HORMIGÓN y acero

Nº 191



ASOCIACIÓN TÉCNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA CONTRUCCIÓN EDUARDO TORROJA

COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de **"Miembro Protector"**, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de **"Miembros Protectores"** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.—Raimundo Fernández Villaverde, 43. 28003 Madrid.

ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).—Orense, 10. 28020 Madrid.

ARPO EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.—Avda. de la Innovación, s/n. Edificio Espacio, planta 3.ª, mód. 4-7. 41020 Sevilla.

AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.—Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.

CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.L.—Grijalba, 9. 28006 Madrid.

CEMENTOS MOLINS, S.A.—C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Viçenc dels Horts (Barcelona).

CENTRO DE ESTUDIOS Y EXPERIMENTACION DE OBRAS PUBLICAS (CEDEX). Gabinete de Información y Documentación.—Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.

COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.—Almagro, 42. 28010 Madrid.

COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.—Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.

COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS. Centro de Documentación "Josep Renat".–Bon Pastor, 5. 08021 Barcelona.

COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.–Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.

COL. LEGI OFICIAL D´ARQUITECTES DE CATALUNYA.–Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.

COMYLSA, EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.–Lagasca, 88. 28001 Madrid.

CONSULTECO, S.L.–Pintor Lorenzo Casanova, 26. 03003 Alicante.

C.T.T. STRONGNOLD, S.A.—Aribau, 185. 08021 Barcelona.

CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.—Ayala, 42. 28001 Madrid.

DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.—Orense, 81. 28020 Madrid.

DYWIDAG - SYSTEMS INTERNATIONAL, S.A.—Azor, 25-27. Polígono Industrial Matagallegos. 28940 Fuenlabrada (Madrid).

EMESA-TREFILERIA, S.A.—Apartado 451. 15080 La Coruña.

EMPRESA AUXILIAR DE LA INDUSTRIA, S.A. (AUXINI).—Padilla, 46. 28006 Madrid.

ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.—Cardenal Spínola, s/n. Edificio E. 28016 Madrid.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.—Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

ESTEYCO, S.A.—Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.

ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A. (EPTISA).—Arapiles, 14. 28015 Madrid.

EUROCONSULT, S.A.—Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).

FERROVIAL, S.A.—Príncipe de Vergara, 135. 28006 Madrid.

(Continúa en el int. de contraportada)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION EDUARDO TORROJA (C.S.I.C.)

COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

COMITE DE REDACCION

Director:
PIÑEIRO, Rafael

Vocales:
BARREDO, Carlos
JODAR, Juan
JULIA, Manuel
LLOMBART, José Antonio
ROMERO, Rafael
SANCHEZ-GALVEZ, Vicente

Censores:
ALCALA, Juan Luis
CUVILLO, Ramón del
ELICES, Manuel
GONZALEZ VALLE, Enrique
MANTEROLA, Javier
MORAN, Francisco
MORENO TORRES, Juan
MURCIA, Juan
POZO VINDEL, Florencio J. del
SIEGRIST, Carlos

HORMIGÓN y acero

n.º 191

1994

CUOTAS ANUALES

	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" menores de 27 años	4.000 ptas.	
Miembros "Personales" (personas naturales)	8.000 ptas.	60 dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas)	20.000 ptas.	125 dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	40.000 ptas.	250 dólares

(Más 15% IVA para España)

La Asociación, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, no se hace responsable del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocine su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - 28080 MADRID - TEL. Y FAX: 766 07 03

Depósito Legal: M-853-1958
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID
ISSN: 0439-5689

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

ESPAÑA

AEPO, S.A.—Estudios y Proyectos.—Madrid.
ALTRESA, S.A.—Aranda de Duero (Burgos).
ASOCIACIO ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.—Barcelona.
ASOCIACION DE INVESTIGACION DE LAS INDUSTRIAS DE LA CONSTRUCCION.—Paterna (Valencia).
CASTRO HERMANOS, S.L.—Mislata (Valencia).
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.—Oviedo.
CENTRO POLITECNICO SUPERIOR DE INGENIEROS.—Area de M.M.C. y T. de Estructuras.—Zaragoza.
CEYD TECNICA, S.A.—Oviedo.
C.I.C., S.A.—Consultor de Ingeniería Civil, S.A.—Barcelona.
CIISA "CONSULTING E INGENIERIA INT., S.A.".—La Coruña.
CINSA-EP.—Lasarte-Oria (Guipúzcoa).
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.—Málaga.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.—La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.—Palma de Mallorca.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS.—Demarcación de Valencia.—Valencia.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.–Bilbao.
CONSTRUCCIONES LAIN, S.A.–Madrid.
CONTROLEX.–Alicante.
CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.–Barcelona.
DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTONICAS.–Escuela Técnica Superior de Arquitectura.–Sevilla.
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE LA CONSTRUCCION.–Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica.–Universidad de La Laguna (Tenerife).
DEPARTAMENTO DE MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORIA DE ESTRUCTURAS.–Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica. Madrid.
DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.
DITECO, S.L.—Valencia.
E.E.P., S.A.—Elementos Estructurales Prefabricados, S.A.—Sant Fruitos de Bages (Barcelona).
ENAGA, S.A.—Pozuelo de Alarcón (Madrid).
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA. U.P.C.—Barcelona.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Biblioteca.—La Coruña.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Biblioteca.—San Sebastián.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.—Sevilla.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRONOMOS.—Biblioteca.—Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.—Castro de Elviña (La Coruña).
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.—Granada.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.—Zaragoza.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA. Biblioteca.—León.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Universidad Castilla-La Mancha. Departamento de Mecánica Aplicada.—Albacete.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Barcelona.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Burgos.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.—Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.—Manresa (Barcleona).
EUROESTUDIOS, S.A.—Madrid.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.—Madrid.
FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.—Valencia.
FORJADOS DOL.—Esquivias (Toledo).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A.–Barcelona.
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.–Madrid.
GIJON E HIJOS, S.A.–Motril (Granada).
G.O.C.S.L.–Vigo (Pontevedra).
HORMADISA, S.L.–Valga (Pontevedra).
IDEAM, S.A.–Madrid.
INBADELCA, S.A.–Baracaldo (Vizcaya).
INDAG, S.A.–Madrid.
INGENIERIA DE AUTOPISTAS Y OBRAS CIVILES, S.A.–Madrid.
INGENIERIA FLORS, S.A.—Grao de Castellón.
INGENIEROS Y ARQUITECTOS ASOCIADOS, S.A.—Zaragoza.
INSTITUCIONES COLEGIALES PARA LA CALIDAD EN LA EDIFICACION.—Murcia.
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.—Barcelona.
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.—Madrid.
J. CASTRO MATELO, S.A.—Sigueiro (La Coruña).
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Consejería de Fomento.—Valladolid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Dirección General de Transportes y Carreteras. Servicio de Gestión.—Valladolid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.—Servicio Territorial de Fomento.—Avila.
LABORATORIO GEOCISA. Biblioteca.—Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.—Madrid.
LABORATORIOS DEL SURESTE, S.L.–El Palmar (Murcia).
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).–Castellón de la Plana.
METALURGICA GALAICA, S.A.–Narón (La Coruña).
MINISTERIO DE DEFENSA. DIRECCION DE INFRAESTRUCTURA DEL MANDO SUPERIOR DE APOYO LOGISTICO DEL EJERCITO.–Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS, TRANSPORTES Y MEDIO AMBIENTE. DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS. SERVICIO DE PUENTES Y ESTRUCTURAS.–Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS, TRANSPORTES Y MEDIO AMBIENTE. DIRECCION GENERAL PARA LA VIVIENDA Y ARQUITECTURA. SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA BASICA Y TECNOLOGICA.–Madrid.
MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS, TRANSPORTES Y MEDIO AMBIENTE. SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA TECNICA Y ANALISIS ECONOMICO.–Madrid.
O.C.P. CONSTRUCCIONES, S.A.–Madrid.
POSTENSA, S.A.–BILBAO.
PRAINSA.–Barcelona.
PREFABRICACIONES Y CONTRATAS, S.A.–Madrid.
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).–Zaragoza.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).–León.
PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A. (CUPRE-SAPRE).–Valladolid.
PREFABRICADOS PARA NAVES Y VIVIENDAS, S.A.–Zaragoza.
PREFABRICADOS POUSA, S.A.–Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PREFABRICADOS UNILAND, S.A.–Barcelona.
RUBIERA, S.A. FORJADOS Y CUBIERTAS.–León.
RUBIERA BURGOS, S.A.–Burgos.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.–Barcelona.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.–Burgos.
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.–Gerona.
SESTRA, S.A.L.–Andoain (Guipúzcoa).
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.–Madrid.
SPANDECK CATALANA, S.A.–Barcelona.
TECNICA Y PROYECTOS, S.A.—Madrid.
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.—Madrid.
TERRATEST, S.A.—Madrid.
TEXSA, S.A.—Barcelona.
TIGNUS, S.A.—Valencia.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).—Madrid.
UNIVERSIDAD DE CADIZ.—Algeciras (Cádiz).
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA. Biblioteca Universitaria.—Santander.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

UNIVERSIDAD DE OVIEDO. Biblioteca Universitaria.–Oviedo.
UNIVERSIDAD POLITECNICA. Hemeroteca.–Valencia.
VIGUETAS MUBEMI, S.A.–Torrente (Valencia).
VORSEVI, S.A.–Ingeniería y Control de Calidad.–Sevilla.
V.S. INGENIERIA Y URBANISMO, S.L.–Sevilla.

EXTRANJERO

ABCP/LIBRIS.–EBSCO.–Río de Janeiro (Brasil).
ASSOCIACAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.–Sao Paulo (Brasil).
COLTENSA, S.A.–Santa Fé de Bogotá. D.C. (Colombia).
FACULTAD DE INGENIERIA/UBA.–Estados Unidos de Norteamérica.
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.–Luanda (República Popular de Angola).
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU.–Lima (Perú).
POSTES, S.A.–Lima (Perú).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO. Biblioteca.–Quito (Ecuador).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO. Biblioteca Central.–Valparaíso (Chile).
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO. Biblioteca.–Mayagüez (Puerto Rico).

MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).—La Paz (Bolivia).

* * *

AVISO IMPORTANTE

DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19.002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestando todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

NOTA: Se continúa en este número 191 de "Hormigón y Acero" la publicación de los textos de las Comunicaciones presentadas en la XIVª Asamblea Técnica de la A.T.E.P. celebrada en Málaga, durante los días 8 al 12 del mes de noviembre de 1993.
En este número 191, se incluyen trece de las Comunicaciones presentadas al Tema I, "Investigaciones y Estudios".

EL COMITE DE REDACCION

hormigón y acero n.º 191

índice

Págs.

457-0-198 **Dimensionamiento práctico de pilares prefabricados armados y/o pretensados para edificios industriales y comerciales** **9-17**
Calcul pratique des poteaux préfabriqués en béton armé ou béton précontraint pour bâtiments industriels et commerciaux.
Practical design of prefabricated reinforced or prestressed concrete columns for industrial and commercial buildings.
F. Morán.

457-0-199 **Diseño automático de puentes de hormigón pretensado construidos por voladizos sucesivos** **19-28**
Project assisté par ordinateur des ponts en béton précontraint construits par encorbellements successifs.
Computer aided design of prestressed concrete bridges built by the balanced cantilever method.
A.C. Aparicio Bengoechea; J.R. Casas Rius y G. Ramos Schneider.

457-0-200 **Acción de las cargas concentradas sobre las alas de las vigas en T** **29-41**
Action des charges isolées sur les membrures des poutres en T.
Single loads action on concrete T-beams flanges.
A. Páez y J. Díaz del Valle.

457-0-201 **Análisis de estructuras con cables y telas** **43-52**
Analyse des structures composées par cables et toiles.
Analysis of structures composed of cables and skins.
A. Recuero y J.P. Gutiérrez.

457-0-202 **Depósitos cilíndricos de hormigón pretensado: una nueva visión de cálculo** **53-66**
Réservoirs cylindriques en béton précontraint: une nouvelle conception du calcul.
Circular prestressed concrete tanks: a new approach to the analysis.
J.M. Vilardell; A. Aguado y E. Mirambell.

457-0-203 **Un ejemplo de evaluación de la carga última de una estructura** **67-72**
Un exemple de l'évaluation de la charge de rupture d'une structure.
An example of ultimate load evaluation of a structure.
A. Samartín y S. Pérez-Fadón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

457-2-41 **Un modelo general para el análisis no lineal de estructuras de hormigón y acero construidas evolutivamente** 73-90
Un modèle general pour l'analyse non-linéaire des structures construites de façon séquentielle renforcées, précontraintes et composées.
A general model for the nonlinear analysis of sequentially constructed reinforced, prestressed and composite concrete structures.
P. Cruz; A. Marí y P. Roca.

457-5-28 **Rigidez dinámica de estribos de puentes** 91-125
Rigidité dynamique des culeés des ponts.
Dynamic stiffness of bridge abutments.
A. Martínez Cutillas y E. Alarcón Alvarez.

457-8-178 **Consideraciones respecto a la modelización dinámica de los puentes** 127-136
Quelques remarques sur la modélisation dynamique des ponts.
Some thoughts on the dynamic modeling of bridges.
J.R. Casas Rius.

685-3-1 **Caracterización mecánica de un hormigón de alta resistencia** 137-148
Caractéristiques mécaniques d'un béton à haute résistance.
Mechanical characterization of a high strength concrete.
A. Aguado; R. Gettu; M.O.F. Oliveira y J.M. López Sáiz.

685-3-2 **El módulo de elasticidad del hormigón de alta resistencia** 149-159
Le module de déformation du béton à haute résistance.
The modulus of elasticity of high strength concrete.
M.P. Alaejos Gutiérrez y M. Fernández Cánovas.

685-3-3 **La influencia del diagrama tensión deformación en el cálculo a flexión de secciones realizadas con hormigones de altas resistencias** 161-166
L'influence du diagramme tension-déformation sur le calcul à la flexion des sections réalisées en béton à haute performance.
The influence of the tensile deformation diagram in the calculation of bending of high strength concrete sections.
E. González Valle y J.M. Izquierdo Bernaldo de Quirós.

EN PORTADA: Reproducción del Cartel anunciador de la XIVª Asamblea Técnica Nacional de la A.T.E.P., que obtuvo el primer premio en el Concurso al efecto celebrado.

AUTOR: *José F. Berlanga Ponce.*

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Normas que deben cumplir los artículos que se envíen para su publicación en "Hormigón y Acero"

1. CONDICIONES GENERALES

Los originales de los artículos que se desee publicar en "Hormigón y Acero", se enviarán a la Secretaría de la ATEP. Deberán cumplir rigurosamente las normas que a continuación se especifican. En caso contrario, serán devueltos a sus Autores para su oportuna rectificación.

Los que cumplan los requisitos exigidos pasarán al Comité de Redacción de la Revista el cual, previo informe y evaluación de su calidad por el correspondiente Cuerpo de Censores, decidirá si procede o no su publicación, sugiriendo eventualmente al Autor los cambios que, en su opinión, deben efectuarse para su final publicación en "Hormigón y Acero". Toda correspondencia en este sentido se mantendrá directamente con el Autor o primero de los Autores que figuren en el Artículo.

Los originales que por cualquier causa no fueran aceptados serán devueltos al Autor.

2. PRESENTACION DE ORIGINALES

Los originales se presentarán mecanografiados a doble espacio, por una sola cara, en hojas tamaño UNE A4. De cada artículo se enviará original y dos copias.

2.1. Título

El título, *en español, francés e inglés* deberá ser breve y explícito, reflejando claramente el contenido del artículo. A continuación se hará constar nombre y apellidos del Autor o Autores, titulación profesional y, si procede, Centro o Empresa en el que desarrolla sus actividades.

2.2. Resumen

Todo artículo deberá ir acompañado de un resumen, *en español e inglés,* de extensión no inferior a cien palabras (unas ocho líneas mecanografiadas) ni superior a ciento cincuenta palabras (doce líneas).

2.3. Gráficos y figuras

Los gráficos y figuras deberán ir numerados correlativamente en el orden en que se citen en el texto, en el cual deberá indicarse el lugar adecuado de su colocación.

Se presentarán delineados en tinta china negra sobre papel vegetal o sobre papel blanco, o en reproducibles de muy buena calidad. Todas las figuras llevarán su correspondiente pie explicativo.

Los rótulos, símbolos y leyendas deberán ser tales que, tras su reducción a la anchura de una o dos columnas de la Revista (setenta y dos o ciento cincuenta mm, respectivamente) queden letras de tamaño no inferior a 1,5 mm y sean, en todo caso, fácilmente legibles.

2.4. Fotografías

Se procurará incluir sólo las que, teniendo en cuenta la reproducción, sean realmente útiles, claras y representativas. Podrán presentarse en copias de papel opaco negro o en color, en negativo, o en diapositivas. Se tendrán en cuenta las normas sobre tamaño de rótulos y leyendas dadas en el punto 2.3 anterior. Irán

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

numeradas correlativamente y llevarán su correspondiente pie explicativo.

2.5. Tablas y cuadros

Cumplirán las proporciones y dimensiones indicadas para las figuras. Llevarán numeración correlativa, citada en el texto, y un pie con la explicación adecuada y suficiente para su interpretación directa.

2.6. Unidades

Las magnitudes se expresarán, preferiblemente, en unidades del Sistema Internacional (S.I.) según las UNE 5001 y 5002.

2.7. Fórmulas, letras griegas, subíndices y exponentes

En las fórmulas se procurará la máxima calidad de escritura y emplear las formas más reducidas siempre que no entrañen riesgo de incomprensión. Para su identificación se utilizará, cuando sea necesario, un número entre paréntesis a la derecha de la fórmula.

Se cuidará especialmente que todas las letras griegas, subíndices y exponentes resulten perfectamente identificables, procurando evitar los exponentes complicados y letras afectadas simultáneamente de subíndices y exponentes.

Cualquier expresión que, por su complejidad, pueda dar lugar a interpretaciones equivocadas, se presentará manuscrita. Se diferenciarán claramente mayúsculas y minúsculas y aquellos tipos que puedan inducir a error (por ejemplo, la / y el 1; la O y el cero; la K y la k, etc.).

2.8. Referencias bibliográficas

Las referencias bibliográficas citadas en el texto se recogerán al final del mismo dando todos los datos precisos sobre la fuente de publicación, para su localización.

Las citas en el texto se harán mediante números entre paréntesis. En lo posible, se seguirán las normas internacionales utilizadas generalmente en las diversas publicaciones, es decir:

Referencias de artículos publicados en revistas

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del artículo; nombre de la publicación; número del volumen y fascículo; fecha de publicación, y número de la primera y última de las páginas que ocupa el artículo al que se refiere la cita.

Referencias de libros

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del libro; edición; editorial, y lugar y año de publicación.

3. PRUEBAS DE IMPRENTA

De las primeras pruebas de imprenta se enviará una copia al Autor para que, una vez debidamente comprobadas y corregidas, las devuelva en el plazo máximo de quince días, con el fin de evitar el riesgo de que la publicación de su artículo tenga que aplazarse hasta un posterior número de "Hormigón y Acero".

En la corrección de pruebas no se admitirán modificaciones que alteren sustancialmente el texto o la ordenación del artículo original.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Dimensionamiento práctico de pilares prefabricados armados y/o pretensados para edificios industriales y comerciales

Francisco Morán Cabré
Dr. Ing. de Caminos
Instituto Eduardo Torroja, Madrid

1. INTRODUCCION

Los pilares prefabricados utilizados normalmente en la construcción de naves industriales y edificios comerciales son elementos de hormigón en cuyo dimensionamiento el fenómeno del pandeo tiene una especial relevancia. Por una parte, se trata de elementos de esbeltez elevada, debido al afinamiento de secciones permitido por las altas resistencias de los materiales usados e impuesto por la necesidad de competir comercialmente. Esta esbeltez viene aumentada al tratarse de elementos sustentados en ménsula, aunque a veces no funcionen como elementos aislados, sino como grupos de ellos unidos entre sí y por tanto cotraslacionales, lo que puede mejorar su comportamiento frente al pandeo. Por otra parte, estos pilares están sometidos a acciones importantes por las grandes luces y fuertes cargas de las naves y edificios que sustentan. Por último, suele ser preciso considerar la actuación simultánea de momentos en las dos direcciones (pandeo en flexión esviada), lo que complica bastante el tratamiento del problema.

En la práctica habitual del proyecto de estos elementos se emplean con frecuencia métodos poco adecuados. Dicha práctica, en nuestro país, puede esquematizarse como sigue:

- Tratamiento de los pilares como elementos aislados, estimando a priori su longitud de pandeo. Esta longitud debería ser, en principio, el doble de la longitud del pilar (ménsula), aunque la existencia de grupos de pilares cotraslacionales y de cargas importantes que actúan a alturas intermedias (caso de edificios de varias plantas o de puentes grúas) permite conjeturar longitudes de pandeo más favorables. Para estimar estas longitudes se emplean reglas sencillas [1] en función del número de pilares cotraslacionales y de la parte de la carga que actúa a niveles intermedios, reglas que suelen pecar de arbitrarias o poco justificadas y resultan muchas veces inseguras.
- Consideración sucesiva e independiente del pandeo en cada una de las dos direcciones, excusable por el hecho de que la Instrucción Española de Hormigón EH-91 [2] no contempla el tratamiento del pandeo en flexión esviada, que sin embargo reduce de forma importante la capacidad resistente de los elementos ya que, como es sabido, la existencia de cada una de las flexiones ablanda considerablemente la rigidez de la pieza en la dirección de la otra [3].
- Asimilación de los efectos de segundo orden a los de una excentricidad ficticia equivalente, que se suma a la de primer orden. Esta excentricidad adicional se obtiene mediante la fórmula del Art. 43.5.2 de la EH-91, método cuya aplicación al caso de pilares prefabricados no suele estar justificada, ya que sólo es válido para elementos de sección y armaduras constantes, sometidos a un esfuerzo axil constante y a momentos de primer orden variables linealmente, mientras que los pilares prefabricados típicos suelen tener la sección y las armaduras variables (aunque constantes por trozos), y la variación de sus esfuerzos de primer orden es más compleja.

Si bien las dos primeras simplificaciones utilizadas en la práctica quedan, en general, del lado de la inseguridad, la tercera suele ser demasiado conservadora, ya que es sabido que la fórmula de la excentricidad equivalente de la EH-91 es muchas veces excesivamente segura. En conjunto, la práctica habitual del proyecto de pilares siguiendo las líneas descritas conduce a resultados poco homogéneos y que pueden desviarse significativamente de los correspondientes a un análisis más riguro-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

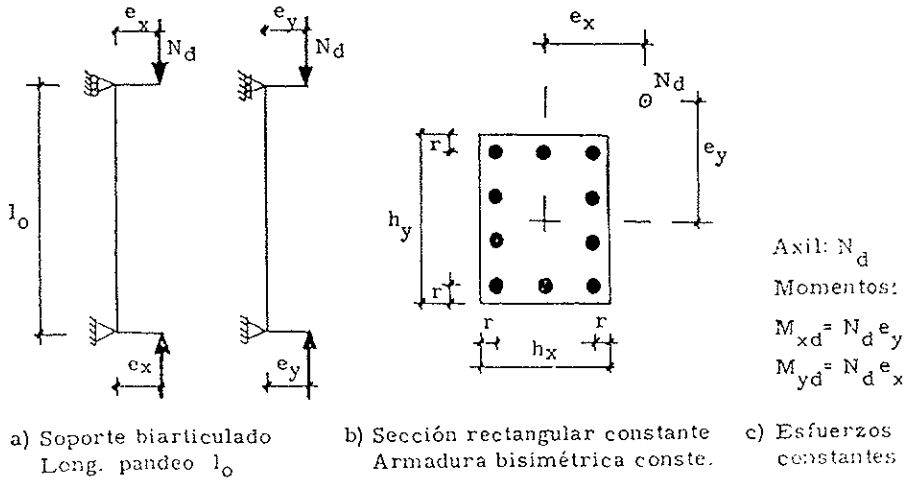


Figura 1. Programa DM2P. Dimensionamiento estricto de pilar de edificación.

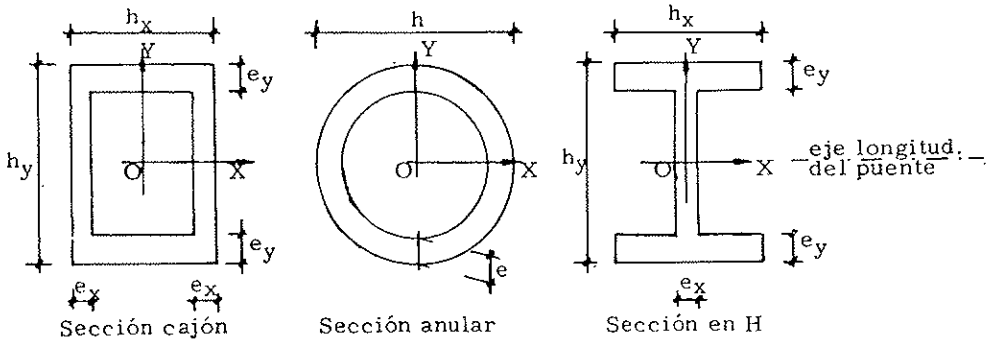


Figura 2. Programa PILA. Definición de la sección.

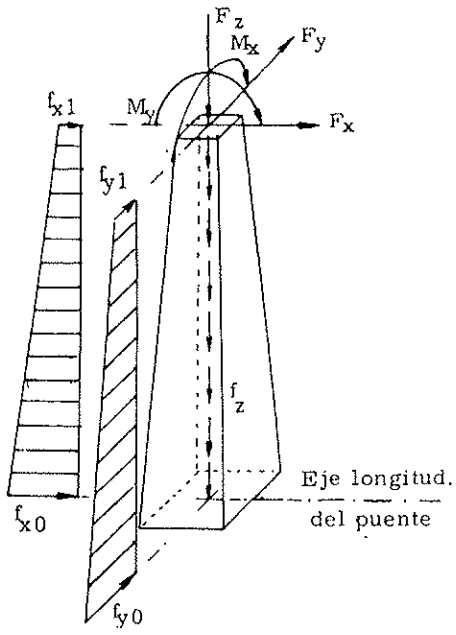


Figura 3. Programa PILA. Variación de la sección y cargas aplicadas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

so. Estos resultados tienden a quedar del lado de la inseguridad, aunque puedan ser antieconómicos en algunos casos aislados.

La Tesis Doctoral de Aires Pereira [3] sentó las bases para un tratamiento del pandeo de piezas en flexocompresión esviada y sirvió de precedente a un algoritmo de cálculo de este tipo de elementos [4]. Este algoritmo fue concebido en principio para el caso más simple de soportes de edificación, de sección y armaduras constantes y solicitados por un axil y dos momentos de primer orden, también constantes (fig. 1). Sin perjuicio del rigor, se caracteriza por su eficacia numérica y su adaptación a ordenadores personales compatibles (programa DM2P ofrecido optativamente con la obra [5]) permite la comprobación de un soporte de este tipo en un tiempo del orden de 1 segundo y su dimensionamiento automático estricto, en unos 10 segundos.

Este algoritmo ha sido posteriormente adaptado al caso de pilas altas de viaductos sometidas a flexocompresión esviada [6], dando lugar a un programa para el dimensionamiento interactivo de elementos de este tipo en ordenadores personales compatibles. El programa, llamado PILA, contempla pilas de sección en cajón, rectangular, anular, circular o en H (fig. 2). La sección y las armaduras son variables a lo largo de la altura (fig. 3), contemplándose leyes en las que cada una de las dimensiones de la sección y de las áreas de los grupos de armaduras varian de forma lineal (se definen los valores que toman en la cabeza y en la base de la pila) o arbitraria (se definen los valores en once secciones a los décimos de la altura). El proyectista efectúa distintos tanteos, cambiando alguno de los datos, en el fichero de datos, mediante un editor de pantalla (5 segundos), tras lo cual el programa analiza la pila resultante (1-2 segundos), indicando si se llega a un estado de equilibrio sin agotamiento, en cuyo caso pueden reducirse las dimensiones y/o las armaduras de la pila, o si ésta falla por agotamiento o por inestabilidad, en cuyo caso hay que aumentarlas. Prosiguiendo de esta forma a realizar nuevos tanteos, puede conseguirse un dimensionamiento adecuado para la pila.

En lo que sigue, se presenta de forma esquemática este algoritmo, así como su implementación en un programa, llamado PILAR, para el dimensionamiento práctico de pilares prefabricados armados y/o pretensados para edificios comerciales e industriales, que sigue planteamientos análogos a los del programa PILA.

2. BASES DE CALCULO

Las bases de cálculo son las establecidas en la Instrucción EH-91 [2], y en particular las contenidas en los artículos 36 *Principios generales de cálculo de secciones sometidas a solicitaciones normales* y 43 *Pandeo*, que coinciden en lo fundamental con las del Eurocódigo EC-2 y las del Código Modelo MC-90 del CEB.

Como diagrama tensión-deformación del hormigón se adopta el parábola-rectángulo tanto para el cálculo de secciones como para el análisis estructural, como se hace en el programa PILA y se justifica en la referencia [6]. Se evitan así los inconvenientes que presenta el diagrama hiperbólico de Sargin desde el punto de vista computacional, a cambio de una cierta infravaloración de las rigideces (y por tanto, de una sobrevaloración de las deformaciones y de los efectos de segundo orden) debida a la diferencia entre el módulo de elasticidad del hormigón y la pendiente inicial del diagrama parábola-rectángulo. En los pilares prefabricados esta diferencia es, para los hormigones usuales, significativamente menor que en las pilas de puente hormigonadas in situ: al ser las resistencias más altas, la pendiente inicial del diagrama se acerca más al módulo de elasticidad teórico de la EH-91, que crece más despacio con dichas resistencias. Así, para un hormigón H-400, la tabla 43.2.2 de la EH-91 proporciona un módulo de elasticidad característico del hormigón, de 350.000 kp/cm^2, que dividido por un coeficiente de minoración de 1,4 se transforma en un valor de cálculo de 250.000 kp/cm^2, que coincide sensiblemente con la pendiente del diagrama parábola-rectángulo, que para ese hormigón es de 243.000 kp/cm^2.

Al disminuir el margen de seguridad que proporciona el uso del diagrama parábola-rectángulo con respecto al de un diagrama cuya pendiente inicial se ajuste al módulo de elasticidad del hormigón, parece necesario tener en cuenta las deformaciones diferidas del hormigón (fluencia). Ello se hace aplicando el método aproximado del Código Modelo MC-90 del CEB (art. 6.6.3.3.2), que consiste en añadir a la excentricidad de primer orden en cada sección del pilar, una excentricidad adicional debida a los efectos de la fluencia. Esta excentricidad adicional se calcula mediante una fórmula que tiene en cuenta el valor de la excentricidad de primer orden producida por la carga permanente, la relación entre el esfuerzo axil permanente y la carga crítica de Euler del pilar, y el valor final del coeficiente de fluencia ϕ. Este coeficiente se hace depender, a su vez, de la edad t_0 del hormigón en el momento de puesta en carga, del espesor ficticio de la pieza y del tipo de ambiente al que dicha pieza estará expuesta.

La Instrucción EH-91 no menciona la posibilidad de tener en cuenta los efectos beneficiosos de la resistencia a tracción del hormigón y de la tenso-rigidez *(tension-stiffening)*, que aumentan la rigidez de las piezas. Estos efectos pueden, sin embargo, ser decisivos en el cálculo de deforma-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

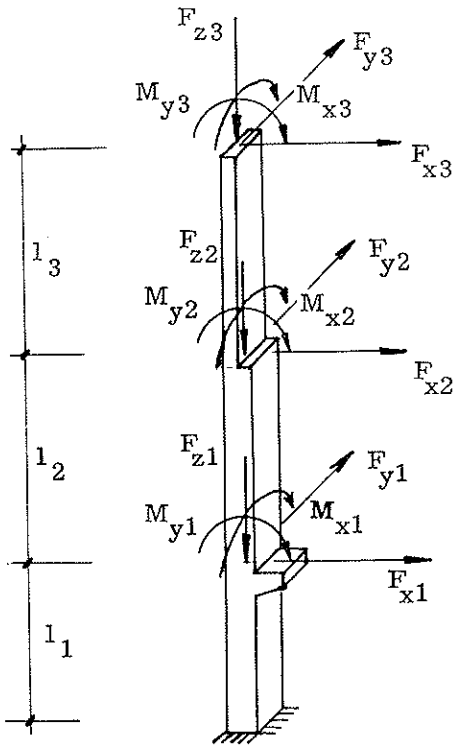


Figura 4. Programa PILAR. Definición del pilar prefabricado.

ciones de elementos muy esbeltos. Según resultados de estudios realizados en el seno de la antigua Comisión III del CEB, para esbelteces altas y excentricidades reducidas, cada uno de estos efectos puede incrementar la carga de pandeo en un 30 por 100 [8]. Ante la indefinición de la EH-91, no ha parecido prudente aprovecharlos de momento, aunque no se ha renunciado al propósito de incorporar más adelante al programa un tratamiento simplificado de los mismos.

Como diagrama tensión-deformación para el acero pasivo se usa el diagrama bilineal de los aceros de dureza natural, y para el acero de pretensado la parábola implícita, de quinto grado, de los aceros deformados en frío.

3. DEFINICION DEL PILAR. SECCIONES, ARMADOS Y CARGAS

El objetivo, enunciado en la introducción, de conseguir un programa que permita realizar, de forma interactiva, modificaciones y tanteos en la definición geométrica del pilar y de su armado hasta lograr cómodamente un dimensionamiento adecuado del mismo, impone el diseño de una estructura de datos sencilla. En el compromiso, siempre necesario, entre la generalidad de un programa y la comodidad de su aplicación a los casos más usuales en la práctica, se ha dado prioridad, por tanto, a este último aspecto.

Se han considerado, por ello, pilares de sección rectangular que constan de uno a seis trozos en los que la sección y el armado se mantienen constantes, aunque pueden ser distintos de trozo a trozo (fig. 4). La geometría del pilar se define dando, para cada trozo, su longitud y las dimensiones de la sección en las dos direcciones. Los trozos pueden también usarse para definir las cargas exteriores, ya que se supone que éstas se aplican sólo a los puntos que separan los distintos trozos del pilar (nudos), como se indica más adelante.

La armadura pasiva se supone formada por paquetes de barras iguales y colocados en puntos próximos a los cuatro lados de la sección. El número de puntos de armado en cada lado de la sección se define mediante un código de armado de dos cifras (fig. 5), y se supone igual en caras opuestas (armado bisimétrico). El recubrimiento mecánico (distancia al paramento del pilar) se supone igual para todos los paquetes. En cada trozo del pilar se define el código de armado, que fija el número de paquetes y el recubrimiento de los mismos. Se fija así la posición de los paquetes y queda como única variable de armado la composición de cada paquete en número de barras y diámetro. Esta variable de armado es la que el proyectista varía de forma interactiva durante el dimensionamiento.

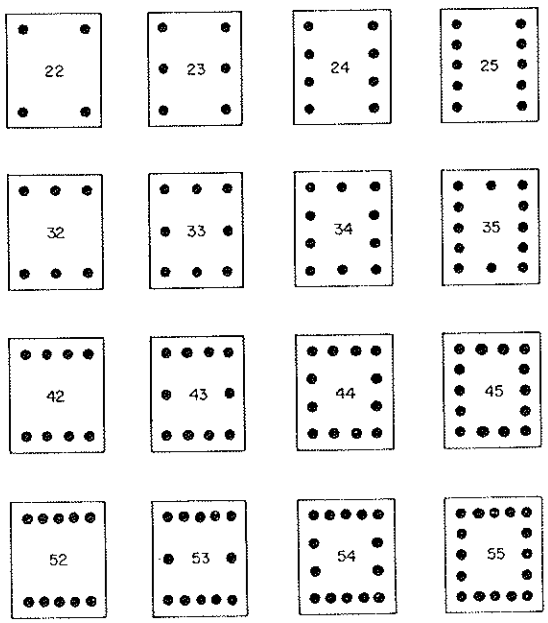


Figura 5. Ejemplos de códigos de armado (en cada punto de armado se dispone de una barra o un paquete de barras).

La composición de los paquetes se define mediante una tabla de armados establecida por el proyectista y grabada en forma de un fichero ASCII que es leído por el programa. En la figura 6 puede verse un ejemplo de dicho fichero. En el fichero se identifica cada paquete de armado por un número de orden y se indican los redondos que

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

PROGRAMA PILAR
TABLA DE ARMADOS DE PAQUETES DE BARRAS

Núm. armados = 33

Núm.	Armado	Area (cm²)
1	1φ 8	0.503
2	1φ10	0.785
3	1φ12	1.131
4	2φ10	1.571
5	1φ16	2.011
6	1φ16+1φ 8	2.513
7	1φ20	3.142
8	2φ16	4.021
9	1φ25	4.909
10	1φ25+1φ10	5.694
11	2φ20	6.283
12	1φ20+2φ16	7.163
13	1φ25+1φ20	8.050
14	1φ25+2φ16	8.930
15	2φ25	9.817
16	2φ25+1φ12	10.948
17	2φ25+1φ16	11.828
18	2φ25+1φ20	12.959
19	2φ25+2φ16	13.839
20	3φ25	14.726
21	3φ25+1φ12	15.857
22	3φ25+1φ16	16.737
23	3φ25+1φ20	17.868
24	2φ32+1φ20	19.227
25	2φ32+2φ16	20.106
26	2φ32+1φ25	20.994
27	2φ32+2φ20	22.368
28	3φ32	24.127
29	3φ32+1φ12	25.258
30	3φ32+1φ16	26.138
31	3φ32+1φ20	27.269
32	3φ32+1φ25	29.036
33	4φ32	32.170

Figura 6. Programa PILAR. Ejemplo de tabla de armados.

forman el paquete (pueden usarse barras de uno o de dos diámetros distintos) y el área total del paquete, en cm². En cada tanteo, el usuario define el número del paquete con que se arma cada trozo del pilar.

El programa permite al usuario consultar el fichero que contiene la tabla de armados pasivos, antes de iniciar cada nuevo tanteo, e incluso modificar dicho fichero añadiéndole nuevos armados, si lo considera conveniente en función de la marcha del proceso. En cada tanteo el programa informa en pantalla del peso total del acero pasivo utilizado en el pilar y de la marcha del cálculo: o bien el pilar tanteado es capaz de resistir todas y cada una de las hipótesis de carga, en cuyo caso la solución de armado tanteada es válida, pudiendo disminuirse el armado de uno o varios de los trozos si se desea mejorarla, o bien se produce un fallo por inestabilidad o por agotamiento en alguna hipótesis, en cuyo caso la solución tanteada no es válida, siendo necesario aumentar el armado de uno o varios de los trozos hasta que lo sea.

La armadura activa (pretensado) se supone formada por cuatro paquetes de alambres dispuestos en puntos próximos a las esquinas (código de armado 22). Dichos paquetes se suponen iguales entre sí. Su posición se define dando los recubrimientos mecánicos en las dos direcciones (que pueden ser distintos entre sí, a diferencia de lo que ocurría con los paquetes de armaduras pasivas) referidos a la sección de cabeza del pilar. Además, es necesario definir el área de acero de cada paquete y la deformación del acero de pretensado en el estado final. Si el área es nula, el programa interpreta que no existe pretensado.

Por lo que se refiere a las cargas, puede definirse un número cualquiera de hipótesis, que se calculan independientemente por separado (al ser el análisis no lineal, no pueden efectuarse superposiciones de las mismas). En cada hipótesis es preciso definir el coeficiente de mayoración y las cargas que la componen. Dichas cargas, que se definen por sus valores característicos (sin mayorar), se suponen aplicadas en los nudos del pilar, entendiéndose como tales los puntos más altos de los trozos en los que el pilar se supone dividido. Por otra parte, y a efectos del cálculo de los efectos diferidos (fluencia), es preciso distinguir dos estados de carga en cada hipótesis: el estado límite último y el estado de cargas permanentes. En cada nudo se considera, para unas y otras, la posible actuación de tres fuerzas: dos horizontales, que actúan según las direcciones de los ejes X e Y, y una vertical, según el eje Z, que se supone dirigida hacia abajo, y de dos momentos, que actúan alrededor de los ejes X e Y (fig. 4). De acuerdo con lo anterior, para cada hipótesis de carga, para cada nudo y para cada uno de los dos estados considerados hay que definir las cinco componentes (tres fuerzas y dos momentos) indicadas, debiendo introducirse valores nulos para aquéllas que no existan (véase fig. 7). Al definir los datos de carga no es preciso tener en cuenta el peso propio del pilar, que es considerado y añadido a los mismos por el programa, de forma automática.

4. ALGORITMO DE CALCULO

La base del método es un algoritmo para el análisis o la comprobación de piezas esbeltas de hormigón armado, de sección y armaduras variables, sometidas a solicitaciones normales de flexocompresión esviada, también variables a lo largo de la altura de la pieza.

Este algoritmo ha sido descrito con algún detalle en trabajos anteriores [4], [6], por lo que se expondrá aquí sólo de forma esquemática. El cálculo no se realiza aplicando alguno de los métodos aproximados existentes, de validez limitada o dudosa, sino por el Método General, también llamado de las diferencias finitas [7], en el que se efectúan recorridos sucesivos de las distintas secciones de la pieza. En cada sección, en función de las flechas estimadas o conocidas del recorrido anterior, se obtienen los momentos de segundo orden, que se suman a los de primero para obtener los momentos totales en ambas direcciones. A partir de estos momentos y del axil, se efectúa un cálculo de sección en flexocompresión esviada, obteniendo las deformaciones unitarias de sus

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

```
EJEMPLO 4 DE PRUEBA PROGRAMA PILAR - PILAR VARIAS ALTURAS -      31.08.92

       MATERIALES:                HORMIGON      ACERO ARMADO    ACERO PRETENSADO
"RESIST. CARACT. (kp/cm²):"         400            5100             17100
"COEFICIENTE MINOR. GAMMA:"         1.4            1.10              1.10

"NUM. TROZOS DIF. SECCION:"          3

    DIMENSIONES Y ARMADURA PASIVA DE LAS SECCIONES:

.                TROZO  :    1        2        3        4        5        6
"LONGITUD TROZO   l (cm):"  240      310      320
"DIMENSION SECC. hx (cm):"   40       40       40
"DIMENSION SECC. hy (cm):"   40       40       40
"RECUBR. MECANICO r (cm):"    5        5        5
"CODIGO DE ARMADO  C A  :"   22       22       22

    DATOS DEL PRETENSADO:

DEFORMACION FINAL     AREA/ESQUINA      RECUBR.MEC.EN CABEZA
      εf                 Asp (cm²)        rx (cm)      ry (cm)
    .00524                0.987            4.5          4.5

    DATOS PARA EL CALCULO DE LA FLUENCIA:

"AMBIENTE   (1 = exterior húmedo; 2 = interior o seco):"  1
"EDAD CARGA (1 = 3 a 7 días; 2 = 7 a 60 días; 3 = más):"  2

   "NUM. DE HIPOTESIS DE CARGA:" 2

   "ACCIONES EN LA HIPOTESIS 1 - Mayoración gamma f:" 1.50

.     FUERZAS (t) Y MOMTOS.(mt) E.ULTIMO     IDEM PERMANENTES (PARA FLUENCIA)
NUDO   Fx     Fy      Fz      Mx     My       Fx     Fy      Fz      Mx     My
 1    0.00   0.00   38.90    0.00  14.00     0.00   0.00   27.23    0.00   3.50
 2    0.00   0.00   37.70    0.00  13.57     0.00   0.00   26.39    0.00   3.39
 3    0.00   0.00   32.30    0.00   0.65     0.00   0.00   22.61    0.00   0.16

   "ACCIONES EN LA HIPOTESIS 2 - Mayoración gamma f:" 1.35

.     FUERZAS (t) Y MOMTOS.(mt) E.ULTIMO     IDEM PERMANENTES (PARA FLUENCIA)
NUDO   Fx     Fy      Fz      Mx     My       Fx     Fy      Fz      Mx     My
 1    0.55   0.00   38.90    0.00  14.00     0.00   0.00   27.23    0.00   3.50
 2    0.63   0.00   37.70    0.00  13.57     0.00   0.00   26.39    0.00   3.39
 3    0.65   0.00   32.30    0.00   0.65     0.00   0.00   22.61    0.00   0.16
```

Figura 7. Programa PILAR. Ejemplo de fichero de datos.

fibras y por consiguiente las curvaturas en la sección. Estas curvaturas, integradas a lo largo de la pieza, permiten obtener una nueva ley de flechas. El proceso se repite hasta que se produce alguna de las situaciones siguientes:

a) Se alcanza la convergencia en la deformación de la pieza y en los esfuerzos en las secciones de la misma, sin que se haya agotado ninguna de dichas secciones, en cuyo caso la pieza está en una situación de equilibrio estable;

b) Se detecta el agotamiento de una o varias de las secciones de la pieza antes o en el momento de alcanzarse la convergencia del equilibrio, en cuyo caso la pieza está en agotamiento;

c) Se detecta la divergencia del proceso de deformación de la pieza, con o sin agotamiento de alguna de sus secciones, en cuyo caso la pieza es inestable.

El algoritmo es bien conocido en su formulación para flexión recta. Las principales aportaciones al mismo, que se detallan en las referencias indicadas [4], [6], son, por una parte, la elección de un método semidirecto para el cálculo de las secciones, que aumenta notablemente la eficacia numérica del proceso, especialmente en el caso de flexión esviada, y por otra, la adopción de criterios prácticos para la detección de las situaciones de equilibrio, de agotamiento y de inestabilidad que permiten discriminar las mismas en casos en los que la cuantía de armadura se aproxima a la estricta, como sucede siempre que se desea conseguir un dimensionamiento afinado para la pieza.

5. IMPLEMENTACION DEL ALGORITMO

El algoritmo anterior, en su versión para pilares prefabricados para edificios industriales y comerciales, se ha implementado en el programa PILAR, preparado para ordenadores personales IBM-PC/XT/AT/PS2 y compatibles bajo el sistema operativo MS-DOS.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

```
EJEMPLO 4 DE PRUEBA PROGRAMA PILAR - PILAR VARIAS ALTURAS -

Armado de los trozos                Hipótesis carga
    1          2          3         1  2
   30 C.alta 20          10         Acero pasivo = 397.53 kg
3φ32+1φ16 3φ25       1φ25+1φ10    Co Co

FLECHAS EN LOS NUDOS (mm)

            HIPOTESIS
Nudo Dir.      1       2
  1   x     36.14   40.49
  1   y      0.00    0.00
  2   x    174.20  194.94
  2   y      0.00    0.00
  3   x    370.65  416.23
  3   y      0.00    0.00


Armado de los trozos                Hipótesis carga
    1          2          3         1  2
   30 C.alta 20          5          Acero pasivo = 360.53 kg
3φ32+1φ16 3φ25       1φ16         Co Co

FLECHAS EN LOS NUDOS (mm)

            HIPOTESIS
Nudo Dir.      1       2
  1   x     36.29   40.94
  1   y      0.00    0.00
  2   x    175.44  197.75
  2   y      0.00    0.00
  3   x    377.49  431.32
  3   y      0.00    0.00


Armado de los trozos                Hipótesis carga
    1          2          3         1  2
   30 C.alta 20          4          Acero pasivo = 356.10 kg
3φ32+1φ16 3φ25       2φ10         Co Co

FLECHAS EN LOS NUDOS (mm)

            HIPOTESIS
Nudo Dir.      1       2
  1   x     36.49   41.10
  1   y      0.00    0.00
  2   x    175.94  198.55
  2   y      0.00    0.00
  3   x    379.45  435.73
  3   y      0.00    0.00


Armado de los trozos                Hipótesis carga
    1          2          3         1  2
   30 C.alta 19          4          Acero pasivo = 347.47 kg
3φ32+1φ16 2φ25+2φ16 2φ10          Co In
```

Figura 8. Programa PILAR. Ejemplo de fichero de resultados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Se ha usado el lenguaje de programación Quick BASIC de Microsoft, versión 4.5, extensión del GW-BASIC, que facilita la programación estructurada, es cómodo para la preparación y depuración de programas, sobresale por rapidez de ejecución y permite un buen aprovechamiento de los recursos de estos ordenadores bajo MS-DOS.

Los datos leídos por el programa consisten en dos ficheros. Uno de ellos, ya descrito (fig. 6), es la tabla de paquetes tipo de barras que se pueden emplear para la armadura pasiva. El otro (fig. 7), consiste en los datos particulares del pilar que se pretende dimensionar, e incluye las resistencias de los materiales, los coeficientes de minoración de las mismas, el número de trozos, las dimensiones de los mismos, los códigos de armado y recubrimientos mecánicos en cada trozo, los datos relativos al pretensado, los datos básicos que permiten estimar las deformaciones diferidas (fluencia) y, por último, las cargas aplicadas en cada una de las hipótesis que se van a considerar.

Para crear, modificar o corregir estos ficheros se parte de máscaras o ficheros tipo que se facilitan con el programa. Estas máscaras pueden editarse con un editor de pantalla o con un procesador de textos cualquiera, de los muchos existentes en el entorno del MS-DOS, por ejemplo el SIDE-KICK, el PC-TOOLS, el WORDPERFECT, el WORD, etc. De entre ellos resulta especialmente idóneo el SIDE-KICK, de Borland, que al quedar residente en memoria permite consultar los datos en cualquier momento y modificarlos para volver al programa principal pulsando un número muy reducido de teclas. Así puede consultarse o modificarse la tabla de armados entre dos tanteos sucesivos, pues esta tabla es leída por el programa antes de comenzar cada tanteo. Para modificar cualquiera de los datos del pilar (por ejemplo, el número de puntos de armado o la escuadría de un determinado trozo) es necesario, sin embargo, volver a iniciar el programa.

Por lo que se refiere a los resultados, el programa muestra en pantalla ciertas informaciones básicas que sirven para controlar la marcha del proceso y dirigir los tanteos que efectúa el usuario. Los resultados que aparecen en pantalla para cada uno de los tanteos son los siguientes:

- Número que caracteriza la composición del paquete de barras pasivas dispuesto en cada punto de armado de cada trozo del pilar, de acuerdo con la tabla de armados establecida por el proyectista.
- Descripción de la composición del paquete, en número de barras y diámetro de las mismas, también para cada trozo.
- Aviso, en su caso, de que la cuantía total de armadura en cada trozo supera un valor establecido como cuantía máxima o no llega a un valor establecido como cuantía mínima (si no se produce ninguno de estos avisos, la cuantía en el trozo está comprendida entre estos dos valores).
- Cubicación (en peso) de la cantidad total de armadura pasiva del pilar, que permite comparar los armados correspondientes a los distintos tanteos válidos y seleccionar el más adecuado.
- Situación que alcanza el pilar, con la armadura definida por el usuario en cada tanteo, en cada una de las hipótesis de carga consideradas (esta situación puede ser de convergencia, de agotamiento o de inestabilidad, según se indica en el apartado 4).

Además de la información que aparece en pantalla y que permite controlar el proceso, el programa graba los resultados más importantes del cálculo en un fichero en disco cuyo nombre es elegido por el usuario (véase un ejemplo en la fig. 8). Este fichero de resultados contiene, además de todos los resultados descritos que aparecen en pantalla, las flechas que se producen en los diferentes nudos del pilar, en las dos direcciones (x e y) y para cada una de las hipótesis de carga consideradas. Estos resultados suplementarios se graban sólo para los tanteos que representan soluciones válidas (es decir, para aquéllos en los que se alcanza la convergencia en todas las hipótesis de carga consideradas).

El tiempo de cálculo típico del programa, para un pilar como el del ejemplo de las figuras 7 y 8, con 2 hipótesis de carga (el número de trozos no influye en la duración del cálculo) es del orden de 1 segundo por tanteo, en un ordenador con procesador Intel 486-DX a 33 MHz, máquina estándar en el momento de escribir estas líneas. El uso de un editor residente, como el Side-Kick, permite usar el programa de forma interactiva con respuestas casi instantáneas y conseguir, mediante tanteos, el dimensionamiento más adecuado para cada pieza.

El autor desea manifestar su agradecimiento al Ingeniero de Caminos D. Angel Ortiz Bonet, de CEPRESA, por su colaboración en general, y especialmente por la aportación de su experiencia como proyectista en el establecimiento de las especificaciones del programa, sus sugerencias durante el desarrollo del mismo y su ayuda en la fase de depuración y pruebas, sin las cuales el producto final al que se ha llegado no habría sido posible.

6. REFERENCIAS

[1] PERESWIET-SOLTAN, S.: *Estructura tradicional y prefabricada de hormigón*. H. Blume, Madrid, 1980.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

[2] COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON: *Instrucción EH-91 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado*. Ministerio de Obras Públicas y Transportes. Madrid, 1991.

[3] AIRES PEREIRA, A.M.C.: *Dimensionamiento en Teoría de Segundo Orden de soportes esbeltos de sección constante de Hormigón Armado en flexocompresión esviada*. Tesis Doctoral. ETSI de Caminos, UP de Madrid, mayo 1986.

[4] MORAN CABRE, F. y AIRES PEREIRA, A.M.C.: *Programa para el dimensionamiento de soportes esbeltos de hormigón armado en flexocompresión esviada*. Proceedings de Colloquia 88, Jornadas de Estructuras y Materiales, Madrid, mayo 1988.

[5] JIMENEZ MONTOYA, P.; GARCIA MESEGUER, A. y MORAN CABRE, F.: *Hormigón Armado*, 13 Edición. Gustavo Gili, Barcelona, 1991.

[6] MORAN CABRE, F.: *Cálculo práctico de pilas altas de viaductos en teoría de segundo orden*. Hormigón y Acero nº 171, 2º trimestre 1989, págs. 71-81.

[7] COMITE EUROINTERNATIONAL DU BETON (CEB): *CEB/FIP Manual of Buckling and Instability*. The Construction Press. London, 1978.

[8] QUAST, U.: *On some regulations for Buckling in the Model Code 90*. CEB Permanent Commission III Buckling and Instability. Documento COM III-104. Treviso, mayo 1987.

RESUMEN

Se presenta un algoritmo para el cálculo riguroso, en teoría de segundo orden, de pilares prefabricados de sección rectangular, de hormigón armado y/o pretensado, típicos de edificios industriales y comerciales. El algoritmo se ha implementado mediante un programa para ordenadores personales compatibles que permite dimensionar este tipo de piezas de forma cómoda e interactiva. Los pilares pueden tener hasta seis trozos, con sección y armaduras pasivas distintas en cada trozo. Las cargas se consideran aplicadas en los nudos que separan estos trozos y son tres fuerzas y dos momentos (flexocompresión esviada). La armadura pasiva se define mediante paquetes de barras situados en puntos discretos de la sección. Los paquetes se eligen de una tabla de armado definida por el proyectista, que puede ser consultada y cambiada en el curso del proceso. La armadura activa consiste en alambres de pretensado situados en puntos próximos a las esquinas del pilar. Se tienen en cuenta, de forma sencilla, las deformaciones diferidas. El programa permite al proyectista realizar rápidos tanteos cambiando las dimensiones, los puntos de armado y los paquetes de armadura pasiva en cada trozo del pilar. En pantalla se indica el peso de acero resultante y si el dimensionamiento es suficiente o se produce un fallo por inestabilidad o por agotamiento. De esta forma se facilita el dimensionamiento más adecuado para el pilar.

SUMMARY

An algorithm is presented for second-order-theory design of reinforced or prestressed concrete prefabricated columns of rectangular cross-section, such as are used at industrial and commercial buildings. The algorithm has been implemented in a program for compatible PCs. This program facilitates the interactive design of these elements. The column can have up to six different zones with different cross-sections and reinforcements. The loads are applied to each intermediate node and can be three forces and two moments (biaxial bending). Reinforcing steel is disposed in groups of bars selected for each zone of the column from a reinforcing table established by the user. This table can be consulted and modified during the design. Prestressing steel can be disposed near the corners of the cross-section and is constant along the column. Time-dependent effects (creep) are taken into account by a simple, approximate method. The user can make quick trials modifying the cross-section, the number of reinforcing steel groups and the composition of each group in each zone of the column. The program shows the total amount of reinforcement and displays information about the validity or failure (by resistance or by instability) of the considered design. Thus an adequate design of the column can be obtained.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Nueva publicación "Hormigón Armado y Pretensado"

Juan Murcia Vela
Antonio Aguado de Cea
Antonio R. Marí Bernat

Esta obra, compuesta de dos volúmenes, incide en los fundamentos del comportamiento de las estructuras de hormigón armado y pretensado, abordando aspectos como las propiedades de sus materiales, las bases de su concepción y proyecto, los métodos de cálculo, los sistemas constructivos y su influencia en el proyecto estructural, junto con la tecnología que les es propia y los métodos de control y mantenimiento. Asimismo, se realiza un tratamiento específico de los distintos tipos de estructuras de hormigón.

Con ambos volúmenes se pretende dar una visión global de dichas estructuras, profundizando en los fundamentos y huyendo de lo recetario, tan frecuente en los manuales al uso. Pero, lejos de quedarse sólo en un plano teórico, los mismos aportan aspectos tecnológicos que concretan los conceptos que aparecen en ellos.

La cararacterística más singular y diferenciadora de esta obra es el tratamiento conjunto que plantea para el hormigón armado y el hormigón pretensado, recogiendo la experiencia docente de los Autores en dicha línea a lo largo de más de quince años.

INDICE DELVOLUMEN I

Cap. 1 : Introducción al hormigón armado y pretensado.
Cap. 2 : Estados límites.
Cap. 3 : Seguridad estructural.
Cap. 4 : Acciones sobre la estructura.
Cap. 5 : Bases de cálculo. Materiales.
Cap. 6 : Bases de cálculo. Análisis estructural.
Cap. 7 : Bases de cálculo. Análisis de la sección.
Cap. 8 : Recapitulación (I).
Cap. 9 : Estado límite último de agotamiento por solicitaciones normales.
Cap. 10: Estado límite último de agotamiento por tensiones tangenciales: esfuerzo cortante.
Cap. 11: Estado límite último de agotamiento por tensiones tangenciales: torsión.
Cap. 12: Estado límite último de pandeo.
Cap. 13: Estado límite último de anclaje. Empalme de las armaduras.
Cap. 14: Estado límite último de adherencia.
Cap. 15: Estados límites de fisuración.
Cap. 16: Estado límite de deformación.
Cap. 17: Secciones más usuales en hormigón armado y pretensado. Criteios de dimensionamiento.
Cap. 18: Forjados de edificación.
Cap. 19: Elementos de cimentación.
Cap. 20: Elementos de hormigón en masa.
Cap. 21: Materiales (ejecución).
Cap. 22: Ejecución.
Cap. 23: Control de los materiales y la ejecución.
Cap. 24: Recapitulación (II): Campos de aplicación del hormigón armado y del pretensado.

INDICE DEL VOLUMEN II

Cap. 1 : Bases de cálculo. Análisis estructural.
Cap. 2 : Estado límite último de pandeo.
Cap. 3 : Estado límite último de fatiga.
Cap. 4 : Zonas de anclaje.
Cap. 5 : Estados límites de utilización. Pretensado parcial.
Cap. 6 : Criterios y disposiciones de proyecto.
Cap. 7 : Refuerzos pretensados. Tirantes de hormigón pretensado.
Cap. 8 : Vigas de gran canto.
Cap. 9 : Apoyos y cargas sobre macizos.
Cap. 10: Ménsulas cortas.
Cap. 11: Placas.
Cap. 12: Láminas.

Los interesados en la adquisición de esta publicación deberán dirigirse a:

EDICIONES UPC. Universidad Politécnica de Cataluña.

Gran Capitán, s/n

08034 BARCELONA

VOLUMEN I: 584 páginas. 6.500,–Pts. ISBN: 84-7653-356-X

VOLUMEN II: 259 páginas. 3.000,–Pts. ISBN: 84-7653-357-8

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

457-0-199

Diseño automático de puentes de hormigón pretensado construidos por voladizos sucesivos

Angel C. Aparicio Bengoechea
Juan R. Casas Rius
Gonzalo Ramos Schneider
Cátedra de Puentes
E.T.S. Ingenieros de Caminos de Barcelona

1. INTRODUCCION

En este artículo presentamos la continuación del trabajo referenciado en (1) y (2) que ha sido igualmente financiado por el Servicio de Puentes y Estructuras de la Dirección General de Carreteras del M.O.P.T. Expondremos detenidamente la ampliación del sistema experto relativa a los puentes de tramo recto de hormigón pretensado construidos por voladizos sucesivos, –fundamentalmente el diseño de tableros y pilas– al tiempo que recogeremos, sucintamente, los aspectos de proyecto comunes con los otros tipos de tableros, con el objeto de que el artículo resulte completo en sí mismo.

Recordaremos aquí que el objetivo final del sistema de diseño automático es la definición completa del puente proyectado –superestructura, tablero, apoyos, pilas, estribos y cimentaciones–, tanto desde el punto de vista geométrico como constructivo y económico, y ello basado en tres módulos independientes de hipótesis que pueden definirse por el usuario y que se refieren a:

i) Utilización de cualquier tren de cargas para puentes de carretera.

ii) Utilización de diversas calidades de materiales y coeficientes de seguridad para cada elemento del puente.

iii) Utilización de distintos criterios de verificación y dimensionamiento según la normativa empleada.

Con el objeto de tener siempre una referencia, el programa considera, a falta de una definición específica por el usuario, las siguientes hipótesis: tren de cargas definido en la vigente instrucción de acciones (3), calidades de materiales y coeficientes de seguridad típicos de este tipo de tableros y, en cuanto a verificación y dimensionamiento, emplea la vigente normativa (4) y (5) relativa a estructuras de hormigón.

2. DESCRIPCION GENERAL DEL PROGRAMA Y APLICABILIDAD

Como comentábamos en (1) y (2), el criterio general seguido ha consistido en diseñar el paquete informático con una estructura modular, en la idea de que cada módulo pueda funcionar enlazado con todos los anteriores o de forma independiente. Cada uno de estos módulos procede a realizar el diseño de uno de los elementos estructurales o funcionales del puente. De esta manera se puede llevar a cabo el anteproyecto de un puente completo o el de alguna de sus partes (tablero, pilas, etc...), pudiendo, además, modificarse cada una de ellas por separado.

Los módulos de que consta el programa son los siguientes:

- Módulo de hipótesis.
- Módulo de diseño de tableros.
- Módulo de diseño de juntas y aparatos de apoyo.
- Módulo de diseño de pilas.
- Módulo de diseño de estribos.
- Módulo de diseño de cimentaciones.
- Módulo de mediciones de materiales y medios auxiliares.
- Módulo de valoraciones y presupuesto.

En cuanto a su campo de aplicación, el programa diseña, de forma automática, puentes constituidos por tableros de sección cajón construidos por el método de los voladizos sucesivos, con dovelas hormigonadas "in situ", mediante carros de avance. La longitud total del puente está comprendida entre 60 y 675 metros, el número máximo de vanos es 5 y las luces mínimas y máximas son 60 y 150 metros, respectivamente.

En cuanto a las pilas, el programa diseña tres tipologías de pilas:

- Pilas macizas.
- Pantallas desdobladas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

– Pilas cajón, con una altura máxima, desde la rasante hasta la cota superior de la cimentación, de 60 metros.

Los estribos y cimentaciones de pilas son diseñados con las mismas pautas que las expuestas en (2), (6) y (7), adaptándolos geométricamente, obteniéndose, a partir de la geometría de los diversos elementos y de los cálculos efectuados, unas mediciones y presupuestos, sobre los cuales pueden realizarse estudios de sensibilidad.

3. PLANTEAMIENTO Y CRITERIOS DE DISEÑO

En el caso que nos ocupa, puentes de tramo recto de hormigón pretensado construidos por voladizos sucesivos, la importancia estructural del problema rebasa la de los trabajos anteriores (1) y (2) y, aun limitando su morfología al rango de luces y altura máxima de pilas indicados en el punto anterior, la riqueza de esquemas estructurales es mucho mayor.

Los dos problemas principales que se deben tratar son, por una parte, la elección adecuada del esquema estático longitudinal y, por otra, el diseño ajustado de la sección transversal.

Para abordar el primer problema, la elección adecuada del esquema estático longitudinal, que en la práctica profesional un ingeniero senior lo realiza de manera intuitiva, hemos elaborado un "sistema experto" que está inspirado en el razonamiento argumental que venimos utilizando en las clases a nuestros alumnos, desde hace bastante tiempo.

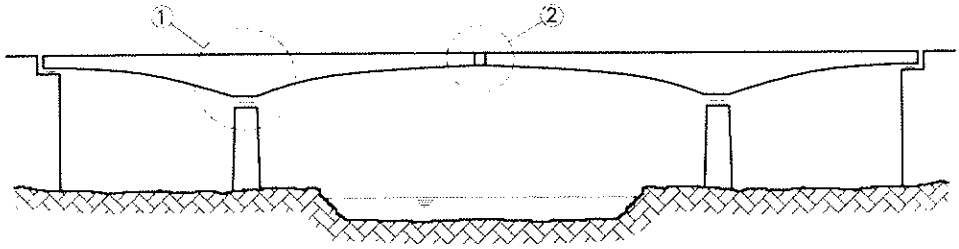
A partir del caso particular de un puente de tres vanos construido por voladizos sucesivos, planteamos los problemas de vinculación entre semitableros y vinculación de éstos con las pilas, y ello considerando los siguientes aspectos:

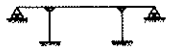
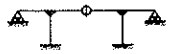
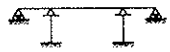
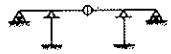
i) Capacidad portante última frente a cargas verticales.
ii) Movimientos verticales instantáneos y diferidos del tablero.
iii) Estabilidad de cada doble ménsula durante construcción.
iv) Respuesta estructural frente a fuerzas horizontales longitudinales.
v) Respuesta estructural frente a deformaciones lineales.

Para cada combinación de vinculación entre voladizos y dintel y pila surge un esquema estático diferente que presenta una cierta calidad de comportamiento, que pasamos a calificar de modo cualitativo (Cuadro 1).

Cuadro 1

Evaluación de los distintos esquemas estáticos.



ASPECTO A CONSIDERAR			(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
VINCULACION		ESQUEMA ESTATICO					
DINTEL/PILA	VOLADIZOS						
E	E		MB	MB	MB	MB	R/MM
E	A		B	M	MB	MB	MB
A	E		B	MB	R	B/R	MB
A	A		R	M	R	B/R	MB

NOTAS : (1) VINCULACIONES : E=empotramiento , A=articulación
CALIFICACIONES : MB=muy buena , B=buena , R=regular , M=mala , MM=muy mala
I$/J$=calidad de comportamiento variable entre I$ y J$ según otra circunstancia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El cuadro es extraordinariamente docente ya que, como puede verse en una primera ojeada, ninguna solución está bien calificada en **todos** los aspectos. Los problemas de ingeniería no tienen solución única –recordemos por ejemplo cómo se refieren los franceses a los puentes: "ouvrages d'art"– y eso desconcierta al principio a nuestros alumnos y complica las cosas para elaborar un sistema experto que entienda el ordenador.

Si volvemos al cuadro, observamos que la solución primera, puente pórtico de dintel continuo, lo tiene casi todo: gran capacidad de carga última por redistribución de esfuerzos al ser una estructura muy hiperestática; la continuidad entre voladizos y el pretensado que conlleva, limita o anula el problema de las deformaciones verticales diferidas; la vinculación entre las dobles ménsulas y las pilas resuelve definitivamente los problemas de estabilidad durante construcción; no hay nada mejor que un empotramiento correctamente realizado para transmitir grandes fuerzas horizontales, pero, frente a las deformaciones impuestas, la distancia que existe del punto fijo a la coronación de las pilas y la altura de éstas, generan siempre esfuerzos –que los norteamericanos llaman con acierto "parásitos" y vaya si lo son– que con distancias importantes (L) y pilas robustas (EI) y cortas (H) pueden llegar a ser muy elevados:

$$M \cong \frac{6\,EI(\varepsilon\,L)}{H^2}.$$

La segunda solución –puente pórtico con dintel articulado– resuelve este problema, pero presenta el de unas deformaciones verticales excesivas por fluencia que, si quieren evitarse, obligan a dimensionar el pretensado por condiciones de deformabilidad y no de resistencia, de lo que resulta un encarecimiento.

En cuanto a la tercera solución, ésta funciona globalmente bien, teniendo en cuenta que siempre hay que crear un sistema de estabilidad provisional que asegure el equilibrio del tablero durante construcción y que, en zonas de alta sismicidad, las grandes fuerzas horizontales que pueden llegar a producirse invalidan la configuración de apoyos convencional.



Fig. 1. Puente de Urato, L = 235 m, Japón.

Tras este primer análisis –no merece la pena comentar la última solución que no obtiene sino malas calificaciones– resulta muy claro que los japoneses hayan ido en sus puentes clásicos (Urato, Hamana), con baja rasante, al esquema segundo, por sus problemas sísmicos, sobredimensionando el pretensado (Fig. 1 y 2), y que nosotros crucemos nuestros ríos, cuando el trazado en alzado no va muy alto sobre la lámina de agua, con el esquema de viga continua (Fig. 3).

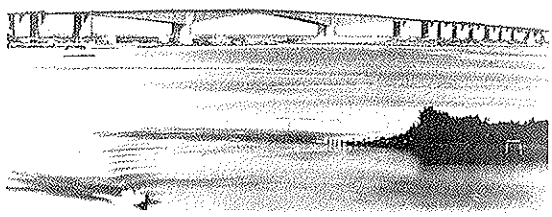


Fig. 2. Puente de Hamana, L = 240 m, Japón, 1978.

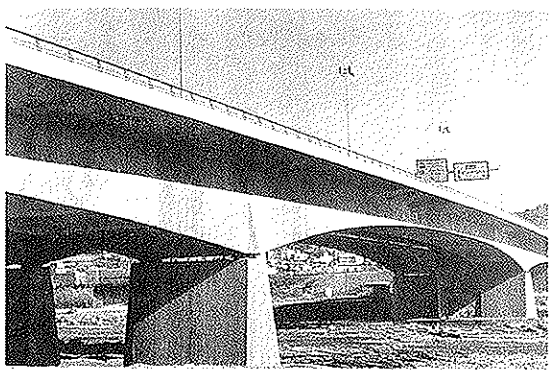


Fig. 3. Puente de Molins de Rei, L = 125 m, España, 1972.

¿Podría minorarse el problema de esfuerzos parásitos que presenta la solución pórtico con dintel continuo, frente a la acción de las deformaciones lineales?. Evidentemente sí, y existen dos técnicas clásicas para ello: la utilización sobre pilas de aparatos de apoyo desdoblados, normalmente de neopreno, y el diseño de pilas con pantallas también desdobladas. La primera técnica está limitada, si se emplean apoyos de neopreno, a una cierta luz máxima (100 ÷ 120 m) por capacidad de carga vertical de los apoyos estándar, y a una distancia máxima al punto fijo; mientras que la segunda resuelve muy bien todos los aspectos considerados, hasta un límite de longitud al punto fijo –relacionada con la altura– y hasta un valor máximo de ésta, por problemas de resistencia frente al viento longitudinal durante construcción y viento transversal en fase definitiva. Tampoco es pues casualidad que el récord actual de tramos rectos de puente construidos por voladizos sucesi-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

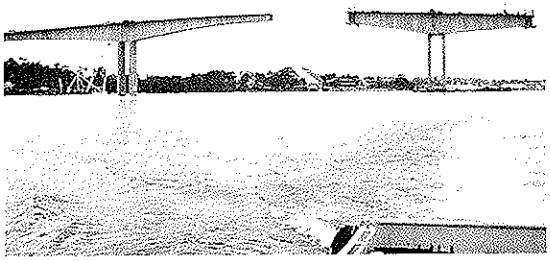


Fig. 4. Puente de Gateway, L = 260 m, Australia, 1984.

vos –puente de Gateway, (Australia), zona de baja sismicidad, l_{max} = 260 m, (Fig. 4)– posea pilas de esta morfología.

Pues bien, el sistema experto elaborado cuantifica, mediante una compleja función, la calidad del comportamiento estructural de las diversas soluciones posibles frente a un problema concreto, proponiendo el tipo de vinculación entre dobles ménsulas –que siempre resulta de empotramiento salvo en zonas de alta sismicidad– así como el tipo de pila –sección cerrada en cajón, pantallas desdobladas o pilas masivas– y su vinculación al tablero.

Por lo que al diseño de la sección transversal respecta, el sistema propone siempre una sección transversal en cajón monocelular, válida para plataformas de hasta 16,75 m de anchura, que es el máximo aquí considerado, de canto variable continuamente entre centro de luz y arranques según parábola de segundo grado, y cuyos cantos y espesores de forjados y almas se deducen de un estudio estadístico de los mismos, al estilo del realizado por Swan (8) en 1972, considerando los mejores puentes españoles construidos desde 1972 por voladizos sucesivos.

4. PROYECTO DEL TABLERO

El proyecto del tablero se realiza de una manera interactiva mediante unos datos preliminares, a partir de los cuales el sistema va generando propuestas que se validan o modifican por el usuario.

Así, el proceso general de proyecto del tablero es el siguiente:

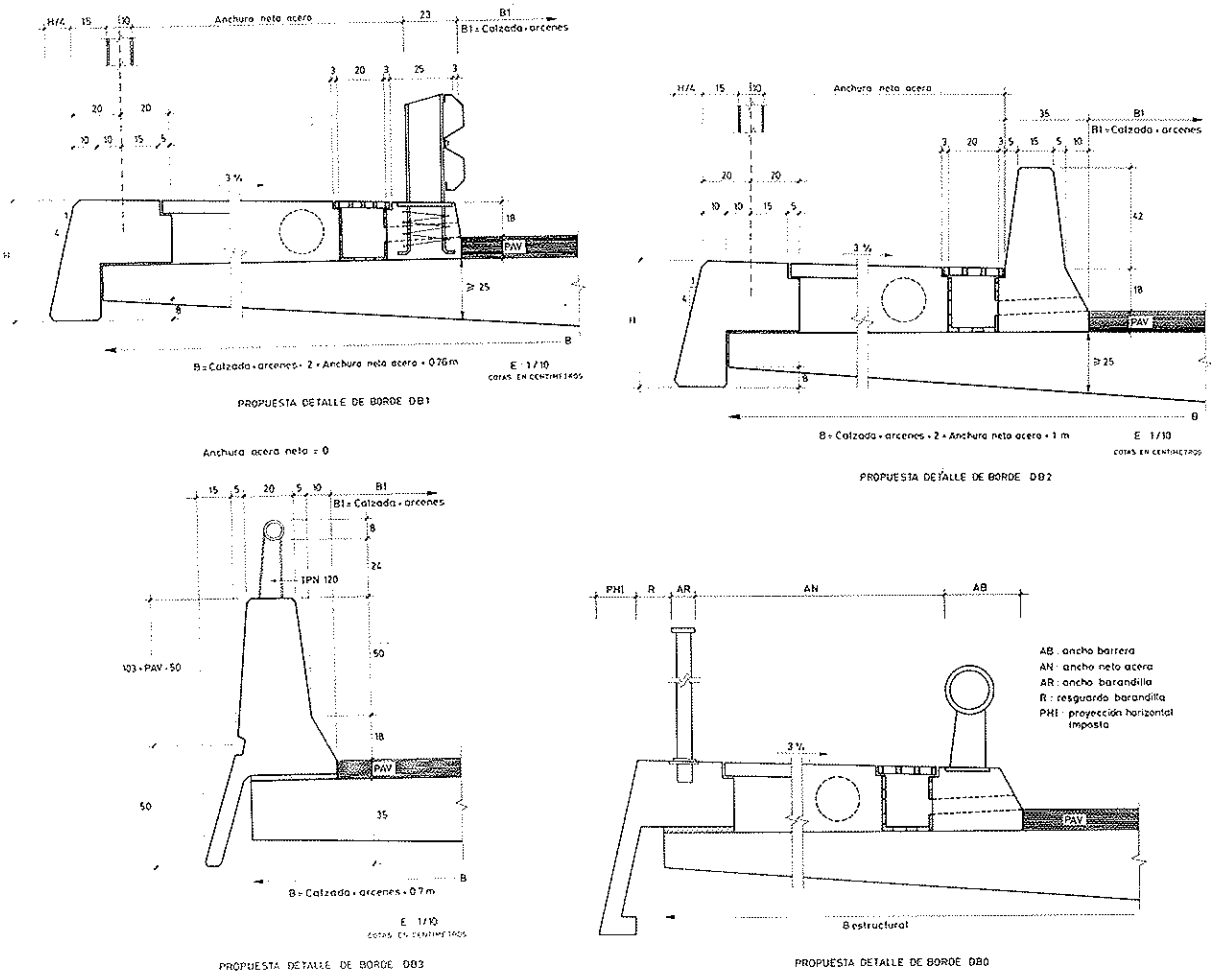


Fig. 5. Detalles de borde estandar.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Datos

i) Definición por el usuario del ancho funcional. Se entiende por ancho funcional la suma de las anchuras de la calzada más arcenes, más anchura neta de aceras. Este ancho funcional está limitado a 16,75 metros.

ii) Definición de la plataforma, es decir:

- Anchura de calzada + arcenes.
- Anchura neta de acera izquierda.
- Detalle de borde de la acera izquierda. (Fig. 5).
- Detalle de borde de la acera derecha. (Fig. 5).
- Espesor del pavimento (por defecto, 8 cm).

Respecto a los detalles de borde cabe resaltar la existencia de tres detalles predefinidos, denominados: DB1, DB2 y DB3. En el caso de que el detalle de borde no correspondiera a ninguno de estos tres, debe introducirse el detalle libre DB0 para el que se solicitarán los siguientes datos:

- Ancho estructural.
- Ancho barrera.
- Ancho barandilla.
- Resguardo barandilla.
- Proyección horizontal de la imposta.
- Peso por metro lineal.
- Precio por metro lineal.

iii) Datos sísmicos. Si se desea tener en cuenta las posibles acciones sísmicas, debe introducirse en qué zona, según la norma sismoresistente española, se encuentra el puente.

iv) Longitud total del tablero. Esta longitud total del tablero debe estar comprendida entre 60 y 675 metros. A partir de esta longitud total, el programa presenta todo un abanico de posibles soluciones. El sistema distribuye la longitud total entre 1, 2, 3, 4 y 5 vanos, con dos hipótesis: construcción completa por voladizos sucesivos y construcción con tramos parciales sobre cimbra en los vanos extremos, y presenta al usuario las soluciones posibles teniendo en cuenta las luces máximas y mínimas (150 y 60 m respectivamente). Si el usuario desea introducir una distribución de luces con vanos desiguales, existe la opción de introducción manual de luces y vanos.

En el caso de elegir una solución generada por el sistema, primero se escoge el número de vanos y, si es posible, se selecciona entre construcción total por voladizos o con tramos extremos parcialmente construidos sobre cimbra.

En el caso de introducción manual de luces y vanos, es el usuario el que debe introducir estos valores, pero teniendo en cuenta las restricciones que se indican por pantalla.

La solución de un vano se refiere a un tramo de ménsulas compensadas, es decir, un vano central de luz importante y dos vanos laterales muy cortos que actúan de contrapeso. El sistema proporciona un croquis de la geometría de estos vanos laterales.

v) En el caso de que se hayan dispuesto tramos ejecutados sobre cimbra en los vanos extremos, el sistema pregunta sobre la posibilidad de que esos tramos presenten esviaje.

vi) El sistema permite grabar las características del tablero. Si se desea, se pueden almacenar, al finalizar la ejecución, todos los datos y resultados del puente de cara a posteriores estudios o modificaciones del mismo.

vii) A continuación, debe definirse la altura de las pilas desde la rasante hasta la cota superior de la cimentación. Esta altura determina tanto el tipo de pila como la vinculación pila-dintel según la función de elección de esquema estático comentada en el punto anterior. La altura máxima ha sido limitada a 60 m, con objeto de no extrapolar soluciones a pilas más altas que requerirían un análisis en teoría de segundo orden. No se han impuesto restricciones a la altura mínima de pilas.

viii) Vinculación pila-dintel. Con los datos introducidos, el sistema decide el tipo de vinculación pila-dintel en cada línea de apoyo y lo muestra en una pantalla meramente informativa.

ix) Peso del carro de avance. El sistema toma, por defecto, un peso del carro de avance de 80 t, pero el usuario puede introducir el peso real del carro de avance que se esté considerando.

Resultados

x) Una vez realizado el cálculo, según se describe en el apartado 6, se muestra un croquis de la geometría de la sección transversal, tanto en clave como en arranque, y se permite visualizar un dibujo a escala (Fig. 6 y 7).

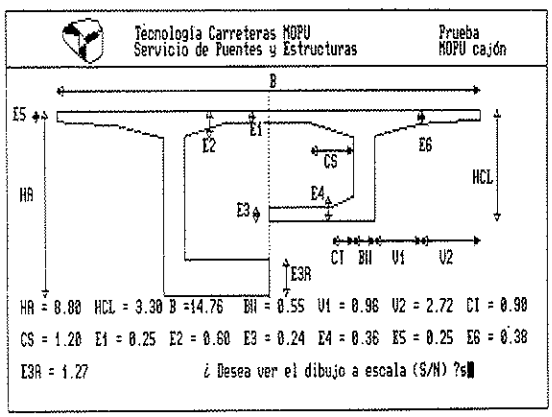


Fig. 6. Ejemplo de diseño de sección transversal.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

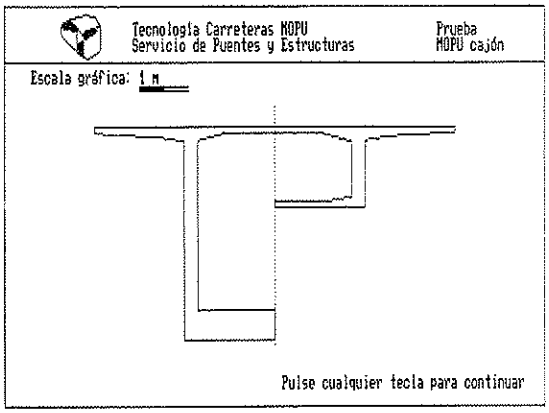


Fig. 7. Dibujo a escala, en pantalla, de la sección definida anteriormente.

xi) En el caso de tener reacciones de tiro en los estribos (puentes construidos totalmente por voladizos), aparece una pantalla informativa indicando el número de tendones, su tipo y la fuerza de tesado necesaria para hacer frente a estas reacciones de tiro.

xii) Pretensado superior. El sistema visualiza el despiece del pretensado superior de cada vano, indicando: número de tendones que se anclan y distancia desde el anclaje a la pila más próxima. Para ello, el sistema ha dividido previamente el tablero en dovelas, dejando 2 m para la dovela de cierre en clave y acortando las dovelas de arranque para acercar su peso al peso de las de clave.

xiii) Pretensado inferior. Podemos diferenciar el despiece de los vanos laterales y el despiece de los vanos centrales.

a) Para los vanos laterales el despiece se realiza en dos familias, de las cuales se indica: el número de tendones, su longitud y, para la familia que no ancla en el extremo del tablero, la distancia del anclaje al extremo (Fig. 8).

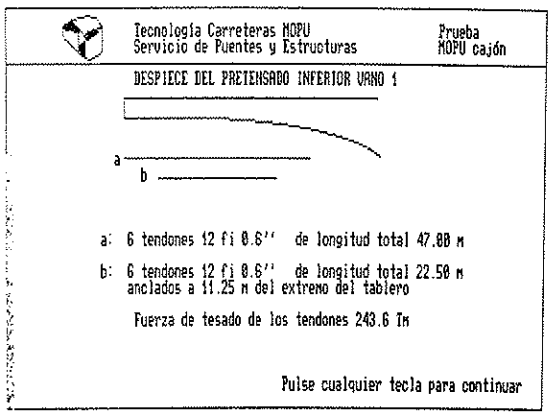


Fig. 8. Esquema de despiece del pretensado inferior en vano lateral.

b) Para los vanos centrales el despiece se ha realizado en cinco familias, de las que se indica: el número de tendones y su longitud. Los tendones están, obviamente, centrados respecto al centro del vano (Fig. 9).

