. del puente	3.408,35 m

La secuencia corresponde a un recorrido desde la margen uruguaya a la margen argentina.

En todos los casos mencionados, la calzada destinada al tránsito vehicular tiene 8,30 m de ancho, y a cada lado de ella existe una vereda de 1,50 m, lo que da un ancho total para el tablero de 11,30 metros.

En la Figura 4 se aprecian las secciones transversales tipo.

Salvo en el tramo principal y en sus dos tramos adyacentes, la superestructura está constituida con elementos prefabricados en obrador: Vigas de 30 m de longitud y vigas de 40 m de luz, ambas postensadas. Hay que tener en cuenta que estas luces son distancias entre ejes de apoyo y, por lo tanto, las longitudes totales de cada pieza son ligeramente mayores.

## CIMENTACIONES

Cada una de las cimentaciones de las 2 pilas principales se construyeron con cuatro cajones cilíndricos, de hormigón armado, de 10 metros de diámetro.

La mayor parte de las cimentaciones de pilas secundarias se construyeron por medio de pilotes.

Sólo las dos primeras pilas sobre la ribera uruguaya, se cimentaron directamente, con dados de hormigón armado.

armado de: 24 x 24 x 4 m<sup>3</sup>.

El proceso constructivo de cada cajón cilíndrico, comenzó con el armado en obra de la cuchilla metálica inferior, de una altura de 2,5 metros.

Sobre uno de los muelles construidos en el obrador, en un molde preparado al efecto, se le agregó, a la cuchilla metálica prefabricada, un fondo de hormigón armado en forma de casquete esférico invertido, que por medio de una junta de goma lograba la estanqueidad del conjunto. A partir de ese momento, el conjunto cuchilla metálica-fondo se puso a flotar (Figuras 6 y 6a).

Posteriormente, procediendo en varias etapas, se logró llenar de hormigón la parte inferior de los cajones cilíndricos, hasta alcanzar una altura aproximadamente de 6 metros, manteniendo la estabilidad y flotabilidad con suficiente francobordo en cada etapa de llenado (Figura 6b).

Luego, cada cilindro fue ubicado entre dos barcos unidos por una estructura metálica, y que dejaban un espacio de más de 10 m entre sí (catamarán).

La estructura que unía ambos barcos, servía a su vez para soportar una torre octogonal, de la cual —por medio de 8 tensores— se colgó el cilindro de hormigón.

Cada uno de esos tensores podía elevarse o descenderse por medio de gatos hidráulicos.

# SECCIONES

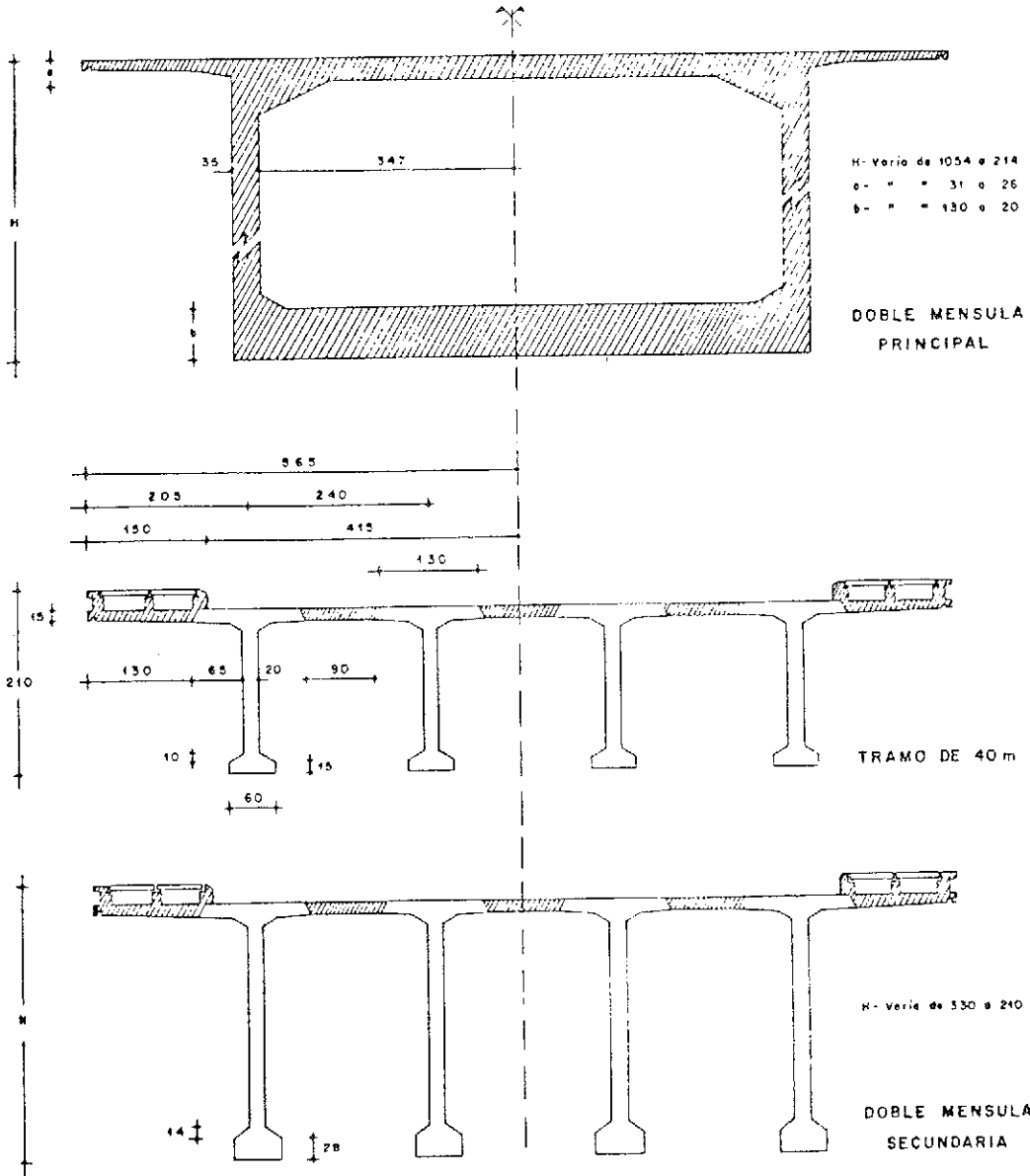


Fig. 4

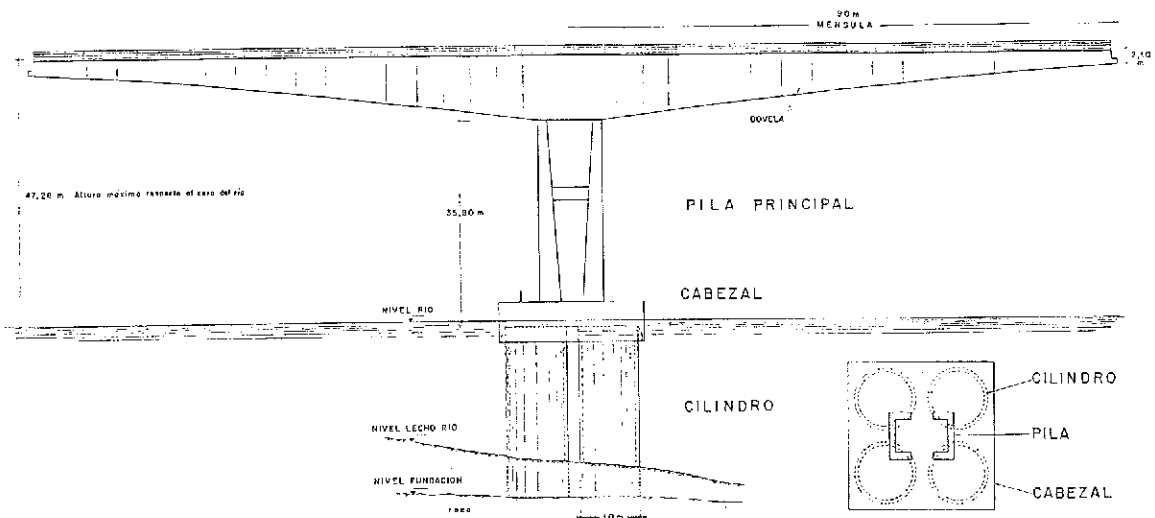


Fig. 5



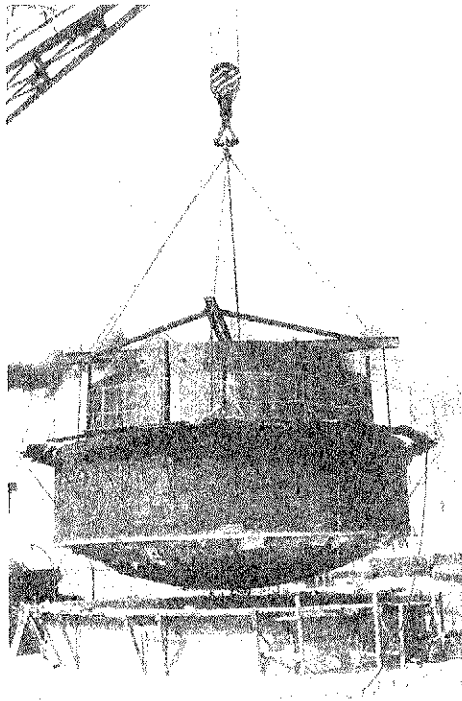


Fig. 6

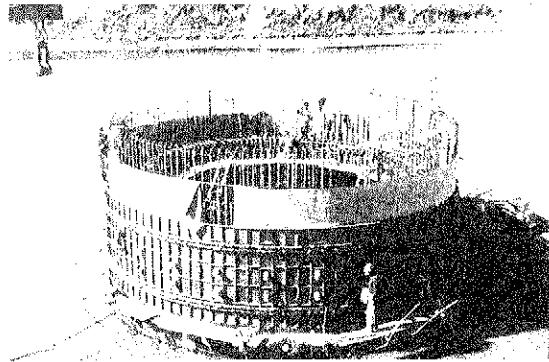


Fig. 6b

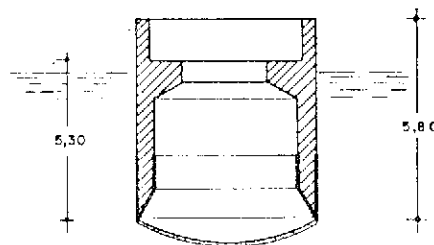


Fig. 6a

Una vez colgado el cilindro de esta manera y por medio de lastre de piedra, se le quitó el fondo de hormigón, que estaba unido a la cuchilla inferior por medio de 8 bulones.

Un encofrado cilíndrico fijo a la estructura del "catamarán", permitió continuar el hormigonado del cilindro, el cual se fue dejando deslizar lentamente (15 cm/hora) gobernando el descenso con los 8 gatos que lo sostenían (Figuras 7 y 7a).

Cuando, con este proceso, el cilindro llegó casi al lecho del río, se suspendió el deslizado y se le bajó hasta que apoyó totalmente en el fondo.

Previamente se le ubicó topográficamente en posición.

En estas circunstancias, la cuchilla inferior se clavó en el terreno y el cilindro quedó estable.

Se procedió entonces a retirar el "catamarán", dejando el encofrado, el cual, mediante el agregado de barras de trepa y gatos especiales, se transformó en encofrado deslizante trepador para terminar de construir el cilindro hasta la altura prevista.

En la Figura 8 se aprecian 3 cilindros apoyados en el fondo.

Terminada la construcción del cilindro, se estuvo en condiciones de iniciar el hincado del mismo, el cual se efectuó utilizando el procedimiento de excavación en campana neumática.

Para ello, la sección del cilindro disponía, en el lado interior y a 5,30 m de altura, de un diente en el que se ancló la tapa de presión que posteriormente oficiará de techo de la campana neumática.

Esta tapa metálica tenía, conectado en el centro, el tubo de descenso que comunicaba con la esclusa de entrada y salida, tanto de personas como de materiales. (Figuras 8a y 9).

Los operarios, excavando en la cámara de trabajo, lograban que el cilindro fuera descendiendo poco a poco hasta alcanzar la cota de cimentación.

En una de las Pilas Principales se alcanzó la cota -25 m hasta llegar a la caliza silicificada que le sirve de apoyo. La mayor presión en la campana neumática fue de 2,8 at., de acuerdo al nivel máximo del agua en el período de trabajo. Una vez alcanza-

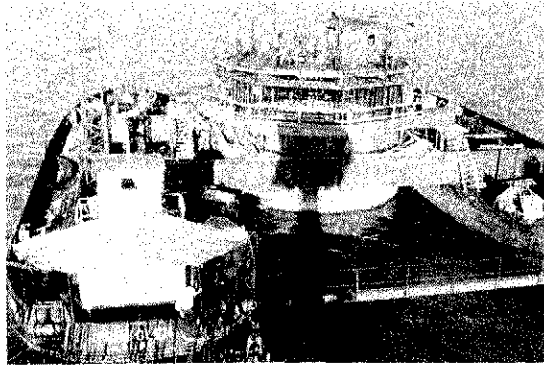


Fig. 7

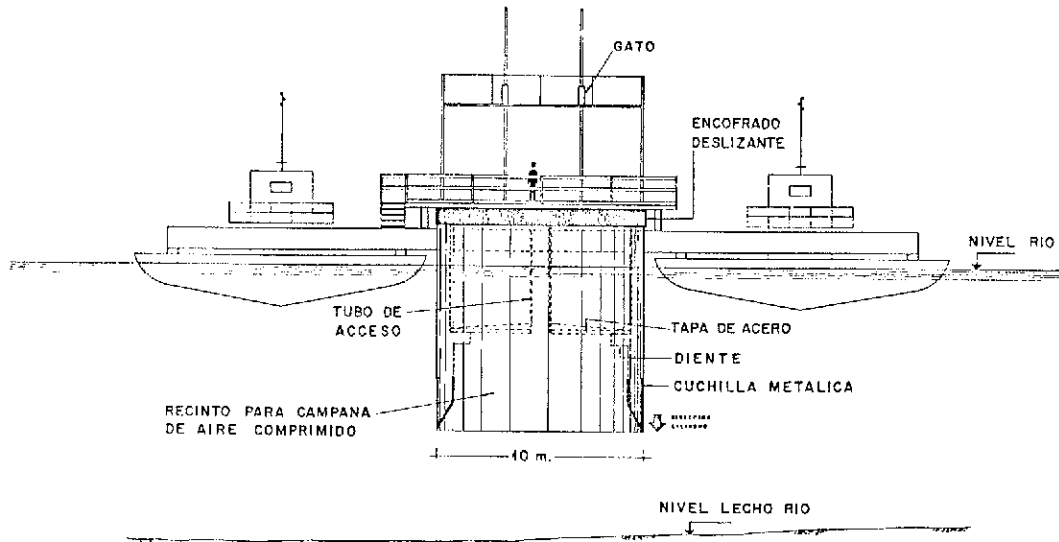


Fig. 7a

CONSTRUCCION CONTINUA DESCENDENTE DE CILINDRO DE FUNDACION

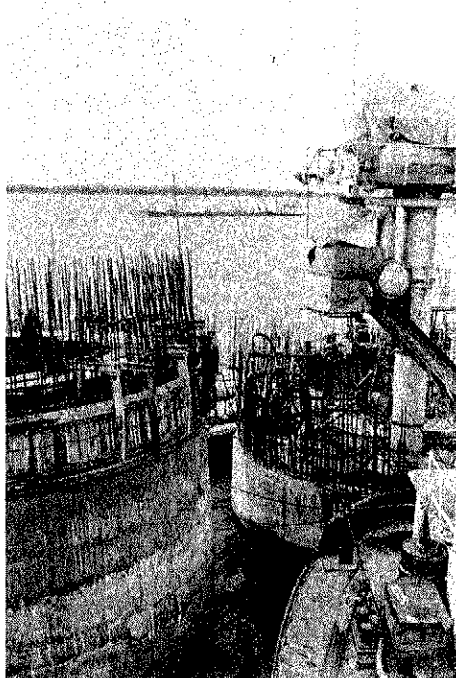


Fig. 8

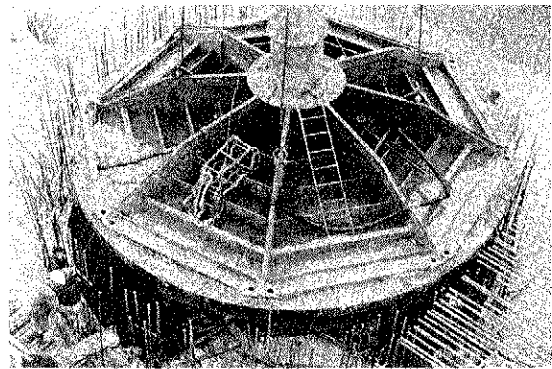


Fig. 8a

da la cota de cimentación, se procedió a hormigonar un tapón en el fondo del cilindro. Este hormigonado se realizó en 2 etapas. Una primera, de 3,30 m de altura, que se efectuó bombeando hormigón contra presión en la campana neumática, y la segunda, una vez desmontada la tapa de presión y el equipo de aire comprimido, mediante el procedimiento de hormigón inmerso. (Figuras 10 y 11).