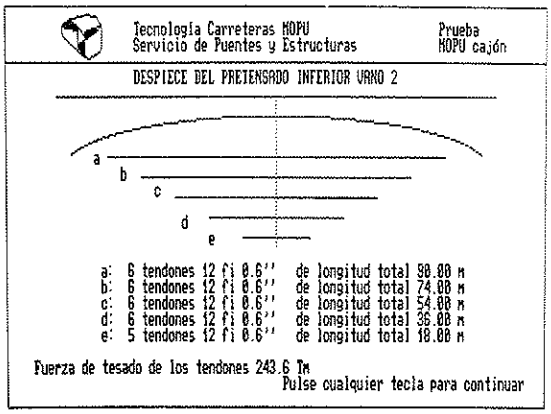


Fig. 9. Esquema de despiece del pretensado inferior en vano central.

Además de los resultados que proporciona este módulo, también se generan los ficheros de mediciones, que se pueden visualizar a través del módulo de mediciones y presupuestos, y los ficheros que permiten la impresión de resultados.

5. PROYECTO DE LAS PILAS

El sistema se ha concebido con tres tipos de pilas diferentes que pueden vincularse al dintel de distintas maneras:

– Pilas masivas (Figura 10).

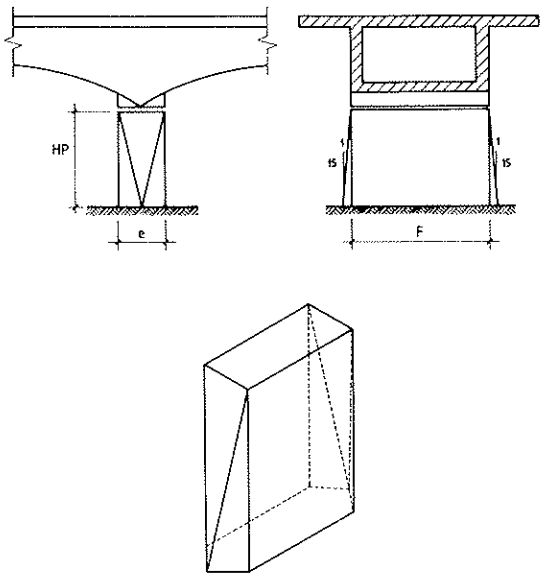


Fig. 10. Esquema de pila maciza.

Aptas para los esquemas viga continua, a poca altura del suelo, uniéndose al dintel mediante articulación fija o deslizante en sentido longitudinal.

De empleo interesante también en puentes con

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

baja altura de rasante situados en zonas sísmicas donde se empotran al tablero, existiendo siempre entonces articulaciones en las claves del mismo.

– Pantallas desdobladas (Figura 11).

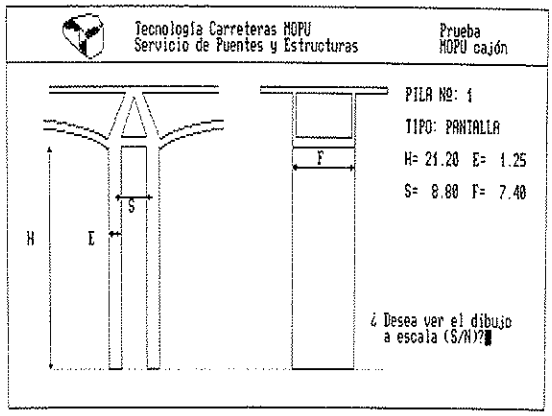


Fig. 11. Pantalla de definición de pilas de tabiques desdoblados.

Aptas para esquemas pórtico con altura media sobre el suelo –normalmente entre 15 y 45 metros– de aquellos puentes que no estén situados en zonas sísmicas de media o alta intensidad.

Su vinculación con el tablero puede ser de empotramiento o articulación (en este último caso, mediante rótulas de hormigón).

– Pilas de sección en cajón (Figura 12).

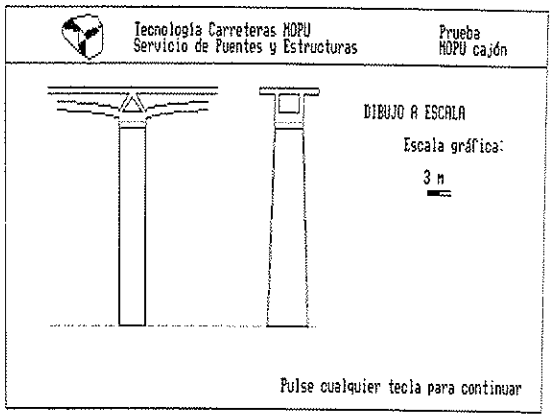


Fig. 12. Dibujo a escala de pila de sección en cajón.

Aptas para puentes con altura de rasante elevada, pudiéndose vincular al dintel mediante empotramiento (pilas centrales) o articulación (pilas extremas), confiándose en este caso la estabilidad durante construcción a un sistema de estabilidad provisional.

Dentro de las limitaciones del sistema experto elaborado, los resultados de la función de selección del esquema estático puesto a punto, han sido, para puentes construidos en España, en regiones de sismicidad baja o media, los siguientes:

– Tableros siempre continuos.
– Pilas masivas articuladas al dintel, para alturas inferiores a 15 m.
– Pilas con pantallas desdobladas, para alturas de rasante comprendidas entre 15 y 30 m y en función de la longitud total del puente.
– Para puentes con alguna pila superior a los 30 m de altura, resultan pilas huecas de sección en cajón, empotrados los centrales y articulados los extremos.

En cuanto al cálculo de esfuerzos y dimensionamiento, se evalúan, para cada una de las pilas, los esfuerzos en base de pila, en 6 hipótesis, combinando las siguientes acciones:

– Acciones verticales y horizontales del tablero sobre la pila: construcción y servicio.
– Acciones sísmicas: longitudinales y transversales.
– Viento: sobre pila y sobre tablero.

Una vez calculadas estas hipótesis, se arma cada pila a flexocompresión esviada y a cortante, en su caso, y se dispone la armadura resultante.

Un último comentario, que no por dejarlo para el final es el menos importante. El sistema experto genera unas pilas estructuralmente eficientes, con unas mediciones adecuadas, pero a veces excesivamente simplonas. Todos estamos de acuerdo en que las pilas son, con mucho, el aspecto arquitectónico más importante de un puente de tramo recto. Por ello, si queremos competir y superar al ordenador, debemos poner, primero, nuestro interés y luego, nuestra mano en ello. Si no, el ordenador nos igualará y, a algunos, incluso logrará superarles.

6. CALCULO ESTRUCTURAL, DISEÑO DEL PRETENSADO Y VERIFICACION SECCIONAL

El proyecto de tablero y pilas descrito en los apartados anteriores sigue un proceso de prueba y error clásico, según los siguientes pasos:

– Elaboración de una propuesta de esquema estático y de geometría seccional.
– Análisis estructural bajo las acciones que luego se comentan.
– Verificación seccional frente a estados límites de servicio ante solicitaciones normales, y frente a estados límites últimos de flexocompresión y tensiones tangenciales.
– Eventual modificación o ajuste de espesores de forjados y almas, así como de la fuerza de pretensado y vuelta al apartado de análisis estructural.

Para la elaboración de la **primera propuesta** relativa al esquema estático y geometría seccional se siguen las pautas indicadas en el apartado 3,

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

mientras que la verificación seccional se realiza utilizando subrutinas que consideran los datos almacenados en los archivos de hipótesis relativos a materiales, coeficientes de seguridad y criterios de verificación. El ajuste de espesores se realiza mediante funciones adecuadas que consideran los resultados de la verificación precedente.

En cuanto al análisis estructural propiamente dicho, el sistema evalúa los siguientes esfuerzos:

- Esfuerzos de peso propio de los voladizos. Para obtenerlos se han tenido en cuenta cinco secciones para cada voladizo, en las que se han calculado sus características mecánicas.
- Esfuerzos debidos al carro de avance durante construcción.
- Esfuerzos de peso propio en tramos cimbrados de vanos extremos.
- Esfuerzos de carga permanente de superestructura.
- Envolvente de esfuerzos de sobrecarga definida en el módulo de hipótesis. En el caso del vigente tren de cargas español se calculan las siguientes hipótesis: vehículo especial en centro luz de todos los vanos, sobrecarga repartida en todos los vanos y en vanos alternos.
- Esfuerzos debidos a gradiente térmico. El gradiente térmico considerado es de 5ºC, concomitante con la sobrecarga.
- Esfuerzos debidos a la redistribución por fluencia.
- Esfuerzos hiperestáticos de pretensado.

En cuanto a los criterios de diseño del pretensado, la máxima unidad de pretensado que se utiliza es función de la luz máxima: para luces máximas inferiores a 120 metros se adopta un tendón de 12 ϕ 0,5"; mientras que, para luces máximas comprendidas entre 120 y 150 metros se adopta 12 ϕ 0,6".

Las pérdidas de pretensado se calculan para un tendón medio; es decir, para el pretensado superior se adopta un tendón de longitud L/4 que discurre por la tabla superior desplazandose en planta B/4; mientras que para el pretensado inferior el tendón mide L/4 y se desplaza en alzado en función de los cantos.

En el caso de tener un tramo de ménsulas compensadas, el pretensado superior se ancla totalmente en los extremos de los vanos de compensación.

7. PROYECTO DE ESTRIBOS, MEDICIONES Y PRESUPUESTO

Estos módulos ya fueron descritos ampliamente en (1) y lo que se ha hecho aquí ha sido efectuar una adaptación a las peculiaridades de los tableros construidos por voladizos sucesivos.

Recordemos que el sistema puede diseñar estribos de muro frontal –macizo o de contrafuertes– o bien estribos abiertos, siguiendo los criterios expuestos en (6).

En cuanto a las cimentaciones, este módulo se refiere exclusivamente al caso de cimentación de pilas, permitiendo, cimentaciones **superficiales** mediante zapatas (cota de zapata, z, situada a menos de cuatro metros del terreno, z = 0), **semiprofundas**, mediante zapatas y pedestales, ($-4{,}00 \leq z \leq -8{,}00$) y **profundas**, mediante pilotes, cuya longitud deduce el sistema experto a partir de los datos geotécnicos de los sucesivos estratos.

El módulo de cimentaciones está conectado con el módulo de construcción, que diseña todos los elementos auxiliares necesarios para la construcción de las mismas en caso de existencia de nivel freático o bien en medio de un cauce (recintos de tablestacas o de pantallas de hormigón, apuntalamientos, eventual tapón de fondo, medios de achique de agua filtrada, península artificial, etc.) procediendo a su medición de cara a su inclusión en el presupuesto.

En cuanto a las mediciones y presupuesto, este módulo procesa las mediciones obtenidas en cada uno de los módulos de proyecto comentados y, a partir de un cuadro de precios definido previamente por el usuario, obtiene el presupuesto total de la obra (Fig. 13). Puede definirse para la obra en cuestión un cuadro de precios distinto, o bien modificar el precio de determinadas unidades de obra e incluso sus mediciones y así efectuar un análisis de sensibilidad del presupuesto.

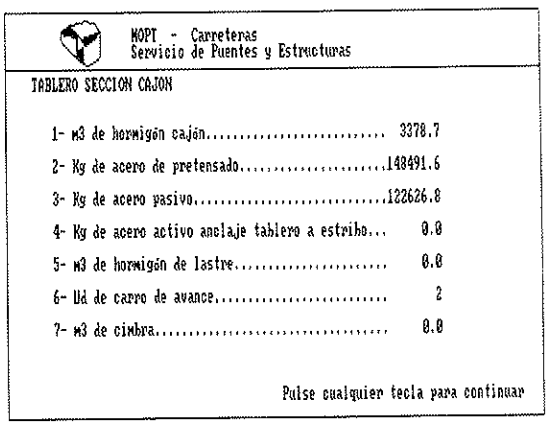


Fig. 13. Mediciones del tablero.

8. SALIDA GRAFICA DE RESULTADOS

Los resultados de los distintos módulos de diseño se guardan en archivos con formato DXF, archivos que pueden recuperarse mediante un programa de dibujo normalizado, a elegir entre cualquiera de los que existen en el mercado.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

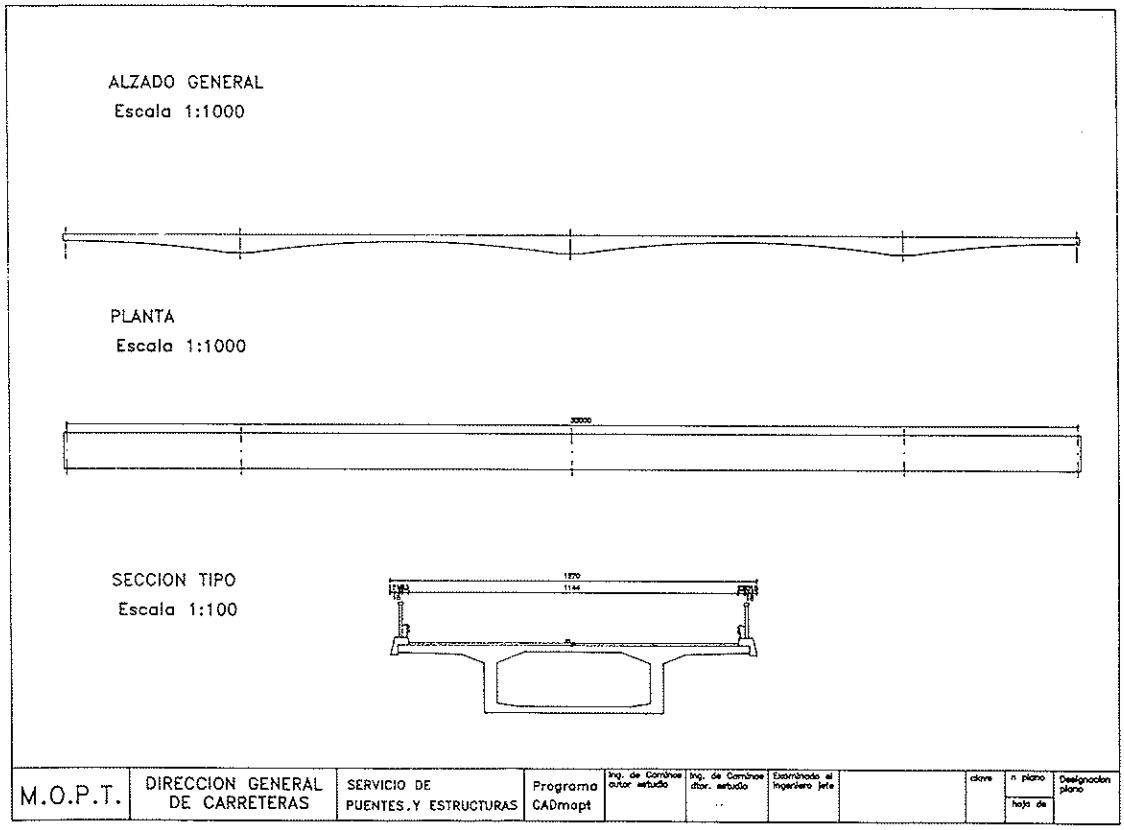


Figura 14. Puente ejemplo. Definición general (Plano dibujado con trazador a partir de ficheros DXF).

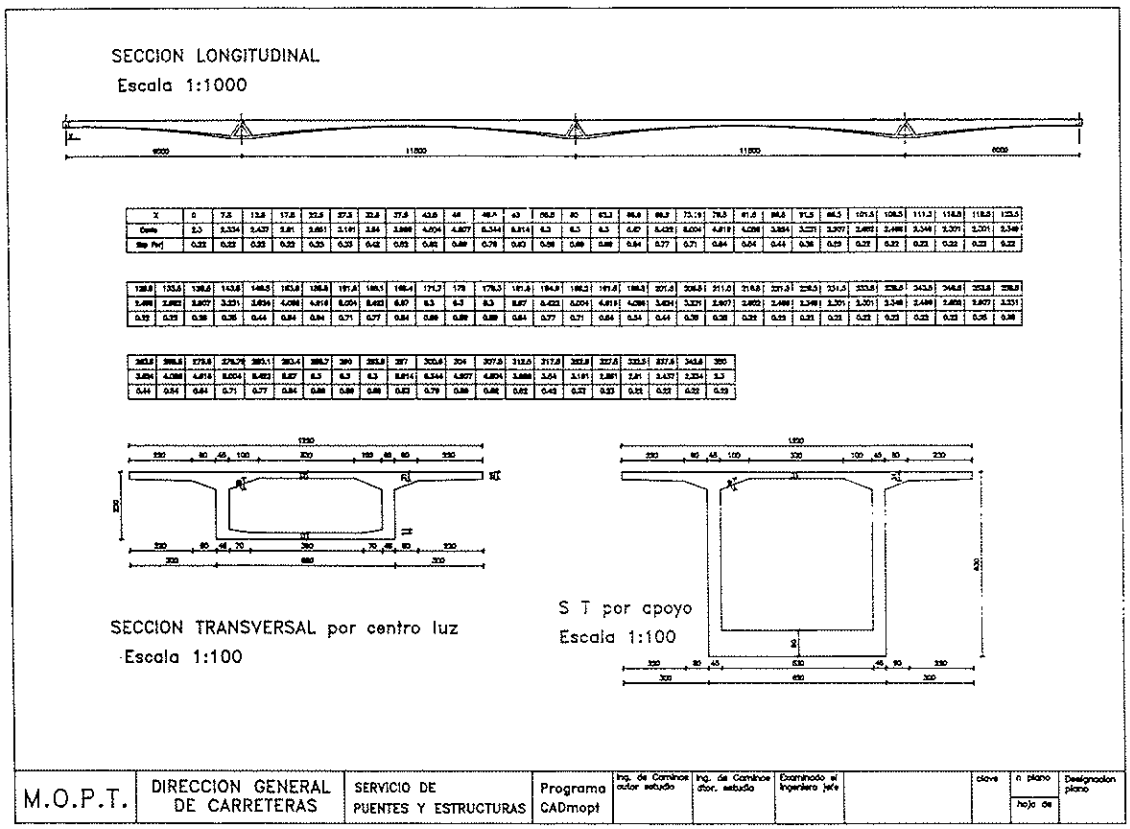


Figura 15. Puente ejemplo. Geometría del tablero.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

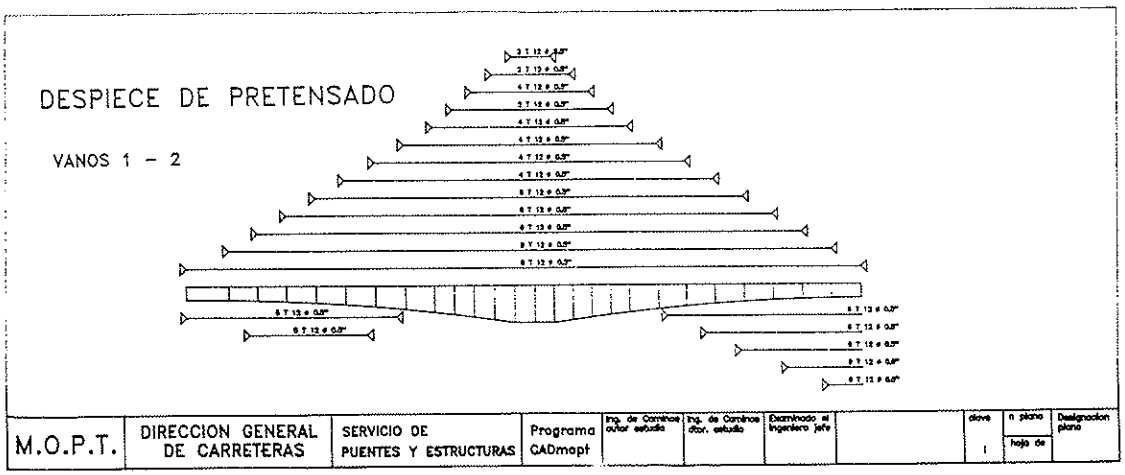


Figura 16. Puente ejemplo. Plano de despiece del pretensado.

Como ejemplo de resultados, en las figuras 14, 15 y 16 se presentan tres planos de un puente proyectado automáticamente; el correspondiente a la definición general –plano que debe completarse con la topografía del terreno–, el de definición geométrica del dintel y el plano general del pretensado, donde se indica su despiece.

9. AGRADECIMIENTOS

La realización de este proyecto de sistema de diseño asistido por ordenador has sido financiada por la Subdirección General de Tecnología, Servicio de Puentes y Estructuras, de la Dirección General de Carreteras del MOPTMA, mediante Convenio C – 1226 con el Departamento de Ingeniería de la Construcción (Puentes) de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Cataluña.

REFERENCIAS

(1) CASAS, J.R.; APARICIO, A.C. *"Sistema de diseño asistido por ordenador para el anteproyecto de puentes de carretera compuestos por tableros de vigas prefabricadas"*. Hormigón y Acero nº 176, pp 19 a 23 A.T.E.P. Madrid, 1990.

(2) APARICIO, A.C.; CASAS, J.R.; RAMOS, G. *"Diseño asistido por ordenador para el anteproyecto de puentes losa de hormigón pretensado"*. Hormigón y Acero nº 184, pp 9 a 22 A.T.E.P. Madrid, 1992.

(3) *"Instrucciones a considerar en el proyecto de puentes de Carretera"*. OM-28/02/1972. Servicio de Publicaciones, MOPT. Madrid, 1980.

(4) Comisión Permanente del Hormigón. *"Instrucción EP-93 para el proyecto y ejecución de obras de hormigón pretensado"*. Servicio de Publicaciones, MOPT. Madrid, 1993.

(5) Comisión Permanente del Hormigón. *"Instrucción EH-91 para el proyecto y ejecución de obras de hormigón en masa o armado"*. Servicio de Publicaciones, MOPT. Madrid, 1991.

(6) ARENAS, J.J.; APARICIO, A.C. *"Estribos de puentes de tramos rectos"*. Departamento de Tecnología de las Estructuras. Santander, 1984.

(7) RAMOS, G.; CASAS, J.R. *"Sistema de diseño asistido por ordenador para estribos de puentes de tramo recto"*. Hormigón y Acero nº 181, A.T.E.P. Madrid, 1991.

(8) SWAN, R.A. *"A feature survey of concrete box spine-beam bridges"*. Technical Report 42.469. Cement and Concrete Association. London, 1972.

RESUMEN

En el artículo se presentan los criterios y esquemas seguidos en la elaboración de un paquete informático para el anteproyecto de puentes de tramo recto, de hormigón pretensado, construidos por voladizos sucesivos, pensado para dar respuesta, de manera rápida y con aproximación suficiente, a la definición completa de este tipo de estructuras. Se describen, de forma resumida, los distintos módulos de que consta el programa informático, así como sus principales funciones, enfatizando los aspectos de diseño de tableros y pilas de los puentes construidos por este procedimiento.

SUMMARY

In the paper the most important guidelines and criteria used in the elaboration of a software package for the computer aided design of continuous prestressed concrete bridges built by the cantilever method are presented. They take into account the possible modifications concerning the live-load model, the specifications and regulations stated in codes and the materials in order to evaluate in a fast and accurate way the economical influence of these modifications in a particular bridge.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

457-0-200

Acción de las cargas concentradas sobre las alas de las vigas en T

Alfredo Páez Balaca
Julián Díaz del Valle
Escuela de Ingenieros de Caminos de Santander

ANTECEDENTES

Las alas de las vigas de sección en T, así como el tablero superior de las vigas en cajón, resultan comprimidas por la acción de los momentos positivos creados por la flexión longitudinal de la pieza. La compresión ejercida, será máxima allí donde máxima sea la magnitud del momento. Inversamente, la compresión será nula en la sección de momento nulo. Entre una y otra, la compresión $\mathbf{N}_f$ sobre el ala irá variando progresivamente, aumentando a medida que se acerca a la sección crítica. Mecánicamente, estos incrementos están producidos por la acción de los correspondientes esfuerzos tangenciales $\mathbf{dN}_f$ transmitidos por el nervio a las alas en la superficie o cara de contacto entre uno y otro elemento, acción longitudinal que, por ser horizontal, recibe la denominación de esfuerzos rasantes.

En un estudio precedente (ref. 6), se analizó el caso particular de vigas en T sometidas a la acción de una carga uniformemente repartida (figura 1), llegándose a la conclusión de que la

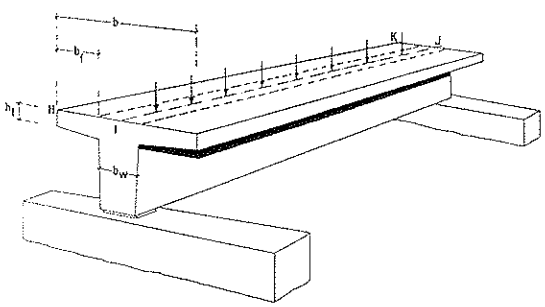


Fig. 1. Viga de hormigón, de sección en T, bajo la acción de una carga uniformemente repartida, aplicada en la anchura b_w del nervio.

sección longitudinal de enlace de las alas con el nervio, no solo está sometida a los conocidos esfuerzos rasantes y de flexión, sino que, además, resulta solicitada por una tracción transversal que, repartida longitudinalmente en la forma que en la figura 2 se representa, alcanza un valor promedio de

$$n_p = (\sigma_t)_p h_f = 0{,}55 \frac{b_f^2}{bz} q_t \qquad (1)$$

expresión en la cual

$$z = d - 0{,}4\, h_f \qquad (2)$$

es el brazo mecánico de la pieza en cuestión, **b** su anchura, $\mathbf{b}_f$ la anchura del ala (figura 1), $\mathbf{h}_f$ el espesor de la misma, **d** el canto útil de la viga y

$$q_t = \gamma_f q$$

la carga límite o producto de la fuerza máxima prevista por el coeficiente amplificador de seguridad, una y otra expresadas en términos de carga por metro lineal de directriz.

CARGAS AISLADAS

Como primer complemento al precedente estudio, se analizan ahora los efectos causados por la acción de cargas, bien sean concentradas en una reducida área, o bien trasversalmente extendidas en una estrecha faja. Para precisar este extremo, comencemos por el caso de una carga concentrada **P**, situada en el plano longitudinal de simetría de la pieza, actuando sobre un rectángulo de dimensiones **t** y $\mathbf{b}_w$, en donde **t** es la dimensión, paralela

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

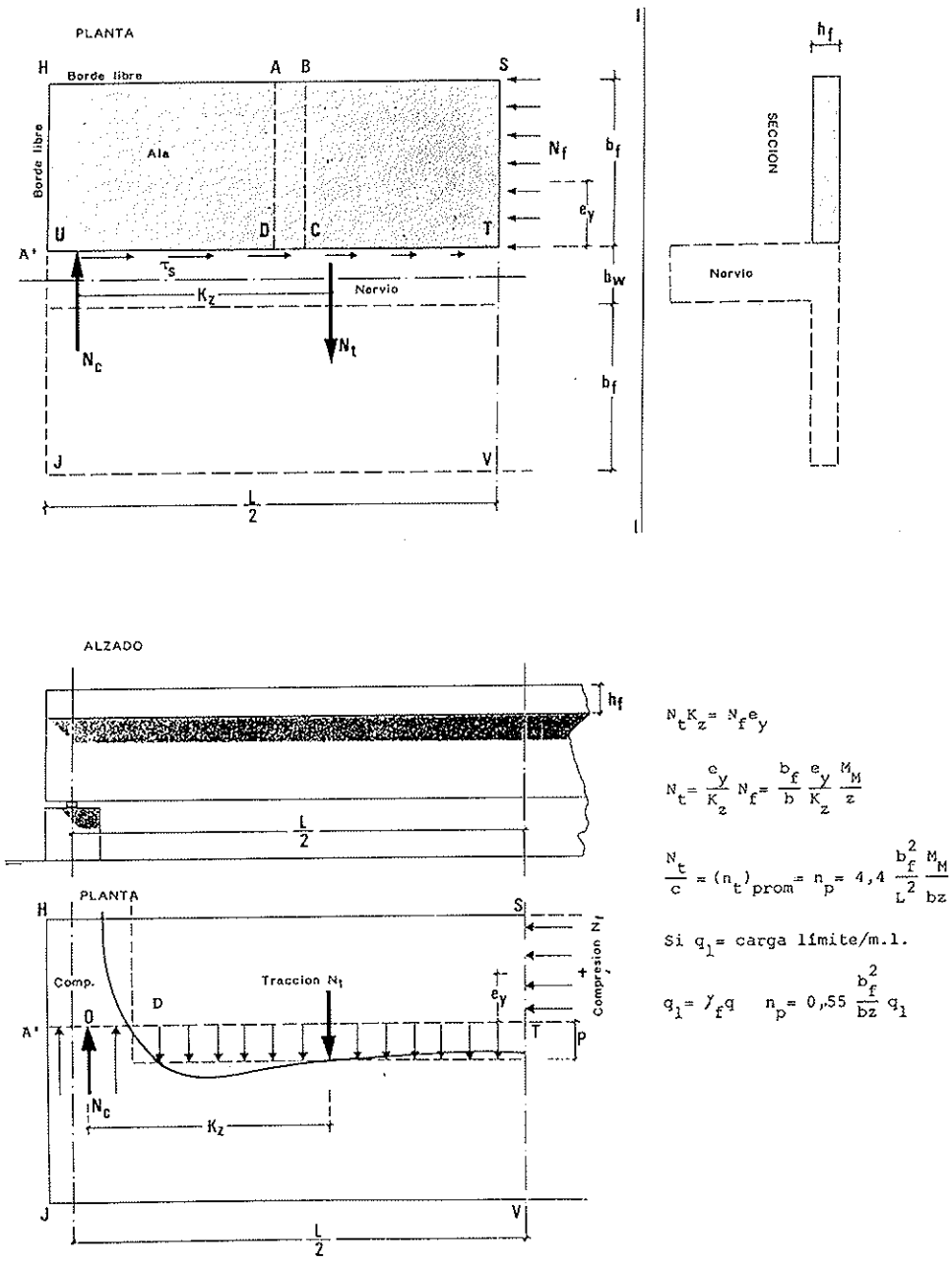


Fig. 2. Distribución esquemática de las tracciones transversales N_T.

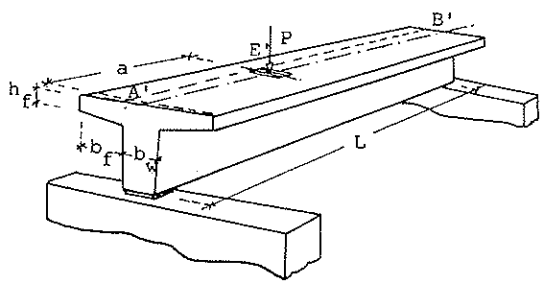


Fig. 3. Viga de sección en T, sometida a la acción de una carga P concentrada en una estrecha faja.

a la directriz, de la zona de reparto, y $\mathbf{b_w}$ la anchura coincidente con la anchura del nervio (figuras 3 y 4).

Si ahora, llamando "**a**" a la distancia de la carga al apoyo más próximo, analizamos el equilibrio del trozo **A'HFE'** de ala (figura 5), nos encontramos con que, siendo constante el esfuerzo cortante en el trecho "**a**" comprendido entre las secciones **A** y **E**,

$$V_A = R_A = (1 - \frac{a}{L})P$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

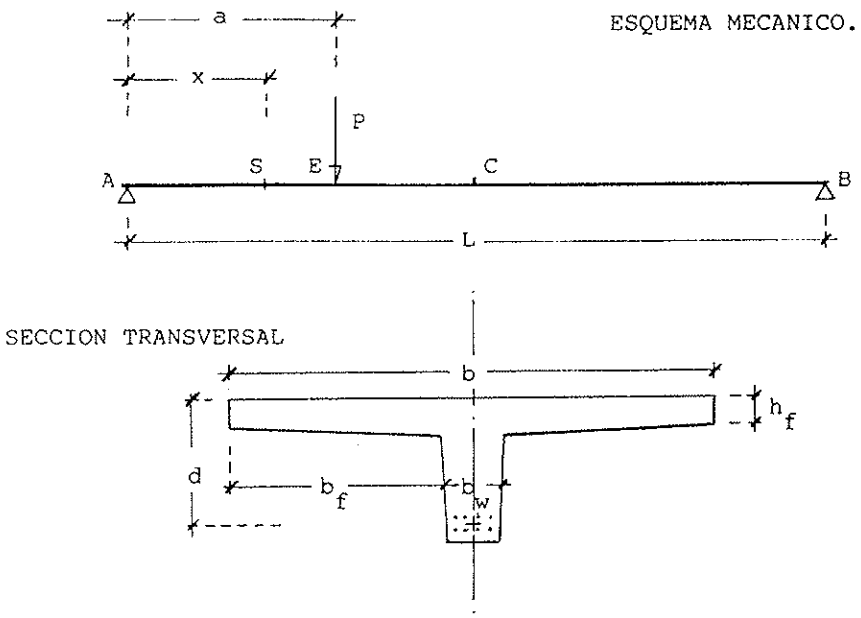


Fig. 4. Esquema mecánico y sección de la viga.

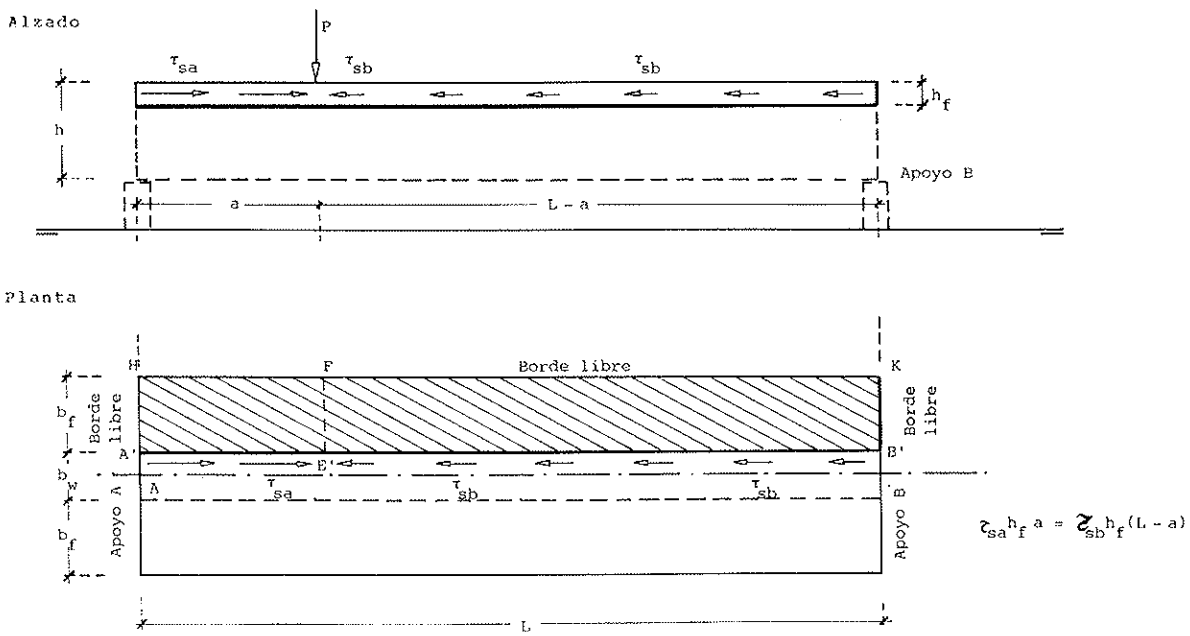


Fig. 5. Tensiones rasantes en la sección de empotramiento del ala en el nervio.

constantes serán las tensiones rasantes en ese tramo, de tal modo que si $\mathbf{N_f}$ es el esfuerzo longitudinal de compresión que actúa sobre la anchura de ala $\mathbf{b_f}$

$$N_f = \frac{b_f}{b}\,\frac{M_a}{z} = \frac{b_f}{b}\,\frac{a}{z}\left(1 - \frac{a}{L}\right)P =$$

$$= \tau_{sa} h_f a = \tau_{sb} h_f (L - a) \qquad (3)$$

en donde $\mathbf{h_f}$ es el espesor de ala (figuras 1, 2, 3 y 4), $\mathbf{z}$ el brazo mecánico de la viga y τ_s la tensión horizontal rasante entre ala y nervio a un lado τ_{sa}, y otro τ_{sb}, de la sección que dista "**a**" del apoyo **A**.

Hasta ahora, todo es elemental y, por ello, sobradamente conocido. La novedad aparece cuando, siguiendo tan sencillo razonamiento, deducimos con sorpresa que la ecuación 3 no es suficiente para restablecer el equilibrio del fragmento de ala supuesto aislado en el espacio, sino

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

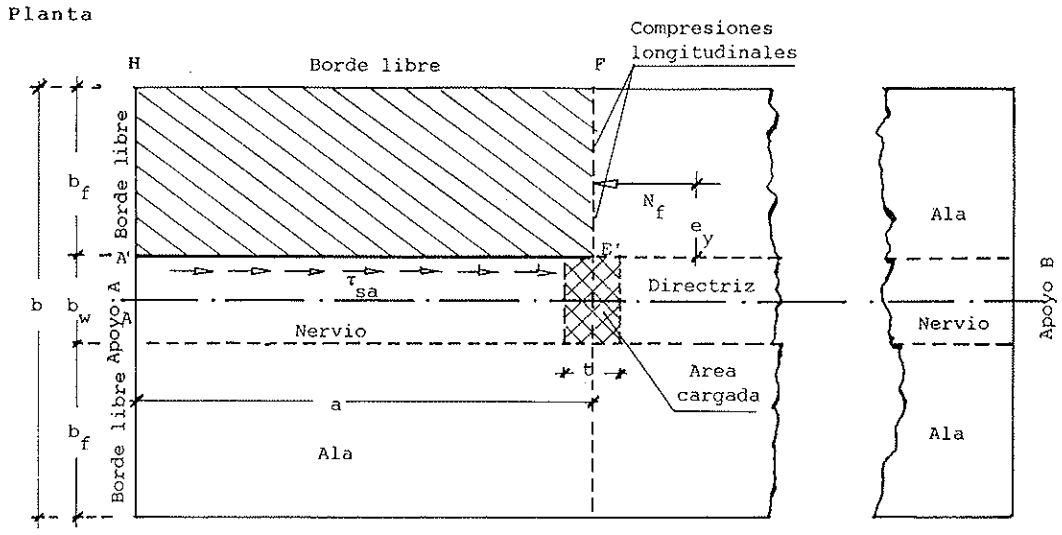


Fig. 6. Area A' HFE' de ala, y fuerzas exteriores a ese fragmento, como condiciones de borde que lo enlazan a la viga AB.

que, siendo $\mathbf{e}_y$ la excentricidad de la fuerza $\mathbf{N}_f$ respecto a la sección **A'E'B'**, debe coexistir un par de fuerzas transversales $\mathbf{N}_C$ y $\mathbf{N}_T$ que, siendo iguales entre sí, satisfagan la necesaria ecuación de equilibrio de momentos:

$$N_T K_z = N_f e_y \qquad (4)$$

en donde $\mathbf{K}_z$ (figura 6), es el brazo del par $\mathbf{N}_T = \mathbf{N}_C$.

Por supuesto que intuimos que la excentricidad $\mathbf{e}_y$ debe ser algo menor que **0,5** $\mathbf{b}_f$ ya que nos consta que las tensiones longitudinales de compresión no se reparten por igual en toda la anchura $\mathbf{b}_f$ del ala. Lógicamente, debemos pensar que el valor de $\mathbf{e}_y/\mathbf{b}_f$ será tanto menor cuanto mayor sea la extensión $\mathbf{b}_f$ del ala, en relación con la longitud **L** de la viga. Más imprecisa es la posición de las fuerzas del par $\mathbf{N}_C = \mathbf{N}_T$. Suponemos que estas resultantes transversales, una de compresión y otra de tracción, deben repartirse ortogonalmente a la sección de empotramiento del ala con el nervio (figura 6), pero poco sabemos acerca del volumen y distribución de esas tensiones transversales.

Tanto para confirmar la presencia de estas tensiones, hasta el presente injustamente menospreciadas, como para evaluar su magnitud y definir su reparto a lo largo de la directriz de la pieza, nos vemos obligados a recurrir al Método de los Elementos Finitos aceptando, como una primera pero suficiente aproximación, la hipótesis de una directa proporcionalidad entre tensiones y deformaciones (Teoría de la Elasticidad).

A tal efecto, supongamos, como punto de partida, el caso más elemental de una placa rectangular **A'HKB'** (figura 5) de longitud **L**, anchura $\mathbf{b}_f$, y espesor $\mathbf{h}_f$, con sus bordes **A'H, HK** y **KB'** libres, y dividida en dos tramos, el de la izquierda, de longitud "**a**", y el de la derecha, de longitud **L-a**. Bajo la única y exclusiva acción de una carga aislada **P**, esta losa, representativa del estado de tensión del ala izquierda de la viga **AB** (figuras 3 y 4), estará sometida, en el borde **A'E'**, a unas tensiones tangenciales rasantes τ_{sa} que se mantienen constantes en toda la extensión "**a**", mientras que, en el tramo derecho **E' B'**, las tensiones son más reducidas e iguales a τ_{sb}. Como estas acciones exteriores se suponen son las únicas actuantes sobre la placa:

$$\tau_{sa} h_f a = \tau_{sb} h_f (L - a) \qquad (5)$$

Para que esta losa plana, supuesta aislada en el espacio, se corresponda con el estado tensional del ala **A'HKB'** de la viga **AB**, se precisa que el único borde no libre, el **A'B'** mantenga, después de la deformación, la alineación recta **A'B'** del origen.

La vinculación de la tensión tangencial τ_{sa} con la magnitud de la carga **P**, está claramente definida mediante la precedente ecuación 3. Para unas determinadas dimensiones geométricas, a cada tensión τ_{sa} le corresponde una sola carga **P**, y viceversa: a cada carga **P** le corresponde una tensión τ_{sa} y solo una.

Una vez establecido, de este modo, el presente problema de la Elasticidad Plana, el Método de los Elementos Finitos nos permite determinar los respectivos estados de tensión, definiéndonos, tanto la distribución de compresiones normales a la sección **E'F**, como las tensiones normales que aparecen a lo largo del borde **A'B'** en razón a su supuesta rigidez transversal. La primera de estas distribuciones nos permite deducir (figura 6) la excentricidad $\mathbf{e}_y$ de la resultante $\mathbf{N}_f$ de las compresiones generadas en el ala por la flexión de la viga bajo la acción de la carga **P**. La segunda, la mayor

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

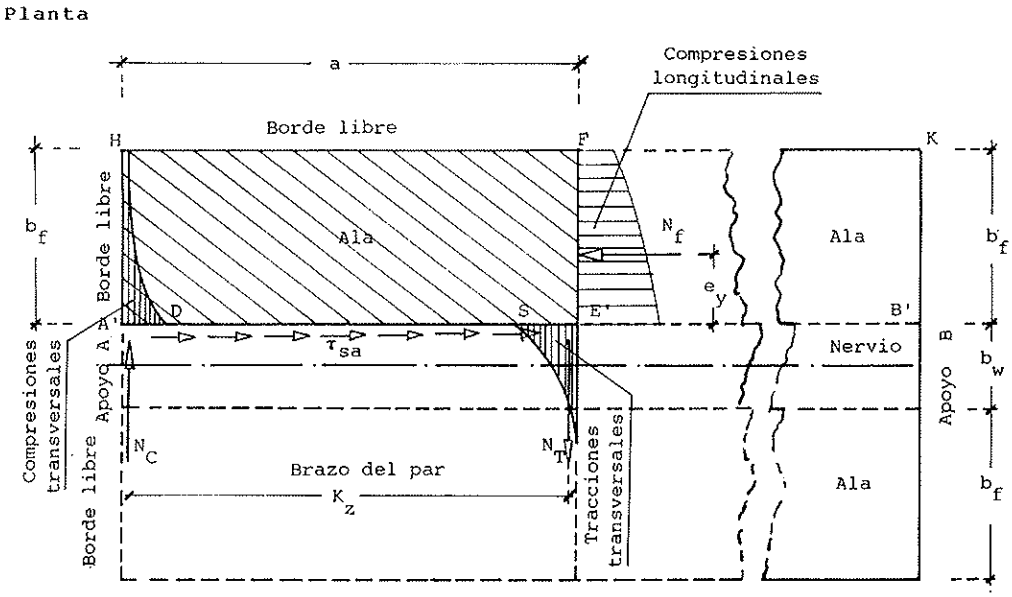


Fig. 7. Equilibrio de fuerzas exteriores en torno al fragmento de ala A' HFE'.

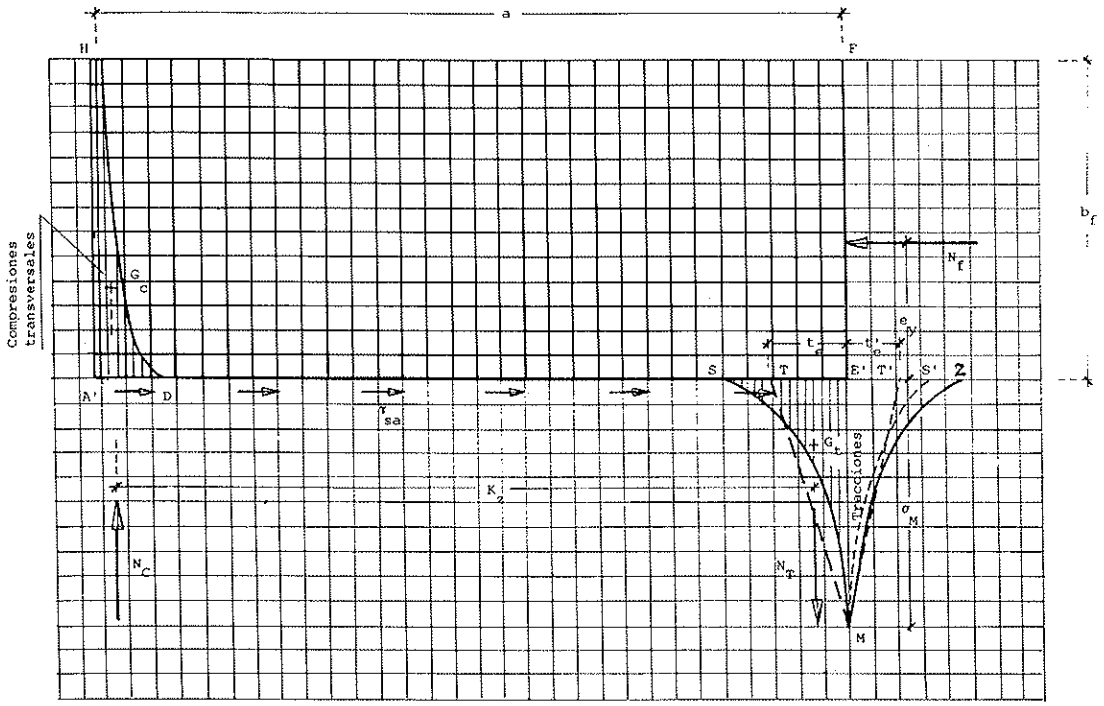


Fig. 8. Detalle de la distribución de tensiones transversales, así como definición del área TE'M, como expresión del triángulo equivalente de tensiones.

o menor concentración de tensiones transversales, tanto en las proximidades del apoyo, como en torno a la sección crítica de aplicación de la carga (figura 7). La circunstancia de que el Método de los Elementos Finitos sea un procedimiento esencialmente numérico, nos obliga a reiterar las diferentes soluciones a las cuales se llega cuando la carga está en el centro, en la sección de cuartos, en la de octavos, y en otras intermedias, así como cuando la relación $\mathbf{b_f/L}$ varía de 0,05 a 0,10 o incluso a 0,15 como un valor extremo, fuera ya de las limitaciones propias de la llamada **anchura eficaz del ala.**

En la figura 8 se han representado, de un modo esquemático, los repartos de las tracciones transversales σ_t en las vecindades de la sección crítica, y de las compresiones, también transversales, en las proximidades del apoyo **A**. En el primer caso, identificando el volumen de tracciones $\mathbf{N_T}$ con el

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

área rayada, se advierte la posibilidad de evaluar $\mathbf{N_T}$ mediante la superficie:

$$0{,}5\ TE' \times E'M$$

del triángulo equivalente de tensiones. Habida cuenta de que el espesor de la losa se supone constante e igual a $\mathbf{h_f}$, llamando $\mathbf{t_e}$ a la base **TE'** del triángulo equivalente de tensiones y

$$\sigma_M = (\sigma_t)_{máx}$$

a su altura o máximo valor, resulta que:

$$N_T = 0{,}5\ t_e h_f \sigma_M \qquad (6)$$

expresión que vincula la extensión equivalente **TE'** de las tracciones σ_t con el valor σ_M del pico de tensiones. Como se indica en la figura 8, el punto $\mathbf{G_t}$ indica la posición del baricentro del área rayada, como lugar de paso de la resultante $\mathbf{N_T}$ de las tracciones transversales.

Más complejo es el reparto de las fuertes compresiones transversales que se concentran en la estrecha faja **A'D** de las inmediaciones del apoyo **A**. El hecho de que, en la práctica, la viga presente ordinariamente una amplia culata de apoyo en vez de terminar abruptamente al filo de la línea o charnela teórica de sustentación, hace que las compresiones desborden realmente el eje **A'H** transversal, al menos en la forma que se indica en la citada figura 8. Sea como fuere, el caso es que el brazo mecánico $\mathbf{K_z}$ se expresa como la separación existente entre los respectivos baricentros $\mathbf{G_c}$ y $\mathbf{G_t}$ de las áreas rayadas.

Si de un modo general denominamos:

$$k_1 = b_f/L; k_2 = e_y/b_f; k_3 = e_y/L = k_1 k_2; k_4 = K_z/L \qquad (7)$$

los valores de $\mathbf{N_f}$ y $\mathbf{N_T}$ pueden expresarse en la forma:

$$N_f = \frac{b_f}{b}\ \frac{M_M}{z} = \frac{b_f}{b}\ \frac{a}{L}\left(1 - \frac{a}{L}\right)\ \frac{L}{z}\ P = \qquad (8)$$

$$= k_5 \frac{b_f}{b}\ \frac{L}{z}\ P\ ;\ k_5 = \frac{a}{L}\left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

y puesto que

$$N_T = \frac{e_y}{K_z}\ N_f = \frac{k_3}{k_4}\ k_5\ \frac{b_f}{b}\ \frac{L}{z}\ P = \qquad (9)$$

$$= k_6 \frac{b_f}{b}\ \frac{L}{z}\ P\ ;\ k_6 = \frac{k_3}{k_4}\ k_5$$

De acuerdo con la ecuación (6):

$$N_T = k_6 \frac{b_f}{b}\ \frac{L}{z}\ P = 0{,}5\ t_e h_f \sigma_M = \qquad (10)$$

$$= 0{,}5\ k_7 h_f L\ \sigma_M\ ;\ k_7 = t_e/L$$

luego la máxima tensión σ_M localizada en el pico de tensiones **M** es:

$$\sigma_M = 2\ \frac{N_T}{t_e h_f} = 2\ \frac{k_6}{k_7}\ \frac{b_f}{b}\ \frac{P}{h_f z}$$

o bien

$$\sigma_M = k_8\ \frac{b_f}{b}\ \frac{P}{h_f z}$$

siendo

$$k_8 = 2\ \frac{k_6}{k_7} \qquad (11)$$

Tomando como variables paramétricas las relaciones

$$a/L = 0{,}5\ \ 0{,}25\ \ 0{,}13$$

$$b_f/L = 0{,}05\ \ 0{,}10\ \ 0{,}15$$

se obtienen los siguientes valores numéricos para los diferentes coeficientes **k**:

Valores de k_1

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,05	0,10	0,15
0,25	0,05	0,10	0,15
0,13	0,05	0,10	0,15

Valores de k_2

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,48	0,46	0,44
0,25	0,48	0,45	0,41
0,13	0,46	0,40	0,33

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Valores de k_3

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,024	0,046	0,066
0,25	0,024	0,045	0,061
0,13	0,023	0,040	0,049

Valores de k_4

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,460	0,426	0,393
0,25	0,214	0,192	0,183
0,13	0,100	0,100	0,098

Valores de k_5

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,25	0,25	0,25
0,25	0,187	0,187	0,187
0,13	0,113	0,113	0,113

Valores de k_6

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,013	0,027	0,042
0,25	0,021	0,044	0,063
0,13	0,026	0,045	0,057

Valores de k_7

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,057	0,107	0,158
0,25	0,065	0,116	0,157
0,13	0,068	0,102	0,126

Valores de k_8

a/L	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,50	0,45	0,51	0,54
0,25	0,65	0,76	0,80
0,13	0,76	0,88	0,91

Considerándose que, en la práctica, los resultados más interesantes son los que definen la magnitud de la tracción transversal $\mathbf{N_T}$ en la sección crítica, la semi-anchura $\mathbf{t_e}$ de influencia, y el valor de la máxima tensión σ_M local, se han dibujado los gráficos que aparecen en las figuras 9, 10 y 11, que determinan los coeficientes adimensionales $\mathbf{k_6}$, $\mathbf{k_7}$ y $\mathbf{k_8}$ que intervienen en las respectivas formulaciones:

$$N_T = k_6 \frac{b_f}{b} \frac{L}{z} P$$

$$t_e = k_7 L$$

$$\sigma_M = k_8 \frac{b_f}{b} \frac{P}{h_f z}$$

CAMPOS DE ACCION

En las figuras 7 y 8, aparecen dibujados los gráficos representativos del reparto tensional en la cara de contacto del nervio con el ala. A la izquierda del dibujo, en las vecindades del apoyo, se observa una fuerte concentración de compresiones que abarca el segmento **A'D**. Si este volumen de compresiones supone un esfuerzo total $\mathbf{N_C}$, su fuerza antagónica, el esfuerzo de tracción $\mathbf{N_T}$, se sitúa a una distancia $\mathbf{K_z}$ a un lado y otro **SE'** y **E'Z** de la sección **E'F** que dista "**a**" del apoyo **A**. Evidentemente, el trazado **MZ** no es simétrico del **MS**. Solamente cuando la distancia "**a**" fuera igual a **0,5 L**, es cuando una media luz es igual a la otra mitad. De un modo suficientemente aproximado puede decirse que si denominamos $\mathbf{t'_e}$ a la distancia E'T' representativa de la base del triángulo equivalente del lado **L–a** y $\mathbf{N'_T}$ el esfuerzo de tracción que se desarrolla en el área **E'S'** (figura 8)

$$N_f e_y = N_T K_z = N'_T K'_z$$

$$N'_T = \frac{a}{L-a} N_T \quad ,, \quad t'_e = \frac{a}{L-a} t_e$$

Conviene repetir que el diagrama de tensiones σ_y que aparece rayado en las figuras 7 y 8, se refiere al reparto de tensiones, normales al borde o cara vertical **A'E'** en los distintos puntos o distancias **x** al apoyo **A'**. Si, para simplificar, admitimos que en el interior (no en el borde) del ala, las tensiones

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

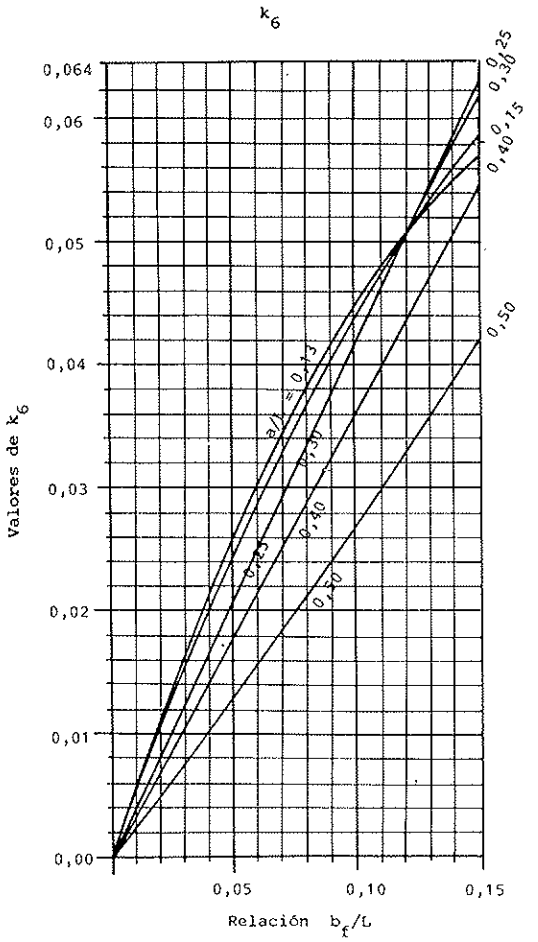


Fig. 9. Abaco que define el valor del coeficiente K_6.

σ_y aumentan proporcionalmente con la distancia al borde libre longitudinal ($y = b_f$), se obtiene, como resultado, que la tensión σ_y transversal en un punto cualquiera del ala es:

$$\sigma_y = k_9 \, \sigma_M$$

siendo k_9 el coeficiente adimensional que se define en la figura 12.

Como acaba de indicarse, las tracciones $\mathbf{N_T}$ aparecen equilibradas por una fuerte concentración de compresiones transversales $\mathbf{N_C}$ que se extienden en una estrecha faja **A'D**. Dado que, en la práctica, la viga rebasa la sección teórica de apoyo, estas compresiones desbordan la línea ideal **A'H** para extenderse por la culata o reborde que se dispone en el extremo de la pieza. Si denominamos $\mathbf{x_o}$ (figura 12) la distancia del punto **D** de compresión nula al eje A' del apoyo, resultará que:

$$x_o = k_o L$$

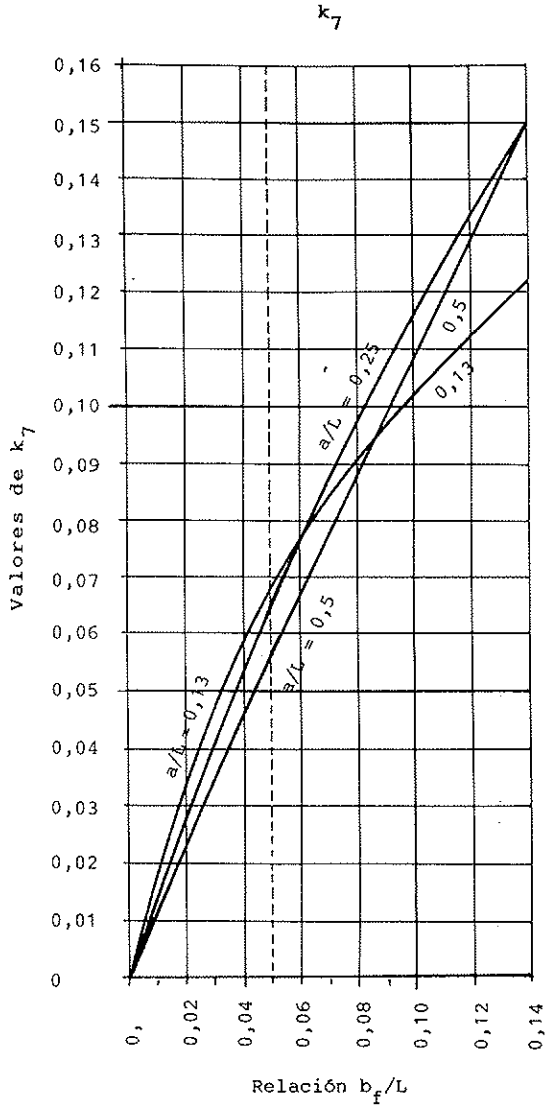


Fig. 10. Abaco que define el valor del coeficiente K_7.

siendo $\mathbf{k_o}$ un coeficiente cuyo valor depende, no sólo de la relación **a/L**, sino también del cociente $\mathbf{b_f/L}$ o desarrollo lateral del ala en relación con la luz **L** de la viga o, de un modo más general, con la distancia entre secciones de momento nulo. En términos más precisos puede decirse que, en los respectivos análisis numéricos de los diferentes casos resueltos, se encontraron los siguientes valores de $\mathbf{k_o}$:

Valores numéricos de $\mathbf{k_o}$

$\frac{a}{L}$	Relación b_f/L		
	0,05	0,10	0,15
0,13	0,035	0,053	0,072
0,25	0,045	0,072	0,100
0,50	0,055	0,094	0,130

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Para facilitar la evaluación de este coeficiente y eludir la penosa doble interpolación, se ha construido el gráfico de la figura 13 como solución más práctica para permitir la cómoda estimación de este último coeficiente $\mathbf{k}_8$.

CARGAS MOVILES

Cuando una carga aislada transita sobre una viga en T, se produce un pico o concentración de tensiones transversales de tracción en la sección donde la carga actúa (figura 12). Puesto que semejante circunstancia sucede en todas las posiciones de la carga, resulta que la armadura transversal requerida en cada punto, variará de una a otra sección transversal de la pieza y, dentro de cada una de ellas, con la distancia al borde libre del ala. Siendo

$$\sigma_M = k_8 \frac{b_f}{b} \frac{P}{h_f z} \qquad (11)$$

el valor de esa tensión transversal, máxima cuando la carga actúa sobre la propia sección, y máxima también en el punto de empotramiento del ala con el nervio, basta con cambiar la colocación de los parámetros de la figura 11, para que el valor del coeficiente $\mathbf{k}_s$ quede ahora expresado en la forma que se indica en la figura 14. Según se

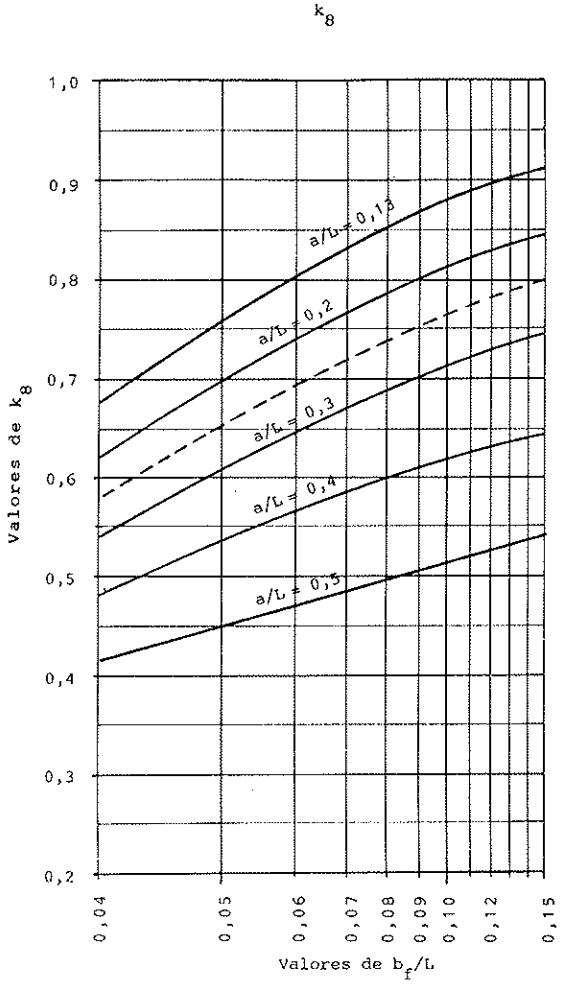


Fig. 11. Abaco que define el valor del coeficiente K_8.

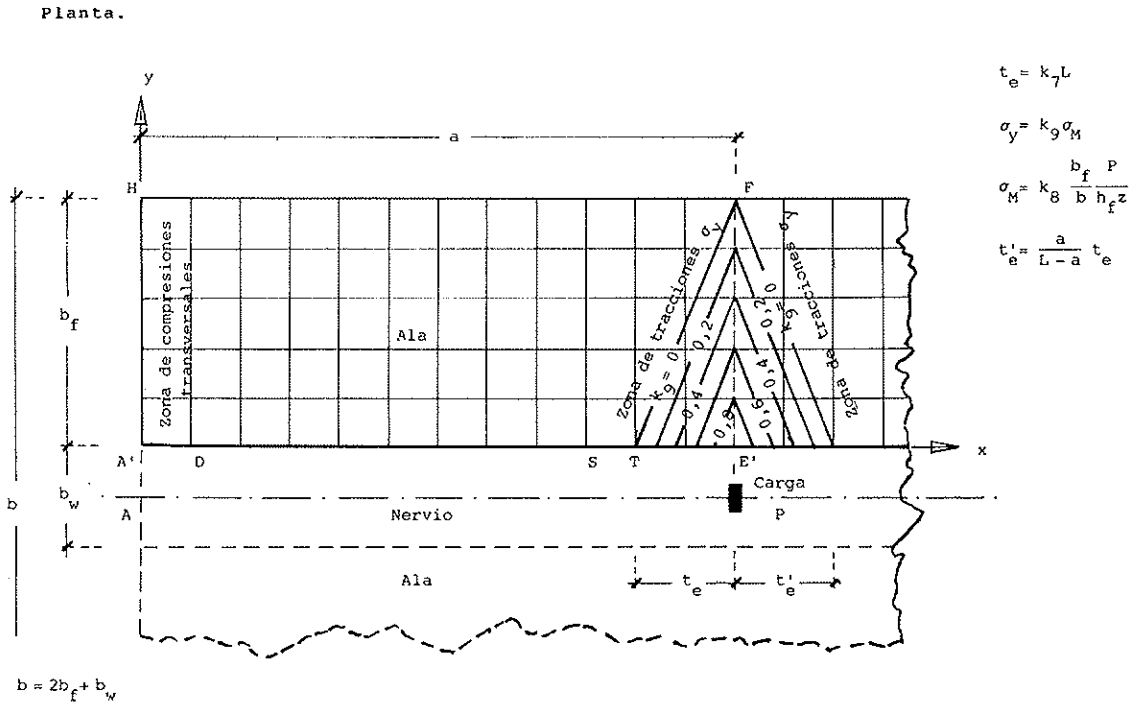


Fig. 12. Esquema simplificado del campo de tracciones σ_y transversales, creado en el ala por la acción de la carga aislada P.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

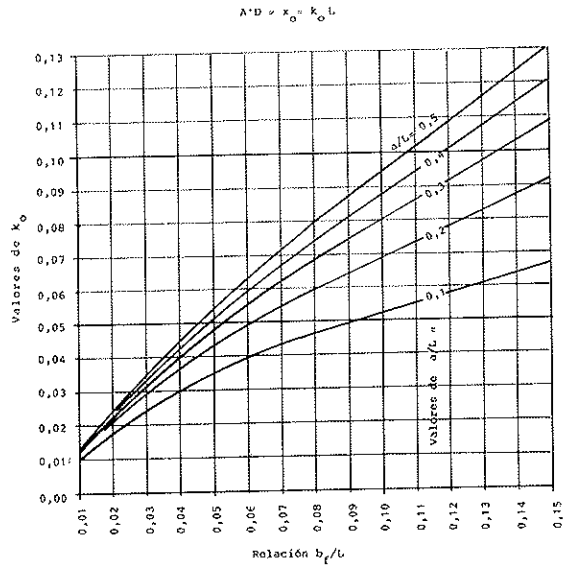


Fig. 13. Coeficiente K_0 que determina la extensión de la zona de compresiones transversales en las inmediaciones del apoyo de la viga.

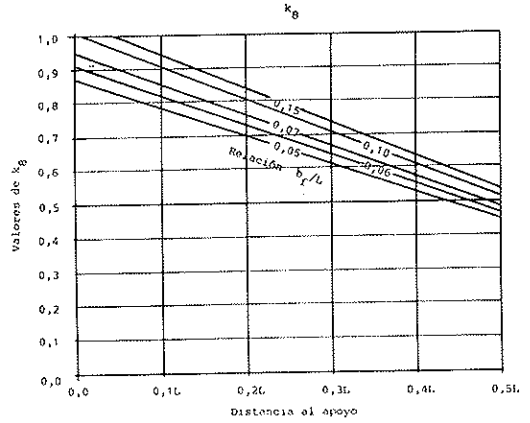


Fig. 14. Tensiones transversales máximas, σ_M, generadas por la acción de una carga móvil P que transita sobre la viga.

deduce de la simple observación del gráfico, la separación de las barras que constituyen esta armadura transversal debe variar con la distancia **"x"** de la sección al apoyo, así como con la distancia **"y"** (perpendicular a **"x"**) bien sea al borde exterior del ala, o bien a la separación o alejamiento en horizontal al eje o directriz de la viga.

Considerándose que esta doble dependencia, complica en exceso la disposición de las barras, se propone la subdivisión del ala en cuatro porciones o cuarteles **A, B, C** y **D** (figura 15) de igual densidad de armaduras, es decir, de una misma separación de barras transversales. Obsérvese que, según la figura 12, a una distancia del nervio igual a **0,5** $\mathbf{b_f}$, se requiere la mitad de la armadura que en el citado borde **A'E'**, lo cual significa que tanto en la zona B como en la zona C (figura 15), la armadura estará formada por unas barras dispuestas con una separación doble a la distancia que mantienen las barras de las zonas A y D, respectivamente. Finalmente, el hecho de que la cuantía de armaduras en la zona D sea del orden del 80% de la A (la más densa), supone que, con esta parcelación del ala, podemos obtener una economía de acero del 33% de la requerida en la hipótesis de disponer, en toda la extensión del ala, una misma plantilla de barras, con la misma separación en toda la longitud L.

EPILOGO

A título de comentario final conviene resaltar que, en el estudio desarrollado, se ha partido de la hipótesis consistente en admitir la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones. Esta hipótesis, considerada como fundamental en el llamado **cálculo lineal**, se ha aceptado en base a las siguientes consideraciones:

1.º Sólo bajo esta premisa, es válido el principio de superposición de efectos, principio que se considera necesario admitir ya que, en la práctica, son muy frecuentes los casos en los cuales las cargas aisladas inciden o actúan al tiempo que las cargas repartidas cuando, por su naturaleza, unas y otras solicitaciones requieren unos planteamientos específicos que conducen a una formulación diferente.

2.º El hecho de que, en las proximidades del agotamiento resistente del hormigón, la dependencia entre las tensiones y las deformaciones pueda estar mejor representada por el normativo diagrama parabólico-rectangular, no implica que sea esta la relación que más apropiadamente vincule ambas variables en el análisis tensional del conjunto estructural. Salvo la zona en que se produce la rotura, el hormigón del resto de las secciones se deforma dentro de un régimen de tensiones moderadas. Así por ejemplo, bajo la accidental influencia de unas solicitaciones consideradas como máximas previsibles, las tensiones no deben rebasar el valor de

$$\sigma_M = \frac{f_{ck}}{\gamma_f \gamma_c}$$

cociente que, en los casos más frecuentes de γ_f = = 1,6 γ_c = 1,5, se reduce a

$$\sigma_M = 0{,}42\ f_{ck}$$

es decir, que la máxima tensión previsible será

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Cargas móviles.

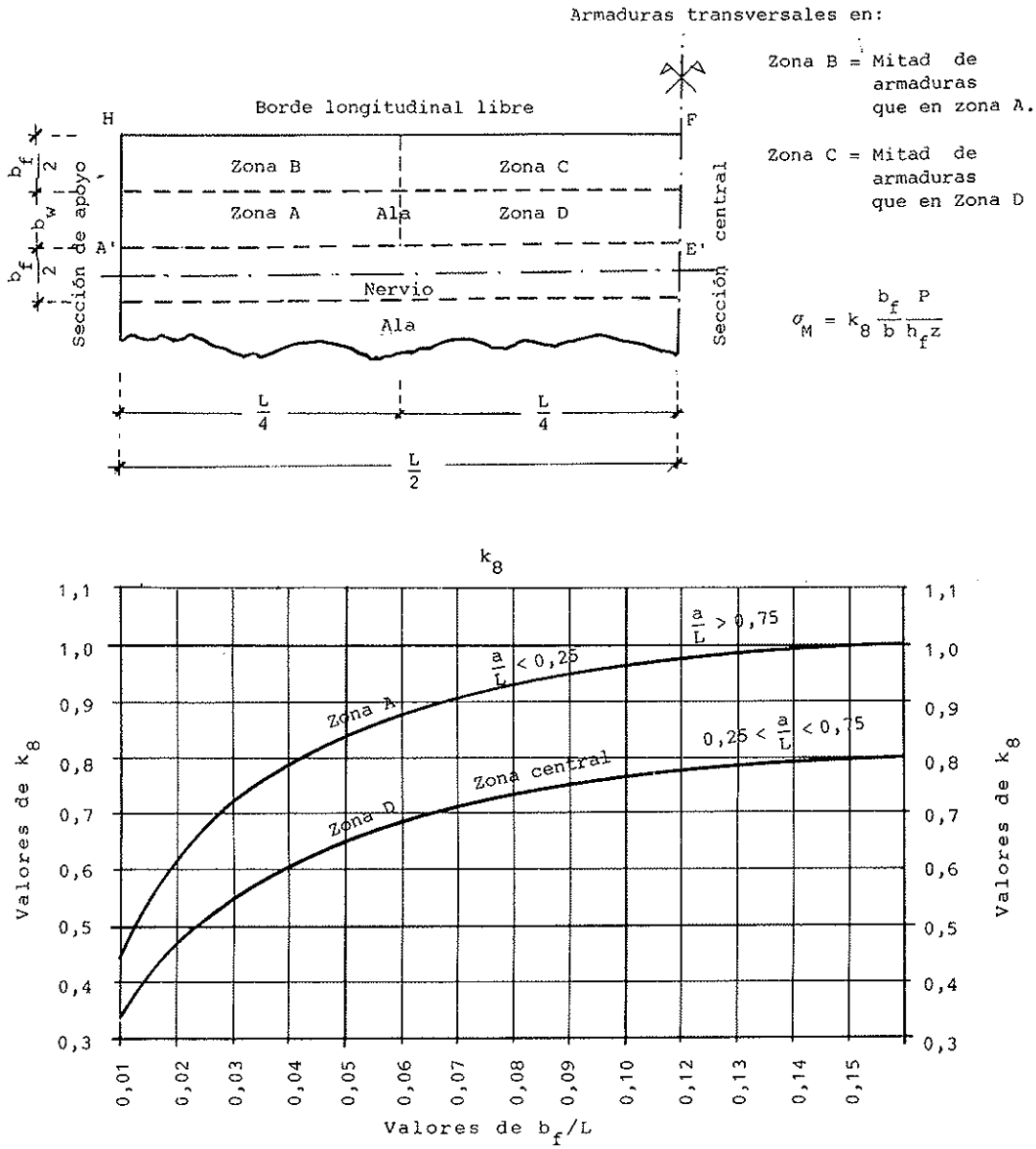


Fig. 15. Cargas móviles: coeficiente que valora la magnitud del esfuerzo de tracción transversal en los cuatro cuarteles de una semi-viga.

$$\sigma_M = 0{,}35\ f_{cm}$$

del orden de la tercera parte de la resistencia media. Excepcionalmente, en presencia de unas sobrecargas límites, tan elevadas como para poderlas calificar de imprevisibles

$$q_l = \gamma_l q$$

es cuando pueden presentarse casos de tensiones tan fuertes como

$$\sigma_l = 1{,}6\ \sigma_M = 0{,}6\ f_{cm}$$

tensiones que, el hormigón, debe soportar con cierta suficiencia. Sin embargo, cuando por una infortunada coincidencia, es en esa sección tan fuertemente solicitada donde, por un inadvertido motivo, se han volcado unas masas tan deficientes como para que su resistencia sea

$$f_c < 0{,}56\ f_{cm} < 0{,}7\ f_{ck}$$

es cuando se produce la inesperada rotura. Obsér-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

vese que no se trata de una deficiencia en la calidad exigida al material, sino de un defecto local ocasionado por circunstancias coyunturales diversas, que sólo afectan a una o pocas amasadas vertidas en una restringida zona. En consecuencia, y con arreglo a estos criterios, el mecanismo que mejor representa el funcionamiento global de la estructura es el de imaginar una rótula plástica en una determinada sección crítica y suponer que el resto del entramado resistente evoluciona elásticamente. Puesto que desconocemos el lugar donde se producirá este posible defecto de ejecución, será preciso aplicar reiteradamente el método suponiendo que la rótula, sucesivamente, se sitúa primero en una y después en otra de las secciones estimadas como críticas. Bastaría ahora con seleccionar, en cada sección de la estructura, el máximo valor resultante, para obtener la solución más conservadora.

Como lógicamente se comprende, el principal inconveniente de este sistema es el de su evidente laboriosidad ya que implica repetir un cálculo tantas veces como secciones críticas se han supuesto. La simplificación de admitir que toda la estructura, sin excepción alguna, opera dentro del límite elástico, parece notablemente más próxima a la realidad que la de suponer que la parábola-rectángulo es la ley que vincula las tensiones con las deformaciones. En todo caso, las diferencias que entre una y otra se deducen, parecen ser inferiores a la influencia de los parámetros que forzosamente se han despreciado a la hora de formular la Teoría de la Seguridad que ha conducido a la estimación numérica normalizada de los coeficientes γ_c, γ_s y γ_f.

NOTACION UTILIZADA

a) Mayúsculas latinas

- A_s Armadura longitudinal en tracción.
- A'_s Armadura longitudinal en compresión.
- K_Z Brazo del par $N_C = N_T$ (figura 6).
- L Luz del vano. Distancia entre secciones de momento nulo.
- M_M Momento longitudinal máximo.
- M_S Momento en la sección que dista "**s**" de un origen.
- N_C Resultante, sobre el nervio (figura 5), de los esfuerzos transversales de compresión.
- N_f Esfuerzo longitudinal de compresión sobre el ala (figuras 4, 5 y 6).
- N_s Esfuerzo sobre la cabeza de compresión de la viga: $N_s = N_f \cdot b/b_f$
- N_T Resultante de los esfuerzos transversales de tracción (figura 5).
- P Carga aislada que actúa en una estrecha faja.
- R_A Reacción en el apoyo A.
- V_A Esfuerzo cortante en el tramo A.
- V_s Esfuerzo cortante creado por la flexión M_s.

b) Minúsculas latinas.

- a Distancia de la carga P al apoyo o punto de momento nulo (figuras 3 y 4).
- b Anchura total de la viga (figura 1).
- b_f Anchura del ala: $b = 2\,b_f + b_w$ (figura 1).
- b_w Anchura del nervio.
- d Canto útil.
- e_y Distancia al nervio de la resultante N_f de compresiones sobre el ala (figura 5).
- f_c Resistencia del hormigón.
- f_{cd} Resistencia de cálculo del hormigón.
- f_{ck} Resistencia característica del hormigón.
- f_{cm} Resistencia media del hormigón.
- h_f Espesor del ala.
- k_n Coeficiente adimensional (figura 13).
- k_1 Coeficiente: $k_1 = b_f/L$.
- k_2 Coeficiente: $k_2 = e_y/b_f$.
- k_3 Coeficiente: $k_3 = e_y/L = k_1 k_2$.
- k_4 Coeficiente: $k_4 = K_Z/L$.
- k_5 Coeficiente: $k_5 = a(1 - a/L)/L$.
- k_6 Coeficiente: $k_6 = k_3 k_5/k_4$.
- k_7 Coeficiente: $k_7 = t_e/L$.
- k_8 Coeficiente: $k_8 = 2\,k_6/k_7$.
- k_9 Coeficiente adimensional que se determina en la figura 12.
- n_p Valor medio de las tracciones transversales n_T.
- n_T Esfuerzo de tracción transversal sobre el nervio, por metro lineal de pieza.
- q Carga máxima prevista, por metro lineal de directriz.
- q_l Carga límite o mayorada, por metro lineal.
- t Anchura de la zona de reparto de la carga P.
- t_e Base del triángulo equivalente de tensiones (figura 8).
- x Distancia genérica al apoyo A.
- y Dirección normal al nervio. Dirección transversal.
- z Brazo mecánico de la viga (en este caso $z = d - 0{,}4\,h_f$).

c) Minúsculas griegas

- γ_c Coeficiente parcial de seguridad que divide la resistencia del hormigón.
- γ_f Coeficiente parcial multiplicador de las cargas.
- γ_s Coeficiente reductor del límite elástico de las armaduras.
- σ_l Tensión límite. Tensión de agotamiento resistente.
- σ_M Tensión máxima.
- σ_t Tensión transversal de tracción.
- $(\sigma_t)_p$ Valor promedio de la tensión transversal de tracción.
- σ_y Tensión transversal, normal al nervio.
- τ_s Tensión tangencial rasante.
- τ_{sa} Tensión horizontal rasante entre la carga P y el apoyo A.
- τ_{sb} Tensión horizontal rasante entre la carga P y el apoyo B.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

REFERECIAS BIBLIOGRAFICAS

1. H. BACHMANN. Längsschub und Querbiegung in Druckplatten von Betonträgern (vigas de hormigón, de sección en T, sometidas a esfuerzos rasantes y flexión transversal). Beton und Stahlbetonbau nº 3. Berlín 1978.

2. H. BACHMANN, A. BACCHETTA. Teilweise Vorspannung für Längsschub und Querbiegung in Druckplatten von Betonträgern (Pretensado parcial para resistir los esfuerzos rasantes y la flexión transversal en las alas comprimidas de las vigas de hormigón). Beton-und Stahlbetonbau nº 5. Berlín 1978.

3. A.G. RAZAQPUR, A. GHALI. Forces at the flange-web connections in T beams. Canadian Journal of Civil Engineering. Vol. 11 nº 4. Ottawa, Diciembre 1984.

4. A.G. RAZAQPUR, A. GHALI. Design of transverse reinforcement in flanges of T-beams. ACI Journal. Vol. 83 nº 4. Julio-Agosto 1986.

5. S.A. MIRZA, R.W. FURLONG, J.S. Ma. Flexural shear and ledge reinforcement in concrete inverted T girders. ACI Structural Journal. Vol. 85 nº 5. Septiembre-Octubre 1988.

6. A. PAEZ, J. DIAZ DEL VALLE. Armado de las alas de las vigas de sección en T. Hormigón y Acero nº 184. Madrid III trimestre 1992.

RESUMEN

En la actualidad, mediante el cálculo por ordenador, puede obtenerse la precisa valoración de unas tensiones que antes se despreciaban por considerarse que su relativa pequeñez justificaba la supresión de un laborioso proceso deductivo. Tal es el caso de las vigas de hormigón de sección en **T**, cuyas alas, bajo la acción de una carga **P**, se encuentran sometidas a unas tensiones transversales que alcanzan sus valores máximos en la sección donde actúa la carga. Después de un primer estudio en donde se analizó el caso de las cargas repartidas, se continúa ahora con el efecto que produce una carga concentrada en una estrecha faja. Un conjunto de gráficos permiten delimitar el campo de tracciones transversales que se extienden por el ala, un campo que, esquemáticamente, adopta la distribución de un triángulo cuyo vértice se sitúa en el borde exterior del ala y su base en la sección de encuentro del ala con el nervio de la viga en T.

SUMMARY

Due to the complicate mathematical procedure involved, thirty years ago many stresses were neglected when considered too small to be taken into account. At present, using computer calculations, actual values of these stresses can be obtained. This is the case of concrete T-beams whose flanges are submitted to transverse tensile stresses by the bending action of vertical loads applied on the web. After a first study where distributed loads were considered, further studies were carried out on the assumption of single loads acting on the beam. Using three graphics it is easy to appraise the distribution of tensile stresses at the flanges. Maximum value of these stresses is reach in the section where the load is applied, but at the plane of flange-web connection.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



JORNADAS sobre TECNICAS DEL HORMIGON ARMADO Y PRETENSADO EN CENTRALES NUCLEARES

EDITADO POR:

asociación técnica
española del pretensado

Precio del ejemplar: 3.000 ptas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Análisis de estructuras con cables y telas

Alfonso Recuero y José Pedro Gutiérrez
Instituto Eduardo Torroja, Madrid, España

1. INTRODUCCION

Es frecuente utilizar estructuras con cables y telas junto con elementos rígidos –mallas tesas, estructuras hinchables, tensegrities, etc.– para cubrir grandes superficies, tales como estadios deportivos, piscinas, plazas de toros, o para construir pabellones temporales en exposiciones. Algunos ejemplos recientes se describen en (1), (2), (3). Se trata de estructuras muy ligeras y flexibles, cuyas características hacen que su análisis sea muy tedioso si se emplean programas convencionales para estructuras elásticas de nudos articulados.