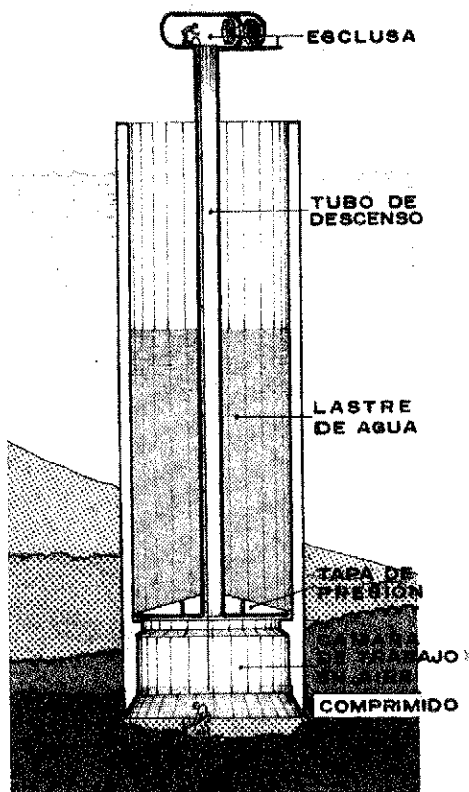


Fig. 9

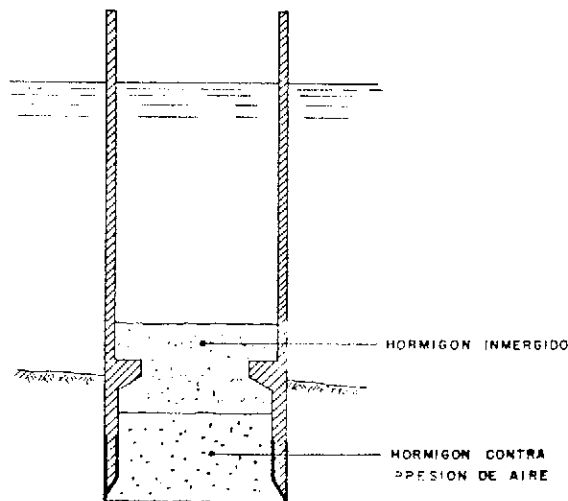


Fig. 10

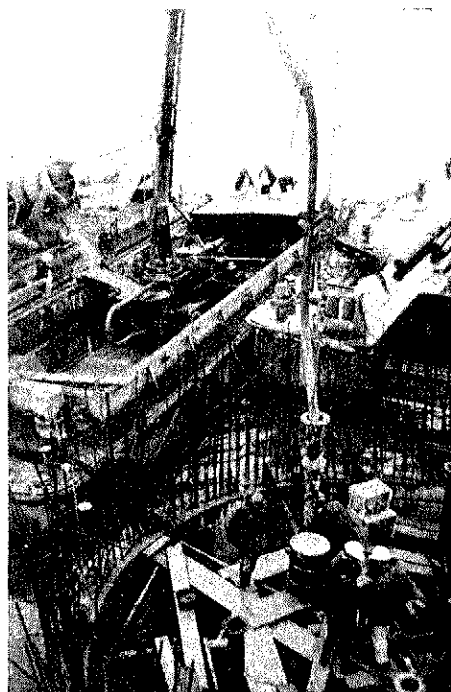


Fig. 11

## CIMENTACIONES CON PILOTES

Los pilotes previstos en el Proyecto correspondientemente con la construcción de cada pila, están empotrados en su parte inferior en terreno resistente y en su parte superior alcanzan la cota  $+1,80$ .

Una vez terminado, cada pilote está constituido por una camisa exterior, prefabricada y pretensada, y un núcleo de hormigón armado, que inferiormente se empotra en la roca y cuya armadura sobresale superiormente para conseguir una correcta unión de empotramiento en el cabezal.

Los pilotes se construyeron prefabricando previamente una camisa de hormigón pretensado, con una longitud igual a la diferencia de cotas entre el nivel  $+1,80$  y el nivel de la roca.

Las mencionadas camisas de hormigón pretensado, consistieron en tubos de diámetro exterior 1,50 m y diámetro interior 1,20 m, es decir con pared de 15 cms de espesor. Se construyeron, cada una, con su longitud total, en una bancada de pretensado, con un pretensado total de 300 t c/u.

La bancada de pretensado (Figura 12) se construyó de 120 m de largo, con dos cabezeras de acero, cada una fuertemente anclada en una cimentación en el terreno. En esas cabezeras se anclaban 28 cables, de media pulgada de diámetro, dispuestos sobre una circunferencia de 1,35 m de diámetro (Figura 13). Una vez dispuestas las armaduras pretensadas y los estribos en espiral, se colocaba el molde interior. Dicho molde consistía en una chapa de acero, con forma de cilindro abierto, a los

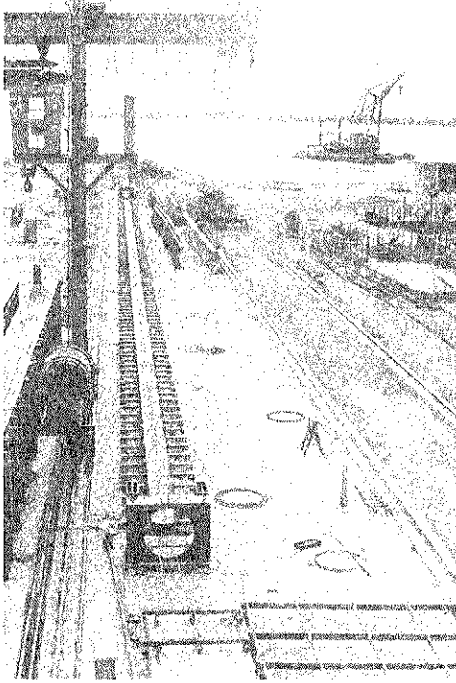


Fig. 12

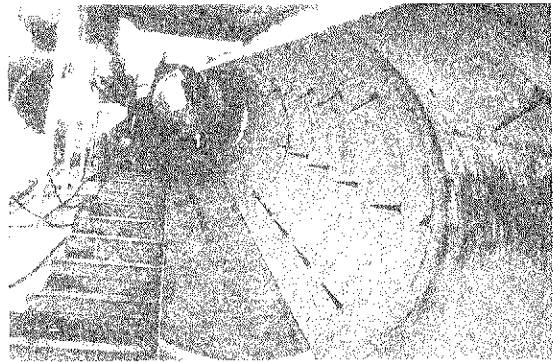


Fig. 15

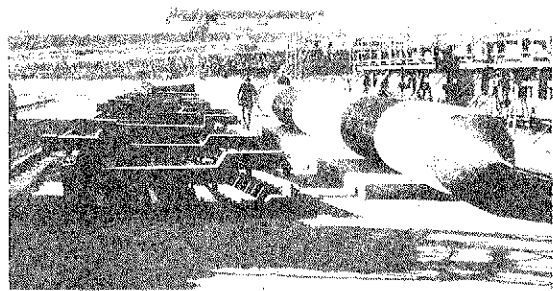


Fig. 16

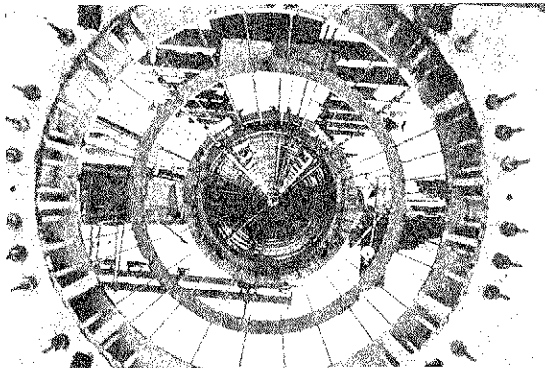


Fig. 13

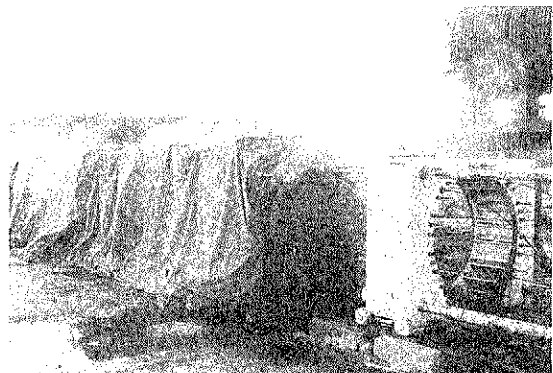


Fig. 17

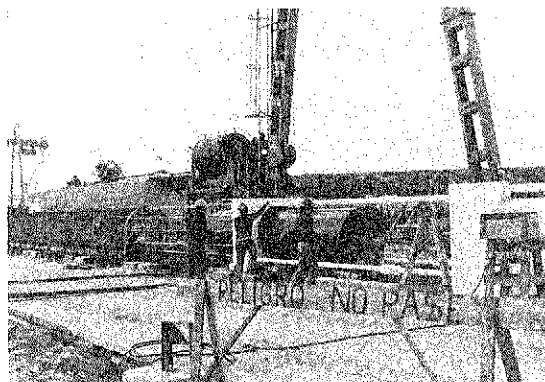


Fig. 14

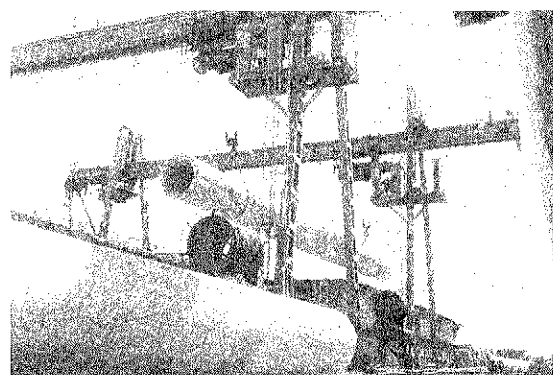


Fig. 18

efectos de poderlo introducir entre los cables tesos y ajustar luego el diámetro a la medida interior de 1,20 m (Figura 14).

En el molde exterior se colocaban clavijas que sobresalían hacia el interior 15 cms (Figura 15).

Dentro del molde interior se introducía un tubo de goma, de 60 m de largo, el cual, una vez inflado, apretaba el molde interior contra las clavijas, dejando entre ambos moldes el espacio anular necesario para encofrar las camisas de hormigón pretensado (Figura 16).

En la parte superior, quedaba una franja abierta por donde se efectuaba el llenado de hormigón. Posteriormente, se quitaba el molde exterior y se cubría con un toldo bajo el cual se introducía vapor para acelerar el fraguado y curado (Figura 17).

De esa manera, en una semana se lograba construir un conjunto de camisas de hormigón que, en su conjunto, sumaban algo menos de 120 metros de longitud.

Una vez que el hormigón alcanzaba una resistencia de 250 kg/cm<sup>2</sup>, se procedía al destesado y corte de los cables en la bancada de pretensado.

El transporte de las camisas a su depósito (que se ve en la Figura 18), se efectuaba por medio de los dos pórticos grúa existentes en la zona de prefabricación del taller.

## PILOTAJE

### PROCEDIMIENTO CONSTRUCTIVO

En obra, se usaron dos máquinas de hincada montadas sobre plataformas flotantes. (Figuras 19 y 20).

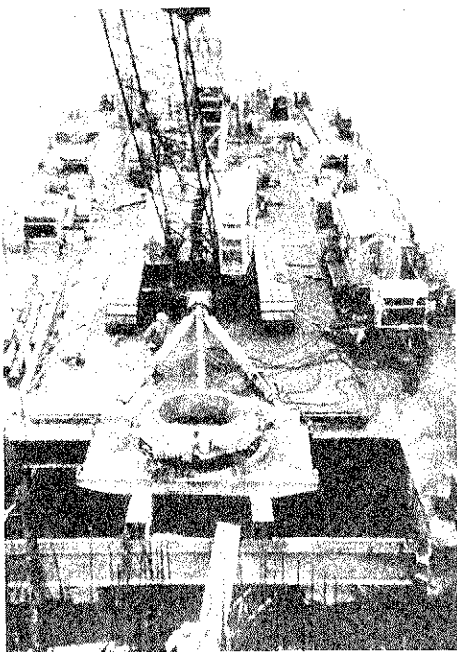


Fig. 19

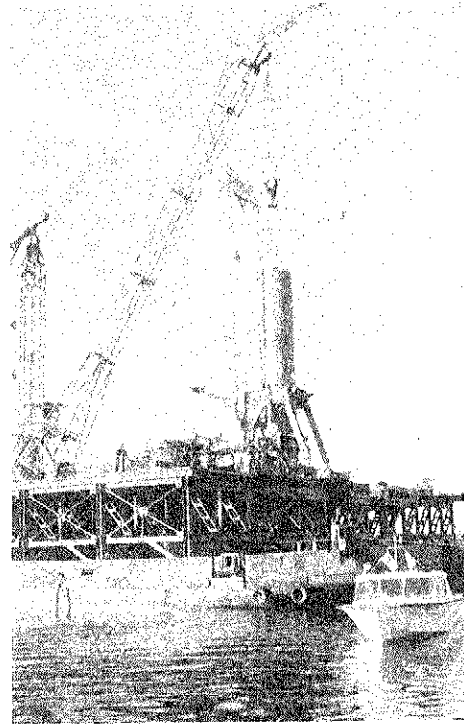


Fig. 20

Para la colocación del pilote en su ubicación, se comenzaba emplazando el equipo en posición, mediante determinaciones topográficas desde puntos fijos, por medida de distancias e intersección de visuales.

Por medio de las citadas máquinas, se hincaba en el fondo del río, en posición, una camisa metálica de 1,80 de diámetro.

Con el equipo de excavación se extraía el material del interior de la camisa metálica y paulatinamente se hincaba la camisa por medio del equipo hidráulico de la máquina. Este consistía, en una abrazadera, con dos gatos hidráulicos horizontales, que eran capaces de comunicarle un movimiento de torsión, con un par de hasta 200 t. Otro equipo hidráulico era capaz de ejercer, sobre la camisa metálica, una fuerza vertical, para lograr su hincado en el terreno (Figura 21).

El equipo de excavación se adecuaba en cada caso a la dureza del suelo que había que extraer. Normalmente, se comenzaba con una cuchara tipo almeja, y luego con trépanos de distintos tipos, según la resistencia del suelo rocoso (Figura 22).

La operación de hincado de la camisa metálica, se continuaba hasta alcanzar la roca del subsuelo. La camisa metálica estaba constituida por trozos de longitudes adecuadas a cada etapa de la operación, que sucesivamente se iban uniendo unos a otros.

Una vez que la camisa metálica estaba apoyada en la roca, se colocaba dentro la camisa de hormigón pretensado, utilizándose para esta operación y

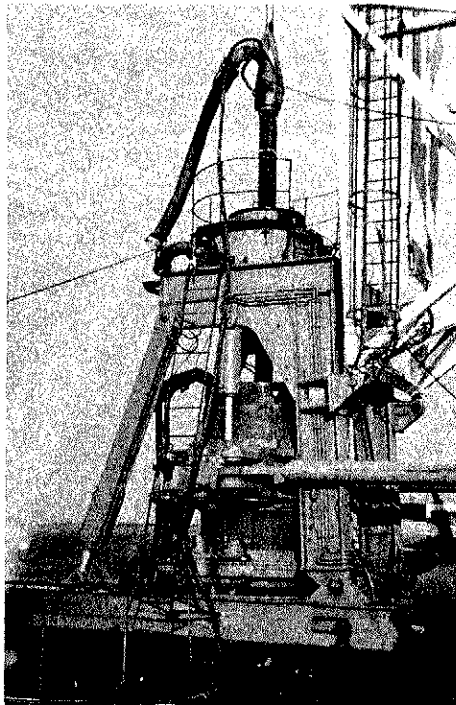


Fig. 21

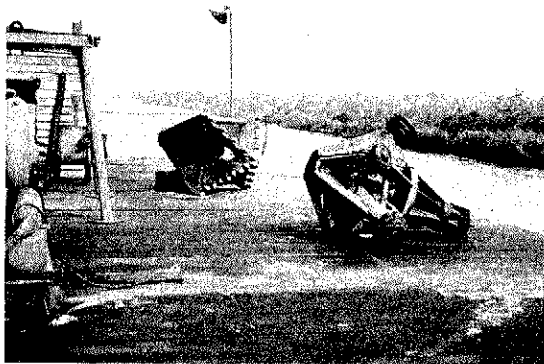


Fig. 22

para su transporte, una grúa Derrick flotante, de 100 t de capacidad, con una pluma de 70 metros de longitud.

Se continuaba luego la perforación por el interior de la camisa de hormigón, dentro de la roca, con un trépano de menor diámetro, por perforación rotativa, sistema Salzgitter.

El material triturado por el trépano, mezclado con el agua, se extraía del pozo por medio de una bomba, o inyectando aire comprimido en la parte inferior del tubo de succión, que es a su vez eje de giro del trépano (Figura 23).

Una vez alcanzada la profundidad requerida de perforación en roca, se retiraba el equipo de perforación. En el interior de la camisa de hormigón se colocaba la armadura, que se introducía hasta el fondo de la perforación en roca, ocupando el núcleo del pilote y emergiendo en la parte superior lo suficiente para anclar en el cabezal.

## CONSTRUCCION DE PILOTES

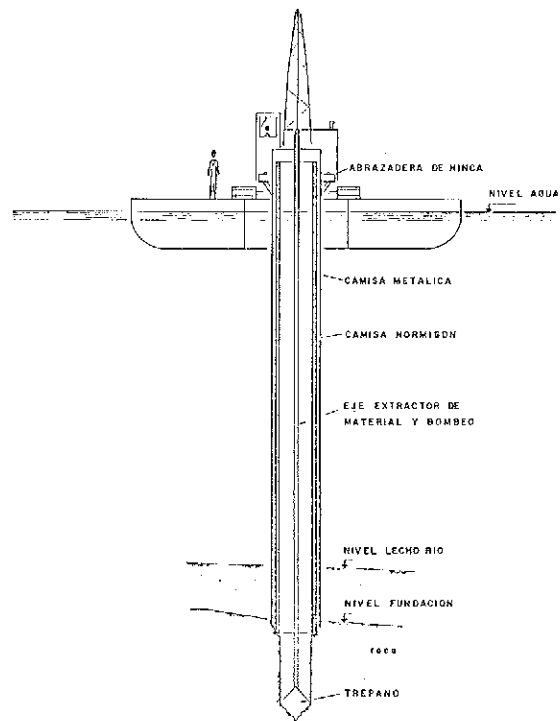


Fig. 23

El llenado de hormigón del extremo inferior empotrado en roca y del núcleo del pilote, se efectuó bajo agua por medio de un tubo de 200 milímetros de diámetro, y una bomba para hormigón montada sobre una embarcación.

En el espacio anular que quedaba entre la camisa metálica y la camisa de hormigón, se vertía canto rodado, a los efectos de que se creara un vínculo entre la camisa de hormigón y el terreno circundante, a medida que se iba extrayendo la camisa metálica con el mismo equipo hidráulico empleado para su colocación.

Una vez terminada la operación anterior, se inyectaba con mortero el canto rodado anteriormente colocado, a través de 4 conductos dejados en las paredes de la camisa de hormigón. De esta manera, se logró una mejor vinculación del pilote y el terreno circundante.

## PILAS

Las pilas principales (que soportan el tramo central de 220 m de luz) están formadas por dos secciones en forma de U unidas a media altura por una riostra en cada fachada (Véase Figura 3).

Las pilas que soportan los tramos de 70 m de luz, tienen forma similar, con dimensiones acordes a su función (Figura 24).

Ambos tipos de pilas se construyeron con encofrados deslizantes (Figura 25).

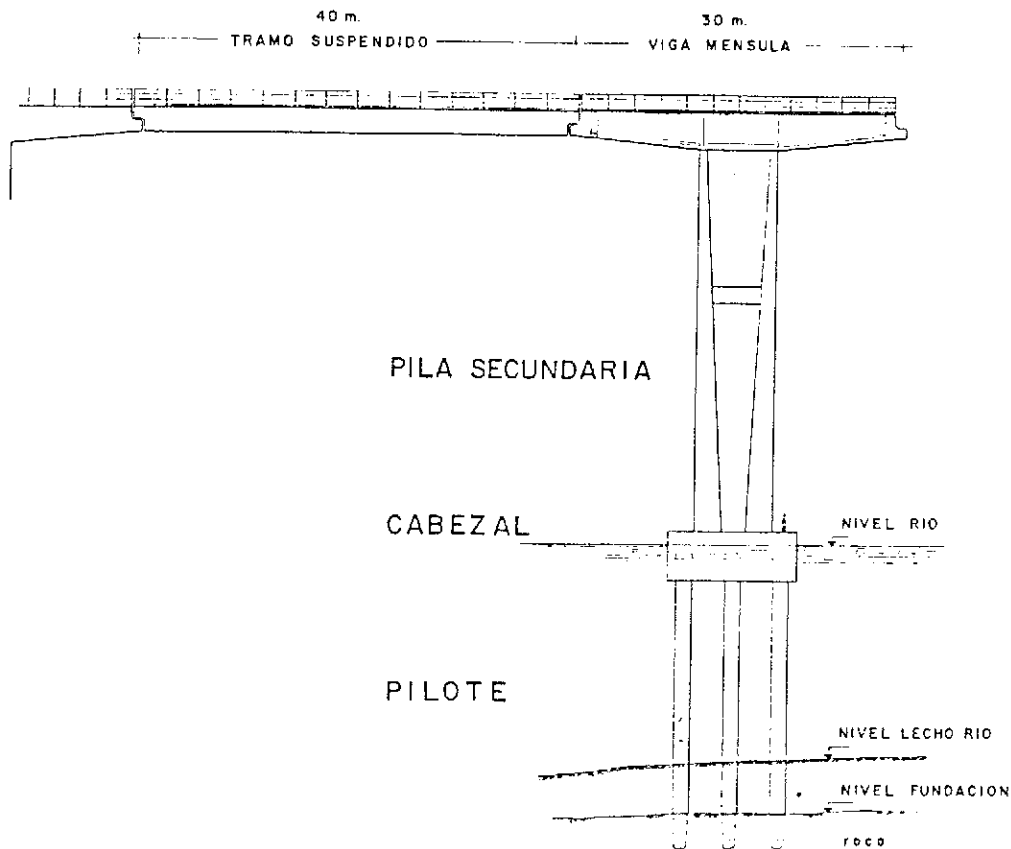
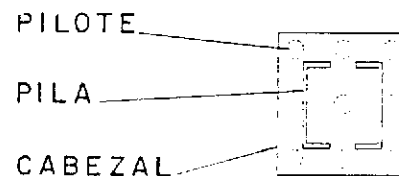


Fig. 24



Las pilas del viaducto consisten en pilotes-pilas pues están constituidas por la prolongación de los dos pilotes que forman la cimentación.

Ambos pilotes están unidos por un travesaño, sobre el que apoyan directamente (sobre neoprenos) las vigas prefabricadas (Figura 26).

## SUPERESTRUCTURA

### —Tramos Principales

El tramo central, de 220 m de luz, y los dos tramos adyacentes, de 145 m, están resueltos estructuralmente por medio de dos grandes doble-ménsulas, con sección en forma de cajón, cada una de 180 m de longitud, o sea con 2 ménsulas de 90 m cada una (Figura 27).

En los extremos de las ménsulas se apoyan tramos suspendidos, de 40 m de luz. De esta manera, los 220 m del tramo central están salvados por dos ménsulas de 90 m y un tramo suspendido de 40 m.

En la Figura 28 se aprecia el montaje de vigas prefabricadas, constituyentes del tramo suspendido de 40 m.

Los tramos de 145 m de luz están resueltos, cada uno, con una ménsula de 90 m, un tramo suspendido de 40 m y una ménsula de 15 metros.

La construcción de las grandes doble-ménsulas (doble-ménsulas principales) se efectuó por el sistema de avance libre, con dovelas de una longitud de 4,225 m en el arranque de las ménsulas y de 5 m en el resto.

La parte de la sección cajón apoyada directamente sobre las pilas principales, se construyó, en su parte inferior, con losas prefabricadas, y el resto de ella, con encofrados y métodos convencionales (Figura 29).

Una vez construida la parte apoyada directamente sobre el pilar, se dispusieron sobre ella dos carros de avance, de los cuales colgaban los encofrados de un par de dovelas (una a cada lado de la pila) (Figura 30). Ambos encofrados se situaban en



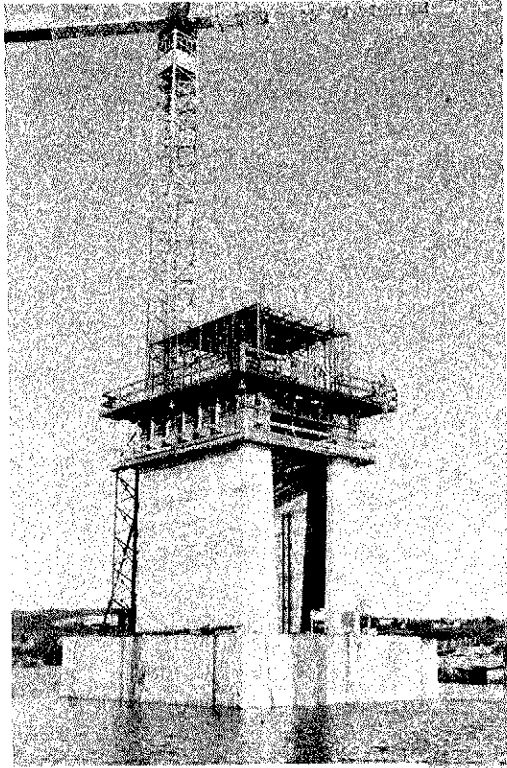


Fig. 25



Fig. 26

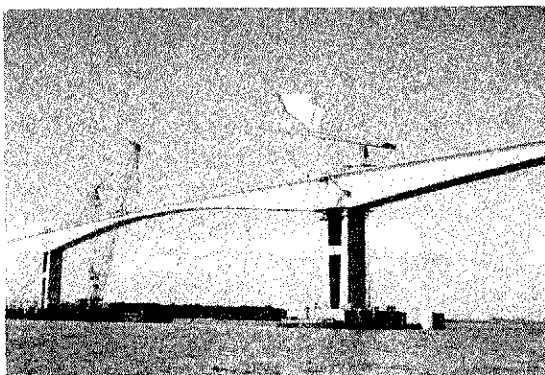


Fig. 27

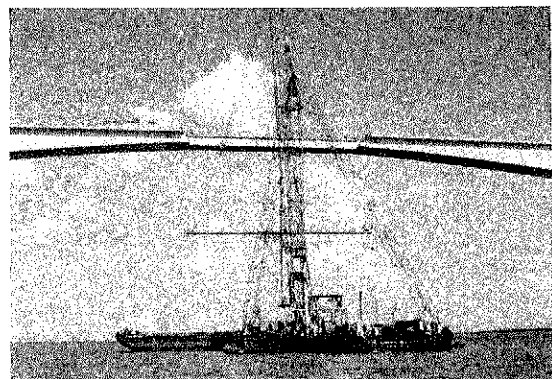


Fig. 28



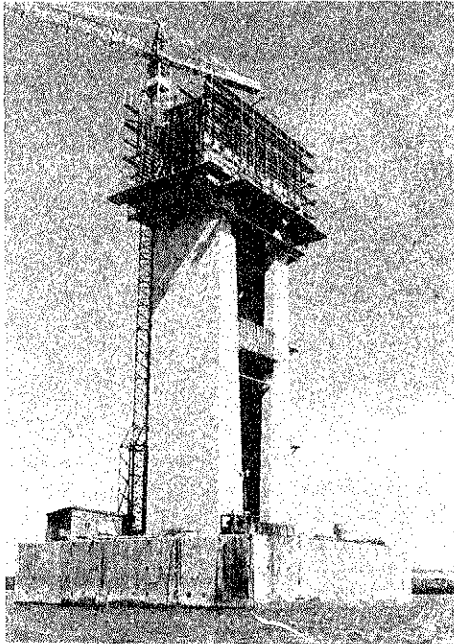


Fig. 29

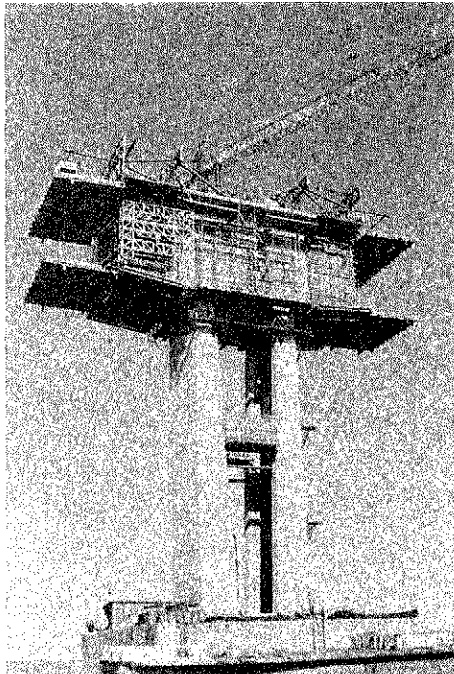


Fig. 30

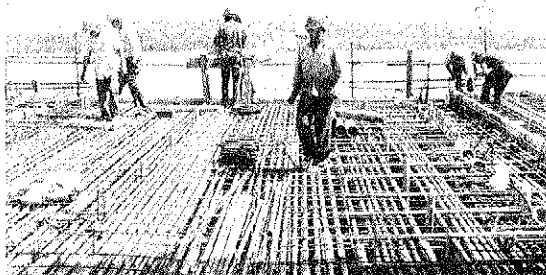


Fig. 31

posición, se colocaban las armaduras y las vainas y barras de pretensado y se procedía al llenado del hormigón (Figura 31).

Para acelerar el proceso se efectuaba el curado con vapor, por medio de una carpa exterior y otra en el interior de la sección cajón. Cuando se alcanzaba la resistencia necesaria, verificada con ensayos de probetas mantenidas en las mismas condiciones que la estructura, se tesaban las barras que se anclaban en la sección extrema de la dovela recién llenada. Luego se desplazaban los carros de avance y se repetía el proceso, construyendo dos nuevas dovelas en forma equilibrada respecto a la pila.

Los esfuerzos de corte en las caras laterales del cajón, se absorbieron por cables rectos de pretensado, disponiendo también estribos convencionales.

El hormigón especificado fue de  $350 \text{ kg/cm}^2$  de resistencia mínima, en probetas cilíndricas, a los 28 días.

Se empleó el sistema Dywidag, con barras de  $\phi$  32 mm.

#### —Tramos de 70 m de luz (secundarios)

Los tramos de 70 m están contruidos con vigas doble-ménsulas prefabricadas y postensadas, de 30 m de longitud, y vigas suspendidas, también prefabricadas y postensadas, de 40 m de luz, apoyadas en los extremos de las primeras (Véase Figura 24).

Las secciones transversales están formadas por 4 vigas (véase Figura 4).

El procedimiento de montaje de los tramos de 70 m de luz fue el siguiente:

Sobre cada pila secundaria se montaron 4 vigas doble-ménsulas, de 30 m de luz, (15 m a cada lado desde el eje de la pila). Estas 4 ménsulas se solidarizaron a la pila y entre sí, mediante dos diafragmas intermedios que son prolongación de las almas de la pila, cada uno de los cuales se postensó, transversalmente al eje del puente, por medio de 4 barras Dywidag, de 32 mm de diámetro, que proporcionaron un esfuerzo final de 55 t cada una. Como estas ménsulas vuelan 15 m a cada lado del eje de cada pila, entre los extremos de las ménsulas de dos pilas consecutivas queda por salvar una luz de 40 m que se resuelve con un tramo suspendido constituido por 4 vigas de 40 m de luz. Los extremos de las vigas tienen la forma de dientes que permite apoyarlas en los dientes que a su vez tienen, en sus extremos, las doble-ménsulas de 30 m (Figura 32).

El apoyo de cada viga en cada ménsula, se realiza por intermedio de una placa de neopreno, de 50 cm de largo por 35 cm de ancho.

El procedimiento de construcción de las vigas prefabricadas fue el siguiente:

Se construyeron primeramente los extremos de

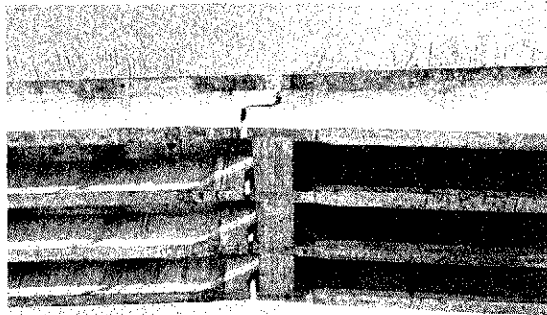


Fig. 32

las vigas (cabezales), que se prefabricaron sobre mesas vibratorias, cuidando especialmente la calidad del hormigón y la ubicación de las placas de anclaje, vainas y armaduras convencionales. Una vez que estos cabezales tenían la resistencia necesaria, se transportaban al lugar de prefabricación de la armadura de vigas. Una vez completada ésta, se ubicaban en el molde de vigas junto con los cabezales y vainas y acero de pretensado (Figuras 33 y 34). Se procedía al hormigonado, y luego de comenzado el fraguado, se le sometía a un curado con vapor. De esta manera, a las 48 horas, la viga estaba en condiciones de recibir el primer tesado que le diera la resistencia necesaria para poder transportarla a depósito.