En primer lugar, son estructuras de configuración variable, ya que las barras que no pueden soportar compresiones no deben ser consideradas si estan sometidas a tales esfuerzos, ni tampoco las barras que entren en plasticidad y puedan deformarse sin incrementar sus esfuerzos a partir de ese momento. La segunda característica es que sufren grandes desplazamientos, por lo que el equilibrio debe establecerse en la posición deformada, en lugar de en la inicial. En tercer lugar, las barras presentan una gran no linealidad mecánica, tanto los cables como las telas pueden incluso plastificar además de no trabajar a compresión; e incluso las barras que sí admiten este tipo de esfuerzo presentan un comportamiento no lineal si se tiene en cuenta el pandeo. Por último, algunos elementos pueden deslizar a través de los nudos de conexión con otros elementos; en tal caso, las tensiones de ambas ramas deben ser iguales a uno y otro lado del nudo, debiéndose calcular la tensión del cable completo en función de su deformación entre sus extremos no deslizantes.

Todo ésto hace que sólo puedan utilizarse métodos iterativos en su análisis (4), (5). En ellos, en cada paso se considera un conjunto de desplazamientos de los nudos a partir de los cuales se determinan los esfuerzos de cada elemento, teniendo en cuenta su ley de tensión/deformación. La solución se habrá alcanzado cuando todos los nudos estén en equilibrio. En caso contrario, se calcula una corrección de los desplazamientos, para lo que se utiliza una estructura auxiliar elástica lineal y nudos articulados, en la que los nudos ocupan la posición corregida, las barras tienen las características elásticas tangentes, y sobre la cual actúan los desequilibrios nodales como fuerzas exteriores.

El método que se presenta tiene en consideración todas las características mencionadas. En él se propone emplear una solución muy simple del sistema de ecuaciones, consistente en dividir las componentes de las cargas por el elemento correspondiente de la diagonal principal de la matriz de rigidez. Esta solución es posteriormente corregida utilizando un criterio de minimización de la energía total de la estructura, asumiendo un comportamiento lineal de los esfuerzos entre dos posiciones de referencia. También se propone un procedimiento para tener en cuenta los posibles malos condicionamientos locales de la matriz de rigidez, que se producen cuando hay cargas perpendiculares a planos con pequeña rigidez transversal, o cuando concurren en un nudo cables plastificados o que debieran soportar compresiones y sólo admitan tracciones.

El método es muy rápido, no depende de la forma de numerar los nudos, y requiere poca memoria, incluso para estructuras grandes. Se incluye una descripción completa del mismo así como un conjunto de ejemplos ilustrativos en los que se pone de manifiesto su capacidad para resolver casos que no es posible tratar con otros procedimientos.

2. MODELO ESTRUCTURAL

La estructura se idealiza mediante un conjunto de barras rectas, unidas en sus extremos en nudos

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

perfectamente articulados, que pueden soportar esfuerzos de compresión y/o tracción, despreciando su posible flexión transversal, y que pueden tener un comportamiento no lineal. Pueden considerarse secuencias de cables consecutivos con la misma tensión, que pueden deslizar a través de los nudos intermedios, que se denominarán "cables poligonales".

Las condiciones de sustentación se imponen sobre los nudos, según las direcciones de los ejes de coordenadas, y pueden ser rígidas o elásticas. Las acciones sobre la estructura pueden ser cargas concentradas en los nudos, deformaciones iniciales de las barras o de los cables poligonales, y desplazamientos impuestos a los nudos coartados rígidamente. Puede considerarse cualquier combinación simultánea de estas acciones, pero, teniendo en cuenta el comportamiento no lineal, sólo puede considerarse un caso de cargas.

En caso de existir telas, éstas deben sustituirse por conjuntos de cables equivalentes.

3. DESCRIPCION DEL COMPORTAMIENTO DE LAS BARRAS

Se supone que tanto las barras como los cables poligonales tienen un comportamiento elástico no lineal. Se describen mediante el área de su sección transversal y su ley tensión/deformación. En la implementación realizada por los autores para comprobar el método, esta ley se describe mediante una poligonal de la que se dan las coordenadas (deformación, tensión) de sus vértices. La tensión asignada a los puntos con deformación menor que la del primer punto es la de dicho primer punto (plastificación o no compresión). A los puntos con deformación mayor que la del último punto se les asigna la tensión del mismo (plastificación). Este procedimiento permite representar cualquier ley: sólo tracción, tracción y compresión incluyendo pandeo, reblandecimiento, endurecimiento, plastificación, etc.

Las barras se describen, además, por los números de sus nudos extremos; y los cables poligonales por el número de vértices y la secuencia de los números de los mismos. En ambos casos se indica la ley tensión/deformación correspondiente, así como su deformación inicial. En cada iteración, para calcular la deformación de cada barra o cable poligonal se tendrá en cuenta la deformación inicial, así como su longitud en las posiciones inicial y deformada. En los cables poligonales se tendrán en cuenta las longitudes totales de los mismos.

4. DESCRIPCION DEL METODO

El método consiste en buscar la posición de los nudos en la que los esfuerzos en las barras y cables poligonales y las reacciones de los apoyos rígidos y elásticos equilibren las cargas exteriores. Esta posición final se considera como suma de la posición inicial más un desplazamiento de los nudos (corrección). La corrección inicial puede ser dada por el proyectista, o en caso contrario se supone nula. Los desplazamientos impuestos a los apoyos rígidos deben introducirse en esta corrección inicial.

A partir de ello, empieza el ciclo de iteraciones. En cada una de ellas se considera que los nudos están en la posición corregida actual. Se calculan después las deformaciones de las barras y cables poligonales y sus correspondientes esfuerzos, así como sus módulos de elasticidad tangente. Se comprueba entonces el equilibrio en cada nudo, teniendo en cuenta las acciones exteriores, los esfuerzos de los elementos concurrentes en él, y las reacciones de las coacciones que le afecten. Si en ningún nudo se produce un desequilibrio superior en módulo a un valor prefijado, se considera que se ha alcanzado la solución y que el proceso iterativo ha finalizado. En caso contrario, se calculará una corrección adicional, que se sumará a la actual.

Para calcular la corrección adicional se utiliza una estructura articulada espacial auxiliar. Su configuración es la misma de la estructura analizada, con los nudos en la posición corregida, teniendo sus elementos el módulo de elasticidad tangente, y las mismas condiciones de apoyo, pero con un comportamiento elástico lineal y nudos no deslizantes. Sobre esta estructura actúan los desequilibrios calculados, como cargas exteriores.

La corrección adicional será proporcional a la solución en desplazamientos de esta estructura. Dada la gran flexibilidad de estas estructuras, puede adoptarse una solución aproximada consistente en dividir las componentes de las cargas por el término correspondiente de la diagonal principal de la matriz de rigidez, lo que fija la dirección de la corrección. El valor de la misma se fija aplicando un criterio de minimización de la energía total, tal como se expone a continuación.

Sean:

e1 el vector de desequilibrios nodales en la posición inicial de los nudos, en la iteración en curso,

d el vector de desplazamientos nodales, solución del sistema auxiliar, y

e2 el vector de desequilibrios nodales en la posición inicial corregida en **d**.

Si suponemos que los esfuerzos en la estructura, y en consecuencia los desequilibrios nodales, varían linealmente con **d**, tomando como puntos de paso las dos posiciones mencionadas, el vector de desequilibros nodales, **e**, correspondientes a un desplazamiento a*__d__ será:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e1} + a^* (\mathbf{e2} - \mathbf{e1})$$

La variación de la energía total de la estructura

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

al pasar de la posición inicial del paso a la corregida en a*$\mathbf{d}$ será igual a la suma del trabajo realizado por las fuerzas constantes $\mathbf{e1}$ más el realizado por las fuerzas linealmente variables a* ($\mathbf{e2}$ – $-\mathbf{e1}$).

$$a^*\mathbf{e1} \cdot \mathbf{d} + a\hat{}2^* (\mathbf{e2} - \mathbf{e1}) \cdot \mathbf{d}/2$$

El valor de $\mathbf{a}$ que hace mínima esta energía es:

$$a = \mathbf{e1} \cdot \mathbf{d} / (\mathbf{e1} - \mathbf{e2}) \cdot \mathbf{d}$$

valor que se adoptará como factor de ampliación del vector $\mathbf{d}$.

En las fórmulas anteriores * indica producto normal (dè escalares o escalar por vector) y · indica producto escalar de vectores.

Evidentemente, si la posición corregida fuese la de equilibrio, el vector $\mathbf{e2}$ sería nulo, y el valor de $\mathbf{a}$ sería 1. Del mismo modo, si la posición inicial fuese la de equilibrio, el vector $\mathbf{e1}$ sería nulo, y el valor de $\mathbf{a}$ sería 0 para cualquier $\mathbf{d}$. En algunas situaciones de mal condicionamiento, puede ocurrir que los vectores $\mathbf{e1}$ y $\mathbf{e2}$ coincidan. En tal caso, se adoptará para $\mathbf{a}$ un valor arbitrario, por ejemplo 1, y se continuará el proceso. Es importante señalar que estas operaciones deben realizarse con la máxima precisión que permita el lenguaje de programación utilizado.

A continuación se repite el ciclo iterativo.

Como se ha dicho, hay que prestar especial atención a los posibles malos condicionamientos locales de la estructura auxiliar. Zonas estáticamente estables en la estructura real pueden convertirse en mecanismos por plastificación de alguno de sus elementos o por que alguno de ellos debería trabajar a compresión y sólo admite tracciones, o por que todos los elementos concurrentes en un nudo son, en alguna iteración, prácticamente coplanarios. En tales situaciones, se propone prescindir de las ecuaciones causantes del mal condicionamiento, y asignar a las variables duales de las ecuaciones omitidas un valor igual al límite de desplazamiento por la componente de carga en dicha dirección, dividida por la carga total en el nudo.

5. DESCRIPCION DEL ALGORITMO

Los pasos que hay que seguir en un algoritmo que implemente el método propuesto son:

A. Inicialización de variables.

Las coordenadas de la posición inicial de los nudos y las componentes de las cargas externas se almacenarán en matrices que no se modificarán durante el cálculo. La corrección de la posición inicial de los nudos se almacenará en una matriz que se modificará en cada iteración. Si se diera una solución inicial, ésta se situará en dicha matriz. Si se impusieran desplazamientos de apoyos rígidos, se colocarán así mismo en dicha matriz.

B. Comprobar si la actual posición de los nudos es la solución.

En primer lugar, poner a ceros una matriz sobre la que se acumularán las componentes de las fuerzas introducidas en cada nudo por los elementos y apoyos elásticos de la estructura. Seguidamente, se considera cada una de las barra, se calculan sus longitudes inicial y actual, y de ellas su deformación, a la que se suma la inicial. Con ello se calcula su tensión y el esfuerzo, que se proyectará según la posición actual del elemento y se acumularán en las variables correspondientes a sus nudos extremos. A continuación, se consideran los cables poligonales. Las longitudes inicial y actual de cada cable se obtienen sumando las correspondientes a cada tramo, y con ellas y la deformación inicial se tendrá la tensión del cable. Entonces, para cada tramo del cable, se calculan las proyecciones del esfuerzo en el cable según la posición actual del tramo y se acumulan en las variables correspondientes a los nudos extremos del tramo. Por último, se acumulan las componentes de las reacciones de los apoyos elásticos correspondientes a la posición deformada actual.

Se calcula entonces el desequilibrio en cada nudo, y si en ninguno de ellos su módulo supera un valor prefijado, se considera que la posición actual es la solución buscada, y se pasa a la salida de resultados (paso E). En caso contrario, se formará la diagonal principal de la matriz de rigidez de la estructura auxiliar, considerando, en barras y cables poligonales, el módulo de elasticidad tangente, con consideraciones análogas a las expresadas al hablar del cálculo del desequilibrio de los nudos. Se imponen las condiciones de apoyo rígidas y elásticas, se ponen como segundos miembros los desequilibrios nodales calculados, y se pasa a la resolución del sistema de ecuaciones.

C. Consideraciones especiales en la resolución del sistema de ecuaciones.

Tal como se ha indicado, dada la gran flexibilidad de la estructura, se considera suficiente una solución aproximada consistente en dividir las componentes de la carga por los términos correspondientes de la diagonal principal de la matriz de rigidez. En el caso en que alguno de estos términos fuese nulo o muy pequeño, se tomará, como valor de la componente dual del desplazamiento, una fracción de un desplazamiento límite prefijado, igual a la componente en cuestión dividida por la carga total en el nudo.

Esto permite obtener, con gran rapidez y con muy pequeños requerimientos de memoria, una dirección de corrección conveniente, fijándose después su magnitud por minimización de la energía total de la estructura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

D. Propuesta de corrección.

Calcular el vector de desequilibrios nodales que corresponden al desplazamiento solución del sistema auxiliar, teniendo en cuenta las mismas consideraciones expuestas en B, pero sin formar la diagonal de la matriz de rigidez.

Calcular el producto escalar de los vectores de desequilibrios nodales obtenidos por el vector de desplazamientos y, a partir de ellos, el factor de ampliación.

Multiplicar el vector de desplazamientos por este factor y acumularlo al vector de desplazamientos total.

Continuar en el paso B.

E. Salida de resultados.

Los resultados numéricos más convenientes son: las coordenadas iniciales, los desplazamientos y las coordenadas finales de cada nudo; los esfuerzos y deformaciones finales de cada barra y de cada cable; las reacciones de los apoyos rígidos y elásticos. Debe tenerse en cuenta que la posición final del caso de carga analizado puede ser la situación inicial para otros casos, por lo que puede ser conveniente crear un archivo de salida, con el formato del archivo de datos, que pueda ser completado con los datos del siguiente caso de carga. Para las salidas gráficas, es preferible crear archivos procesables por programas especializados en dibujo, que permitan realizar perspectivas, cortes, etc.

6. EJEMPLOS

Un caso muy sencillo, pero ilustrativo, es el de un cable con sus extremos fijos a la misma altura, sobre el que actúa una carga colgada de un anillo y situada fuera del centro del cable. Al dejarla libre, el anillo debe deslizarse al centro. Los datos utilizados en el ejemplo numérico son:

```
Num. de Nudos.............:  3
Num. de Barras............:  0
Num. de Cables Poligonales.:  1
Num. de Apoyos ...........:  2
```

COORDENADAS DE LOS NUDOS

Nudo	Coor-X	Coor-Y	Coor-Z	Nudo	Coor-X	Coor-Y	Coor-Z
1	0.000	0.000	0.000	2	1.000	0.000	-1.000
3	4.000	0.000	0.000				

Num. de Tipos de Seccion : 1

Tipo	Area	N.puntos	Deformacion	Tension
1	0.00150	3	0.0000000	0.000
			0.0020000	51000.000
			0.0100000	53000.000

```
Cable :  1   Num. Nudos :  3
Nudos :  1  2  3
Tipo  :  1    deformacion inicial :  0
```

Num. de Apoyos : 2

Nudo	Cx	Cy	Cz	Nudo	Cx	Cy	Cz	Nudo	Cx	Cy	Cz
1	0	0	0	3	0	0	0				

Num. de Nudos Cargados: 1

Nudo	F-X	F-Y	F-Z
2	0.000	0.000	-30.000

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El límite de corrección de desplazamientos en los nudos mal condicionados es de 0,1 m y el máximo desequilibrio admisible de 0,1 t.

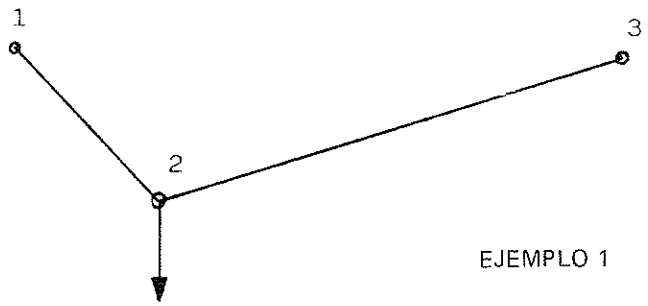
Con estos datos, la posición final del punto 2 y la tensión en el cable son:

DESPLAZAMIENTOS DE NUDOS

Nudo	Direccion - X		Direccion - Y		Direccion - Z	
	Dx	Xf	Dy	Yf	Dz	Zf
1	0.00000	0.000	0.00000	0.000	0.00000	0.000
2	0.98443	1.984	0.00000	0.000	-0.11555	-1.116
3	0.00000	4.000	0.00000	0.000	0.00000	0.000

ESFUERZOS EN CABLES

Poligonal	Axil	Tension	Deformacion
1 - 3	30.791	20527.391	0.0008050



EJEMPLO 1

Como puede observarse la carga ha deslizado casi un metro hacia el centro. El error cometido respecto a la solución es menor de 2 cm. Reduciendo el desequilibrio admisible, puede ajustarse la solución tanto como se quiera.

Como segundo ejemplo se considera una malla suspendida, formada por 8 barras, que sería un mecanismo si se considerasen pequeños desplazamientos.

Los datos utilizados son:

```
Num. de Nudos.............:  8
Num. de Barras............:  8
Num. de Cables Poligonales.:  0
Num. de Apoyos ...........:  4
```

COORDENADAS DE LOS NUDOS

Nudo	Coor-X	Coor-Y	Coor-Z	Nudo	Coor-X	Coor-Y	Coor-Z
1	0.000	0.000	0.000	2	6.000	0.000	0.000
3	2.000	2.000	-1.000	4	4.000	2.000	-1.000
5	2.000	4.000	-1.000	6	4.000	4.000	-1.000
7	0.000	6.000	0.000	8	6.000	6.000	0.000

Num. de Tipos de Seccion : 2

Tipo	Area	N.puntos	Deformacion	Tension
1	0.00020	3	0.0000000	0.000
			0.0020000	51000.000
			0.0100000	53000.000
2	0.00100	3	0.0000000	0.000
			0.0020000	51000.000
			0.0100000	53000.000

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Barra	Ni - Nj	Tipo	Def.Inicial	Barra	Ni - Nj	Tipo	Def.Inicial
1	1 - 3	1	0.00000	2	2 - 4	1	0.00000
3	3 - 4	2	0.00000	4	3 - 5	2	0.00000
5	4 - 6	2	0.00000	6	5 - 6	2	0.00000
7	5 - 7	1	0.00000	8	6 - 8	1	0.00000

Num. de Apoyos : 4

Nudo	Cx	Cy	Cz	Nudo	Cx	Cy	Cz	Nudo	Cx	Cy	Cz
1	0	0	0	2	0	0	0	7	0	0	0
8	0	0	0								

Num. de Nudos Cargados: 4

Nudo	F-X	F-Y	F-Z
3	0.000	0.000	-4.000
4	0.000	0.000	-4.000
5	0.000	0.000	-4.000
6	0.000	0.000	-4.000

Después de 8 iteraciones la solución que propone el sistema es:

DESPLAZAMIENTOS DE NUDOS

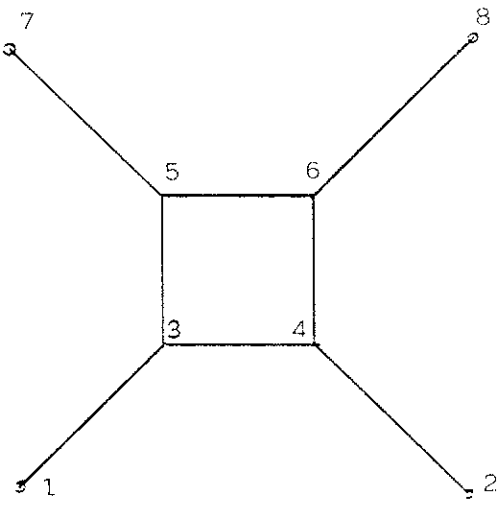
Nudo	Direccion - X		Direccion - Y		Direccion - Z	
	Dx	Xf	Dy	Yf	Dz	Zf
1	0.00000	0.000	0.00000	0.000	0.00000	0.000
2	0.00000	6.000	0.00000	0.000	0.00000	0.000
3	-0.00027	2.000	-0.00027	2.000	-0.15238	-1.152
4	0.00027	4.000	-0.00027	2.000	-0.15238	-1.152
5	-0.00027	2.000	0.00027	4.000	-0.15238	-1.152
6	0.00027	4.000	0.00027	4.000	-0.15238	-1.152
7	0.00000	0.000	0.00000	6.000	0.00000	0.000
8	0.00000	6.000	0.00000	6.000	0.00000	0.000

ESFUERZOS EN BARRAS

Extremo	Axil	Tension	Deformacion
1 - 3	10.600	53000.000	0.0179396
2 - 4	10.600	53000.000	0.0179396
3 - 4	6.941	6941.034	0.0002722
3 - 5	6.941	6941.034	0.0002722
4 - 6	6.941	6941.034	0.0002722
5 - 6	6.941	6941.034	0.0002722
5 - 7	10.600	53000.000	0.0179396
6 - 8	10.600	53000.000	0.0179396

REACCIONES EN LOS APOYOS

NUDO	X	Y	Z
1	6.941	6.941	-4.000
2	-6.941	6.941	-4.000
7	6.941	-6.941	-4.000
3	-6.941	-6.941	-4.000



EJEMPLO 2

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

En este ejemplo, las barras inclinadas han alcanzado la plastificación, y el equilibrio se consigue para un desplazamiento vertical de 15 cm.

El tercer ejemplo trata de una malla formada por 16 barras, con una configuración de paraboloide hiperbólico. Los datos de la estructura son:

```
Num. de Nudos.............:  9
Num. de Barras............:  16
Num. de Cables Poligonales.:  0
Num. de Apoyos ...........:  4
```

COORDENADAS DE LOS NUDOS

Nudo	Coor-X	Coor-Y	Coor-Z	Nudo	Coor-X	Coor-Y	Coor-Z
1	0.000	0.000	1.000	2	5.000	0.000	0.500
3	10.000	0.000	0.000	4	0.000	5.000	0.500
5	5.000	5.000	0.500	6	10.000	5.000	0.500
7	0.000	10.000	0.000	8	5.000	10.000	0.500
9	10.000	10.000	1.000				

Num. de Tipos de Seccion : 2

Tipo	Area	N.puntos	Deformacion	Tension
1	0.00010	3	0.0000000	0.000
			0.0020000	51000.000
			0.0100000	53000.000
2	0.00100	3	0.0000000	0.000
			0.0020000	51000.000
			0.0100000	53000.000

Barra	Ni - Nj	Tipo	Def.Inicial	Barra	Ni - Nj	Tipo	Def.Inicial
1	1 2	1	0.00000	2	1 4	1	0.00000
3	1 5	1	0.00000	4	2 3	1	0.00000
5	2 5	1	0.00000	6	2 6	1	0.00000
7	3 6	1	0.00000	8	4 5	1	0.00000
9	4 7	1	0.00000	10	4 8	1	0.00000
11	5 6	1	0.00000	12	5 8	1	0.00000
13	5 9	1	0.00000	14	6 9	1	0.00000
15	7 8	1	0.00000	16	8 9	1	0.00000

Num. de Apoyos : 4

Nudo	Cx	Cy	Cz	Nudo	Cx	Cy	Cz	Nudo	Cx	Cy	Cz
1	0	0	0	3	0	0	0	7	0	0	0
9	0	0	0								

Num. de Nudos Cargados: 5

Nudo	F-X	F-Y	F-Z
2	0.000	0.000	-0.500
4	0.000	0.000	-0.500
5	0.000	0.000	-1.000
6	0.000	0.000	-0.500
8	0.000	0.000	-0.500

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

El incremento máximo de desplazamiento se fija en 0,01m y el desequilibrio máximo en 0,01 t.

En este caso, el número de iteraciones para alcanzar la solución es elevado.

Los resultados son:

DESPLAZAMIENTOS DE NUDOS

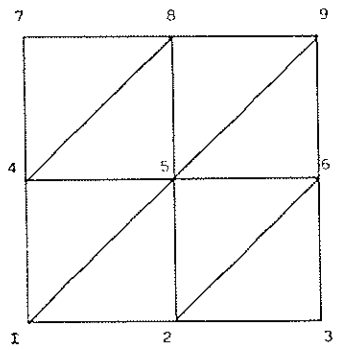
Nudo	Direccion - X		Direccion - Y		Direccion - Z	
	Dx	Xf	Dy	Yf	Dz	Zf
1	0.00000	0.000	0.00000	0.000	0.00000	1.000
2	-0.02870	4.971	0.02856	0.029	-0.28803	0.212
3	0.00000	10.000	0.00000	0.000	0.00000	0.000
4	0.02856	0.029	-0.02870	4.971	-0.28803	0.212
5	0.00000	5.000	0.00000	5.000	-0.19472	0.305
6	-0.02856	9.971	0.02870	5.029	-0.28803	0.212
7	0.00000	0.000	0.00000	10.000	0.00000	0.000
8	0.02870	5.029	-0.02856	9.971	-0.28803	0.212
9	0.00000	10.000	0.00000	10.000	0.00000	1.000

ESFUERZOS EN BARRAS

Extremo	Axil	Tension	Deformacion
1 - 2	4.322	43223.862	0.0016951
1 - 4	4.322	43223.862	0.0016951
1 - 5	5.108	51078.015	0.0023121
2 - 3	4.214	42141.520	0.0016526
2 - 5	0.000	0.000	-0.0055197
2 - 6	0.071	705.489	0.0000277
3 - 6	4.214	42141.520	0.0016526
4 - 5	0.000	0.000	-0.0055197
4 - 7	4.214	42141.520	0.0016526
4 - 8	0.071	705.489	0.0000277
5 - 6	0.000	0.000	-0.0055197
5 - 8	0.000	0.000	-0.0055197
5 - 9	5.108	51078.015	0.0023121
6 - 9	4.322	43223.862	0.0016951
7 - 8	4.214	42141.520	0.0016526
8 - 9	4.322	43223.862	0.0016951

REACCIONES EN LOS APOYOS

NUDO	X	Y	Z
1	7.888	7.888	-1.853
3	-4.234	4.234	0.355
7	4.234	-4.234	0.355
9	-7.888	-7.888	-1.853



EJEMPLO 3

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Como puede observarse, las barras con deformación negativa tienen tensión nula, esto es, no trabajan.

7. CONCLUSIONES

El método presentado permite analizar estructuras formadas por barras, cables y telas, si bien éstas deben sustituirse por conjuntos de cables equivalentes, teniendo en cuenta las características peculiares: no linealidad geométrica y mecánica y la existencia de nudos deslizantes. Esta última característica la tiene en cuenta mediante la introducción de los llamados "cables poligonales", concepto que puede considerarse novedoso.

Se trata de un proceso iterativo, y su comportamiento depende de la adecuada elección de los parámetros de convergencia. El procedimiento simplificado de propuesta de la dirección de la corrección en cada paso, hace que el método sea muy rápido y tenga reducidos requerimientos de memoria, incluso para estructuras grandes. Tampoco influye la numeración de los nudos de la estructura.

Se propone un criterio de minimización de la energía total de la estructura en cada paso del ciclo iterativo, como factor de aceleración de la convergencia.

Las hipótesis de cargas han de ser tratadas una por una, si bien el método permite definir cualquier situación inicial de la estructura. Es posible crear archivos auxiliares de resultados que faciliten la preparación de los datos para el siguiente caso de carga.

Los ejemplos incluidos permiten apreciar cómo puede reproducirse el proceso físico hasta llegar al equilibrio. En ellos se pone de manifiesto que el método permite resolver estructuras que no pueden ser analizadas con otros procedimientos.

Debe ponerse atención, al definir la estructura, en que no haya mecanismos ni zonas inestables. No obstante, se propone un procedimiento que permite tratar adecuadamente muchas de estas situaciones, siempre que tengan un sentido físico correcto.

8. REFERENCIAS

1. F. ESCRIG. Sistemas ligeros autopretensados utilizados en la EXPO'92 de Sevilla. Hormigón y Acero nº 186. 1er trimestre 1993.

2. F. ESCRIG., J.P. VALCARCER. La cúpula autotensada o el triunfo de la levitación. Hormigón y Acero nº 187. 2º trimestre 1993.

3. J. MURCIA VELA. Las estructuras a tracción y sus materiales. Hormigón y Acero nº 174.

4. J.M. ANTON, A. RECUERO. Método iterativo para el cálculo de mallas tesas. Informes de la Construcción.

5. F. HERNANDEZ. Diseño preliminar de mallas tesas. Hormigón y Acero. nº 165.

RESUMEN

Se presenta un método iterativo para el análisis de estructuras formadas por telas, cables y barras. La estructura se supone formada por barras rectas, trabajando sólo a compresión y/o tracción y con un comportamiento elástico no lineal, y que sufre grandes desplazamientos, por lo que el equilibrio debe establecerse en la posición deformada en lugar de en la inicial. Pueden también considerarse secuencias de barras consecutivas sometidas a la misma tensión, que deslizan en los nudos intermedios, que denominaremos cables poligonales. Permite considerar actuando simultáneamente sobre la estructura cargas puntuales en los nudos, tensiones iniciales en las barras y en los cables poligonales y desplazamientos impuestos a los apoyos rígidos.

El método consiste en encontrar el conjunto de desplazamientos de los nudos que producen, en las barras y apoyos, esfuerzos y reacciones que equilibran las fuerzas exteriores, respetando las condiciones de contorno. Se parte de una solución inicial, que puede ser dada por el proyectista, que es sucesivamente corregida en base a los desplazamientos de una estructura auxiliar, linealmente elástica, cuyos nudos ocupan la posición correspondiente a la última corrección, cuyas barras tienen las características elásticas tangentes, y que está sometida a los desequilibrios nodales como cargas externas. Dada la gran flexibilidad de este tipo de estructuras, se propone una solución muy simple para calcular los desplazamientos, que es posteriormente corregida mediante un criterio de minimización de la energía total de la estructura.

Se incluye una descripción completa del método, junto con un conjunto de ejemplos ilustrativos.

SUMMARY

An iterative method for the static analysis of structures which include cables and fabrics is presented here, although fabrics must be substituted by equivalent sets of cables. The structure is supposed to be composed of straight members which accept tension and/or compression, which may have an elastic non-linear behaviour, and are joined in articulated nodes. Sequences of consecutive connected members, slipping on the intermediate nodes (polygonal cables) and all of them

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

withstanding the same tension, may also be considered.

Nodes are supposed to have large displacements so that their equilibrium is established in their displaced position. External concentrated loads acting on the nodes, initial strains in the members, and displacements of the rigid supports may simultaneously act on the structure.

The method consists in finding the set of node displacements that produce in the members tensions and compressions that equilibrate the external loads and that accomplish both rigid and elastic support conditions. An initial solution, which may be supplied by the designer, is successively corrected in the direction of the solution of an auxiliary linearly elastic articulated structure, whose nodes are in the present position, whose members have the corresponding tangent Young module, and on which the node unbalanced forces act. This solution is scaled so that, if axial load effects would linearly vary with node displacements, the total energy of the structure becomes minimum in every step.

Structures composed of rods cables and fabrics can be analysed using this method, which is fully described and a set of examples is included.

* * *

Firamaco, VI Feria de Materiales, Construcción y Afines

La Institución Ferial Alicantina celebrará, durante los días 20 al 23 de octubre de 1994, "FIRAMACO, VI FERIA DE MATERIALES, CONSTRUCCION Y AFINES", en el Palacio Ferial de la provincia de Alicante.

FIRAMACO es una Feria especializada, dirigida a constructores, profesionales, técnicos y consumidores y abierta a las nuevas corrientes promocionales. Su mayor ventaja la constituye su situación en una de las áreas más dinámicas e intensas en construcción de la geografía española. Posee además otras, como son:

- Ubicación privilegiada, próxima a importantes centros de construcción y de materiales.
- Moderno Recinto Ferial, actualizado en infraestructura, completo en Servicios y con excelentes comunicaciones.
- Condiciones especiales para exponer, con tarifas ajustadas, precios especiales y posibilidad de financiación.
- Interesante mercado por la diversificada procedencia geográfica de compradores.
- Cerca de 30.000 profesionales y compradores de asistencia media.
- Tarifas especiales en hoteles y medios de transporte.

Colaboran con FIRAMACO, 24 Confederaciones, Federaciones, Asociaciones y Entidades sectoriales y profesionales vinculadas a la construcción, obras públicas y afines.

Los interesados en recibir mayor información sobre el particular, deberán dirigirse a:

INSTITUCION FERIAL ALICANTINA

Apartado 192

03280 ELCHE (Alicante)

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Depósitos cilíndricos de hormigón pretensado: una nueva visión de cálculo

Joan Miquel Vilardell
Antonio Aguado de Cea
Enrique Mirambell
Departamento de Ingeniería de la Construcción
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona (UPC)

1. INTRODUCCION

Los depósitos cilíndricos de hormigón pretensado son un tipo de estructuras muy utilizadas para la contención y almacenamiento de fluidos. En particular, destaca su uso en los procesos de distribución, regulación y almacenamiento del agua. Su geometría circular permite, en gran medida, recoger las acciones radiales con simetría de revolución, mediante un mecanismo de deformación anular que, en función de las condiciones de contorno de la pared, de la altura y del diámetro de la estructura, predomina sobre el mecanismo de deformación por flexión. Ello supone una serie de ventajas sobre otros tipos de depósitos, tales como los rectangulares, entre las que destacan:

– Eficacia del pretensado circunferencial como acción que se opone al empuje hidrostático, comprimiendo anularmente la pared.

– Reducción del espesor de la pared.

– Definición de alturas mayores de la lámina de agua.

Durante el proceso de diseño de un depósito cilíndrico de hormigón pretensado, uno de los detalles que debe fijar el proyectista es el tipo de unión de la pared con la solera. Existe una gran variedad de soluciones posibles, que se distinguen por la capacidad de movimiento (desplazamiento radial y giro meridional) de la pared con respecto a la solera: la unión continua o monolítica (en la que el movimiento radial y el giro meridional del pie de la pared son solidarios con los del perímetro de la solera), la articulación fija (esto es, con el desplazamiento radial de la base de la pared impedido), la articulación flexible (definida con apoyos de neopreno o material similar, que pueden ser centrados o desdoblados) y el apoyo directo (la única limitación al desplazamiento de la pared es el rozamiento de ésta con la solera). Diferentes autores (Leonhardt, 1977; Bruggeling, 1979 y 1985; Van Breugel, 1984 y 1986; Tadros et al, 1987; Hamada et al, 1987; Mirambell et al, 1991; Ghali et al, 1991; Vilardell et al, 1992) han mostrado que el comportamiento estructural de estos depósitos es muy sensible al tipo de unión adoptado, debido a que la coacción del movimiento (principalmente del desplazamiento radial) dificulta la deformación anular del tramo de pared cercano a la base y aumenta considerablemente el valor de los esfuerzos de flexión.

Para depósitos con capacidades pequeñas y medias, una solución ampliamente aceptada es la monolítica, por motivos constructivos (hormigonado continuo de la unión, con la posibilidad de aumentar localmente el espesor de la pared para afrontar con mayor eficacia la flexión), de estabilidad (rigidez ante acciones horizontales) estanqueidad (con espesores razonables se controla perfectamente la fisuración) y mantenimiento (se evitan las operaciones de control y de sustitución de los aparatos de apoyo). Sin embargo, uno de los mayores inconvenientes de esta conexión es el elevado valor de los esfuerzos de flexión (momento flector y cortante), que en función de la geometría del depósito suelen limitar, por motivos económicos y constructivos, su utilización a partir de ciertas capacidades.

Para reducir el valor de estos esfuerzos, y consiguientemente mejorar el comportamiento estructural y ampliar el rango de aplicación de esta tipología, varios autores han profundizado en dos líneas de actuación:

– Optimización de la función de pretensado circunferencial.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

tramiento de la pared en su borde inferior.

– Espesor de la pared h_p: la rigidez de la unión está condicionada por el cociente h_p/h_s, siendo tanto más rígida cuanto menor es esta relación.

– Características de la cimentación. Esta puede ser superficial o profunda:

– Cimentación superficial (zapata perimetral y/o solera directamente apoyada sobre el terreno): el módulo de cimentación k_s interviene en la definición de la rigidez de la unión, de manera más significativa cuando las acciones que solicitan al depósito son de compresión anular (pretensado circunferencial), tal y como justifican Aguado et al (1985) y Vilardell et al (1992). En el caso extremo de un terreno infinitamente rígido, cuando la acción actuante es el pretensado la unión se comporta como un empotramiento perfecto, independientemente de la geometría del depósito, mientras que, cuando la acción actuante es el empuje hidrostático, la solera tiende a "levantarse" según un anillo perimetral (Vilardell, 1990).

– Cimentación profunda (pilotaje de la solera): la rigidez resultante del conjunto solera-pilotaje aumenta con el diámetro de los pilotes, y es, en líneas generales, muy superior a la correspondiente a una cimentación superficial.

– Cuantía de armadura en la unión. A mayor cuantía, mayor rigidez. Resulta interesante mencionar que el diámetro máximo de la armadura también interviene en la rigidez de la conexión, debido al control de la fisuración. Cuanto mayor es la fisuración, menor es la rigidez resultante.

De entre los diferentes factores mencionados, el que suele incidir en mayor medida en la rigidez de la unión es el espesor de la solera h_s. En la figura 2 se muestran las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y axiles anulares, en un depósito de 25.000 m^3, con una relación $D/H_w = 5$ y un espesor de pared h_p de 0,30 m, asentado sobre un terreno caracterizado por un módulo de balasto $k_s = 25$ kp/cm^3. El espesor de la solera se ha hecho variar desde 0,15 m hasta 4,20 m (valor este último que ha deparado esfuerzos análogos a los obtenidos suponiendo la pared perfectamente empotrada en su base), ilustrándose los esfuerzos correspondientes a espesores de 0,15 m, 0,40 m, 1,00 m, así como los correspondientes a un empotramiento perfecto.

Las acciones actuantes son el empuje del agua y el pretensado circunferencial. La definición de éste último se ha llevado a cabo a partir de los esfuerzos hidrostáticos, según el criterio de mantener la totalidad de la pared comprimida cuando el depósito está lleno. La distribución de tendones adoptada sigue una ley trapecial. Este criterio de diseño del pretensado se ha mantenido a lo largo de todo el trabajo.

El análisis de los resultados obtenidos permite destacar las siguientes observaciones:

– La fuerza total de pretensado necesaria para compensar la acción del empuje hidrostático se ha mostrado independiente del espesor de la solera.

– Los esfuerzos principales de diseño han experimentado una gran sensibilidad a variaciones del espesor de la solera. En particular, el momento y el cortante hidrostáticos en la base correspondientes a un espesor de solera de 0,15 m son el 32% y el 66% de los relativos a la hipótesis de un empotramiento perfecto en la base, mientras que la misma comparación en el caso del pretensado arroja valores del 31% y del 66%, respectivamente. Las diferencias apreciadas en el máximo momento en un punto intermedio de la lámina han resultado muy inferiores, destacando sin embargo el hecho de que la altura de este punto es más baja en el caso de solera de 0,15 m que en los otros tres depósitos.

– La variación de los esfuerzos con el incremento del espesor de la solera es prácticamente igual para las dos acciones consideradas.

– En el rango de espesores entre 0,15 m y 0,40 m, se ha observado una variación de los esfuerzos principales muy superior a la correspondiente a los otros intervalos.

– El grado de empotramiento de la lámina para espesores de solera superiores a 1,00 m es muy elevado. Se observa una diferencia únicamente del 6% entre el momento en la base correspondiente a este espesor y el relativo a un empotramiento perfecto, cuando la acción considerada es el pretensado. La diferencia experimentada por el cortante en la base es del 5%.

– El comportamiento anular de la lámina es tanto más marcado cuanto menor es el espesor de la solera. La deformación anular del pie de la lámina, cuando dicho espesor es bajo, no es despreciable.

La hipótesis de cálculo de suponer un empotramiento perfecto en la base del depósito resulta, pues, poco adecuada en el rango de espesores habituales de proyecto. Los resultados obtenidos justifican el uso de un modelo de análisis estructural conjunto, como el descrito en este trabajo, que puede permitir la disminución de espesores de hormigón y cuantías de acero. Sin embargo, el uso de tablas sencillas de cálculo, válidas para condiciones de carga y de contorno de la lámina ideales –en particular, carga triangular, borde superior libre y borde inferior empotrado– es un método muy rápido y comúnmente aceptado para estimar el valor de los esfuerzos principales de proyecto. Es por ello por lo que en este trabajo se ha procedido a generalizar los resultados obtenidos para el depósito de la figura 2, proponiendo

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

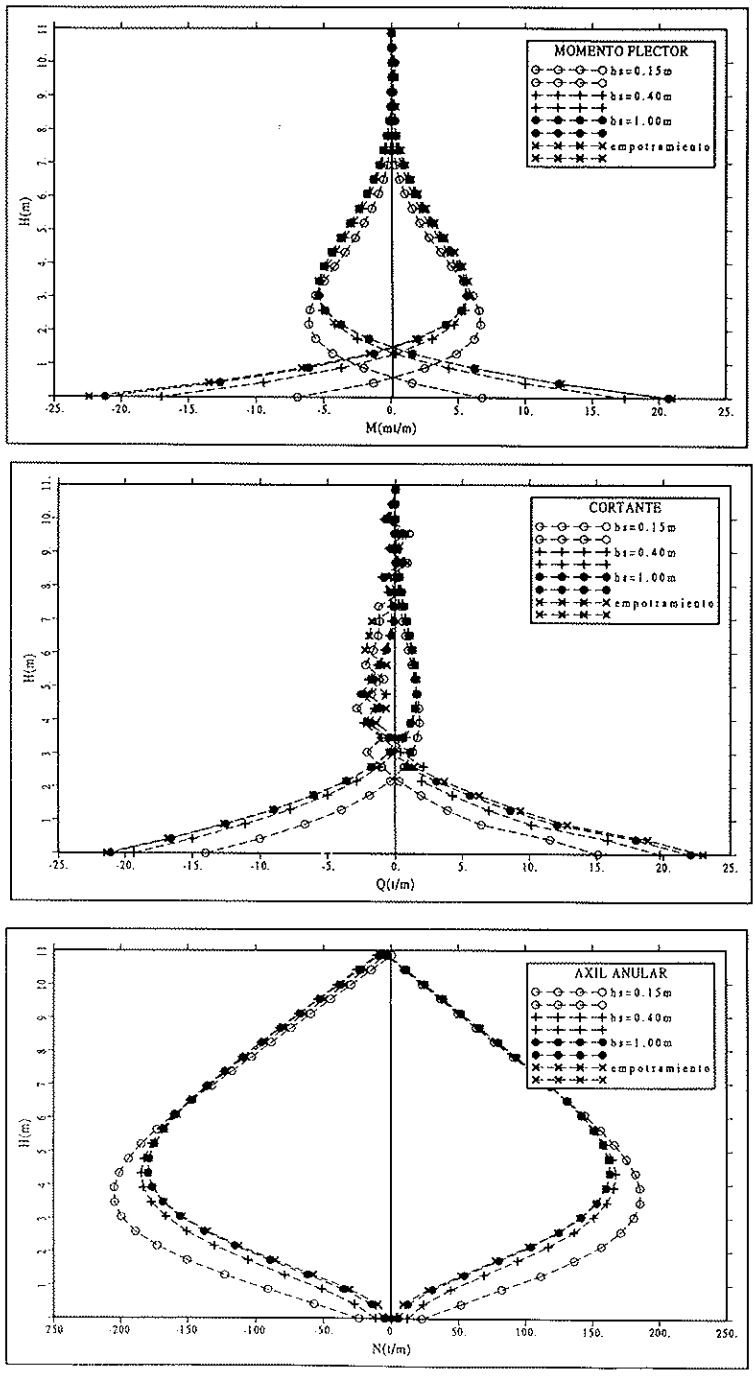


Figura 2. Influencia del espesor de la solera en las leyes de esfuerzos en un depósito de 25.000 m³.

un método sencillo de cálculo de estos esfuerzos, que considere la rigidez real de la unión.

4. METODO DE CALCULO DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES DE FLEXION, CONSIDERANDO LA RIGIDEZ DE LA UNION PARED-SOLERA

El método de cálculo propuesto está basado en un estudio numérico que engloba distintas geometrías. Los parámetros principales considerados en este estudio como variables, y su rango de variación, han sido:

– Tipo de acción (empuje hidrostático y pretensado circunferencial).

– Volumen (V = 5.000, 25.000 y 40.000 m³).

– Relación D/H_w (D/H_w = 4, 5 y 6).

– Espesor de la solera (h_s = 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,35; 0,40; 4,20 m). Este último valor equivale a suponer un empotramiento perfecto.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

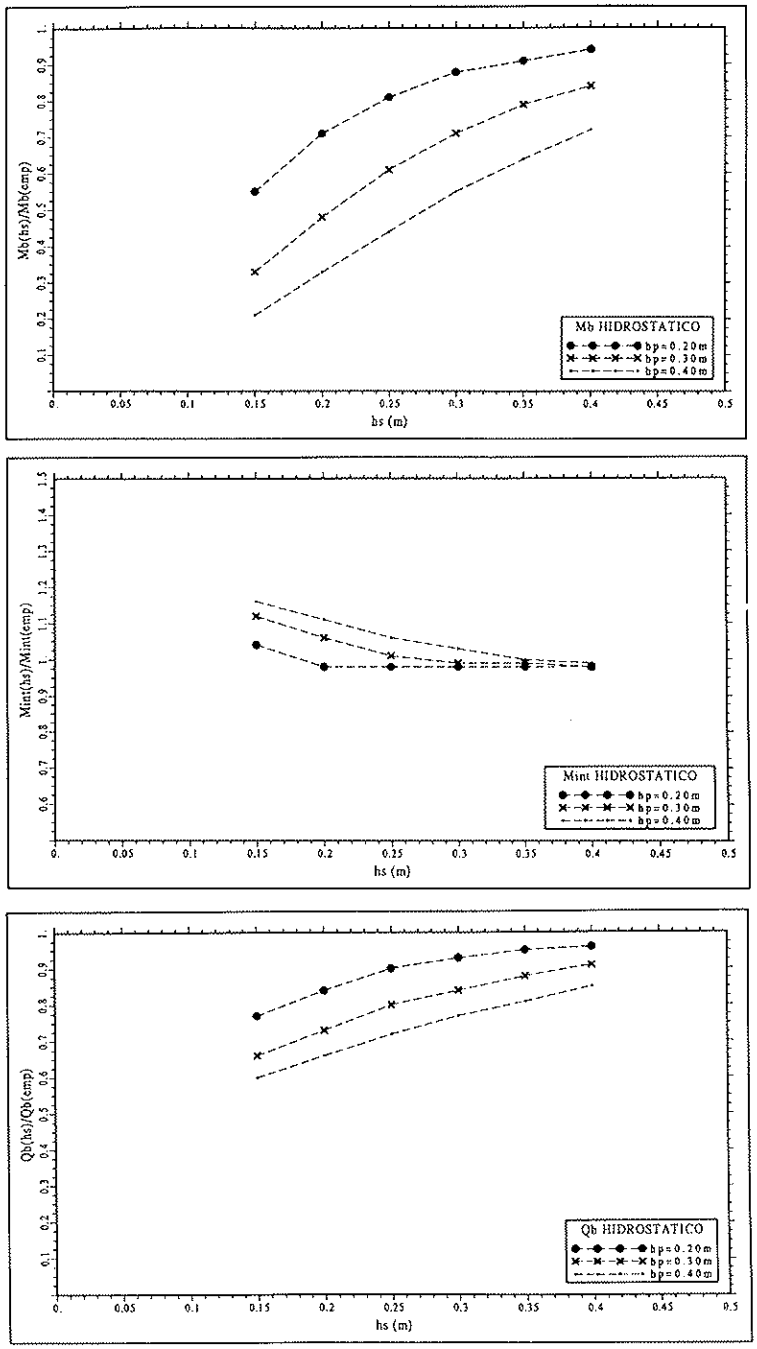


Figura 3. Curvas "Esfuerzo adimensional-espesor de la solera" para un depósito de 25.000 m³ y distintos valores del espesor de la pared. Empuje hidrostático.

– Espesor de la pared (h_p = 0,20; 0,30 y 0,40 m).

Las características mecánicas del suelo se han representado con un módulo de balasto de 25 kp/cm³. Estudios paralelos (Vilardell et al, 1992) han mostrado que, en el rango de terrenos con rigidez k_s entre 10 kp/cm³ y 50 kp/cm³, la influencia de esta variable no es significativa.

El objetivo perseguido consiste en obtener los esfuerzos principales de diseño (momento flector en la base, M_b; momento máximo en un punto intermedio de la pared, M_{int}; y cortante en la base, Q_b) de un depósito con un espesor de solera h_s, descansando sobre un terreno de flexibilidad conocida a partir de los esfuerzos calculados suponiendo la pared aislada de la solera y perfectamente empotrada en su contorno inferior. Para ello, se han trazado una serie de curvas en las que, en abscisas, se hace variar el espesor de la solera (según el rango de valores indicado anteriormente) y en ordenadas, se definen unos esfuerzos adi-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

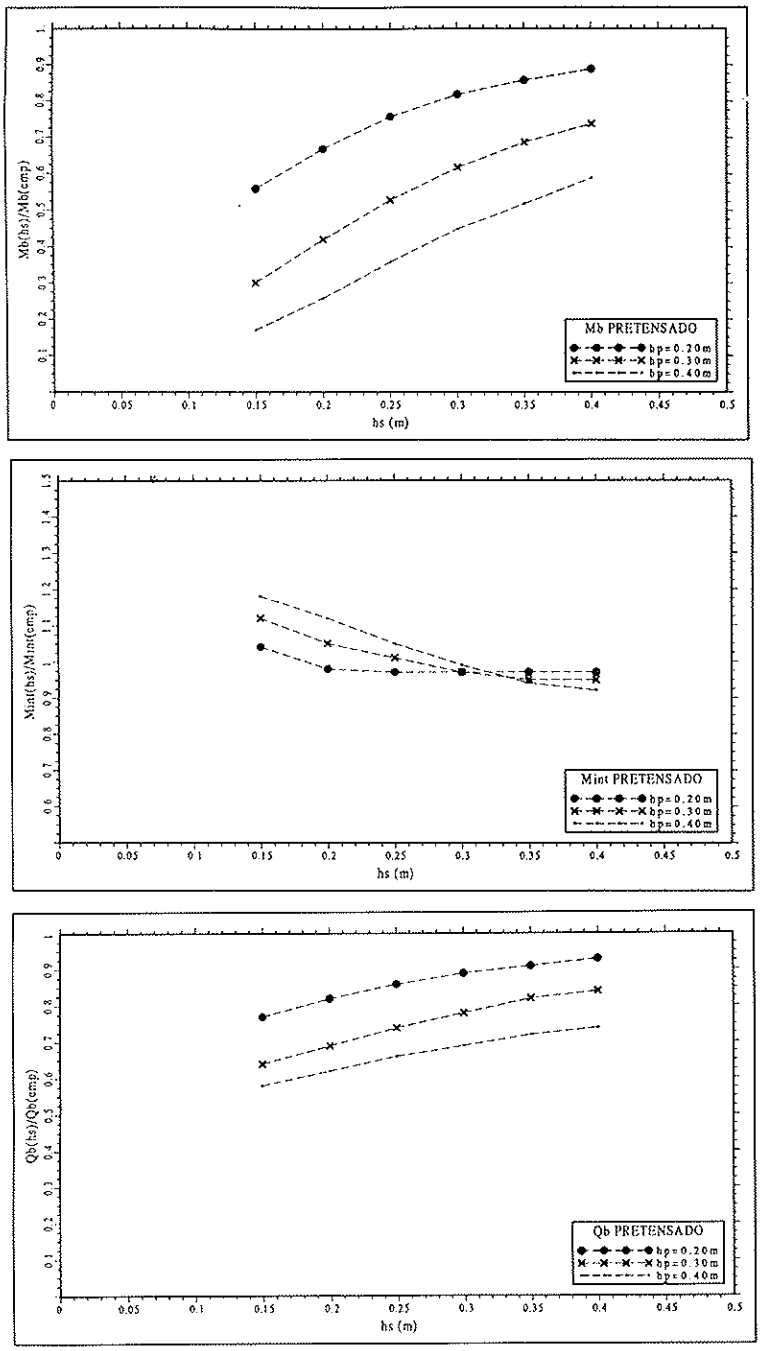


Figura 4. Curvas "Esfuerzo adimensional-espesor de la solera" para un depósito de 25.000 m^3 y distintos valores del espesor de la pared. Pretensado circunferencial.

mensionales, resultado de dividir el esfuerzo calculado con el modelo de interacción pared-solera-terreno, entre el esfuerzo calculado suponiendo la base del depósito perfectamente empotrada.

Estas curvas se han trazado para los distintos volúmenes, relaciones D/H_w y espesores de pared h_p indicados, resultando un número de 27 curvas para cada una de las acciones consideradas. Un estudio comparativo entre las distintas curvas ha mostrado que los esfuerzos adimensionales son:

– Muy sensibles a una variación del espesor h_p, hecho que se aprecia en la figura 3 (empuje hidrostático) y en la figura 4 (pretensado circunferencial), particularizando para la familia de depósitos estudiados de 25.000 m^3 y relación $D/H_w = 5$. A lo largo del estudio, se ha observado que el grado de sensibilidad ha sido muy parecido para los tres volúmenes estudiados, es decir, la distancia entre las curvas correspondientes a los tres espesores de pared propuestos se ha mantenido razonablemente independiente del volumen del depósito.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

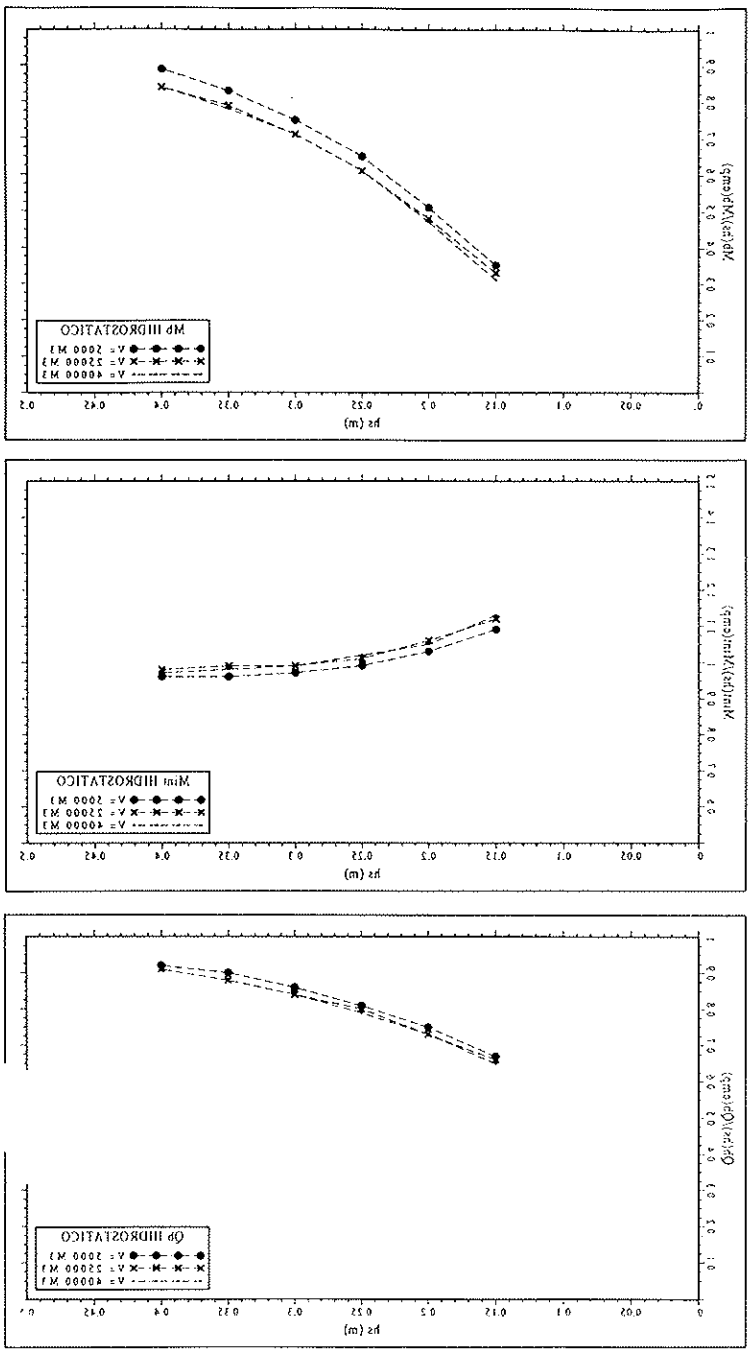


Figura 5. Curvas "Esfuerzo adimensional-espesor de la solera" para un depósito con espesor de pared de 0,30 m y relación $D/H_w = 5$, con distintos volúmenes. Empuje hidrostático.

– Algo sensibles a una variación del volumen del depósito. En la figura 5 (empuje hidrostático) y en la figura 6 (pretensado circunferencial) se muestran las curvas correspondientes a depósitos de tres capacidades diferentes, con relación $D/H_w = 5$ y espesor de la pared $h_p = 0{,}30$ m.

– Independientes de la relación D/H_w.

El análisis de los resultados obtenidos en este estudio numérico indica que la diferencia entre los esfuerzos obtenidos con un modelo de análisis conjunto pared-solera-cimentación y los correspondientes a formulaciones que adoptan un empotramiento perfecto en la base, pueden llegar a ser importantes. Estas diferencias son ligeramente superiores cuando la acción considerada es el pretensado (posiblemente debido al carácter discontinuo de la ley), y aumentan claramente con el espesor de la pared. La sensibilidad mostrada por las curvas ilustradas ante una ligera variación del espesor de la pared es muy superior a la corres-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

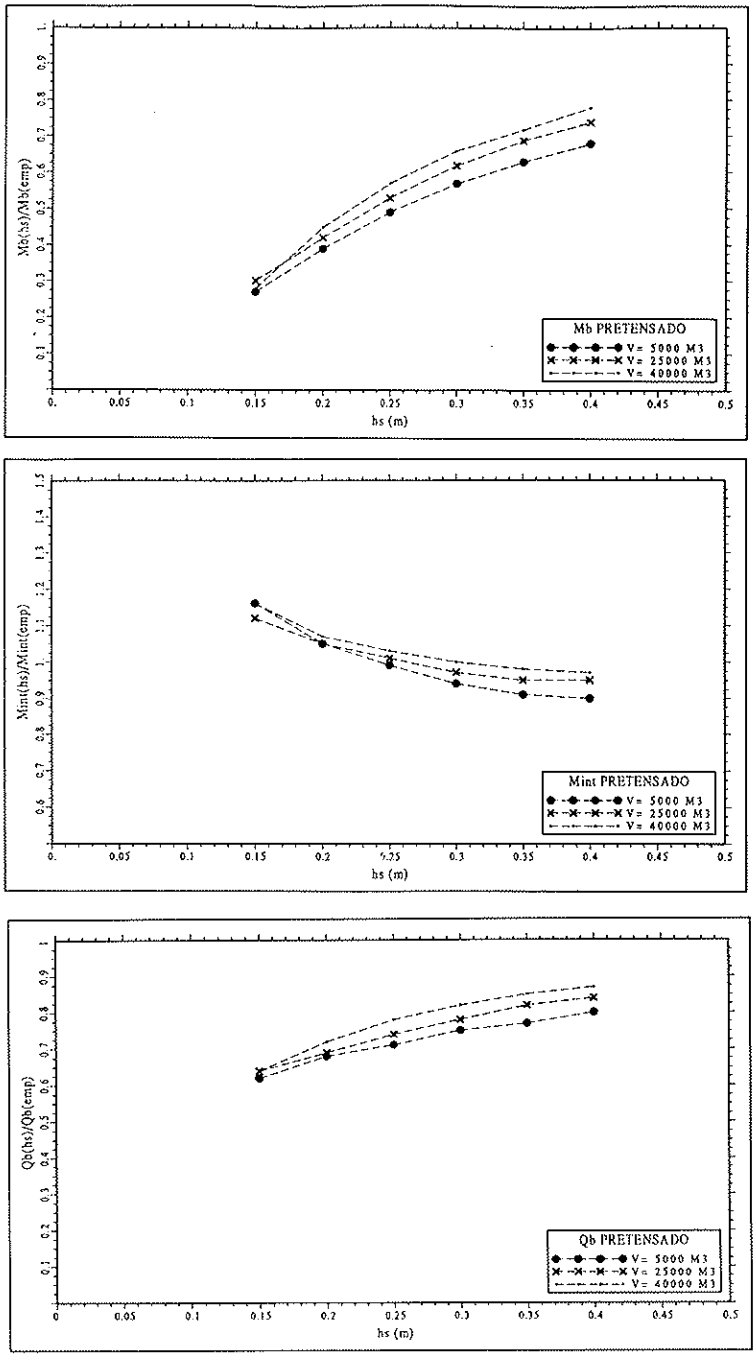


Figura 6. Curvas "Esfuerzo adimensional-espesor de la solera" para un depósito con espesor de pared de 0,30 m y relación $D/H_w = 5$, con distintos volúmenes. Pretensado circunferencial.

pondiente a una variación del volumen del depósito. La explicación reside en el hecho de que, para los valores de h_p y de h_s adoptados en este estudio (valores en cualquier caso muy habituales en proyecto) la variación propuesta del espesor de pared ha supuesto una modificación muy importante en la relación entre las rigideces de la lámina y de la solera. A modo de ejemplo, y para un espesor de solera de 0,20 m, un aumento del espesor de la pared de 0,20 m a 0,40 m supone doblar la relación h_p/h_s, y multiplicar por 8 la relación entre rigideces de ambos elementos (cabe recordar que la rigidez de una lámina es proporcional al cubo del espesor del elemento, y a las constantes elásticas E y ν, valores estos últimos que se han adoptado iguales en ambos elementos).

De los tres esfuerzos estudiados, el momento en la base, M_b, es el que se ha mostrado más sensible al estudio conjunto pared-solera-cimenta-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ción. Las diferencias obtenidas con respecto al cálculo adoptando un empotramiento perfecto en la base han variado entre el 6% (empuje hidrostático) y el 11% (pretensado) cuando el espesor de la solera es 0,40 m y el espesor de la pared es de 0,20 m; y el 79% (empuje hidrostático) y 83% (pretensado) cuando el espesor de la solera es de 0,15 m y el espesor de la pared es de 0,40 m.

El cortante en la base, Q_b, es menos sensible, moviéndose las mencionadas diferencias entre el 4% (empuje hidrostático) y el 7% (pretensado) cuando la relación h_p/h_s es mínima y el 40% (empuje hidrostático) y el 42% (pretensado) cuando la mencionada relación es máxima.

Por último, las diferencias observadas en el máximo momento en un punto interior de la pared son muy inferiores, pudiendo ser por exceso o por defecto, en función de la relación h_p/h_s. Cabe citar que el punto de aplicación de este momento máximo interior varía en función del espesor de la solera y de la relación h_p/h_s.

Los resultados obtenidos en el estudio permiten pues formular un método aproximado y rápido de cálculo de los esfuerzos de flexión de un depósito cilíndrico pretensado, considerando la rigidez real de la unión pared-solera, a partir de los esfuerzos obtenidos suponiendo un empotramiento perfecto en la base del depósito. El procedimiento propuesto consiste en:

1.– Calcular el momento flector en la base, M_b(emp), el máximo momento interior, M_{int}(emp), y el cortante en la base, Q_b(emp), suponiendo el pie de la pared perfectamente empotrado.

2.– En función del espesor de la solera, h_s, y el espesor de la pared h_p, a través de las curvas de la figura 3 (empuje hidrostático) o de la figura 4 (pretensado circunferencial), se obtienen los esfuerzos adimensionales $M_b(h_s)/M_b$(emp), $M_{int}(h_s)/M_{int}$(emp) y $Q_b(h_s)/Q_b$(emp).

3.– Los esfuerzos adimensionales citados corresponden a un volumen de referencia. Para corregir los resultados teniendo en cuenta el volumen real de la estructura, debe entrarse en las curvas de la figura 5 (empuje hidrostático) y de la figura 6 (pretensado circunferencial) con el espesor h_s y el volumen real de la estructura, midiéndose la diferencia de valores entre la curva correspondiente al depósito de volumen considerado y la curva correspondiente al volumen de referencia, diferencia que deberá añadirse a los esfuerzos adimensionales obtenidos en el punto 2.

4.– Finalmente, y multiplicando los esfuerzos adimensionales por los respectivos esfuerzos M_b(emp), M_{int}(emp) y Q_b(emp) calculados en el punto 1, se obtiene el valor de los esfuerzos de flexión correspondientes a un análisis conjunto pared-solera-cimentación.

Los resultados presentados son sólo aplicables a depósitos con volúmenes comprendidos entre 5.000 y 40.000 m³, espesores de pared entre 0,20 y 0,40 m, y espesores de solera entre 0,15 y 0,40 m, adoptando como acciones de cálculo el empuje hidrostático y el pretensado circunferencial distribuido según una ley trapecial. Sin embargo, la metodología propuesta se puede generalizar fácilmente para otras geometrías y acciones, ajustándose la precisión de los resultados sin más que aumentar el número de curvas.

5. EJEMPLO DE APLICACION DEL METODO

Como ejemplo de aplicación del método propuesto, se ha procedido a estudiar un depósito de 15.000 m³ de capacidad y unión monolítica pared-solera, con una altura de pared H_w = 9,10 m y un radio R = 22,85 m (D/H_w = 5), un espesor de pared de 0,25 m, y un espesor de solera de 0,20 m. La rigidez del terreno se ha fijado en k_s = 25 kp/cm³, la resistencia característica del hormigón en f_{ck} = 250 kp/cm², el módulo de elasticidad en E_c = 298.045 kp/cm², el módulo de Poisson en ν_c = = 0,2 y la cuantía mínima de armadura pasiva en un 1,5 ‰ por cara y dirección.

Se han considerado dos acciones de cálculo, el pretensado circunferncial y el empuje hidrostático. Para cada una de ellas, se han calculado los esfuerzos principales M_b, M_{int} y Q_b, suponiendo la pared perfectamente empotrada en su contorno inferior; con el programa TANK, considerando la capacidad de movimiento de la unión; y con el método propuesto, entrando en las curvas de las figuras 3 a 6. Estas curvas están definidas para depósitos de 5.000, 25.000 y 40.000 m³ de capacidad, y con espesores de pared de 0,20; 0,30 y 0,40 m. La resolución del caso presentado (V = 15.000 m³ y h_p = 0,25 m) se ha llevado a cabo sin más que interpolar entre las dos curvas más próximas.

Las unidades de pretensado utilizadas han sido tendones de 4,94 cm² de sección, con un trazado entre anclajes consecutivos de 180º. Las diferentes fuerzas de pretensado consideradas han resultado: P_0 = 70 t (fuerza aplicada durante la puesta en tensión), P_{inst} = 57,73 t (fuerza después de pérdidas instantáneas), y P_{dif} = 52,53 t (fuerza después de pérdidas diferidas). El número mínimo de tendones necesario para mantener comprimida la pared del depósito cuando éste está lleno, ha sido de 19 unidades.

Para el dimensionamiento de la estructura, se han considerado dos estados de carga:

– Depósito vacío. La única acción actuante es el pretensado circunferencial, adoptando como fuerza de pretensado P_{inst}.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tabla 1

Esfuerzos obtenidos según los tres métodos de cálculo planteados

Acción considerada	Método de Cálculo	M_b (mt/m)	M_{int} (mt/m)	Q_b (t/m)
Hidrostática	Empotramiento	12.22	– 3.20	– 15.01
	Programa TANK	7.20	– 3.26	– 11.80
	Curvas propuestas	7.46	– 3.23	– 11.41
Pretensado (t = 0)	Empotramiento	– 13.32	3.43	16.11
	Programa TANK	– 6.92	3.53	12.14
	Curvas propuestas	– 7.44	3.50	12.08

Tabla 2

Relación entre los esfuerzos calculados con el programa TANK y los correspondientes a la hipótesis de empotramiento perfecto en la base de la pared

Acción considerada	$\frac{M_b \text{ (tank)}}{M_b \text{ (emp)}}$	$\frac{M_{int} \text{ (tank)}}{M_{int} \text{ (emp)}}$	$\frac{Q_b \text{ (tank)}}{Q_b \text{(emp)}}$
Hidrostática	0.59	1.02	0.79
Pretensado	0.52	1.03	0.75

Tabla 3

Relación entre los esfuerzos calculados con las curvas propuestas y los correspondientes a la hipótesis de empotramiento perfecto en la base de la pared

Acción considerada	$\frac{M_b \text{ (curvas)}}{M_b \text{(emp)}}$	$\frac{M_{int} \text{ (curvas)}}{M_{int} \text{(emp)}}$	$\frac{Q_b \text{ (curvas)}}{Q_b \text{(emp)}}$
Hidrostática	0.61	1.01	0.76
Pretensado	0.56	1.02	0.75

– Depósito lleno. Las acciones actuantes son el empuje hidrostático y el pretensado circunferencial, este último estimado con P_{dif}.

Los coeficientes de seguridad considerados han sido $\gamma_c = 1{,}5$ para la minoración de la resistencia del hormigón, $\gamma_s = 1{,}15$ para la minoración de la resistencia del acero, y $\gamma_f = 1{,}6$ o $1{,}0$ para la mayoración del empuje hidrostático o del pretensado, respectivamente.

El armado de la pared por flexión se ha dimensionado para la peor de las dos situaciones posibles, rotura (E.L.U) o fisuración superior a la admisible (E.L.S). En este último caso, se ha impuesto un ancho máximo de fisura de 0,2 mm y una tensión admisible en el acero de 1.800 kp/cm² en la hipótesis de depósito vacío, y un ancho de fisura de 0,1 mm y una tensión admisible de 1.200 kp/cm² en la hipótesis de depósito lleno. El ancho de fisura y la tensión del acero se han evaluado según el artículo 44 de la norma EH-91. El diámetro de las barras de armado se ha fijado en 20 mm.

Por último, la comprobación a cortante de la pared se ha llevado a cabo según el artículo 39.1.4 de la mencionada norma, considerando la colaboración de la cuantía de armadura vertical traccionada por flexión y un canto útil de 0,21 m.

En la tabla 1 se presentan los esfuerzos obtenidos con las tres modalidades de cálculo indicadas, para cada una de las dos acciones consideradas. Y en las tablas 2 y 3 se muestra, respectivamente, la relación entre los esfuerzos obtenidos con el programa TANK y con la hipótesis de empotramiento perfecto en la base (tabla 2), y entre los esfuerzos obtenidos a partir de las curvas propuestas y los obtenidos con la hipótesis de empotramiento perfecto (tabla 3).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tabla 4

Dimensionamiento de la pared en función del método de cálculo

Método de cálculo	Empotramiento perfecto	Programa TANK	Curvas propuestas
Armadura exterior en la base (cm^2/m)	37.69	18.92	20.11
Armadura interior en la base (cm^2/m)	11.16	7.41	7.32
Armadura exterior en un punto intermedio (cm^2/m)	3.75	3.75	3.75
Armadura interior en un punto intermedio (cm^2/m)	9.03	9.29	9.21
Seguridad a cortante Q^*/V_{u2a}	1.06	0.97	0.95

Por otra parte, en la tabla 4 se presenta la sección de acero necesaria para absorber la flexión vertical, y la relación entre el cortante de cálculo y el cortante de agotamiento de la pared, en función del método de cálculo utilizado.

A la luz de los resultados obtenidos, se deduce que:

– La utilización de las curvas propuestas para unos volúmenes y unos espesores de pared tipo, puede ser apta para otros depósitos de características geométricas distintas, sin más que interpolar. El error con respecto a los esfuerzos calculados con el programa TANK es mínimo.

– La diferencia entre los esfuerzos de flexión calculados adoptando un empotramiento perfecto en la base de la pared y los calculados según un método que tenga en cuenta la capacidad de giro de la unión, es considerable, tal y como ya se ha advertido en el apartado anterior.

– A efectos de dimensionamiento de la pared, considerar la capacidad de giro de la unión supone reducir de 48,85 cm^2/m a 26,33 cm^2/m o 27,43 cm^2/m (según se utilice el programa TANK o las curvas propuestas) la armadura total necesaria en la zona inferior de la pared, lo que supone un ahorro de un 45% de acero y una menor densidad de acero, lo que repercute en una mejor trabajabilidad del hormigón en las proximidades de la unión.

– La armadura máxima necesaria en un punto intermedio de la pared es muy similar para los tres métodos estudiados.

– Con la armadura de flexión definida, si se analiza la pared aislada de la solera adoptando un empotramiento perfecto en su contorno inferior, la pared propuesta no resiste el cortante máximo de cálculo, mientras que ello no sucede cuando se considera la capacidad de giro de la unión.

6. CONCLUSIONES

El comportamiento estructural de los depósitos cilíndricos de hormigón pretensado, con una unión continua entre la pared y la solera, es muy sensible a la capacidad de movimiento de la unión, movimiento que depende, entre otros, de la relación entre los espesores de la pared y de la solera, y de la rigidez del terreno de base.

Calcular estos depósitos adoptando la hipótesis de que el movimiento de la base está totalmente impedido, da lugar a esfuerzos de flexión muy superiores a los que se obtienen estudiando la estructura con un modelo de análisis conjunto pared-solera-cimentación. En aquellos depósitos cimentados en un terreno flexible y con relación (espesor de pared)/(espesor de solera) elevada (caso de unión con capacidad de giro no despreciable) estas diferencias conducen a un sobredimensionamiento de las cuantías de armadura en la zona baja de la pared, y/o a la necesidad de aumentar localmente el espesor de pared en las proximidades de la unión, dificultando el proceso constructivo.

En este trabajo se ha definido un método de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

cálculo gráfico que, a partir de la geometría del depósito y de los esfuerzos principales de flexión de la pared, obtenidos suponiendo ésta perfectamente empotrada en su base, permite corregir dichos esfuerzos teniendo en cuenta la capacidad de movimiento de la unión.

7. REFERENCIAS

AGUADO, A., MARI, A.R. y PEÑALVA, C., *"Proyecto Tipo de Depósitos Cilíndricos para Agua de Hormigón Proyectado con Armaduras Postesas"*, Convenio nº 619/TC 197 Corporación Metropolitana de Barcelona-U.P.C., Barcelona, Enero 1985.

AGUADO, A., MARI, A.R. y MIRAMBELL, E., *"Informe Relativo a Criterios de Diseño y Orden de Tesado en Depósitos de Hormigón Proyectado con Armaduras Postesas"*, Convenio TC-652 U.P.C.-Hormigones Proyectados, S.A., Barcelona, Diciembre 1988.

AGUADO, A., MARI, A.R., MIRAMBELL, E. y BOIXEREU, E., *"Orden de Tesado en Depósitos de Hormigón Pretensado de Pequeña Capacidad"*, Hormigón y Acero nº 173, 1989.

ALSEM, D.M. y VAN BREUGEL, K., *"The behaviour of a Rigid Wall-to-Base Connection of a Concrete Tank under Axial-Symmetric Loads"*, Second International Conference on Cryogenic Concrete, Amsterdam, October 1983.

BOIXEREU, E., *"Diseño y Orden de Tesado en Depósitos de Hormigón Proyectado con Armaduras Postesas"*, Tesina de Especialidad, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, U.P.C. Barcelona, 7 Julio 1988.

BRONDUM-NIELSEN, T., *"Prestressed Tanks"*, ACI Journal, July-August 1985.

BRUGGELING, A.S.G., *"Concrete Storage Vessels"*, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Department of Structural Concrete, September 1979.

BRUGGELING, A.S.G., *"Partially Prestressed Concrete Structures-A Design Challenge"*, PCI Journal, Vol 30 nº 2, March-April 1985.

BUYER, K., *"Zur Berechnung der Vorspanung Geschlossener Kreiszylinderschalen im Stahlbeton-Behalterbau"*, Beton und Stahlbetonbau, May 1957.

CLOSE, S.R., GHALI, A. y BRONDUM-NIELSEN, T. *"Prestressed Tanks"*, Comentarios de los autores al artículo con mismo título de Brondum-Nielsen, T. (1985), ACI Journal, May-June 1986.

DEL POZO, F., *"Depósitos Cilíndricos Circulares"*, Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, Publicación nº 195, Madrid 1967.

GHALI, A., *"Circular Storage Tanks and Silos"*, E. & F.N. SPON LTD., London 1979.

GHALI, A. y ELLIOTT, E., *"Prestressing of Circular Tanks"*, ACI Structural Journal, November-December 1991.

HAMADA, S., OSHIRO, T. y HINO, S., *"Vertical Cracking of Concrete Tank Walls"*, Concrete International, October 1987.

HAMPE, E., *Berechnung von Behältern mit Ringkrafttreuer Vorspannung"*, Wiss. Zeitschrift der Hochschule für Bauwesen, Cottbus 4, Volumen 1, 1961.

JIMENEZ-MONTOYA, P., GARCIA-MESEGUER, A. y MORAN, F., *"Hormigón Armado"*, Tomo I, G.G. Editorial Gustavo Gili, 12 Edición, Barcelona, 1987.

LEONHARDT, F., *"Hormigón Pretensado, Proyecto y Construcción"*, Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento, Madrid 1977.

LLOMBART, J.A. y ANTON, V., *"Depósitos Cilíndricos Pretensados. Consideraciones sobre el Proyecto"*, Hormigón y Acero nº 157, 1985.

MIRAMBELL, E., AGUADO, A. y VILARDELL, J.M., *"Análisis y Criterios de Diseño de Depósitos Cilíndricos de Hormigón Proyectado con Armaduras Postesas"*, Convenio C-1.286 U.P.C.-Hormigones Proyectados S.A., Barcelona, Septiembre 1991.

SCOTT, R.F., *"Foundation Analysis"*, Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA, 1981.

SELVADURAI, A.P.S., *"Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction"*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam 1979.

TADROS, M.K. y YUN-SOOL, J., *"Precast Concrete Storage Tanks"*, Concrete International, November 1987.

TIMOSHENKO, S.P. y WOINOWSKY-KRIEGER, S., *"Theory of Plates and Shells"*, Mc. Graw-Hill Book Co., Singapore 1959.

VAN BREUGEL, K., *"Problems Associated with Wall-to-Base Connections"*, Concrete Society Conference on Design, Construction and Maintenance of Concrete Storage Structures, Newcastle Upon Tyne, December 1984.

VAN BREUGEL, K., *"Partial Prestressing for Cylindrical Liquid Retaining structures"*, Tenth International Congress of the FIP, India, February 1986.

VAN BREUGEL, K. y DE BOER, R., *"Optimization Procedure for Horizontal Tank Pres-*

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

tress", IABSE 13 th Congress, Helsinki, June 1988.

VAN BREUGEL, K., BRAAM, C.R. y HARDER, E.M., *"Cad of the Effect of Thermal Loads on Structural Safety", Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures,* Proceedings of SCI-C 1990, Second International Conference held in Zell and See, Austria, April 1990.

VILARDELL, J.M., *"Anàlisi Estructural i Criteris de Disseny de Dipòsits Cilíndrics de Formigó Pretensat"*, Tesina de Especialidad, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, U.P.C., Barcelona, 29 de Junio de 1990.

VILARDELL, J.M., AGUADO, A. y MIRAMBELL, E., *Comportament Estructural de Dipòsits Cilíndrics de Formigó Pretensat,* Monografía del Departamento de Ingeniería de la Construcción, Serie Investigación, Ref. 706-I 08-92, I.S.B.N. 84-87691-11-0, 160 pág., Barcelona, Octubre 1992.

VILARDELL, J.M., *"Análisis Estructural y Criterios de Diseño de Depósitos Cilíndricos de Hormigón Pretensado"*, tesis doctoral en curso, Departamento de Ingeniería de la Construcción, U.P.C.

"Instrucción para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón Pretensado (EP-80)", Comisión Permanente del Hormigón, Madrid 1986.

"Instrucción para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón en Masa o Armado (EH-91)", Comisión Permanente del Hormigón, Madrid 1991.

RESUMEN

El comportamiento de un depósito cilíndrico de hormigón pretensado está muy condicionado por el tipo de unión pared-solera, que suele ser monolítica o articulada. Para depósitos con capacidades pequeñas y medias, una solución ampliamente aceptada es la monolítica, por motivos constructivos, de estabilidad, estanqueidad y mantenimiento. Sin embargo, este tipo de conexión conduce a esfuerzos de flexión elevados en la base, que limitan su utilización para capacidades superiores.

Entre los diferentes métodos de cálculo de un depósito con unión monolítica pared-solera, una opción usual consiste en estudiar la pared aislada de la solera, adoptando un empotramiento perfecto en su base. El pretensado circunferencial se supone distribuído según una ley trapecial. La solución del problema es inmediata mediante tablas o fórmulas analíticas. Sin embargo, estudios con modelos de análisis conjunto de la estructura (pared-solera-cimentación) han mostrado que los esfuerzos de la pared son muy sensibles a una pequeña rotación de la unión.

En este trabajo se presenta un método de cálculo de los esfuerzos principales de la pared de un depósito cilíndrico de hormigón pretensado, con borde superior libre y monolíticamente unida a la solera, considerando la capacidad de movimiento de la unión (definida por los espesores de la pared y de la solera, y la rigidez del terreno de cimentación), a partir de los esfuerzos calculados adoptando un empotramiento perfecto en la base. La definición de este método está basada en un modelo analítico lineal, específico para esta tipología, que considera el comportamiento conjunto pared-solera-cimentación, adoptando cargas con simetría de revolución.

La gran diferencia observada entre los esfuerzos obtenidos con este método y los relativos a la hipótesis de pared perfectamente empotrada, supone un ahorro considerable en materiales y un dominio más amplio de uso de esta tipología.

SUMMARY

The behaviour of a circular prestressed concrete tank is closely dependent on its wall-to-base connection, which can be either monolithic or hinged. When the capacity of the tank is small or medium, a monolithic connection is widely accepted, due to construction, stability, watertightness and maintenance reasons. However, the important fixed-end forces can jeopardize its use in higher capacities.

Within the different methods to analyse circular tanks with monolithic wall-to-base connection, it is usual to study the wall apart from the floor slab, assuming the lower edge of the wall totally fixed. The course of the horizontal prestressing is equal to the course of the hydrostatic pressure. The solution of the problem is easily given by tables or by analitical expressions. However, some studies with analitical models that consider the soil-tank interaction show that the fixed-end forces are very sensitive to a small rotation of the connection.

This paper presents a new approach to the analysis of the main forces of a circular prestressed concrete wall, with free edge at the top and monolithic wall-to-base connection, by comparison with the forces calculated assuming the base totally fixed, taking into account the movement capacity of the connection (defined by the thickness of both the wall and the base slab and by the soil mechanical behaviour). The proposed method is based on an analitical linear elastic model that considers the soil-tank interaction under axisymmetric loads.

The important difference between the forces calculated with this method and those calculated assuming the lower edge of the wall totally fixed results in a considerable saving in materials and in a largest range of use of the monolithic connection.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

457-0-203

Un ejemplo de evaluación de la carga última de una estructura

Avelino Samartín Quiroga y Santiago Pérez-Fadón
Ingenieros de Caminos

1. INTRODUCCION

La aplicación del cálculo no lineal al diseño de estructuras, crece a medida que el coste y la accesibilidad de los computadores mejoran. Así, de acuerdo con NAFEMS (1), en la década de los 70 se ha estimado que solamente un 1% de todos los cálculos de estructuras presentaban un carácter no lineal. Esta proporción alcanzó valores cercanos al 10% en los finales de la pasada década y se puede asegurar que esta tendencia continúa.