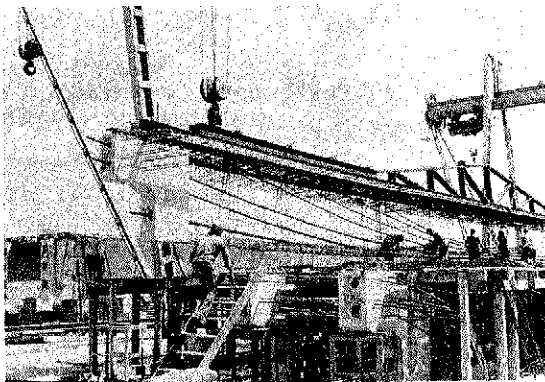


Fig. 33

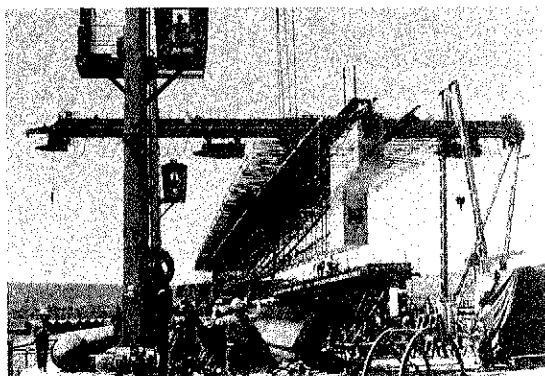


Fig. 34

El procedimiento de construir previamente los cabezales, permitió que, en el momento de aplicar el pretensado, la zona de anclajes tuviera una alta resistencia.

#### *--Tramos de 40 m de luz (viaducto)*

La superestructura de los tramos de 40 m de luz está formada por 4 vigas similares a las que forman los tramos suspendidos de 40 m (véase Figura 26).

#### *--Losa de Tablero*

En todos los casos de superestructura prefabricada, para llenar la parte de losa entre vigas y los volados de veredas, se desplazó, sobre las vigas ya solidarizadas por los diafragmas, una estructura metálica que tenía movilidad propia sobre rieles y de la cual pendía una plataforma con la cual se podía acceder a la parte inferior de las vigas.

Con esa plataforma inferior se podían colocar los encofrados de losas y veredas y posteriormente desencofrar y transportar al tramo siguiente los encofrados, para un nuevo uso (Figura 35).

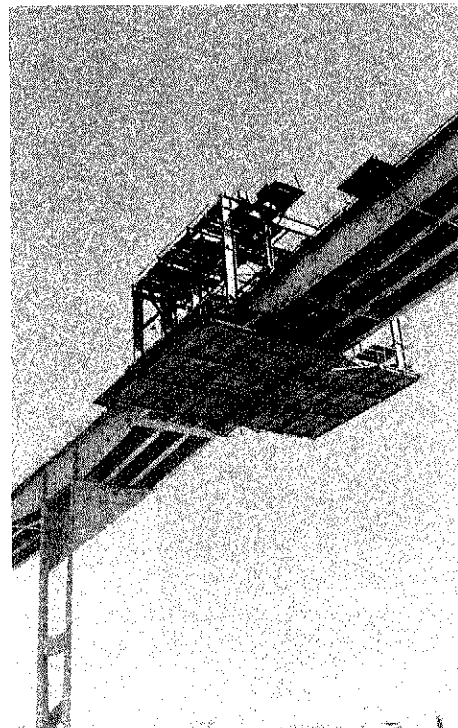


Fig. 35

#### **MONTAJE DE VIGAS PREFABRICADAS**

El movimiento en el obrador de los elementos prefabricados, se efectuó por medio de 2 pórticos grúa, de 20 m de luz, que se desplazaban sobre un

par de rieles a lo largo de la zona de prefabricación (Figura 36).

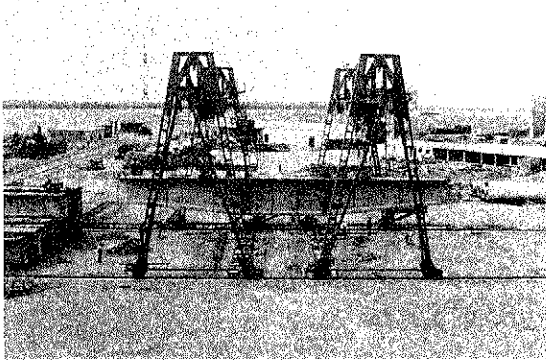


Fig. 36

Los rieles de rodamientos de estos pórticos, terminaban en dos vigas-muelles que se prolongaban dentro del río.

Esto permitía a la grúa transportar los elementos prefabricados hasta una embarcación que, ubicada entre ambas vigas-muelle, estaba destinada a continuar su traslado por el río hasta el lugar del montaje.

En el lugar del montaje, una grúa Derrick flotante tomaba el elemento prefabricado de la embarcación y lo colocaba en la posición definitiva.

La grúa Derrick tenía una capacidad de 100 t y una pluma de 70 m (Figura 37).

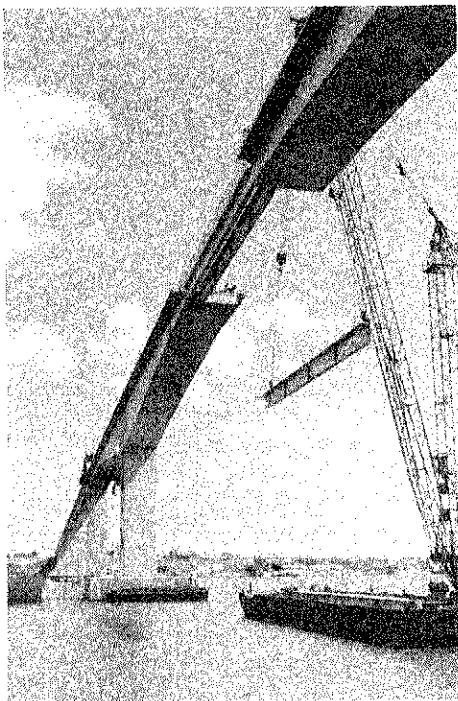


Fig. 37

## RECUBRIMIENTO DEL TABLERO

El pavimento sobre el puente se construyó de hormigón. El espesor de la capa de hormigón que lo forma es de 4 cm en los bordes y 8 cm en el centro. Lleva una malla electro-soldada  $\phi 4,2$  c/10.

La conformación del hormigón se hizo por medio de una regla vibrante con la altura sobre la losa, respetando la forma indicada anteriormente. Detrás de la regla vibrante, —por medio de dos puentes rodantes que corrían sobre las veredas— se aplanó el hormigón con dos fratachos de madera de 3,50 m de largo, aplicados en el sentido longitudinal. A continuación, y por medio de otro puente transversal rodante, se arrastró una arpillera mojada para darle textura rugosa a la superficie de hormigón.

Sobre las ménsulas principales se tomaron algunas precauciones especiales. Para impedir que el propio peso del hormigón de pavimento que se iba colocando creara tensiones longitudinales de tracción en el pavimento ya colocado y fraguado, se lastraron, con bloques de hormigón, las ménsulas en las cuales se avanzaba desde el pilar hacia el extremo. Dichos bloques se iban retirando a medida que avanzaba la colocación del hormigón.

De esta manera, la deformación de la ménsula no se modificaba durante la colocación del hormigón de pavimento.

Previamente a cada colocación de hormigón, se cubrió la losa con un producto adherente e impermeabilizante.

## DEFENSAS DE PILAS PRINCIPALES

Para evitar una posible colisión de un barco contra las pilas principales —entre las cuales pasa el canal de navegación— se construyeron dos defensas en forma de triángulo equilátero haciendo proa aguas arriba del puente (Figura 38).

Cada una de dichas defensas está cimentada sobre 12 pilotes del mismo tipo que los usados para la cimentación de pilas, aunque fuertemente reforzados en su armadura.

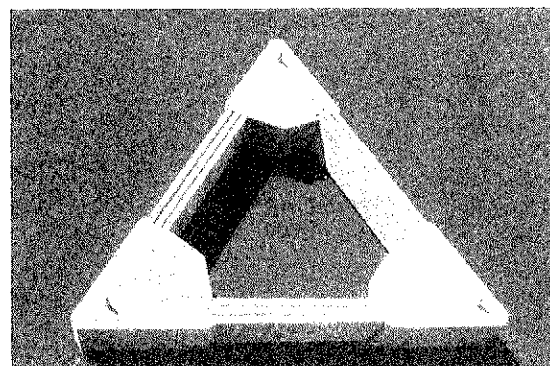


Fig. 38

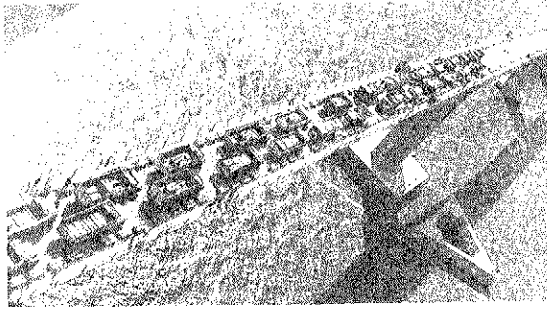


Fig. 39

Cada lado del triángulo está constituido por 3 pantallas prefabricadas, de hormigón armado, dispuestas paralelamente y separadas 10 cm entre sí.

Cada vértice es un cabezal macizo que se apoya sobre 4 pilotes. Sus caras y su fondo se construyeron con elementos prefabricados de hormigón.

Cada defensa se calculó para absorber una energía de 1.000 t es decir, aproximadamente la de un barco de 5.000 t, a una velocidad de 2 m/s.

## PRUEBA DE CARGA

Una vez terminada la obra, y de acuerdo con lo exigido previamente en el Pliego de Condiciones, se realizó una prueba de carga, colocando, en varias etapas, hasta 1.000 toneladas en cada uno de los tramos centrales.

El autor programó este ensayo para ser realizado con camiones, para facilitar el desplazamiento de las cargas, y para que una vez completadas las cargas máximas se "Visualizara" la magnitud de las mismas.

Realizada la prueba con camiones, aún los no técnicos pueden apreciar que es una carga que difícilmente se producirá en el periodo de servicio de la obra (Figura 39). Esta decisión la tomó el proyectista en virtud de que, como ya se indicó, el tramo central —en el momento del proyecto— era un record mundial.

En los diagramas de la Figura 40 se aprecian los gráficos de flechas en el extremo de la ménsula uruguaya 11U que se indica en el esquema. En dichos gráficos de flechas, correspondientes a la car-

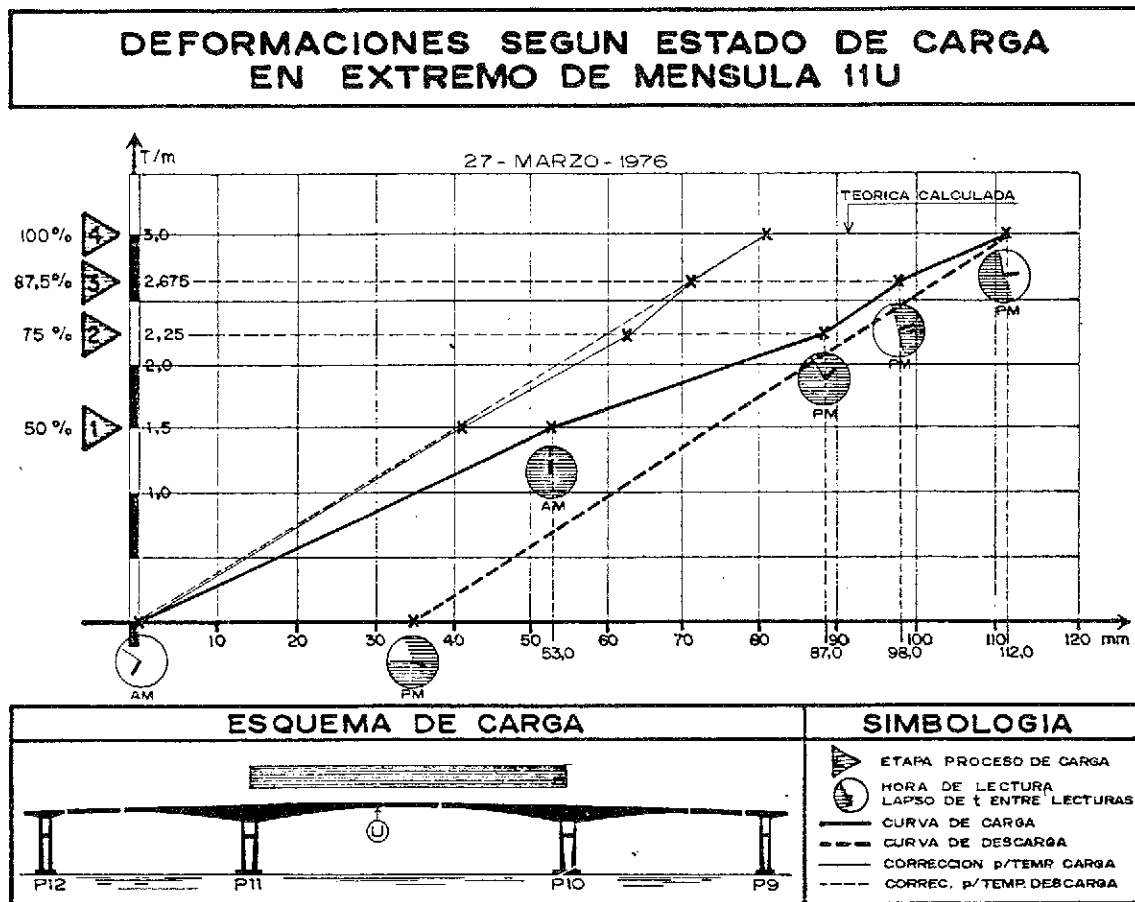


Fig. 40

ga y descarga, se representaron también correcciones por temperatura, realizadas suponiendo análogas, las deformaciones por temperatura en cada hora del día del ensayo, con las medidas en varias oportunidades en días de asoleamiento similar.

En la totalidad de los diagramas de flechas registradas, se pudo observar, a través de sus valores, su andamiaje, y su concordancia con las calculadas teóricamente, el excelente comportamiento de la estructura.

Con esta prueba de carga se cerraba la etapa de obra y comenzaba un nuevo tiempo de integración binacional, uruguayo-argentina. Integración puesta de manifiesto, incluso, en la comunión de esfuerzos de manos y mentes, entregados con entusiasmo a la construcción de este puente tan significativo. Ciertamente, este entusiasmo estuvo provocado también por el orgullo de construir lo que fue en su momento un record en ingeniería.

## RESUMEN

Se describe en este artículo la construcción del puente "Libertador General San Martín" que, cruzando el río Uruguay, constituyó la primera conexión física entre Uruguay y Argentina.

Se trata de un puente de hormigón pretensado, en cuya construcción se utilizó al máximo la prefabricación. Su longitud total es de 3.408,35 metros, con un tramo central de 220 metros. En la época en que se proyectó (1970) constituyó un record

mundial entre los de su tipo, superando al puente Bendorf, sobre el Rín, de 209 metros de luz en su tramo central.

Se describen detalladamente los distintos tipos de elementos estructurales utilizados en su construcción y las principales fases de su proceso de ejecución.

Finalmente, se exponen los resultados obtenidos en las pruebas de carga realizadas.

## SUMMARY

This article describes the construction of the "Libertador General San Martín" bridge that, crossing the Uruguay river, was the first physical link between Uruguay and Argentina.

The bridge is built in prestressed concrete, making the maximum use of the prefabrication system.

The total length of the bridge is 3,804.35 m. The central span is 220 meters long. It was world record for this type of bridges when it was designed (1970) surpassing the Bendorf bridge, over the Rhin river, of 209 m of central span.

The article describes the distinct types of structural elements used in its construction and the principal stages of its execution.

Finally, the results obtained in the load testing are comment.

\* \* \*

## "Muros de contención y muros de sótano" 2ª Edición

Acaba de aparecer la segunda edición del libro "Muros de Contención y muros de sótano" del que es autor el Prof. José Calavera Ruiz.

La primera edición, publicada dos años antes, se agotó con gran rapidez, prueba del interés despertado en los lectores. Esta nueva edición contiene diversas ampliaciones y en especial está redactada de acuerdo con la Instrucción EH-88 para obras de hormigón, incluso en las siete colecciones de muros de contención y sótano ya calculados, que contiene el libro.

Es de destacar en la obra el excelente y amplio capítulo sobre cálculo de empujes, con una com-

pleta colección de casos de sobrecargas sobre el relleno. A continuación, se realiza un estudio sistemático de los diversos tipos de muro, dedicando un capítulo completo a cada tipo.

Un capítulo especial se dedica al proceso de construcción y a los detalles constructivos y otro a los diversos tipos de muros prefabricados.

Finalmente, el libro contiene siete colecciones completas de muros, tres de contención de diversos tipos, dos de un sótano y dos de dos sótanos, completamente calculados, armados y medidos, lo que aumenta la utilidad de un libro ya de por sí de un gran valor.

## La fundación García-Cabrerizo anuncia la concesión de sus galardones para apoyo de la invención tecnológica

En fecha próxima, serán entregados los "Galardones para apoyo de la invención tecnológica" de la "Fundación García-Cabrerizo". La entrega, en ésta su XVII edición, se hará, como de costumbre, en un Solemne Acto en el que participarán más de 500 personas.

Estos galardones constituyen el mayor homenaje de los estamentos afines a la innovación, tan ampliamente representados en la labor de la citada Fundación.

En esta ocasión, la Invención galardonada se refiere a un "Sistema de admisión de escape por eje de lumbreras rotativas en motores de explosión a cuatro tiempos", cuyo sistema ha sido concebido y diseñado para mejorar el rendimiento y economía de fabricación de los motores convencionales.

Las correspondientes Medallas de Honor al Fomento de la Invención, que premian la labor de apoyo y ayuda desarrolladas en favor de la creatividad innovadora española, han sido concedidas a:

—El Profesor Martín-Municio, Presidente de la Academia de Ciencias y Catedrático. Ha sido distinguido por su dedicación al fomento de la Investigación Científica, que junto a la docencia ha fructificado en la investigación aplicada y en la formación de técnicos innovadores.

—D. Salvador Anglada, uno de los más destacados investigadores, con gran experiencia en la industria. Se le ha concedido la Medalla en reconocimiento de su gran labor al frente de Departamentos de Investigación.

—D. José María Bachs, realizador y autor del programa "La Parada", de mayor audiencia en la televisión en Cataluña y regiones colindantes. Ha sido igualmente receptor de esta Distinción por su enorme tarea de ayuda y promoción, a través del periodismo audiovisual, del callado trabajo de los inventores, que han recibido en la televisión catalana una atención inusitada y continua.

\* \* \*

## Seminarios Torroja Tecnología de la Construcción y de sus Materiales

El Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, del CSIC, viene organizando seminarios monográficos sobre temas de actualidad en el ámbito de la Tecnología de la Construcción y sus Materiales, a cargo de destacados investigadores nacionales y extranjeros del Sector.

Estos Seminarios se celebran en la Sala de Conferencias del Instituto, situado en la calle Serrano Galvache s/n (acceso por Arturo Soria

frente al núm. 278), y tienen lugar los jueves alternos a las 12:00 horas. Su duración aproximada es de dos horas, incluyendo la ponencia y el coloquio que se realiza a continuación. La asistencia a los mismos tiene carácter libre y gratuito.

Los seminarios programados para el quinto ciclo, correspondiente a la primavera de 1990, fueron los siguientes:

Fecha	Ponente	Tema
19 Abr	Juan MURCIA	Curiosidades y Perspectivas de la Técnica del Pre-tensado.
03 May	Sebastián ARAUJO y Jaime NADAL	Posibilidades Expresivas de la Estructura en la Restauración.
17 May	Rafael TALERO	Resistencia de los Cementos al Ataque de los Iones Sulfato.
31 May	Pablo DIAZ ROMERAL	Tecnologías de Construcción de Bajo Coste.
21 Jun	José A. JIMENEZ SALAS	Arcillas expansivas.

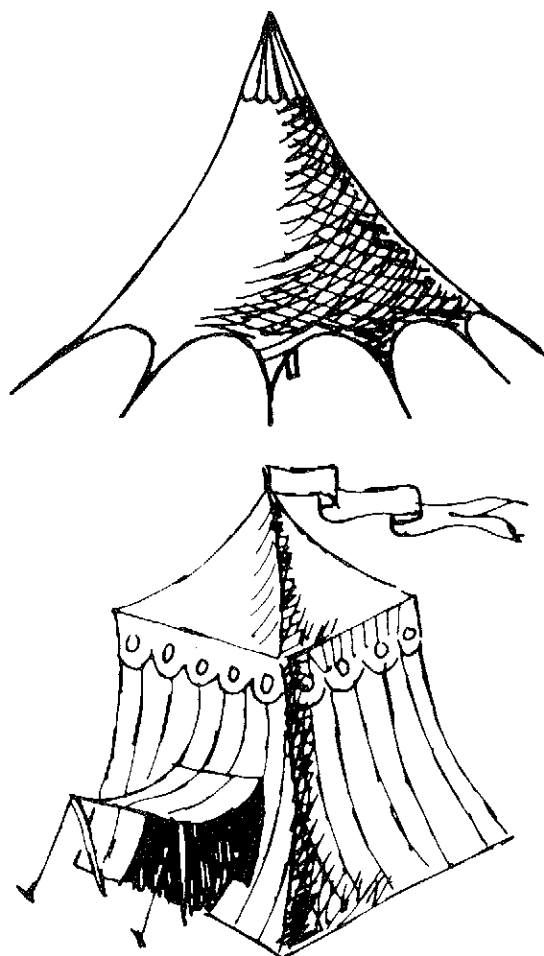
## Las estructuras a tracción y sus materiales\*

Juan Murcia Vela  
 Doctor Ingeniero de Caminos  
 Instituto de Ciencia de Materiales de  
 Barcelona, CSIC

### INTRODUCCION

Las estructuras a tracción (las que trabajan fundamentalmente bajo tal esfuerzo) surgieron como tales en su forma más sencilla, la unidimensional, que durante mucho tiempo mantuvo un predominio cercano incluso a lo exclusivo: tanto elementos de tipo "cordón", sin rigidez a flexión (los existentes directamente en la naturaleza, como las lianas y otros similares, y los fabricados con fibras naturales, fibras artificiales o alambres metálicos), como piezas de cierta rigidez (madera, barras o perfiles metálicos, elementos de hormigón armado y, sobre todo, pretensado) han venido componiendo, aisladamente o no, estas estructuras lineales. Se trata, en definitiva, de elementos estructurales que desempeñan la función de *tirantes* o de estructuras formadas por una combinación de los mismos.

Más tarde aparecieron ya estructuras a tracción bidimensionales, que *conforman una superficie en el espacio, sin rigidez a flexión*, aunque casi se redujeron durante siglos a cubiertas de recintos habitables de asentamiento provisional (esto es, de uso no habitual en general o habitual, como vivienda incluso, en el caso de pueblos nómadas) de mayor o menor envergadura, a base de tejidos con propiedades relativamente adecuadas a la tecnología disponible; en otros campos también se han venido usando, más recientemente (globos aerostáticos, dirigibles, etc.). Pero no toman auténtica relevancia y, sobre todo, variedad de usos, como se verá en lo que sigue, hasta hace algunas décadas.



\* Texto adaptado (algo más desarrollado en algún punto) de la conferencia impartida por el autor dentro del seminario *Nous Materials* de la *Universitat Tècnica d'Estiu de Catalunya* (UNTEC). Sitges, 28 Septiembre 1989.

Los dibujos que se incluyen han sido realizados por Javier López-Rey, Arquitecto y Catedrático de la E.T.S.A.B (U.P.C.), quien amablemente los ha cedido. Se agradece también la cesión de las fotografías a las personas y entidades citadas en ellas.

Con la óptica de la tipología estructural, se trata en este caso de *membranas* (estructuras continuas) y de *mallas* espaciales de cables o cordones (estructuras formadas por elementos lineales que configuran una superficie discontinua) a tracción.

Nos centraremos aquí en las *bidimensionales*, ya que los elementos lineales son bastante conocidos e incluso, desde el enfoque impuesto por los objetivos de esta exposición, quedan englobados de algún modo en la problemática de las primeras, más complejas desde todos los puntos de vista. Aún así, por razones ligadas a la gran amplitud de la materia y a las limitaciones de una presentación como ésta, sólo se podrá realizar una *revisión muy general* de las mismas y de sus materiales.

Desde un punto de vista funcional, en la actualidad estas estructuras consisten principalmente en cubiertas (sustentadas por aire o colgadas) para superficies y volúmenes pequeños o medianos, depósitos de no gran capacidad y presas de poca altura con forma regulable (inflables), así como en elementos flotantes (boyas, plataformas para diversos usos, etc.) o sumergidos (depósitos, recintos habitables, etc.) que se anclan al fondo y/o a tierra.

Se trata, por tanto, de usos relacionados sobre todo con la cobertura, la contención, el cambio de forma y la flotación.

Además de lo que ya se puede suponer en razón de dichos usos (posibilidad de formar una superficie abierta o cerrada susceptible de estanquidad, aislamiento de tipo diverso, versatilidad de forma o flotabilidad, sobre lo cual se volverá más adelante), estas estructuras aportan una serie de propiedades específicas (economía de material y ligereza, juntamente con rigidez, facilidad de montaje y desmontaje, etc.), que analizaremos a continuación, las cuales constituyen la clave de su existencia y de su cada vez mayor empleo en la construcción.

## FACTORES FUNDAMENTALES QUE JUSTIFICAN EL EMPLEO DE ESTAS ESTRUCTURAS

Antes de entrar en una descripción más pormenorizada, relativa a sus distintos aspectos (funcionales, propiamente estructurales o constructivos) y los materiales que las conforman, es oportuno plantearse *el porqué de la existencia de estas estructuras*, cuando parecen existir (y existen de hecho) otras tipologías capaces también de responder adecuadamente a la práctica totalidad de los requisitos ligados a las funciones básicas ya citadas (cobertura, contención, flotabilidad e incluso, con mayor dificultad, versatilidad de forma), esto es, que sirven casi para lo mismo; más adelante se volverá sobre estas funciones con mayor detalle.

Veamos a continuación los motivos primarios de tipo general en que se basa su respuesta.

## Tracción y economía de material

En primer lugar, hay que destacar un aspecto estructural-económico básico: en un elemento estructural formado por un material con parecida resistencia a compresión y a tracción, la *forma de trabajo más económica* en material es precisamente la *tracción*: requiere sólo los espesores estrictos, a tensión constante, para resistirla; mientras que para flexión-cortante las tensiones son variables y se requiere al menos la existencia de dos zonas o cabezas, separadas lo suficiente (brazo de palanca) para absorber la flexión y unidas entre sí para transmitir el cortante; y a compresión existe el problema del pandeo, que lleva a la necesidad de sobreespesores para alcanzar suficiente rigidez.

Esta economía primaria de material tiene un *efecto multiplicador* inmediato: como todo está sometido a la gravedad, cualquier ahorro en material lo es también de peso propio, con la eventual reducción de los esfuerzos de la estructura y, por tanto, del propio material necesario en ella. El interés en reducir el peso propio es primordial cuando el mismo, como pasa en el caso de las cubiertas, actúa como carga transversal e influye directamente en las tracciones de la estructura; éstas, siempre que se mantenga una relación constante entre flechas y luces, son más o menos proporcionales a dichas cargas y a las luces existentes, por lo que para *grandes luces* tal ligereza es todavía más interesante. De todas formas, esta cuestión no es entonces tan grave aquí como en las estructuras a flexión, donde los momentos son proporcionales a los cuadrados de las luces.

## Tracción y rigidez estructural

Pero existe también otro aspecto no menos importante, ligado en parte con el anterior, que conecta el funcionamiento estructural con la necesaria (al menos, en una cierta etapa de servicio) estabilidad de forma de toda construcción: la tracción puede llegar a ser, a igualdad de peso propio, la *forma de trabajo estructural más estable* para elementos con un material de similar resistencia a compresión y a tracción. Esto no se refiere tanto al aprovechamiento del material (en un sentido semejante al de la resistencia, pero enfocado ahora hacia la deformabilidad), lo que le proporciona también una rigidez relativamente importante a la tracción (E A), como al hecho de que la *rigidez de la estructura* frente a las acciones a que vaya a estar sometida aumenta con su propia tracción, sin más límite que su propia resistencia o, en su caso, la de otros elementos en donde se ancla y a los que transmite sus reacciones (situación que se da cuando la estructura a tracción es *abierta*; no si es *cerrada*, ya sea sobre sí misma o sobre el terreno, en cuyo caso hay que asegurar su fijación).

Lo anterior se comprueba examinando un *cable*

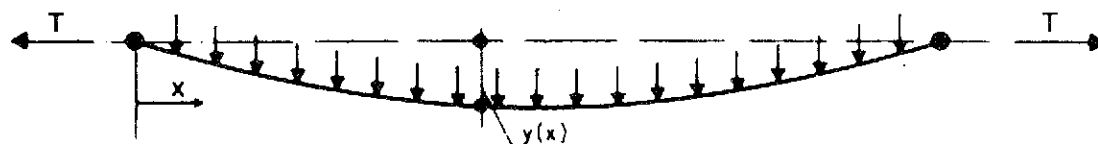


colgado horizontalmente por sus extremos de unos *anclajes fijos*, que se somete a un incremento de carga transversal (repartida). Cuanto mayor es la tracción previa en sus anclajes ( $y$ , por tanto, en el propio cable) el incremento de la flecha que se produce es más pequeño; aunque, por otro lado, es mayor el incremento de la tracción necesaria para equilibrarlo.

Todo ello, un tanto intuitivo por lo demás, es confirmado por el análisis; éste, en una estructura como la presente, siempre es del tipo que, expresado en términos de las que trabajan a flexión, se conoce como de segundo orden, lo que precisamente hace que exista esa no linealidad respecto a la tracción previa del cable, que se acentúa conforme crece esta última: en el límite teórico (ya se han visto las limitaciones que lo hacen imposible), para una tracción tendiendo a infinita, la flecha derivada de la carga transversal tiende a anularse.

Para examinarlo, bastará con una aproximación analítica bastante sencilla.

Si se supone que el cable es suficientemente tendido, su fuerza de tracción  $T$  puede considerarse invariable a lo largo del mismo y la carga transversal tomarse constante respecto a la cuerda del cable (de longitud constante  $\ell$ ), ya que entonces incluye adecuadamente su propio peso; en esas condiciones, la deformada  $y(x)$  es una parábola de segundo grado.



Sea  $g$  la carga transversal, que aumenta en  $\Delta g$ . El consiguiente aumento de longitud del cable, y por tanto el de la flecha, se deriva justamente de las deformaciones debidas al incremento de tracción.

Así, si  $\epsilon$  es la deformación,  $\epsilon = \frac{\Delta T}{EA}$ , de forma

que  $\Delta s = \epsilon \cdot s$ , si  $s$  es la longitud del cable.

Por otro lado, tomando como origen el centro,  $y'(x) = \frac{g}{T} \cdot x$ , con lo que, al ser tendido el cable, se cumple

$$s = 2 \cdot \int_0^{\ell/2} \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx \approx$$

$$\approx 2 \cdot \int_0^{\ell/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{g \cdot x}{T} \right)^2 \right] \cdot dx = \ell \cdot \left( 1 + \frac{g^2 \cdot \ell^2}{24 \cdot T^2} \right).$$

Por tanto, como  $s + \Delta s = (1 + \epsilon) \cdot s$ , se tiene

$$1 + \frac{(g + \Delta g)^2 \cdot \ell^2}{24 \cdot (T + \Delta T)^2} = \left( 1 + \frac{\Delta T}{EA} \right) \cdot \left( 1 + \frac{g^2 \cdot \ell^2}{24 \cdot T^2} \right).$$

Llamando " $y$ ", sin más, a la flecha (máximo de la deformada) del cable, teniendo en cuenta que  $T + \Delta T = (g + \Delta g) \cdot \ell^2 / [8 \cdot (y + \Delta y)]$  y despreciando las potencias de los incrementos  $\Delta$  superiores a 1, se llega, al poner todo en función de  $T$ ,  $\Delta g$  e  $\Delta y$ , a

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{EA \cdot g^2}{T^2}.$$

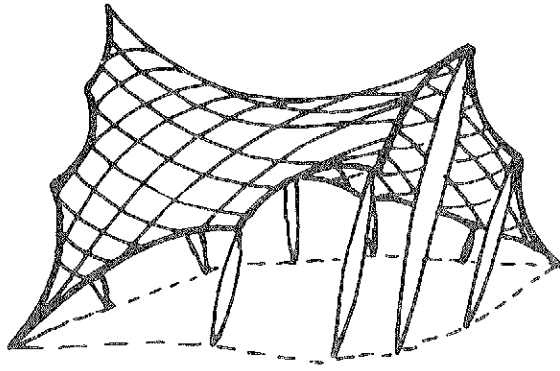
$$\frac{1 + \frac{12 \cdot T^3}{EA \cdot g^2 \cdot \ell^2} \cdot \left( 1 + \frac{g^2 \cdot \ell^2}{24 \cdot T^2} \right)}{1 + \frac{g^2 \cdot \ell^2}{24 \cdot T^2}},$$

valor de la *rigidez transversal* del cable, válido desde de un cierto valor de  $T$  suficiente para que el cable pueda ya considerarse tendido.

A partir de ese punto, puede apreciarse que la rigidez va creciendo de forma más o menos lineal con  $T$ . Para valores ya muy altos de la tracción se da prácticamente la linealidad, puesto que resulta

$\Delta g / \Delta y \approx 8 \cdot T / \ell^2$ ; por lo que  $\Delta y \approx \Delta g \cdot \ell^2 / (8 \cdot T)$ , esto es, la forma del cable se acerca ya tanto a una recta que un incremento de flecha puede tratarse directamente como una flecha total, con lo que el primero llega a ser inversamente proporcional a la tracción del cable ( $y$ , por supuesto, tiende a cero).

En el caso de *estructuras bidimensionales* a tracción viene a ocurrir lo mismo que en el cable, pero existe además otro factor que permite aumentar la rigidez sin necesidad de traccionar tanto: las superficies pueden tener curvaturas contrarias según dos direcciones ortogonales (como ocurre por ejemplo en los paraboloides hiperbólicos, con forma de silla de montar), lo que de por sí confiere mayor estabilidad a la estructura que en el caso de las demás disposiciones (curvaturas ortogonales del mismo signo o nulidad de una de ellas).



### Otros factores fundamentales

Existen más motivos básicos para el empleo de estas estructuras, y no menos importantes que los ya citados, que por su mayor evidencia sólo enunciaremos brevemente:

- Facilidad de transporte y montaje.
- Facilidad de desmontaje y colocación en el mismo o en otro lugar.
- Son prefabricadas, con las ventajas que se derivan en cuanto a la calidad de construcción y, en su caso, a los costes industriales.