La complejidad del cálculo no lineal respecto al lineal es evidente y su uso en un proyecto real representa una decisión de importantes consecuencias tanto en términos conceptuales como computacionales. Entre estas consecuencias caben destacar las siguientes:

–La no validez del principio de superposición y, por consiguiente, de la necesidad del tratamiento de una sola hipótesis de carga en cada cálculo.

–La secuencia de aplicación de las cargas puede ser importante. En particular, el estado inicial de tensiones (pretensado, tensiones residuales, etc.), presenta un carácter relevante.

–La no proporcionalidad de las fuerzas y la respuesta de la estructura, exige una adecuada filosofía respecto al concepto de seguridad de la estructura.

–El esfuerzo de cálculo medido en tiempo y memoria de computador, puede ser superior, uno o varios órdenes de magnitud, en comparación con un cálculo lineal.

Existen varios motivos para aplicar un cálculo no lineal a un proyecto, algunos de los cuales se citan a continuación:

–Evaluación de la seguridad de una estructura existente que muestre indicios aparentes de daño o que deba soportar cargas no previstas en el proyecto.

–Estructuras en las que las deformaciones influyen de forma significativa en los esfuerzos, por lo que el planteamiento del equilibrio debe efectuarse sobre la estructura deformada. Es el caso de arcos, estructuras de cables, etc.

–Reparación de estructuras dañadas por acciones que han traspasado el estado de servicio y cuya resistencia remanente debe ser tenida en cuenta de forma adecuada.

–Establecimiento de las causas posibles de fallo de una construcción, mediante la simulación numérica del fenómeno producido en dicho fallo.

En este artículo se expone una aplicación de un método de cálculo no lineal, en grandes movimientos y material no lineal, utilizando el programa comercial ANSYS (2) y que ha sido motivada por la necesidad de la evaluación de la seguridad de una estructura que presentaba una deformabilidad importante bajo cargas permanentes, lo que podría implicar una disminución de su seguridad ante la actuación de sobrecargas de uso.

2. CLASIFICACION DEL CALCULO NO LINEAL

La linealidad de un cálculo es consecuencia de la linealidad de todas las relaciones que aparecen en un análisis de una estructura, es decir, de los siguientes tipos de relaciones:

–Relaciones entre deformaciones (curvaturas, alargamientos unitarios, etc.) y movimientos. Esta linealidad se alcanza al suponer despreciables los cuadrados de las deformaciones frente a la unidad (Hipótesis de las pequeñas deformaciones).

–Relaciones de equilibrio entre las fuerzas y los esfuerzos (o tensiones). Si las ecuaciones de equilibrio se plantean para la geometría inicial de la estructura, es decir, antes de ser modificada por las cargas, entonces estas relaciones son lineales (Hipótesis de los pequeños movimientos).

–Relaciones constitutivas del material, que determinan las tensiones (o esfuerzos) en función de las deformaciones. Si el material es hookeano y elástico se obtienen, por definición, relaciones lineales. (Hipótesis de material lineal).

Contrariamente, existen situaciones no lineales cuando uno o varios de los tipos de relaciones anteriores son no lineales. De esta forma se obtie-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

nen diferentes modos de no linealidad: No linealidad geométrica, no linealidad del material, etc. Dentro del primer modo se pueden distinguir diferentes situaciones, tales como combinación de grandes/pequeñas deformaciones, grandes movimientos con pequeñas/grandes rotaciones, etc.

A veces, es posible efectuar un cálculo no lineal de una estructura mediante la aplicación sucesiva de cálculos lineales, es decir, utilizando un programa de cálculo lineal de estructuras. Este procedimiento puede ser válido en situaciones de no linealidad del material, en las que las características del material en una sección dependen del nivel de deformaciones y tensiones alcanzado en dicha sección. Modificando de forma iterativa estas características de acuerdo con los resultados del cálculo precedente, se puede, en algunos casos, alcanzar una situación final convergente. A veces, la aplicación de este método iterativo no conduce a un resultado final convergente, particularmente en casos de no linealidad geométrica. La reducción del análisis de una estructura con comportamiento no lineal a sucesivos cálculos lineales en los cuales la geometría de la estructura se modifica por los movimientos producidos por las cargas en el cálculo anterior, puede converger a más de una solución (situaciones biestables). Esta posibilidad aparece, particularmente, si los esfuerzos axiles son importantes en el análisis. Se obvia este inconveniente si para cada barra o elemento de la estructura se considera la modificación de su matriz de rigidez producida por el esfuerzo axil, al considerar la interacción de la flexión y la tracción o la compresión en la geometría deformada del elemento. Se suele describir este efecto de modificación de la matriz de rigidez de la estructura, mediante la suma de una matriz de rigidez a la matriz de rigidez lineal. Normalmente, si los giros son pequeños, esta matriz, denominada geométrica o de las tensiones iniciales, tiene en cuenta la influencia del axil en la flexión pero no viceversa y depende de los axiles que se producen en la estructura. Un análisis no lineal que considera esta matriz de rigidez geométrica, se suele conocer como cálculo P-Delta.

Finalmente, si los movimientos, deformaciones y rotaciones son importantes, se hace preciso introducir el efecto del cambio global de la geometría de la estructura mediante la consideración de matriz de rigidez adicional, conocida a veces como matriz de rigidez de los grandes movimientos. Estas situaciones no suelen ser frecuentes en la Ingeniería Civil. Un adecuado tratamiento de las mismas, precisa introducir medidas para las deformaciones y las tensiones, más adecuadas que las clásicas, y la específica descripción de estas medidas depende del tipo de formulación, lagrangiana o euleriana, que se utilice, así como de la técnica de cálculo incremental considerada.

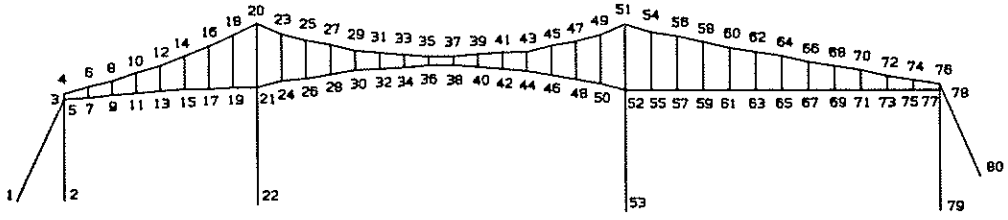
En el ejemplo que se estudia en el siguiente apartado, se ha tenido en cuenta la no linealidad del material y la geométrica debida a los grandes movimientos, por lo que puede considerarse el cálculo que resulta, como poco usual en el contexto de la práctica de la Ingeniería Civil.

3. APLICACION

3.1. Descripción

La estructura de cables que soporta la marquesina de la autopista de peaje. Tarrasa-Manresa (Figs. 1 y 2) fue calculada, en el proyecto inicial, como una celosía (barras articuladas pretensadas, soportadas en pilares metálicos) considerando grandes movimientos bajo la actuación de diferentes acciones: peso propio, cargas de uso, nieve y viento. Se observa que el cálculo, en este caso, debe incluir el efecto de la rigidización de las barras por el axil, ya que de otra forma la celosía sería inestable, es decir, un mecanismo.

Sin embargo, una vez construida la marquesina (Foto 1), pareció conveniente comprobar el comportamiento de la estructura bajo las cargas de servicio, con objeto de evaluar las deformaciones producidas, es decir, se realizó una comprobación del estado límite de servicio (E.L.S.). Asimismo, se estudió la seguridad de la estructura ante las cargas mayoradas por los pertinentes coeficientes de seguridad, es decir, en el estado límite último (E.L.U.). La acción del viento considerada en el E.L.S. se supuso estática, es decir, no se modelizó en este primer cálculo los efectos dinámicos que produce esta acción. En definitiva, todos los cálculos realizados han sido, por lo tanto, estáticos.



MARQUESINA TARRASA - MANRESA

Fig. 1

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

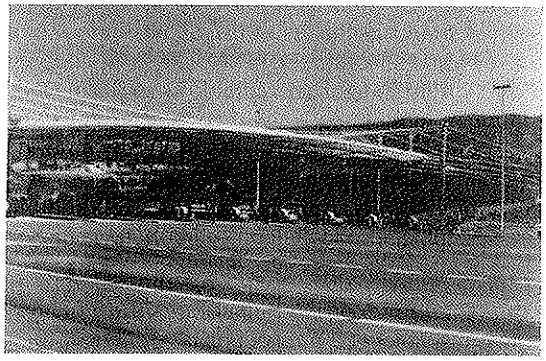


Foto 1

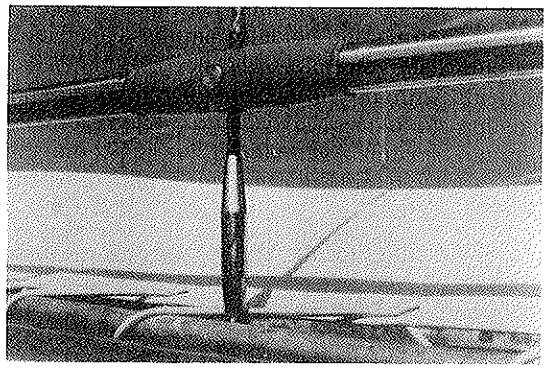


Foto 2

3.2. Acciones

El peso propio es de muy pequeña influencia en los resultados del cálculo y su valor característico se establece en 10 kg/m².

Como valor de la sobrecarga de nieve se adopta 60 kg/m², que representa un incremento de un 50% del estipulado por la Norma vigente, para tener en cuenta, por una parte, la posible acumulación de nieve dada la forma de la marquesina y, por otra, la existencia de un microclima en la zona donde está ubicada la marquesina. La carga de viento aplicada en el cálculo del E.L.S. ha sido la definida en la normativa correspondiente.

Como coeficiente de mayoración de las acciones se adopta el valor de 1,0 para el E.L.S., y en el E.L.U., el habitual en estructuras metálicas y pretensadas, es decir, 1,6 de acuerdo con nuestra normativa.

3.3. Modelo estructural

Se observó que el modelo de barras biarticuladas del proyecto, idealizaba la unión de las péndolas con los cables mediante los manguitos de empalme (Foto 2), como una rótula. En el modelo considerado ahora se supuso que, en la estructura, las barras estaban empotradas entre sí, es decir, eran continuas, con una pequeña rigidez a la flexión, y no cables, a excepción de las péndolas, que se han supuesto biarticuladas sin posibilidad de resistir compresiones.

Para los cordones se contempla un comportamiento elasto-plástico, de acuerdo con un diagrama bilineal.

3.4. Materiales

El límite elástico de las barras de acero empleadas es de 7.800 kg/cm².

El límite de rotura garantizado es de 10.000 kg/cm² y el coeficiente de eficacia del sistema, a falta de ensayos, se cifra en 0,95 con lo cual la tensión de cálculo es de 9.500 kg/cm².

La deformación de rotura de las barras es de 11%.

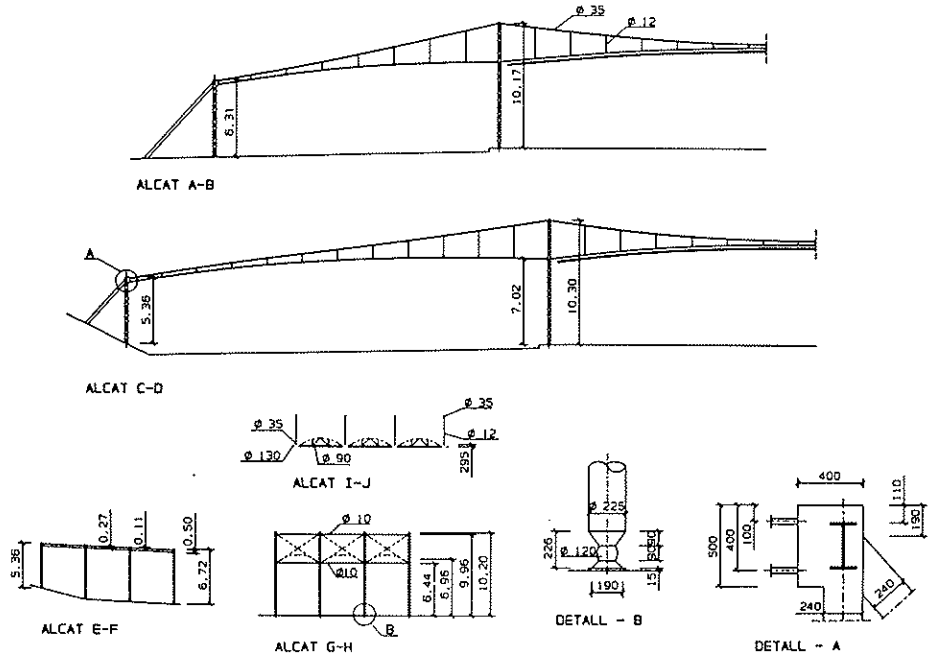


Fig. 2

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3.5. Condiciones de diseño

Bajo las cargas mayoradas, se han impuesto los siguientes límites tensionales, dadas las características de la estructura.

(a) Las tensiones producidas exclusivamente por esfuerzo axil de tracción, deben ser inferiores al límite elástico.

(b) La deformación de las barras en flexión o tracción compuestas, no debe superar el límite de deformación de rotura. Esta condición se ha formulado en términos tensionales haciendo coincidir el límite con el de rotura multiplicado por el coeficiente de eficacia del sistema.

3.6. Cálculos estructurales

Se han realizado varios cálculos estructurales. El primero, con objeto de simular la puesta en tensión de la estructura, y otros dos para comprobar la respuesta de ésta ante las cargas de uso. Uno de estos dos, bajo la acción de las cargas de servicio sin mayorar (E.L.S.) y el otro, con las cargas amplificadas por el coeficiente de elasticidad (E.L.U.). Todos los cálculos presentan un carácter doblemente lineal, puesto que se ha considerado, por una parte, la no linealidad del material acero, cuyo diagrama bilineal se ha descrito en 3.3, y por otra, la interacción de los esfuerzos axiles de las barras con la flexión, al producirse la deformación de éstas. El método utilizado ha sido incremental, es decir, la carga final se alcanzaba mediante escalones, para cada uno de los cuales se efectuaba el cálculo no lineal anterior, y la deformada producida en la estructura constituía la nueva geometría de ésta, que había que considerar en el cálculo del siguiente escalón de carga. Se han considerado 30 escalones de carga y un máximo de 20 iteraciones dentro de cada escalón, para alcanzar la convergencia de la rigidez de las barras y las características del material.

4. COMPORTAMIENTO GENERAL DE LA ESTRUCTURA

La estructura se pone en tensión tirando desde ambos extremos y de ambas parábolas lo cual hace girar los mástiles sobre la rótula que hay al pie de los mismos (Foto 3); de este modo las péndolas también se tesan.

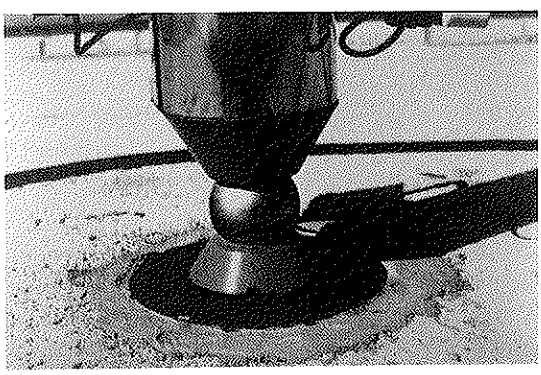


Foto 3

Queda así una estructura pretensada antes de entrar en carga. Estas tensiones, debido a la no linealidad geométrica del cálculo, influyen en la respuesta de la estructura. Además, cuando la estructura entre en carga, la parábola superior se traccionará más y la parábola inferior se detraccionará (equivale a comprimirse), por lo cual la rigidez de la estructura es mayor que con un cable solo.

Al final de la carga, la parábola inferior casi se descarga y la parábola superior resiste casi toda la carga.

Al tratarse de una estructura de barras y no de cables y, al no haberse dispuesto rótulas en los manguitos de empalme entre las barras principales, la estructura sólo puede responder si en los puntos de cuelgue de la carga se forman las oportunas rótulas plásticas que permitan que la línea superior y la inferior conformen los correspondientes polígonos funiculares.

Por eso, ha habido que realizar un cálculo contando con la ductilidad del acero, es decir, aceptando la formación de rótulas plásticas en los extremos de las barras. Este supuesto es válido siempre y cuando bajo las acciones mayoradas de cálculo no se supere la deformación de rotura.

5. CALCULO DE LA PUESTA EN TENSION

La puesta en tensión de la estructura se realizó tirando desde ambos extremos con una fuerza de 18 t por cada barra.

Esta puesta en tensión se ha representado en el cálculo liberando los nudos extremos y aplicando en ellos una fuerza de 18 t en cada barra.

Como resultados de salida se obtienen unas tensiones, que suelen denominarse tensiones previas o iniciales, y que se suman algebraicamente con las tensiones que produce la sobrecarga.

6. APLICACION DE LAS SOBRECARGAS EN E.L.U.

Sobre la estructura puesta en tensión del párrafo anterior, se ha aplicado una carga de 1.814 toneladas por nudo, correspondiente a valores mayorados por 1,6 de los siguientes valores:

–Peso en barras y péndolas 20 Kg/m.

–Peso de la cubierta: 10 Kg/m^2.

–Peso de nieve: 60 Kg/m^2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

7. FORMACION DE ROTULAS PLASTICAS EN LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS

En los extremos de las barras se producen unas tensiones de incurvación, debido a la actuación simultánea del axil y el flector. Cuando estas tensiones superan el límite elástico, se inicia la formación de una rótula plástica que sólo es posible si el acero tiene la ductilidad suficiente. Es decir, si la deformación solicitada es menor o igual que la deformación de rotura del acero.

Bajo el efecto de las acciones mayoradas, las barras de la parábola superior alcanzan una tensión máxima de 7.938 Kg/cm^2, lo cual significa que no se alcanza en las rótulas plásticas la deformación de rotura, que se corresponde con 10.000 Kg/cm^2.

Las barras de la parábola inferior alcanzan una tensión máxima de 7.810 Kg/cm^2, lo que significa que tampoco en estas barras se alcanza la deformación de rotura.

Además, las tensiones máximas se corresponden con las sillas de apoyo sobre los mástiles centrales (Foto 4) (nudo i de la barra 13 y nudo j de la barra 27), por ello las tensiones de incurvación podrían ser menores si la silla está bien ejecutada y su diámetro es lo suficientemente grande.

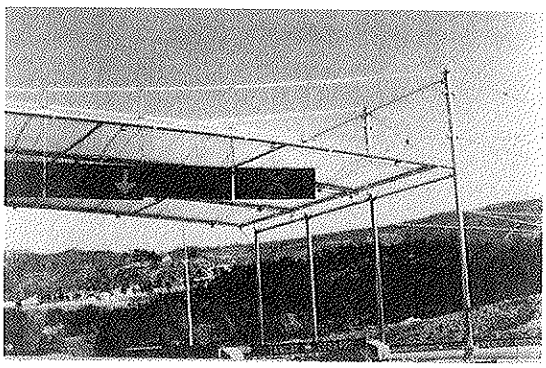


Foto 4

Las péndolas, debido a incurvación, no aumentan su tensión, porque no tienen flexiones debido a que van articuladas en sus extremos.

8. TENSIONES EN LAS BARRAS DEBIDAS A ESFUERZOS AXILES

Con los valores mayorados de las acciones, se obtienen valores menores que 6.720 Kg/cm^2 para la parábola superior y valores menores que 670 Kg/cm^2 para la parábola inferior.

Las péndolas trabajan a menos de 2.185 Kg/cm^2.

Por lo tanto, las tensiones debidas exclusivamente a esfuerzos axiles cumplen los límites de cálculo que se habían establecido.

9. CONCLUSIONES DEL CALCULO EN E.L.U.

La estructura cuyo cálculo se ha descrito, puede soportar cargas de nieve de 60 Kg/m^2, con un coeficiente de seguridad mayor de 1,6; para soportar esta carga, las barras trabajan por debajo del límite elástico frente a esfuerzos axiles simples, y por debajo del límite que impone la deformación del acero en rotura, en las zonas de incurvación para formación de rótulas plásticas.

Referente a las deformaciones de la estructura, se realizó, posteriormente, un cálculo en servicio que determinó cuáles son las deformaciones bajo las cargas del viento y cuáles bajo la carga de nieve sin mayorar.

10. CALCULO DE LAS DEFORMACIONES EN E.L.S.

Al tratarse, en este caso, de evaluar la deformación de la estructura, se han adoptado los valores característicos de las acciones, es decir, los coeficientes de mayoración son 1,0.

Se han calculado dos hipótesis de carga:

–La primera corresponde al mismo cálculo anteriormente expuesto, pero ahora con acciones sin mayorar y una hipótesis de sobrecarga de nieve de 60 Kg/m^2.

–La segunda, una carga de viento, tomada de la normativa vigente, de 51 Kg/m^2, hacia abajo en la mitad izquierda de la cubierta (al ser el ángulo menor de 10º no es necesario considerar la hipótesis de presión y succión, sino solamente presión en la mitad de la cubierta).

Se ha vuelto a emplear el modelo descrito anteriormente, es decir un modelo doblemente no lineal.

11. CONCLUSIONES DEL CALCULO EN E.L.S.

En la hipótesis de viento, la deformación vertical máxima se obtiene en el nudo 31 y es de 0,547 m.

En la hipótesis de nieve, la deformación máxima de la estructura se obtiene en el nudo 38 y es de 0,678 m.

Dada la deformabilidad que es consustancial con este tipo de estructuras, los resultados se consideraron aceptables.

12. AGRADECIMIENTOS

Se agradece a D. Miguel Angel Moreno, de Ingeciber, S.A., por su colaboración en el cálculo mediante el programa ANSYS. Asimismo, a la Empresa Ferrovial por permitir la publicación de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

este caso real, como ejemplo ilustrativo de aplicación de un cálculo doblemente no lineal.

REFERENCIAS

1. NAFEMS: "A Finite Element Premier", 1986.

2. "ANSYS Engineering Analysis System". Swanson Analysis Systems Houston, Pennsylvania 15342 (U.S.A.).

RESUMEN

Tras una breve introducción sobre la clasificación de los cálculos no lineales en estructuras y sus implicaciones en el diseño, se presenta una estructura ya construida, formada por cables rigidizados mediante pretensado y que corresponde a una marquesina de la autopista de Tarrasa-Manresa.

El cálculo estático de la estructura, supuesta un entramado plano, se llevó a cabo con objeto de evaluar su respuesta para las situaciones de servicio y de carga última. Las hipótesis consideradas incluían las cargas de peso propio, carga permanente, nieve y viento. En el cálculo se tuvieron en cuenta los grandes desplazamientos, la rigidización de las barras por tracción y la no linealidad del material. Los resultados obtenidos han sido aceptables con las condiciones de diseño y concordantes con los deducidos en la fase de proyecto, en la que se calculó la estructura como una estructura celosía plana, con efectos rigidizantes en las barras, debidos a las tracciones.

SUMMARY

First a brief introduction about the non linear analysis of structures and its implication on their design is given. Then an already built structure, namely a cantilever roof for petrol station in the motor-way Tarrasa-Manresa, composed by cables stiffened by prestress is presented.

The static structural analysis of the structure, that is modelled as a plane frame, is carried out in order to evaluate its response during the service and ultimate load states. The assumed loading combinations included self weight, dead load, snow load and wind actions. In the analysis, large displacements, stiffening effects in the beam deflections and the nonlinear material behaviour have been explicitly considered. The obtained results have been admissible in accordance to the design conditions and they have a good agreement with the results found in the original design of the structure, in which this structure has been modelled as a plane truss with stiffening bar effects due to traction forces included.

* * *



Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Un modelo general para el análisis no lineal de estructuras de hormigón y acero construidas evolutivamente

Paulo Cruz
Ing. de Caminos, Canales y Puertos
Profesor de la E.E.U.M. Guimãraes, Portugal
Antonio Marí
Dr. Ing. de Caminos, C. y P.
Catedrático Dpto. Ing. Construcción. E.T.S.E.C.C.P. Barcelona
Pere Roca
Dr. Ing. de Caminos, C. y P.
Profesor de la E.T.S.E.C.C.P. Barcelona

1. INTRODUCCION

Todo proceso constructivo de una estructura implica la aparición de fases intermedias durante las cuales ésta experimenta variaciones geométricas o en los materiales, o bien alteraciones de su esquema estático. En muchos casos, tales variaciones modifican sensiblemente la distribución de esfuerzos o tensiones finales con respecto a los que puede predecir un simple análisis sobre la geometría definitiva. Ello es particularmente cierto en estructuras de gran envergadura, en las que la evolución de la geometría o del esquema estático constituye el aspecto crítico de los procesos de proyecto y de construcción.

En las estructuras de hormigón pretensado, la propia naturaleza de esta técnica facilita procesos tales como el avance en voladizo, el cosido provisional o definitivo de unos elementos con otros, el atirantamiento de la estructura, la construcción vano a vano, la fijación o anclaje de puntos, la solidarización de rótulas iniciales, el empuje o elevación de grandes masas y la combinación de elementos prefabricados con elementos construidos "in situ", entre otras muchas posibilidades de construcción evolutiva.

Un ejemplo muy frecuente de construcción evolutiva es el caso de tableros de puentes compuestos por vigas prefabricadas de hormigón pretensado, generalmente con armaduras pretesas y a veces también con postesas, conectadas a una losa superior de hormigón armado vertido "in situ". En este caso, la diferencia entre las propiedades mecánicas y reológicas de ambos hormigones (losa y vigas), su evolución en el tiempo, las pérdidas de fuerza de pretensado por retracción, fluencia y relajación, la secuencia del proceso constructivo, con o sin apeo de las vigas, y la posible construcción por etapas de la losa superior, son factores que, sin duda, afectan al estado tensional a lo largo del tiempo y cuyos efectos deben ser considerados de cara al dimensionamiento de la fuerza de pretensado, a fin de garantizar la ausencia de fisuración en cualquier instante de la vida útil de la estructura.

Las estructuras mixtas, compuestas de acero laminado y hormigón armado o pretensado, son igualmente un ejemplo típico de estructuras construidas evolutivamente, en las que el diferente comportamiento reológico de los materiales puede dar lugar, a lo largo del tiempo, a redistribuciones de esfuerzos y tensiones que deben ser tenidas en cuenta en el proyecto.

Estructuras tan frecuentes como las convencionales de la edificación suelen presentar procesos constructivos muy evolutivos, generados por el sucesivo cimbrado y descimbrado de plantas. La representación realista de estos procesos en el cálculo, plantea importantes dificultades debidas a efectos diferidos tales como el progresivo endurecimiento del hormgión y la fluencia de las plantas bajo las cargas aplicadas.

Pero es en el caso de grandes estructuras de hormigón pretensado donde la construcción evolutiva adquiere toda su significación y donde, por la enorme responsabilidad resistente de sus elementos y por la complejidad constructiva que entraña, es necesario realizar un análisis estructural riguroso. Este análisis debe abordar tres aspectos fundamentales:

1. **La evolución de la configuración estructural durante el proceso constructivo:** Se entiende por tal la consideración, en un análisis instantáneo, de la evolución de la geometría longitudinal y transversal de la estructura, la aparición o desaparición de cargas, la introducción o supresión de elementos, tirantes, apoyos, o tendones de preten-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

sado, y la fijación de rótulas provisionales transformándolas en conexiones rígidas entre elementos, junto a otras posibilidades constructivas. (Análisis tipo 1).

2. **Los efectos estructurales a lo largo del tiempo** de la fluencia, retracción y evolución de las propiedades de los distintos hormigones en el tiempo, considerando las distintas edades de fabricación y puesta en carga, la sucesiva introducción de cargas y deformaciones impuestas y los efectos de la relajación del acero de pretensado. Se trata de un análisis paso a paso en el tiempo. (Análisis tipo 2).

3. **La consideración de las propiedades tenso-deformacionales de los materiales, de manera realista.** En el caso del hormigón deben tenerse en cuenta la fisuración en tracción y la contribución del hormigón intacto traccionado entre fisuras, la relación no lineal tensión-deformación y el agotamiento en compresión. En el acero debe considerarse la plastificación en compresión y en tracción. Se trata de un análisis no lineal que permita conocer la respuesta estructural bajo carga creciente hasta rotura, a fin de conocer los efectos que la posible fisuración del hormigón puede tener en situación de servicio y la capacidad resistente de la estructura. En el caso de estructuras esbeltas, donde los efectos de segundo orden pueden ser importantes, conviene, además, realizar un análisis no lineal por la geometría, para considerar el equilibrio de la estructura en su configuración deformada, incluyendo en el mismo la interacción con la no linealidad de los materiales. (Análisis tipo 3).

Una primera aproximación al problema, utilizada a veces en el proyecto de estructuras construidas evolutivamente, consiste en realizar un análisis tipo "1" y modificar los esfuerzos instantáneos mediante métodos aproximados basados en la experiencia o en consideraciones teóricas, para obtener los efectos de la fluencia y demás fenómenos diferidos a largo plazo. Una aproximación más precisa consiste en utilizar modelos que combinan aspectos de los análisis tipo "1" y "2". Generalmente, los programas están diseñados para casos específicos de construcción, tales como puentes de dovelas construidos por avance en voladizo, puentes atirantados, puentes construidos vano a vano o por empuje (Van Zyl, Sanmartín, etc.). Algunos autores han desarrollado programas muy valiosos para construcción evolutiva general (Millanes, Ketchum, Ghali y Elbadry).

Por otra parte, el análisis no lineal ha estado históricamente desligado de los procesos constructivos. Hay numerosos modelos desarrollados para análisis no lineal, instantáneo o diferido, de estructuras reticulares planas (Kang y Scordelis, Carol, Marí, Corres, León, Carrascón, Cruz, etc.) que incluyen efectos de acciones directas o indirectas, efectos de segundo orden, efectos diferidos, pretensado, fisuración, etc. Sin embargo, pocos modelos (Ketchum y Scordelis, Ghali), combinan efectivamente el análisis no lineal con el análisis diferido y los procesos de construcción evolutiva.

Mediante un análisis tipo "1" se puede conocer la respuesta estructural en servicio durante la fase constructiva y se puede aproximar la respuesta diferida o la capacidad resistente, de una forma menos aproximada. Un análisis tipo "2" permite conocer, además, la respuesta diferida en servicio; y un análisis tipo "3" aproxima a la respuesta no lineal, instantánea o diferida (y, por tanto, la capacidad portante), pero sin tener en cuenta la realidad del proceso constructivo.

El interés de combinar los tres tipos de análisis estriba en tratar de conocer:

a) El comportamiento estructural en servicio, en fase constructiva, al efecto de proyectar adecuadamente, realizando un seguimiento del montaje o construcción de la estructura, y simular las correcciones pertinentes durante el mismo a fin de conseguir los objetivos planteados.

b) El comportamiento en servicio, a lo largo de la vida útil de la estructura, permitiendo en particular evaluar las posibles redistribuciones de esfuerzos y evitar fisuraciones o flechas excesivas que puedan afectar a la funcionalidad, la durabilidad o la estética a largo plazo.

c) El comportamiento bajo carga creciente hasta rotura y el comportamiento en fase de servicio considerando posibles zonas fisuradas, con el fin de evaluar la capacidad resistente de la estructura tanto durante la construcción como una vez acabada la misma, a corto y largo plazo.

En definitiva, todo ello puede ayudar a responder a preguntas tales como:

¿Cómo influye el proceso constructivo en el comportamiento en servicio a corto y largo plazo de la estructura?

¿Qué capacidad portante tiene a largo plazo una estructura construida evolutivamente, en relación a su capacidad resistente en el momento de finalización de su construcción?

¿Qué capacidad remanente de carga tiene una estructura en la que se han detectado fisuras u otros daños?

¿Cómo afecta a la capacidad resistente y al comportamiento en servicio, de una estructura existente dañada, la disposición de un refuerzo de la misma?

Como puede observarse, la combinación de los tres tipos de análisis antes comentados proporciona una infinidad de posibilidades de utilización para el estudio de casos prácticos cuya solución no es, en absoluto, obvia. En esta comunicación

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

se presenta un modelo de análisis, de carácter muy general, planteado para responder a las cuestiones anteriores, al integrar, de forma acoplada, los tres tipos de análisis. Se describen, brevemente, aspectos relativos a su formulación, posibilidades, e implementación en programa de ordenador. Sus prestaciones se discuten a través de dos ejemplos numéricos.

2. BREVE DESCRIPCION DEL MODELO DE ANALISIS

El modelo de análisis desarrollado, aplicable a estructuras reticulares planas, se basa en la formulación de los desplazamientos del método de elementos finitos (M.E.F.), incorporando elementos isoparamétricos unidimensionales de viga de dos o tres nodos, tendones de pretensado y tirantes.

Cada sección transversal se discretiza en subsecciones, descomponiéndose éstas a su vez en una serie de capas. En cada capa se considera una ecuación constitutiva explícita unidimensional.

El complejo comportamiento instantáneo y diferido del hormigón se representa mediante un modelo constitutivo con un tratamiento desacoplado del daño y reología (Cruz et al., 1993) que combina modelos parciales sencillos basados en la elasticidad, plasticidad y viscosidad. Conviene remarcar que este modelo constitutivo permite la simulación de aspectos importantes del comportamiento del hormigón, como por ejemplo la fluencia no lineal, la rotura diferida y la reducción de resistencia debida a cargas mantenidas.

Para la simulación de la fluencia, la retracción y el envejecimiento del hormigón se consideran las funciones de CEB-FIP Model Code 1990.

En los apartados siguientes se describen las principales características del modelo formulado.

2.1. Idealización de la estructura

Se incluyen elementos de viga de dos nodos de Hermite o elementos de tres nodos de Timoshenko (Cruz 1991), tirantes pretensados, tendones de pretensado de trazado arbitrario, y elementos o apoyos especiales para reproducir las cimbras.

Cada uno de estos elementos puede ser introducido, retirado o ver modificada su seción, en cualquier instante. Además, en el caso de tirantes o tendones es posible modificar el nivel de tensión proporcionado, para simular operaciones de retesado o destesado.

Entre extremos de viga es posible definir vínculos con movimientos liberados ("rótulas generalizadas") o bien conexiones rígidas de longitud no nula ("bielas rígidas"), arbitrariamente orientados (Fig. 1). La liberación de un movimiento en forma de "rótula generalizada" implica la eliminación, por condensación estática, del correspondiente grado de libertad. La existencia de bielas rígidas en un elemento se trata a través de una matriz de transferencia de esfuerzos de los nudos no activos a los activos (Fig. 1). La descripción de estas operaciones se puede encontrar en diversos manuales de análisis matricial.

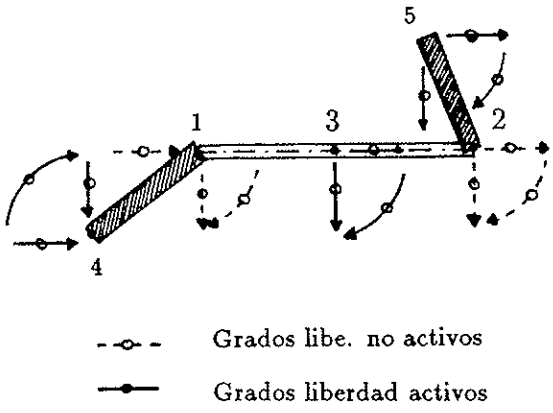


Fig. 1. Elemento con extremos rígidos.

El comportamiento de un tirante se asimila al de una barra biarticulada, cuyo material viene caracterizado por el módulo de deformación aparente de Ernst (1965). Mediante este módulo aparente es posible considerar el efecto combinado del alargamiento elástico y la disminución de la flecha de la catenária, en el comportamiento deformacional del tirante. Su expresión es bien conocida:

$$E_T = \frac{E_o}{1 + \frac{(\gamma l)^2}{12\sigma^3} E_o} \qquad (1)$$

Para el caso más general de nivel de carga variable, Ernst (1965) introdujo, además, la expresión de un módulo secante que permite relacionar la tensión en cualquier instante σ_t con la tensión en el instante inicial σ_o:

$$24\,\sigma_t^3 - 24\left[\sigma_o + E_o\Delta\varepsilon - \frac{E_o}{24}\,\frac{(\gamma l)^2}{\sigma_o^2}\right]\sigma_t^2 - E_o(\gamma l)^2 = 0 \qquad (2)$$

En los elementos o apoyos especiales utilizados, por ejemplo, para reproducir cimbras, los esfuerzos o reacciones calculados son multiplicados por 1 o por 0, dependiendo de si el efecto de apoyo se considere activo o inactivo, respectivamente, ante el signo de la fuerza actuante. Normalmente, el efecto de apoyo se considerará inactivo ante fuerzas que tiendan a producir separación.

2.2. Idealización de la sección transversal

La sección transversal de los elementos de viga se define como un conjunto de subsecciones tra-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

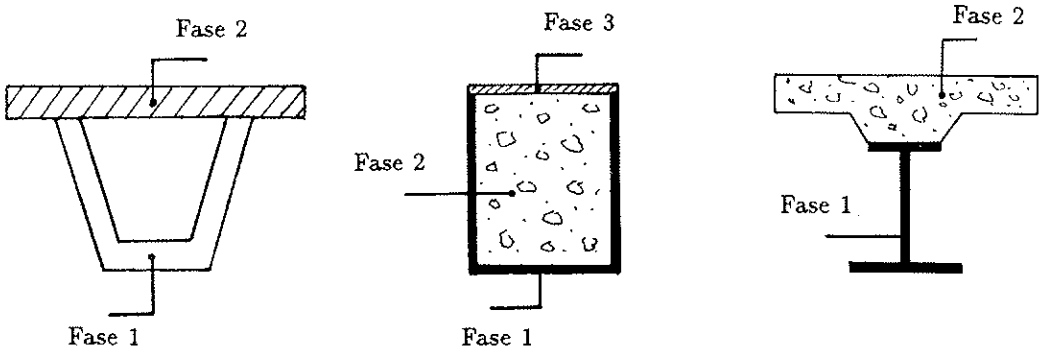


Fig. 2. Definición de la sección transversal.

peciales (Fig. 2), cada una de ellas discretizada a su vez en una serie de capas. Con este procedimiento es posible considerar la posible evolución material y geométrica de la sección transversal, en la gran mayoría de los casos reales ya referidos en el apartado anterior. Ello permite caracterizar convenientemente la formación de las secciones transversales de elementos de estructura de hormigón obtenida por fases, o de estructura mixta de acero y hormigón. En particular, es posible simular la formación de una sección constituida por más de un tipo de hormigón, eventualmente de distinta edad, e incluso inhibir la contribución resistente de nuevas armaduras hasta obtener una suficiente adherencia por endurecimiento del hormigón colocado in situ.

El modelo permite modificar, en un instante dado, las condiciones ambientales que envuelven una subsección cualquiera de hormigón (temperatura, perímetro de exposición, grado de humedad). Esta posibilidad puede adquirir gran importancia, por ejemplo, en la simulación de la construcción de un arco o una pila mixtos (Fig. 2) en los que al cerrar la sección transversal, se introducen complejos efectos sobre el comportamiento diferido del hormigón.

2.3. Acciones consideradas

Posibles acciones introducidas en el modelo son: cargas concentradas y distribuidas, efecto del pretensado, desplazamientos de apoyos, variaciones de temperatura, y acciones reológicas diferidas de fluencia y retracción en el hormigón y relajación del acero de pretensado.

El gradiente de temperatura en una sección transversal puede presentar una distribución lineal o no lineal, siendo posible considerar distintos coeficientes de dilatación térmica para los distintos materiales. El gradiente térmico se trata mediante una distribución de deformación no mecánica equivalente.

2.4. Comportamiento instantáneo de los materiales

Tanto para el acero pasivo como para el acero de pretensado se considera un diagrama multilineal, con endurecimiento (Fig. 3). Para el hormigón se ha adoptado un modelo de daño (Cruz et al., 1993) con dos parámetros de daño, uno en compresión y otro en tracción. Este modelo considera una rama descendente post-pico ("softening"), deformaciones plásticas y degradación del módulo de descarga en compresión. Ello se combina con un modelo de fisuración distribuida, incluyendo la contribución resistente del hormigón traccionado no fisurado ("tension stiffening"). La capacidad del modelo para reproducir el comportamiento no lineal del hormigón, tanto para niveles de tensión moderados como elevados, bajo carga estática o cíclica, se ilustra mediante los resultados obtenidos de un ensayo de simulación numérica (Cruz et al., 1993, Fig. 4).

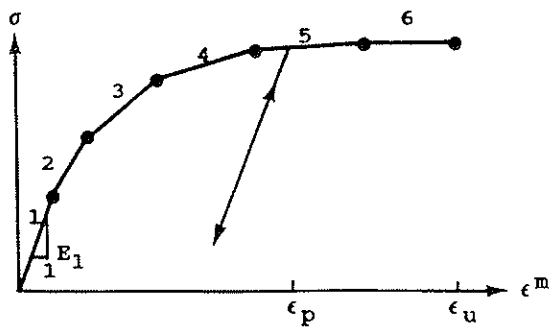
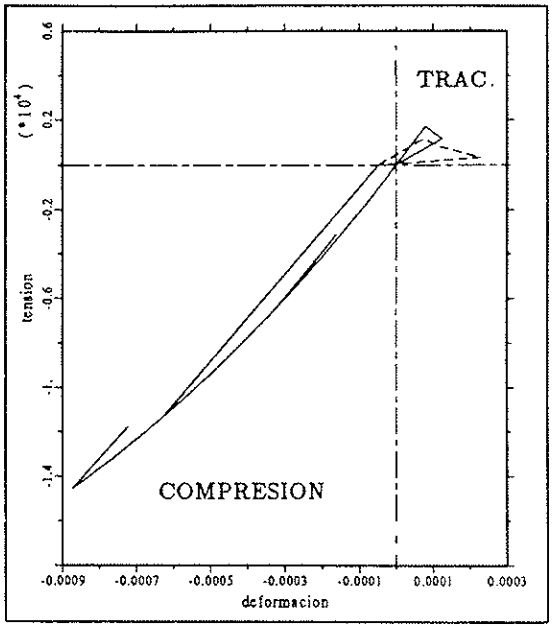


Fig. 3. Diagrama σ – ε multilineal del acero.

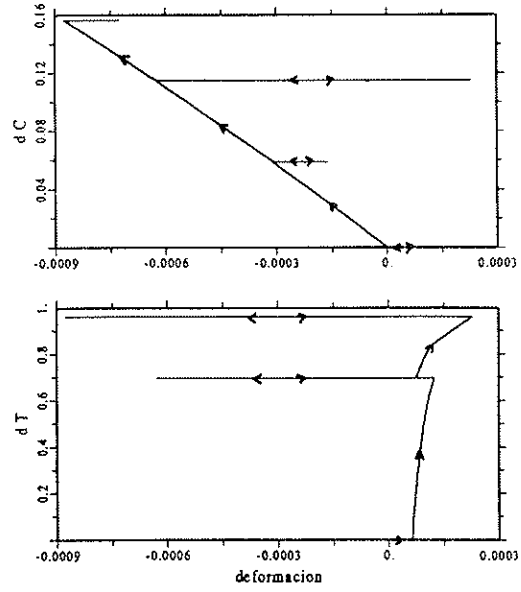
2.5. Comportamiento diferido de los materiales

Como puede observarse en la Fig. 5, el modelo constitutivo adoptado para la modelización del comportamiento diferido del hormigón resulta de la composición de una cadena de Maxwell con envejecimiento, con un elemento deslizante que

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



a) Diagrama σ – ε en un ensayo cíclico de una probeta de hormigón.



b) Variación de los parámetros de daño.

Fig. 4. Comportamiento no lineal del hormigón.

confiere las deformaciones plásticas, y con un modelo de daño continuo. En la Fig. 6 se presentan resultados obtenidos en una simulación numérica de un ensayo de compresión diferida en los que se reproducen correctamente fenómenos tales como la fluencia no lineal, la rotura diferida y la reducción de resistencia debida a cargas mantenidas. Una descripción más detallada del modelo constitutivo y del ejemplo aportado puede encontrarse en Cruz et al. (1993).

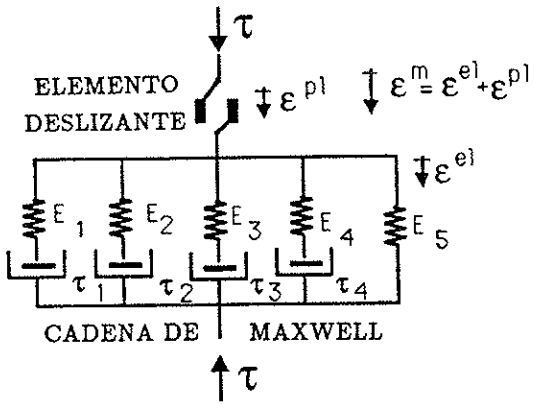
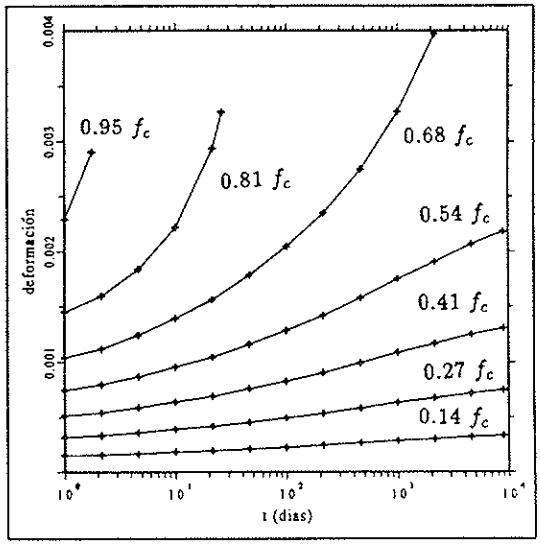
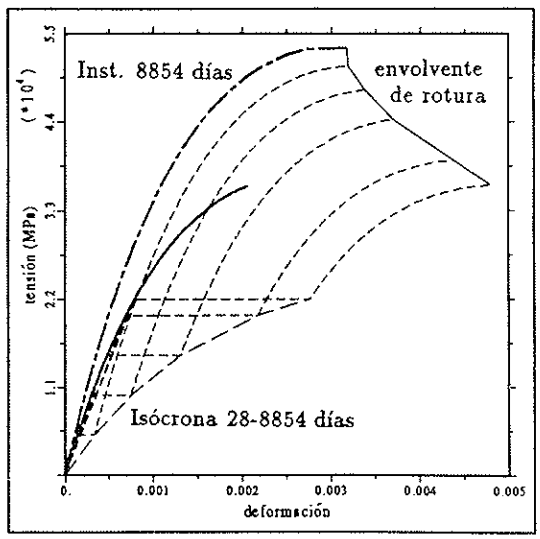


Fig. 5. Esquema reológico.



a) Fluencia no lineal y rotura diferida.



b) Reducción de resistencia por carga mantenida.

Fig. 6. Aspectos del comportamiento diferido del hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

2.6. Tratamiento del pretensado

En este trabajo, el tendón de pretensado se trata como un elemento independiente (aunque superponible a los elementos de viga), obteniéndose, de forma coherente con la formulación de elementos finitos utilizada, las expresiones que corresponden a la matriz de deformación (que relaciona la deformación axil del cable con los desplazamientos nodales), a la matriz de rigidez del cable, y al vector de cargas nodales equivalentes al pretensado (Henriques 1991, Roca y Marí 1993).

Es conveniente destacar que, con esta técnica, la evaluación de la acción del pretensado sobre la estructura, tanto en la fase de tesado como en cualquier fase siguiente, se consigue de una forma sencilla, aunque la geometría del tendón pueda ser compleja. (Ello se describirá en el apartado 2.6.6).

Una descripción detallada de las expresiones y procedimiento numéricos para la evaluación de las pérdidas instantáneas por rozamiento y penetración de cuña, así como de las pérdidas diferidas por relajación del acero, se puede encontrar en Roca (1988).

2.6.1. Tipos y modelización del pretensado

Es posible definir armaduras pretesas y postesas, pudiendo ser estas últimas adherentes o no adherentes. Para la adecuada distinción de estos tipos de pretensado es esencial caracterizar las sucesivas fases constructivas relacionadas con su manipulación. Dichas fases están limitadas por los instantes de **tesado** de los tendones, **transferencia** del pretensado, **anclaje** del tendón, y provisión de **adherencia** entre acero y hormigón. La distinción entre cada tipo de pretensado se realiza, en el modelo, a través de un tratamiento específico de las diversas fases, según se comenta a continuación.

En el caso de armaduras postesas, se considera que los instantes de tesado y transferencia coinciden a efectos de su simulación numérica. La tensión inicial en cada tendón se obtiene calculando las pérdidas instantáneas por rozamiento y penetración de cuña. El pretensado tiene un efecto activo, introduciendo desde el mismo instante de la transferencia sus cargas equivalentes. Sin embargo, hasta que se realiza la inyección con un producto adherente, no se considera el efecto pasivo de la armadura activa, esto es, su contribución a la rigidez estructural. Al tesar un nuevo tendón, se producen pérdidas instantáneas por acortamiento en los tendones ya anclados pero todavía no adheridos. Por otra parte, una vez anclado el tendón, aparecen pérdidas por relajación del acero. Como en el postensado adherente, en general, el periodo comprendido entre el anclaje y la provisión de adherencia es corto, y sobre todo, como durante este periodo no se suelen aplicar acciones de magnitud considerable, se puede simplificar el tratamiento del tendón todavía no adherido aceptando despreciar el rozamiento entre el tendón y la vaina. En este caso, la deformación ε_p es constante en todo el tendón e igual al cociente entre el alargamiento de las fibras de hormigón tangentes al tendón, u_c, y la longitud total del tendón, l,

$$\varepsilon_p = \frac{u_c}{l} = \int_{s_A}^{s_B} \Delta\, \varepsilon_c\, (\sigma)\, d\sigma \qquad (3)$$

En el caso de armadura pretesa se distingue entre los instantes de tesado, de adherencia y de transferencia. Contrariamente a lo que ocurre para armadura postesa, la transferencia del pretensado debe realizarse considerando desde un principio su efecto pasivo.

2.6.2. Definición geométrica

El trazado de cada tendón se reproduce mediante tramos parabólicos, determinados a partir de seis condiciones sobre su geometría (Fig. 7). Esta técnica permite generar cómodamente los trazados más frecuentes en proyecto (Fig. 8).

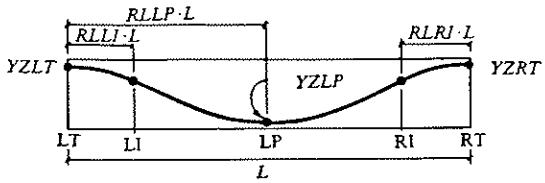
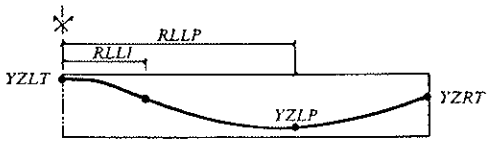
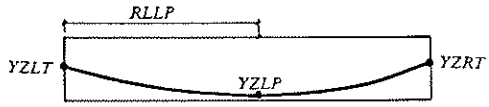


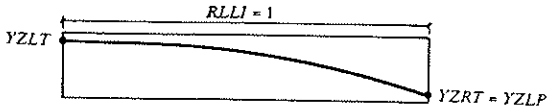
Fig. 7. Definición geométrica del cable.



a) Tramo derecho de una viga de dos tramos



b) Viga simplemente apoyada



c) Ménsula

Fig. 8. Algunos casos particulares de geometría de un cable.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Conocidas las excentricidades y_i, $i = 1, 2, ..., n$ en los puntos nodales $i = 1, 2, ..., n$ de la malla de elementos finitos, el trazado de un segmento de tendón dentro de cada elemento (Fig. 9) se obtiene utilizando las funciones de forma para éste, N_i, $i = 1, 2, ... n$, según

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x)\, y_i \qquad (4)$$

Esta misma aproximación ha sido utilizada por Henriques (1991) anteriormente.

La coordenada curvilínea s de un punto de tendón en un elemento de viga, contada desde el extremo izquierdo del elemento, se obtiene, de forma aproximada, como interpolación de los valores de la coordenada curvilínea en los puntos nodales s_i, utilizando como en (4) las funciones de forma del elemento.

El diferencial del vector de posición $\vec{r}$ de la curva axial del tendón resulta de la ecuación

$$d\vec{r}(\xi) = \frac{dx(\xi)}{d\xi} d\xi\ \vec{i} + \frac{dy(\xi)}{d\xi} d\xi\ \vec{j} \qquad (5)$$

en la que ξ es la coordenada axial unitaria del elemento normalizado (Fig. 9).

Utilizando (5), las longitudes s_{ij} se obtienen como:

$$s_{ij} = \int_{i}^{j} \|d\vec{r}(\xi)\| = \int_{i}^{j} \left[\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2\right]^{1/2} d\xi \qquad (6)$$

Las cantidades $dx(\xi)/d\xi$ y $dy(\xi)/d\xi$ se obtienen (siguiendo la formulación habitual de elementos finitos) como Jacobiano de la transformación del sistema de ejes locales a globales.

2.6.3. Campo de desplazamientos

El desplazamiento axial, u', experimentado por un punto del tendón se relaciona con las componentes u y w del desplazamiento de la directriz del elemento de viga $\vec{d}$, según la expresión

$$u'(\xi) = u(\xi) \cos \alpha(\xi) + w(\xi) \sin \alpha(\xi) \qquad (7)$$

Como, por otra parte, las componentes (u, w), se pueden obtener de las respectivas componentes nodales utilizando una vez más las funciones de forma del elemento, resulta finalmente que (7) puede escribirse en función del movimiento en los nudos como:

$$u'(\xi) = [N_i(\xi) \cos \alpha\ N_i(\xi) \sin \alpha - y(\xi) N_i(\xi) \cos \alpha]\ [u_i, w_i, \theta_i]^T_{i=1,2,3} \qquad (8)$$

donde α es el ángulo entre la tangente a la curva

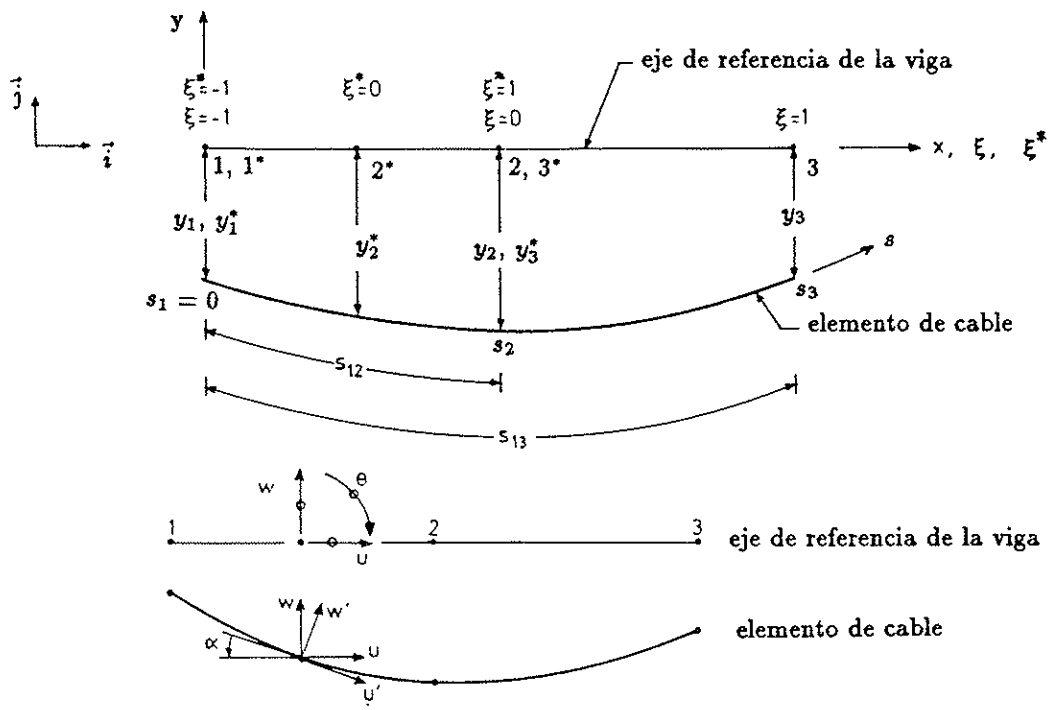


Fig. 9. Trazado del tendón en un elemento y campo de desplazamientos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

axial del tendón en un punto y la directriz del elemento (Fig. 9). Este ángulo puede obtenerse mediante la ecuación:

$$\alpha = arcos \frac{\frac{dx(\xi)}{d\xi}}{\left[\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad (9)$$

2.6.4. Matriz de deformación

La deformación axial del tendón se evalúa mediante la expresión

$$\varepsilon_p = \frac{du'}{ds} = \frac{du'}{d\xi}\frac{d\xi}{ds} \qquad (10)$$

Combinando finalmente las ecuaciones (8) y (10), es posible obtener la expresión (11) en la que $\overline{B}_p$ representa la matriz de deformación del elemento de tendón.

$$\varepsilon_p = \overline{B}_p \vec{a} = \left[\left(\frac{dN_i(\xi)}{d\xi} cos\,\alpha\right)\left(\frac{dN_i(\xi)}{d\xi} sin\,\alpha\right)\left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\cdot N_i(\xi)\, cos\,\alpha - \frac{y(\xi)\, dN_i(\xi)}{d\xi} cos\,\alpha\right)\right]_{i=1,2,3} \frac{d\xi}{dr} \qquad (11)$$

2.6.5. Matriz de rigidez del elemento de tendón

La matriz de rigidez del elemento de tendón se calcula según el proceso general utilizado para cualquier elemento finito de viga, resultando así la expresión

$$\overline{K}_p = \int_{-1}^{1} \overline{B}_p^T E_p \overline{B}_p A_p \frac{dr}{d\xi} d\xi \qquad (12)$$

2.6.6. Acción del pretensado

Las fuerzas nodales equivalentes producidas por un segmento de tendón sobre un elemento de viga, se determinan mediante la expresión

$$\vec{F}_p = \int_{-1}^{1} \overline{B}_p^T \sigma_p A_p \frac{dr}{d\xi} d\xi \qquad (13)$$

que resulta de tratar el pretensado como una tensión inicial de valor σ_p, y de utilizar los procedimientos propios de elementos finitos para convertir su efecto en fuerzas nodales.

Para la evaluación de las integrales que aparecen en (12) y (13) se utiliza la cuadratura de Gauss-Legendre.

2.7. Análisis no lineal por la geometría

Para el tratamiento de los efectos relacionados con la no linealidad geométrica se ha adoptado una formulación Lagrangiana total, en la cual, como configuración de referencia de cada elemento, se toma la geometría inicial. Con un análisis de este tipo es posible estudiar, en particular, fenómenos de inestabilidad geométrica, obteniendo como resultado una carga crítica a través de la resolución de un problema de valores propios.

Como en el caso más general el sistema de referencia local puede variar de unos puntos a otros a lo largo del tendón, y como, sobre todo, el eje "*y*" vertical no es necesariamente perpendicular a la directriz del elemento de viga, en la formulación no lineal por la geometría de un elemento de tendón las hipótesis simplificadoras de Von Karman dejan de ser válidas y no es por ello posible despreciar la contribución del término cuadrático $(du'/ds)^2$ en la evaluación de la deformación axial del tendón. Más detalles sobre todo ello pueden hallarse en el trabajo de Cruz (1991) y Póvoas (1991).

2.8. Planteamiento del proceso de análisis no lineal en el tiempo

En el análisis diferido de una estructura, se divide el dominio de tiempo en un número discreto de intervalos limitados por instantes denominados escalones de tiempo. En cada escalón se analiza la estructura bajo la acción de las cargas exteriores, las deformaciones no mecánicas a lo largo del intervalo (fluencia, envejecimiento, retracción y térmicas) y las cargas residuales procedentes del escalón anterior.

Al ser no lineal el sistema de ecuaciones de equilibrio, ya que tanto la matriz de rigidez como el vector solicitación dependen de los desplazamientos, el método de resolución que hay que adoptar debe ser incremental e iterativo. Pueden utilizarse al efecto los algoritmos de Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado y de rigidez inicial, entre otros.

Se utilizan optativamente criterios de convergencia en desplazamientos, en fuerzas y energético.

2.9.Consideración del proceso evolutivo de construcción

Dado que el procedimiento de análisis es incremental e iterativo, las operaciones de introducción de nuevos elementos de viga, nuevas subsecciones, nuevos apoyos, o de bloqueo de una "rótula"

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

(inclusión de un nuevo vínculo interno) pueden ser implementadas de forma sencilla, adaptando adecuadamente la organización del procedimiento de cálculo. Para cada una de estos elementos susceptibles de aparecer o desaparecer, existe asociado un código que identifica su estado en cada paso de tiempo, distinguiendo entre elemento existente, no existente, instante de introducción, o instante de eliminación. De hecho, la operación de introducir nuevos elementos se resume en definirlos como elementos nuevos, considerando en su caso posibles tensiones iniciales. De cada nueva subsección se conserva el instante de fabricación, con la finalidad de evaluar los posteriores efectos diferidos del material (en particular su envejecimiento). La organización del programa debe permitir, en la resolución del sistema de ecuaciones, considerar únicamente los grados de libertad activos en cada estado de la estructura.

La operación inversa, esto es, retirar elementos de viga, subsecciones, apoyos o cables, es algo más compleja puesto que exige simular la desaparición de su contribución resistente, aplicando sobre la estructura restante las fuerzas antes resistidas por la parte eliminada, ya sean fuerzas nodales equivalentes, esfuerzos internos o reacciones.

La operación de retesar un tirante o cable se lleva a cabo de forma semejante a la inicial operación de tesado, aplicando sobre la estructura el incremento de fuerza correspondiente. Como extensión, la eliminación de un tirante o cable es simulada por un destesado hasta tensión nula, aplicando, además, una fuerza sobre la estructura, de signo contrario a la anteriormente producida sobre la misma por el elemento eliminado. Además, en cualquier instante es posible alterar el área o el peso de un tirante, lo que permite simular respectivas operaciones de protección o de refuerzo del mismo.

3. IMPLEMENTACION EN PROGRAMA DE ORDENADOR

Para el desarrollo completo del modelo de análisis de estructuras construidas evolutivamente, se ha partido del programa de ordenador FEMPOR para análisis instantáneo, no lineal por la geometría y el material, de estructuras reticulares planas de hormigón armado (Cruz, 1991), introduciendo las modificaciones necesarias para su generalización a análisis secuencial y diferido de estructuras reticulares planas de hormigón armado, hormigón pretensado, y mixtas de hormigón y acero.

El método de cálculo ha sido complementado con un potente pre-proceso que permite generar automáticamente tanto la discretización de la geometría como la codificación de las variaciones geométricas y materiales que la estructura experimente a lo largo de su vida útil (ya sean consecuencia de una construcción evolutiva o bien de posteriores reformas o reparaciones). Este preproceso busca minimizar el trabajo de preparación de datos por parte del usuario.

La actual versión de FEMPOR incluye, asimismo, un completo post-proceso que permite la visualización de la geometría inicial y deformada de la estructura, los diagramas de esfuerzos, el esquema de fisuración, la plastificación del acero, el trazado de los tendones de pretensado, las leyes de pérdidas de fuerza de pretensado, y diagramas de tensiones en cualquier sección, entre otras posibilidades. Estos gráficos pueden ser generados para cualquier fase o cualquier combinación de fases a lo largo del análisis, según establezca el usuario.

4. EJEMPLOS DE APLICACION

4.1. Columna de Aroni

Mediante este ejemplo se desea ilustrar la capacidad del modelo para reproducir el comportamiento no lineal hasta rotura de elementos de hormigón pretensado en condiciones de carga cuasi instantánea. Consiste en el análisis de una columna ensayada por Aroni (1968), pretensada mediante dos tendones no adherentes (Fig. 10).

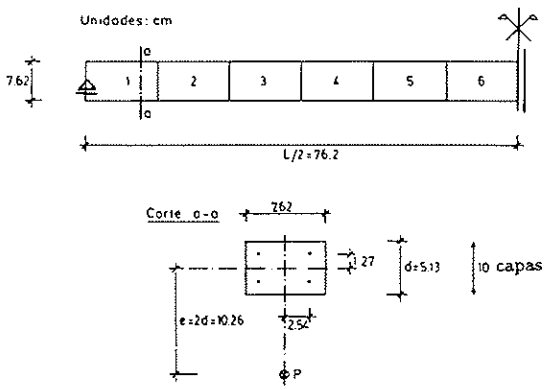


Fig. 10. Geometría y condiciones de carga de la columna de Aroni.

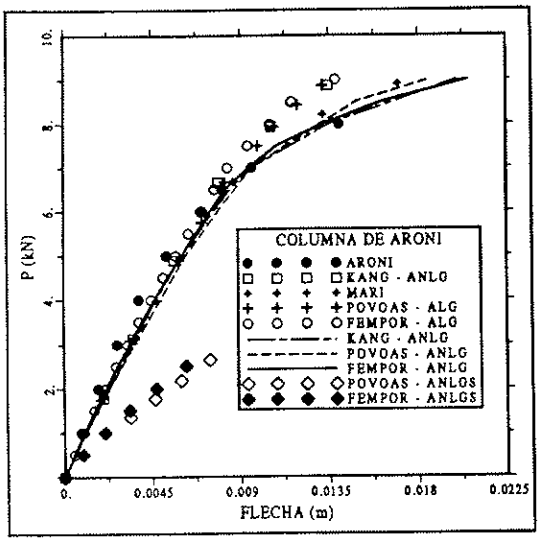
A continuación se presentan las propiedades de los materiales.

Propiedades del hormigón (para cemento de endurecimiento normal o rápido, a la edad de 28 días): f_c = 38,50 MPa; ε_{c1} = 0,002; G_f = 0,08 kN m/m^2; f_t = 3,85 MPa; ε_{cu} = 0,004; E_c = 34,00 GPa.

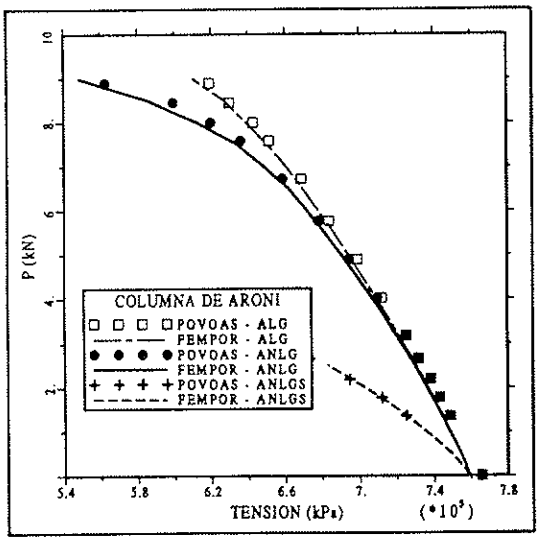
Propiedades del acero de pretensado: f_{s1} = =1007,0 MPa; f_{s2} = 1351,0 MPa; f_{s3} = 1503,0 MPa; f_{s4} = 1655,0 MPa; f_{s5} =1731,0 MPa; ε_{s1} = 4,98 E-3; ε_{s2} = 6,90 E-3; ε_{s3} = 8,63 E-3; ε_{s4} = 3,00 E-2; ε_{s5} = =5,60 E-2.

En la Fig. 11 se ha representado la evolución de la flecha lateral y de la fuerza en el tendón

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



a) Variación de la flecha.



b) Variación de la tensión en el tendón inferior.

Fig. 11. Resultados de la columna de Aroni.

inferior, contrastando los resultados obtenidos mediante el presente modelo con resultado previamente publicados por otros autores (Aroni 1968, Kang 1977, Marí 1984 y Póvoas 1991).

Se han realizado los siguientes tipos de análisis:

- No lineal por el material y lineal por la geometría (ALG);
- No lineal por la geometría y el material (ANLG); y
- No lineal por el material, con tratamiento simplificado de la no linealidad por la geometría (ANLGS).

En este último no se considera la no linealidad geométrica en el comportamiento individual del tendón. La gran diferencia de los resultados obtenidos considerando esta hipótesis simplificativa, muestra la importancia de tratar convenientemente la intervención del tendón en los efectos no lineales geométricos.

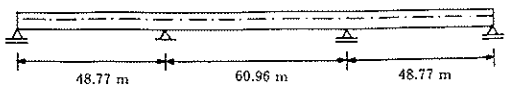
4.2. Puente continuo de tres tramos construido sobre cimbras

Este ejemplo permite aquilatar la capacidad del modelo desarrollado (y del código FEMPOR elaborado a partir del mismo) para predecir de forma realista la respuesta de una estructura de hormigón pretensado, a lo largo de las fases elástica, fisurada, y última del comportamiento, introduciendo además los efectos diferidos que ésta puede experimentar al cabo de un largo período de tiempo en servicio.

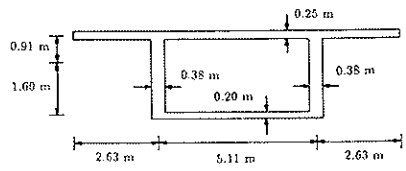
Geometría y cargas

Se trata de un puente continuo de tres tramos de 48,8; 61,0 y 48,8 m de longitud (Fig. 12a), de sección transversal en cajón unicelular (Fig. 12b), y construido sobre cimbras, proyectado y analizado en primer lugar por Choudhury (1986).

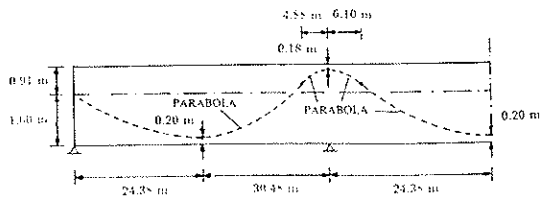
La estructura se considera descimbrada y postensada a los 28 días. El postensado está constituido por un tendón de trazado parabólico en cada una de las paredes laterales del cajón. La sección total de acero de pretensado es de 84,9 cm² (Fig. 12c). El tesado, realizado desde ambos extremos de los tendones, introdujo una fuerza de 11,83 MN en los anclajes, previa a las pérdidas iniciales.



a) Geometría longitudinal



b) Sección transversal



c) Geometría del cable

Fig. 12. Geometría del puente continuo de tres vanos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Teniendo en cuenta la simetría de geometría y cargas, se ha modelizado la mitad de la estructura utilizando para ello 10 elementos de viga (21 nodos en total). La sección transversal ha sido descompuesta en 10 capas horizontales, considerándose, a partir de los datos de Choudhury, una cuantía geométrica de armadura pasiva del 0,3%, uniformemente distribuida en toda la sección.

Las características definidas para los materiales y los datos ambientales considerados son las siguientes:

Humedad relativa: RH = 75 % temperatura: 20ºC

Propiedades del hormigón (para cemento de endurecimiento normal o rapido, a la edad de 28 días): f_c = 27,41 MPa; ε_{c1} = 0,0030; G_f = 0,23 kN m/m^2; f_t = 3,25 MPa; ε_{cu} = 0,0040; E_c = 20,00 GPa.

Propiedades del acero pasivo: fs_y = 413,7 MPa; E_{sl} = 200,0 GPa.

Propiedades del acero de pretensado: f_{s1} = =1355,0 MPa; f_{s2} = 1517,0 MPa; f_{s3} = 1655,0 MPa; f_{s4} = 1689,0 MPa; f_{s5} = 1862,0 MPa; ε_{s1} = 7,15 E-3; ε_{s2} = 9,00 E-3; ε_{s3} = 11,50 E-3; ε_{s4} = 13,50 E-3; ε_{s5} = 58,0 E-3.

La estructura fue estudiada bajo la acción de su peso propio más el peso del vehículo tipo P13 de la norma californiana de acciones (Fig. 13), aplicado en el centro del tramo intermedio. El análisis hasta rotura se ha llevado a cabo incrementando indefinidamente el peso de este vehículo.

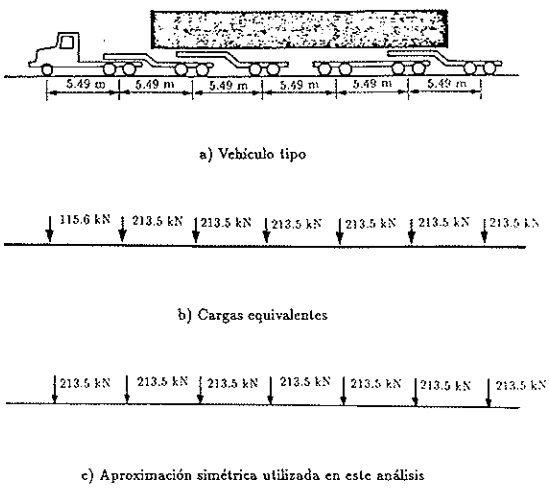


Fig. 13. Vehículo tipo P13.

Análisis de los resultados

En la Fig. 14 se representa la evolución del desplazamiento vertical en el centro del tramo intermedio. En ella se puede apreciar la buena concordancia de los resultados obtenidos con el programa FEMPOR y los resultados obtenidos por otros autores con los programas NAPBOX y

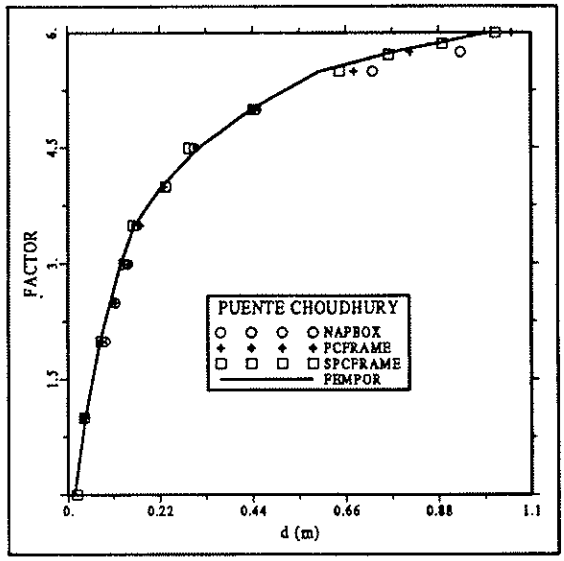


Fig. 14. Variación de la flecha - cálculo instantáneo.

PCFRAME (Choudhury 1986), y SPCFRAME (Kang 1989).

La carga última predicha numéricamente, muy semejante en todos los análisis, alcanza hasta 6,0 veces el valor característico de la carga representada por el vehículo tipo considerado. La rotura se obtiene por plastificación de la armadura de compresión en los apoyos intermedios.

En la Fig. 15, para las cargas de rotura, se presenta el diagrama de momentos totales (suma de los momentos producidos por cargas externas, y los momentos hiperestáticos de pretensado), juntamente con el diagrama obtenido para el mismo nivel de carga, en la hipótesis de comportamiento elástico lineal de los materiales. Se observa que de la consideración de la no linealidad de los materiales resulta una considerable redistribución de momentos. En efecto, respecto a la solución

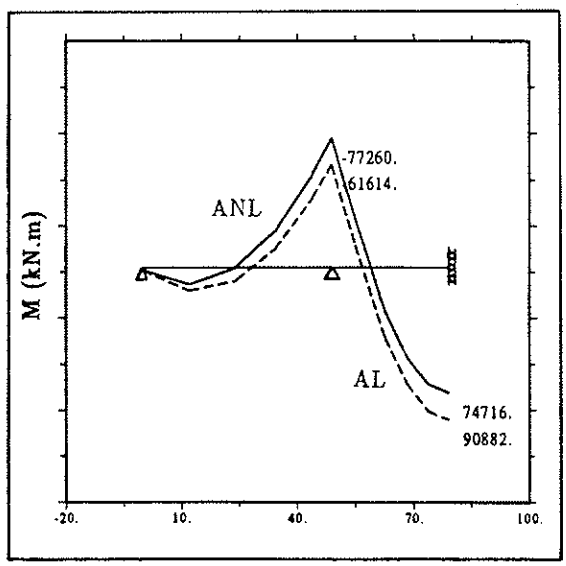


Fig. 15. Diagramas de momentos totales.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

elástica lineal, el máximo momento positivo aumenta en un 21,6%; mientras que el máximo momento negativo se reduce en un 25,3% (en valor absoluto).

En la Fig. 16 se muestra la evolución de la flecha obtenida por efecto de su peso propio (124,1 kN/m), en servicio tras un período de 8.000 días, pudiéndose observar el importante efecto de amplificación (3,25 veces la flecha instantánea) generado por la fluencia y retracción del hormigón y relajación del acero de pretensado.

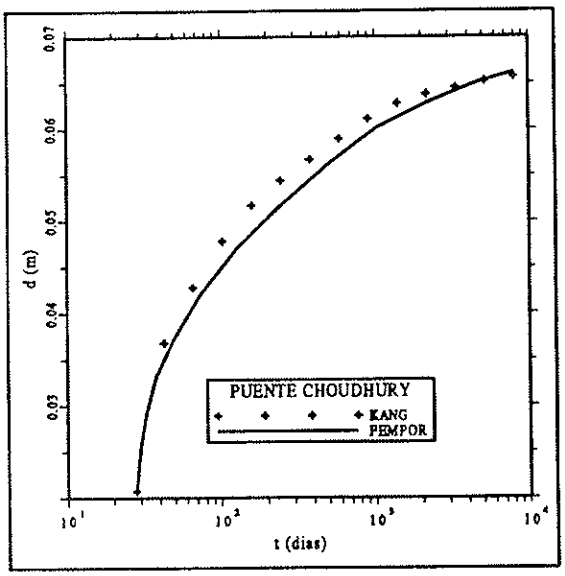


Fig. 16. Variación de la flecha - cálculo diferido.

4.3. Puente construido por voladizos sucesivos

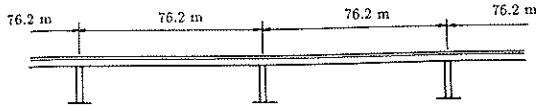
Mediante este ejemplo se desea mostrar la capacidad del modelo elaborado (y del código FEMPOR) para reproducir el comportamiento en servicio y en rotura, a corto o largo plazo, de una estructura de hormigón pretensado construida de forma secuencial, representando en el análisis las distintas etapas de la construcción. Se dispone, al efecto de establecer una comparación, de los resultados previamente obtenidos analíticamente por Ketchum (1986).

Geometría, proceso constructivo, materiales y acciones

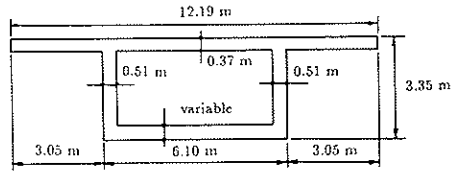
El ejemplo consiste en el estudio del tramo interior tipo, de un puente compuesto por un gran número de vanos iguales, de 76,2 metros de luz (Fig. 17a), construido por voladizos sucesivos. La sección transversal está formada por el cajón unicelular representado en las Figs. 17b y 17c.

El proceso de construcción de cada segmento, de una semana de duración, conlleva las siguientes operaciones:

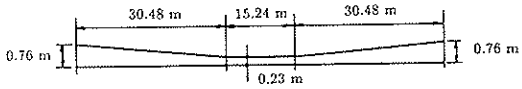
- Colocación del carro en la posición del nuevo segmento y hormigonado.
- Tras una espera de tres días, tesado de los nuevos tendones.
- Tras una espera de cuatro días, eliminación y reubicación del carro.



a) Geometría longitudinal



b) Sección transversal tipo



c) Variación del espesor de la losa de fondo

Fig. 17. Geometría dei puente construido por voladizos sucesivos.

Durante la construcción en voladizo (Fig. 18a) se utilizan 40 tendones rectos (Figs. 18b y 18c), de 19,74 cm² de área unitaria, a los que, tras la formación de la continuidad, se añaden 8 tendones parabólicos (Figs. 18d y 18e) con una área unitaria de 8,88 cm². La fuerza de pretensado se introduce siempre desde ambos extremos de tendón y, medida en anclajes, antes de pérdidas instantáneas, vale 2,59 MN para los tendones rectos de primera fase y 1,17 MN para los tendones parabólicos de continuidad.

A continuación se resumen las características de los materiales y de los datos ambientales considerados:

Humedad relativa: RH = 90%; temperatura: 20ºC.

Propiedades del hormigón (cemento de endurecimiento normal o rapido, a la edad de 28 días): f_c = 27,41 MPa; ε_{c1} = 0,0030; G_f = 0,15 kN m/m²; f_r = 3,25 MPa; ε_{cu} = 0,0050; E_c = 36,00 GPa; γ = =24,35 kN/m³.

Propiedades del acero de pretensado: f_{s1} = =1355,0 MPa; f_{s2} = 1517,0 MPa; f_{s3} = 1655,0 MPa; f_{s4} = 1689,0 MPa; f_{s5} = 1862,0 MPa; ε_{s1} = 7,15 E-3; ε_{s2} = 9,00 E-3; ε_{s3} = 11,50 E-3; ε_{s4} = 13,50 E-3; ε_{s5} = 58,0 E-3.

La estructura fue estudiada sometida a la

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

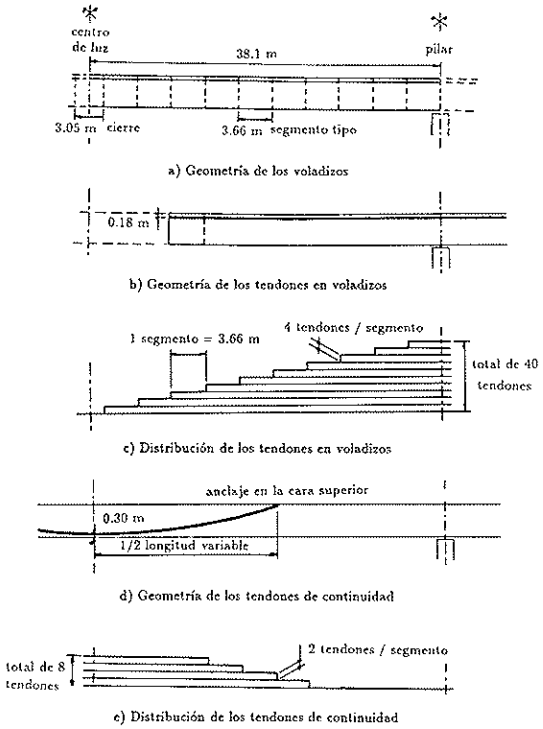


Fig. 18. Geometría del pretensado.

acción de su peso propio y de una carga muerta de 36,5 kN, aplicada después del cierre del dintel. El estudio se ha realizado para la sobrecarga máxima aplicada o bien de forma inmediata una vez concluida la construcción, o bien tras un período de espera de 8.000 días (22 años).

Modelización

Aprovechando la simetría, se modeliza únicamente la mitad del vano tipo, utilizando para ello 11 elementos de viga (23 nudos en total). Los elementos individuales se hacen coincidir con los sucesivos segmentos o dovelas hormigonados en fases distintas (Fig. 18). Por otra parte, es preciso permitir un cierto movimiento horizontal del tablero tras el cierre de éste, para reproducir adecuadamente la transmisión del pretensado de continuidad. De forma simplificada, y a falta de una suficiente información, se opta por liberar completamente este movimiento.

Durante la construcción de cada segmento se simula la presencia de un carro de hormigonado, definido como un elemento de viga adicional de comportamiento elástico lineal, tal que tras cada fase de hormigonado puede ser transportado hacia una nueva posición. La inclusión de un elemento de este tipo es importante al posibilitar, en particular, obtener la deformación inicial del nuevo segmento de hormigón.

En la simulación numérica del proceso constructivo se han tenido en cuenta los períodos de tiempo que transcurren entre las operaciones de hormigonado y tesado y reposicionamiento del carro, según se ha descrito anteriormente.

Análisis realizados

Se han efectuado los tres siguientes tipos de análisis:

(a) Análisis lineal secuencial, simulando todas las fases que significa la construcción de nuevos segmentos individuales y el tesado de distintos grupos de tendones.

(b) Análisis lineal simplificado (en el que se supone que los primeros diez elementos son introducidos y tesados simultaneamente). No obstante, se ha tenido en cuenta la variación de las propiedades mecánicas del hormigón para cada instante real.

(c) Análisis no lineal secuencial, en el que además se tienen en cuenta los efectos no lineales producidos por el comportamiento real de los materiales. Este último tipo de análisis ha sido realizado según dos variantes: (1) llevando la estructura hasta rotura bajo el efecto de una sobrecarga creciente aplicada de forma inmediata tras concluirse la construcción y (2) introduciendo la sobrecarga creciente hasta rotura, tras el período de espera de 8.000 días.

Para los análisis lineales ha sido posible establecer una comparación entre los resultados obtenidos en el presente trabajo y los resultados previamente obtenidos por Ketchum (1986).

En los apartados siguientes se presentan algunas conclusiones, basadas en la comparación entre los distintos tipos de análisis, insistiendo en las consecuencias que sobre el comportamiento en servicio y en rotura tienen los efectos diferidos, por una parte, y la simulación del proceso constructivo secuencial, por otra parte.

- Las leyes de momentos sobre la sección de hormigón (obtenidos integrando tensiones sobre la misma) y de momentos exteriores totales (en equilibrio con las acciones gravitatorias y las reacciones) se representan, respectivamente, en las Figs. 19 y 20. Puede observarse que al incluir el efecto de la fluencia y la retracción, los momentos máximos sobre la sección de hormigón experimentan ciertas alteraciones (del orden de un 1,2%), atribuíbles a las pérdidas diferidas de fuerza de pretensado.
- El efecto de la fluencia posterior al cierre del dintel, produce unos esfuerzos de compatibilidad de movimientos al amplificar la deformada inicialmente adquirida bajo la forma de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

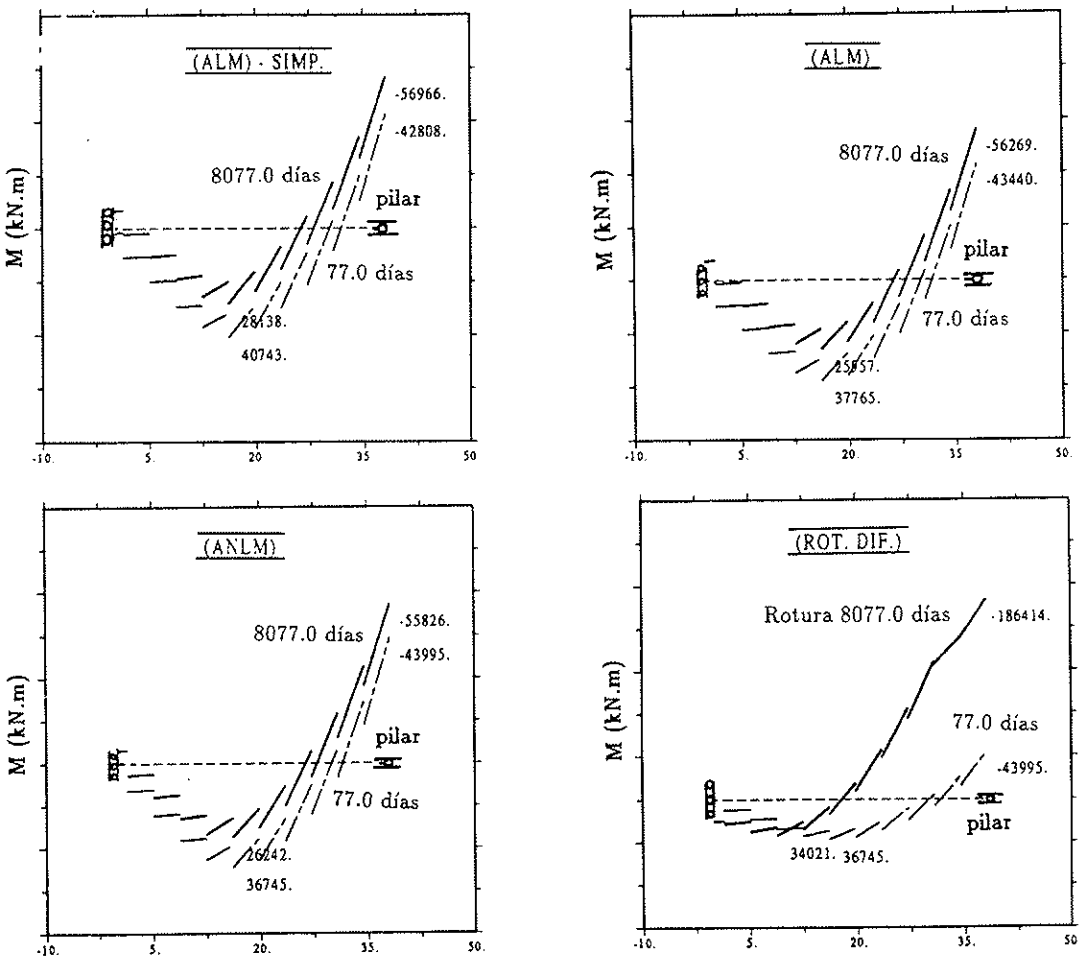


Fig. 19.- Diagramas de momentos en el hormigón.

trabajo en voladizo. Debido a que el efecto del pretensado es preponderante en esta primera fase, de tal forma que resulta una contraflecha inicial, los esfuerzos de compatibilidad alteran la ley de flectores a largo plazo, en el sentido de aumentar los negativos y disminuir los positivos (Figs. 19 y 20).

- Esta misma tendencia se observa al tener en cuenta los efectos no lineales de los materiales, aunque las redistribuciones causadas por la fisuración tienden a amortiguarla sensiblemente.
- Se constata la escasa influencia que el período de espera tiene sobre la resistencia última. En efecto, en los dos análisis efectuados hasta rotura, a los 77 y 8.077 días de edad, se obtuvo una misma sobrecarga de rotura de aproximadamente 310 kN/m.
- La deformada de la estructura, tanto al concluir la construcción como transcurridos 8.000 días, presenta diferencias muy acentuadas según el tipo de análisis efectuado, tal como se puede observar en la Fig. 21.
- La predicción de la flecha en centro de luz al concluir la construcción, varia de forma muy acentuada, dependiendo del tipo de análisis realizado. Así, la flecha que predice el análisis lineal simplificado, aumenta en un 170% en el caso de análisis lineal secuencial y hasta en un 300% en el análisis no lineal secuencial.
- Tras el período de 8.000 días en que se mantienen constantes las cargas permanentes, se observa una fuerte evolución de la deformabilidad. Se produce una acentuada disminución de los desplazamientos ascendentes y un aumento de los desplazamientos descendentes, alcanzando en el caso del análisis no lineal una magnitud de hasta 6 veces el desplazamiento en el inicio de ese período.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se ha elaborado un modelo para el análisis instantáneo y diferido, no lineal por la geometría y el material, de estructuras reticulares de hormigón armado, hormigón pretensado o mixtas, construi-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

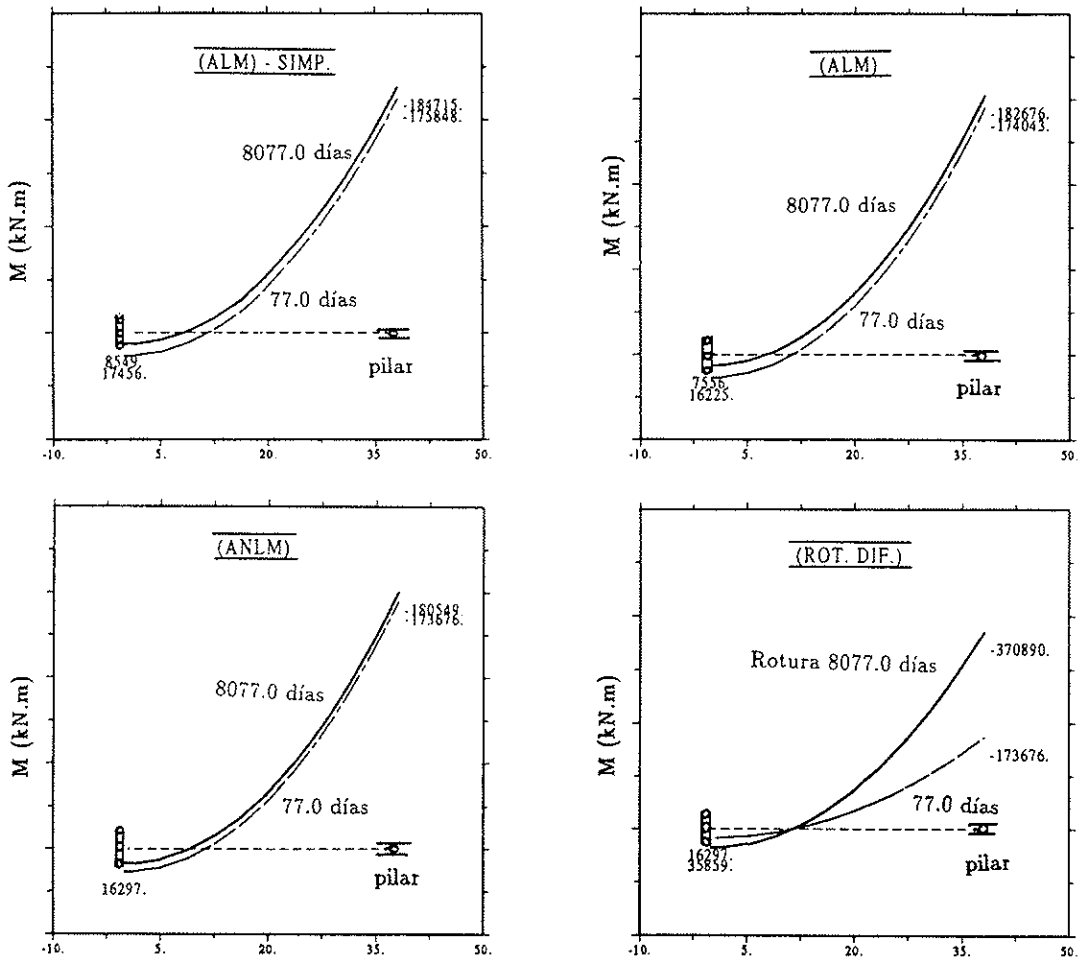


Fig. 20. Diagramas de momentos totales.

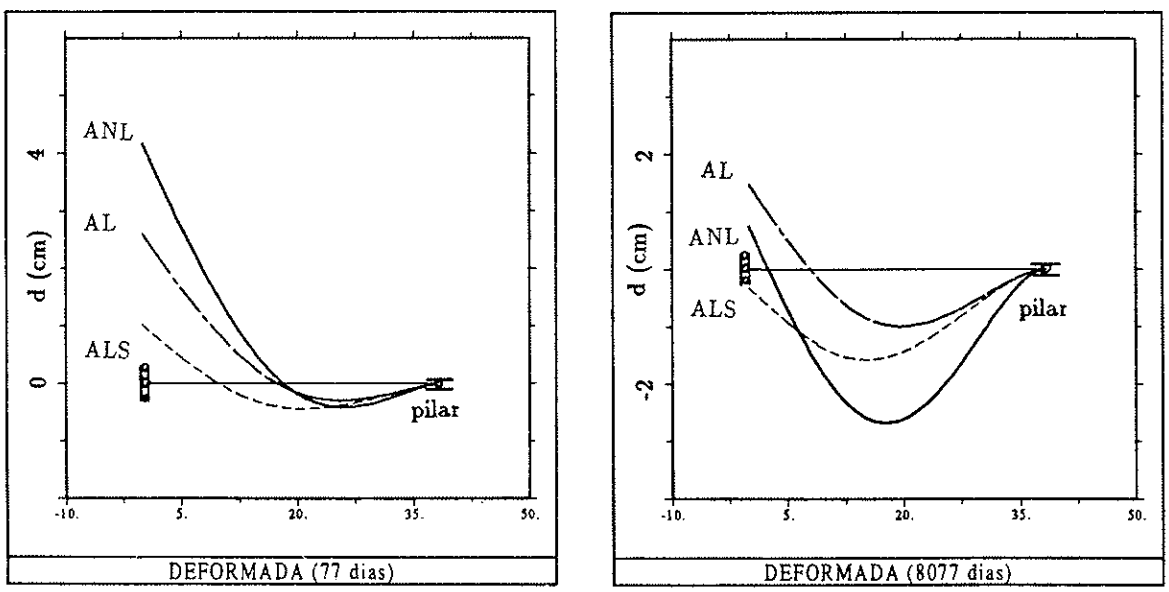


Fig. 21. Deformadas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

das evolutivamente. El modelo incorpora, asimismo, tirantes exteriores, modelizando de forma aproximada la influencia de su geometría curva en el alargamiento efectivo.

La posibilidad de estudiar estructuras construidas de forma evolutiva, o bien de simular posteriores reformas o reparaciones, proviene de la capacidad dada al modelo de simular la incorporación o bien la eliminación, en cualquier instante, de diversos tipos de elementos estructurales y condiciones de contorno. En particular, pueden aparecer o desaparecer elementos de viga, subsecciones (partes de sección transvesal), apoyos, vínculos internos, tendones de pretensado y tirantes. Para tendones y tirantes es también posible reproducir operaciones de destesado o retesado. En cada caso, se simulan cuidadosamente los efectos estructurales producidos por tales modificaciones, siendo destacable el hecho de que su incorporación sea sencilla, casi automática, gracias a la versatilidad con que ha sido concebido el método general de cálculo.

La implementación del modelo en el programa de ordenador FEMPOR, ha posibilitado la verificación sistemática del mismo a través del estudio de múltiples casos particulares. La comparación de los resultados obtenidos con otros resultados de referencia, previamente conocidos gracias al trabajo de otros investigadores, ha permitido comprobar sus posibilidades y su precisión. Se presentan en este artículo algunos ejemplos notables.

El tener ejemplo incluido ilustra la fuerte influencia que la correcta consideración del auténtico proceso constructivo, en combinación con los efectos diferidos, tiene sobre la respuesta de la estructura, muy particularmente en servicio.

Con este modelo se espera disponer de una herramienta válida para el estudio de estructuras tales como puentes construidos por voladizos sucesivos, o por empuje del dintel, u otras técnicas que supongan una construcción secuencial. Aplicaciones semejantes existen, asimismo, en el mundo de la edificación.

6. AGRADECIMIENTOS

El primer autor desea agradecer a la *Junta Nacional de Investigaçao Científica e Tecnológica*, de Portugal, el apoyo económico que recibió en el ámbito del *Proyecto Ciencia*, durante su permanencia en la Universidad Politécnica de Cataluña.

7. REFERENCIAS

ARONI, S. (1968). "Slender prestressed concrete columns", **ASCE** J. St. Div., 94 (4), 875-904.

CAROL, I. (1985). "Modelo de análisis no lineal en el tiempo, de estructuras reticulares de hormigón. Revisión integrada y propuesta de un nuevo modelo global para material y estructura". **Tesis Doctoral**, ETSECCPB, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

CARRASCON, S., MARI, A.R. y CAROL, I. (1987). "Análisis no lineal de puentes curvos de hormigón armado y pretensado". **Publicación ES-015**, ETSECCPB, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

CHOUDHURY, D. (1986). "Analysis of curved nonprismatic reinforced and prestressed concrete box girder bridges". **Report nº UCB/SEMM-86/13,** Berkeley University, California.

COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON (1991). Bulletin d'Information nº 203, **CEB-FIP Model Code 1990**, Final Draft.

CRUZ, P. (1991). "Análise não lincar de estruturas porticadas planas de betão" (en Portugués), **Tesis de Master**, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

CRUZ, P., MARI, A. and ROCA, P. (1993). "Nonlinear creep: an uncoupled damage-rheology model, in **ConCreep 5". - Fifth RILEM international syposium on creep and shrinkage of concrete,** Addendum, School of Civil Engineering, Technical University of Catalonia, Barcelona, Spain.

EL-BADRY, M.M. (1988). "Serviceability of reinforced concrete structures" **Ph. D. Thesis**, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada.

EL-BADRY, M.M. and GHALI, M. (1990). "User's manual and computer program CPF: Cracked plane frames in reinforced concrete". **Research Report Nº CE85-2**, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada.

ERNST, H.J. (1965). "Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges". **Der Bauingenieur**, Nº 2, pp. 52-55.

HENRIQUES, A. (1991). "Análise não linear de estructuras planas de betão pré-esforçado". (en Portugués), **Tesis de Master**, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

LEON, J. y CORRES, H. (1986). "Efecto de la discretización en la representación del comportamiento no lineal de pórticos de hormigón armado". **II Simposium sobre Aplicaciones del M.E.F. en Ingeniería**, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

KANG, Y. (1977). "Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames". **Ph. D. Thesis**, Berkeley University, California.

KANG, Y. (1989). "SPCFRAME - Computer program for nonlinear segmental analysis of planar prestressed concrete frames", **Report nº**

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

UCB/SEMN-89-07, Berkeley University, California.

KETCHUM, M.A. (1986). "Redistribution of stresses in segmentally erected prestressed concrete bridges". **Report nº UCB/SESM-86/07**, Berkeley University, California.

KOUNTOURIS, C.L. (1970). "Time-dependent forces induced by settlement of supports in continuos prestressed concrete structures". **M. Sc. thesis**, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada.

MARI, A. R. (1984). "Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames". **Report nº UCB/SESM-84/12**, Berkeley University, California.

MILLANES, F. (1985). "Un método general de cálculo para el seguimiento de la historia tensodeformacional en tableros de puentes construidos de forma evolutiva". Hormigón y Acero nº 156, 3er trimestre **ATEP**, España.

POVOAS, R. (1991). "Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos". (en Portugués), **Tesis Doctoral**, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

ROCA, P. (1988). "Un modelo de análisis no lineal para el estudio del comportamiento de estructuras laminares de hormigón pretensado". **Tesis Doctoral**, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

ROCA, P. y MARI, A.R. (1993). "Numerical treatment of prestressing tendons in the nonlinear analysis of prestressed concrete structures". **Computers and Structures**, Vol. 46, Nº 5, pp 905-916.

VAN ZYL, S.F. (1978). "Analysis of curved segmentally erected prestressed concrete box girders bridges". **Ph. d. Thesis**, Berkeley University, California.

WALTHER, R., HOURIET, B., ISLER, W. et Moïa, P. (1986). "Ponts Haubanés". **Presses Polytechniques Romandes**, Lausanne, Suisse.

RESUMEN

En esta comunicación se presenta un modelo general de análisis no lineal, paso a paso en el tiempo, de estructuras reticulares planas de hormigón armado y pretensado, y mixtas de hormigón y acero. El modelo tiene en cuenta, entre otros fenómenos, el proceso constructivo evolutivo, tanto en esquema longitudinal como en sección transversal, la modificación de las vinculaciones internas o externas de la estructura, la disposición de pretensados internos y externos o atirantamentos provisionales, las propiedades tenso-deformacionales no lineales de los materiales constituyentes y su evolución en el tiempo, los efectos estructurales de las deformaciones diferidas, los efectos de segundo orden, y los efectos de las acciones directas e indirectas.

El modelo, desarrollado e implementado en programa de ordenador, permite conocer la respuesta estructural durante la ejecución o el montaje, asi como a lo largo de la vida útil de la estructura. Por otra parte, la consideración del comportamiento no lineal por la geometría y el material (incorporando los efectos de la fisuración, la plastificación, etc.) permite trazar la respuesta estructural bajo carga creciente en los rangos elástico, fisurado y último, proporcionando valiosa información sobre la capacidad resistente a corto y largo plazo, considerando la influencia del proceso constructivo.

El modelo permite, asimismo, estudiar el comportamiento de estructuras reparadas o reforzadas en algún momento de su vida, simulando el efecto de refuerzos tanto de tipo pasivo (como platabandas de acero, regruesados de secciones de hormigón, inclusión de nuevas armaduras pasivas), como activo (mediante distintas formas de pretensado).

Al efecto de ilustrar las posibilidades del modelo, se plantean diversos ejemplos, en uno de los cuales el proceso constructivo tiene un marcado carácter evolutivo.

SUMMARY

A general step by step model for the nonlinear and time dependent analysis of reinforced concrete, prestressed concrete and composite plane frame structures is presented. The model can take into account many aspects of sequential construction processes, such as changes of longitudinal and cross sectional geometry or material properties, the placement or removal of elements, internal or external boundary conditions, prestressing tendons and stays. In addition, the nonlinear time dependent properties of the constitutive materials of the structure, the structural effects of time dependent deformations, and the second order effects are considered in the structural analysis under loads and imposed deformations.

The model can trace the structural response not only during the construction of the structure but also throughout its service life. The consideration of nonlinear geometry and material behavior (cracking, yielding, crushing) allows the structural response to be traced through the elastic, cracked and ultimate load level, providing valuable information about the influence which the construction process may have on the short and long term loa-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ding capacity of the structure.

The model is also applicable to damaged, repaired, and retrofitted structures, using both passive and active retrofitting schemes.

In order to show the capabilities of the model, several examples are presented, one of them consisting on an actual cantiliver constructed prestressed concrete bridge.

* * *

Congreso Internacional sobre "Vigentes Normas Europeas Relativas al Hormigón"

PROYECTO SPRINT RA 358
6-7 de Octubre de 1994 Amsterdam, HOLANDA
Organizado por
La Asociación Holandesa del hormigón
en colaboración con
CEB, Comité Euro-International du Béton, Lausanne (CH)
Concrete Society, Slough (UK)
Deutscher Beton-Verein E.V., Wiesbaden (BRD)
Sprint Network, Luxembourg (L)
Belgische Betongroepering/Groupement Belge du Béton, Brussels (B)

OBJETIVO

Repaso del estado actual de los métodos de cálculo y de las normas específicas europeas sobre el hormigón y su uso por ingenieros estructurales y técnicos del hormigón, incluyendo los programas auxiliares de cálculo disponibles.

PROPOSITO DEL CONGRESO

Informar a los ingenieros sobre:

- El estado actual de los métodos de cálculo y de las normas específicas europeas relativas al hormigón.
- Los diferentes programas auxiliares disponibles para el cálculo.
- Los resultados de un cuestionario sobre las futuras necesidades de los programas auxiliares de cálculo.
- El desarrollo actual de los programas auxiliares de cálculo.
- Aplicación de los resultados.

El Congreso será una oportunidad excelente de conocer a colegas de todos los países Europeos y discutir con ellos el futuro uso y las posibilidades de las nuevas normas Europeas.

Idioma: Inglés.
Lugar: Amsterdam, Holanda.
Fecha: 6-7 de octubre de 1994.

EXPOSICION

Todas las empresas e instituciones que vienen colaborando en la redacción de las nuevas normas Europeas están invitadas a presentar sus últimos trabajos disponibles, equipos y métodos de cálculo.

Las cuotas de inscripción al Congreso son las siguientes:

Antes del 1 de septiembre de 1994 Dfl. 800,–

Después del 1 de septiembre de 1994 Dfl. 1.000,–

Esta cuota da derecho a los delegados a lo siguiente:

- Toda la documentación del Congreso.
- Asistencia a las Sesiones.
- Visita a la exposición.
- Refrigerios y almuerzo los días 6 y 7 de octubre.

Los Miembros del CEB y de las Sociedades Europeas del Hormigón tendrán un descuento de Dfl. 100,–

Las cantidades mencionadas tienen incluido el 17,5% VAT.

Se organizará un programa para acompañantes.

Para más información, dirigirse a:

European Concrete Standards
in Practice Congress
c/o Betonvereniging
P.O. Box 411
2800 AK Gouda
THE NETHERLANDS

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Rigidez dinámica de estribos de puentes

Antonio Martínez Cutillas
Carlos Fernández Casado, S.L.
Enrique Alarcón Alvarez
Departamento de Mecánica Estructural
Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

La Ingeniería Sísmica, como rama de la Ingeniería de Estructuras, desde sus comienzos ha concentrado sus esfuerzos en dotar a las edificaciones de la resistencia necesaria para evitar su colapso ante un terremoto "severo" y daños de importancia ante terremotos "menores", con el fin de salvaguardar al máximo la pérdida de vidas humanas. Prueba de ello es que la mayoría de la normativa nacional e internacional sobre acciones y construcción antisísmica vigentes se refieren a edificación, si se hace excepción de construcciones singulares, como las centrales nucleares, en las que un fallo estructural puede ocasionar daños irreparables. A medida que se ha progresado en los métodos de análisis, diseño y construcción, las edificaciones comienzan a tener, por lo general, un buen comportamiento frente al colapso total o parcial. Se desarrollan en paralelo estudios e investigaciones en otro tipo de estructuras que, si bien su fallo total o parcial no tienen una repercusión tan directa sobre las vidas humanas, sí lo pueden tener de forma indirecta por impedir la llegada de equipos de socorro, de suministros o la evacuación de víctimas, o bien pueden representar enormes pérdidas económicas por afectar al subsiguiente restablecimiento de las condiciones normales de vida: puentes, presas, servicios de gas, teléfono, agua...

En el caso de los puentes la repercusión indirecta sobre las pérdidas de vidas puede ser importante en el caso de localizaciones urbanas que puedan afectar la facilidad de evacuación o la llegada de socorros.

La revisión de los terremotos recientes constituye una herramienta de gran valor para el análisis del comportamiento de estas estructuras. Los terremotos de Niigata (Japón 1964) y Alaska (EEUU 1964) provocaron el colapso total de numerosos puentes, por la pérdida de coacción lateral de los suelos granulares saturados por licuefacción. El Terremoto de San Fernando (EEUU 1971) trajo consigo la revisión de las recomendaciones sísmicas en materia de puentes, como consecuencia de los numerosos colapsos de Pasos Superiores de Autopista que se produjeron. La mayoría de estos colapsos se produjeron por caída de tramos isostáticos completos, ante la falta de suficiente longitud de entrega de los mismos en los puntos de apoyo. También se detectaron numerosos fallos como consecuencia de falta de precaución en detalles de armado, produciéndose fallos por esfuerzo cortante en pilares, por insuficiente capacidad de ductilidad para resistir los movimientos inelásticos alcanzados, así como fallos en la longitud de anclaje de las barras longitudinales al formarse las rótulas plásticas. El Terremoto de Loma Prieta (EEUU 1989) puso de manifiesto las deficiencias en puentes construidos con anterioridad a la existencia de recomendaciones sísmicas específicas para estas estructuras. La mayoría de las deficienciass se debieron a la falta de capacidad de ductilidad de secciones de hormigón claves para la seguridad global de la estructura.

El colapso del Cypress Viaduct, además de los aspectos anteriores ha puesto en evidencia la importancia de las condiciones locales de cimentación así como la variabilidad del movimiento sísmico en el espacio y su influencia en viaductos largos.

El análisis sísmico de los puentes no difiere, en gran medida, del de otras estructuras. La acción sísmica puede caracterizarse, dependiendo del alcance del estudio, por medio de los *Espectros de Respuesta, Funciones de Densidad Espectral* o por medio de *Acelerogramas*, según sea preciso obtener la respuesta máxima de la estructura, caracterizar la acción y la respuesta como un *Proceso Aleatorio*, o analizar el comportamiento a lo largo del tiempo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Esta caracterización puede considerarse como local, en un punto determinado, sin considerar su posible variación a lo largo del espacio. Las diferencias entre las aceleraciones en los diferentes puntos de contacto del puente con el terreno, a lo largo de las distintas pilas y estribos, puede tener repercusión, no necesariamente desfavorable, en la respuesta de la estructura. Esta variación espacial de la acción está provocada por el efecto de propagación de ondas, por efecto de pérdida de coherencia, como consecuencia del carácter finito de la fuente sísmica, o por heterogeneidades locales del suelo en la superficie.

La modelización de la estructura se realiza por medio del Método de los Elementos Finitos. El rango de frecuencias de la acción sísmica hace que la discretización no quede condicionada por la resolución del problema dinámico sino más bien por el grado de detalle que quiera obtenerse en la respuesta estática. Deben obtenerse las propiedades de rigidez, inercia y amortiguamiento de los elementos que forman los puentes: tablero, aparatos de apoyo, pilas estribos y cimientos.

Los estribos y cimientos constituyen los elementos de contacto entre la estructura y el terreno y, por tanto, son los encargados de transmitir los movimientos derivados de la acción sísmica al resto de la estructura. En ellos se produce una *interacción* compleja, tanto a nivel estático como dinámico, entre el suelo y la estructura. Desde un punto de vista estático, dadas las rigideces relativas entre cimientos y pilas y el conjunto muro-cimiento de los estribos, se realiza la hipótesis de *empotramiento perfecto* entre las pilas y sus cimientos así como del conjunto tablero-apoyos con sus estribos. Esta hipótesis, desde el punto de vista de esfuerzos y tensiones, da lugar a dimensionamientos seguros porque acotan superiormente los esfuerzos máximos posibles en estos contactos. No sucede lo mismo desde el punto de vista de desplazamientos, que pueden verse infravalorados con esta hipótesis. Desde un punto de vista dinámico, la consideración de la hipótesis de empotramiento perfecto equivale a no considerar ninguna posible *interacción suelo-estructura*. En este caso, no puede realizarse ninguna afirmación con carácter general, ya que la respuesta de la estructura depende de sus características de rigidez, masa y amortiguamiento y, por otra parte, la presencia de la estructura puede alterar de forma significativa la acción.

Se han realizado interesantes estudios mediante modelos numéricos y analizando la respuesta real de las estructuras para evaluar la importancia de la interacción suelo-estructura en la respuesta sísmica de los puentes.

Ma-Chi Chen y J. Penzien (1979) [7] estudian, por medio de elementos finitos bi y tridimensionales, en el dominio del tiempo, la influencia del suelo tras los estribos así como la interacción de las pilas con su cimiento. En los estribos y en la cimentación de las pilas no se considera ningún tipo de contorno absorbente, ni elementos de disipación de energía por radiación. En el estudio se destaca la importancia de los empujes dinámicos en el estribo, del esviaje del tablero, la flexibilidad de la cimentación y la presencia del relleno en la transferencia de cargas entre pilas y estribos.

D. R. Somaini (1984) [24], J. P. Wolf (1985) [37] y Spyrakos (1990) [27], [28] realizan estudios en los que analizan los diferentes parámetros que intervienen en la interacción suelo-estructura de las pilas con sus cimientos, para el caso de puentes con luces pequeñas. El estudio se realiza sobre un modelo de tres grados de libertad, en el que se considera el amortiguamiento material en el suelo y la estructura, de tipo histerético, y el amortiguamiento por radiación, de tipo viscoso. Del mismo se deduce la influencia que los fenómenos de interacción tiene en el aumento de los períodos de vibración, del amortiguamiento y los desplazamientos de la estructura, así como en la reducción de esfuerzos.

E. Maragakis y P. C. Jennings (1987) [18] plantean un modelo para tener en cuenta la influencia del movimiento plano de sólido rígido de los tableros de los puentes y su impacto con los estribos cuando se ven sometidos a aceleraciones sísmicas, especialmente los tableros esviados. En el modelo se incorporan constantes de rigidez y amortiguamiento de las pilas y los apoyos de neopreno y solamente constantes de rigidez en los estribos. E. Maragakis (1989) [19] incorpora las constantes de rigidez y amortiguamiento del conjunto suelo-cimiento de las pilas, para tableros rectos. Entre otros resultados obtuvo que, aun para niveles altos de aceleración, la respuesta no lineal de los estribos era muy leve frente a la de los cimientos.

En estudios basados en el análisis de estructuras reales, mediante técnicas de identificación de sistemas, bien sometidas a excitaciones dinámicas artificiales, como los correspondientes a C. B. Crouse, B. Hushmand y G. R. Martin (1987) [10], o bien por el análisis de la respuesta de puentes instrumentados, frente a terremotos próximos, como el Puente de San Juan Bautista frente al Terremoto de Coyote Lake de 1979, en California, llevado a cabo por J. C. Wilson (1986) [34], o el Paso Superior de Meloland Road, en el Imperial Valley, frente a un terremoto, en 1979, estudiado por S. D. Werner, J. L. Beck y M. B. Levine (1987) [30], son necesarios la consideración de importantes amortiguamientos concentrados en el conjunto estribo-relleno, para conseguir un ajuste adecuado entre la respuesta real y los modelos considerados en el análisis.

En los estudios anteriores se pone de manifiesto la importancia de los fenómenos de interacción suelo-estructura, que en los puentes se manifiesta en su contacto con la cimentación de las pilas y

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

con los estribos. La metodología para el análisis de la influencia de las cimentaciones puede ser la misma que la seguida en el estudio de otro tipo de estructuras. La importancia de la interacción con el estribo depende de la condición de vinculación tablero-estribo y de su tipología:

- En los tableros simplemente apoyados sobre los estribos, esta influencia es pequeña ya que los apoyos de neopreno actúan como elemento aislante de la acción sísmica. El tablero, sin embargo, puede entrar en contacto con el estribo, bien porque se disponen de topes que entran en funcionamiento cuando los movimientos sobrepasan un valor predefinido o bien porque no se dimensiona la junta tablero-estribo para movimientos severos.
- En puentes de luces medias y pequeñas y en pasos inferiores urbanos, puede emplearse el *efecto pórtico* para reducir esfuerzos en los estribos, transmitiendo, por medio del tablero, el empuje horizontal de uno de ellos al estribo opuesto. En estos casos es preciso el conocimiento de las condiciones de rigidez estribo-suelo.
- La utilización de *estribos integrales*, en los que el tablero queda empotrado en el estribo, permite el ahorro en instalación y mantenimiento de las juntas de dilatación. Los movimientos provocados por deformaciones impuestas de origen térmico y reológico son liberados contando con la flexibilidad suelo estribo cimentado, por lo general, sobre pilotes.
- En puentes de luces grandes y medias, con pilas altas, sometidos a fuertes aceleraciones horizontales provocadas por la sobrecarga de uso, como el ferrocarril, o por los movimientos sísmicos, el anclaje del tablero a uno o a ambos estribos permite reducir los esfuerzos en las pilas.

El trabajo presentará los resultados del cálculo de las rigideces dinámicas de estribos bidimensionales y tridimensionales y su aplicación al estudio del comportamiento dinámico de los puentes. Para ello, se plantearán las ecuaciones fundamentales de *Interacción suelo-estructura* y la aplicación del *Método de los Elementos de Contorno* a la obtención de dichas rigideces en función de variables adimensionales y, finalmente, se analizará la influencia que dichas rigideces ejercen en el amortiguamiento y frecuencia de la estructura.

2. INTERACCION DINAMICA SUELO-ESTRUCTURA

2.1. Planteamiento

El análisis de interacción parte de la consideración de un medio tridimensional, $\Omega \in \mathbf{R}^3$, que se puede subdividir en un subdominio acotado que será la *estructura* Ω_s y un subdominio no acotado, semiespacio, que será el *suelo* Ω_g, Fig. 1, verificándose:

$$\Omega \equiv \Omega_s \cup \Omega_g \qquad (1)$$

Tanto para el suelo como para la estructura se supondrá un comportamiento elástico o viscoelástico lineal.

En lo que sigue resultará conveniente distinguir, dentro del dominio suelo, el subdominio antes de construir la estructura, que se denomina *campo libre*, y el subdominio de excavación.

El tratamiento numérico de estos problemas mediante técnicas de Elementos Finitos o Elementos de Contorno obliga a la discretización de estos dominios, para cuyos nudos (Fig. 2) se empleará la notación habitual de textos como [37], [38], [32].

Los subíndices tienen los siguientes significados:

- s : nudos que solamente pertenecen a la estructura.
- b : nudos de interfase suelo-estructura.
- g : dominio suelo, con la excavación de los cimientos.
- f : dominio suelo, sin la excavación de los cimientos.
- e : dominio excavado.

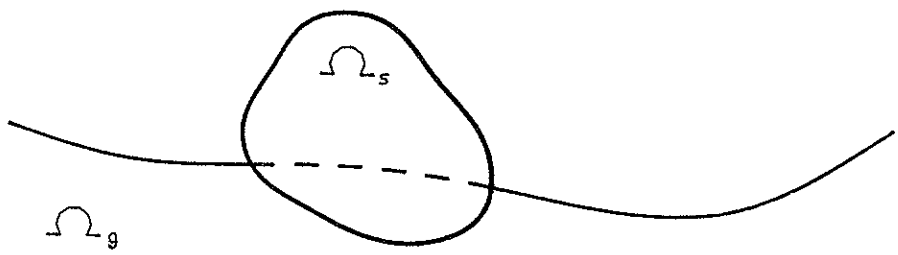


Figura 1.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

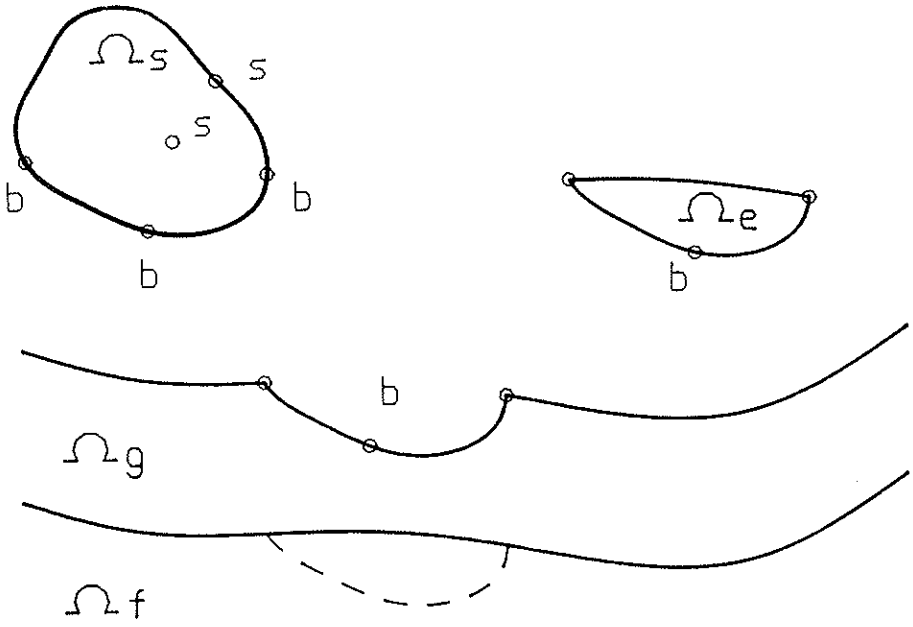


Figura 2. Interacción suelo-estructura: Subdominios.

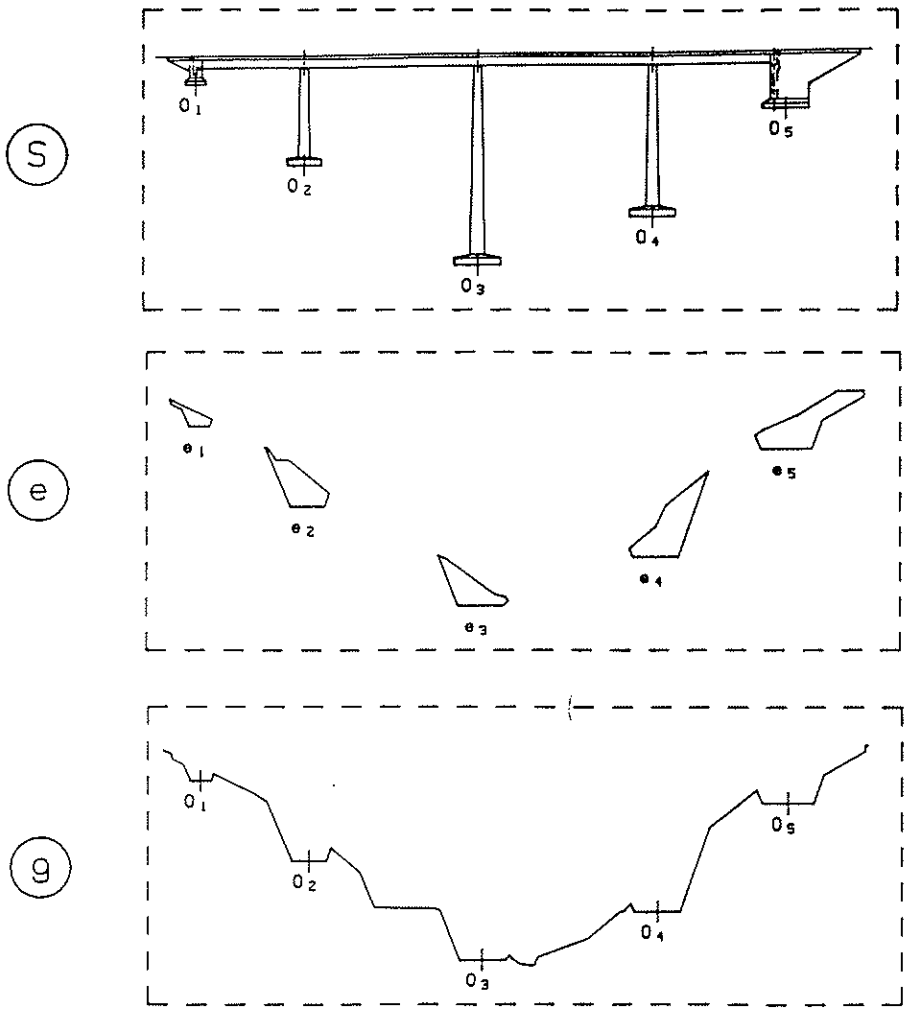


Figura 3. Subdominios en el caso de un puente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

En la Fig. 3 se presentan los subdominios para el caso en el que la estructura sea un puente.

Las ecuaciones del movimiento del dominio Ω discretizado se pueden plantear, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

2.1.1 Ecuaciones en el dominio del tiempo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}\ (t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}\ (t) + \mathbf{K}\mathbf{v}\ (t) = \mathbf{R}\ (t)$$
$$\mathbf{v}\ (0) = \dot{\mathbf{v}}\ (0) = \mathbf{0} \qquad (2)$$

donde

- $\mathbf{v}\ (t)$ son los desplazamientos nodales.
- $\mathbf{M}$ es la matriz de masas.
- $\mathbf{C}$ es la matriz de amortiguamientos.
- $\mathbf{R}\ (t)$ es la acción exterior, variable en el tiempo, actuante directamente sobre la estructura o como aceleración del suelo.

Este problema puede resolverse o bien por técnicas de *Análisis Modal* o bien por técnicas de integración paso a paso, implícitas o explícitas.

2.1.2 Ecuaciones en el dominio de la frecuencia

Si se considera una acción exterior de tipo armónico o una acción cualquiera descompuesta en funciones armónicas mediante su Transformada de Fourier:

$$\mathbf{P}\ (\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(t) e^{-i\omega t} dt$$

siendo la ecuación diferencial (2) transformada:

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{u}\ (\omega) = \mathbf{P}\ (\omega)$$
$$\mathbf{S}(\omega)\ \mathbf{u}\ (\omega) = \mathbf{P}\ (\omega) \qquad (3)$$

donde:

$$\mathbf{S}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} = \mathbf{K}_{est}(\mathbf{K}^* + i\omega\mathbf{C}^*) \quad (4)$$

es la matriz de rigidez dinámica o matriz de impedancias.

La ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia, puede ser resuelta por técnicas de superposición modal a partir de la *función de transferencia*, o respuesta de un sistema de un grado de libertad a una excitación armónica.

En problemas como los de interacción suelo-estructura, se plantean situaciones en los que los coeficientes de amortiguamiento entre las distintas partes del sistema poseen valores muy distintos y de diferente naturaleza, dando lugar a los denominados *sistemas con amortiguamiento no clásico* [15], en los que no puede obtenerse una matriz con amortiguamiento proporcional y, consecuentemente, no se verifica la ortogonalidad de los modos de vibración en el campo real y el consiguiente desacoplamiento de las ecuaciones diferenciales para un sistema de varios grados de libertad [9] [5]. Además, la modelización *exacta* del dominio suelo, conduce a rigideces y amortiguamientos variables con la frecuencia.

2.2. Método de las subestructuras. Ecuaciones del movimiento

El procedimiento más empleado en los problemas de interacción de carácter lineal es el denominado *Método de las Subestructuras*. Debido a las características diferentes de los dos subdominios suelo y estructura, resulta conveniente dividir el cálculo de las rigideces dinámicas de cada uno de ellos para, posteriormenter, acoplarlos y realizar un cálculo conjunto.

Este procedimiento permite el empleo de modelos y técnicas analíticas y numéricas, diferentes para cada uno de los subdominios.

Las *ecuaciones del movimiento de la estructura* en el dominio de la frecuencia son, de acuerdo a la ec. 3:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}^{s}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{t}_{s} \\ \mathbf{u}^{t}_{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{s} \\ \mathbf{P}_{b} \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

en donde

$$\mathbf{ut} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{t}_{s} \\ \mathbf{u}^{t}_{b} \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

son los desplazamientos totales, y $\mathbf{S}^{s}_{bb}$ es la matriz de rigidez dinámica de la estructura, relativa a los nudos en contacto con el suelo.

Las *ecuaciones del movimiento del suelo* en el dominio de la frecuencia son:

$$\mathbf{S}^{g}_{bb}\ [\mathbf{u}^{t}_{b} - \mathbf{u}^{g}_{b}] = \mathbf{P}^{'}_{b} \qquad (7)$$

donde $\mathbf{u}^{g}_{b}$ es el movimiento del suelo sin la existencia de la estructura y $\mathbf{S}^{g}_{bb}$ es la matriz de rigidez dinámica del suelo.

Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en la interfase suelo-estructura conduce a:

$$\mathbf{P}_{b} + \mathbf{P}^{'}_{b} = 0$$
$$\mathbf{u}^{t}_{b} = \mathbf{u}^{t'}_{b} \qquad (8)$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento de la estructura:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\mathbf{S}_{bs}\mathbf{u}^{t}_{s} + \mathbf{S}^{s}_{bb}\,\mathbf{u}^{t}_{b} = -\,\mathbf{S}^{e}_{bb}\,[\mathbf{u}^{t}_{b} - \mathbf{u}^{e}_{b}] \qquad (9)$$

Las ecuaciones completas del conjunto suelo-estructura resultan:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}^{s}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{t}_{s} \\ \mathbf{u}^{t}_{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{g}_{bb}\mathbf{u}^{g}_{b} \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

Estas ecuaciones ponen en evidencia las tres etapas en que se puede descomponer todo problema de interacción suelo-estructura:

- *Etapa 1*: Obtención del movimiento del suelo a nivel de los cimientos o contacto suelo-estructura, $\mathbf{u}_g$. Este movimiento puede obtenerse a partir del movimiento conocido de la superficie, *deconvolución*, o bien a partir del cálculo del *movimiento difractado*, conocido el movimiento lejos de la superficie.
- *Etapa 2*: Obtención de las rigideces dinámicas del suelo, $\mathbf{S}^{g}_{bb}$, es decir de la superficie libre del suelo junto con las indentaciones provocadas por las excavaciones de los cimientos.
- *Etapa 3*: Cálculo de la estructura al que se le acopla la matriz de rigidez obtenida en la *etapa 2* sometida al movimiento obtenido en la *etapa 1*.

La obtención del *movimiento difractado* en la base de los cimientos, $\mathbf{u}_g$, no es sencilla y puede sustituirse por el llamado *movimiento de campo libre*, $\mathbf{u}^{f}_{g}$, que es el movimiento que existiría en el suelo con la ausencia de las cimentaciones.

El procedimiento, hasta ahora empleado, se puede utilizar entre el dominio excavado, *g*, y el dominio de excavación, *e*, para, en conjunto, dar lugar al *campo libre f*.

$$\mathbf{S}^{e}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb} = \mathbf{S}^{f}_{bb} \qquad (11)$$

Si se considera la parte excavada como equivalente al subdominio estructura en la ec. 10, al no existir nudos libres se verifican las siguientes relaciones:

$$\mathbf{S}^{s}_{bb} \equiv \mathbf{S}^{e}_{bb} \qquad \mathbf{u}^{t}_{b} \equiv \mathbf{u}^{f}_{b} \qquad (12)$$

$$\mathbf{S}_{ss} = \mathbf{S}_{sb} = \mathbf{0} \qquad (13)$$

La ecuación 10 se convierte en

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}^{s}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb}]\,\mathbf{u}^{t}_{b} &= \mathbf{S}^{g}_{bb}\mathbf{u}^{g}_{b} \\ [\mathbf{S}^{e}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb}]\,\mathbf{u}^{f}_{b} &= \mathbf{S}^{g}_{bb}\mathbf{u}^{g}_{b} \end{aligned} \qquad (14)$$

Si se sustituye en la ec. 11 resulta:

$$\mathbf{S}^{f}_{bb}\,\mathbf{u}^{f}_{b} = \mathbf{S}^{g}_{bb}\,\mathbf{u}^{g}_{b} \qquad (15)$$

sustituyendo en la ec. 10:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}^{s}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{t}_{s} \\ \mathbf{u}^{t}_{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{f}_{bb}\mathbf{u}^{f}_{b} \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

Con estas ecuaciones, la *etapa 1* del cálculo de los problemas de interacción, la evaluación del movimiento en la base del cimiento, se puede obtener a partir de la respuesta de *campo libre*.

El *movimiento difractado* se puede obtener a partir del *movimiento de campo libre* y de la matriz de rigidez del suelo, a partir de la ec., 15:

$$\mathbf{u}^{g}_{b} = \mathbf{S}^{g-1}_{bb}\,\mathbf{S}^{f}_{bb}\mathbf{u}^{f}_{b} \qquad (17)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse en la hipótesis de *cimentación rígida*, para la cual los grados de libertad de los nudos de la interfase suelo-estructura se reducen a seis por el número de puntos de apoyo, si se consideran movimientos diferentes en todos ellos, o exclusivamente a seis grados de libertad si todos los puntos de apoyo poseen el mismo movimiento.

2.3. Método de las subestructuras. Interacción cinemática e inercial

En ciertas ocasiones es interesante descomponer el cálculo de interacción en dos etapas:

- *Interacción cinemática:* se considera la estructura sin masa pero con rigidez, obteniéndose los desplazamientos en todos los puntos.
- *Interacción inercial*: a la estructura con masa se aplican las fuerzas de inercia obtenidas en la etapa anterior.

Esta descomposición es útil cuando la dirección de propagación de ondas de la acción sísmica y la configuración del contacto suelo-estructura son tales que el cálculo de la *interacción cinemática* es trivial.

La descomposición de los desplazamientos será, por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{t}_{s} &= \mathbf{u}^{k}_{s} + \mathbf{u}^{i}_{s} \\ \mathbf{u}^{t}_{b} &= \mathbf{u}^{k}_{b} + \mathbf{u}^{i}_{b} \end{aligned} \qquad (18)$$

donde $\mathbf{u}^{k}$ son los desplazamientos correspondientes a la interacción cinemática y $\mathbf{u}^{i}$ son los correspondientes a la interacción inercial.

2.3.1 Interacción cinemática

Si se anula la masa de la estructura, la matriz de rigidez de la estructura se convierte en:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\mathbf{S}_s(\omega) = \mathbf{K}_s + i\omega\mathbf{C}_s - \omega^2\,\mathbf{M}_s = \mathbf{K}_s + i\omega\mathbf{C}_s \quad (19)$$

Considerando en la estructura que el amortiguamiento es de tipo *histerético* resulta:

$$\mathbf{S}_s(\omega) = \mathbf{K}_s(1 + 2\,\zeta i) \quad (20)$$

La ec. 10 se convierte en:

$$\begin{bmatrix} (1+2\,\zeta i)\,\mathbf{K}_{ss} & (1+2\,\zeta i)\,\mathbf{K}_{sb} \\ (1+2\,\zeta i)\,\mathbf{K}_{bs} & (1+2\,\zeta i)\,\mathbf{K}^s_{bb} + \mathbf{S}^g_{bb} \end{bmatrix} \cdot \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^k_s \\ \mathbf{u}^k_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^g_{bb}\,\mathbf{u}^g_b \end{Bmatrix} \quad (21)$$

De la primera fila se deduce:

$$\mathbf{K}_{ss}\mathbf{u}^k_s + \mathbf{K}_{sb}\mathbf{u}^k_b = 0 \quad (22)$$

$$\mathbf{u}^k_s = -\,\mathbf{K}^{-1}_{ss}\mathbf{K}_{sb}\mathbf{u}^k_b = \mathbf{T}_{sb}\mathbf{u}^k_b \quad (23)$$

$\mathbf{T}_{sb}$ se puede interpretar como una transformación cuasiestática que permite obtener los desplazamientos de la estructura a partir de los movimientos de la base, por consideraciones de rigidez y geometría (condensación estática).

De la segunda fila se obtiene:

$$\{(1+2\,\zeta i)\,[\mathbf{K}^s_{bb} - \mathbf{K}_{bs}\mathbf{K}^{-1}_{ss}\mathbf{K}_{sb}] + \mathbf{S}^g_{bb}\}\,\mathbf{u}^k_b = \mathbf{S}^g_{bb}\,\mathbf{u}^g_b = \mathbf{S}^f_{bb}\mathbf{u}^f_b \quad (24)$$

Para una configuración cualquiera, los desplazamientos $\mathbf{u}^k_b$, $\mathbf{u}^g_b$, $\mathbf{u}^f_b$ son diferentes y la obtención de los desplazamientos correspondientes a la interacción cinemática es tan complicada como la obtención de los desplazamientos totales.

Si se considera que la estructura está apoyada en la superficie, se verificará:

$$\mathbf{S}^g_{bb} = 0 \qquad \mathbf{S}^g_{bb} = \mathbf{S}^f_{bb} \quad (25)$$

y se cumplirá:

$$\mathbf{u}^f_b = \mathbf{u}^g_b \quad (26)$$

Si, además, se considera que la propagación de ondas es vertical, los desplazamientos en toda la superficie de contacto son iguales y las fuerzas nodales que se desarrollarían en la estructura serían nulas, por tratarse de un movimiento rígido de la base (sobre una estructura sin masa). Se verifica, por tanto:

$$\mathbf{u}^k_b = \mathbf{u}^f_b = \mathbf{u}^g_b \quad (27)$$

La no existencia de fuerzas nodales en la estructura ante movimientos de sólido rígido de la base, conduce a la relación:

$$\mathbf{K}^s_{bb} - \mathbf{K}_{bs}\mathbf{K}^{-1}_{ss}\mathbf{K}_{sb} = \mathbf{0} \quad (28)$$

Los movimientos del resto de la estructura serán, de acuerdo a la ec. 23:

$$\mathbf{u}^k_s = \mathbf{T}_{sb}\,\mathbf{u}^k_b = \mathbf{T}_{sb}\,\mathbf{u}^f_b \quad (29)$$

obteniéndose por consideraciones geométricas de movimiento de sólido rígido.

2.3.2 Interacción inercial

A partir de las ecuaciones generales 10 y la descomposición 18:

$$\mathbf{Su} = \mathbf{S}(\mathbf{u}^k + \mathbf{u}^i) = \mathbf{P} \quad (30)$$

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\,\mathbf{u}^k + \mathbf{Su}^i = \mathbf{P} \quad (31)$$

Como:

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C})\mathbf{u}^k = \mathbf{P} \quad (32)$$

se verifica:

$$-\,\omega^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}^k + \mathbf{Su}^i = \mathbf{0} \quad (33)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}^s_{bb} + \mathbf{S}^g_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^i_s \\ \mathbf{u}^i_b \end{Bmatrix} = = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}^s_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^k_s \\ \mathbf{u}^k_b \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Los desplazamientos correspondientes a la interacción inercial se obtienen aplicando, al conjunto suelo-estructura, las fuerzas de inercia (masa por aceleración) correspondiente a los desplazamientos de la interacción cinemática.

Las ecuaciones se simplifican enormemente bajo la hipótesis de *cimentación rígida.*

3. METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

El *Método de los Elementos de Contorno*, M.E.C. es una de las herramientas más poderosas disponibles para la solución de los problemas de Dinámica en medios continuos no acotados, como los planteados en el análisis de interacción suelo-estructura.

3.1. Planteamiento del Problema de Elastodinámica

3.1.1 Dominio del tiempo

Sea $\Omega \in \mathbf{R}^n$ (n = 2,3) el dominio espacial bi o

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

tridimensional con las variables $(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times T$ con $T = (0, \infty)$

El problema que se plantea, en el dominio del tiempo, consiste en el cálculo de la función de desplazamientos, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, en el dominio Ω, verificando las *Ecuaciones de Navier* para un medio isótropo y homogeneo:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\ \mathbf{grad}\ (\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (35)$$

de forma más compacta:

$$\mathbf{Eu} + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (36)$$

en función de las velocidades de propagación:

$$(c^2_L - c^2_s)\ \mathbf{grad}\ (\mathrm{div}\mathbf{u}) + c^2_s \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (37)$$

donde:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \qquad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (38)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (39)$$

b : es el vector de fuerzas por unidad de masa.
G : es el módulo de elasticidad transversal.
E : es el módulo de elasticidad longitudinal.
ν : es el coeficiente de Poisson.
ρ : es la densidad del medio.
c_L : es la velocidad de propagación de las ondas longitudinales.
c_s : es la velocidad de propagación de las ondas transversales

Verificando las condiciones iniciales y condiciones de contorno:

• *Condiciones iniciales:*

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})\end{aligned}\right\} \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (40)$$

• *Condiciones de contorno:*

El contorno geométrico del dominio Ω queda definido por:

$$\partial\Omega \equiv \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_u \times T \\ t(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_t \times T\end{aligned} \quad (41)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{u} \quad (42)$$

$$\mathbf{T}^n \cdot \mathbf{u} = [\mathbf{C}: \mathbf{grad}\ \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = (\lambda \mathrm{div}(\mathbf{u})\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} + \mu\ [\mathbf{grad}\ \mathbf{u} + (\mathbf{grad}\ \mathbf{u})^T)] \cdot \mathbf{n} \quad (43)$$

3.1.2 Dominio de la frecuencia

Si se considera el caso especial de fuerzas por unidad de masa, armónicas en el tiempo, con frecuencia ω:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) \exp(i\omega t) \quad (44)$$

El campo de desplazamientos se puede expresar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) \exp(i\omega t) \quad (45)$$

donde:

$\mathbf{u}^T$: es la componente transitoria.
$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$: es la componente permanente.

La componente transitoria depende de la solución homogenea y las condiciones iniciales, mientras que la componente permanente depende de las condiciones de contorno.

La componente que interesa obtener es la permanente, que debe verificar la ecuación no homogenea y las condiciones de contorno.

Si se introduce la solución permanente en las *Ecuaciones de Navier* 35, los coeficientes, dependientes de la frecuencia ω verificarán:

$$\mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) + (\lambda + \mu)\ \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) + \rho\omega^2\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{0} \quad (46)$$

$$[\mathbf{E} + \rho\omega^2\mathbf{I}]\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{0} \quad (47)$$

$$\mathbf{Lu}(\mathbf{x}; \omega) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{0} \quad (48)$$

• *Condiciones de contorno:*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \omega) \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_u$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}; \omega) \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_t \quad (49)$$

3.2. Solución fundamental en el dominio de la frecuencia

Para su aplicación posterior es preciso el conocimiento de la solución de las Ecuaciones de *Navier* cuando sobre el dominio tridimensional o bidimensional, $\Omega \equiv \mathbf{R}^n$ (n = 2,3), actúa una carga puntual en un punto cualquiera.

Para su análisis en el dominio de la frecuencia, esta carga puntual será armónica en el tiempo.

$$\rho\mathbf{b}(\mathbf{x}; \omega) = \delta(\mathbf{x} - \xi)\mathbf{e} \quad (50)$$

donde:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ξ : es el punto de aplicación de la carga.
e : es el vector unitario en la dirección de carga.
δ : es la distribución *delta de Dirac*.

La solución en desplazamientos y vectores tensión, según la normal **n**, se podrá expresar:

$$u_i = U_{ij} e_j \tag{51}$$

$$t_i^n = T_{ij}^n e_j \tag{52}$$

$$t_i^n = \sigma_{ik} n_k$$

en donde U_{ij} y T_{ij}^n representan las componentes del desplazamiento y tensión en la dirección i, cuando la carga puntual actúa en la dirección j.

La expresión de estas soluciones será [14], [11], [12]:

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \xi; \omega) = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_s^2} [\psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}] \tag{53}$$

$$T_{ij}^n(\mathbf{x},\xi;\omega) = \frac{1}{\alpha\pi} \left\{ \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r}\chi \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_i \right) - \right.$$

$$- \frac{2}{r}\chi \left(n_i r_{,s} - 2 r_{,i} r_{,s} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,i} r_{,s} \frac{\partial r}{\partial n} + \tag{54}$$

$$\left. + \left(\frac{c_i^2}{c_s^2} = 2 \right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha}{2r}\chi \right) r_{,s} n_j \right\}$$

donde $\alpha = 2$, para $n = 2$ y $\alpha = 4$, para $n = 3$, verificándose:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \xi \qquad r = |\mathbf{x} - \xi| \tag{55}$$

Las funciones ψ y χ dependen de "r" y de la dimensión del problema en estudio. Las soluciones planteadas convergen, para el caso $\omega = 0$, a la solución estática, denominada *solución de Kelvin*.

3.3. Teorema de Reciprocidad en Dinámica

El *Teorema de Reciprocidad de Betti*, válido en el campo de la Estática, fue extendido a la Dinámica por D. Graffi en 1946-1947 y ampliado, para dominios no acotados, por Wheeler y Sternberg en 1968 [31].

Si consideramos dos *Estados Elastodinámicos* diferentes Fig. 4:

$$\varepsilon_A \equiv [u_i, t_i, b_i] \qquad \varepsilon_B \equiv [u'_i, t'_i, b'_i] \tag{56}$$

Con las condiciones iniciales:

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = u_{0,i}(\mathbf{x}) \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = v_{0,i}(\mathbf{x}) \tag{57}$$

$$u'_i(\mathbf{x}, 0) = u'_{0,i}(\mathbf{x}) \quad \dot{u}'_i(\mathbf{x}, 0) = v'_{0,i}(\mathbf{x}) \tag{58}$$

Denominando $\Gamma = \partial\Omega$

3.3.1 Dominio del tiempo

Para $t > 0$ se cumplirá, entre ambos estados:

$$\int_\Gamma t_i * u'_i d\Gamma + \int_\Omega \rho [b_i * u'_i + v_{0,i} u'_i + u_{0,i} \dot{u}'_i] d\Omega =$$

$$= \int_\Gamma t'_i * u_i d\Gamma + \int_\Omega \rho [b'_i * u_i + v'_{0,i} u_i + u'_{0,i} \dot{u}_i] d\Omega \tag{59}$$

El producto * expresa el producto de convolución en el tiempo:

$$f * g = \int_0^t f(\mathbf{x}, t - \tau) g(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \int_0^t f(\mathbf{x}, \tau) g(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \tag{60}$$

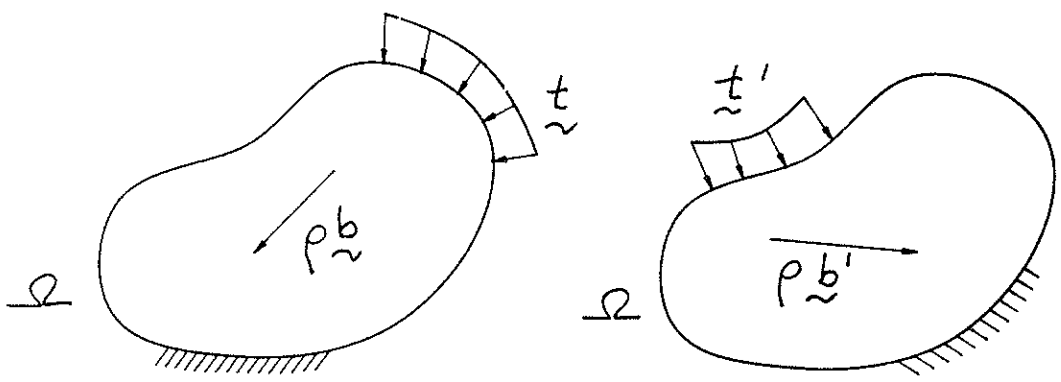


Figura 4. Estados Elastodinámicos ε_A y ε_B.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

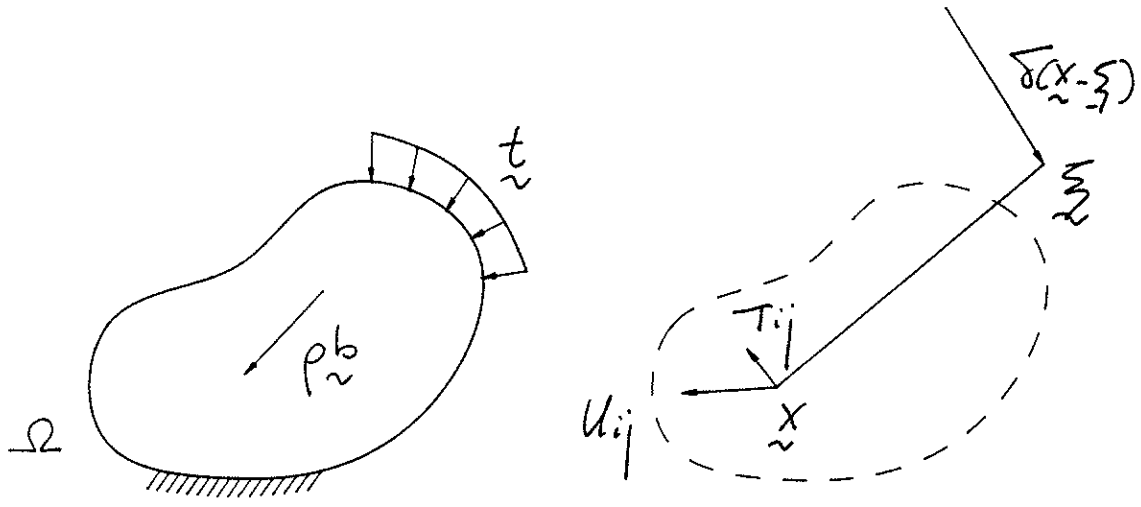


Figura 5. Ecuaciones integrales. Estados elastodinámicos.

Si las condiciones iniciales son nulas, se verificará:

$$\int_\Gamma t_i * u'_i d\Gamma + \int_\Omega \rho b_i * u'_i d\Omega = \int_\Gamma t'_i * u_i d\Gamma + \int_\Omega \rho b'_i * u_i d\Omega \quad (61)$$

3.3.2 Dominio de la frecuencia

Para obtener el *Teorema de Reciprocidad* en el dominio de la frecuencia, la Transformada de Fourier convierte el producto de convolución en un producto ordinario.

De la ec. 61:

$$\int_\Gamma t_i u'_i d\Gamma + \int_\Omega \rho b_i u'_i d\Omega = \int_\Gamma t'_i u_i d\Gamma + \int_\Omega \rho b'_i u_i d\Omega \quad (62)$$

en donde las variables representan las amplitudes de las diferentes funciones, en régimen permanente.

3.4. Ecuaciones integrales

Si en los *Teoremas de Reciprocidad* enunciados anteriormente se considera como segundo *estado elastodinámico* ε_n:

$$\rho b'_i = \delta(\mathbf{x} - \xi)e_i \quad u'_j = U_{ij}e_i \quad t'_j = T^n_{ij}e_i = T_{ij}e_i \quad (63)$$

se obtienen las siguientes ecuaciones integrales [14], [17], Fig. 5:

3.4.1 Dominio del tiempo

$$C(\xi)u_i(\xi,t) = \int_\Gamma [U_{ij}(\mathbf{x},\xi,t)*t_j(\mathbf{x},t) - T_{ij}(\mathbf{x},\xi,t)*u_j(\mathbf{x},t)]d\Gamma(\mathbf{x}) + \rho \int_\Omega [U_{ij}(\mathbf{x},\xi,t) * b_j(\mathbf{x},t) + U_{ij}(\mathbf{x},\xi,t)v_{0j}(\mathbf{x}) + \dot{U}_{ij}(\mathbf{x},\xi,t)u_{0j}(\mathbf{x})]d\Omega(\mathbf{x}) \quad (64)$$

3.4.2 Dominio de la frecuencia

$$C(\xi)u_i(\xi;\omega) = \int_\Gamma [U_{ij}(\mathbf{x},\xi;\omega)t_j(\mathbf{x};\omega) - T_{ij}(\mathbf{x},\xi;\omega)u_j(\mathbf{x};\omega)]d\Gamma(\mathbf{x}) + \rho \int_\Omega [U_{ij}(\mathbf{x},\xi;\omega)b_j(\mathbf{x};\omega)]\,d\Omega(\mathbf{x}) \quad (65)$$

donde:

$$C(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{si } \xi \in \Gamma \text{ con } \Gamma \text{ suave en } \xi \\ 0 & \text{si } \xi \in \Omega_e \end{cases} \quad (66)$$

Ω_e representa el dominio exterior, complementario de Ω.

Las ecuaciones 64 y 65, permiten obtener los desplazamientos **u** en cualquier punto del dominio, a partir de las funciones de desplazamientos y tensiones en el contorno y de las fuerzas por unidad de masa en el dominio.

Para obtener el desplazamiento según una dirección en un punto determinado, basta aplicar en dicho punto, *punto de colocación*, una carga puntual en la dirección correspondiente y evaluar las integrales que solamente dependen de las funciones de desplazamientos y tensiones en el contorno y de las fuerzas por unidad de masa en el dominio.

Dado el carácter singular de los núcleos U_{ij} y T_{ij}, las ecuaciones anteriores se han obtenido tras un paso al límite. Las integrales que incluyen el núcleo T_{ij} representan, estrictamente, el *Valor Principal de Cauchy* de las mismas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

3.5. Discretización de las ecuaciones integrales: M.E.C

El *Método de los Elementos de Contorno* consiste en aplicar la metodología robusta de discretización de dominios e interpolación de variables del Método de los Elementos Finitos, a la solución de las ecuaciones integrales 65 y 64.

Los detalles de esta técnica pueden encontrarse en textos como [4], [13], [17], [2], [3], [8].

Desarrollando las ecuaciones en el dominio de la frecuencia, solamente es necesaria la discretización de las variables geométricas.

Si se discretiza el contorno en elementos de superficie:

$$\Gamma \equiv \partial\Omega \equiv \bigcup_{\beta=1}^{M} \Gamma^{\beta} \qquad (67)$$

La discretización del dominio en elementos de volúmen, que son realmente *celdas de integración:*

$$\Omega \equiv \bigcup_{\delta=1}^{P} \Omega^{\delta} \qquad (68)$$

Las variables que pueden ser incógnitas u_i^{α}, t_i^{α} del problema, se definen en los *nudos* del contorno de coordenadas x_i^{α}.

Si se define la interpolación de tipo isoparamétrico del tipo:

$$x_i(\eta) = N^{\alpha}(\eta)x_i^{\alpha} \quad \alpha \in 1,2,\ldots,N \qquad (69)$$
$$u_i(\eta) = N^{\alpha}(\eta)u_i^{\alpha} \quad \alpha \in 1,2,\ldots,N \qquad (70)$$
$$t_i(\eta) = N^{\alpha}(\eta)t_i^{\alpha} \quad \alpha \in 1,2,\ldots,N \qquad (71)$$

Se ha empleado el convenio habitual de sumación. Las funciones N^{α}, son las funciones de forma, y N es el número total de nudos.

Para las funciones dato, en el dominio, pueden emplearse funciones de interpolación diferentes:

$$b_i(\eta) = M^{\gamma}(\eta)b_i^{\gamma} \quad \gamma \in 1,2,\ldots,Q \qquad (72)$$

Si se introducen estas funciones en la ecuación integral 65, por cada dirección de aplicación de la carga puntual se obtiene una ecuación.

Si se aplica una carga puntual en tantos puntos, *puntos de colocación*, y en tantas direcciones independientes como incógnitas existan, se genera un procedimiento sistemático de obtención de un sistema de ecuaciones lineales: *Método de Colocación.*

Si los puntos de colocación coinciden con los nudos en los que se ha discretizado el contorno, se denomina *Método Directo*, y en caso contrario, *Método Indirecto.*

El *Método Indirecto* evita el cálculo de integrales singulares; pero obliga a establecer criterios para situar los puntos de colocación. Por el contrario, el *Método Directo* precisa del cálculo de integrales singulares y cuasisingulares, quedando los puntos de colocación situados a priori.

Desarrollando el *Método Directo*, de la ec. 65:

$$c(\mathbf{x}^{\alpha})\mathbf{u}^{\alpha}(\mathbf{x}^{\alpha};\omega) + \sum_{\beta=1}^{M}\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{u}^{\alpha}(\mathbf{x}^{\alpha};\omega)\int_{\Gamma^{\beta}} N^{\alpha}(\eta)\mathbf{T}^{\beta} \cdot (\mathbf{x}^{\alpha}, \mathbf{y}(\eta);\omega)J_s(\eta)d\Gamma(\eta) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{M}\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{t}^{\alpha}(\mathbf{x}^{\alpha};\omega)\int_{\Gamma^{\beta}} N^{\alpha}(\eta)\mathbf{U}^{\beta}(\mathbf{x}^{\alpha},\mathbf{y}(\eta);\omega)J_s(\eta)d\Gamma(\eta) +$$

$$+ \sum_{\delta=1}^{P}\sum_{\gamma=1}^{Q} \mathbf{b}^{\gamma}(\mathbf{x}^{\alpha};\omega) \cdot \int_{\Omega^{\delta}} \rho M^{\gamma}(\eta)\mathbf{U}^{\delta}(\mathbf{x}^{\alpha},\mathbf{y}(\eta);\omega)J_v(\eta)d\Omega(\eta)$$

$$\alpha \in 1,2,\ldots,N \qquad (73)$$

siendo las funciones J_s y J_v las funciones jacobianas de la transformación.

Estas ecuaciones pueden expresarse en forma matricial:

$$\mathbf{Hu} - \mathbf{Gt} = \mathbf{F} \qquad (74)$$

en donde **u** y **t** representan los desplazamientos y los vectores tensión en el contorno, respectivamente.

En el caso en que no se consideren fuerzas por unidad de masa, la ecuación matricial se reduce a:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \qquad (75)$$

que permite resolver cualquier problema de contorno mixto.

4. CALCULO DE RIGIDECES DINAMICAS

La segunda etapa de todo cálculo de interacción suelo-estructura, consiste en la evaluación de la matriz de rigidez del suelo, $\mathbf{S}_{bb}^{s}$, sobre el subdominio excavado.

La obtención de esta matriz es equivalente, en el caso general, a la resolución del problema de contorno mixto sobre el subdominio Ω_s de la Fig. 6, en el que en parte o la totalidad de la interfase suelo-estructura son conocidos los desplazamien-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

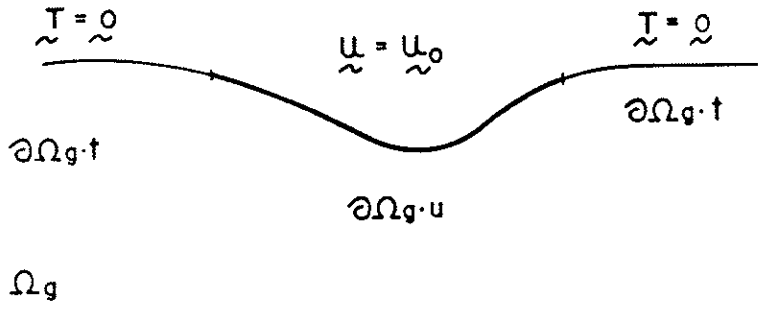


Figura 6. Cálculo de rigideces. Problema de contorno.

tos (contorno $\partial\Omega_u$) y en el resto del contorno ($\partial\Omega_t$) los vectores tensión son nulos.

Para una situación general de cimentación o contacto flexible, el número de problemas, como el planteado, que hay que resolver serán tantos como nudos por grados de libertad se encuentre discretizada la interfase.

En el caso de cimentación o contacto rígido, el número de problemas es el de cimentaciones por el número de grados de libertad considerados. La hipótesis de movimiento rígido permite concentrar los movimientos y la resultante de tensiones, en un punto característico determinado.

Las interfases de contacto entre una estructura tipo puente y el suelo, son las cimentaciones de pilas y los estribos. En las investigaciones realizadas hasta ahora, se han calculado las rigideces dinámicas de las estructuras de cimentación, fundamentalmente cimentaciones superficiales; y bastante menores han sido los intentos de cálculo de las rigideces de los estribos.

Los estudios en el campo de las cimentaciones se han centrado, fundamentalmente, en las de tipo superficial, *zapatas*, con diversas geometrías. Estas investigaciones estuvieron unidas, en principio, al estudio de cimentaciones de máquinas y, en desarrollos posteriores, al de las cimentaciones de estructuras industriales, como las Centrales Nucleares. Una recopilación detallada del desarrollo histórico de estas investigaciones, puede encontrarse en [1], [6]; y una recopilación reciente de resultados en [23].

A diferencia del cálculo de rigideces dinámicas de cimentaciones, el interés por el cálculo de las rigideces dinámicas de los estribos es reciente. Su cálculo ha venido propiciado por los análisis de los registros obtenidos en estructuras instrumentadas, sometidas a la acción de los terremotos, en las que se detecta una influencia significativa de los estribos.

Las aproximaciones realizadas en este campo han sido escasas y, sorprendentemente, con metodologías alejadas de la experiencia ya disponible en el área de las cimentaciones superficiales.

J. C. Wilson (1988) [33] evalúa las rigideces estáticas de estribos cerrados de puentes no esviados. Realizando la hipótesis de un comportamiento rígido de todo el estribo: muro frontal, aletas y cimientos, obtiene las rigideces correspondientes a los seis grados de libertad existentes. Los desplazamientos son calculados basándose en las soluciones estáticas de diversos tipos de cargas en el semiespacio elástico y homogeneo.

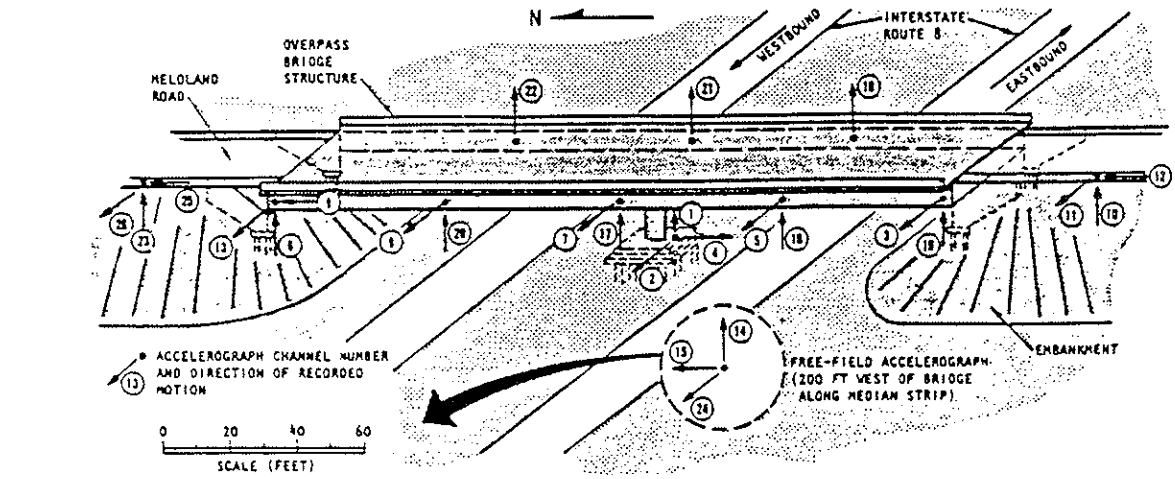
M. B. Levine y R. F. Scott (1989) [16] realizan una evaluación simplificada de las rigideces estáticas de las cimentaciones de la pila y del conjunto de los estribos del Paso superior de Meloland Road, Fig. 7, con el fin de ajustar un modelo sencillo a los resultados obtenidos de la instrumentación. Las rigideces de los estribos se obtuvieron a partir de la consideración de un modelo de Winkler del conjunto muro-suelo, constante con la altura.

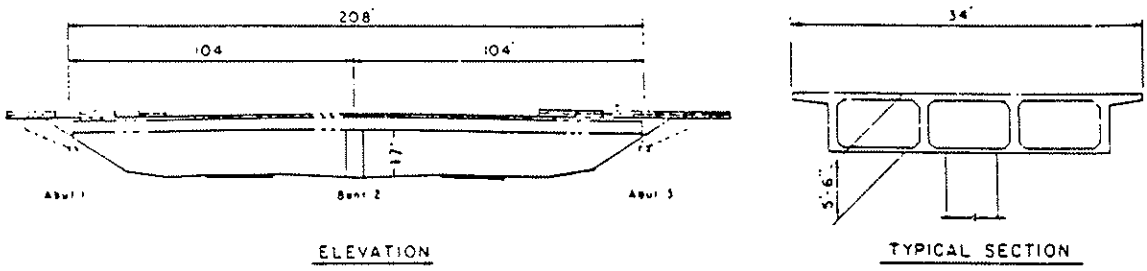
J. C. Wilson y B. S. Tan (1990) [35] [36] presentan un estudio interesante sobre la influencia del conjunto terraplén-estribo en la respuesta sísmica del Paso superior de Meloland Road, Fig. 7.

En la primera parte del estudio, proponen un modelo sencillo para representar la rigidez del conjunto terraplén-estribo mediante un modelo bidimensional de Elementos Finitos, en el que se calculan las rigideces estáticas verticales y horizontales, así como su frecuencia fundamental, a partir de los datos obtenidos de la instrumentación de los estribos y tablero y mediante el empleo de técnicas de identificación de sistemas. En la respuesta del conjunto terraplén-estribo, detectaron una importante caída de la frecuencia, atribuída a una pérdida, en torno al 50% de la rigidez del suelo, por un comportamiento no elástico, así como índices de amortiguamiento elevados, entre el 25 y 45%. Estos amortiguamientos concentrados se convierten en valores entre el 3 y el 12%, a nivel de estructura completa, para determinados modos de vibración.

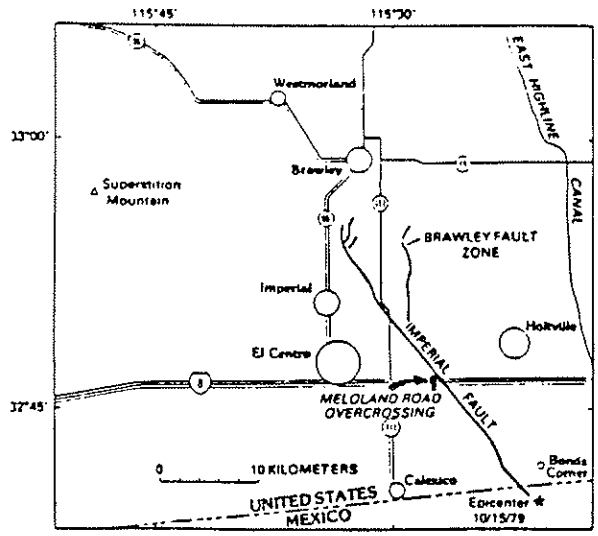
La aplicación del *Método de los Elementos de Contorno* a este problema de Interacción particular, permitirá justificar, de forma numérica, estos resultados obtenidos, por comparación de datos experimentales.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026





(b) Bridge dimensions



(c) Proximity to Imperial Fault

Figura 7. Puente Meloland Road (California) [30].

4.1. Problemas bidimensionales

Existen numerosos casos en los que el problema de interacción suelo-estructura puede ser tratado como bidimensional: Los pasos inferiores en zonas urbanas, poseen longitudes grandes que permiten considerar el problema fundamentalmente plano; los muros de sótano de edificaciones, etc.

En estos casos, el problema de contorno que hay que resolver es el representado en la Fig. 8.