Pueden adaptarse sin dificultades a la forma que más convenga, desde diversos puntos de vista: funcional, estético e incluso estructural (tanto por razones tensionales como de rigidez).

Una vez estudiadas las aportaciones fundamentales específicas de estas estructuras, que en principio justifican su utilización, haremos un repaso de los restantes aspectos que, junto con algunos de los ya expuestos, influyen más directamente en las propiedades de sus materiales.

### ASPECTOS FUNCIONALES Y DESCRIPTIVA

Las estructuras bidimensionales en el espacio (esto es, en principio, las láminas, incluyendo en ellas las membranas) son ideales para funciones de *cobertura* y de *contención*, porque delimitan un espacio carente de obstáculos, como soportes u otros elementos, que dificultan tales funciones. Para ello, es importante que reúnan además otros requisitos, como la estanquidad o el aislamiento (relacionados con la continuidad que les es propia), y ello en mayor o menor medida según la función específica y las condiciones concretas; así, en el caso de la contención, prima más la estanquidad, mientras que en la cobertura puede hacerlo el aislamiento, aunque existen casos en que ambos son esenciales. De esta forma, si bien pueden existir cubiertas de estructura discontinua (malla), en las que se proporciona la continuidad a base de elementos "ad hoc", esto mismo es mucho más difícil

de conseguir adecuadamente para funciones de contención.

Pero además de estas dos funciones primarias, existe otra ligada precisamente a lo contrario de la estabilidad formal antes aludida: se trata de la propiedad o efecto *neumático*, esto es, la aptitud que tienen estas estructuras, cuando son cerradas y muy deformables (sin rigidez a flexión, como las membranas), de cambiar de forma con facilidad al variar su presión interior, pero pudiendo mantener su rigidez (estabilidad formal) siempre que sea necesario, merced a estar suficientemente traccionadas por una presión interior adecuada; en definitiva, el ser inflables mediante un fluido (líquido o gaseoso).

Precisamente, el neumático de vehículo es un ejemplo de ello; aunque en el mismo importa sobre todo el efecto de amortiguamiento, tal versatilidad es importante precisamente porque permite adecuarlo a la carga y a las demás condiciones de rodaje (velocidad, estado del pavimento, etc.).

Por otra parte, las estructuras cerradas ligeras son también *flotantes*, pudiendo regularse su flotabilidad no sólo por el peso de aquello que, en su caso, soporten, sino también por el de un lastre (normalmente agua) contenido en su interior; o, incluso, por el tiro de un amarre de fondo, que permite también regular la estabilidad de flotación.

Dentro del campo de la *construcción*, y en la línea ya apuntada al principio, las aplicaciones actuales y a muy corto plazo de estas estructuras en función de todas las propiedades anteriores, pueden resumirse así:

- Cubiertas temporales o definitivas, para usos diversos (pabellones deportivos, de exposiciones o con otros usos; almacenes, talleres, etc.): bien sean neumáticas, sustentadas por aire a una muy ligera sobrepresión (que, desde luego, no nota el organismo humano), que por lo tanto son cerradas, al menos con la superficie del suelo, cumpliendo a la vez la función de cerramiento; o bien, formando superficies abiertas, colgadas y ancladas de otros elementos que soportan su peso y demás acciones (y el obligado tiro horizontal en los extremos) y los ligan al terreno.

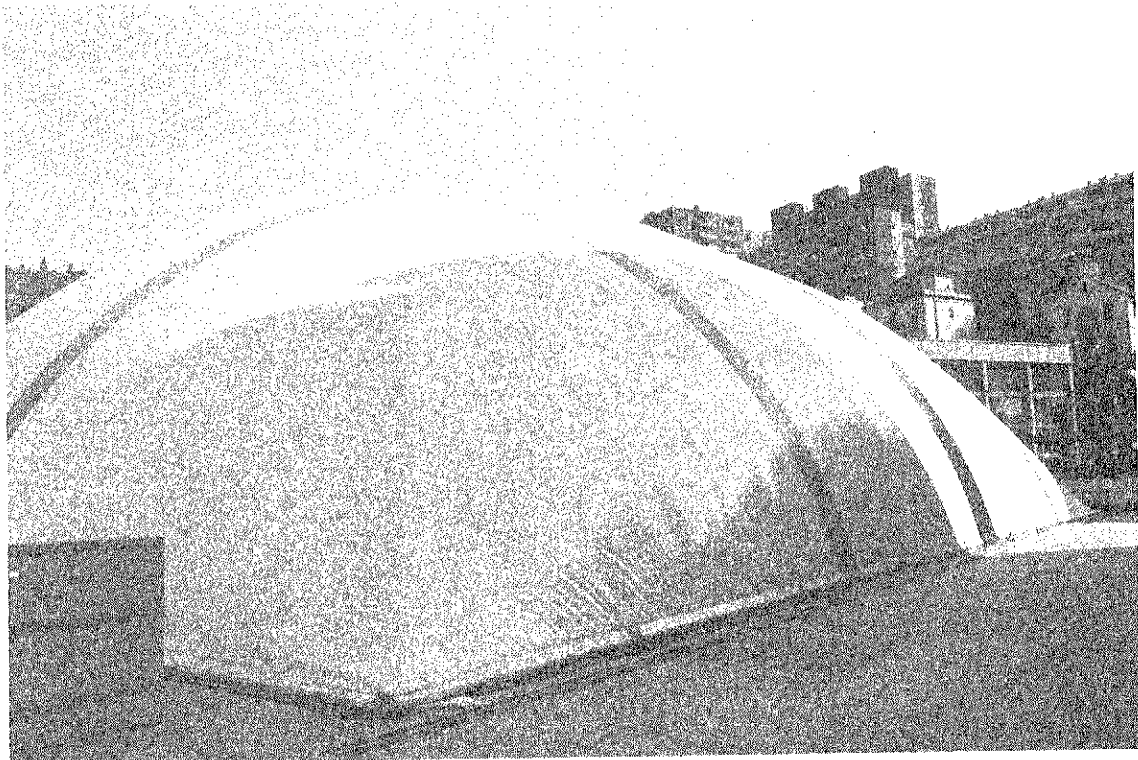
- Depósitos de baja capacidad para agua u otros líquidos, tanto en tierra como sumergidos.

- Presas inflables (con aire o agua) de pequeña altura, con diversos usos tanto fluviales (sobre todo para derivación, pero incluso también para producción de energía hidroeléctrica, que pueden desinflarse en caso de avenida) como marinos (control de mareas en estuarios); se trata de tubos que se fijan con pernos a un cimiento adecuado en el lecho del cauce.

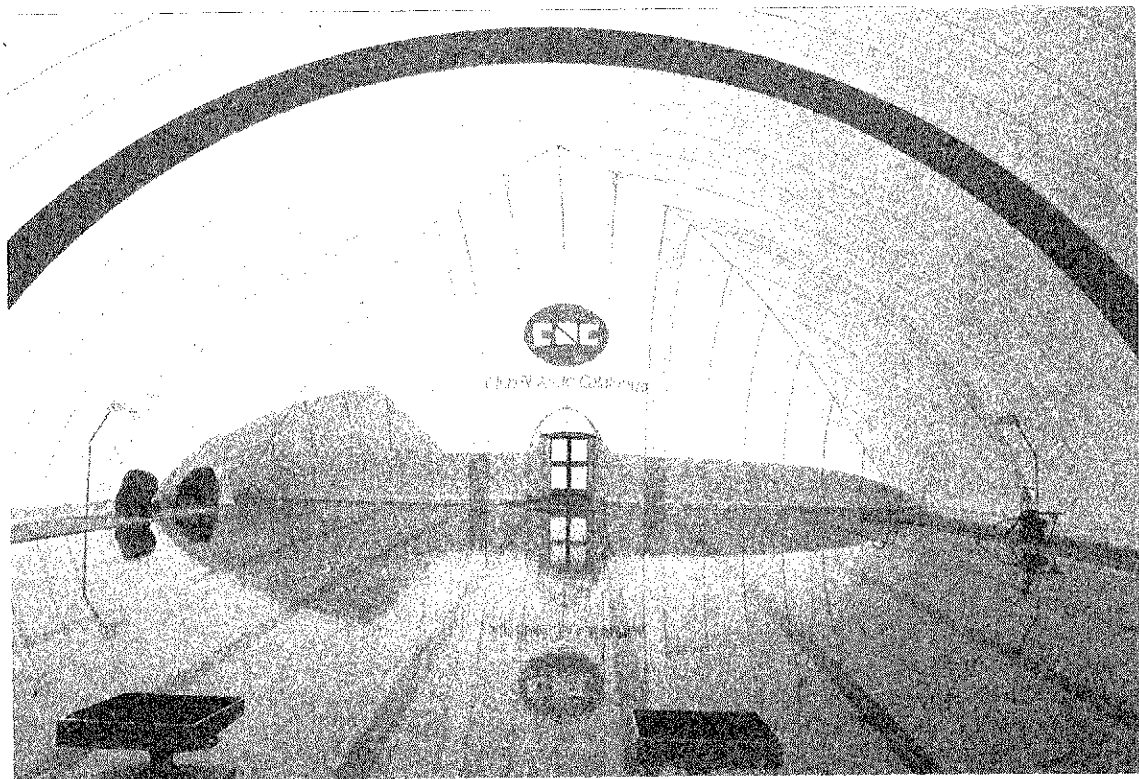
–Elementos flotantes fijos para señalización o para amarre (boyas), así como para soporte de otros elementos (plataformas para diversos usos), que se anclan al fondo y/o a tierra.

–Rompeolas flotantes o sumergidos y otros artefactos similares, que se anclan al fondo.

Estructuras provisionales para la construcción o el montaje, sobre ellas, de otras (por ejemplo, en las de hormigón, cimbras y, muchas veces, encofrados al mismo tiempo), así como elementos auxiliares neumáticos de elevación.



Piscina de entrenamiento, C.N. Catalunya. Barcelona. (Alonso, Pagès, Reyes y Sastre, Arquitectos).



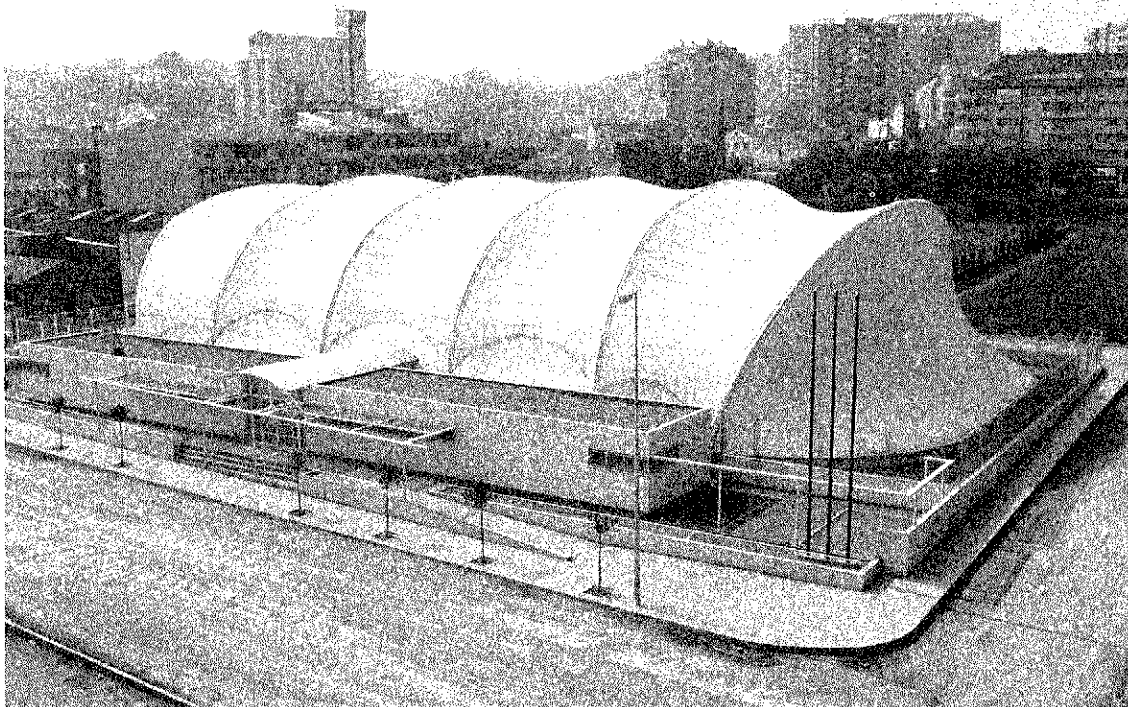
—Piezas tubulares a presión que pueden desempeñar la labor de elementos estructurales (para esfuerzos limitados).

—Recintos habitables sumergidos a poca profundidad, sostenidos por una pequeña sobrepresión interior de aire sobre la exterior del agua, que

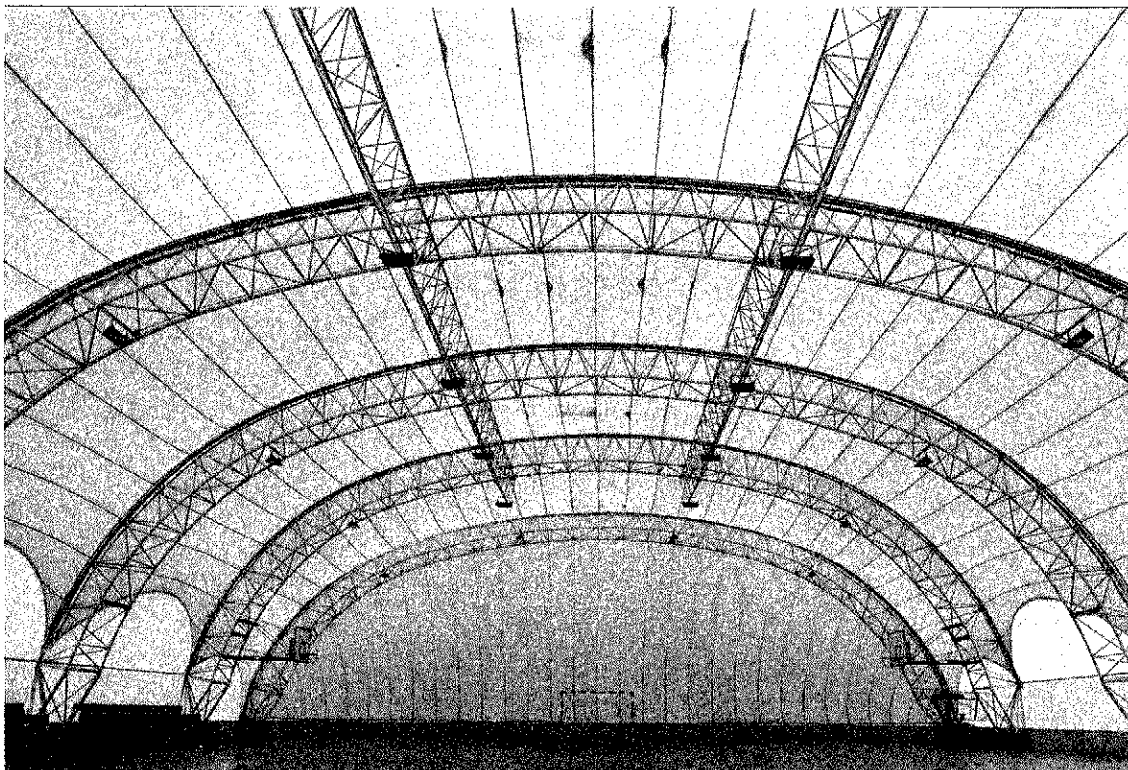
se pueden anclar al fondo; etc.