Las hipótesis fundamentales adoptadas son:

- Comportamiento viscoelástico lineal del suelo, caracterizado por: *la densidad* ρ, *el módulo de elasticidad transversal G, el coeficiente de Poisson* ν *e índice de amortiguamiento* ζ.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

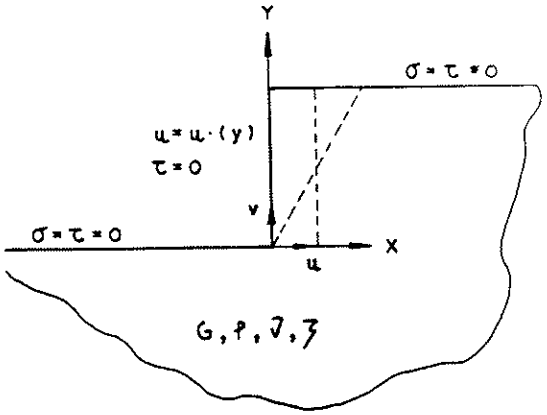


Figura 8. Modelo bidimensional en el semiespacio.

- Comportamiento rígido del muro.

Las condiciones de contorno consideradas serán:

- El contorno vertical representa el contacto del muro frontal con el suelo. Se considera que el contacto suelo-muro es no adherente, por lo que la tensión tangencial es nula. Los desplazamientos horizontales serán conocidos. Dependiendo de las rigideces que se van a calcular será, o bien un desplazamiento uniforme, o bien una rotación en torno al origen.
- Los contornos horizontales son indefinidos y corresponden a contornos libres, por lo que tanto las tensiones normales como tangenciales son nulas.

En una primera aproximación al problema, se pretende estudiar la influencia del muro frontal de manera independiente de la cimentación. De esta forma se podrán aislar los parámetros que intervienen y estudiar las rigideces aislando el tipo de cimentación superficial o profunda.

Por esta razón, las rigideces que se han evaluado son las correspondientes al desplazamiento horizontal y al giro, ya que la vertical es claramente dependiente del tipo de cimentación y en la que el muro tendría influencia solamente en la hipótesis de contacto suelo-muro con adherencia perfecta.

La matriz de rigidez dinámica que se obtendrá, será, de acuerdo a los ejes de la Fig. 8 y referido al punto 0, origen de coordenadas:

$$S^{g}_{00}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{x} & S_{x,zz} \\ S_{zz,x} & S_{zz} \end{bmatrix} \qquad (76)$$

Con el fin de analizar el comportamiento numérico de los modelos analizados, se ha recurrido a la comparación con soluciones analíticas y semianalíticas disponibles para el estudio del comportamiento dinámico de muros. Para dominios acotados son interesantes las aportaciones de J. Wood [39]; y en dominios no acotados las de H. Tajimi [29]. En [21] y [20] se realiza un estudio en el que se demuestra el buen ajuste que se obtiene con el M.E.C. a las soluciones analíticas.

La malla de Elementos de Contorno utilizada, se representa en la Fig. 9. Los contornos indefinidos se discretizan con una *malla adaptable* con la frecuencia de excitación, de forma que la longitud discretizada es siempre un cuarto de la longitud de onda; y la discretización de los dos ángulos rectos, extremo inferior y superior del muro, es tal que el tamaño de los elementos es idéntico a ambos lados del vértice.

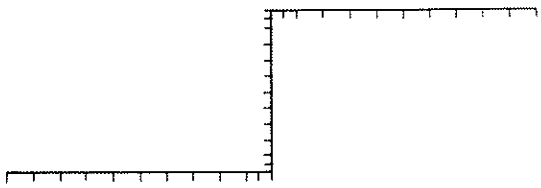


Figura 9. Muro en semiespacio. Malla de elementos de contorno.

Debido al carácter nulo de la rigidez estática para los problemas bidimensionales, el estudio de dependencia con el coeficiente de Poisson se plantea con las constantes de rigidez adimensionales:

$$S_{x}(\omega) = K_{x}(\omega) = G[k_{x} + ia_{0}c_{x}] \qquad (77)$$

$$S_{zz}(\omega) = K_{zz}(\omega) = GH^{2}[k_{zz} + ia_{0}c_{zz}] \qquad (78)$$

No se considera la rigidez de acoplamiento, $S_{x,zz}$, por tratarse de valores más pequeños que los anteriores.

En las Figs. 10 y 11 se representan las variaciones de los coeficientes adimensionales de rigidez, con el coeficiente de Poisson.

Si bien no es posible obtener leyes analíticas precisas, aproximadamente, los coeficientes poseen una dependencia del tipo 1/1-ν.

4.2. Problemas tridimensionales

Pese al amplio campo de aplicación de los problemas bidimensionales, la mayoría de los estribos de puente poseen un carácter claramente tridimensional.

El estribo tipo empleado para el estudio, corresponde a un estribo cerrado, formado por un muro frontal y dos muros laterales perpendiculares al primero (Fig. 12).

Al igual que para el problema en dos dimensiones, las hipótesis adoptadas son:

- Comportamiento viscoelástico lineal del suelo, caracterizado por: *la densidad* ρ, *el*

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

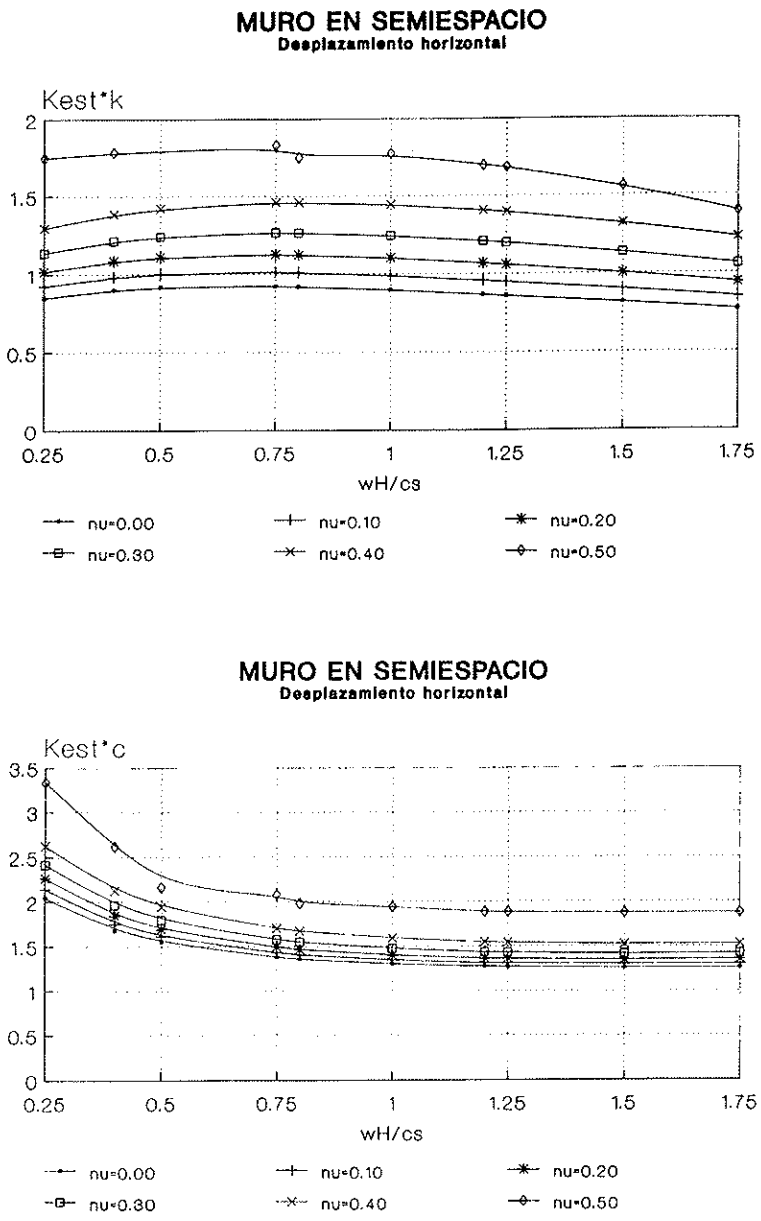


Figura 10. Muro en semiespacio. Variación de la rigidez K_x con el coeficiente de Poisson.

módulo de elasticidad transversal G, el coeficiente de Poisson ν, *e índice de amortiguamiento* ζ.

- Comportamiento rígido del muro.

Respecto a la geometría del conjunto estribo-terraplén, se han realizado varias simplificaciones, con el fin de acotar al máximo las variables que intervienen en el problema.

- El terraplén de acceso, tras el muro, se considera *horizontal e indefinido*. En la zona próxima al muro, la pendiente del terraplén es pequeña por encontrarse, generalmente, en un acuerdo vertical de tipo parabólico, próximo al vértice del mismo. Las pendientes requeridas obligan a longitudes de terraplén de veinte a treinta veces la altura del muro, por lo que puede considerarse indefinido, para el presente estudio.

- *No se considera la influencia de los derrames en el terraplén*. El carácter, fundamentalmente granular, del material empleado para la formación de los terraplenes, obliga a crear unos planos y conos de transición, *derrames*, para conferirle estabilidad. Estos derrames, generalmente no se encuentran compactados, por lo que su capacidad para resistir nuevos incrementos de tensión es pequeña. La no consideración de estos derrames permite una mejor

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

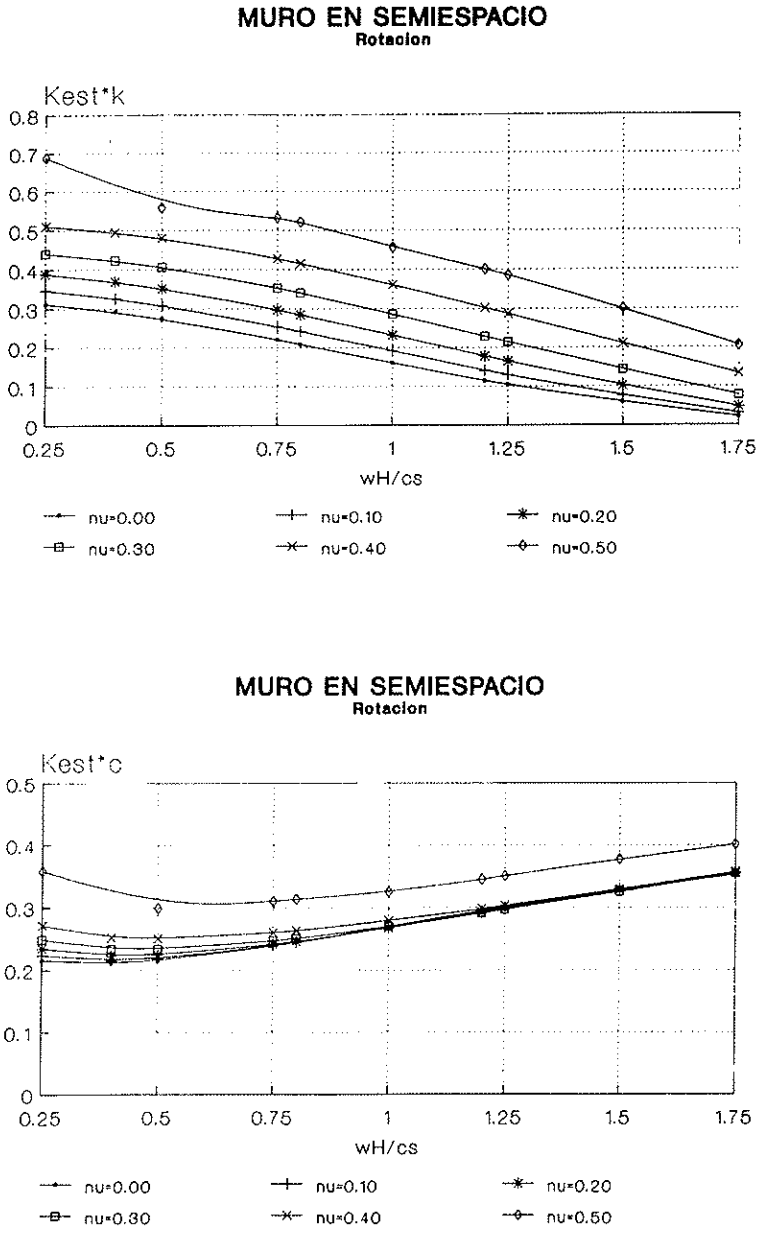


Figura 11. Muro en semiespacio. Variación de la rigidez K_{zz} con el coeficiente de Poisson.

aproximación para la evaluación de la componente de rigidez, aunque infravalora la componente correspondiente a la disipación.

- No se considera la influencia de la cimentación. En esta primera aproximación al problema, se pretende aislar la influencia de los muros, del tipo de cimentación. La influencia de la cimentación es primordial en las componentes verticales de la rigidez, que son menos importantes en la respuesta dinámica del tablero.

Bajo las consideraciones anteriores, el problema de contorno que hay que resolver es el que se indica en la Fig. 13, que corresponde a un prisma rectangular, que representa el terraplén de acceso, sin derrames sobre el semiespacio elástico, con las siguientes condiciones de contorno:

- Los planos horizontales, z = 0 y z = H, corresponden a las superficies libres del semiespacio y terraplén, respectivamente. En estas superficies, los vectores tensión son conocidos e iguales a cero.
- El plano vertical, x = 0, corresponde a la superficie de contacto del terraplén con el muro frontal del estribo. En esta superficie son los desplazamientos conocidos con el fin de evaluar la rigidez del conjunto.
- Los planos verticales, y = B/2, y = – B/2, tienen parte en contacto con los muros laterales

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

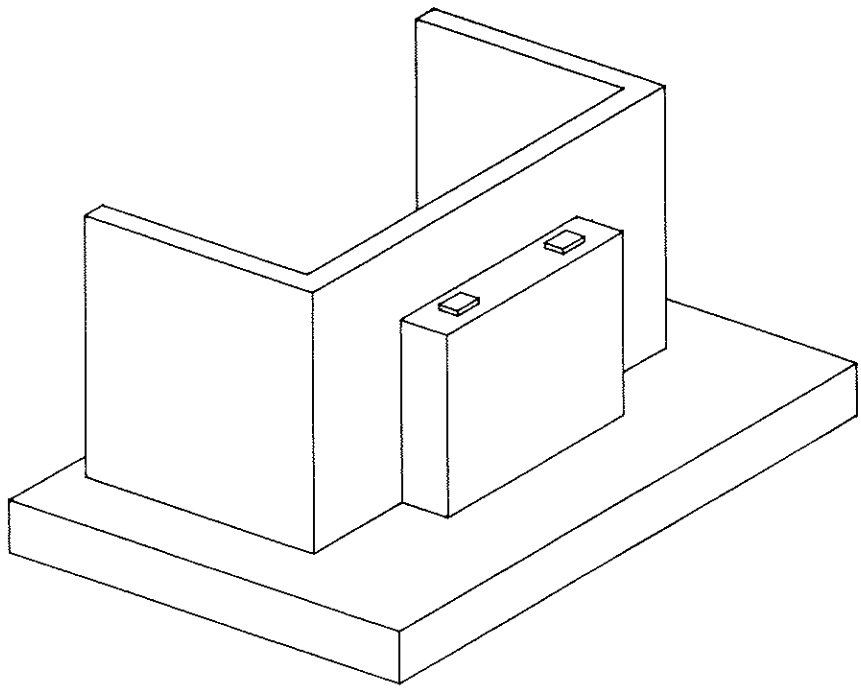


Figura 12. Estribo tridimensional tipo.

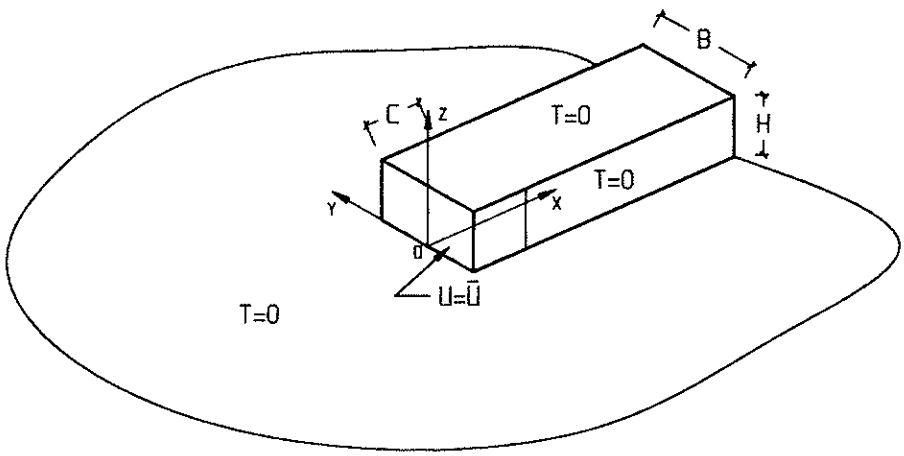


Figura 13. Problema de contorno.

del estribo, $0 \leq x < C$, donde los desplazamientos son conocidos, y parte correspondiente a la superficie libre del terraplén esquemático considerado, $x \geq C$.

Con el sistema de ejes representado, con la hipótesis de comportamiento rígido del muro y considerando el origen de coordenadas 0, como punto de referencia de las rigideces, la matriz de rigidez dinámica del estribo tipo considerado posee la siguiente estructura:

$$S^{\varepsilon}_{00}(\omega)=\begin{bmatrix} S_x & 0 & S_{xz} & 0 & S_{x,yy} & 0 \\ 0 & S_y & 0 & S_{y,xx} & 0 & S_{y,zz} \\ S_{zx} & 0 & S_z & 0 & S_{z,yy} & 0 \\ 0 & S_{xx,y} & 0 & S_{xx} & 0 & S_{xx,zz} \\ S_{yy,x} & 0 & S_{yy,z} & 0 & S_{yy} & 0 \\ 0 & S_{zz,y} & 0 & S_{zz,xx} & 0 & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Los términos nulos son consecuencia de la simetría de la estructura respecto al plano XZ.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

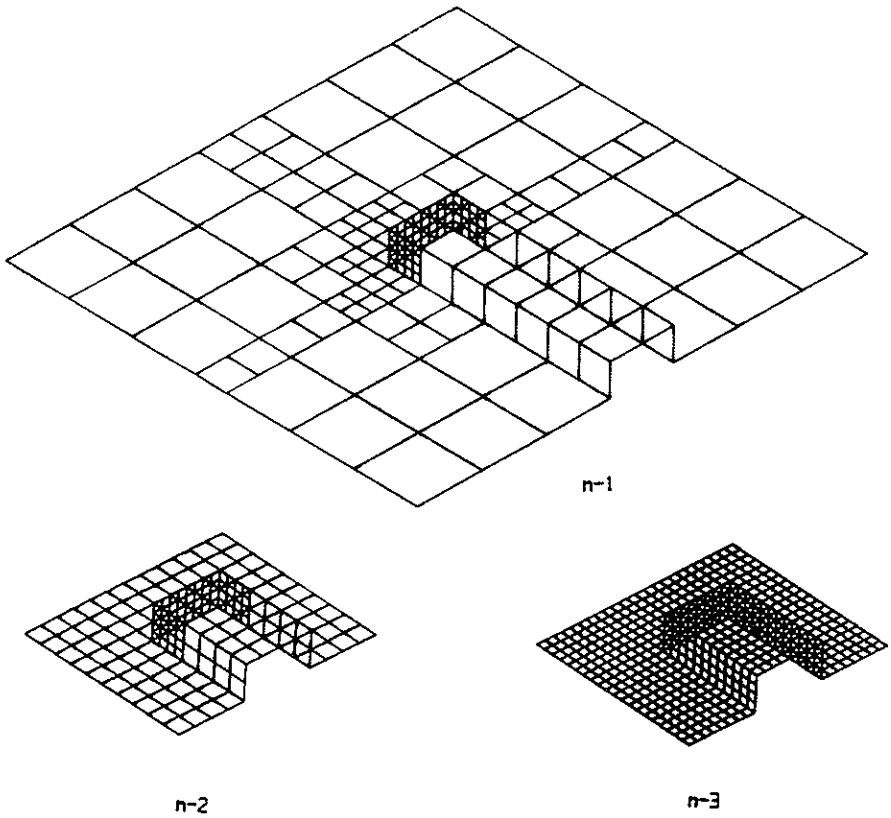


Figura 14. Modelo tridimensional. Mallas de elementos de contorno.

Se analizarán especialmente las rigideces directas, correspondientes a la diagonal principal, dado que las rigideces acopladas poseen valores más pequeños.

Los términos de rigidez podrán expresarse de la forma habitual:

$$S(\omega) = K(\omega) = K_{est}[k(\omega) + ia_0c(\omega)] \qquad (80)$$

con $a_0 = \omega H/c_s$.

El análisis de las variables que intervienen en la modelización, como son la superficie libre discretizada y el tamaño característico de los elementos, llevado a cabo en [21], conduce a que es ésta última la más importante para el rango de frecuencias en estudio. Las comparaciones se han realizado con las mallas de elementos de contorno de la Fig. 14.

Para las relaciones adimensionales, B/H = 2, y C/H = 1, las rigideces estáticas pueden expresarse:

$$K_x = 6.07\,\frac{GH}{2-\nu} \qquad K_{zz} = 5.69\,\frac{GH^3}{2-\nu}$$

$$K_y = 4.90\,\frac{GH}{2-\nu} \qquad K_{xx} = 5.10\,\frac{GH^3}{2-\nu} \qquad (81)$$

$$K_z = 6.08\,\frac{GH}{2-\nu} \qquad K_{yy} \doteq 9.27\,\frac{GH^3}{2-\nu}$$

En las Figs. 15 y 16, se representan, a modo de ejemplo, las variaciones de las rigideces dinámicas adimensionales al desplazamiento longitudinal y al giro, en la forma 80, con el coeficiente de Poisson.

Las componentes de rigidez al desplazamiento, k_x, k_y y k_z, se comportan de forma similar en cuanto a su dependencia de ν. Hasta valores de la frecuencia adimensional, a_0, inferiores a 2 ($a_0 < 2$), estas rigideces se comportan de forma independiente de ν. Para valores superiores, la dependencia puede ser importante, especialmente las componentes k_x y k_z, para componentes de ν elevadas ($\nu > 0{,}4$).

Las componentes de rigidez al giro, k_{xx}, k_{yy} y k_{zz}, y todas las componentes de amortiguamiento c, poseen un comportamiento dependiente de ν de forma bastante homogenea en todo el rango de frecuencias estudiado, pudiendo considerarse la dependencia como homotética a una ley media que recoge la variación con la frecuencia.

Esta forma de variación se asemeja a las obtenidas por Veletsos para las zapatas circulares superficiales [1].

Conviene destacar, por otro lado, el carácter decreciente de las componentes de rigidez en todas las componentes, llegando, a partir de una determinada frecuencia, a alcanzar valores negati-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

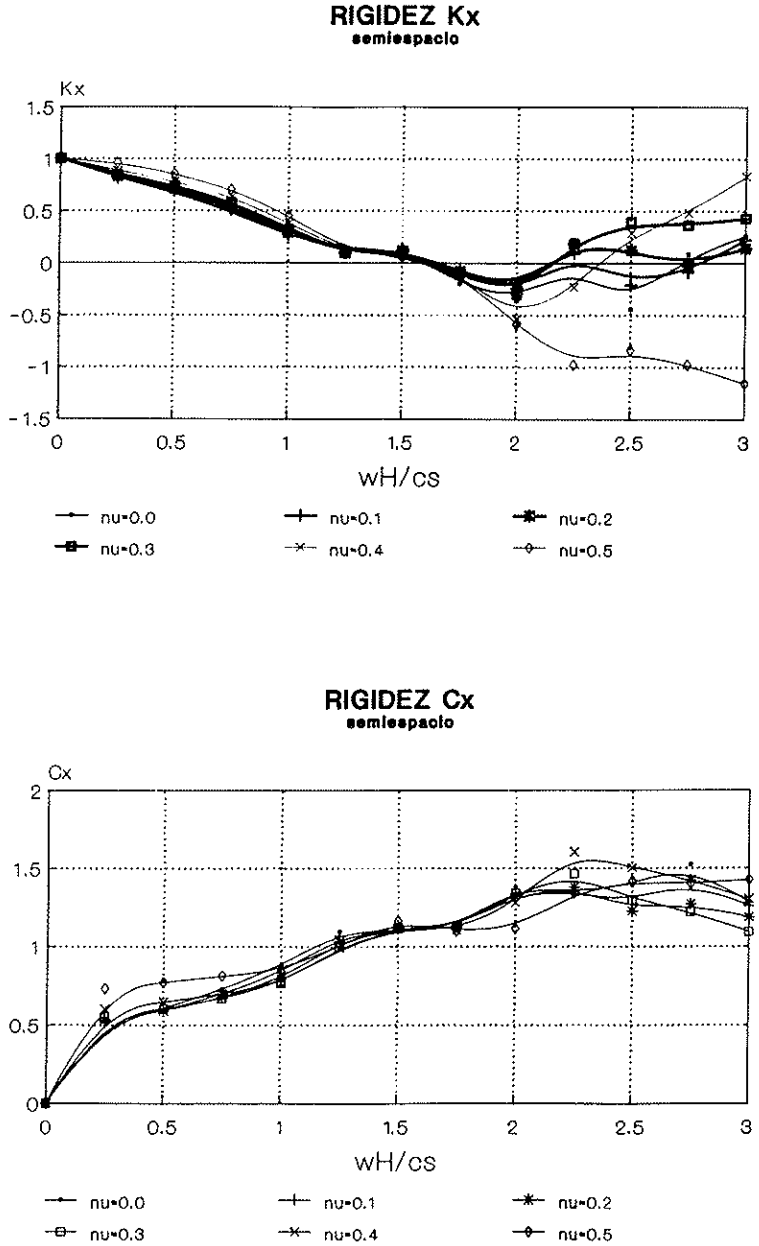


Figura 15. Estribo en el semiespacio. Rigideces dinámicas K_x. Variación con ν.

vos. Los valores negativos indican la preponderancia de los efectos inerciales sobre los de rigidez.

Teniendo en cuenta que la parte real de la rigidez dinámica es:

$$K(\omega) = \Re[S(\omega)] = K - \omega^2 M \qquad (82)$$

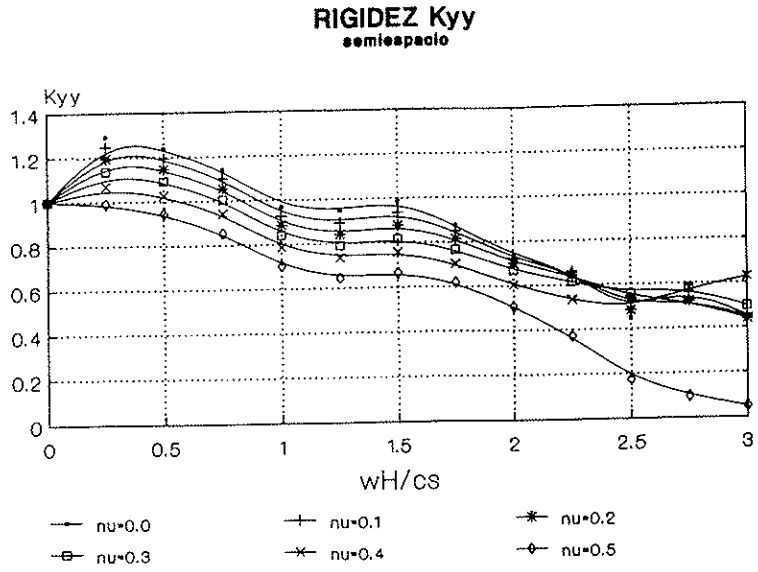
para unos determinados valores de ω, el término ω^2 M puede superar a K, dando lugar a valores negativos de la rigidez dinámica.

Las componentes de amortiguamiento, por el contrario, son funciones crecientes con la frecuencia, para el rango estudiado.

5. INFLUENCIA DEL ESTRIBO EN LA RESPUESTA DINAMICA DE LOS PUENTES

Los casos analizados en los cuales es preciso contar con la contribución del conjunto estribo-suelo, así como el simple análisis cualitativo de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



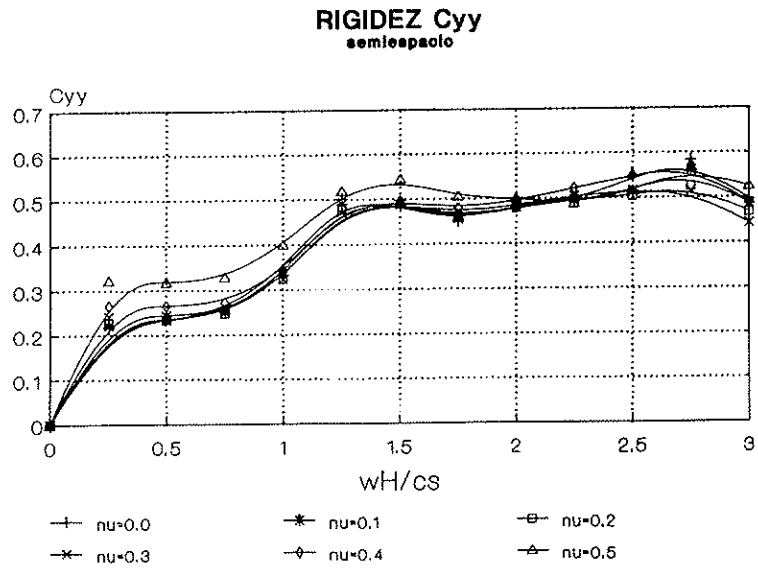


Figura 16. Estribo en el semiespacio. Rigideces dinámias K_{yy}. Variación con ν.

las dimensiones relativas del conjunto estribo-terraplén de un Paso Superior tipo de autopista, como el de la Fig. 17, justifican el cálculo de las componentes de rigidez y amortiguamiento realizado hasta ahora.

Para estudiar la importancia relativa de los diferentes parámetros que intervienen en la respuesta dinámica de los puentes se considerará un modelo sencillo que recoge la influencia de las componentes de inercia, rigidez y amortiguamiento del tablero, estribo, pilas y cimientos.

Se estudiarán los efectos de interacción dinámica suelo-estructura en los estribos y en los cimientos de las pilas, considerando solamente los efectos de *interacción inercial*.

Los datos supuestos del movimiento del suelo suponen que se ha tenido en cuenta la *interacción cinemática*, o bien que es lo suficientemente pequeña como para suponerla despreciable.

De esta forma, podrá obtenerse la influencia de los diferentes parámetros en la respuesta dinámica del conjunto, para un sistema de un solo grado de libertad, condensadas en:

- La frecuencia propia de vibración.
- El índice de amortiguamiento equivalente.

5.1. Modelo de estudio

El modelo que se va a considerar para el estu-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

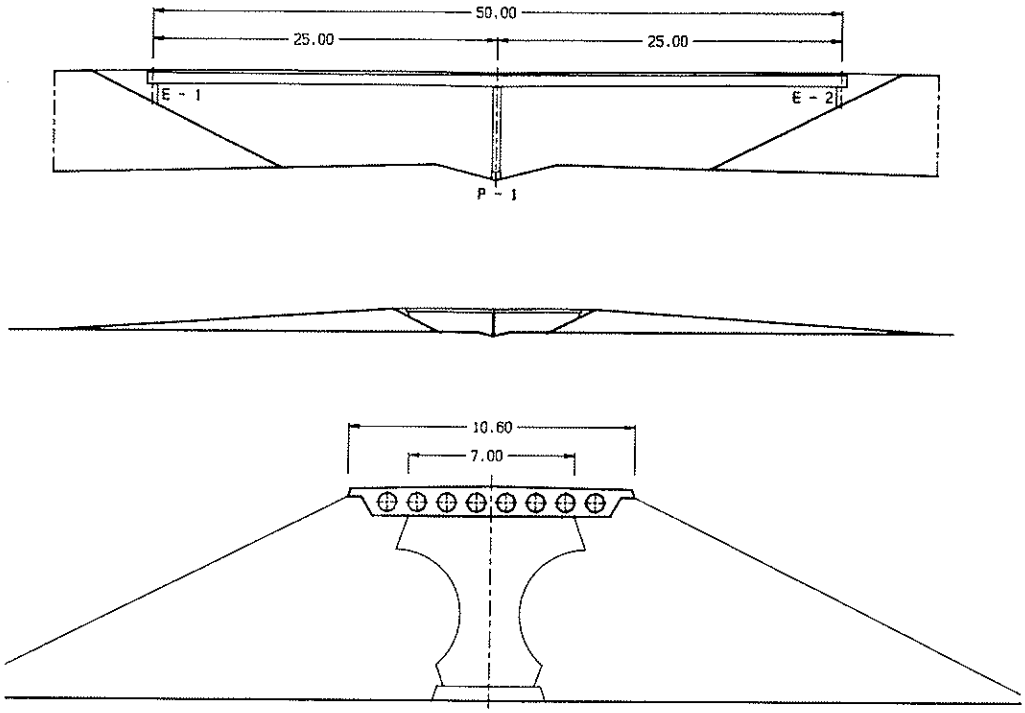


Figura 17. Paso superior de autopista.

dio de la influencia de los distintos parámetros será de un solo grado de libertad dinámico, ampliación de los empleados por J. P. Wolf [37], D. R. Somaini [24], [25], [26], Spyrakos [27] y Maragakis et al [19].

En la Fig. 18 se dibuja el modelo dinámico de estudio, que permite estudiar estructuras como las de la Fig. 17.

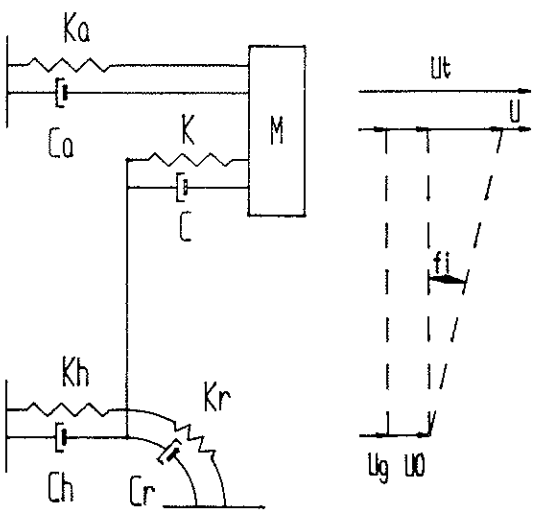


Figura 18. Modelo dinámico.

En él se representan las propiedades de inercia de pilas y tablero por m, y las propiedades de rigidez y amortiguamiento de las pilas por k y c. Las matrices de rigidez del suelo en la cimentación de las pilas se representan, de forma simplificada, por las constantes de rigidez y amortiguamiento k_h, c_h, k_r, c_r; y en los estribos por k_a y c_a.

La variable empleada como grado de libertad dinámico será el desplazamiento horizontal relativo, u, entre pila y tablero. De esta forma, el modelo, dentro de las hipótesis que se establezcan, permitirá estudiar los desplazamientos en el sentido longitudinal del tablero, o bien en el sentido transversal, con carácter independiente, utilizando las constantes de rigidez y amortiguamiento apropiadas en cada caso.

5.1.1. Hipótesis básicas

Las hipótesis básicas que se establecen respecto al comportamiento del conjunto tablero, pilas, cimientos y estribos son las siguientes:

- *Comportamiento elástico lineal* de todos los materiales. Tablero, pilas y el suelo, en su interacción con los cimientos de las pilas y con el estribo.
- *Comportamiento rígido del tablero* en el plano horizontal. En tableros de puentes habituales, la rigidez en el plano horizontal es muy superior a la de las pilas y a la del conjunto estribo-relleno.
- *Tableros rectangulares.* El eje de apoyos y el eje longitudinal del tablero son perpendiculares. De esta forma, quedan fuera de este estudio los *tableros esviados.* Con esta hipótesis,

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

los movimientos horizontales quedan desacoplados, pudiéndose estudiar de manera independiente los movimientos en el eje longitudinal del tablero y en el eje transversal.

- *Concentración de la masa del puente en el tablero.* Se considera que la masa total del puente, constituida por la del tablero y las pilas y los elementos fijos, se concentra en el tablero. La masa principal de los puentes se concentra, realmente, en el tablero, masa propia, pavimentación, defensas y barandillas. La masa de las pilas, en general, es mucho más pequeña que la del tablero, por lo que el centro de masas se encuentra muy próximo a la del tablero.

  La concentración de la masa total en el tablero permite obtener una respuesta global del conjunto pila-tablero, correcta. Sin embargo, para pilas muy altas, esta concentración de las masas puede dar lugar a resultados incorrectos para el estudio de la propia pila, ya que impide tener en cuenta los modos propios de vibración de la misma.

- *La vinculación entre pila y tablero*, generalmente, se realiza por aparatos de apoyo de material elastomérico. A efectos de modelización, se considerará que la rigidez horizontal de los mismos queda incorporada a la de las pilas. Respecto a la rigidez al giro se realizarán dos hipótesis extremas:

  – Articulación perfecta entre pila y tablero. Esta hipótesis equivale a suponer que los apoyos de material elastomérico no introducen ninguna rigidez al giro. Esta aproximación es bastante válida, debido a que la rigidez al giro de los mismos es muy baja comparada con la de las pilas.

  –*Empotramiento perfecto* entre pila y tablero. Con esta hipótesis se refleja la situación en la que no existen apoyos de neopreno entre la pila y el tablero. El empotramiento elástico real que se establece equivale a un empotramiento perfecto, debido a las rigideces relativas entre pila y tablero.

- *Los grados de libertad* considerados serán aquéllos que produzcan movimientos horizontales en el tablero:

  –*Movimiento horizontal en el cimiento de la pila:* u_0.
  –*Giro en el cimiento de la pila:* φ.
  –*Movimiento horizontal relativo en la pila:* u.

- En el tratamiento de la *Interacción suelo-estructura* sólo se considerará la interacción inercial.

  Se supondrá que los efectos de la interacción cinemática son lo suficientemente pequeños como para poder despreciarlos.
  Se supondrá que el tablero es de una longitud tal que los movimientos del suelo en la cimentación de la pila y en los estribos son idénticos.

- *Las matrices de rigidez dinámica del suelo* se considerarán desacopladas, por lo que para grado de libertad considerado se definirá una pareja de valores (k,c), en general, variables con la frecuencia:

  –En la cimentación de la pila se consideran los pares de rigideces (k_h,c_h) para el desplazamiento horizontal y (k_r,c_r) para el giro.

  –En el estribo, se considera el par (k_a,c_a) para el desplazamiento horizontal.

- Se considera la posibilidad de disipación de energía en la estructura en forma de *amortiguamiento histerético*, caracterizado por los coeficientes c o ζ_s. Este amortiguamiento se considerará concentrado en las pilas.

5.1.2 Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones de equilibrio en el dominio de la frecuencia serán:

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) \tag{83}$$

donde:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \tag{84}$$

La aplicación del *método de las subestructuras*, tratado en la sección 2, conduce a las siguientes ecuaciones del movimiento para el caso de una solicitación sísmica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}^{s}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{s}_{s} \\ \mathbf{u}^{s}_{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{g}_{bb}\mathbf{u}^{g}_{b} \end{Bmatrix} \tag{85}$$

Si se realiza la descomposición del problema en *interacción cinemática* e *interacción inercial*, dado que se considerará, en este estudio, solamente la interacción inercial, las ecuaciones del movimiento serán:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ss} & \mathbf{S}_{sb} \\ \mathbf{S}_{bs} & \mathbf{S}^{s}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{t}_{s} \\ \mathbf{u}^{t}_{b} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}^{s}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{k}_{s} \\ \mathbf{u}^{k}_{b} \end{Bmatrix} \tag{86}$$

En este caso, todos los nudos de la estructura están en contacto con el suelo, por lo que todos los nudos son del tipo b:

$$[\mathbf{S}^{s}_{bb} + \mathbf{S}^{g}_{bb}]\{\mathbf{u}^{t}_{b}\} = \omega^2[\mathbf{M}^{s}_{bb}]\{\mathbf{u}^{k}_{b}\} \tag{87}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Los grados de libertad del movimiento total considerado serán:

$$\mathbf{u}_b^t = \{\mathbf{u}_b^t\}^T = [\, u_2 \;\; u_1 \;\; \varphi_1 \,] \qquad (88)$$

donde:

u_2 : es el desplazamiento total del tablero y la cabeza de pila.

u_1 : es el desplazamiento total de los cimientos de la pila.

φ_1 : es el giro total en la cimentación de la pila.

Las matrices de rigidez dinámicas del suelo serán:

• Para la cimentación de la pila:

$$\mathbf{S}^g_{bb_1} = \begin{bmatrix} k_h + i\omega c_h & 0 \\ 0 & k_r + i\omega c_r \end{bmatrix} \qquad (89)$$

con

$$\mathbf{u}^T_{bb_1} = [\, u_1 \quad \varphi_1 \,] \qquad (90)$$

• Para el estribo:

$$\mathbf{S}^g_{bb_2} = [k_a + i\omega c_a] \qquad (91)$$

con

$$\mathbf{u}_{bb_2} = \{u_2\} \qquad (92)$$

La matriz de masas de la estructura será:

$$M_{bb} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}\,[\, m\ 0\ 0 \,] \qquad (93)$$

La matriz de rigidez de la estructura será diferente según el tipo de vinculación entre pila y tablero:

• Si la pila está articulada en cabeza (momento flector nulo), condensando los grados de libertad, de una barra a flexión, será:

$$\mathbf{K}^s_{bb} = \begin{bmatrix} k & -k & -kh \\ -k & k & kh \\ -kh & kh & kh^2 \end{bmatrix} \qquad (94)$$

donde k es la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario en una viga empotrada-articulada: $k = \frac{3EI}{h^3}$.

– E: módulo de elasticidad de la pila.
– I : momento de inercia de la pila.
– h: altura de la pila.

• Si la pila está empotrada en cabeza (giro nulo):

$$\mathbf{K}^s_{bb} = \begin{bmatrix} k & -k & -\frac{kh}{2} \\ -k & k & \frac{kh}{2} \\ -\frac{kh}{2} & \frac{kh}{2} & \frac{kh^2}{3} \end{bmatrix} \qquad (95)$$

en este caso, k es la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario en una viga biempotrada: $k = \frac{12EI}{h^3}$, siendo E,I las características mecánicas, mencionadas, de la pila.

Los desplazamientos del suelo, si no se considera la interacción cinemática y haciendo la hipótesis de igualdad de los mismos en la base de las pilas y en los estribos resultan:

$$\mathbf{u}^k_b = \mathbf{u}_g = \begin{Bmatrix} u_g \\ u_g \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (96)$$

Es conveniente realizar un cambio de variables, en el que los desplazamientos totales correspondientes al nudo del tablero se transformarán en el desplazamiento relativo respecto al nudo de la base de la pila:

$$[\, u_2\, u_1\, \varphi_1 \,] \rightarrow [\, u\, u_0\, \varphi \,]$$

Las ecuaciones de cambio de variables serán:

• Para la pila articulada en cabeza (Fig. 18):

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + h\varphi_1 + u \\ u_1 &= u_0 \\ \varphi_1 &= \varphi \end{aligned} \qquad (97)$$

• Para la pila empotrada en cabeza:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + \frac{h\varphi_1}{2} + u \\ u_1 &= u_0 \\ \varphi_1 &= \varphi \end{aligned} \qquad (98)$$

En estas variables resulta sencillo plantear las ecuaciones de equilibrio directamente.

Si se realiza el cambio de variables de desplazamientos, las matrices de rigidez, referidas al vector de desplazamientos:

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{u}^T_b = [\, u\, u_0\, \varphi \,] \qquad (99)$$

resultarán, para:

• La pila articulada en cabeza, con $k = 3EI/h^3$ y denominado ζ_s al índice de amortiguamiento histerético:

$$\mathbf{S}(\omega) = -\omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$+\begin{bmatrix} k(1+2\zeta_s i)+k_a & k_a & k_a h \\ -k(1+2\zeta_s i) & k_h & 0 \\ -k(1+2\zeta_s i)\,h & 0 & k_r \end{bmatrix}+$$

$$+i\omega\begin{bmatrix} c_a & c_a & c_a h \\ 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \qquad (100)$$

- El pilar empotrado en cabeza, con $k = 12EI/H^3$:

$$\mathbf{S}(\omega) = -\omega^2\begin{bmatrix} m & m & m\frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} k(1+2\zeta_s i)+k_a & k_a & k_a\frac{h}{2} \\ -k(1+2\zeta_s i) & k_h & 0 \\ -k(1+2\zeta_s i)\frac{h}{2} & 0 & k(1+2\zeta_s i)\frac{h^2}{12}+k_r \end{bmatrix}+$$

$$+i\omega\begin{bmatrix} c_a & c_a & c_a\frac{h}{2} \\ 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \qquad (101)$$

El vector de cargas resultará, para ambos casos:

$$\omega^2\mathbf{M}_{bb}\mathbf{u}_b^k = \omega_s m u_g\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (102)$$

5.1.3 Solución en desplazamientos

Planteadas las ecuaciones del movimiento, para cada frecuencia de excitación es posible obtener los desplazamientos de los grados de libertad supuestos.

Con el fin de emplear variables adimensionales, se definirán los siguientes parámetros:

$$\omega_s^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_h^2 = \frac{k_h}{m} \quad \omega_r^2 = \frac{k_r}{mh^2} \quad \omega_a^2 = \frac{k_a}{m} \qquad (103)$$

que definen frecuencias, mientras que

$$\zeta_h = \frac{c_h\omega}{2k_h} \quad \zeta_r = \frac{c_r\omega}{2k_r} \quad \zeta_a = \frac{c_a\omega}{2k_a} \qquad (104)$$

definen los índices de amortiguamiento.

Se estudiarán las dos siguientes situaciones de vinculación entre pila y tablero: pila articulada y empotrada.

Pila articulada

A partir de la ec. 100

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{u} = \mathbf{P} \qquad (105)$$

dividiendo por m y ω^2, y con los parámetros definidos, la matriz de rigidez $\mathbf{S}(\omega)$ se expresará:

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_s^2}{\omega^2}(1+2\zeta_s i)+\frac{\omega_a^2}{\omega^2}(1+2\zeta_a i)-1 & \frac{\omega_a^2}{\omega^2}h(1+2\zeta_a i)-h \\ -\frac{\omega_s^2}{\omega^2}(1+2\zeta_s i) & 0 \\ -\frac{\omega_s^2}{\omega^2}h(1+2\zeta_s i) & \frac{\omega_r^2}{\omega^2}h^2(1+2\zeta_r i) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\omega_h^2}{\omega^2}(1+2\zeta_a i)-1 \quad \frac{\omega_a^2}{\omega^2}h(1+2\zeta_a i)-h$$

con el vector de desplazamientos y carga:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P} = u_g\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones resulta:

$$u_0 = \frac{\omega_s^2}{\omega_h^2}\frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_h i}u \qquad (106)$$

$$\varphi = \frac{1\omega_s^2}{h\omega_r^2}\frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_r i}u \qquad (107)$$

obteniéndose el desplazamiento u de la ec:

$$\left\{(1+2\zeta_s i)+\frac{\omega_a^2}{\omega_s^2}(1+2\zeta_a 1)-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}+\right.$$
$$+\left[\frac{\omega_a^2}{\omega_s^2}(1+2\zeta_a i)-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right]\frac{\omega_s^2}{\omega_h^2}\frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_h i}+$$
$$\left.+\left[\frac{\omega_a^2}{\omega_s^2}(1+2\zeta_a i)-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right]\frac{\omega_s^2}{\omega_r^2}\frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_r i}\right\}u = \frac{\omega^2}{\omega_s^2}u_g \qquad (108)$$

Con esta solución es posible estudiar, para cualquier variación de las rigideces y amortiguamientos, la respuesta del sistema.

La forma planteada es la única posible cuando las rigideces y amortiguamientos correspondientes a las matrices de rigidez dinámica del suelo son variables con la frecuencia de excitación.

Pila empotrada

En este caso, a partir de la ec. 101, dividiendo por m y ω^2, y con los parámetros definidos, la matriz de rigidez $\mathbf{S}(\omega)$ se expresará:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_s^2}{\omega^2}(1+2\zeta_s i)+\frac{\omega_a^2}{\omega^2}(1+2\zeta_a i)-1 & \frac{\omega_a^2}{\omega^2}(1+2\zeta_a i)-1 & \frac{\omega_a^2}{\omega^2}\frac{h}{2}(1+2\zeta_a i)-\frac{h}{2} \\ -\frac{\omega_s^2}{\omega^2}(1+2\zeta_s i) & \frac{\omega_h^2}{\omega^2}(1+2\zeta_h i) & 0 \\ -\frac{\omega_s^2}{\omega^2}\frac{h}{2}(1+2\zeta_s i) & 0 & \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\frac{h^2}{12}(1+2\zeta_s i)+\frac{\omega_r^2}{\omega^2}h^2(1+2\zeta_r i) \end{bmatrix}$$

con el mismo vector de desplazamientos y carga que en el caso anterior.

Resolviendo las ecuaciones resulta:

$$u_0 = \frac{\omega_s^2}{\omega_h^2}\,\frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_h i}\,u \qquad (109)$$

$$\varphi = \frac{2}{h}\,\frac{\omega^2(1+2\zeta_s i)}{\frac{\omega_s^2}{3}(1+2\zeta_s i)+4\omega_r^2(1+2\zeta_r i)}\,u \qquad (110)$$

obteniéndose el desplazamiento u de la ec:

$$\left\{(1+2\zeta_s i)+\frac{\omega_a^2}{\omega_s^2}(1+2\zeta_a i)-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}+\right.$$

$$+\left[\frac{\omega_a^2}{\omega_s^2}(1+2\zeta_a i)-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right]\cdot\frac{\omega_s^2}{\omega_h^2}\,\frac{(1+2\zeta_s i)}{(1+2\zeta_s i)}+$$

$$+\left[\frac{\omega_a^2}{\omega_s^2}(1+2\zeta_a i)-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\,\frac{\omega_s^2(1+2\zeta_s i)}{\frac{\omega_s^2}{3}(1+2\zeta_s i)+4\omega_r^2(1+2\zeta_r i)}\right\}u=\frac{\omega^2}{\omega_s^2}\,u_g \qquad (111)$$

5.1.4 Frecuencia equivalente

Una alternativa para interpretar de forma adecuada los resultados será obtener la frecuencia y el amortiguamiento equivalente de un sistema de un grado de libertad.

La respuesta u de un sistema de un solo grado de libertad, en el dominio de la frecuencia, de frecuencia natural $\bar{\omega}$ e índice de amortiguamiento ζ sometido a una aceleración del suelo $\bar{u}_g$ será:

$$\left[1+2\bar{\zeta}i-\frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2}\right]u=\frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2}\,\bar{u}_g \qquad (112)$$

Pila articulada

De la ec. 108 es posible obtener la frecuencia equivalente $\bar{\omega}$, sin más que considerar el sistema libre de amortiguamiento $\zeta_s = \zeta_h = \zeta_r = \zeta_a = 0$. La frecuencia de excitación que hace que el coeficiente correspondiente al desplazamiento u sea nulo, $\omega = \bar{\omega}$, es la frecuencia equivalente buscada. Estrictamente, esta frecuencia que hace singular la respuesta para el sistema no amortiguado, no es exactamente la frecuencia que, para el sistema amortiguado, da lugar a la respuesta máxima. Sin embargo, ambas están muy próximas y, a efectos prácticos, pueden ser consideradas iguales.

La expresión de la frecuencia equivalente será:

$$\bar{\omega}^2 = \omega_a^2 + \frac{1}{\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{1}{\omega_r^2}} \qquad (113)$$

Cuando la rigidez del estribo es nula, $\omega_a = 0$, la frecuencia equivalente coincide con la de un sistema en el que las flexibilidades de la cimentación y la estructura se suman.

Pila empotrada

En este caso, se considera el sistema no amortiguado de la ec. 111, obteniéndose la siguiente expresión para la frecuencia equivalente:

$$\bar{\omega}^2 = \omega_a^2 + \frac{1}{\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{1}{\frac{\omega_s^2}{3}+4\omega_r^2}} \qquad (114)$$

5.1.5. Amortiguamiento equivalente

Es posible obtener un índice de amortiguamiento equivalente $\bar{\zeta}$ (ec. 112) que pondera la ticipación de los diferentes amortiguamientos en la respuesta global del sistema en estudio.

Es posible *linealizar* las ecs. 108 y 111, realizando aproximaciones del tipo:

$$\frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_h i}=\frac{(1+2\zeta_s i)(1+2\zeta_h i)}{1+4\zeta_h^2 i}\sim 1+2\zeta_s i-2\zeta_h$$

$$\frac{1+2\zeta_s i}{1+2\zeta_r i}=\frac{(1+2\zeta_s i)(1+2\zeta_r i)}{1+4\zeta_r^2 i}\sim 1+2\zeta_s i-2\zeta_r$$

en el que se supone, debido a que los índices de amortiguamiento son inferiores a la unidad, que los productos $\zeta_i\zeta_j << 1$ por tanto despreciables frente a la unidad, para cualquier pareja de índices i, j.

Con estas aproximaciones, se pueden obtenerse expresiones del índice de amortiguamiento del tipo:

$$\bar{\zeta} = F_s\zeta_s + F_h\zeta_h + F_r\zeta_r + F_a\zeta_a \qquad (115)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

donde los factores F_s, F_h, F_r y F_a representan los coeficientes de participación de los índices amortiguamiento de la estructura, la rigidez al desplazamiento y al giro de la cimentación y de la rigidez al desplazamiento del estribo, respectivamente, en el índice de amortiguamiento total equivalente.

Estos coeficientes se han obtenido para un valor de la frecuencia de excitación igual a la frecuencia equivalente, que es cuando los índices de amortiguamiento tienen cierta importancia en la respuesta del sistema.

Las expresiones de los coeficientes de participación serán diferentes según las condiciones de vinculación de la pila.

Pila articulada

$$F_s = \frac{1}{\omega_s^2\left[\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{1}{\omega_r^2}\right]} = \frac{1}{1+\frac{k}{k_h}+\frac{k}{k_r}}$$

$$F_h = \frac{1}{\omega_h^2\left[\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{1}{\omega_r^2}\right]} = \frac{\frac{k}{k_h}}{1+\frac{k}{k_h}+\frac{k}{k_r}}$$

$$F_r = \frac{1}{\omega_r^2\left[\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{1}{\omega_r^2}\right]} = \frac{\frac{k}{k_h}}{1+\frac{k}{k_h}+\frac{k}{k_r}}$$

$$F_a = \omega_a^2\left[\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{1}{\omega_r^2}\right] = \frac{k}{k_a}\left[1+\frac{k}{k_h}+\frac{k}{k_r}\right] \qquad (116)$$

Pila empotrada

$$F_s = \frac{\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{3\omega_s^2}{(\omega_s^2+12\omega_r^2)^2}}{\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{3}{\omega_s^2+12\omega_r^2}} = \frac{1+\frac{3}{(1+12k_r/k)^2}}{1+\frac{k}{k_h}+\frac{3}{1+12k_r/k}}$$

$$F_h = \frac{1}{\omega_h^2\left[\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{3}{\omega_s^2+12\omega_r^2}\right]} = \frac{\frac{k}{k_h}}{1+\frac{k}{k_h}+\frac{3}{1+12k_r/k}}$$

$$F_r = \frac{\frac{36\omega_r^2}{(\omega_s^2+12\omega_r^2)^2}}{\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{3}{\omega_s^2+12\omega_r^2}} = \qquad (117)$$

$$= \frac{36k_r/k}{(1+12k_r/k)^2}\,\frac{1}{1+\frac{k}{k_h}+\frac{3}{1+12k_r/k}}$$

$$F_a = \omega_a^2\left[\frac{1}{\omega_s^2}+\frac{1}{\omega_h^2}+\frac{3}{\omega_s^2+12\omega_r^2}\right] =$$

$$= \frac{k}{k_a}\left[1+\frac{k}{k_h}+\frac{3}{1+12k_r/k}\right]$$

5.1.6 Aceleración equivalente

A partir de la ec. 112, se deduce que la aceleración equivalente en el sistema de un grado de libertad será:

$$\bar{u}_g = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_s^2}\,u_g \qquad (118)$$

que se obtiene, de forma inmediata, una vez conocida la frecuencia equivalente.

5.2. Frecuencia y Amortiguamiento equivalente

Una vez obtenidos los parámetros fundamentales que influyen en la frecuencia y el amortiguamiento equivalente del sistema en estudio, se estudiará cómo varían en función de las características de rigidez y amortiguamiento de la estructura y del suelo.

Para ello, en primer lugar se realizará un pequeño estudio del rango de variación de las distintas variables involucradas en los *Pasos superiores de autopista*. Con estas variables y unas simplificaciones adicionales, se podrá realizar un estudio paramétrico.

Una primera aproximación a un contraste experimental de estos resultados, lo proporciona la aplicación al Paso Superior de autopista de Meloland Road, en California, del que se dispone de datos experimentales ante movimientos sísmicos y sus correspondientes análisis de resultados llevados a cabo por Werner et al [30], Levine et al [16] y Wilson y Tan [35], [36].

5.2.1 Rango de las variables

Con el fin de obtener valores razonables de los distintos parámetros, estudiaremos situaciones extremas del tablero y pilas, así como del terreno.

Se ha construido una tabla de doble entrada (Tabla 1), para el terreno y la estructura, indicándose los valores más representativos con las siguientes hipótesis:

- Para la *estructura*, tablero y pilas, se han considerado dos hipótesis extremas de un paso superior de autopista, de dos vanos iguales.

  Se denomina *estructura pequeña* la correspondiente a una sola calzada sobre una autopista sin mediana (luz de 15 m y anchura de 12 m), y *estructura grande* la correspondiente a dos calzadas, sobre una autopista con mediana (luz de 25 m y anchura de 23 m).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tabla 1

Variación de parámetros

Terreno Cimentación	Estructura					
	Pequeña			Grande		
	h/L	k/kh	ka/k	h/L	k/ka	ka/k
Bueno	2.40	0.05	3.50	1.40	0.15	0.70
Mediocre	1.20	0.10	3.50	0.80	0.30	0.70

Se considera la vinculación entre pila y tablero como articulada.

- Para la *cimentación* de las pilas se estudiarán valores de las rigideces y amortiguamientos correspondientes a cimentaciones superficiales del tipo zapata.

  Si bien los valores de estas rigideces dinámicas son variables con la frecuencia de excitación, esta variación es pequeña, por lo que, como primera aproximación, se pueden considerar los valores constantes [37], [23]:

$$k_h = \frac{8GL}{2-\nu} \qquad c_h = \frac{4.6GL^3}{(2-\nu)c_s} \tag{119}$$

$$k_r = \frac{8GL^3}{3(1-\nu)} \qquad c_r = \frac{0.4GL^4}{(1-\nu)c_s}. \tag{120}$$

donde G es el módulo de elasticidad transversal del suelo, L es el radio de la zapata, ν es el coeficiente de Poisson del suelo y c_s es la velocidad de propagación de las ondas transversales en el suelo.

Si estas rigideces se expresan de la forma habitual, extrayendo la componente estática:

$$\begin{aligned} k_h &= k_{est,x}(k_x + ia_0\, c_x) \\ k_r &= k_{est,\varphi}(k_\varphi + ia_0 c_\varphi) \end{aligned} \tag{121}$$

los valores anteriores equivalen a considerar:

$$k_x = 1 \qquad c_x = 0.575 \tag{122}$$

$$k_\varphi = 1 \qquad c_\varphi = 0.150 \tag{123}$$

donde las componentes de rigidez son iguales a la componente estática. Teniendo en cuenta la relación que existe entre la rigidez al giro y al desplazamiento horizontal de la zapata circular, los coeficientes de participación del amortiguamiento de la cimentación de la pila pueden agruparse en uno solo, F_{so}:

$$\zeta = F_x\zeta_x + F_{so}\zeta_h + F_a\zeta_a \tag{124}$$

- El *terreno de cimentación* se considera compatible con una cimentación superficial.

Para un buen terreno, se considera una velocidad de propagación de las ondas de corte, $c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 200$ m/s, y para un terreno de cimentación mediocre, una velocidad de propagación en torno a 100 m/s.

Las zapatas correspondientes se han dimensionado considerando un asiento admisible de 0,01 m.

- El *suelo del terraplén* tras el estribo, se ha considerado como un terreno medio, igual en ambas situaciones, ya que, generalmente, las propiedades del terraplén y el relleno son independientes de las condiciones del suelo de cimentación.

Los valores de k_a indicados son los correspondientes a la rigidez estática en el sentido longitudinal, para el caso del semiespacio:

$$k_a = 6.07\,\frac{GH}{2-\nu} \tag{125}$$

donde H es la altura del estribo. Se considera, a efectos del estudio, una altura del muro idéntica a la de las pilas $H = h$.

5.2.2 Estudio paramétrico

Las variables adimensionales que se emplearán en el estudio serán las utilizadas en [37]:

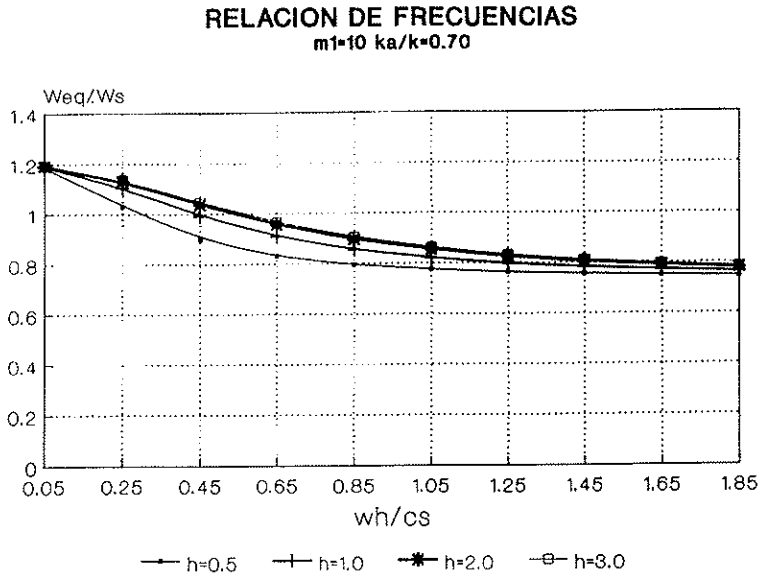
- Respecto a la dimensión característica de la cimentación de la pila $L = a$:

$$\bar{h} = \frac{h}{a} \qquad \bar{m} = \frac{m}{\rho a^3} \qquad \bar{s} = \frac{\omega_s h}{c_s} \tag{126}$$

- Respecto a la dimensión característica del estribo, H:

$$\bar{H} = \frac{h}{H} \qquad \bar{M} = \frac{m}{\rho H^3} \qquad \bar{S} = \frac{\omega_s H}{c_s} \tag{127}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



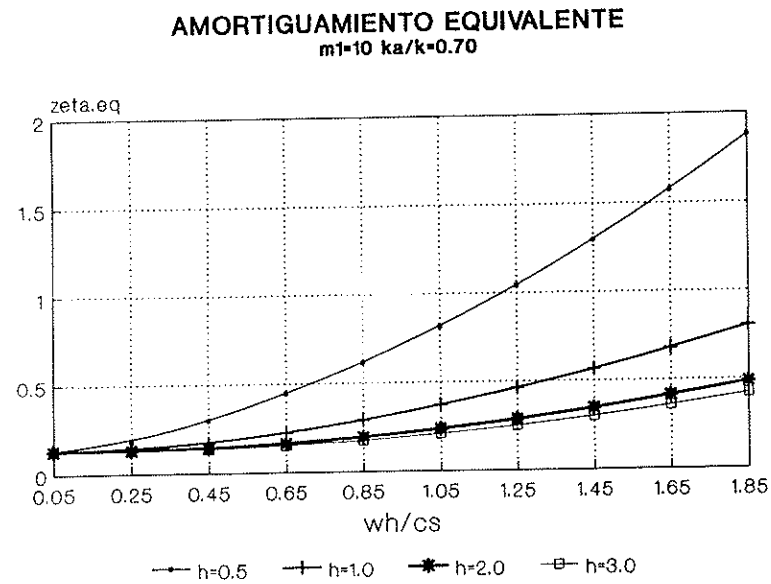


Figura 19. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de $\bar{h}$. Pila articulada.

donde

- h es la altura de las pilas.
- a es una dimensión característica de la cimentación: el radio.
- ρ es la densidad del suelo.
- c_s es la velocidad de propagación de las ondas transversales en el suelo.
- H es una dimensión característica del estribo: la altura.

En estas variables es posible expresar los cocientes de rigideces e índices de amortiguamientos que permiten obtener la frecuencia y el índice de amortiguamiento equivalente del sistema:

$$\frac{k_h}{k} = \frac{k_{xa}}{S^2\bar{M}} \qquad \frac{k}{k_h} = \frac{\bar{s}^2\bar{m}}{8}\,\frac{(2-\nu)}{\bar{h}^2 k_s}$$

$$\frac{k}{k_t} = \frac{\bar{s}^2\bar{m}}{8}\,\frac{3(1-\nu)}{k\varphi} \tag{128}$$

$$\zeta_{sh} = \frac{c_s a_0}{2k_s} = \frac{c_s}{2k_s}\,\frac{\bar{s}}{\bar{h}}\,\frac{\omega}{\omega_s}$$

$$\zeta_{sr} = \frac{c_\varphi a_0}{2k_\varphi} = \frac{c_\varphi}{2k_\varphi}\,\frac{\bar{s}}{\bar{h}}\,\frac{\omega}{\omega_s} \tag{129}$$

$$\zeta_a = \frac{c_{xa}\bar{a}_0}{2k_{xa}} = \frac{c_{xa}}{2k_{xa}}\,\bar{S}\,\frac{\omega}{\omega_s}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

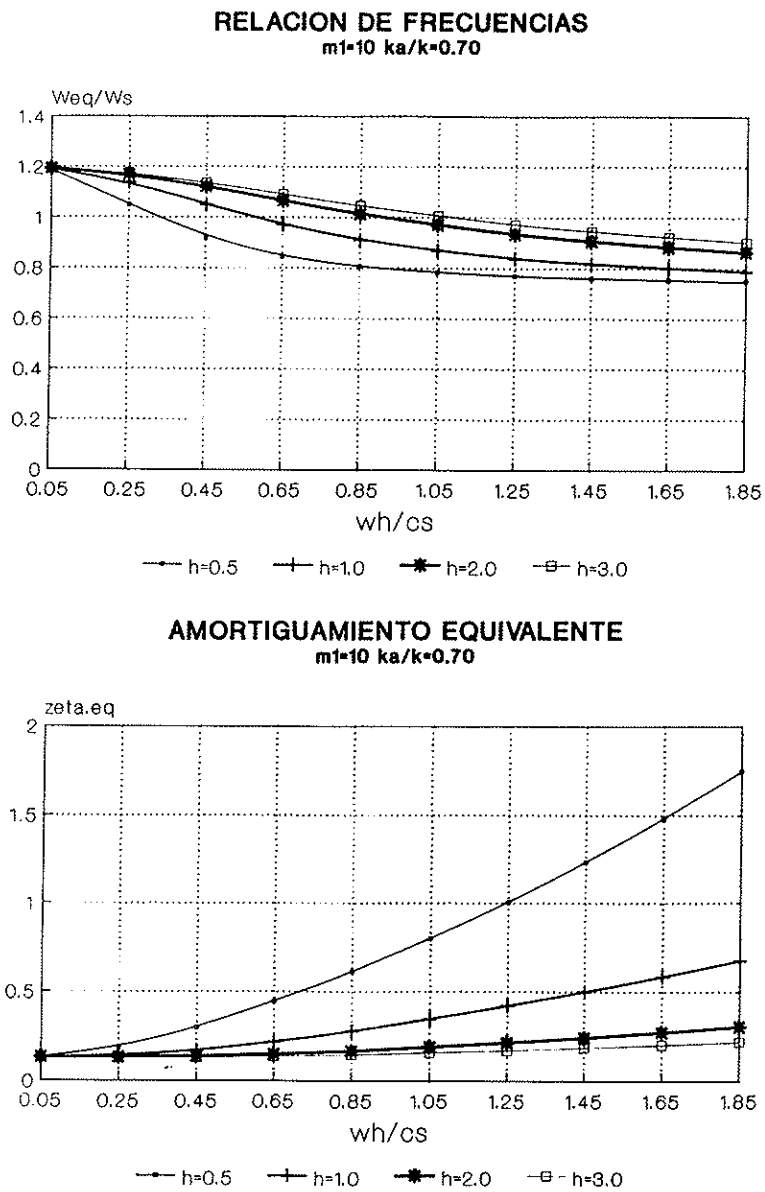


Figura 20. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de $\bar{h}$. Pila empotrada.

Donde k_x, k_φ, c_x y c_φ son los coeficientes de Veletsos correspondientes a la cimentación de las zapatas, en general variables con la frecuencia adimensional, $a_0 = \omega a/c_s$, pero que pueden ser considerados constantes para un espectro muy amplio de las mismas.

Los coeficientes k_{xa} y c_{xa} representan los coeficientes de Veletsos correspondientes al estribo, variables con la frecuencia adimensional, $\bar{a}_0 = \omega H/c_s$.

Los índices de amortiguamiento son variables con la frecuencia de excitación ω; sin embargo, estos coeficientes tienen incidencia grande en la respuesta cuando $\omega = \bar{\omega}$.

Para la consideración de los coeficientes de rigidez del estribo, variable con la frecuencia de excitación, ha sido necesario resolver un problema no lineal, sencillo, del tipo:

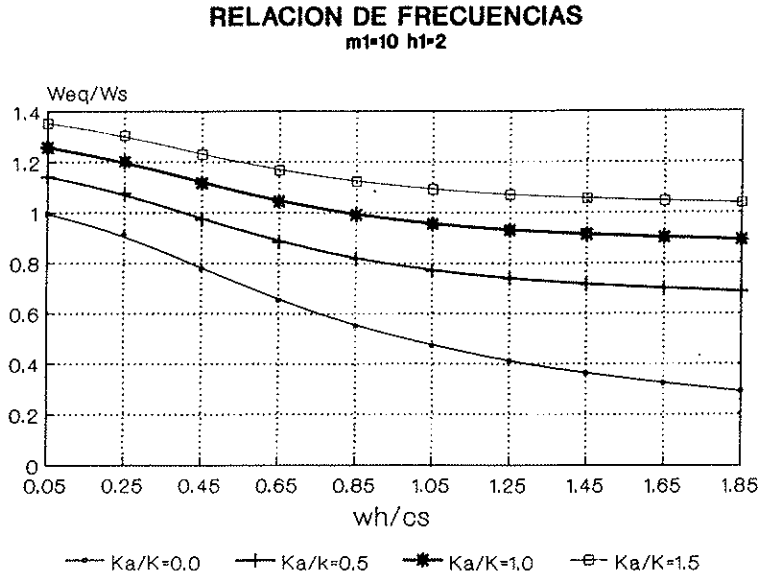
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\bar{\omega}}{\omega_s} & = & f(k_{xa}) \\ k_{xa} & = & g\left(\dfrac{\bar{\omega}}{\omega_s}\right) \end{array} \right\} \qquad (130)$$

para obtener la frecuencia equivalente. La solución del mismo se realiza por iteraciones.

Los parámetros básicos que se han estudiado son la variable de esbeltez de la pila, caracterizada por $\bar{h}$, y la rigidez relativa del estribo, *ka/k*, con respecto a la rigidez relativa estructura-suelo, definida por el parámetro $\bar{s}$.

Los parámetros de masa $\bar{m}$ y los coeficientes de rigideces adimensionales correspondientes a

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



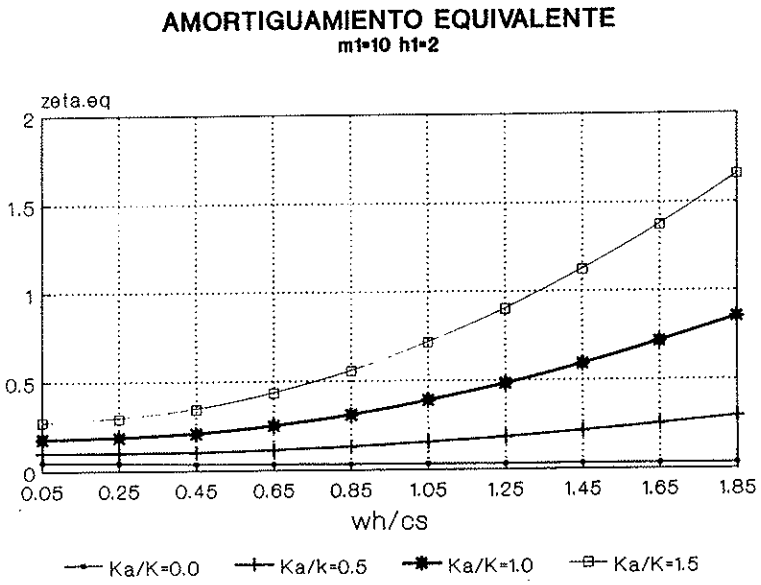


Figura 21. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de k_a/k. Pila articulada.

las cimentaciones de las pilas, se mantienen constantes. Para estos últimos se consideran los valores, constantes con la frecuencia, válidos para zapatas circulares, de la sec. anterior.

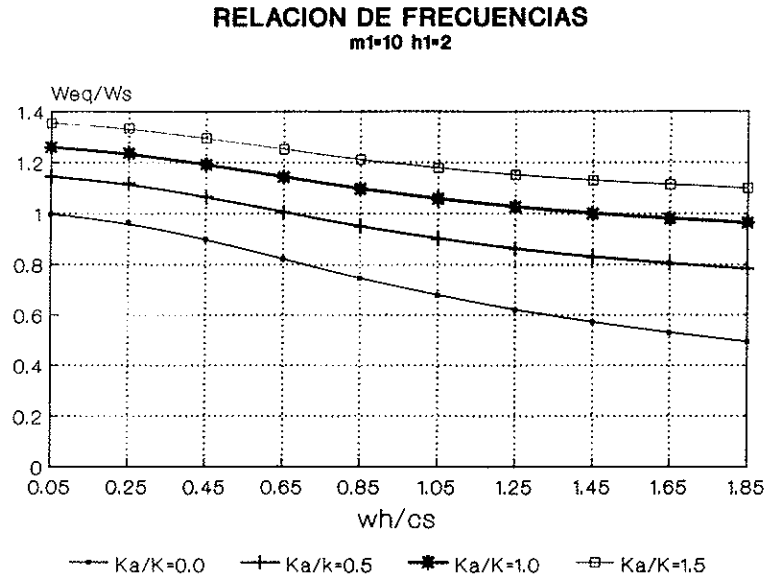
Estos estudios se han realizado para las dos hipótesis extremas de pila articulada y empotrada (Figs. 19 a 22):

- La variación con respecto al parámetro $\bar{h}$ (Figs. 19, 20), para $k_a/k = 0{,}7$ y $\bar{m} = 10$ muestra que los efectos de interacción son tanto más importantes cuanto menos *esbelta* es la pila ($\bar{h}$ decreciente) y más rígida es la estructura respecto al suelo de cimentación ($\bar{s}$ creciente).

Los fenómenos de interacción se activan disminuyendo la frecuencia equivalente de vibración y aumentando el amortiguamiento equivalente. Estas variaciones debidas a los fenómenos de interacción son ligeramente más acusadas en el caso de la pila articulada que en la pila empotrada, debido a que en el último caso los desplazamientos son inferiores.

- La variación con respecto al parámetro k_a/k (Figs. 21, 22), para $\bar{h} = 2$ y $\bar{m} = 10$ demuestra, en este caso, que las variaciones de las frecuencias son mayores cuanto menor es la rigidez relativa del estribo, siendo máxima cuando no existe esta vinculación $k_a/k = 0$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



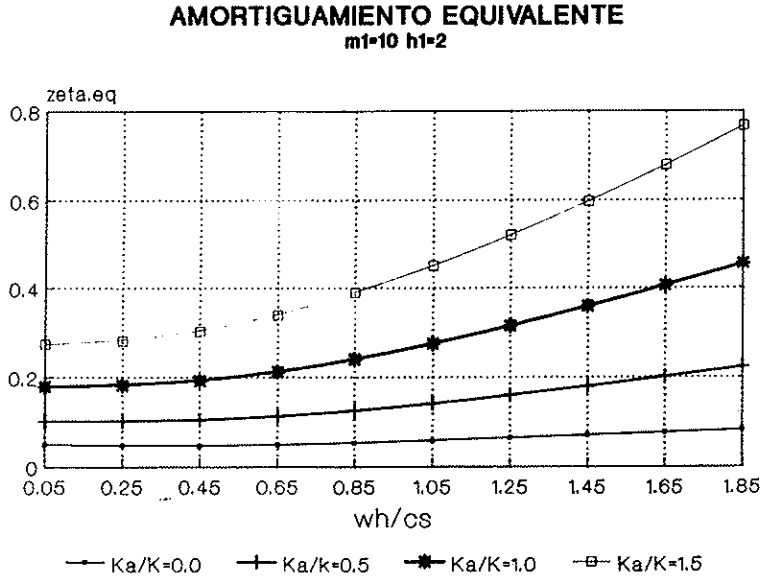


Figura 22. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Influencia de k_a/k. Pila empotrada.

Por el contrario, la presencia del estribo aumenta de forma considerable el amortiguamiento equivalente.
En este caso, la diferente vinculación de la pila y tablero tiene una importancia mayor. La pila articulada provoca mayores desplazamientos del tablero y, por tanto, mayores amortiguamientos por la presencia del estribo, que en el caso de pila empotrada.

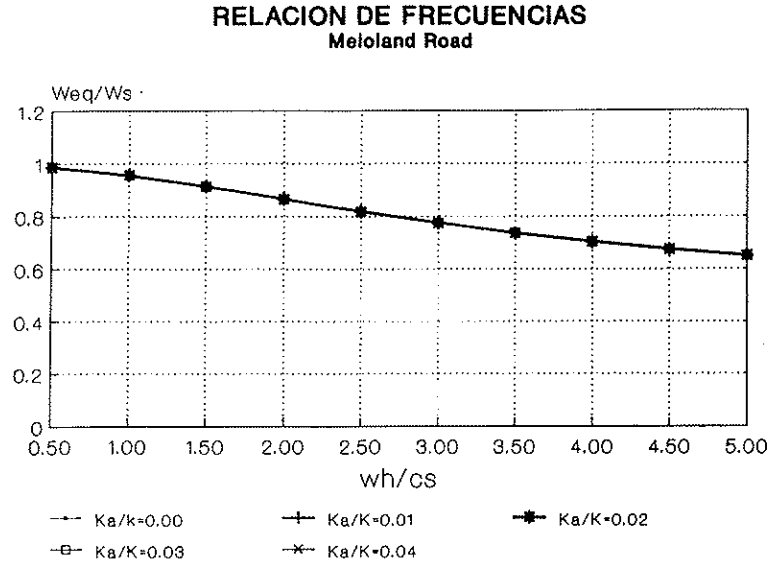
5.2.3 Paso superior de Meloland Road

Los resultados, hasta ahora obtenidos, pueden ser contrastados con las observaciones realizadas por Wilson y Tan, [35], [36] sobre el análisis de los movimientos medidos en el Paso Superior de Meloland Road, en California, ante el movimiento sísmico de 1979 en el Imperial Valley.

Varias de las observaciones realizadas en su trabajo, pueden explicarse a la luz de los resultados obtenidos anteriormente.

- Se detectan importantes caídas de la rigidez del conjunto estribo-terraplén durante el movimiento, en torno al 50%.
  Estas reducciones de rigidez fueron explicadas por el comportamiento no lineal del terre-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



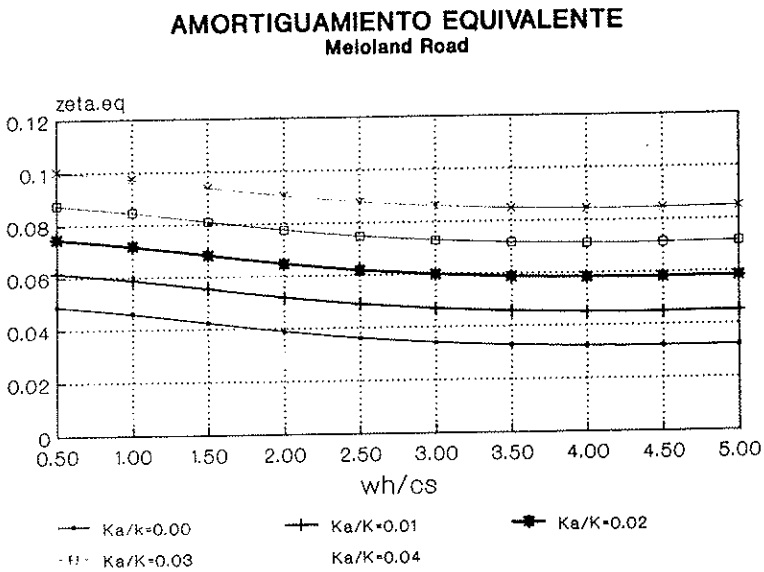


Figura 23. Frecuencia equivalente y amortiguamiento equivalente. Paso Superior de Meloland Road.

no durante el movimiento.

- El análisis de las componentes de rigidez de estribo tipo tridimensional, demuestran que éstas son claramente decrecientes con la frecuencia; y a la vista de estos resultados se pueden obtener rigideces, con respecto a la componente estática, en torno a dicha cifra o incluso inferiores:

  – Uno de los modos más importantes es el transversal, con una frecuencia de 2,5 Hz. Para las características del terreno de $c_s = 67$ m/s y del estribo $H = 5$ m, equivale a una frecuencia adimensional, $\bar{a}_0 = 1{,}2$, que para la rigidez transversal del estribo sobre base rígida (eje Y) da lugar a coeficientes adimensionales:

$$k_y \in [0{,}1;\ 0{,}5] \qquad c_y \in [0{,}3;\ 0{,}8] \qquad (131)$$

  – dependiendo de la profundidad del estrato.

  – Estos coeficientes indican pérdidas de rigidez del 50 al 90% y amortiguamientos dentro del intervalo:

$$\zeta_y \in [0{,}30;\ 0{,}50] \qquad (132)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

- La identificación de sistemas detecta índices de amortiguamientos necesarios, del 25 al 45%. Esta gama de valores queda incluida en el intervalo obtenido anteriormente.
- Los índices de amortiguamiento equivalentes del sistema, incluyendo el efecto de los estribos oscila entre el 3 y el 12%.

Si se consideran los siguientes valores de la estructura:

$$\bar{h} = 40 \quad \bar{m} = 200000 \quad \bar{M} = 4 \quad \zeta_s = 0{,}05 \quad (133)$$

y no se consideran los efectos de interacción en los cimientos de las pilas, se pueden obtener la frecuencia equivalente y los índices de amortiguamiento para distintas relaciones de rigidez del estribo y diferentes frecuencias (Fig. 23).

En la hipótesis de pila empotrada en cabeza, que corresponde a la situación del Paso superior en estudio, se obtiene un rango de variación del índice de amortiguamiento, del 3 al 10%.

6. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se derivan del trabajo realizado son las siguientes:

- Los análisis realizados de estructuras instrumentadas sometidas a movimientos sísmicos o bien mediante experimentos realizados *in situ*, demuestran una influencia significativa de los cimientos de las pilas y de los estribos, en ciertos modos de la respuesta dinámica de la estructura, especialmente introduciendo altos amortiguamientos. Esta influencia se produce en aquéllos casos en los que el tablero entra en contacto con el estribo, bien por razones accidentales o por consideraciones de proyecto.

- Las ecuaciones generales de la interacción suelo-estructura, en el rango lineal, se pueden aplicar al estudio de los fenómenos de interacción que se presentan en los puentes. Es posible dividir el cálculo en tres etapas: cálculo de la rigidez dinámica del suelo, cálculo del movimiento difractado y finalmente el cálculo acoplado incorporando las matrices de rigidez del suelo y la estructura.
- Mediante la aplicación del Método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) en el dominio de la frecuencia, es posible obtener las matrices de rigidez dinámica, en forma adimensional, del conjunto relleno-estribo, para las configuraciones más habituales de los mismos tanto en dos como en tres dimensiones.
- Se ha realizado un modelo analítico de un grado de libertad dinámico, en el que se estudian los efectos de interacción inercial, al incluir las rigideces dinámicas del suelo en las pilas y estribos.

  Se pueden obtener, en determinadas hipótesis, expresiones analíticas para la determinación de la frecuencia equivalente y el amortiguamiento equivalente, en dos hipótesis de vinculación pila-tablero: pila articulada y pila empotrada.
- Las variaciones más importantes en la frecuencia, se obtienen para estructuras rígidas, comparadas con el suelo, y con relaciones bajas de rigidez del estribo respecto a la estructura.
- Los índices de amortiguamiento equivalentes aumentan conforme aumenta la relación de rigidez de la estructura a la del suelo y la relación de rigidez del estribo respecto a la de la estructura.
- Con el modelo analítico, se han representado las características de un puente instrumentado, del que se disponen datos sobre la respuesta a un movimiento sísmico moderado.

  Los datos de rigideces dinámicas obtenidas, permiten explicar las reducciones de rigidez observadas en el conjunto relleno-estribo, así como el orden de magnitud de los índices de amortiguamiento locales en el estribo y su repercusión en el amortiguamiento global de la estructura completa.

REFERENCIAS

[1] ALARCON, E. *"Problemas de interacción terreno-estructura"* (Curso doctorado).

[2] BALAS, J. SLADEK, J. SLADEK, V. *"Stress Analysis by Boundary Element Methods"*. Elsevier Amsterdam, 1989.

[3] BONNET, M. *"Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique."* These Ecole Nat. des Ponts & Chaussées, París, 1986.

[4] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. *"Boundary Element Techniques"*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.

[5] CANET, J.M. BARBAT, A.H. *"Estructuras sometidas a Acciones Sísmicas. Cálculo por ordenador* CIMNE", Barcelona, 1988.

[6] CANO HURTADO, J.J. *"Cálculo de impedancias dinámicas de zapatas circulares rígidas en terrenos estratificados con amortiguamiento histerético. Aplicación a Centrales Nucleares"*. Tesis Doctoral. E.T.S. Ingenieros Industriales de Valencia, 1985.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

[7] CHEN, M.C., PENZIEN, J. "Soil-structure interaction of short highway bridges". *Proceedings of a Workshop on Earthquake Resistance of Highway Bridges*. Applied Technology Council. pp 434 January, 1979.

[8] CHEN, G., ZHU, J. *Boundary Element Methods*. Academic Press. Hancourt Brace, 1992.

[9] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. *Dynamics of Structures* Mc Graw-Hill, 1982.

[10] CROUSE, C.B., HUSHMAND, B. MARTIN, G.R. "Dynamic soil-structure interaction of a single-span bridge". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp 711-729, 1987.

[11] CRUSE, T.A., RIZZO, F.J. "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I", J. *Math. Anal. Appl.* Vol. 22 pp 244-259, 1968.

[12] CRUSE, T.A. "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. II, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 22 pp 341-355, 1968.

[13] DOMINGUEZ, J., ALARCON, E. "Elastodynamics", Chapter 7, *Progress in Boundary Element Methods*. Ed. Brebbia, C.A., Vol. 1, pp. 213-257. Pentech Press, London, 1981.

[14] DOMINGUEZ, J., ABASCAL. R. "Dynamics of foundations". *Topics in boundary element research*. Vol. 4, ed. C.A. Brebbia pp. 27-75. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[15] GUPTA, A.K. *Response Spectrum Method in Seismic Analysis and Design of Structures*. Blackwell Scientific Publications. Boston, 1990.

[16] LEVINE, M.B., SCOTT, R.F. "Dynamic response verification of simplified bridge-foundation model". *J. Geotechnical Eng., ASCE*, Vol. 115, Nº 2, pp. 1.246-261, 1989.

[17] MANOLIS, G.D., BESKOS, D.E. *"Boundary Element Methods in Elastodynamics"*. Unwin Hyman. London, 1988.

[18] MARAGAKIS, E.A., JENNINGS, P.C. "Analytical models for the rigid body motions of skew bridges". *Earth. Eng & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp 923-944, 1987.

[19] MARAGAKIS, E.A., THORNTON, G., SAHDI, M., SIDDHARTHAN, R. "A simple nonlinear model for the investigation of the effects of the gap closure at the abutments joints of short bridges". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 1.163-1.178, 1989.

[20] MARTINEZ CUTILLAS, A., ALARCON. E., GOMEZ-LERA, M.S., CHIRINO. F. "Application of Boundary Element Method to the analysis of bridge abutments". *14th. International Conference on Boundary Element Methods*, Sevilla, 1992.

[21] MARTINEZ CUTILLAS, A. *Cálculo de la rigidez dinámica de estribos de puentes*. Tesis Doctoral. E.T.S.Ingenieros Industriales de Madrid, 1993.

[22] NEWMARK, N.M., VELETSOS, A.S. "Design procedures for shock isolation systems of underground protective structures, Vol. III, Response spectra of a single degree of freedom elastic and inelastic systems". *Report for Air force Weapons Laboratory*. Newmark, Hansen and Associates, RTD TDR 63-3096, 1964.

[23] SIEFFERT, J.C., CEVAER, F. *Handbook of impedance functions. Surface foundations*. Quest Editions. Presses Academiques, Nantes, 1992.

[24] SOMAINI, D.R. "Parametric study on soil-structure interaction of bridges with shallow foundations". *Proc. 8th. World Conf. on Earth. Eng.*, San Francisco, 1984.

[25] SOMAINI, D.R. "A simplified mathematical model for the investigation of the seismic behaviour of bridges with fixed columns taking soil-structure interaction into account". *Proc. 8th. Eur. Conf. on Earth. Eng.*, Lisbon, 1986.

[26] SOMAINI, D.R. "Seismic behaviour of girder bridges for horizontally propagating waves". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp. 777-793, 1987.

[27] SPYRAKOS, C.C. "Assesment of SSI on the longitudinal seismic response of short span bridges". *Eng. Struct.*, Vol. 12, pp 60-66, 1990.

[28] SPYRAKOS, C.C. "Methods of dynamic analysis of structural systems". *Structural Dynamics, Kratzig et al (eds).*, pp 771-778 Balkema, Rotterdam, 1990.

[29] TAJIMI, H. "Dynamic earth pressures on basement wall". *Proc. 5th. World Conf. on Earth. Eng.*, Rome, 1973.

[30] WERNER, S.D., BECK, J.L., LEVINE, M.B. "Seismic response evaluation of Meloland road overpass using 1979 Imperial Valley Earthquake records". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 15, pp 249-274, 1987.

[31] WHEELER, L.T., STERNBERG, E. "Some theorems in classical elastodynamics". *Arch. Rational Mech. Anal.* Vol. 31 pp 51-90, 1968.

[32] WHITMAN, R.V., BIELAK, J. "Foundations", Chapter 7. *Design of Earthquake Resistant Structures*. Ed. Rosenblueth, E. pp. 223-260. Pentech Press, London, 1980.

[33] WILSON, J.C. "Stiffness of non-skew monolithic bridge abutments for seismic analysis". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 16, pp 867-883, 1988.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

[34] WILSON, J.C. "Analysis of the observed seismic response of a highway bridge". *Earth. Eng. & Struct. Dyn.*, Vol. 14, pp 339-354, 1986.

[35] WILSON, J.C., TAN, B.S. "Bridge abutments: formulation of simple model for earthquake response analysis". *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 116 (8), pp 1828-1837, 1990.

[36] WILSON, J.C., TAN, B.S. "Bridge abutments: assessing their influence on earthquake response of Meloland Road Overpass". *J. Engrg. Mech., ASCE*, Vol. 116 (8), pp 1838-1856, 1990.

[37] WOLF, J.P. *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice-Hall, 1985.

[38] WOLF, J.P. *Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain*. Prentice-Hall, 1988.

[39] WOOD, J. *Earthquake-induced soil pressures on structures*. PhD. Thesis. Caltech. Pasadena, 1973.

RESUMEN

Los datos obtenidos de puentes instrumentados en zonas sísmicas, demuestran la importancia que tienen los estribos en la respuesta dinámica de la estructura. Si bien existen modelos que permiten estudiar la incidencia de las cimentaciones de las pilas, no existe ningún modelo analítico ni numérico que permita acotar la incidencia de los estribos. En este trabajo se presentan modelos de Elementos de Contorno en el dominio de la frecuencia, tanto en dos como en tres dimensiones, así como el cálculo de las rigideces dinámicas de los estribos, en forma adimensional, para las tipologías más habituales. Finalmente, en un modelo analítico sencillo de un tablero de puente en el que se incorporan los efectos de interacción inercial en la cimentación de pilas y estribos, se analizan las variables de la respuesta dinámica modificada.

SUMMARY

Strong motion records obtained in instrumented short-span bridges show the importance of the abutments in the dynamic response of the whole structure. Many models have been used in order to take into account pier foundations influence although no reliable ones have been used to analyse the abutment performance. In this work two and three dimensional Boundary Element models in frequency domain have been proposed and dimensionless dynamic stiffness of standard bridge abutments have been obtained. Also, a simple analytical model of a short span bridge including inertial interaction effects of pier foundations and abutments has been presented in order to evaluate the response sensitivities to different soil-structure interaction variables.

* * *

La Aptitud al servicio de las Estructuras de Edificación Coloquio Internacional, Göteborg, Junio 1993

La IABSE ha publicado un volumen en el que se reproducen los textos de las Comunicaciones presentadas y discutidas en el coloquio Internacional, celebrado en Göteborg (Suecia), en junio del pasado año 1993.

La aptitud al servicio es la posibilidad que ofrece una estructura para satisfacer diversos requisitos y expectativas. Para el usuario de una estructura, el comportamiento de la estructura bajo cargas de servicio es de gran importancia. Sin embargo, los ingenieros estructurales al juzgar una estructura se centran, principalmente, en cuestiones de seguridad y de capacidad de carga.

En esta publicación se exponen diversos criterios ingenieriles sobre la aptitud al servicio de las estructuras, comparándolos con el concepto clásico de fallo/seguridad aplicado a los problemas de seguridad estructural. Se publican 45 Artículos relacionados con los siguientes temas:

- Requisitos que debe satisfacer la aptitud al servicio de las estructuras.
- Conceptos y métodos de diseño.
- Cargas de servicio y modelos de cargas.
- Propiedades estructurales.
- Respuesta estructural bajo las cargas de servicio.

DATOS DE ESTA PUBLICACION

INFORME IABSE Volumen 69

45 Artículos en Inglés. Resúmenes en Inglés, Francés y Alemán.

342 páginas y 210 láminas. Formato 170 x 240 mm.

ISBN 3-85748-082-3. Publicación: Junio 1993.

Precio: Miembros de IABSE SFr. 64,–
No Miembros SFr. 96,–
Más gastos de envío.

Los interesados en adquirir este volumen deberán dirigirse a:

IABSE Secretariat
EHT-Hönggerberg
CH-8093 Zurich
Télf.: Int + 41 1-633 26 47
Fax: Int + 41 1-371 21 31

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Primer Congreso Nacional de Tecnología en la Arquitectura

Organizado por **EL DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCION Y TECNOLOGIA ARQUITECTONICAS** de la **Universidad Politécnica de Madrid,** se va a celebrar, en la **Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid,** durante los días 24, 25 y 26 de noviembre del presente año 1994, el **Primer Congreso Nacional de Tecnología en la Arquitectura.**

INTRODUCCION

Se trata de crear un foro, a nivel nacional, con visos de periodicidad, en el que se pueda plantear la problemática de la tecnología en el mundo de la Arquitectura, en sus diferentes aspectos, en un momento que se considera muy adecuado por diversas razones:

- La aparición, por un lado, de los nuevos planes de estudios, con la polémica generada a su alrededor.
- La existencia, por otro, de una directiva europea sobre la enseñanza de la Arquitectura, a la que nuestro país debe ajustarse.
- La inevitable crisis económica, por último, que afecta de un modo muy especial al sector de la Edificación y, por tanto, a las profesiones relacionadas con la misma, entre las que destaca la del arquitecto.

Por ello se proponen cinco grandes temas que permitan abordar todos los problemas existentes alrededor de la tecnología en la Arquitectura ("Arte Técnico"), tanto desde el punto de vista de su enseñanza y formación como desde sus últimas innovaciones, pasando por la actividad profesional.

TEMAS

Se plantea analizar el problema de la TECNOLOGIA EN LA ARQUITECTURA, en cinco grandes temas que se desarrollarán, cada uno, en forma de **ponencia** que presenta el problema, dictada por un profesional de prestigio, **comunicaciones** que aportan comentarios y sugerencias a los diversos aspectos parciales y **debate y conclusiones**.

1er Tema: LA ENSEÑANZA DE LA TECNOLOGIA EN LA ARQUITECTURA.

Deberá cubrir los problemas relativos, por lo menos, a los siguientes aspectos:

- La formación técnica de arquitectos y demás profesionales relacionados con la Edificación.
- La formación profesional.
- La formación continuada, tanto de técnicos como de personal laboral.

2º Tema: LA TECNOLOGIA ARQUITECTONICA Y LA ACTIVIDAD PROFESIONAL EN LA EDIFICACION.

Se deberán analizar los problemas relativos a:

- Responsabilidad civil.
- La calidad técnica de proyectos y obras.

3er Tema: LA NORMATIVA TECNICA EN LA EDIFICACION.

Se discutirán los aspectos relacionados con:

- Necesidad y existencia de normativa técnica.
- Normativa recomendable y obligatoria.
- Normativa europea, nacional y autonómica.
- Control de calidad de materiales y sistemas.
- Los pliegos de condiciones en los proyectos.

4º Tema: INNOVACION TECNOLOGICA Y ARQUITECTURA.

Se contemplarán, por lo menos, los siguientes aspectos:

- Nuevos materiales y sistemas.
- Incidencias en las obras de Arquitectura.
- Incidencia en la normativa.
- Investigación y desarrollo en el sector de la edificación.

5º Tema: LA RESTAURACION ARQUITECTONICA Y LA TECNOLOGIA.

Se deberán analizar los problemas que surgen, como:

- La responsabilidad técnica en la restauración.
- Las nuevas técnicas de intervención y consolidación.
- La conservación de edificios.
- Problemática de la aplicación de la nueva tecnología en las obras de restauración.
- La recuperación de oficios.

Los interesados en recibir mayor información sobre este Congreso, deberán contactar con:

1er Congreso de Tecnología en la Arquitectura
Dpto. de Construcción y Tecnología Arquitectónicas E.T.S.A.M.
Avda. Juan de Herrera, 4
28040 MADRID

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Consideraciones respecto a la modelización dinámica de los puentes

Joan Ramon Casas Rius
Departamento de Ingeniería de la Construcción
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, (UPC)

1. INTRODUCCION

Cada vez son más frecuentes los cálculos dinámicos en los puentes, incluso en aquellos que no van a estar solicitados por cargas dinámicas excepcionales debidas a viento o a sismo. Por consiguiente, durante las fases de proyecto y construcción de un puente, es necesario disponer de un buen modelo de comportamiento dinámico del mismo si se pretende llevar a cabo una prueba dinámica de recepción en él, una vez acabada la construcción, o bien si, durante la etapa de servicio del puente, se decide llevar a cabo una prueba dinámica como técnica de inspección. La fiabilidad y correcto funcionamiento del modelo que describe el comportamiento dinámico del puente son muy importantes puesto que:

1) Durante la fase de proyecto de la prueba, el modelo nos ayudará a escoger la instrumentación más idónea, juntamente con su colocación en la estructura.

2) Durante la ejecución de la prueba, el modelo será una herramienta muy útil para verificar la bondad de los datos experimentales obtenidos.

3) Durante la fase de análisis de los resultados experimentales, su comparación con los teóricos proporcionará un aviso sobre el posible incorrecto funcionamiento del puente.

Por consiguiente, es conveniente conocer las distintas posibilidades de modelización existentes. En este sentido, dos aspectos importantes deben ser tenidos en cuenta:

1) En primer lugar, dado que se intenta modelizar una estructura con un mecanismo de respuesta fundamentalmente a flexión, junto con una geometría muy específica, puede ser posible acercarse perfectamente al comportamiento dinámico, con modelos específicos muy simples.

2) Por otro lado, los distintos mecanismos de respuesta derivados de las distintas tipologías existentes harán que no sea posible la adopción de modelos o criterios de modelización completamente generales para el conjunto de todos los puentes.

Además, a la hora del proyecto del puente, siempre se dispone de un modelo estático de comportamiento. En este sentido, es de gran interés el poder utilizar este modelo estático, ampliándolo convenientemente, de manera que con poco trabajo adicional pueda llevarse a cabo el análisis dinámico.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, el artículo presenta las conclusiones derivadas del estudio dinámico teórico y posterior prueba de carga dinámica de una serie de puentes de distintas tipologías, lo cual permite formular un conjunto de recomendaciones de tipo práctico para la modelización dinámica de los mismos.

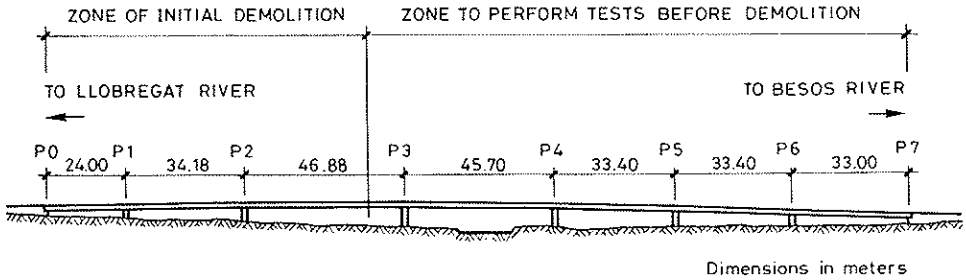
2. COMPARACION ENTRE RESULTADOS TEORICOS Y EXPERIMENTALES

El estudio de la correlación entre resultados de modelización y reales se lleva a cabo en función del tipo de puente ensayado. Para cada puente, en primer lugar se describe el puente, a continuación se presenta el modelo teórico y discretización utilizada, y, finalmente, se comparan resultados teóricos y experimentales. La descripción en profundidad de las pruebas dinámicas llevadas a cabo queda fuera del alcance de esta presentación.

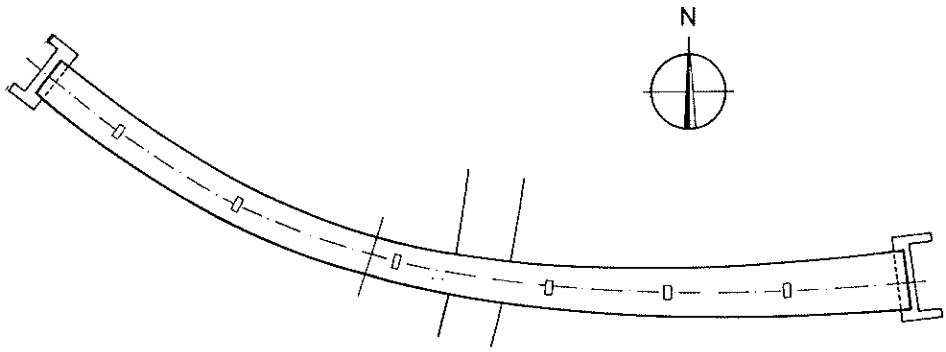
2.1. Puentes de hormigón pretensado de sección cajón

El hecho de que estos puentes en cajón, a dife-

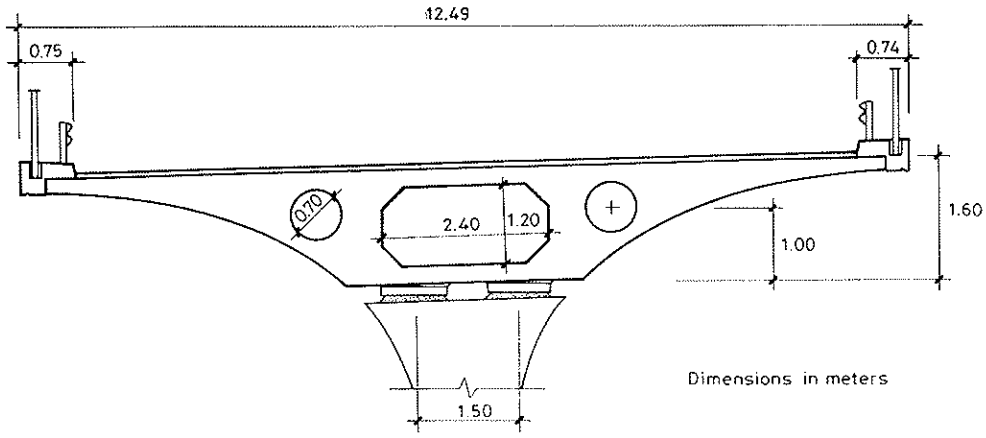
Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026



ELEVATION



OVERVIEW



TYPICAL CROSS-SECTION

Figura 1.

rencia de los metálicos o mixtos, sólo presenten diafragmas o traviesas en las secciones de apoyo, permite una mayor libertad a la hora de ubicación de los nodos de la discretización por elementos finitos.

2.1.a) Puente de Alfonso X

Puente continuo, de siete vanos, según aparece en la figura 1, con una parte del mismo sobre un acuerdo circular en planta, de 300 metros de radio. Debido a la poca curvatura y a la tipología de la sección transversal, el puente se modelizó como recto, con un modelo de viga continua a base de elementos finitos unidimensionales tipo viga, cuyas características mecánicas y de masa correspondían a las de la sección total. En cada vano se colocaban 10 elementos, con un criterio análogo al utilizado para el estudio frente a acciones estáticas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Tabla 1

Viaducto Alfonso X

f (Hz)	Teórica	Exper.
f_1 (Flexión)	1,71	1,70
f_2 (Flexión)	3,05	2,97
f_3 (Flexión)	3,99	3,80
f_4 (Flexión)	4,99	4,50
f_5 (Flexión)	5,83	5,20

En la tabla 1, se comparan los resultados de las frecuencias de vibración obtenidas con dicho modelo, con las obtenidas a partir de los resultados de la prueba dinámica. También se obtuvo la frecuencia de vibración del primer modo, mediante el método de Rayleigh [1], utilizando el peso propio como acción sobre la estructura, y el modelo utilizado en el análisis estático. Por tanto, poco trabajo adicional fue necesario, en relación al modelo estático existente, para obtener un valor de f_1 = 1,77 Hz.

2.1.b) Viaducto de la Diagonal

Puente continuo de 3 vanos, de luces 39 + 49,10 + 39 metros, con un canto de 1,964 metros y anchura de 10,95 metros (Figura 2). Se trata de un puente fuertemente esviado sobre estribos, con dos aparatos de apoyo tanto en pilas como en estribos. Debido al esviaje en planta, el puente se modelizó mediante un emparrillado plano con un único nervio longitudinal, que contenía la totalidad de la masa, momento de inercia polar y rigidez a flexión y torsión de toda la sección, del cual arrancaban los nervios transversales que modelizan las traviesas en pilas y estribos. En consecuencia, el modelo es el mismo utilizado en el análisis estático, añadiéndole, únicamente, las características de inercia (masa y momento de inercia) que permiten construir la matriz de masa. También, en este caso, se utilizaron 10 elementos tipo viga por vano, en el nervio longitudinal. Los resultados de frecuencias teóricas y experimentales pueden verse en la tabla 2.

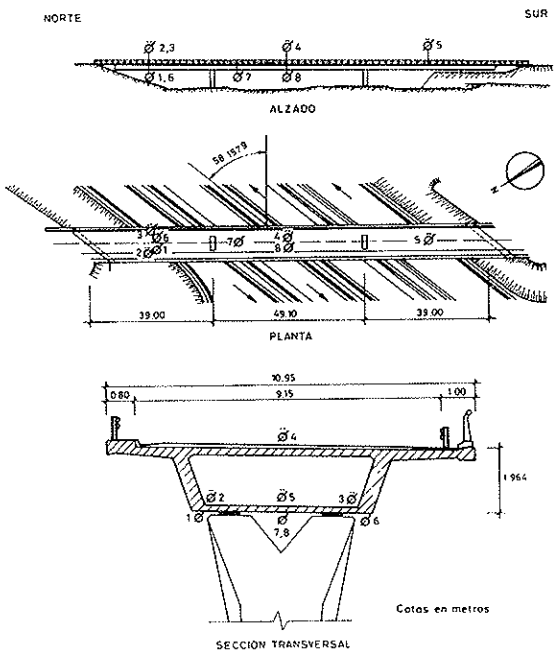


Figura 2.

Tabla 2

Viaducto de la Diagonal

f (Hz)	Teórica	Exper.
f_1 (Flexión)	2,25	2,25
f_2 (Flexión)	3,53	3,48
f_3 (Flexión)	4,46	4,21
f_4 (Torsión)	8,41	8,38

2.2. Puentes mixtos de sección cajón

Los puentes estudiados se encuentran en el Cinturón Litoral de Barcelona, en su cruce sobre la Autopista A-19. Se trata de cuatro puentes de dos vanos, con luces 20,55 y 44,55 metros. La sección transversal se esquematiza en la figura 3. Tres de los puentes tienen una anchura de 15,15 metros; y el cuarto, de 18,50 metros. La parte metálica de la sección tiene espesor variable según la zona, y la rigidización transversal de la sección se dispone cada 4,05 metros. Los rigidizadores transversales de almas y forjado inferior están colocados cada 1,35 m. Una zona de 16,20 metros del forjado inferior, con centro en la pila, se rellena con un espesor de hormigón para aumentar su capacidad resistente a flexión negativa. Tanto en pila como en estribos se disponen dos aparatos de apoyo de neopreno zunchado.

Análogamente al puente anterior, el modelo dinámico utilizado es el de un emparrillado plano con un único nervio longitudinal. Cada puente se discretiza con un total de 39 nudos y 38 elementos tipo viga. Las características mecánicas de los elementos se evalúan mediante la conversión de las zonas de hormigón en acero, con un factor de equivalencia n = 7 (carga instantánea). En este caso, se consideró conveniente colocar un nudo de la discretización allí donde se encuentra un diafragma de rigidización de la sección (cada 4,05 metros) para tener en cuenta la existencia de una masa y un momento de inercia concentrados.

Los valores teóricos y experimentales obtenidos para los puentes con anchura de 15,15 m son los que aparecen en la tabla 3.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

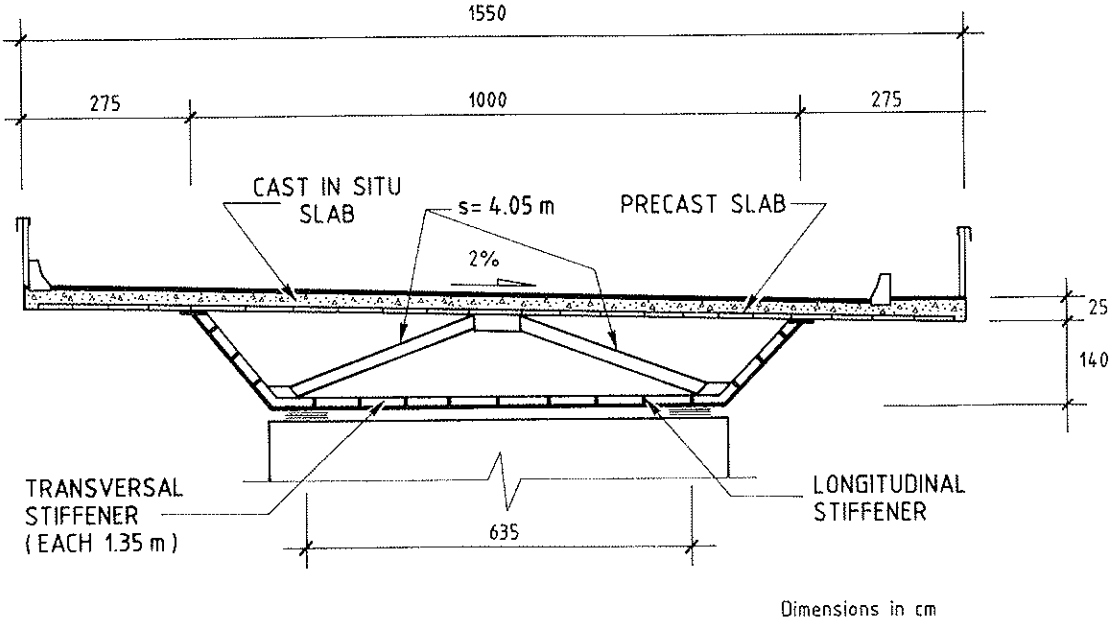


Figura 3.

Tabla 3

Puente sobre la A-19

f (Hz)	Teórica	Exper.
f_1 (Flexión)	1,73	1,70
f_2 (Tor. vano largo)	2,24	–
f_3 (Flexión)	3,60	3,20
f_4 (Tor. vano largo)	4,48	–
f_5 (Tor. vano corto)	4,51	4,48
f_6 (Flexión)	6,75	6,90
f_7 (Tor. vano largo)	6,85	–
f_8 (Tor. vano largo)	9,05	–
f_9 (Tor. vano corto)	9,10	10,30

2.3. Puentes de hormigón pretensado de sección losa

Se presentan aquí 3 puentes de hormigón pretensado, de sección losa aligerada, con distintas características en lo que se refiere a:

1) Relación anchura/luz
2) Esviaje sobre pilas o estribos
3) Curvatura en planta

De esta manera, se pueden estudiar cuales son los requisitos que debe cumplir una modelización de estos puentes que refleje de manera precisa las frecuencias a flexión y torsión cuando el mecanismo de respuesta estructural es claramente bidimensional y no unidimensional.

2.3.a) Puente OF-56.1 sobre la Autopista A-7

Se trata de un puente de 4 vanos (11,5+2x17,05+11,05 m), con una anchura de plataforma de 6,5 m y 4 aligeramientos circulares de 45 cm de diámetro (Figura 4). El puente es completamente recto en planta y tiene 2 aparatos de apoyo de neopreno zunchado, tanto en pilas como en estribos. Debido a la poca anchura de la losa, que deriva en un comportamiento tipo viga, el puente se modelizó mediante un modelo dinámico de emparrillado plano con un único nervio longitudinal (modelo 1D, comportamiento tipo viga), el cual reflejará correctamente el comportamiento real del puente. Ello se hace así en la idea de comparar los resultados con los que se iban a obtener, posteriormente, mediante un modelo de emparrillado con varios nervios longitudinales (modelo 2D), y de esta manera, poder deducir algunas recomendaciones de cara a la modelización de

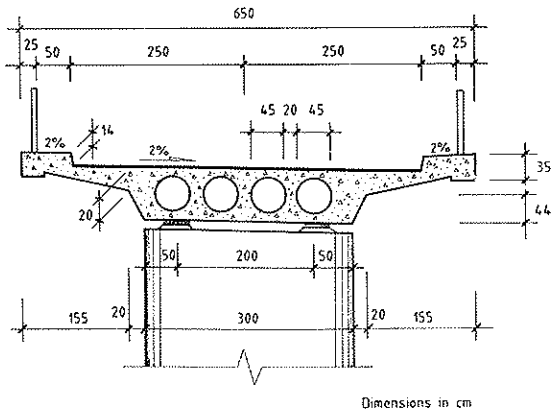


Figura. 4.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

losas más anchas o bien esviadas o curvas, que deben ser modelizadas obligatoriamente con un modelo de emparrillado 2D (más de un nervio longitudinal en la sección), debido a su marcada respuesta bidimensional. El modelo de emparrillado plano es ampliamente conocido y usado en el análisis estático de tableros de puente losa. Se trata, pues, de extender, de la manera más simple posible, el modelo estático, para que nos permita el cálculo de las frecuencias y modos de vibración. El problema que se plantea es cómo obtener las características inerciales (masa y momento de inercia) de los nervios longitudinales y transversales del emparrillado. Para intentar responder esta cuestión, se formularon los siguientes modelos dinámicos:

(1): Se trata del emparrillado 1D del puente completo que ya hemos comentado.

(2): Se trata de un emparrillado 2D de uno de los vanos principales, con 5 nervios longitudinales y 18 nervios transversales, que da lugar a un total de 90 nudos y 157 elementos.

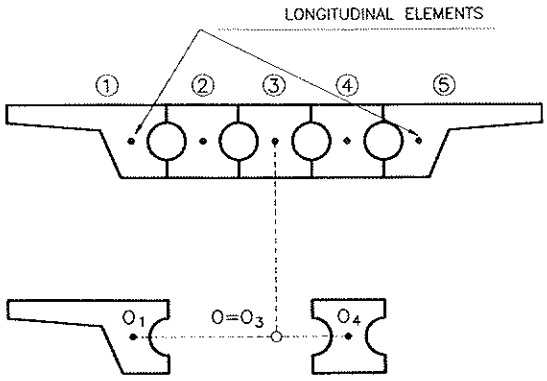
Se estudian, además, las siguientes posibilidades:

(2A) empotramiento perfecto a flexión en los apoyos
(2B) articulación a flexión en los apoyos

Para cada uno de los Casos A y B, se han tenido en cuenta 3 posibilidades:

a) Momento de Inercia polar (I_p) de los elementos longitudinales, calculado con respecto al centro de gravedad de la sección total.

b) I_p de los nervios longitudinales interiores, calculado respecto a su propio centro de gravedad; y de los elementos exteriores, con respecto al nervio de borde el emparrillado.



O = Centroid of overall cross section

O_i = Position of longitudinal beam element

$$I_p = I_0^1 + \sum_{i=2}^{n-1} I_{0_i}^i + I_0^n$$

Figura 5.

c) Igual que b) para los elementos interiores y respecto al centro de gravedad de la sección total para los externos (Figura 5).

La masa y momento de inercia de los nervios transversales se toman siempre iguales a cero.

(3): Se refiere a la aplicación del método de Rayleigh para evaluar la primera frecuencia a torsión, utilizando un emparrillado 2D estático y un conjunto de cargas exteriores en los nodos externos del emparrillado, de manera que produzcan una deformada estática parecida al modo de vibración en torsión.

Tabla 4

Puente OF-56.1

f (Hz)	Teórica									Exp.
	(1)	(2A)			(2B)			(3)	(4)	
		a	b	c	a	b	c			
f_1 (Flexión)	6,04	11,29	11,29	11,29	4,98	4,98	4,98			6,09
f_2 (Flexión)	8,66	31,04	31,04	31,04	19,9	19,9	19,9			8,22
f_3 (Flexión)	13,5									13,4
f_4 (Tor. vano largo)	13,9	14,03	22,25	14,18	11,8	20,1	11,9	27,7	13,84	12,6
f_5 (Flexión)	14,4									
f_6 (Tor. vano corto)	20,5								20,55	
f_7 (Tor. vano largo)	28,2	29,3	48,1	29,55	25,1	44,3	25,3			
f_8 (Flexión Trans.)		39,31			39,2					

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

A efectos de comparación, también se ha utilizado la frecuencia a torsión mediante la ecuación deducida para una viga con extremos empotrados a torsión y masa y rigidez a flexión y a torsión uniformemente distribuidas a lo largo de la directriz (**Modelo (4)**):

$$f_T = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{GJ}{I_p}} \qquad (1)$$

con G = módulo de deformación transversal, J = = Inercia a torsión, L = luz (asumiendo empotramiento perfecto a torsión sobre pilas y estribos).

Los resultados de las distintas modelizaciones y su comparación con los valores experimentales, puede verse en la tabla 4. A la vista de la misma, podemos concluir:

1) El modelo 1 da muy buenos resultados para las frecuencias a flexión.

2) En el caso de esta losa tan estrecha, el modelo 1 da también buenos resultados para los modos de torsión; pero no tan buenos como los de flexión.

3) En el modelo 2, las frecuencias a flexión se encuentran entre las del caso 2A (extremos empotrados) y 2B (extremos articulados).

4) El mejor resultado para la frecuencia a torsión corresponde a la adopción del momento de inercia polar por unidad de longitud de los elementos longitudinales, utilizando el criterio c).

5) El método de Rayleigh, que como hemos visto da resultados muy ajustados en flexión, proporciona muy malos resultados para la frecuencia de torsión, con un modelo de emparrillado 2D.

6) A pesar de las variaciones de masa y rigidez a lo largo del puente (por la supresión de los aligeramientos en las zonas de apoyo), la expresión teórica (1) (modelo 4), da resultados muy parecidos a los del modelo 1 para la frecuencia a torsión.

2.3.b) Puente OF-49.1 sobre la Autopista A-7

Puente losa de 4 vanos, de luces 12,053 + 2 x x 17,649 + 12,627 metros, anchura de plataforma de 10,5 metros y aligeramientos circulares de 50 cm de diámetro (Figura 6). El puente se encuentra en una curva de radio 200 metros y presenta un esviaje importante (α = 67,3256^g) tanto en pilas como en estribos 3 aparatos de apoyo de neopreno zunchado están colocados sobre los correspondientes fustes circulares.

En este caso, se utilizaron 2 modelos:

1) Emparrillado de todo el puente, con un único nervio longitudinal, que da lugar a un total de 59 nudos y 58 elementos. Se toman 12 elementos por vano para tener en cuenta la zona no aligerada.

2) Emparrillado del vano más largo, con 9 nervios longitudinales y 23 transversales, dando lugar a 207 nudos y 382 elementos. La asignación de masas y momentos de inercia a los distintos nervios se ha efectuado de acuerdo con las conclusiones obtenidas en la losa anterior. También se han tenido en cuenta los casos de empotramiento perfecto y articulación perfecta en los extremos.

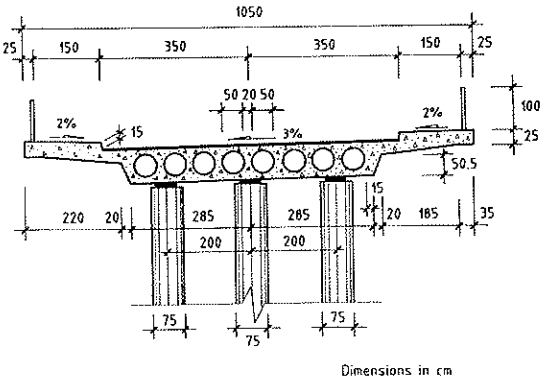


Figura 6.

La tabla 5 muestra los resultados teóricos y experimentales. Tal como puede verse, incluso en esta losa tan ancha, curva y esviada, el emparrillado 1D da aceptables resultados, tanto para las frecuencias de flexión como de torsión. La frecuencia a torsión deducida con el modelo 2 es también aceptable.

Tabla 5

Puente OF-49.1

f (Hz)	Teórica			Exp.
	(1)	(2A)	(2B)	
f_1 (Flexión)	5,91	10,31	4,97	5,86
f_2 (Flexión)	6,39			6,10
f_3 (Torsión)	7,47	9,57	8,21	7,6
f_4 (Flexión)	8,66			8,39
f_5 (Torsión)	9,60			9,25
f_6 (Flex. Trans.)		14,13	14,04	
f_7 (Flexión)	17,0		16,68	
f_8 (Flex. Trans.)	17,3	17,50		

2.3.c) Puente OF-50.2 sobre la Autopista A-7

Puente losa de hormigón pretensado, de 4 vanos (17,014 + 21,328 + 26,555 + 21,328 m) y

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

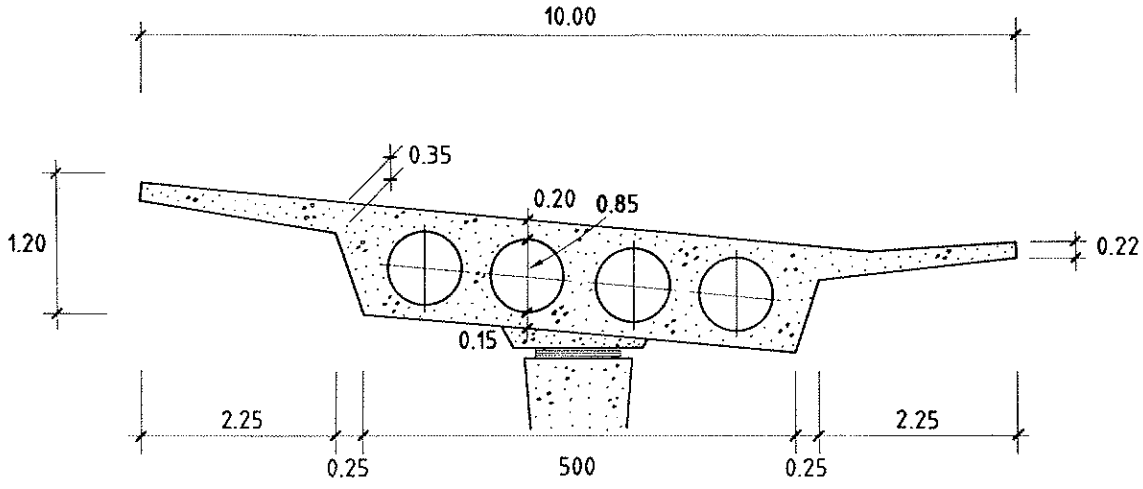


Figura 7.

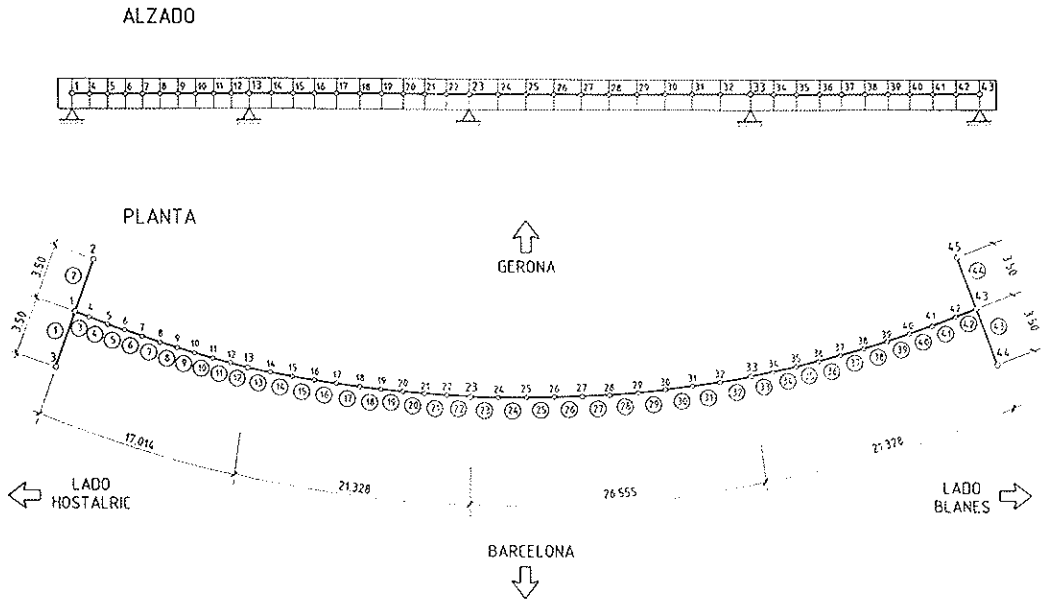


Figura 8.

anchura de plataforma de 10 m. La sección transversal presenta 4 aligeramientos circulares, de 85 cm de diámetro. El puente se encuentra sobre una curva de 120 m de radio y estaba apoyado por una doble pareja de aparatos de apoyo en los estribos, siendo el apoyo único sobre las pilas (Figura 7). De esta manera, la losa no se encuentra empotrada a torsión más que en los estribos.

Al igual que el denominado modelo 1 para los puentes losa anteriores, el modelo utilizado en este caso fue el de un emparrillado con un único nervio longitudinal, con elementos transversales en los estribos, de unión con los aparatos de apoyo, dando lugar a un total de 45 nudos y 44 elementos (Figura 8). En la tabla 6 se encuentran las frecuencias teóricas y experimentales obtenidas.

Tabla 6

Puente OF. 50.2

f (Hz)	Teórica	Exper.
f_1 (Torsión)	2,57	2,61
f_2 (Flexión)	3,98	3,98
f_3 (Torsión)	5,00	4,52
f_4 (Flexión)	5,96	6,09
f_5 (Flexión)	7,11	7,00
f_6 (Torsión)	7,49	—
f_7 (Flexión)	9,75	9,56

2.4. Puentes atirantados

Se presentan aquí los resultados obtenidos para

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

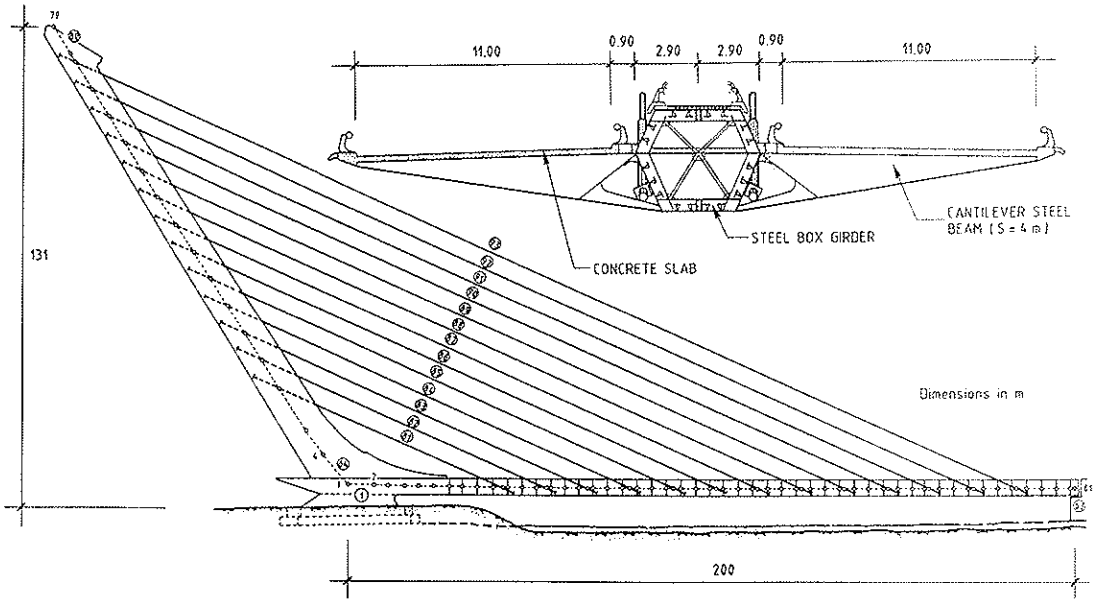


Figura 9.

el puente del Alamillo (figura 9). El modelo dinámico del puente se ha formulado teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

1) Comportamiento unidimensional, tanto del tablero como del pilono, con elementos tipo viga y teniendo en cuenta el posible comportamiento no lineal geométrico.

2) La geometría del puente se discretiza en un plano, con un único plano de tirantes; pero con desplazamiento permitido según las 3 direcciones.

3) Se coloca un nodo donde hay masas o inercias concentradas, por ejemplo, allí donde hay un rigidizador en el tablero.

4) Utilización de un número suficiente de elementos para tener en cuenta la geometría variable tanto del tablero como del pilono. El modelo tiene un total de 81 nodos y 63 elementos en el tablero, 17 en la torre y 13 en los tirantes (93 elementos en total).

5) Modulo de deformación de los tirantes, de acuerdo con la teoría de Ernst [2].

En la tabla 7 se encuentran las frecuencias teóricas y experimentales. La buena correlación entre ellas confirma la validez del modelo utilizado. También se evaluaron las frecuencias en el modelo, en la hipótesis de no considerar la no linealidad geométrica, siendo la variación prácticamente inapreciable. La frecuencia del primer modo a flexión se ha evaluado también con el método de Rayleigh, colocando una carga puntual en el tablero de manera que produzca una deformada parecida al modo de vibración. El resultado fue $f_n = 0{,}33\ Hz$, muy cercano al real. A partir de la ecuación (1) para la frecuencia de torsión, se obtuvo un valor $f_T = 1{,}03\ Hz$, no muy alejado del

Tabla 7

Puente del Alamillo

f (Hz)	Teórica	Exper.
f_1 (Trans. torre 1)	0,292	0,30
f_2 (Long. torre+tabl. 1)	0,373	0,40
f_3 (Long. torre+tabl. 2)	0,610	0,66
f_4 (Trans. tablero 1)	1,088	–
f_5 (Long. torre+tabl. 3)	1,191	1,205
f_6 (Torsión tabl. 1)	1,235	1,155
f_7 (Trans. torre 2)	1,583	1,537
f_8 (Long. torre+tabl. 4)	2,196	2,155
f_9 (Torsión tabl. 2)	2,298	2,295
f_{10} (Long. torre+tabl. 5)	2,312	2,78
f_{11} (Trans. tablero 2)	3,244	–

valor experimental, a pesar de las importantes variaciones de geometría, rigidez y masa a lo largo de la directriz. Esto se debe, en parte, a que no existe acoplamiento a torsión entre torre y tablero a través de los cables.

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En la comunicación se presentan una serie de modelos, muy simples, para el cálculo de los parámetros dinámicos de puentes con distintas tipologías. En este sentido, el modelo de emparrillado, ampliamente utilizado en el cálculo estático, puede utilizarse en el cálculo dinámico de puentes de muy variada tipología, con muy poco esfuerzo de cálculo adicional. Las siguientes reco-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

mendaciones deben ser tenidas en cuenta cuando se utilizan estos modelos:

1) Cuando el puente tiene un claro comportamiento tipo viga, un modelo de emparrillado, con un único nervio longitudinal que contenga las características de la sección total, proporciona muy buenos resultados. Debe tenerse en cuenta:

a) Colocar un nodo de la discretización allí donde existan masas o inercias concentradas.

b) Disponer suficientes elementos para modelizar correctamente las variaciones de geometría, masa o rigidez a lo largo del puente. Aunque el puente no presente variaciones importantes, es conveniente disponer, al menos, 10 elementos por vano.

c) Aparte de los datos de que se dispone tras el análisis estático del puente, sólo hay que evaluar la masa y momento de inercia por unidad de longitud de los elementos.

2) Cuando la respuesta del puente es claramente tipo losa, hay que utilizar un modelo de emparrillado plano, con más de un nervio longitudinal. Las características mecánicas de los elementos, utilizadas en el análisis estático, nos sirven directamente. La masa del tablero debe colocarse únicamente en los nervios longitudinales. En lo referente al momento de inercia, debe calcularse con respecto a su propio centro de gravedad, para los nervios interiores; y con respecto al centro de gravedad de la sección total, para los nervios de borde.

3) El método de Rayleigh proporciona muy buenos resultados para la frecuencia de flexión; pero muy malos en torsión, cuando se utiliza un emparrillado estático con más de un nervio longitudinal. Ello se debe a que los nervios longitudinales absorben energía de deformación, debido al giro a torsión, lo cual no se corresponde con la deformación real del puente.

4) La expresión teórica (1) da muy buenos resultados cuando el tablero (o cada uno de los vanos) se encuentra empotrado a torsión, a pesar de que existan pequeñas variaciones de masa o rigidez a lo largo de la directriz del puente.

5) En puentes atirantados, puede prescindirse de la no linealidad geométrica en el modelo dinámico del puente completo. Por otro lado, el modelo de comportamiento tipo viga proporciona buenos resultados para puentes con rigidez torsional importante, a pesar de que las anchuras del tablero sean muy importantes, caso del puente que se ha estudiado aquí.

4. AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento a las empresas y/o Administraciones que han llevado a cabo las pruebas dinámicas experimentales que han permitido la obtención de los parámetros dinámicos experimentales que aparecen en la comunicación, en particular, a la Dirección General de Carreteras del M.O.P.T., V.O.S.A. (Villa Olímpica), A.C.E.S.A. (Autopistas Concesionaria del Estado) y Junta de Andalucía.

5. REFERENCIAS

1. CLOUGH, R. W. and PENZIEN, J. *Dynamics of structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.

2. WHALTER, R. *Ponts haubanés*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

RESUMEN

La gran variedad de tipologías tanto longitudinales como transversales utilizadas en la construcción de puentes, hace que se desarrollen, a su vez, distintos mecanismos de respuesta frente a las acciones de tipo dinámico. De aquí que una cuestión fundamental sea la elección del modelo teórico de comportamiento, para un puente en particular, de entre todos los que se encuentran en la actualidad a nuestra disposición, desde los más simples a los más sofisticados.

En el artículo se presentan los trabajos llevados a cabo en relación a las pruebas dinámicas realizadas en distintos puentes y con distintas tipologías (puentes continuos de sección en cajón pretensados, puentes losa pretensados rectos o esviados, de pequeña y gran relación anchura/luz, puentes atirantados, etc...), de cara a verificar la precisión y adecuación de los distintos modelos teóricos empleados para simular su comportamiento.

A partir del modelo teórico previo, se definen los puntos más idóneos de localización de la instrumentación y se lleva a cabo la prueba de carga dinámica, cuyos resultados permiten la obtención de las características dinámicas reales del puente (frecuencias y modos de vibración), y, a partir de ellas, verificar y mejorar el modelo teórico previo. Como resultado final, se dan algunas recomendaciones sobre el modelo dinámico más idóneo y más simple que se debe utilizar para cada tipología de puente, teniendo en cuenta la correlación obtenida entre los resultados teóricos y experimentales de las distintas pruebas efectuadas.

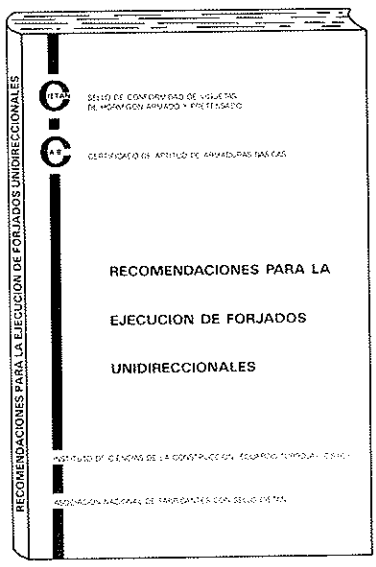
Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

SUMMARY

Because of the highly different bridge types and designs used in bridge engineering which derive on largely different dynamic mechanisms of response, one of the most important problems to solve concerning their theoretical dynamic modelling is to choose the most adequate FEM model for a particular bridge. The paper deals with the work carried out related with dynamic testing of several bridges in order to check the feasibility and accuracy of different finite element analytical models assumed for the dynamic behaviour of different bridge types: continuous prestressed concrete box girder bridges, continuous prestressed slab bridges with small and large width sections, cable-stayed bridges, etc.

The experimental data coming from the tests is used to derive the real dynamic properties of the bridge (natural frequencies and mode shapes). The most appropiate and simple analytical models and dynamic properties of the elements to be used in the FEM mesh are derived for each bridge type based on correlation between theoretical and experimental results. Taking into account these results a set of practical recommendations for the dynamic modelling of different bridges is derived.

* * *



Los interesados en esta publicación deberán dirigirse a:

Secretaría Sello CIETAN
Instituto de Ciencias de la Construcción
"EDUARDO TORROJA"
C/Serrano Galvache, s/n.
28033 MADRID
Tel.: (91) 302 04 40

RECOMENDACIONES PARA LA EJECUCION DE FORJADOS UNIDIRECCIONALES
(EDICION REVISADA)

La Asociación Nacional de Fabricantes con Sello CIETAN, en colaboración con el INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION "EDUARDO TORROJA", continuando con la labor divulgadora iniciada con la edición del libro "RECOMENDACIONES PARA LA EJECUCION DE FORJADOS UNIDIRECCIONALES", publica una segunda edición del mismo, revisada, adecuándola a la Normativa vigente.

El libro persigue un doble objetivo: El primero, informar y dar a conocer a los técnicos y constructores que intervienen en la realización de un forjado, las distintas soluciones constructivas idóneas de acuerdo con la vigente Normativa, según sean los diversos tipos de forjados y apoyos, desde un punto de vista eminentemente práctico, intentando paliar la escasez en España de bibliografía que lo aborde. El segundo es dar a conocer, a todos los sectores implicados en la ejecución de forjados, la existencia de productos con Sello CIETAN.

La obra ofrece un amplio y detallado compendio de soluciones constructivas, desarrolladas de forma gráfica para su mejor y más fácil interpretación. En su redacción han participado todos los sectores implicados: técnicos, fabricantes y organismos públicos y privados ligados a la construcción.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Caracterización mecánica de un hormigón de alta resistencia

Antonio Aguado, Ravindra Gettu, Marcel O. F. Oliveira
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Barcelona
José Manuel López Sáiz
Fomento de Construcciones y Contratas, S.A.

1. INTRODUCCION

Con motivo de la celebración de los Juegos Olímpicos en Barcelona, en 1992, el Ayuntamiento de la ciudad decidió favorecer, mediante escaleras mecánicas, el acceso peatonal desde la Plaza España hasta el Anillo Olímpico de Montjüic. Dentro de este conjunto, la conexión entre la plataforma que rodea a la Fuente Mágica y la Avenida de la Reina María Cristina fue resuelta mediante dos pasarelas de hormigón pretensado, con hormigón de alta resistencia (H-800), con una sección transversal en T invertida, proyecto de J. Rui-Wamba, B. Galí y J. Benavent.

Sobre las mismas ya se han presentado distintos trabajos orientados a explicar diferentes aspectos, tales como: consideraciones generales sobre el proyecto y construcción [Rui-Wamba et al. (1992)], temas más específicos de proyecto y construcción relativos al comportamiento estructural [Rui-Wamba et al. (1993), Bellod et al. (1993)], comportamiento térmico [Mirambell et al. (1993)] y control de calidad de la obra [Vizcaino et al. (1993)].

Con posterioridad a la construcción de las pasarelas, si bien con el mismo tipo de hormigón, se ha hecho una amplia campaña experimental en aras a caracterizar mecánica y físicamente distintas propiedades del hormigón resultante. Dicha campaña se ha realizado dentro del marco de un convenio firmado entre la U.P.C. y Fomento de Construcciones y Contratas, S.A. (F.C.C.S.A.) (CTT-1660).

El objeto de este artículo es presentar algunos de los resultados obtenidos, analizando su comportamiento en relación a los resultados correspondientes a hormigones similares existentes en la literatura técnica.

2. DOSIFICACION Y FABRICACION

Hoy en día, con frecuencia se utiliza, de forma sintética, el término hormigón alta resistencia (H.A.R.) para englobar un hormigón con altas prestaciones (H.A.P.), ya que la alta resistencia comporta, en general, valores elevados de otras prestaciones (p. ej.: compacidad, etc.). También, en general, se cumpliría la relación inversa, esto es un H.A.P. conduce usualmente a un H.A.R.

Las prestaciones requeridas para estos hormigones son básicamente las mismas que para un hormigón convencional, si bien, los valores de las mismas deben ser más elevados. Asimismo, estas prestaciones deben alcanzar a las etapas, tanto del hormigón fresco como del hormigón endurecido. Ahora bien, a la hora de materializar estos hormigones (igual que en un hormigón convencional) hay que tener muy presente las circunstancias específicas, ya que las mismas pueden incidir de forma significativa tanto en la dosificación como en la fabricación.

En el caso concreto del H.A.R. de las estructuras citadas, hay que señalar como circunstancias específicas:

–Instalaciones estándar, con grado medio de automatización.

–Urgencia en la toma de decisiones respecto al H.A.R. La dosificación se adoptó en menos de 15 días, tras tres pruebas directas en central de hormigonado (no laboratorio).

–Obra pionera a nivel nacional (no experiencias previas en obras).

Todo ello llevó a la dosificación utilizada [Rui-Wamba et al. (1992), Vizcaino et al. (1993)] en la que el conjunto de conglomerante es alto (550 kg de cemento I-55 A y 110 kg de microsílice por metro cúbico). Hay que destacar que, con otras circunstancias específicas, sería posible obtener hormigones de similares prestaciones con cantidades algo menores de conglomerante [Oliveira, 1992), Jai (1993), Alaejos (1993)].

Una ampliación de los datos de dosificación y fabricación de los H.A.R. empleados puede verse en: Rui-Wamba et al. (1992), Rui-Wamba et al. (1993) y Vizcaino et al. (1993).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 1

Relaciones entre los valores de la resistencia a compresión (en kp/cm²) a distintas edades, en probetas cúbicas y en probetas cilíndricas

Edad (Días)	Cúbicas		Cilíndricas		$R_{cilín}/R_{cúb}$
	R_c	R_c/R_{c28}	R_c	R_c/R_{c28}	
1	527	0,55	382	0,48	0,724
3	695	0,72	536	0,67	0,771
7	851	0,88	672	0,84	0,789
14	890	0,93	788	0,98	0,885
28	959	1,00	804	1,00	0,838
60	972	1,01	858	1,07	0,882
90	1.067	1,11	860	1,07	0,813
135	1.067	1,11	810	1,01	0,805
180	925	0,96	854	1,06	0,923

3. RESISTENCIA A COMPRESION

3.1. Resultados generales

La resistencia a compresión se ha determinado sobre *probetas cilíndricas,* siguiendo los criterios establecidos por las normas UNE 83.303 y 83.304, y sobre *probetas cúbicas* de 10 cm de arista. El objeto de este proceder era obtener una correlación entre ambos tipos de probetas para establecer algún criterio posterior, relativo a las probetas que se deben utilizar en control estandar.

Este estudio se ha realizado para distintas edades, presentándose los resultados en la tabla 1. En ella, cada valor representa el valor medio de los resultados obtenidos en tres probetas, siendo la dispersión, en todos los casos, pequeña (inferior al 5%).

En esta tabla puede observarse que la variación de la relación $R_{cilín}/R_{cúb}$ es importante, situándose entre 0,724 y 0,923 (Columna 6 de la tabla 1). Si se considera una distribución normal en los valores de estas relaciones, hipótesis usual en estos casos, se obtendrían los siguientes valores del valor medio y de la desviación estandar.

$$(R_{cilíndrica}/R_{cúbica})_{medio} = 0{,}825 \qquad \sigma_n = 0{,}059 \qquad (1)$$

El valor medio y el valor de la dispersión obtenidos están próximos a los valores presentados en la normativa española vigente tanto de hormigón armado (EH-91) como de hormigón pretensado (EP-93). En ellas se acepta que la relación entre la resistencia en probetas cilíndricas de 15 cm x 30 cm y cúbicas de 10 cm de arista se situa entre los límites 0,7 a 0,9, tomando como valor medio 0,8, valor éste próximo al 0,825 aquí obtenido.

Los valores de estas relaciones correspondientes a cada edad, no muestran tendencias claras en ningún sentido si bien, el valor medio podría cuestionarse para las edades de 1 y 3 días. Para las edades de 135 días y 180 días, la dispersión de los resultados obtenidos no obedecen tanto a la posible influencia de la edad sino a dispersiones propias de la técnica experimental.

Atendiendo a la hipótesis anterior, se pueden sacar de la muestra los valores correspondientes a las edades de 1 y 3 días, obteniéndose en este caso, para el resto de valores, la media y desviación siguientes:

$$(R_{cilín}/R_{cúb})_{medio} = 0{,}848 \qquad \sigma_n = 0{,}046 \qquad (2)$$

El valor medio es algo superior al anteriormente definido y está más próximo al obtenido en los resultados de las probetas de control de la obra de las pasarelas de Montjüic [Aguado et al. (1994)]. Asimismo, puede verse que la desviación estándar disminuye en relación a la obtenida con anterioridad.

3.2. Influencia de la edad

Los ensayos de compresión simple se han realizado a distintas edades: 1, 3, 7, 14, 28, 60, 90, 135 y 180 días. La citada tabla 1 también presenta los resultados obtenidos para estas edades, tanto en probetas cilíndricas como cúbicas. Asimismo, se incluye la relación entre el valor de la resistencia a compresión a cualquier edad con relación al valor correspondiente a 28 días (R_{ci}/R_{c28}), lo cual se presenta, de forma gráfica, en la figura 1.

En la citada tabla 1, se puede observar que la relación entre la resistencia a compresión a 7 días y la relativa a 28 días es de 0,88 en probeta cúbica y de 0,84 en probeta cilíndrica. Estos valores son superiores a todos los presentados por Cañadas (1989), en los que se analiza la influencia de distintos factores en la citada relación, si bien en hormigones convencionales (no alta resistencia). Asimismo, los valores obtenidos de la citada relación, para edades inferiores a 28 días, del H.A.R. son

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

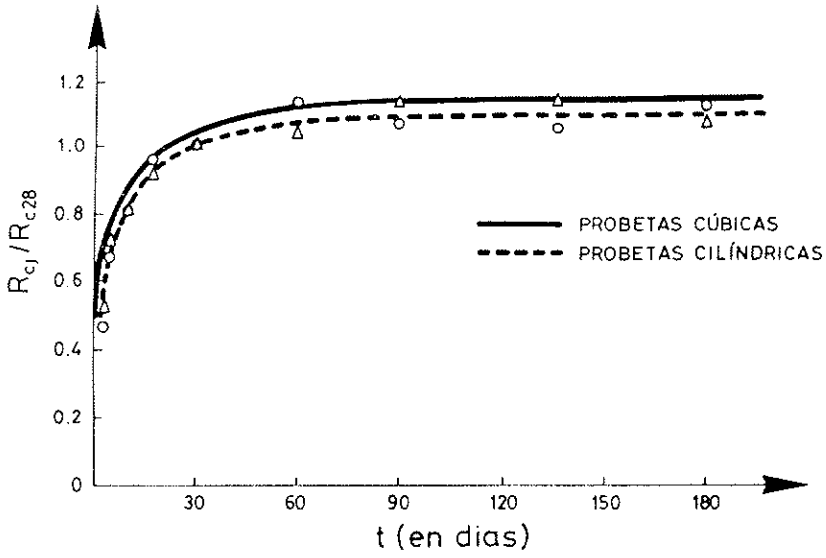


Fig. 1. Influencia de la edad en la relación R_c/R_{c28} en probetas cúbicas y cilíndricas.

claramente superiores que los correspondientes a la EH-91; mientras que para edades superiores sucede lo contrario.

Planteando una regresión logarítmica a los valores de R_t/R_{t28} con la edad (t. en días) se obtiene:

–H.A.R. Probetas cúbicas:

$$y = 0{,}60 + 0{,}110\ ln\ t \quad r = 0{,}97 \qquad (3)$$

–H.A.R. Probetas cilíndricas:

$$y = 0{,}58 + 0{,}106\ ln\ t \quad r = 0{,}93 \qquad (4)$$

–Hormigón convencional. EH-91:

$$y = 0{,}47 + 0{,}138\ ln\ t \quad r = 0{,}96 \qquad (5)$$

En estas regresiones se ha despreciado el valor correspondiente a 180 días para las probetas cúbicas ya que entendemos que dicho valor puede responder a unas condiciones del ensayo diferentes al resto de la serie (sistema de registro y carga).

Las dos regresiones obtenidas para el hormigón de alta resistencia (H.A.R.) son muy próximas, lo que indica que la evolución de la resistencia con la edad es independiente del tipo de probeta (dentro de los tipos utilizados), lo cual en gran medida es lógico. Asimismo, puede observarse que las regresiones correspondientes al H.A.R. difieren de la obtenida para un hormigón convencional de acuerdo con la EH-91; en consecuencia, esta diferencia debe ser tenida en cuenta; pudiendo estar motivada, principalmente, por las diferencias del conglomerante utilizado (cementos estándar frente a cemento I-55-A más microsílice).

4. RESISTENCIA A TRACCION

4.1. Influencia del tipo de probeta

La resistencia a tracción se ha determinado sobre *probetas cilíndricas*, mediante el ensayo de tracción indirecta UNE 83.306, y sobre *probetas cúbicas* de 10 cm de arista, de acuerdo con dicha norma, aplicando la carga en un eje paralelo al lado, situado en la mitad de una cara. En ellas, la resistencia a tracción se obtiene, respectivamente, por las expresiones:

$$\text{Probeta cilíndrica: } f_{ck} = 0{,}85\,\frac{2P}{\pi \Phi l} \qquad (6)$$

$$\text{Probeta cúbica: } f_{ck} = 0{,}85\,\frac{2P}{\pi a^2} \qquad (7)$$

Los resultados obtenidos para las distintas edades, se presentan en la tabla 2. Los números que aparecen en la misma, representan el valor medio de tres probetas. Cabe señalar que la dispersión entre los resultados de las respectivas tres probetas ha sido, en todos los casos, pequeña (< 5%).

Puede observarse que los valores absolutos de la resistencia a tracción son superiores a los correspondientes a un hormigón convencional. Sin embargo, los porcentajes respecto a la resistencia a compresión son inferiores a los obtenidos para hormigones convencionales. Así, los porcentajes aquí obtenidos como media de las diferentes edades son:

–Probetas cúbicas: $R_t = 6{,}48\%\ R_c$ (8)

–Probetas cilíndricas: $R_t = 6{,}29\%\ R_c$ (9)

Estos valores encajan en el comportamiento general que para estos hormigones refleja el Código Modelo CEB-FIP (1990), en el que la resistencia a tracción se situa entre el 5% y el 10% de la resistencia a compresión.

Dentro de la secuencia de edades, puede observarse que para edades tempranas, donde la resistencia a compresión es algo más baja, el porcenta-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 2

Resistencia a tracción (en kp/cm²) y porcentaje que ésta representa respecto a R_c, para distintas edades, tanto en probetas cúbicas como en probetas cilíndricas

Edad (días)	Cúbicas			Cilíndricas			R_{cilin}/R_{cub}
	R_t	% R_c	R_t/R_{t28}	R_t	% R_c	R_t/R_{t28}	
1	–	–	–	33,0	8,6	0,71	–
3	47,3	6,8	0,78	37,5	7,0	0,81	0,79
7	61,0	7,1	1,00	48,0	7,1	1,03	0,79
14	55,0	6,4	0,90	48,1	6,1	1,03	0,87
28	60,8	6,3	1,00	46,4	5,8	1,00	0,76
60	62,2	6,4	1,02	45,0	5,2	0,96	0,72
90	65,8	6,1	1,08	46,9	5,4	1,01	0,71
135	64,0	6,0	1,05	45,0	5,5	0,96	0,70
180	63,3	6,8	1,04	50,9	5,9	1,09	0,80

je que representa la resistencia a tracción es superior al valor medio señalado. Este comportamiento está en línea con lo expresado anteriormente para un hormigón convencional.

4.2. Influencia de la edad

Los ensayos de tracción indirecta (método brasileño), se han realizado a distintas edades, tanto en probetas cilíndricas como en probetas cúbicas conservadas en la cámara húmeda. Las edades elegidas fueron: 1, 3, 7, 14, 28, 60, 90, 135 y 180 días. Los resultados correspondientes se presentan en la citada Tabla 2. Asimismo, se incluye la relación entre el valor de la resistencia a tracción a cualquier edad y el valor correspondiente a 28 días.

Como puede observarse en dicha tabla, los resultados son dispersos, sin mostrar una tendencia. Esta mayor dispersión es usual en ensayos de resistencia a tracción. En cualquier caso, de forma análoga al tratamiento dado a la resistencia a compresión, se ha ajustado una regresión logarítmica a los valores de R/R_{t28} con la edad (t en días) obteniéndose:

–Probetas cúbicas:

$$y = 0{,}79 + 0{,}054\ ln\ t \quad r = 0{,}842 \qquad (10)$$

–Probetas cilíndricas:

$$y = 0{,}80 + 0{,}051\ ln\ t \quad r = 0{,}760 \qquad (11)$$

A pesar del bajo coeficiente de correlación obtenido, puede verse que ambas regresiones son similares, de lo que puede concluirse que la evolución de la resistencia con la edad es independiente del tipo de probeta (dentro de los tipos utilizados), lo cual es lógico. Extrapolando estas regresiones para la edad de 365 días (1 año), se obtendrían los valores de la resistencia a tracción siguientes:

–Probeta cúbica (1 año):

$$R_t = 67{,}81\ kp/cm^2 \qquad (12)$$

–Probeta cilíndrica (1 año):

$$R_t = 50{,}76\ kp/cm^2 \qquad (13)$$

los cuales representarían, respectivamente, el 5,51% y el 4,21% de la resistencia a compresión para la edad de 365 días. Ello está en línea con lo expuesto con anterioridad sobre los bajos porcentajes de la resistencia a tracción, en relación a la de compresión, para hormigones de alta resistencia.

5. MODULO DE DEFORMACION LONGITUDINAL

5.1. Influencia del nivel de carga

Para la determinación del módulo de deformación longitudinal, en cada probeta, se han hecho tres ciclos de carga-descarga, hasta el 30% de la carga de rotura, para seguidamente, realizar un cuarto ciclo hasta un porcentaje del 70% de dicha carga. A cada nivel de carga, en los distintos ciclos, se han medido las deformaciones unitarias correspondientes al tercio central de las probetas. Previamente, y en probetas de la misma amasada, se había obtenido, mediante un único ciclo de carga, la carga de rotura utilizada de referencia.

En la tabla 3 se presentan los módulos de deformación secantes (en Kp/cm²) para los distintos niveles de carga, en cada una de las edades estudiadas: 3, 7, 14, 28, 60, 90, 135 y 180 días. Asimismo, en esa tabla se dan los valores medios de los módulos secantes, a distintos niveles. Así, cuando en la tabla se señala número de niveles igual a cuatro (4), quiere expresarse el valor medio de los módulos de deformación secante obtenidos para los niveles de carga de 10%, 20%, 30% y 40%. Una primera observación muestra que el módulo de deformación secante se mantiene con variaciones no muy significativas, aún para niveles elevados de carga.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 3

Módulo de deformación secante (en kp/cm²) para diferentes edades y a distintos niveles de carga. Valor medio resultante con diferentes niveles

Edad (en días)	Nivel de carga (%)	Módulo secante	Valor medio	
			Nº niveles	E_c
3	10	357.296	3	364.527
	20	366.548	4	363.725
	30	369.739	5	362.891
	40	361.319	6	359.735
	50	359.556		
	60	343.955		
	70	326.494		
7	10	381.516	3	398.344
	20	417.907	4	397.663
	30	395.611	5	396.370
	40	395.620	6	393.427
	50	391.198		
	60	378.717		
	70	367.372		
14	10	424.415	3	439.747
	20	444.854	4	441.023
	30	449.972	5	440.842
	40	444.854	6	439.768
	50	440.116		
	60	434.395		
	70	425.071		
28	10	435.333	3	436.341
	20	436.758	4	434.702
	30	436.935	5	432.886
	40	429.786	6	430.422
	50	425.618		
	60	418.102		
	70	413.350		
60	10	472.398	3	466.213
	20	462.868	4	463.606
	30	463.373	5	461.385
	40	455.785	6	459.181
	50	452.505		
	60	448.165		
	70	449.153		
90	10	485.875	3	468.144
	20	458.666	4	464.043
	30	459.893	5	460.864
	40	451.739	6	458.287
	50	448.150		
	60	445.403		
	70	441.510		
135	10	425.510	3	441.512
	20	447.126	4	443.756
	30	451.901	5	444.077
	40	450.490	6	443.222
	50	445.362		
	60	438.947		
	70	432.781		
180	10	511.385	3	495.413
	20	490.693	4	486.587
	30	484.163	5	479.964
	40	460.108	6	474.763
	50	453.472		
	60	448.757		
	70	446.789		

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 4

Porcentajes de diferencias entre distintos módulos de deformación secantes

	Edad (en días)							
	3	**7**	**14**	**28**	**60**	**90**	**135**	**180**
$\frac{E_{c30} - E_{c40}}{E_{c30}}$	2,2	0,0	1,1	1,6	1,6	1,7	0,3	4,9
$\frac{E_{c40} - E_{c50}}{E_{c40}}$	0,5	1,1	1,1	0,9	0,7	0,8	1,1	1,4
$\frac{E_{c50} - E_{c60}}{E_{c50}}$	4,3	3,2	1,3	1,7	1,0	0,6	1,4	1,0
$\frac{E_{c30} - E_{c50}}{E_{c30}}$	2,7	1,1	2,2	2,5	2,3	2,5	1,4	6,3
$\frac{E_{c30} - E_{c60}}{E_{c30}}$	6,9	4,3	3,5	4,3	3,3	3,1	2,8	7,3

Por otro lado, la tabla 4 muestra los porcentajes de las diferencias entre distintos módulos de deformación secante, tomando como referencia el correspondiente al 30% de la carga de rotura. Como puede verse en la citada tabla 4, la diferencia entre los módulos correspondientes, para los niveles de carga del 30% al 50%, se situa por debajo del 2,7% en todas las edades (excepto el correspondiente a la edad de 180 días). Mientras que esa diferencia, para los niveles del 30% al 60%, se situa por encima del 2,8% en todas las edades.

En consecuencia, cabría reflejar que entre el escalón de carga del 50% al 60%, se podría producir una mayor microfisuración y en consecuencia una disminución del módulo de deformación secante. Esta disminución se situa por encima del 1% en todos los casos (excepto para la edad de 90 días). El umbral de daño citado para H.A.R., se detecta asimismo mediante otras técnicas experimentales, como señala Oliveira (1992).

Por otro lado, en la citada tabla 4 puede verse que los valores medios de los módulos de deformación secante, tomando 3, 4, 5 o 6 niveles de carga, no presentan grandes variaciones en función del número de niveles sino que estas variaciones son pequeñas. En consecuencia, este no parece un buen parámetro para definir el módulo de deformación secante representativo.

Dado que no existe normativa española al respecto, cabe plantearse la pregunta: **¿Cuál de los valores del módulo secante se toma como valor representativo?**

A la luz de los resultados expuestos y para un hormigón de alta resistencia como el que nos ocupa, se propone tomar el correspondiente a un nivel de cargas del 40%, en línea con lo expuesto por la norma ANSI/ASTM C-469.

5.2. Influencia de la edad

Para el nivel de carga considerado como representativo (40% de la carga última), en la tabla 5 se definen los correspondientes módulos para las distintas edades, expresados en kp/cm². Asimismo, se definen los valores de las relaciones del módulo secante correspondiente a cualquier edad, en relación al obtenido a los 28 días. En la fig. 2 se presenta, de forma gráfica, la citada evolución del módulo de deformación secante.

TABLA 5

Influencia de la edad en el módulo de deformación secante

Edad (en días)	E_c **(en kp/cm²)**	E_{cl}/E_{c28}	R_c **(en kp/cm²)**
3	361.319	0,841	695
7	395.620	0,921	851
14	444.854	1,035	890
28	429.786	1,000	959
60	455.785	1,060	972
90	451.739	1,051	1.067
135	450.490	1,048	1.067
180	460.108	1,071	925

En esta tabla puede verse la rápida evolución de los módulos de deformación a tempranas edades. Así, a 3 y 7 días se obtienen, respectivamente, valores relativos del 84,1% y del 92,1% del valor correspondiente a 28 días. Esta evolución es superior a la correspondiente de la resistencia a compresión.

Para edades superiores, la variación es pequeña. En este comportamiento parece reflejarse la

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

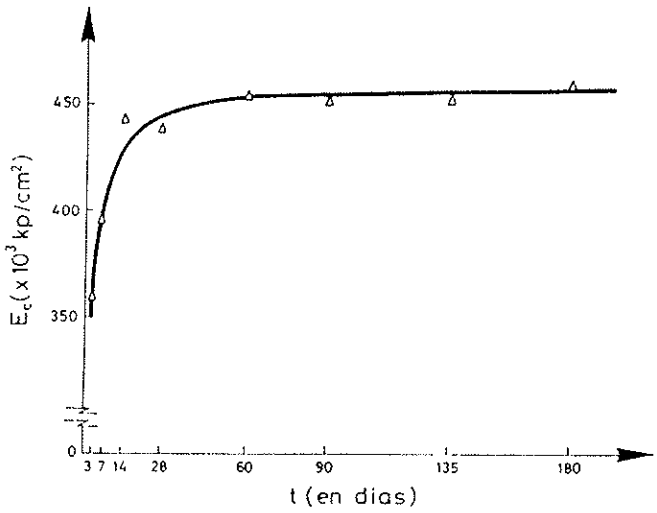


Fig. 2. Variación del módulo de deformación secante, con la edad.

gran incidencia que tiene la baja relación agua/cemento, con escasa presencia de agua libre.

Considerando distintas correlaciones para ver la evolución de la relación E_{ct}/E_{c28} en el tiempo, se obtienen resultados similares con correlación logarítmica y potencial:

–Correlación logarítmica:

$$E_{ct}/E_{c28} = 0{,}834 + 0{,}0483\ ln\ t \quad r = 0{,}893 \qquad (14)$$

–Correlación potencial:

$$E_{ct}/E_{c28} = 0{,}838\ t^{0{,}050} \quad r = 0{,}888 \qquad (15)$$

Extrapolando para t = 365 días (1 año), se obtendría un módulo de deformación secante de 480.915 kp/cm² y 483.738 kp/cm², respectivamente, según se tome la correlación logarítmica o la potencial.

Si se correlacionasen los módulos de deformación con la resistencia a compresión, tal como es usual en distintas normativas, se obtendría:

–Presente trabajo (r = 0,91):

$$E_c = 11.200\ f_{cm}^{0{,}53}\ (f_{cm} \text{ en kp/cm}^2) \qquad (16)$$

–Código Modelo CEB-FIP:

$$E_c = 10.000\ (f_{ck} + 8)^{1/3}\ (f_{ck} \text{ en MPa}) \qquad (17)$$

–EH-91 (MOPT, 1991):

$$E_c = 19.000\ f_{ck}^{0{,}5}\ (f_{ck} \text{ en kp/cm}^2) \qquad (18)$$

Estas fórmulas, evaluadas para el rango de resistencias que se expresan en este trabajo, darían lugar a los valores expuestos en la tabla 6. En ella se dán, para la formulación del CEB-FIP (1990), dos valores del módulo diferentes, que responden a un módulo tangente y a un módulo secante. Para hacerlo comparable con la expresión del presente trabajo, se ha tomado $f_{ck} = f_{cm}$ (1 –

TABLA 6

Resultados del módulo de deformación, en función de la resistencia a compresión (E_c en GPa)

Propuesta	Resistencia a compresión, fck, en kp/cm²				
	600	700	800	900	1000
CEB-FIP tangente	41,0	42,5	44,5	46,1	47,6
CEB-FIP secante	34,5	36,5	38,0	39,2	40,4
EH-91 cargas rápidas	46,5	50,3	53,7	57,0	60,1
Presente trabajo	34,6	37,5	40,3	42,9	45,3

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 7

Valores del coeficiente de Poisson para distintos niveles de carga y diferentes edades

Nivel de carga	Coeficiente de Poisson a diferentes edades							
	3	7	14	28	60	90	135	180
10	0,22	0,24	0,23	0,22	0,25	0,19	0,20	0,29
20	0,22	0,24	0,24	0,20	0,22	0,20	0,21	0,24
30	0,22	0,23	0,24	0,20	0,21	0,21	0,21	0,22
40	0,22	0,24	0,24	0,20	0,21	0,21	0,21	0,20
50	0,24	0,24	0,24	0,20	0,21	0,21	0,21	0,20
60	0,24	0,24	0,24	0,20	0,21	0,21	0,21	0,20
70	0,24	0,25	0,25	0,20	0,21	0,21	0,21	0,20

$- 1{,}64\ \delta$), considerando $\delta = 0{,}043$, es decir, $f_{ck} = 0{,}929\, f_{cm}$ y $E_c = 11650\, f_{ck}^{0{,}53}$

A la luz de los resultados de esta tabla, puede verse que la extrapolación de la formulación de la EH-91 para H.A.R. parece inadecuada ya que sobreestima, de forma significativa, el valor del módulo de deformación. En esta misma dirección se manifiestan los trabajos de Alaejos (1993) y González Isabel (1993).

Los módulos de deformación obtenidos en este trabajo, se situan entre los propuestos como módulo secante y módulo tangente por el Código Modelo CEB-FIP (1990). Hay que tener presente que el Código Modelo sugiere multiplicar por un factor α_E el valor del módulo de deformación, para tener presente el tipo de árido empleado.

6. COEFICIENTE DE POISSON

En la tabla 7 se presentan los valores del coeficiente de Poisson obtenidos para los diferentes escalones de carga, a las distintas edades estudiadas: 3, 7, 14, 28, 60, 90, 120, 135 y 180 días. Cada uno de los valores dados en esta tabla son media de los valores obtenidos en dos probetas.