### ASPECTOS ESTRUCTURALES Y CONSTRUCTIVOS

Haciendo un balance provisional, resulta que las



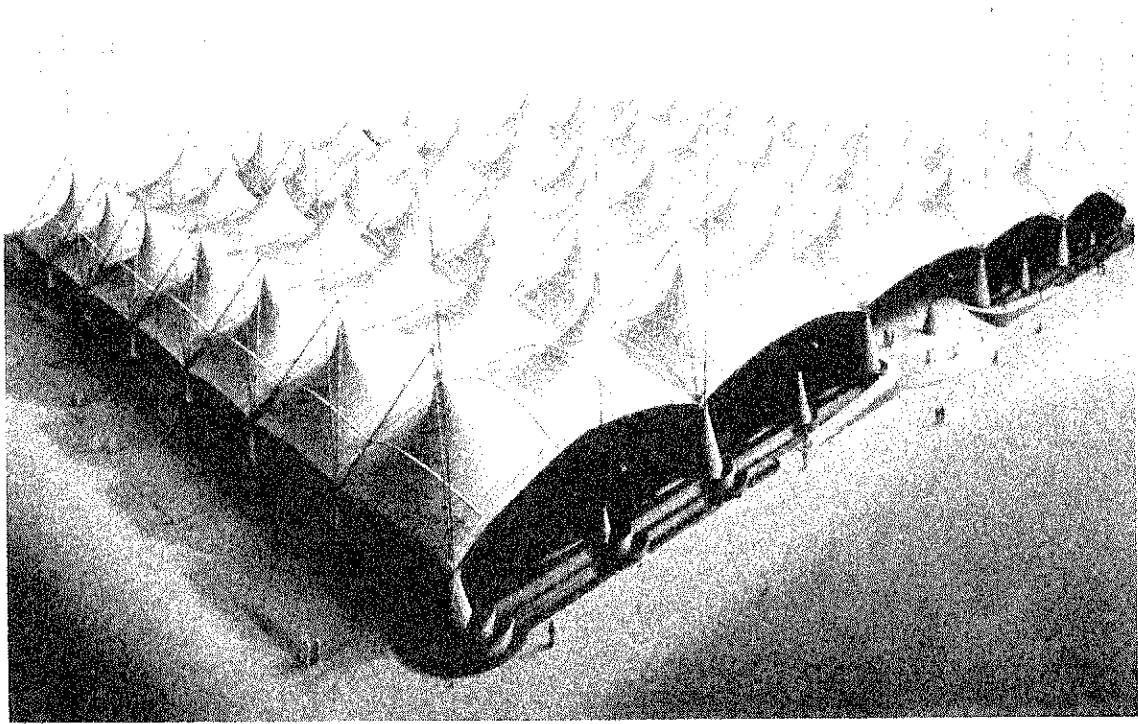
Pabellón polideportivo "El Congost". Granollers. (Alonso, Pagès, Reyes y Sastre, Arquitectos).



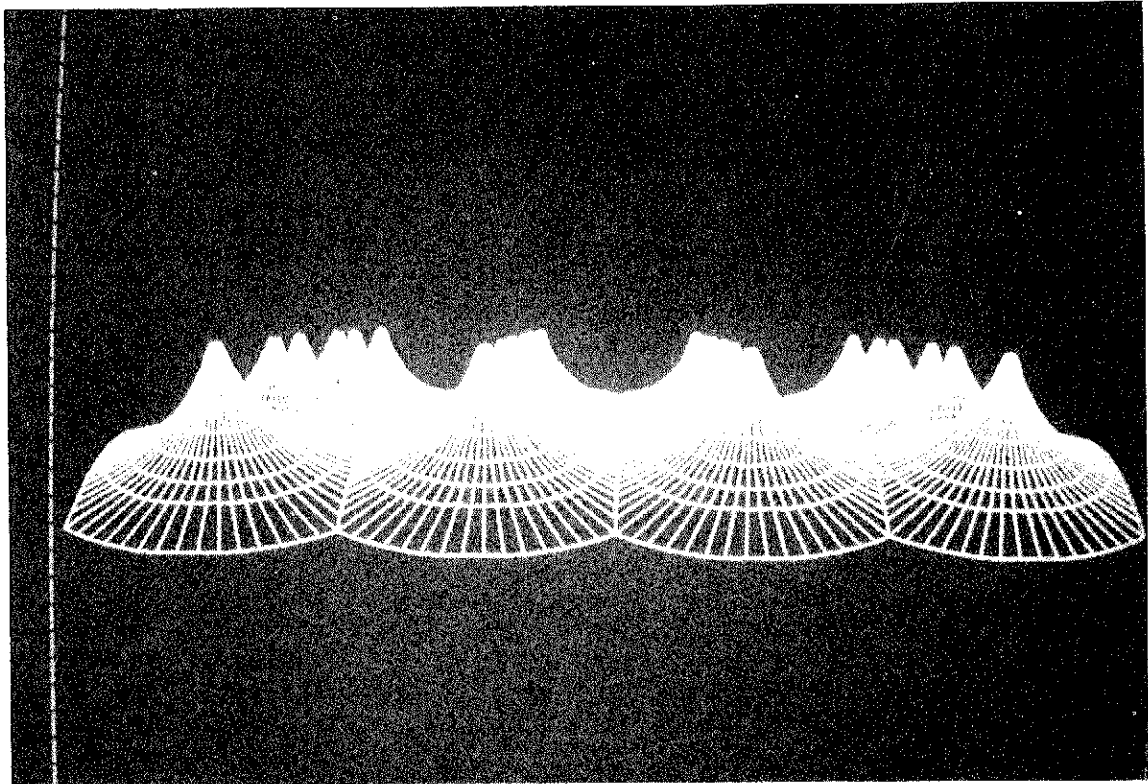
estructuras a tracción, con pequeños espesores y por ello muy ligeras, pueden alcanzar una gran estabilidad de forma.

En ese sentido, por lo visto hasta aquí resulta ya patente que prácticamente *todas estas estructu-*

*ras son pretensadas*, en relación a su etapa más genuina de servicio o de uso (como muestra de otras etapas, recuérdese por ejemplo el caso de las presas que, dejando de actuar como tales, se desinflan en caso de avenida), ya que antes de entrar en servicio



"El Palenque", Expo 92. Sevilla. (J.M. Prada Poole, Arquitecto).



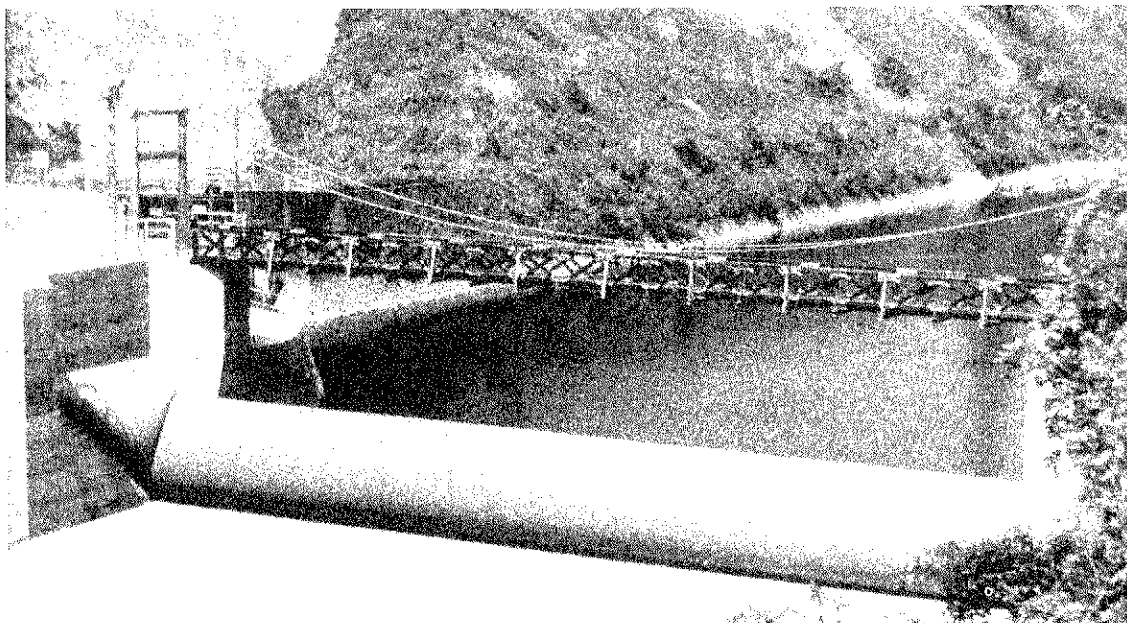


han de traccionarse, mediante una operación que toma diversas formas según los tipos, lo suficiente para, sobre todo, adquirir una adecuada rigidez.

Por otro lado, resulta bastante claro que las mismas se adaptan muy bien a las cargas repartidas pero no a las concentradas (a no ser que éstas sean fi-

jas y la estructura se proyecte para ello con discontinuidades en su geometría).

Aunque hasta ahora, para fijar ideas, nos hemos situado implícitamente en el ámbito estático, en muchas de estas estructuras las acciones dinámicas (debidas al viento, al oleaje o a otras causas) son



Presas inflables tipo Sumigate. Japón (arriba) y Tailandia (abajo). (Sumitomo Electric Industries, Ltd.).



muy importantes, e incluso determinantes, para su proyecto.

Anticipando ya cuestiones referentes al material, a estas alturas es obvio que fundamentalmente interesa uno de máxima resistencia a tracción; pero también es muy favorable que tenga un alto módulo de elasticidad a tracción y, si su propio peso influye en los esfuerzos existentes, que sea lo más ligero posible (en sentido relativo: peso específico/resistencia). Otra propiedad destacable, relacionada con la rigidez de la estructura, es la deformabilidad diferida o fluencia del material, que, al igual que la instantánea, interesa que sea reducida: cuanto mayor sea menores serán tanto la estabilidad de forma como (puesto que, para las cargas permanentes, la deformada crece y las tracciones van disminuyendo con el tiempo) la rigidez.

Por tanto, se trata de emplear auténticos "tejidos estructurales" (en una acepción común y todavía no técnica del término, puesto que así se denomina más tarde a una parte de los materiales que se emplean) que sean sobre todo resistentes, pero también poco deformables y ligeros. Tales "tejidos" pueden ser continuos o formados por una malla sobre la que se da continuidad después mediante otros elementos; el optar por uno u otro tipo depende de la función que haya de cumplirse (como ya se vio antes) y también de las facilidades o dificultades de fabricar y de colocar el tejido continuo (que ha de ser cortado y "cosido" la mayoría de las veces).

Examinados ya, con mayor o menor detalle, aspectos conceptuales importantes del análisis estructural y del proyecto, no se entrará en los ligados directamente a los métodos de cálculo, que resultan laterales respecto al objeto de esta presentación.

Hablemos un poco de su *construcción*. En líneas generales, y sin entrar en la fabricación del material (o materiales), existen las siguientes fases:

Elaboración de las piezas para adaptarse a la forma prevista.

—Unión de las mismas mediante juntas.

—Transporte.

—Despliegue y colocación en su lugar.

—Elevación o fijación en el terreno (o en el fondo del agua).

—Pretensado (mediante diferentes dispositivos tráctiles o de tesado, presión interna de un fluido, etc.).

—Anclaje (u otras operaciones para mantener el pretensado).

Pueden darse, por descontado, variaciones respecto a este esquema general.

Enfocando el asunto hacia su incidencia en los materiales, una cuestión muy importante es la de

las *juntas* que es preciso disponer para conseguir la forma superficial prevista (superficies no desarrollables) y, en todo caso, cuando alguna de las dimensiones de la estructura es grande (por ejemplo, debido a su longitud, en las presas hinchables). Ello tiene fuertes implicaciones en el proyecto (en particular, cuál es el despiece óptimo de la estructura), pero también se indica en función de la aptitud que el material utilizado debe poseer para ser cortado, así como para ser empalmado (con una u otra técnica) y, por extensión, fijado o anclado.

## MATERIALES

Dada la limitación de extensión, y puesto que nos estamos centrando en la parte estructural de estas construcciones, nos referiremos en exclusiva a los materiales propiamente estructurales. En este sentido, no trataremos de los materiales que dan continuidad a las estructuras de tipo malla.

### Propiedades requeridas para los materiales

Al tratar de los factores estructurales primarios que justifican su empleo, se ha hecho ya mención de algunas propiedades que interesa tengan los materiales que conforman estas estructuras:

Alta resistencia a tracción, sobre todo, por razones de economía de material y ligereza de la estructura, así como de mejora de la rigidez (para una misma cantidad o espesor del material); además, es importante que la rotura no sea de tipo frágil, lo que si para este esfuerzo no siempre es fácil de conseguir en un cierto material, puede mejorarse por su disposición en la estructura.

—Alto módulo de elasticidad  $E$  a tracción y baja fluencia, en razón de la obtención de una mayor rigidez y estabilidad de forma.

—Bajo peso específico o, más propiamente, baja relación *peso/resistencia*, al objeto de reducir el peso propio de la estructura, siempre que el mismo influya en las tracciones de ésta.

En razón de la importancia que tengan las acciones dinámicas, habrá de extenderse a dicho ámbito las propiedades mecánicas requeridas: *resistencia y módulo dinámicos* a tracción altos. Asimismo, y en la medida de las oscilaciones tensionales que se produzcan a lo largo de la vida de servicio de la estructura, puede ser necesaria una adecuada *resistencia a fatiga*.

Por otra parte, se han de limitar las pérdidas de resistencia a tracción que, en mayor o menor medida, se producen en muchos materiales para altas temperaturas (al menos en el rango de servicio, si no más allá) y para carga mantenida (lo que en otros materiales estructurales se conoce como "cansancio").

Otras propiedades generales de los materiales, ligadas ya más directamente a cada función o uso concreto, son:

—Durabilidad (esto es, estabilidad/resistencia química), en relación con su medio ambiente (atmósfera con presencia de ozono, medio ácido u otros agentes químicos perniciosos; radiaciones solares; agua fluvial contaminada, agua del mar, etc.) o con su uso (características concretas del fluido contenido en los depósitos, etc.).

—Estanquidad a líquidos (depósitos, presas infladas con agua, etc.) o a gases (cubiertas sostenidas por aire, estructuras inflables, etc.).

—Aislamiento térmico (cubiertas de pabellones, talleres, ciertos almacenes, etc.).

—Aislamiento acústico (cubiertas de pabellones, talleres, etc.).

—Transparencia (cubiertas en general, recintos habitables sumergidos a poca profundidad, etc.), según las necesidades de iluminación.

—Color (cubiertas, etc.), en función sobre todo de la composición arquitectónica de la obra y de su inserción en el paisaje; etc.

No hay que olvidar, en la medida de la mayor o menor disposición de juntas, la necesaria aptitud del material para ser cortado y empalmado. Ha de elegirse un sistema de empalme acorde con el material: cosido, pegado (con otro material adecuado a su vez al primero) o soldado (también con la técnica más idónea para el mismo); otro tanto puede decirse en lo que atañe a su fijación o su anclaje.

Además, existen otras propiedades específicas de cada material, según su composición química, modo de fabricación e incluso su disposición en la estructura; por ejemplo,

—la resistencia a la exfoliación (o defoliación), en el caso de que esté dispuesto en varias capas unidas;

—la resistencia al desgarro, en el caso de los tejidos;

—la resistencia al desgaste por abrasión;

—la resistencia al fuego; etc.

Como en muchas aplicaciones concretas resulta muy difícil que un mismo material reúna adecuadamente todas las propiedades requeridas, es frecuente asignar algunas de ellas a otros que se disponen superficialmente como revestimientos.

### **Materiales que se emplean**

Nos referiremos principalmente a los materiales que por sí mismos constituyen ya un continuo estructural, esto es, aquéllos que se presentan en forma de membrana; los propios de las mallas vienen

a ser, en definitiva, los mismos que se usan en los ya citados elementos de tipo cordón o cable: acero, fibra de vidrio, fibra de poliéster, fibra de aramida (*Kevlar*), etc.

Tales materiales son básicamente:

—Los tejidos estructurales.

—Los materiales compuestos.

Un *tejido estructural* es un entramado continuo de fibras (sintéticas) de alta resistencia.

Las que más se utilizan son las de:

—nylon,

—poliéster,

—poliamida,

—polivinilo,

—polipropileno,

—vidrio,

que, aparte de su buen comportamiento mecánico (alta resistencia a tracción, como ya se ha indicado, aunque el módulo de elasticidad es más variable), en algunos casos poseen buena durabilidad (polipropileno, vidrio, etc.), resistencia al fuego (fibra de vidrio) y otras propiedades interesantes. Se alcanzan resistencias del orden de 3.000 MPa (fibra de vidrio), mientras que el módulo E oscila bastante en torno a un valor intermedio de unos 40.000 MPa.

Estos tejidos tienen cierta similitud, aunque con distintos requisitos, con algunos de los llamados materiales geotextiles.

Normalmente, se vienen empleando con un revestimiento plastificado (de cloruro de polivinilo, etc.) que proporcionan o mejoran su impermeabilidad, su durabilidad, su resistencia al fuego o al desgaste por abrasión y otras propiedades, de carácter más bien superficial, que deban cumplir.

Un *material compuesto* consiste en un material (matriz) que da la continuidad y las propiedades ligadas a ella (estanquidad, aislamiento, durabilidad, etc.), reforzado por otro material (en forma de fibras) que aporta sobre todo, o mejora, las propiedades mecánicas requeridas (resistencia, módulo de elasticidad E, fluencia, etc.).

Los materiales compuestos propios de estas estructuras se emplean en forma de una lámina o de varias láminas pegadas, con una distribución bidimensional de las fibras en su interior. Son fundamentalmente polímeros (artificiales, esto es, sintéticos) reforzados.

Una cuestión importante es la adecuación entre el tipo de matriz y de fibra, tanto por facilidad de fabricación del material como por su comportamiento (en este sentido, por ejemplo, es conveniente una buena adherencia entre ambas).

Las matrices más usuales son:

—Policloropreno (*Neopreno*) → Buenas propiedades mecánicas y bajo coste.



Poliétileno clorosulfonado (*Hypalon*) → Buenas propiedades mecánicas, muy buenas durabilidad y resistencia a la abrasión.

—Poliuretano → Muy buenas propiedades mecánicas y resistencia a la abrasión y coste mediano.

—Fluorelastómeros (*Viton*) → Buenas propiedades mecánicas, buen comportamiento a altas temperaturas y alto coste.

—Resinas fluorocarbonadas (*Teflon*) → Buenas durabilidad y resistencia a la abrasión.

—Vinilo → Buenas propiedades mecánicas y bajo coste.

Las fibras de estos materiales compuestos suelen ser las mismas que las ya citadas antes para los tejidos estructurales.

Los espesores de los tejidos estructurales son, normalmente, muy pequeños (para dar una idea, un rango usual puede ser de 0,1 a 2 mm), alcanzando resistencias estáticas a tracción que vienen a oscilar entre 30 y 1.800 N/cm (la resistencia dinámica suele ser algo mayor que la estática); el peso unitario puede variar entre 1 y 20 Pa (esto es, entre 100 gramos y 2 kilogramos por m<sup>2</sup>).

En el caso de los materiales compuestos, los espesores son mayores puesto que la matriz contiene en su interior las fibras, ocurriendo lo mismo con su peso unitario; sus propiedades mecánicas dependen fundamentalmente, por supuesto, del tipo de fibra y de su concentración en el seno de la matriz.

No podemos detenernos a examinar los distintos procesos de fabricación de estos materiales ni tampoco los diversos ensayos para comprobar sus propiedades, para cuya definición existen recomendaciones y normas, al salirse ya todo ello del marco aquí propuesto.

## CONCLUSION

Se ha realizado una revisión general de las estructuras a tracción y sus materiales, incidiendo especialmente en las bidimensionales, con un enfoque hacia las propiedades de aquéllos, después de justificar su empleo en el marco de las tipologías que pueden desempeñar las mismas funciones. Como ya se ha venido indicando en algunos lugares, muchos puntos interesantes han tenido que obviarse o ser expuestos de forma muy esquemática, en beneficio de otros más básicos o conceptuales; así, numerosos aspectos relativos al proyecto, a la construcción o al cálculo. Ni tampoco ha sido posible hacer referencia a asuntos tales como los sistemas de fijación o de anclaje, los sistemas de inflado y otros dispositivos.

Del análisis que se acaba de desarrollar, se extrae una primera y fundamental conclusión: al igual que lo que viene a ocurrir en gran parte de las

tecnologías avanzadas, sean o no estructurales, *el desarrollo de las estructuras a tracción se encuentra totalmente ligado a la mejora de sus materiales*. Y ello no se refiere sólo a los avances en los tipos concretos de obras hoy en uso sino, lo que es quizá más importante, a las nuevas funciones que estas estructuras puedan asumir en el futuro y que actualmente no son viables (aún más, es seguro que algunas ni siquiera se conciben todavía, al estar nuestras mentes condicionadas y limitadas por la propia realidad presente).

Es previsible que todos los *usos actuales* se desarrollen cualitativa y cuantitativamente de forma gradual, sobre todo en función de la experiencia adquirida, con mejoras en su diseño, sus dispositivos complementarios y las propiedades no mecánicas de sus materiales; mientras que tal vez la calidad mecánica y la adecuación estructural de los mismos evolucionen más en función de la convergencia y la potencia de la estructura que de otros factores. Así, a modo de muestra y por citar algunas aplicaciones bastante recientes, es muy probable el desarrollo generalizado de potentes elevadores para grandes pesos, por efecto neumático, como elementos auxiliares para construcción y otras actividades; e incluso el de elementos estructurales más o menos provisionales que, trabajando por presión interior confinada y alcanzando suficiente rigidez, sirvan para la transmisión de fuertes compresiones.

Pero el mayor reto al que se enfrentan estas estructuras se encuentra en las *nuevas aplicaciones*, para las que sin duda el requisito previo más general será una muy alta calidad mecánica de los materiales. El límite de ello probablemente alcanza casi el de la imaginación: teniendo que ser algo concretos, cabe pensar que, pasando por su aplicación en la construcción naval (nos referimos a buques y no, por cierto, a elementos estáticos ni a pequeñas embarcaciones), en la civil (y lo que sigue es una idea muy personal, bastante utópica desde la realidad de hoy) no se esté muy lejos de su empleo en pasarelas y es más, algún día y por extrapolación, incluso en puentes (especialmente, de grandes luces), con una tipología de membrana (distinta, por cierto, a la apuntada por Frei Otto) a tracción.

En definitiva, ante semejante perspectiva, habría que intentar conseguir materiales que, manteniendo o mejorando sus otras propiedades, según los casos, tuvieran excelentes propiedades mecánicas: altísima resistencia y alto módulo de elasticidad a tracción (aunque es sabido que, estructuralmente, se consigue mayor rigidez aumentando las tracciones, ello tiene siempre un límite), tanto estáticos como dinámicos, de forma que al mismo tiempo presenten una rotura de tipo dúctil (progresiva, sin desgarro brusco), lo que tal vez sea factible conseguir en un plazo no muy largo. A tales efectos, el auténtico talón de Aquiles de estas estructuras parece ser la resistencia al punzonamiento.

to y al corte (especialmente la dinámica por impacto) en situación de servicio, esto es, traccionadas.

Si el gran futuro de estas estructuras está de todas formas asegurado sobre bases actuales firmes, su realidad presente se encuentra en una fase tal que permite ya abrirse a la utopía e incluso, como cuna de ideas y estímulos previos a toda práctica humana, la exige.

## BIBLIOGRAFIA BASICA

1. OTTO, FREI.  
*Cubiertas colgantes.*  
Labor. Barcelona, 1958.
2. OTTO, FREI.  
*Tensile Structures* (2 vols.).  
The M.I.T. Press. Massachusetts Institute of Technology.  
Cambridge, 1967, 1969.
3. OTTO, FREI ET AL.  
*IL5 Wandelbare Dächer/Convertible Roofs.*  
Institut für leichte Flächentragwerke. Universität Stuttgart, 1972.
4. DENT, ROGER N.  
*Arquitectura neumática.*  
Blume. Barcelona, 1975.
5. HERZOG, THOMAS.  
*Construcciones neumáticas. Manual de arquitectura hinchable.*  
Gustavo Gili. Barcelona, 1977.
6. A.S.C.E.  
*Air-Supported Structures.*  
Special Publication.  
American Society of Civil Engineers. New York, 1979.
7. DE CUSA, JUAN.  
*Aplicaciones del plástico en la construcción.*  
Ediciones CEAC. Barcelona, 1979.
8. DREW, PHILIP.  
*Tensile Architecture.*  
Granada Publishing Limited. London, 1979.
9. I.A.S.S. WORKING GROUP Nr. 7  
(Pneumatic Structures).  
*Recommendations for Air-Supported Structures.*  
International Association for Shell and Spatial Structures.  
Madrid, 1985.
10. SUMITOMO ELECTRIC INDUSTRIES, LTD.

*Descripción técnica de la Sumigate. Presas inflables de caucho.*

Fundación Nuevas Energías. Madrid, 1985.

11. LEONARD, JOHN W.

*Tension Structures.*

McGraw-Hill Book Company. New York, 1988.

12. LAMBERTON, BRUCE A.

*Fabric Forms for Concrete.*

*Concrete International: Design & Construction.*

Vol. 11 nº 12.

American Concrete Institute. Detroit, 1989.

## RESUMEN

Se presenta una revisión general de las estructuras que, con diversos usos, trabajan a tracción, incidiendo sobre todo en las bidimensionales. Bajo una óptica tipológica se trata de membranas (estructuras continuas) y de mallas espaciales de cables o cordones (estructuras discretas); desde un punto de vista funcional, hoy día son, principalmente, cubiertas para pequeñas o medianas superficies, depósitos de poca capacidad, presas de pequeña altura con forma regulable y elementos flotantes o sumergidos.

Se comienza con un análisis del porqué de estas estructuras, realizando un repaso de las diversas aportaciones (economía de material, ligereza, rigidez, continuidad, facilidad de montaje y desmontaje, adaptabilidad de forma, etc., además de las necesarias resistencia y durabilidad), que las hace adecuadas para tales funciones.

Más tarde, se orienta ya todo hacia los materiales que deben emplearse, insistiendo inicialmente en los aspectos que más condicionan sus propiedades: los funcionales, aprovechándolos para realizar una descripción de las distintas obras, y los estructurales, sin olvidar algunos factores constructivos que también influyen en ellas. Con tales premisas, se pasa después a examinar los materiales que conforman las distintas estructuras a tracción, según los requisitos propios de cada función o uso, así como sus propiedades concretas.

Finalmente, se apunta una prospectiva de la evolución de las estructuras actuales y de la posible aparición de otras nuevas con distintas funciones a las hoy conocidas.

## SUMMARY

The paper offers a general revision on tension structures, used for different purposes, emphasizing on two-dimensional ones. Tipologically, they are membranes (continuous structures) and cable or strand spatial nets (discrete structures); from a functional point of view, they are mainly roofs for covering small and medium surfaces, small capaci-

ty reservoirs, small height dams with regulable shape and floating or submerged elements.

It begins wondering why these structures exist, doing an analysis of their different specific characteristics (material economy, lightness, stiffness, continuity, flexibility of installation, shape adaptability, etc., besides the necessary strength and durability), which make them suitable for such uses.

Later, the work is focused to the materials to be employed in, insisting initially on the topics

more conditioning of their properties: functional, including a description of the different types of constructions involved, structural and even some of constructive ones having influence on them. Departing from this, a revision of materials conforming all these structures, with their specific requirements, is presented and also their particular properties.

Finally, a prospective of their evolution from the current situation is pointed out, imagining the appearance of new structures covering uses others than the well known ones till now.

\* \* \*

## Feria Iberoamericana Sevilla "Construcción'90"

En reunión celebrada por el Comité Asesor "CONSTRUCCION' 90", el pasado día 9 de Mayo, entre otros, se tomó el acuerdo de establecer como fecha de celebración del Certamen la del, 7 al 11 de Noviembre, ambos inclusive, con finalización a las 14 horas del día último citado.

El Certamen, de periodicidad anual, prevee una ocupación de 35.000 m<sup>2</sup>, lo que significa la máxima disponibilidad del Recinto Ferial. En la muestra estarán representados más de 2.065 expositores directos e indirectos.

CONSTRUCCION' 90, incluirá una importante oferta de elevada calidad y presentará las últimas novedades en los diversos sectores de la Construcción, entre ellos los que a continuación se relacionan:

Maquinaria ligera y equipos de protección y seguridad en obras.

- Maquinaria de obras públicas.
- Elementos de elevación y transportes.

-Elementos para estructuras, forjados y cubiertas.

- Prefabricación y construcción industrializada.
- Aparatos de medida y precisión.
- Informática aplicada a la construcción y servicios.

En consecuencia, los profesionales del Sector tendrán la oportunidad de contemplar, todo el abanico de nuevas tecnologías, equipos y productos que en breve estarán en el mercado.

Durante el transcurso del Certamen, se celebrarán unas Jornadas Técnicas que este año abordarán temas de máxima importancia para el Sector.

Los interesados en recibir mayor información, deberán dirigirse a:

Palacio de Exposiciones y Congresos.  
(Sevilla-Este).

Apartado de Correos 4016.

Telefax (95) 467 53 50 - Télex 72514 F.M.I.S.

Teléfono (95) 467 51 40 - 41080 Sevilla.

\* \* \*

## II Premio Internacional Puente de Alcántara

### BASES DEL CONCURSO

La Fundación San Benito de Alcántara convoca el Premio Internacional Puente de Alcántara, que se otorgará de acuerdo con las siguientes bases:

1.º A este Premio podrán optar las Obras Públicas (construcción o conjunto de construcciones de Ingeniería Civil) finalizadas entre el 1 de enero de

1989 y el 31 de julio de 1990 en España, Portugal y países Iberoamericanos.

2.º El Puente de Alcántara, símbolo universal de la importancia cultural y tecnológica de las Obras Públicas de todos los tiempos, se considerará paradigma representativo de las características ideales de las obras a las que va dirigido este Premio que lleva su nombre. El Jurado estimará, por

tanto, de forma fundamental, la importancia cultural, tecnológica, estética, funcional y social de las obras que se presenten al concurso, así como la calidad técnica y estética de los proyectos y la perfección alcanzada en la ejecución de los mismos.

3.º El Premio se otorgará conjuntamente a los promotores, proyectistas y constructores de la Obra Pública elegida. Estos tres destinatarios del Premio recibirán una idéntica distinción.

4.º Podrán tomar la iniciativa para concursar a este Premio los promotores, proyectistas o constructores de las obras Públicas, así como las Instituciones relacionadas con la Ingeniería Civil, en España, Portugal y países Iberoamericanos.

5.º Los candidatos al Premio deberán enviar sus propuestas a la sede de la Fundación San Benito de Alcántara en Madrid, calle Serrano Nº 27, no más tarde del 31 de julio de 1990.

6.º Se debe enviar la siguiente documentación:

- Motivación de la propuesta.
- Ficha en la que consten todos los datos de la obra y autores (promotor, proyectista y constructor).
- Material suficiente (planos, fotografías, etc.) para la más completa valoración de la obra por parte del Jurado.

Pancles de 1,00 x 0,70 mts recogiendo las características de la Obra, que servirán para facilitar la exposición de las Propuestas presentadas al Premio.

7.º El Jurado estará compuesto por representantes eminentes del mundo de la cultura y de la

técnica de España, Portugal y de los países Iberoamericanos.

8.º El Jurado actuará colegiadamente y tomará sus acuerdos por mayoría de votos. En caso de empate en la segunda vuelta, el Presidente lo dirimirá mediante su voto de calidad.

9.º Corresponde al Jurado la interpretación de las presentes bases y la resolución de cuantas cuestiones puedan presentarse en la adjudicación del Premio.

10.º Las decisiones del Jurado serán inapelables.

11.º A todas las obras presentadas al Concurso se les otorgará un Diploma, y a la que resulte ganadora, un Premio consistente en una escultura de Miguel Berrocal.

De acuerdo con lo establecido en el punto tercero de estas Bases, el Premio será idéntico para los promotores proyectistas y constructores de la obra elegida. El Premio no podrá declararse desierto, ni concederse ex aequo.

12.º La obra ganadora podrá exhibir una placa, cuyo diseño normalizado será propuesto por la Fundación, en la que se mencionará el Premio y el año de concesión.

13.º Según las características de la obra premiada, la Fundación estimará la conveniencia de realizar una publicación sobre dicha obra.

14.º El Premio se entregará en un acto solemne, dentro del año 1990, en el monasterio-convento de San Benito, en la villa de Alcántara (Cáceres-España), sede de la Fundación. El lugar y la fecha de la entrega del Premio podrán ser cambiados si alguna circunstancia especial lo aconsejara.

# MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

- FOMENTO DE OBRAS Y CONSTRUCCIONES, S.A. (FOCSA).**—Paseo de la Castellana, 118-4.ª planta. 28046 Madrid.
- FREYSSINET, S.A.**—General Perón, 24. 28020 Madrid.
- GRACE, S.A.**—Apartado 523. 08080 Barcelona.
- HASA. Servicios Generales.**—General Perón, 40-C. 28020 Madrid.
- HIDROELECTRICA DE CATALUÑA, S.A.**—Almogávares, 11-17. 08018 Barcelona.
- HORMIGONES GERONA, S.A.**—Lorenzana, 45. 17002 Gerona.
- HORMIGONES PROYECTADOS, S.A.**—Avda. Príncipe de Asturias, 63. 08012 Barcelona.
- HUARTE, S.A.—HASA.—Oficina Técnica.**—Avda. General Perón, 40-C-4.ª. 28020 Madrid.
- IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.**—Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERDUERO, S.A. Servicio Formación.**—Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.
- IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).**—Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.
- IBERING, ESTUDIOS Y PROYECTOS, S.A.**—Plaza Gala Placidia, 5-7. 08006 Barcelona.
- INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.**—Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.
- INFORMES Y PROYECTOS, S.A. (INYPISA).**—General Díaz Porlier, 49-51. 28001 Madrid.
- INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).**—Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.
- INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES (IECA).**—Velázquez, 11-3.ª-izda. 28001 Madrid.
- INSTITUTO TECNICO DE LA CONSTRUCCION, S.A.**—Avda. de Elche, 164. 03008 Alicante.
- INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).**—Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.
- INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA). Biblioteca.**—Orense, 70. 28020 Madrid.
- JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.**—Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.
- LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES.**—Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.
- MECANOGUMBA, S.A.**—Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).
- PACADAR, S.A.**—Hermosilla, 57. 28001 Madrid.
- PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.**—Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).
- SENER, TECNICA INDUSTRIAL Y NAVAL, S.A.**—Avda. del Triunfo, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).
- SIKA, S.A.**—Carretera Madrid-Irún, Km. 14,500. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).
- SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ESTUDIOS PARA LA COMUNICACION FIJA A TRAVES DEL ESTRECHO DE GIBRALTAR, S.A. (SECEGSA).**—Estébanez Calderón, 3-1.ª-A. 28020 Madrid.
- TECNICAS DEL PRETENSADO, S.A. (TECPRESA).**—Príncipe de Vergara, 135. 28006 Madrid.
- TREFILERIAS DEL NORTE, S.A.**—Carretera de Zorroza a Castrejana, 150. Apartado 590. 48080 Bilbao.
- TREFILERIAS QUIJANO, S.A.**—Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).
- TRENZAS Y CABLES DE ACERO, S.A. (TYCSA).**—Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.



**asociación técnica  
española del prefensado**