En ella puede verse que la variación, para el rango de niveles de carga estudiado, es muy pequeña e independiente de la edad. Esto es, el coeficiente de Poisson se mantiene prácticamente constante hasta el rango del 70% de la carga máxima prevista. Este resultado está en línea con el obtenido para el módulo de deformación longitudinal. En cualquier caso, este comportamiento difiere del correspondiente a un hormigón convencional, ya que para estos niveles de carga (70%) el valor del coeficiente de Poisson podría haber aumentado hasta un 50%, como orden de magnitud.

Por otro lado, se observa que el valor del coeficiente de Poisson es independiente de la edad, como era de esperar, de forma análoga a lo que ocurre para un hormigón convencional.

Para la determinación del coeficiente se toma la muestra representada por los valores correspondientes a los escalones de carga del 30% y del 40%. La elección de estos dos niveles de carga obedece al afán de eliminar las dispersiones que se pueden producir en el primer escalón de carga, o bien en escalones elevados de carga. Considerando que los resultados se ajustan a una distribución normal, se obtiene el valor medio y desviación estandar siguientes:

$$\nu_{medio} = 0{,}217 \qquad \sigma_n = 0{,}013 \qquad (19)$$

El valor medio obtenido está en línea con lo recogido por la literatura técnica sobre los hormigones de alta resistencia.

7. RESISTENCIA A FATIGA EN COMPRESION CENTRADA

Para analizar el comportamiento a fatiga en los ensayos, el valor adoptado para la razón ($R = \sigma_{mín}/\sigma_{máx}$) ha sido igual a 0,05 ($R = 0{,}05$), con una frecuencia de 5 Hz. La edad de referencia ha sido 90 días, tomando como referencia de la resistencia a compresión en un ciclo noval de carga, el valor de 1.060 kp/cm² (en probeta cúbica). El número de probetas empleadas ha sido distinto, en función del porcentaje de carga, tal como puede verse en la tabla 8 en la que se presentan, para cada una de las probetas, el número de ciclos obtenidos hasta la rotura. En la Fig. 3 se presentan, en escala semilogarítmica, los resultados obtenidos. Asimismo, en dicha figura se presentan los resultados correspondientes a otro H.A.R. [Oliveira (1992)], con el fin de tener una referencia de comparación.

Ajustando correlaciones logarítmicas a los resultados de ambos trabajos se obtienen las siguientes correlaciones, con un coeficiente de correlación, en ambos casos, de 0,98.

Oliveira (1992):

$$\frac{1}{S} = 0{,}00936 + 0{,}0016 \log N \quad r = 0{,}98 \qquad (20)$$

Presente trabajo:

$$\frac{1}{S} = 0{,}00788 + 0{,}0017 \log N \quad r = 098 \qquad (21)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 8

Número de ciclos hasta rotura, para distintos porcentajes de la carga máxima

% Carga máxima	Tensiones (en Kp/cm²)		Nº de ciclos hasta rotura		
	f_{min}	f_{max}	Prob. nº 1	Prob. nº 2	Prob. nº 3
50	26,5	530	1.761.892	–	–
60	31,8	636	321.670	381.417	–
70	37,1	742	3.752	7.697	4.798
80	42,4	848	397	568	597
90	47,7	954	75	34	133

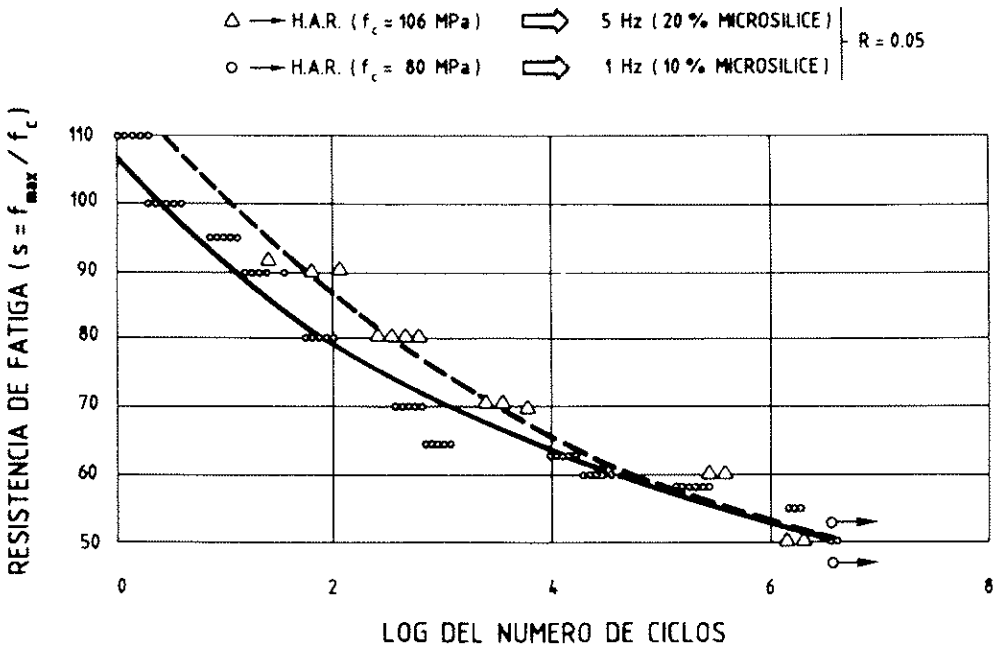


Fig. 3. Curvas de resistencia a fatiga frente a número de ciclos (en escala logarítmica) en dos H.A.R.

En base a los datos recogidos en el presente trabajo, la extrapolación a bajos ciclos de carga conduciría a valores elevados de la resistencia, por encima del 100% de la resistencia a compresión en un ciclo noval, que en parte se podría explicar por el sistema de aplicación de la carga. En cualquier caso, se estima no debe extrapolarse para bajos ciclos de carga. Una alternativa posible es ajustar una correlación logarítmica lineal del tipo

Presente trabajo:

$$S = 103{,}25 - 8{,}3 \log N \qquad (22)$$

con un coeficiente de correlación, asimismo, de 0,98. Esta correlación puede tener un mejor comportamiento para bajos ciclos de carga y conduce a valores muy similares a la anterior correlación, para un número elevado de ciclos.

Hay que llamar la atención que para 2.000.000 de ciclos (valor usual en proyecto), los resultados obtenidos por las dos correlaciones ajustadas a los datos del presente trabajo serían: $S_1 = 50{,}95$ y $S_2 = 53{,}40$.

Dado que estos son valores medios, el valor característico sería inferior. Una estimación cara al proyecto, del comportamiento de estos hormigones frente a fatiga en valores característicos sería, para dos millones de ciclos:

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

$$R = \frac{f_{mn}}{f_{max}} = 0{,}05 \quad S = 50\% \qquad (23)$$

$$R = \frac{f_{mn}}{f_{max}} = 1{,}00 \quad S = 85\% \qquad (24)$$

Valores intermedios de R podrían obtenerse mediante una interpolación lineal. Hay que hacer notar que el valor R = 1,00 responde al conocido fenómeno de cansancio en el hormigón y si bien no está del todo evaluado en H.A.R., los resultados que presenta Oliveira (1992) permiten apuntar a valores próximos de S = 85%.

8. PESO ESPECIFICO, ABSORCION Y DENSIDAD

En la tabla 9 se presentan los resultados obtenidos para cada una de las probetas. Los pesos medidos son:

G1: Peso en el aire de la muestra saturada (en gramos).

G2: Peso en el agua de la muestra saturada (en gramos).

G3: Peso en el aire de la muestra seca (en gramos).

Asimismo, en dicha tabla se incluye el peso específico aparente (γ_a), el peso específico del hormigón saturado con la superficie seca (γ_s) y el coeficiente de absorción K_a. Estos ensayos se han realizado en cuatro probetas cúbicas para cada una de las edades estudiadas (28 y 135 días).

En esta tabla puede observarse que el peso específico aparente es muy similar en todas las probetas, esto es, el peso específico aparente es independiente de la edad de la probeta. El valor medio de las 8 probetas es:

$$(\gamma_a)_{medio} = 2{,}367$$

Algo análogo se observa en los resultados del peso específico del hormigón saturado con la superficie seca (γ_s), es decir, éste es independiente de la edad del hormigón. El valor medio de las 8 probetas es:

$$(\gamma_s)_{medio} = 2{,}41$$

Por contra, el coeficiente de absorción (k_a) depende de la edad, obteniéndose los siguientes valores medios:

28 días: $(k_a)_{medio} = 2{,}25$

135 días: $(k_a)_{medio} = 1{,}63$

Este comportamiento puede ser fruto de una hidratación lenta del conglomerante (cemento y microsílice). Así, en tempranas edades, el hormigón absorbe más agua, que va hidratando al conglomerante, reduciendo las cantidades de éste sin hidratar. Con posterioridad, el hormigón requiere menos agua ya que queda menos conglomerante sin hidratar.

Siguiendo la norma UNE 83-312-90, la densidad de la muestra saturada, expresada en kilogramos por metro cúbico, se obtendría directamente de G1, mientras que la densidad de la muestra seca en estufa se obtendría directamente de G3, obteniéndose los siguientes valores medios:

$$(\rho_{sat})_{medio} = 2.449 \text{ kg/m}^3$$

$$(\rho_{seca})_{medio} = 2.446 \text{ kg/m}^3$$

9. PERMEABILIDAD

La determinación de la permeabilidad, tal como se ha dicho, ha sido realizada en el permeámetro existente en el laboratorio de Materiales de Construcción del Departamento de Ingeniería de la Construcción de la UPC. En la tabla 10 se observa que en las muestras ensayadas con las presiones que se indican, la humedad no atraviesa las probetas en las 96 horas de ensayo con presiones diferentes (variables crecientes), superiores a los valores estándar usualmente utilizados.

TABLA 9

Peso de las probetas en distintas circunstancias. Valor del peso específico aparente (γ_a), peso específico saturado con superficie seca (γ_s) y coeficiente de absorción (k_a)

Edad	G1	G2	G3	γ_a	γ_s	K_a
28	2.520	1.480	2.460	2,36	2,42	2,44
	2.490	1.460	2.430	2,36	2,42	2,47
	2.480	1.450	2.430	2,36	2,41	2,06
	2.490	1.460	2.440	2,37	2,42	2,05
135	2.460	1.440	2.420	2,37	2,41	1,65
	2.470	1.440	2.430	2,36	2,40	1,65
	2.520	1.480	2.480	2,38	2,42	1,61
	2.520	1.480	2.480	2,38	2,42	1,61

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

TABLA 10

Resultados de permeabilidad en tres probetas diferentes

Referencia	Tiempo (en horas)	Presión (en kp/cm²)	Caudal
CC-2	24	10	Impermeable
	24	20	Impermeable
	24	30	Impermeable
	24	40	Impermeable
CC-4	24	10	Impermeable
	24	20	Impermeable
	24	30	Impermeable
	24	40	Impermeable
CC-5	24	10	Impermeable
	24	20	Impermeable
	24	30	Impermeable
	24	40	Impermeable

Asimismo, en la Fig. 4 se presenta una foto de la sección transversal de las probetas utilizadas en el ensayo de permeabilidad. Se observa la huella de hasta donde ha penetrado el agua.

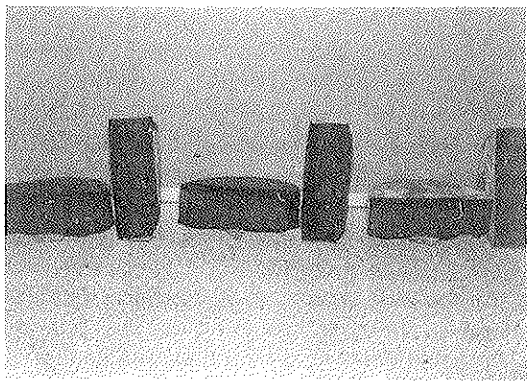


Fig. 4. Huella del agua en las probetas, después del ensayo de permeabilidad.

10. CONCLUSIONES

De los trabajos presentados en este artículo se deducen las siguientes conclusiones principales:

– Unas determinadas prestaciones, desde el punto de vista mecánico, correspondientes a un H.A.R. pueden obtenerse de distintas formas, combinando los componentes (dosificación) y proceso de construcción. Las circunstancias específicas de cada obra serán determinantes en la solución adoptada.

– La solución adoptada en el caso de las pasarelas de Montjüic (H-800), ha permitido alcanzar, de forma satisfactoria, los requisitos pedidos en proyecto tanto para el hormigón fresco como para el hormigón endurecido.

– Las dispersiones de la resistencia a compresión, determinada en probeta cúbica (10 x 10 x 10 en cm), han sido pequeñas. Este tipo de probetas sin refrentar (se giran lados) puede ser interesante cara a ensayos de control en obras de H.A.R.

– La resistencia a tracción disminuye porcentualmente respecto a la resistencia a compresión, a medida que aumenta ésta.

– El módulo de deformación longitudinal del H.A.R. aumenta a medida que aumenta la resistencia, si bien, no tanto como reflejaría una extrapolación de la formulación dada por la EH-91. Un ajuste mejor se obtiene con la propuesta por el Código Modelo CEB-FIP.

– El hormigón estudiado mantiene un comportamiento prácticamente lineal hasta el 50% de la carga de rotura, notándose a partir de este valor cierta desviación de dicho comportamiento.

– La resistencia a fatiga en ensayo a compresión centrada, muestra que para relaciones $R = (f_{min}/f_{max}) = 0{,}05$ se obtendría, tras dos millones de ciclos, una resistencia del 50% de la correspondiente a un ensayo estándar de un ciclo.

– Otras propiedades físicas de estos hormigones muestran una gran compacidad de los mismos, con una muy baja permeabilidad ante elevadas presiones de agua, unos elevados pesos específicos y un bajo coeficiente de absorción, el cual disminuye con el tiempo.

AGRADECIMIENTOS

Si bien este artículo es fruto del trabajo específico recogido en el convenio CTT-U.P.C. C-1660 entre FCCSA y U.P.C., hay que agradecer a los técnicos de otras organizaciones (IMPU, FIRA

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

DE BARCELONA, ESTEYCO, ARIDS FORMIGONS y otros) su inestimable colaboración para hacer posible una obra pionera como son las pasarelas cuyo hormigón se ha presentado en este documento. Dicha obra la hicieron posible, por parte de FCCSA, la profesionalidad de D. Javier Vizcaino, D. Félix Catalán y D. Eusebio Castillo, a quien asimismo queremos agradecer su activa participación tanto en la construcción como en la caracterización.

BIBLIOGRAFIA

AGUADO, A, OLIVEIRA, M.O.F., MIRAMBELL, E. y CALMON, J.L. (1994). *"Una experiencia en hormigón de alta resistencia. Enseñanzas de la misma"*. Informe interno convenios CTT nº 1530 y 1652 firmados entre U.P.C. y FCCSA y ESTEYCO, respectivamente. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Barcelona, U.P.C.

ALAEJOS, P. (1993). *"Contribución al estudio del comportamiento mecánico de los hormigones de alta resistencia"*. Tesis doctoral. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, U.P.M.

BELLOD, J.L., RUI-WAMBA, J., AGUADO, A. y OLIVEIRA, M.O.F. (1993). *"Utilización de hormigón de alta resistencia. Pasarelas peatonales de Montjüic"*. XIV Asamblea Técnica Nacional de la Asociación Técnica Española del Pretensado. Málaga. Noviembre 8-12.

CAÑADAS, J.E. (1989). *"Factores que influyen en la prognósis de la resistencia a compresión del hormigón"*. Tesis doctoral E.T.S. Arquitectura de Barcelona. U.P.C.

CEB-FIP. (1990). *Model Code 1990*. Aprobado 1990, última versión 1993. Bulletin d'information Nº 213/214. C.E.B. Mayo (1993).

GONZALEZ ISABEL, G. (1993). *"Hormigón de alta resistencia"*. Ed. INTEMAC. Madrid.

JAI, J. (1993). *"Estudio de las propiedades mecánicas de hormigones de alta resistencia, curados en diversas condiciones de humedad y temperatura"*. Tesis doctoral. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid. U.P.M.

MIRAMBELL, E., GAMA, J.L.C.N. and AGUADO, A. (1993). *"Heat of hydration on High Strength Concrete. Case Study"*. Proceedings Third International Symposium on Utilization of High-Strength Concrete. June 20-24. Lillehammer (Norway). NB, SINTEF, WSF, FIP, CEB, ACI. pp. 554-565.

OLIVEIRA, M.O.F. (1992). *"Fatiga y microfisuración en hormigones de alta resistencia. Consideraciones de diseño"*. Tesis doctoral E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. U.P.C.

RUI-WAMBA, J., AGUADO, A. y OLIVEIRA, M.O.F. (1992). Proyecto y construcción de unas pasarelas de hormigón de alta resistencia (H-800). Rev. Cemento-Hormigón nº 708. Agosto. Número especial IECA. *"El hormigón de altas resistencias y sus aplicaciones"*. pp. 1022-1040.

RUI-WAMBA, J., AGUADO, A., OLIVEIRA, M.O.F. and BELLOD, J.L. (1993). *"A non-standard structure on high-strength concrete"*. Proceedings Third International Symposium on Utilization of High-Strength Concrete. June 20-24. Lillehammer (Norway). NB, SINTEF, WSF, FIP, CEB, ACI. pp. 437-448.

VIZCAINO, J. CATALA, F., AGUADO, A. y OLIVEIRA, M.O.F. (1993). *"Control de Calidad en una obra de Hormigón de Alta Resistencia"*. Symposium Nacional sobre Control de Calidad de Materiales de Hormigón Armado. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid 4-7 Mayo.

RESUMEN

En la construcción de unas pasarelas en Montjüic (Barcelona) como acceso al Anillo Olímpico, se empleó un hormigón de alta resistencia, que los requisitos de proyecto cifraban en un valor de f_{ck}= = 800 kp/cm² (H-800). El hormigón se fabricaba en central de hormigonado estándar, empleando microsílice.

Con posterioridad a la realización de la obra, en condiciones de laboratorio si bien empleando la misma dosificación, se ha hecho una amplia campaña de ensayos con el fin de caracterizar el hormigón empleado, desde distintos puntos de vista (mecánicos, físicos, químicos).

El objeto del presente artículo es presentar algunos de los resultados obtenidos, comparando los mismos con los correspondientes a otros hormigones y otras formulaciones.

SUMMARY

A high strength concrete (f_{ck} = 800 kp/cm²) was used in pedestrian bridges constructed recently in Montjüic (Barcelona). This concrete was fabricated in a conventional mixing plant using microsilica. Concretes identical to that used in the field have been subjected to several laboratory tests (mechanical, physical and chemical). The present article summarizes some of the results obtained and compares these with results from other concretes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

685-3-2

El módulo de elasticidad del Hormigón de Alta Resistencia

Mª Pilar Alaejos Gutiérrez
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
División de Tecnología de Hormigones
Laboratorio Central de Estr. y Mat. (CEDEX)

Manuel Fernández Cánovas
Dr. Ingeniero de Construcción
Catedrático de Materiales
E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos (U.P.M.)

1. INTRODUCCION

Conocer con precisión el módulo de deformación del hormigón es muy importante para predecir la deformabilidad de las estructuras. La normativa actual, en gran parte, relaciona esta propiedad del material con su resistencia a compresión, encontrándose distintas formulaciones en la normativa internacional.

El módulo de deformación del hormigón, para una edad determinada, depende del módulo de la pasta de cemento, del de los áridos con los que ha sido fabricado y de las proporciones relativas de los componentes. Existen diversas formulaciones matemáticas que calculan el módulo de deformación del hormigón en función de estos parámetros.

Sin embargo, el módulo de deformación de la pasta de cemento depende fundamentalmente de la porosidad de ésta, que a su vez es una función directa de la relación agua/cemento utilizada. Es conocida la dependencia existente entre la resistencia y la relación agua/cemento. Por tanto, una formulación adecuada que relacione el módulo del hormigón con su resistencia a compresión, contemplará las posibles variaciones que pueden producirse en la pasta de cemento.

Las proporciones relativas entre pasta y árido es otro parámetro que influirá en el módulo del hormigón. Aunque se pueden encontrar valores extremos de hormigones con un 65% de áridos (contenidos muy altos de cemento y agua) y un 80% de áridos (contenidos muy bajos de cemento y agua), en la tecnología del hormigón convencional esta proporción oscila entre unos valores normales del 70 al 75%. En este margen estrecho de variación es previsible que no existan unas variaciones importantes en el módulo del hormigón fabricado con distintas proporciones de áridos.

En cuanto al módulo de deformación de los áridos con los que ha sido fabricado el hormigón, el tema resulta complejo. La experiencia demuestra que se pueden conseguir hormigones de la misma resistencia y módulos de elasticidad muy diferentes, tan sólo cambiando el árido utilizado en el hormigón.

Cada familia de rocas tiene unas propiedades mecánicas relacionadas con el origen y formación de la roca. Pero incluso dentro de las mismas familias, las propiedades mecánicas pueden variar sustancialmente, en función de la porosidad de la roca, su densidad, etc. Estas variaciones se reflejarán en el hormigón fabricado con árido procedente de distintas rocas.

La cuestión aun se complica más si en el hormigón se han introducido distintos tipos de árido, lo cual es muy habitual si se utilizan arenas rodadas y gravas de machaqueo. El presente estudio se ha reducido al estudio de la influencia del árido grueso en el módulo de deformación del hormigón. Se ha utilizado en todos los casos arena rodada, ya que ésta es de uso obligado en la tecnología del hormigón de alta resistencia.

Se considera que el campo de los hormigones de alta resistencia comienza en resistencias características, a los 28 días, de 50 MPa. La utilización de estos hormigones se va extendiendo día a día, por las ventajas importantes que reportan en determinadas aplicaciones (edificios altos y puentes). Una de las primeras dudas que suscita el cálculo de estructuras con estos hormigones es la idoneidad de los procedimientos tradicionales de cálculo. Con este estudio se ha pretendido conocer la validez de la fórmula tradicional que relaciona el módulo de deformación del hormigón y su resistencia a compresión, especialmente la propuesta en la EH-91, para hormigones de alta resistencia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Con este planteamiento inicial, el estudio se ha dividido en las siguientes fases: En primer lugar, se ha realizado un repaso a la Normativa Internacional, revisando las distintas propuestas del Módulo de Elasticidad, distinguiendo entre Normativa que tiene en cuenta el tipo de árido y la que no lo tiene. Habida cuenta de la variación existente en cuanto a formulaciones propuestas, un primer objetivo fue realizar una campaña de ensayos para conocer qué formulación se adapta mejor a los resultados experimentales, en el rango de hormigón de baja y alta resistencia. En segundo lugar, el estudio se ha centrado en conocer la influencia real de utilizar distintos tipos de árido grueso en el módulo de deformación del hormigón, comparando los resultados con las propuestas encontradas en los Códigos que así lo contemplaban, y estableciendo en su caso las correcciones oportunas. También se ha aprovechado el estudio para conocer la influencia de la edad en el módulo del hormigón, y la necesidad real de introducir en la formulación algún parámetro que la tuviese en cuenta.

2. ESTUDIO DE LA NORMATIVA

2.1. Normativas que tienen en cuenta el tipo de árido

Entre estas encontramos la ecuación propuesta por el Código Modelo:

$$Ec = 0.85\ \alpha_E\ [\ \frac{(f_{ck} + \Delta f)}{f_{cmo}}\ ]^{1/3}$$

donde:

E_c = Módulo de elasticidad, a los 28 días (MPa)
f_{ck} = Resistencia característica, en probeta cilíndrica (MPa)
Δf = 8 MPa
α_E = 2,15 x 10^4 Mpa
f_{cmo} = 10 MPa

Esta ecuación se multiplica por un parámetro α_β que varía según el tipo de árido que se utilice, estableciéndose cuatro grupos: Basalto y calizas densas, áridos cuarcíticos, calizas normales y areniscas:

TIPO DE ÁRIDO	α_β
Basalto, calizas densas	1,2
Cuarcitas	1,0
Calizas	0,9
Areniscas	0,7

Hay que tener en cuenta, además, que el Código Modelo es válido para hormigones de hasta 80 MPa de resistencia característica, en probeta cilíndrica. Además, la relación resistencia-módulo se establece en función de la resistencia media del hormigón. Si sólo se dispone de la característica, una y otra se relacionan mediante la expresión: $f_{cm} = f_{ck} + 8$ (en MPa). La propuesta resulta más coherente, ya que las regresiones mejoran sensiblemente si se utiliza la resistencia media.

Asimismo, la BS 8110, Parte 2, de 1985, presenta la siguiente ecuación para el cálculo del módulo de Elasticidad:

$$E_{c,28} = K_o + 0.2\ f_{cu,28}$$

donde:

$E_{c,28}$ = Módulo de elasticidad, a los 28 días (GPa)
K_o = Constante relacionada con la rigidez de la roca, de valor medio 20GPa
$f_{cu,28}$ = Resistencia característica, en probeta cúbica (MPa)

K_o toma un valor medio de 20 kN/mm² para áridos normales, aunque oscila entre 14 y 26 kN/mm², según se indica en la norma.

En la Fig. 1 se muestra la comparación gráfica entre ambas normativas. Teniendo en cuenta que en uno y otro caso se utiliza probeta cilíndrica (C. Modelo) y cúbica (BS), se han unificado resultados pasando a probeta cilíndrica, mediante la tabla de conversión que aparece en el Código Modelo. Se observa que ambas normativas dan valores muy coincidentes, salvo para los áridos de menor módulo de deformación (areniscas) en el rango de valores altos de resistencia.

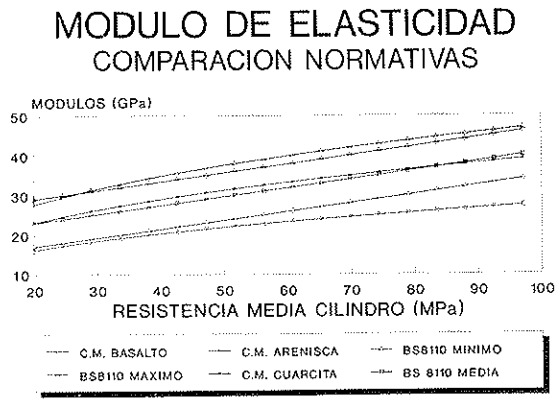


FIG.1

En ambas Normativas, no existe una relación expresa del parámetro con la rigidez del árido. En el caso del Código Modelo, se recogen en una tabla una serie de áridos que, aunque muy habituales en la tecnología del hormigón, no son todos. Existirán áridos en los que habrá que acudir a ensayos de Laboratorio. En el caso de

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

la BS siempre es necesario acudir a ensayos para determinar el valor del parámetro.

Utilizando datos de la Bibliografía, Baalbaki et al (1992) establecieron la relación entre el parámetro K_0 de la fórmula de la BS 8110 y el módulo de deformación del árido, con un buen coeficiente de correlación:

$$K_0 = 0.7075\ E_a^{2.838} \qquad r = 0.964$$

De la misma manera y utilizando también datos de la Bibliografía, se puede determinar la relación entre el parámetro α_β del Código Modelo y el módulo del árido. La expresión de mejor ajuste, con su correspondiente coeficiente de correlación es la siguiente:

$$\alpha_\beta = 0.1485\ \sqrt{E_a} \qquad r = 0.90$$

La representación gráfica de esta curva, junto con los datos utilizados para obtenerla, se muestran en la Fig. 2.

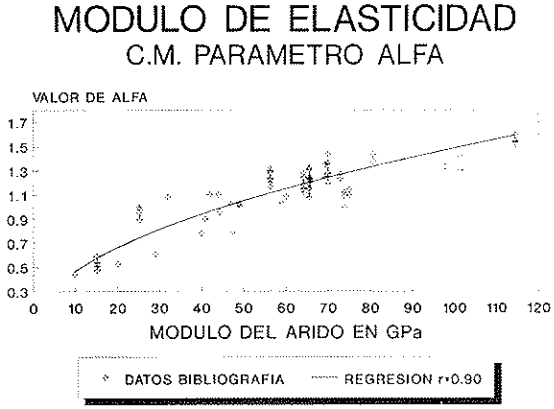


FIG.2

Por tanto, mediante esta expresión tenemos directamente relacionado el módulo del hormigón con el del árido con el que ha sido fabricado. Conociendo los valores entre los que varía el módulo de las rocas de donde proceden los áridos, conoceremos los valores entre los que oscila el módulo del hormigón.

Deere y Miller presentan una clasificación de rocas (tomada de Stagg y Zienkiewicz, 1970) de acuerdo a sus propiedades mecánicas (resistencia a compresión y módulo de deformación). Dentro de los tres grandes grupos de rocas ígneas, sedimentarias y metamórficas, determinan áreas dentro de las que se mueven las propiedades mecánicas para distintas familias. En la Fig. 3, se muestran, como ejemplo, las áreas correspondientes a familias de rocas ígneas. Como se observa, existen familias que presentan una gran homogeneidad en sus propiedades mecánicas, como es el caso de las Diabasas. Otras, sin embargo, presentan una gran heterogeneidad, como el caso del basalto y otras rocas volcánicas.

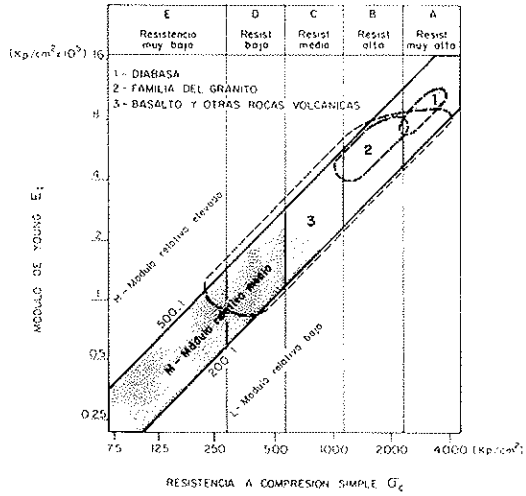


FIG. 3

Para cada una de las familias de rocas, se ha determinado el valor mínimo y máximo de módulo de deformación (siempre con resistencia de la roca por encima de 1.000 kp/cm², valor mínimo que se ha considerado para llegar a los hormigones de máxima resistencia), y mediante las expresiones antes mostradas se puede calcular el valor mínimo y máximo del hormigón fabricado con árido procedente de dicha familia. Estos límites teóricos calculados, han servido de referencia para comparar con las fórmulas propuestas y los resultados experimentales, algunos tomados de la bibliografía y otros obtenidos en el Laboratorio.

2.2. Normativas que no tienen en cuenta el tipo de árido

Entre estas Normas está la que aparece en la EH-91:

$$E_c = 6066\sqrt{f_{ck}}$$

Y la propuesta por el ACI 318:

$$E_c = 4730\sqrt{f'_c}$$

ambas expresadas en MPa.

En la Fig. 4 se comparan los resultados de ambas con los de la propuesta del Código Modelo. En las expresiones de EH-91 y ACI 318, se ha pasado de resistencia característica a resistencia media mediante la expresión siguiente, tomada del Código Modelo:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \qquad \text{(MPa)}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

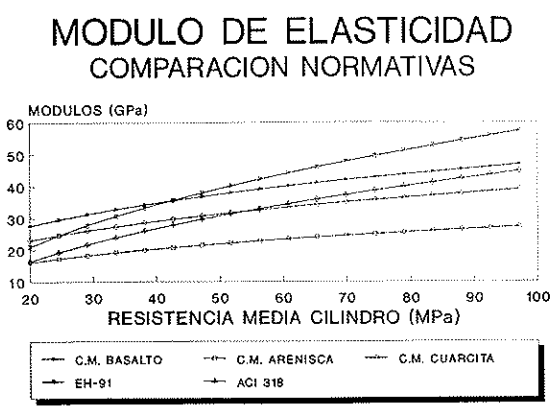


FIG.4

La fórmula que aparece en la EH-91, en comparación con el valor medio del Código Modelo, proporciona resultados muy elevados, tanto más cuanto mayor es la resistencia del hormigón. Los valores son muy altos incluso para los hormigones cercanos a 40 MPa, aún dentro del rango de baja resistencia. El ACI 318 se ajusta a los valores bajos del Código Modelo para hormigones de baja resistencia, acercándose a los valores más altos en los hormigones de alta resistencia.

3. FORMULACION DE MEJOR AJUSTE

Utilizando el mismo tipo de árido grueso (un granito procedente de Madrid), se realizó una campaña de ensayos que permitió la determinación de numerosos puntos (un total de 119 datos, cada uno media de tres probetas cilíndricas), dentro de la curva de regresión módulo-resistencia.

Las regresiones función de la raíz cuadrada, raíz cúbica y línea recta, proporcionaron las siguientes expresiones y coeficientes de regresión (en kp/cm²):

FORMULA TIPO EH-91:

$$E_c = 8715\sqrt{f_{cm}} + 107502 \qquad r = 0.937$$

FORMULA TIPO CODIGO MODELO:

$$E_c = 37858\sqrt[3]{f_{cm}} + 1294 \qquad r = 0.938$$

FORMULA TIPO BS 8110:

$$E_c = 213223 + 175\, f_{cm} \qquad r = 0.927$$

Se observa que los coeficientes de correlación, en los tres casos, son muy similares, por lo que en este sentido cualquiera de las tres pudiera resultar válida. Sin embargo, si se pretende simplificar, la expresión, haciéndola pasar por el origen, lo más correcto desde un punto de vista riguroso, sólo la fórmula en función de la raíz cúbica permite obtener una curva que pase por el origen sin que disminuya sensiblemente el coeficiente de correlación. En este caso las expresiones quedan de la siguiente forma (en kp/cm²):

FORMULA TIPO EH-91, PASANDO POR EL ORIGEN:

$$E_c = 12849\sqrt{f_{cm}} \qquad r = 0.867$$

FORMULA TIPO CODIGO MODELO, PASANDO POR EL ORIGEN:

$$E_c = 38170\sqrt[3]{f_{cm}} \qquad r = 0.938$$

En el caso de la línea recta tipo BS 8110, no es posible hacerla pasar por el origen, ya que la constante es el parámetro que refleja la rigidez del árido. Pero además, con los diferentes áridos utilizados en este plan de ensayos, la línea recta daba pendientes con valores diferentes. En concreto, la pendiente de la recta varió de 0,174 en el caso de un granito, a 0,213 en el caso de una sienita. La que aparece en la BS 8110 tiene un valor de 0,2, que parece ajustarse al valor medio del rango de oscilación que presenta con distintos áridos. Aparentemente, la regresión lineal no parece la más adecuada en principio, ya que la pendiente también es un parámetro que varía con el tipo de árido.

Por tanto y de los tres tipos de formulaciones propuestas, en función de la raíz cuadrada (EH-91), raíz cúbica (Código Modelo) y línea recta (BS 8110), la segunda es la que se perfila como más adecuada para representar la relación experimental entre la resistencia del hormigón y el módulo de elasticidad. La raíz cuadrada no permite utilizar una regresión pasando por el origen, con suficiente garantía, lo cual es importante ya que desde un punto de vista riguroso es lógico que la relación módulo de elasticidad-resistencia media del hormigón pase por el origen, aun cuando sea válida desde 125 kp/cm2 (como norma general, aunque puede variar según normativa) de resistencia característica. La línea recta presenta, además, el inconveniente de que su pendiente no permanece constante al variar el tipo de árido, aunque el valor que se le asigna en la BS 8110 pudiera tomarse como un valor medio. Ninguno de estos inconvenientes se han encontrado en la fórmula tipo del Código Modelo.

En la Fig. 5 se observan los resultados experimentales, junto con la regresión tipo Código Modelo pasando por el origen. También aparecen

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

en la figura los límites teóricos, inferior y superior, calculados mediante datos de Deere y Miller, como se ha descrito con anterioridad. Se observa el buen ajuste de los resultados experimentales a la curva obtenida.

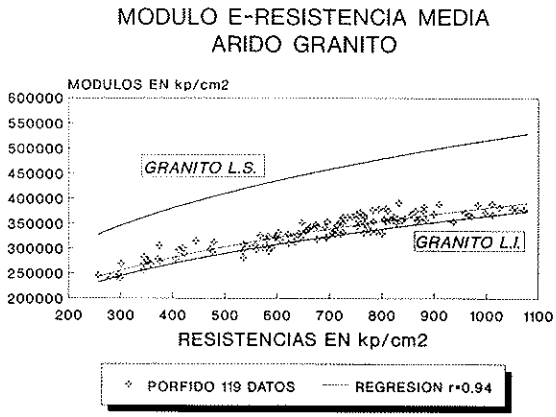


FIG.5

El buen ajuste que proporciona la formulación en función de la raíz cúbica de la resistencia pasando por el origen, se confirmó con los estudios de regresión realizados con los demás áridos ensayados, aunque el que se ha descrito resulta el más significativo, por el elevado número de ensayos realizados.

Por tanto, la curva tipo Código Modelo se convirtió en la de referencia para los estudios posteriores.

4. INFLUENCIA DEL TIPO DE ARIDO

Una vez determinada la expresión analítica que mejor se ajustaba a los resultados experimentales, se pasó a estudiar la influencia del tipo de árido grueso en el módulo de elasticidad del hormigón.

En primer lugar, se realizó una comprobación de los coeficientes propuestos por el Código Modelo para distintos áridos, y su ajuste a los resultados experimentales obtenidos al utilizar áridos españoles.

En la Fig. 6 se muestran los resultados obtenidos para ARIDO BASALTICO. Los experimentales en Laboratorio corresponden a dos basaltos diferentes. En la figura, se ha representado la propuesta del Código Modelo para este árido, que se ajusta perfectamente a los resultados obtenidos. También se han representado valores extraídos de diferentes referencias bibliográficas, en el rango de bajas resistencias, en el cual no se disponía de datos experimentales.

En la misma figura se han incluido resultados obtenidos de hormigón fabricado con árido ofítico. La ofita es una roca extrusiva de grano fino como lo es el basalto, pero con una composición

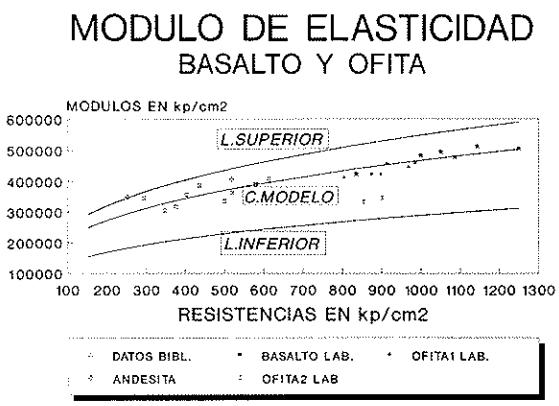


FIG.6

mineralógica diferente. Debido a que se trata de una roca de similares características a los basaltos, se decidió incluirla en este grupo. Se ensayaron dos ofitas, una de las cuales dio módulos sensiblemente inferiores a los obtenidos con el resto de los áridos de este grupo, aproximándose al límite inferior de posibilidades. Asimismo, en este grupo se han incluido otras rocas extrusivas de grano fino, como puede ser la andesita, de la que se muestran en la figura datos aportados por la Bibliografía. Se observa, por tanto, que este grupo resulta muy heterogéneo, pudiendo existir áridos que originan módulos cercanos al límite inferior y áridos que producen módulos en el límite superior del rango de posibilidades. Para asignar al parámetro alfa el valor 1,2 (propuesto por el Código Modelo) se debiera estar seguro de que se trata de un árido de calidad, poco poroso y resistente. En otro caso, se pueden producir importantes bajadas de módulo.

En la Fig. 7 se muestran los resultados experimentales obtenidos para el árido CALIZO. Esta caliza utilizada en los ensayos, presentó una baja densidad (2,50 kg/dm^3), una elevada porosidad en comparación con los otros áridos utilizados (absorción 2,44%) y un coeficiente de Los Angeles no muy bueno (de valor 26), comparativamente con los que se obtuvieron con los otros áridos ensayados. Los módulos del hormigón fabricado

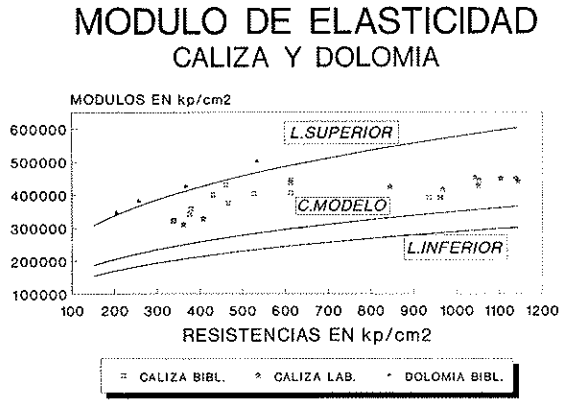


FIG.7

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

con ella se encuentran dentro del rango medio de posibilidades limitada por las curvas mínima y máxima. Asimismo, se muestran resultados obtenidos de la Bibliografía, con calizas que proporcionaron módulos más altos y más bajos de los obtenidos en el Laboratorio y dolomías que dieron hormigones con los valores máximos de módulo asignados a este tipo de rocas. La propuesta del Código Modelo resulta, en este caso, razonablemente conservadora.

En la Fig. 8 están dibujados los resultados correspondientes al árido CUARCITICO, cuyos datos proceden de una grava de río, ensayada en el Laboratorio. Tanto los datos obtenidos por nosotros como los procedentes de las referencias bibliográficas encontradas para este árido, presentan un buen ajuste a la curva correspondiente al límite inferior. El Código Modelo plantea una curva que resulta, en este caso, algo conservadora.

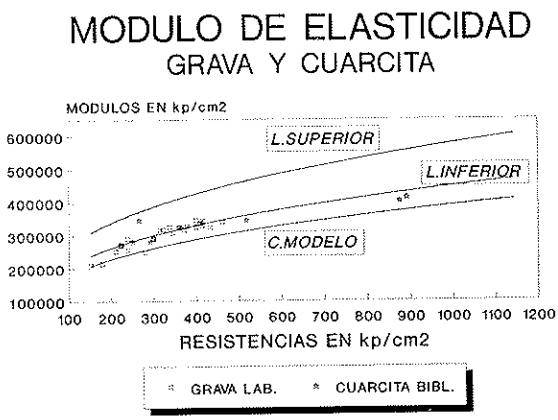


FIG.8

No fue posible fabricar hormigón con ARENISCA, ya que este árido no es fácil de encontrar y aun menos en explotación de cantera para hormigón. En la Fig. 9 se muestran las referencias bibliográficas localizadas al respecto. Se observa la existencia de áridos de arenisca que originan valores de módulos inferiores a los predichos por la formulación del Código Modelo, situándose en el límite inferior correspondiente a este árido. Especial atención merece la posibilidad de fabricar hormigón de alta resistencia con un árido de estas características, con módulos muy por debajo de los que cabría esperar para un hormigón de calidad. En la figura también se han representado datos de hormigones fabricados con otras rocas sedimentarias: grauwaka, que está catalogada por la ASTM C294 como una arenisca de grano fino, y da valores de módulo superiores, y una limonita, cuyos módulos encajan dentro de la franja de la arenisca, para los limitados datos de que se dispone. En cualquier caso, estos áridos no son muy habituales en la tecnología del hormigón.

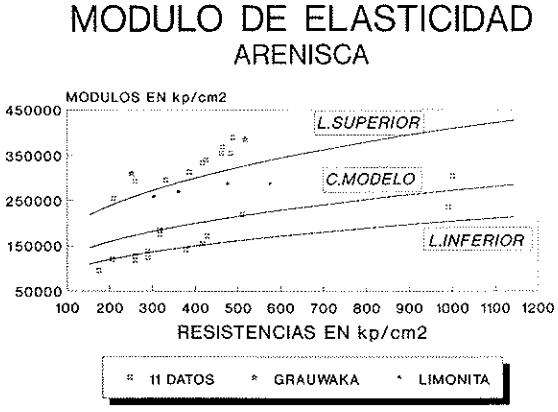


FIG.9

En cuanto a otros áridos no contemplados por el Código Modelo, se ensayaron dos GRANITOS cuyos resultados se muestran en la Fig. 10. En la misma figura se muestran los límites inferior y superior que se pueden presentar en hormigón fabricado con granito. Para claridad de la figura, uno de los granitos ensayados se ha representado por su regresión (el que se utilizó para determinar la curva de mejor ajuste). Asimismo, se representan en la figura datos extraídos de distintas referencias bibliográficas, y los valores obtenidos en los ensayos del Laboratorio con el árido de sienita, ya que ésta es como el granito, una roca intrusiva de grano medio o grueso, por lo que se la incluye en el mismo grupo. La regresión obtenida con uno de los granitos se encuentra muy ajustada al límite inferior, por lo que, a nuestro modo de ver, el valor que se debiera dar al parámetro alfa para este árido debiera ser próximo al obtenido con este granito.

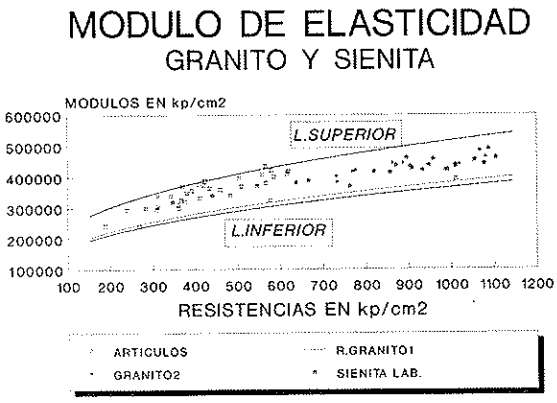


FIG.10

En la Fig. 11 se muestran datos muy limitados obtenidos de la Bibliografía para el caso de DIABASAS (o doleritas), que sin embargo dieron módulos muy elevados, lo cual está de acuerdo con lo esperado según los límites inferior y superior calculados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

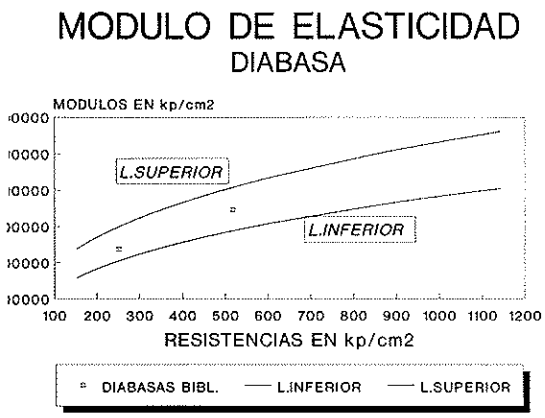


FIG.11

De acuerdo con los resultados antes expuestos, el valor del coeficiente alfa que aparece en la formulación del Código Modelo tendría los valores que se muestran en el Cuadro 1, para cada uno de los áridos estudiados.

La fórmula para calcular el módulo de elasticidad del hormigón, válida para hormigones de hasta 100 MPa de resistencia media, obtenida del Código Modelo, sería la siguiente (en kp/cm²):

$$E_c = \alpha\, 38870 \sqrt[3]{f_{cm}}$$

El parámetro función del tipo de árido, se obtendría del Cuadro 1. Si se utiliza la resistencia característica, hay que acudir a la expresión antes mostrada, que la relaciona con la resistencia media.

Dentro de los grupos del basalto y granito se han incluido otras rocas pertenecientes a las mismas familias, según la ASTM C294 (rocas para áridos de hormigón), y que según Deere y Miller son rocas con propiedades mecánicas similares.

Los valores propuestos pueden proporcionar, en un bajo número de ocasiones, valores algo superiores a los reales obtenidos, si el árido utilizado se ajustara al límite inferior de posibilidades. En cualquier caso, los valores adoptados se han escogido para que el error máximo cometido en este caso no supere el 15%, aproximadamente. Sin embargo, al tratarse de valores conservadores o razonablemente conservadores, los módulos obtenidos estarán, en general, por encima de los calculados.

Algunos de los valores propuestos coinciden con los que aparecen en el Código Modelo, como el caso de la caliza o los basaltos de buena calidad. En concreto, en este último caso se ha distinguido entre rocas de elevada densidad (próxima a 3 t/m³) y baja porosidad (cerca de un 1% de absorción), o aquellas que cumpliendo la absor-

CUADRO 1

Arido	Valor del parámetro alfa del código modelo			
	Mínimo	Máximo	Propuesto	C. Modelo
Cuarcita	1.15	1.5	1.15	1
Arenisca	0.50	1	0.60	0.70
Caliza	0.75	1.5	0.90	0.90
Basalto Ofita Andesita Dacita Riolita	Densos 1.15	1.5	1.2	1.2
	Porosos 0.75	1.15	0.90	–
Granito Sienita Diorita	0.95	1.3	1.1	–
Diabasas	1.25	1.6	1.5	–

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

ción máxima del 5% que marca la EH-91 tengan una porosidad, y por tanto una absorción, elevadas, lo cual se reflejará en una merma de su capacidad mecánica en general. Lo habitual es que las rocas de este grupo sean de elevada calidad, pero pueden surgir ciertas canteras que proporcionen áridos con módulos de elasticidad muy inferiores a los esperados, como ha sucedido con la ofita ensayada.

El caso de las diabasas hay que tomarlo con precaución, debido al escaso número de datos de módulo de hormigón encontrados en la Bibliografía. Sin embargo, se ha decidido incluirlo en la tabla, de acuerdo a los datos aportados por Deere y Miller, sobre 26 muestras de rocas de esta familia procedentes de 8 emplazamientos diferentes, todas de elevado módulo de elasticidad y con una gran uniformidad.

En cualquier caso, la tabla refleja una gran diferencia entre los módulos que se pueden obtener con hormigones fabricados con arenisca y con diabasa, que representan los máximos y mínimos posibles de las rocas potencialmente aptas para áridos de hormigón. Fabricar un hormigón de 1.000 kp/cm² con una arenisca, puede suponer obtener módulos de elasticidad de 230.000 kp/cm². El mismo hormigón, fabricado con una diabasa, puede tener un módulo de 580.000 kp/cm². Aunque estos áridos no son los más habituales en la tecnología del hormigón, pueden presentarse en determinadas ocasiones.

Entre los áridos más utilizados en hormigón, las diferencias, aunque no tan altas, también existen. Un hormigón fabricado con un árido de roca extrusiva, de grano fino (familia del basalto), de buena calidad, proporcionará, como mínimo, un 10% más de módulo que uno fabricado con granito o cuarcita, y un 30% más que uno fabricado con caliza.

Utilizando el valor del parámetro alfa igual a 1 (valor por defecto en el Código Modelo), los máximos errores cometidos en la evaluación del módulo pueden rondar un 50% de sobrevaloración para areniscas y un 25% para calizas y rocas basálticas porosas; y del 50 al 60% de infravaloración para diabasas, rocas basálticas y calizas de muy buena calidad.

En el presente estudio, entre el árido de mayor módulo de elasticidad y el de menor módulo, se registró un incremento del módulo de aproximadamente un 30%. Hay que tener en cuenta que la diferencia es únicamente debida al árido grueso, ya que todas las dosificaciones se fabricaron con la misma arena rodada de río. Estas diferencias, previsiblemente, pueden ser más acusadas si arena y grava proceden de la misma roca.

Como conclusión, en obras donde sea de gran importancia el control de deformaciones de la estructura, el estudio realizado demuestra que es necesario analizar qué tipo de árido se utilizará en la fabricación del hormigón, e incluso llegar a introducir alguna prescripción en este sentido a la hora de la redacción del proyecto, descartando la utilización de determinados áridos o aconsejando la de otros, si se quiere limitar al máximo las deformaciones.

Para obras donde el control de deformaciones sea de carácter secundario, el valor del parámetro alfa igual a uno proporcionará resultados lo suficientemente aproximados, en general, a los reales.

5. INFLUENCIA DE LA EDAD EN EL MODULO DE DEFORMACIONES

Las regresiones experimentales mostradas en los apartados anteriores, incluyeron módulos y resistencias a distintas edades (7, 28 y 90 días). La EH-91 presenta una ecuación única del módulo de elasticidad, válida para cualquier edad. Sin embargo, la BS 8110 presenta una expresión aplicable a los 28 días de edad, y para calcular el módulo a cualquier otra edad hay que utilizar la expresión:

$$E_{c,t} = E_{c,28}\,(0.4 + 0.6\,\frac{f_{cm,t}}{f_{cm,28}})$$

válida para edades mayores o iguales a 3 días.

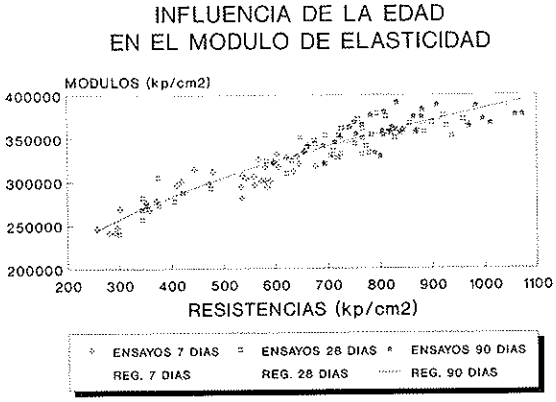


FIG.12

En la Fig. 12 se muestran los datos de módulo y resistencia para uno de los granitos, distinguiendo la edad de ensayo: 7, 28 y 90 días. Asimismo, aparecen las regresiones experimentales correspondientes a cada edad, que responden a las siguientes expresiones:

7 días:

$$E_c = 37827\sqrt[3]{f_{cm}}$$

28 días:

$$E_c = 38219\sqrt[3]{f_{cm}}$$

90 días:

$$E_c = 38450\sqrt[3]{f_{cm}}$$

con E y f_m en kp/cm².

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

CUADRO 2

De 7 a 28 días	$f_{cm,7d}/f_{cm,28d}$ (Valor medio experimental)	$E_{cm,7d}/E_{cm,28d}$ (Valor medio experimental)	$E_{cm,7d}/E_{cm,28d}$ (Valor teórico BS8110)
	0.85	0.9148	0.91
De 28 a 90 días	$f_{cm,90d}/f_{cm,28d}$ (Valor medio experimental)	$E_{cm,90d}/E_{cm,28d}$ (Valor medio experimental)	$E_{cm,90d}/E_{cm,28d}$ (Valor teórico BS8110)
	1.10	1.0455	1.06

CUADRO 3

Edad del hormigón, en días	**2**	**3**	**7**	**28**	**90**	**360**
Hormigones de endurecimiento normal	–	0.40	0.65	1.00	1.20	1.35
Hormigones de endurecimiento rápido	–	0.55	0.75	1.00	1.15	1.20
Hormigones de alta resistencia	0.53	–	0.82	1.00	1.10	–

CUADRO 4

Valor del parámetro gamma de la regresión módulo-resistencia según la edad						
Edad del hormigón, en días	**2**	**3**	**7**	**28**	**90**	**360**
Hormigones de endurecimiento normal	–	0.87	0.91	1.00	1.05	1.095
Hormigones de endurecimiento rápido	–	0.89	0.94	1.00	1.04	1.05
Hormigones de alta resistencia	0.89	–	0.95	1.00	1.039	–

Con los datos disponibles, se calculó, para cada dosificación, las relaciones:

$f_{cm,7d}/f_{cm,28d}$ (25 datos)
$f_{cm,90d}/f_{cm,28d}$ (24 datos)
$E_{cm,7d}/E_{cm,28d}$ (25 datos)
$E_{cm,90d}/E_{cm,28d}$ (21 datos)

Se obtuvo el valor medio para cada relación y utilizando la expresión para distintas edades de la BS8110, se obtuvieron los resultados que se muestran en el Cuadro 2. Los valores teóricos coinciden muy bien con los experimentales, por lo que la fórmula de la BS8110 que tiene en cuenta la influencia de la edad en el módulo de elasticidad es válida para hormigones de baja y alta resistencia.

Sin embargo, y teniendo en cuenta las regresiones obtenidas para las distintas edades mostradas en la Fig. 12, puede no ser relevante la influencia de la edad en el módulo de elasticidad del hormigón, siendo válida una única fórmula para cualquier edad, tal como propone la EH-91. El error que se comete en este caso, se va a analizar a continuación.

Utilizando los valores del Cuadro 3, obtenido de la EH-91 y completado con una fila correspondiente a los Hormigones de Alta Resistencia según resultados experimentales, la expresión de la BS8110 que relaciona el módulo a una cierta edad con el módulo a los 28 días, y partiendo de una expresión del módulo tipo Código Modelo:

$$E_{cmj} = \gamma_j \, 38870 \sqrt[3]{f_{cmj}}$$

se obtienen los valores del parámetro gamma que se muestran en el Cuadro 4, que introducidos en la ecuación anterior dan las distintas regresiones para diferentes edades.

Como se observa en el Cuadro 4, los valores del parámetro gamma son muy próximos a la unidad, ya para los hormigones de endurecimiento rápido, y aun más para los de alta resistencia, que tienen un endurecimiento más rápido. Por tanto, para estos hormigones resulta suficiente aproximación la utilización de una única regresión válida para cualquier edad, tal como propone la EH-91. Para hormigones de endurecimiento normal, utilizando una única regresión para cualquier edad, se cometerán errores extremos del 13% a

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

los 3 días y del 9% a los 360 días. Tampoco en este caso resultan excesivos.

6. CONCLUSIONES

• Existe gran diversidad, en cuanto a propuestas de formulación, en diferentes normativas internacionales. De acuerdo a los resultados experimentales, la de mejor ajuste corresponde a curvas tipo raíz cúbica de la resistencia, como la que aparece en el Código Modelo.

• El estudio ha demostrado la importancia que el tipo de árido utilizado tiene sobre el módulo de deformación del hormigón. La BS 8110 y Código Modelo proponen fórmulas que tienen parámetros considerando el tipo de árido.

• Desde un punto de vista práctico, resulta más ventajosa la propuesta del Código Modelo, con una Tabla que asigna un valor al parámetro según los distintos áridos, ya que el parámetro de la BS 8110 debe ser determinado experimentalmente. Además, la formulación del Código Modelo permite pasar a una regresión por el origen, sin disminuir apenas el coeficiente de regresión, lo cual es mejor desde el punto de vista conceptual. Esto no es posible con la BS o incluso con la EH-91.

• La Tabla de posibilidades del Código Modelo, no abarca todos los tipos de áridos que se pueden utilizar para fabricar hormigón, aunque sí los más normales. En este estudio se han obtenido valores para otros áridos no contemplados en este Código.

• Los valores asignados al parámetro alfa en el Código Modelo son excesivamente conservadores para las cuarcitas, correctos para las calizas y los basaltos densos y poco conservadores para basaltos porosos y areniscas. Se pueden encontrar áridos de estas familias que proporcionen módulos sensiblemente inferiores a los calculados.

• Con áridos muy especiales, se pueden registrar módulos de hormigón del orden del doble o la mitad, según el árido que se utilice. Con áridos normales, es muy habitual registrar diferencias de módulo del 30%.

• Puede utilizarse una única regresión para cualquier edad del hormigón. Los errores que se cometan serán algo superiores al 5%, a largas edades (más de un año).

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha formado parte de un programa experimental sobre hormigones de alta resistencia, que ha sido financiado por la Dirección General de Carreteras (M.O.P.T.M.A).

Asimismo, está recogido dentro de una tesis doctoral presentada en las E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos (Universidad Politécnica de Madrid).

Los autores desean expresar su agradecimiento al equipo de personas de la División de Tecnología de Hormigones, del Laboratorio Central de Estructuras y Materiales, cuyo trabajo diario "detrás de las cámaras" hizo posible el buen desarrollo de la investigación.

8. BIBLIOGRAFIA

• AITCIN, P.C.; MEHTA, P.K. (1990). "Effect of coarse aggregate characteristics on mechanical properties of High Strength Concrete". *ACI Materials Journal,* March-April 1990, pp. 103-107.

• ALEXANDER, M.G. (1991). "An experimental critique of BS8110 method of estimating concrete elastic modulus". *Magazine of Concrete Research,* Nº 157, Dec 1991. pp. 291-304.

• BAALBAKI, W.; AITCIN, P.C.; BALLIVY, G. (1992). "On predicting modulus of elasticity in High Strength Concrete". *ACI Materials Journal,* Sept-October, 1992, pp. 517-520.

• BAALBAKI, W.; BENMOKRANE, B.; CHAALLAL, O.; AITCIN, P.C. (1991). "Influence of coarse aggregate on elastic properties of high performance concrete". *ACI Materials Journal,* Sept-October, 1991, pp. 499-503.

• BAALBAKI, W.; BENMOKRANE, B.; CHAALLAL, O.; AITCIN, P.C. (1992). "Influence of coarse aggregate on elastic properties of high performance concrete". *ACI Materials Journal,* July-August. 1992. Discussion by Ergin Arioglu and Authors, pp. 425-428.

• DANIELSEN, S.W. (1987). "Optimizing aggregates properties for High Strength Concrete". Utilization of High Strength Concrete, Proceedings of the Symposium in Stavanger, Norway. Editores: I. Holand, B. Jakobsen, S. Helland y R. Lenschow, 1987, pp. 73-84.

• EZELDIN, A.S.; AITCIN, P.C. (1992). "Effect of coarse aggregate on the behaviour of normal and High Strength Concrete". *Cement, Concrete and Aggregates,* Vol. 13, Nº 2, 1992, pp. 121-124.

• HERRERO NUÑEZ, E. (1992). "Aridos para hormigones de altas resistencias, sus características". *Cemento-Hormigón,* Nº 709, Agosto 1992, pp. 1.136-1.142.

• HIRSCH, T. J. (1962). "Modulus of Elasticity of Concrete affected by Elastic Moduli of cement Paste Matrix and aggregate". *Journal of the American Concrete Institute,* March 1962, pp. 427-451.

• KAPLAN, M.F. (1958). "The effects of the properties of coarse aggregates on the workability of concrete". *Magazine of Concrete Research,* August 1958, pp. 63-74.

• KLINK, S.A. (1986). "Aggregates, elastic-modulus, and poisson's ratio of concrete". *ACI*

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

Journal, Nov-Dec, 1986, pp. 961-965.

• KLINK, S.A. (1992). "Cement and the elastic constants of concrete". *Cement and concrete Research*, V. 22, 1992, pp. 761-768.

• KORDINA, K. (1960). "Experiments on the influence of the mineralogical character of aggregates on the creep of concrete". *Bulletin RILEM*, Nº 6, March 1960, pp. 7-22.

• NILSEN, A.U.; AITCIN, P.C. (1992). "Static modulus of elasticity of High Strength Concrete from pulse velocity tests". *Cement, Concrete and Aggregates*, Vol. 14, Nº 1, Summer 1992, pp. 64-66.

• PARKA, N.; HANSEN, T.C. (1982). "On the correlation of strength and elasticity of concrete to Los Angeles abrasion loss and crushing value of indonesian river gravels". *Cement, Concrete and Aggregates*, Vol. 4, Nº 1, Summer 1982, pp. 28-32.

• POPOVICS, S.; ERDEY, M. (1970). "Estimation of the modulus of elasticity of concrete like composite materials". *Materials and Structures*, Vol. 3, Nº 16, 1970, pp. 253-260.

• SARKAR, S.L.; AITCIN, P.C. (1990). "The importance of petrological, petrographical and mineralogical.characteristics of aggregates in very high strength concrete". *ASTM STP 1061*, Petrography applied to concrete aggregates, (ASTM Committee C-9), Editor: Erlin & Stark, 1990, pp. 129-144.

• STAGG, K.G.; ZIENKIEWICZ, O.C. (1970). Mecánica de rocas en la ingeniería práctica. Edición española: Editorial Blume, 1970.

• TEYCHENNE, D.C. (1978). "The use of crushed rock aggregates in concrete". Building Research Establishment. Garston, 1978, pp. 1-74.

• TEYCHENNE, D.C.; PARROTT, L.J.; POMEROY, C.D. (1993). "The estimation of the elastic modulus of concrete for the design of structures". *Building Research Establishment CP23/78*, Mar. 1993, pp. 1-11.

RESUMEN

En el Laboratorio Central de Estructuras y Materiales, del CEDEX, se ha desarrollado un amplio programa de investigación sobre Hormigones de Alta Resistencia, que ha abarcado distintos aspectos de la tecnología del hormigón y sus propiedades mecánicas. Se han ensayado hormigones con resistencias entre 20 y 120 MPa.

Uno de los aspectos ampliamente analizado, ha sido el módulo de elasticidad del hormigón, por su repercusión directa en el cálculo de deformaciones de las estructuras.

El estudio realizado demuestra la importancia que tiene en el módulo de elasticidad del hormigón el tipo de árido utilizado. Algunas de las normativas europeas introducen ya este factor en sus formulaciones, como el Código Modelo o la BS 8110. Se pueden encontrar en la naturaleza, áridos aptos para la fabricación de hormigón y que originen diferencias del módulo del 100%. Sin embargo, los casos extremos son poco habituales. Sí es fácil encontrar diferencias de módulo del 30%, dentro de los áridos normales en la tecnología de hormigón, y de hecho así se ha constatado a lo largo del programa experimental realizado.

La formulación de la EH-91, aparte de no introducir ningún parámetro función del árido, que puede llegar a ser más importante que incluso la edad o la propia resistencia del hormigón, proporciona valores no conservadores al evaluar esta propiedad del hormigón, y más cuanto mayor es su resistencia. De acuerdo a los resultados experimentales obtenidos, la formulación del Código Modelo es la que mejor se adapta, aunque se ha completado esta normativa con valores de otros áridos ensayados.

SUMMARY

A wide research programme has been carried out about High Stength Concretes in the Laboratorio Central de Estructuras y Materiales, del CEDEX, including different aspects of the technology of concrete and its mechanical properties. Concretes with strengths between 20 and 120 MPa have been tested.

One of the aspects analyzed has been the modulus of elasticity, because of its influence on structural strains.

The study has shown the importance of the aggregate on this property of concrete. Some European Codes introduce a parameter contemplating this effect in the formulae, like Model Code or BS8110.

Different suitable aggregates for concrete can be found in nature, which introduce differences until 100% in modulus. Althogh these extreme cases are not usual with normal aggregates, differences of 30% are easy to find, origined only by the aggregate used. In fact, this has been shown during the research programme.

The formula proposed in EH-91 (Spanish Code), does not introduce any parameter related with the aggregate, although in some cases the effect can be more relevant even than others contemplated as the age or the strength of concrete. Besides, the values given by this formula are much higher than those obtained in the tests, and the more the higher the strength of concrete.

According to the tests, the formula of Model Code gives the best adjustment to the experimental results. Using data from other aggregates not included in this Code, this formula has been completed.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

NUEVA PUBLICACION
MANUAL H.P.7-92

RECOMENDACIONES PARA LA CONSERVACION DE PUENTES PRETENSADOS

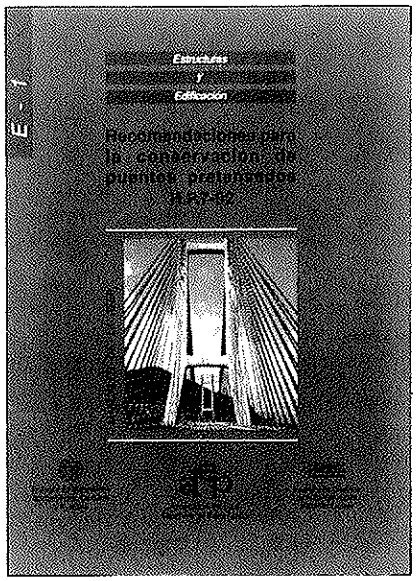
Continuando con la serie de Manuales que esta Asociación Técnica Española del Pretensado viene publicando, en los cuales se recogen las recomendaciones que se consideran idóneas para conseguir una adecuada realización de las obras pretensadas y su buen comportamiento a lo largo de su vida de servicio, se ha editado ahora el Manual H.P. 7-92, con el título "Recomendaciones para la conservación de puentes pretensados".

La necesidad de la conservación de las obras, cualquiera que sea su tipo y el material utilizado en su construcción, nace del inevitable deterioro que sufren en el transcurso del tiempo, y de las propias deficiencias inherentes, tanto a su proyecto como a su construcción, que se ponen de manifiesto, así mismo, a lo largo del tiempo. Por otra parte, la conservación permite también evitar la progresión de los daños hasta situaciones en que puede llegar a ser muy costosa, o incluso imposible, la reparación de la obra.

Pero no es esto sólo. Ocurre, además, que la conservación, tomada en su más amplio sentido, es fuente importantísima de enseñanzas para el proyecto, la construcción y la propia conservación de las futuras obras, evitando la repetición de errores.

Por todo ello, y a falta de una normativa oficial específica sobre el tema, se ha considerado de la mayor importancia preparar este Manual, con las recomendaciones necesarias para conseguir una buena conservación de los puentes pretensados, salvándose así la laguna hasta ahora existente en nuestro país en relación con este problema que en la actualidad tanto preocupa a todas las naciones del mundo, como lo demuestra la numerosa bibliografía existente sobre el particular y el que, en diversas Organizaciones y Reuniones Internacionales, la conservación de estas construcciones se haya elegido como tema fundamental de estudio.

Por otra parte, se ha estimado también interesante recoger en este Manual las oportunas recomendaciones para la mejor



aplicación de la técnica del pretensado en la realización de reparaciones y refuerzos de puentes.

Es evidente que, en numerosas ocasiones, se recurre a este tipo de actuaciones como a una operación más de la conservación. Y también lo es que la utilización del pretensado en estos casos, constituye uno de los medios más eficaces y de más creciente uso, con amplias aplicaciones en estructuras construidas con toda clase de materiales.

El precio de este Manual, de 166 páginas, tamaño DIN-A 4, con numerosas fotografías y tablas, es de DOS MIL QUINIENTAS PESETAS, IVA incluido, (VEINTIUN DOLARES USA, para el extranjero). No obstante, como siempre, a los Miembros de la A.T.E.P. se les concede un sensible descuento y podrán adquirir cuantos ejemplares deseen, al precio especial de MIL QUINIENTAS PESETAS, IVA incluido, (TRECE DOLARES USA, para el extranjero) cada uno.

Los pedidos deben dirigirse a esta Asociación Técnica Española del Pretensado, Apartado 19002, 28080 Madrid.

Debe tenerse en cuenta que,de conformidad con las normas al efecto establecidas, sólo podrán ser atendidas aquellas peticiones que vengan acompañadas, bien de cheque extendido a nombre de la Asociación por el importe total del pedido formulado, o bien de copia de la correspondiente orden de transferencia efectuada a la cuenta que la A.T.E.P. tiene abierta, con el número 1560/271, en la sucursal de Potosí, calle Bolivia nº 11, 28016 Madrid, del Banco Español de Crédito.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

La influencia del diagrama tensión deformación en el cálculo a flexión de secciones realizadas con hormigones de alta resistencia

Enrique González Valle
Dr. Ingeniero de Caminos
Director General de INTEMAC

José María Izquierdo Bernaldo de Quirós
Ingeniero de Caminos
Jefe del Departamento de Rehabilitación y Patología de INTEMAC

1. INTRODUCCION

Cada día están siendo más frecuentes las realizaciones con los denominados Hormigones de Alta Resistencia (HAR). Asimismo, en muchos países han sido investigadas las características relativas al comportamiento estructural de los elementos fabricados con estas tipologías de hormigones, los cuales podríamos definir como aquellos en los que su resistencia a compresión tendría un valor, en probeta cilíndrica 15 x 30, ensayada a 28 días, superando los 50 MPA.

Estos hormigones presentan, a nivel de los resultados experimentales de que hoy disponemos, particularidades que afectan al establecimiento de su diagrama tensión-deformación. Tales particularidades podríamos resumirlas en tres fundamentales:

a) Una rama de ascenso del diagrama, más lineal que en los hormigones normales.

b) Un valor de la deformación correspondiente a la tensión máxima, ligeramente superior a la relativa a los hormigones de resistencia normal.

c) Un valor de la deformación máxima, en el diagrama de cálculo, inferior a la correspondiente a los hormigones de resistencias más bajas.

Las normas actuales, en algunas ocasiones, limitan su aplicación a unas resistencias que pueden situarse en órdenes de 50 a 60 MPA. Existen, no obstante, algunas normas que regulan la utilización de los hormigones de alta resistencia, adoptando diagramas tensión-deformación para el cálculo de secciones, que modifican los que normalmente se establecen para los hormigones de resistencias más bajas. Entre ellas podríamos citar dos ejemplos notables, como son la norma ACI-318 (1) y el Código Modelo FIP-CEB MC-90 (2). Asimismo, la norma Noruega (3) y la Finlandesa (4) establecen diagramas de cálculo para los hormigones cuya resistencia se sitúa en órdenes de 50 MPA a 100 MPA.

Las Instrucciones Españolas EH-91 (5) y EP-93 (6) no limitan la resistencia, aunque la tipificación recomendada para la resistencia de los hormigones establece un límite superior en H-60 (60 MPA) en la de más reciente publicación, EP-93; llamando la atención acerca de que las prescripciones y requisitos de la misma "están avalados por la experimentación para resistencia de hasta 45 MPA, por lo que para valores superiores a éste, se deberá realizar la adecuación oportuna". En definitiva, a la luz de la EP-93, entendemos que la utilización de hormigones de resistencia superior a 45 MPA, haría necesario análisis particularizados, entre otros, de la influencia de la forma del diagrama tensión-deformación en la resistencia de las secciones de hormigón armado.

2. OBJETO DE LA COMUNICACION

El objeto de esta comunicación, a la luz de lo expuesto en el apartado 1, es analizar la influencia que presentan los diferentes diagramas tensión-deformación, establecidos por el MC-90 y la norma ACI 318, para los HAR, en el comportamiento en flexión simple de las secciones de hor-

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

migón armado, analizando, asimismo, las diferencias a que conllevará la utilización de tales diagramas en comparación con los clásicamente empleados para los hormigones de resistencias normales.

3. ANALISIS DE SECCIONES: COMPORTAMIENTO A FLEXION

El comportamiento a flexión de las secciones de hormigón armado, queda influenciado por el diagrama tensión-deformación que adoptemos en el dimensionamiento o en la comprobación de secciones.

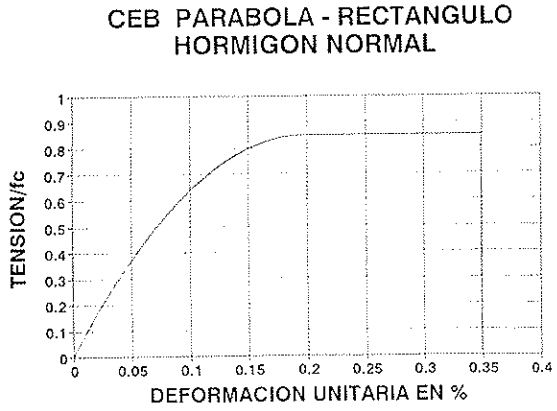


Figura 1. CEB parábola-rectángulo hormigón normal.

El MC CEB-FIP 1990 establece un diagrama clásico parábola rectángulo (Fig. 1), en el que la rama parabólica alcanza hasta la deformación de 0,0020, limitando el bloque rectangular hasta la deformación máxima del 0,0035. Tal diagrama es el adoptado, asimismo, por la vigente Instrucción Española EH-91. Asimismo, el CEB establece diagramas que limitan la parte rectangular del bloque, según aumente la resistencia del hormigón, alcanzándose una deformación máxima en cálculo $\varepsilon_c = 0{,}0035 \left(\frac{50}{80}\right) = 0{,}0022$ (Fig. 2), para hormigones del orden de 80 MPA de resistencia.

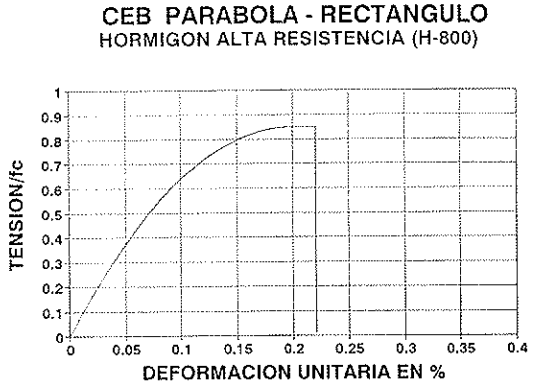


Figura 2. CEB parábola-rectángulo hormigón alta resistencia (H. 80).

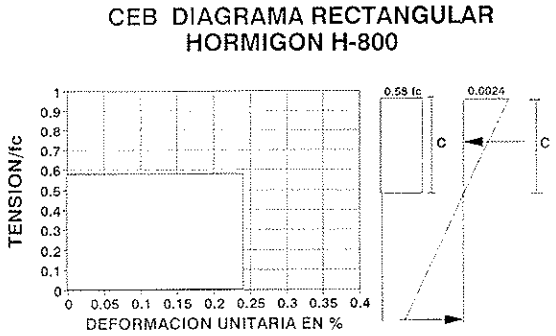


Figura 3. CEB Diagrama rectangular hormigón H. 80.

Alternativamente, el MC-90 del CEB permite la utilización de un diagrama rectangular sin tope con valor de la tensión de agotamiento, variable en función de la resistencia, así como la deformación de agotamiento, lo que para hormigones de resistencia del orden de 80 MPA conduce al diagrama que establecemos en la (Fig. 3), ya que:

$$f_{cdI} = 0{,}85 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd}$$

para $f_{ck} = 80$; $f_{cdI} = 0{,}58\, f_{cd}$

$$\varepsilon^*_{cu} = 0{,}004 - 0{,}002\, \frac{f_{ck}}{100}$$

para $f_{ck} = 80$; $\varepsilon^*_{cu} = 0{,}0024$

La norma ACI-318 adopta, en general, para el cálculo de secciones un diagrama parábola rectángulo, limitando la deformación máxima al 0,0030 (Fig. 4). Como alternativa, admite un diagrama rectangular de compresiones que para los hormigones con resistencia inferior a 4.000 psi (≈ 28 MPA) queda indicado en la (Fig. 5). El diagrama

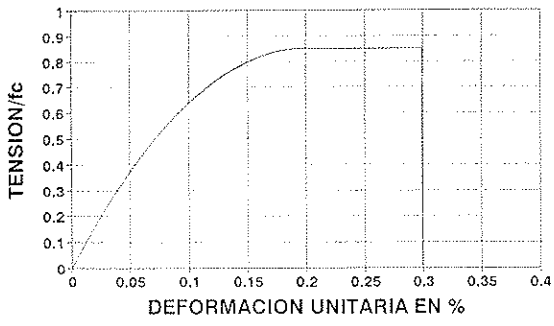


Figura 4. ACI-318 Parábola-rectángulo diagrama normal.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

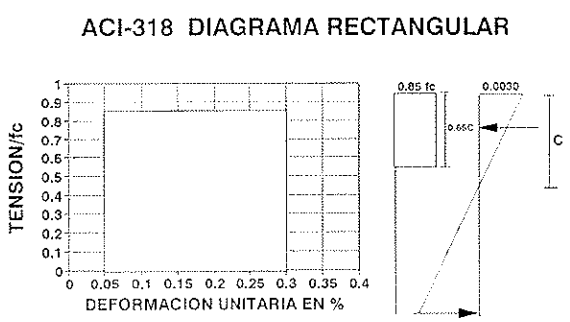


Figura 5. ACI-318 Diagrama rectangular.

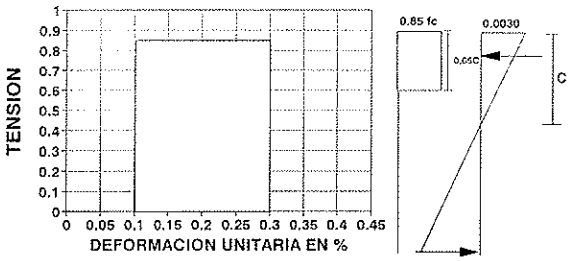


Figura 6. ACI-318 Diagrama rectangular hormigón de resistencia fc ≥ 56 MPa.

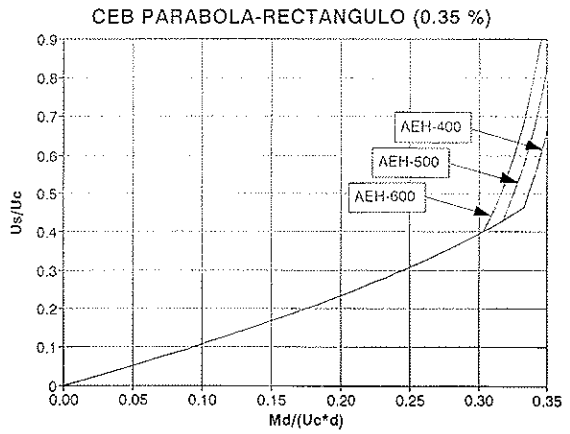


Figura 7. CEB parábola-rectángulo (0.35%).

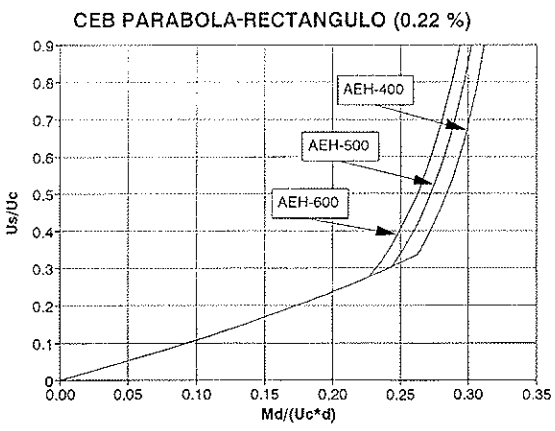


Figura 8. CEB parábola-rectángulo (0.22%).

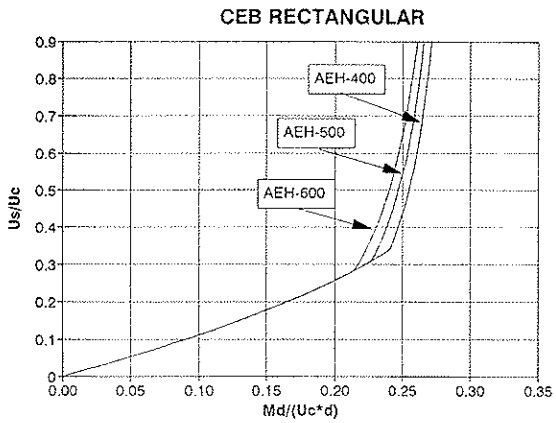


Figura 9. CEB rectangular.

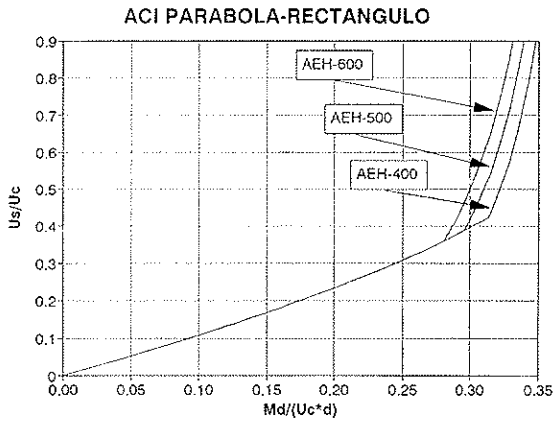


Figura 10. ACI parábola-rectángulo.

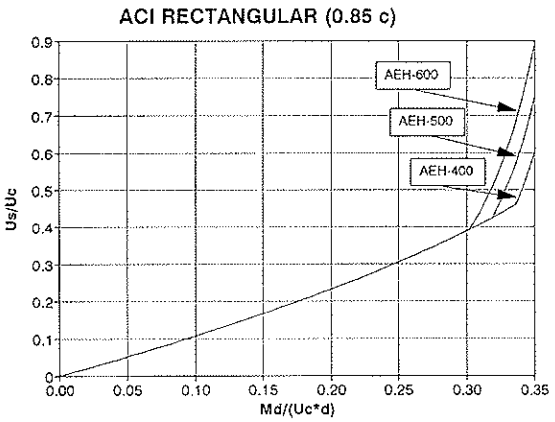


Figura 11. ACI rectangular (0.85 c).

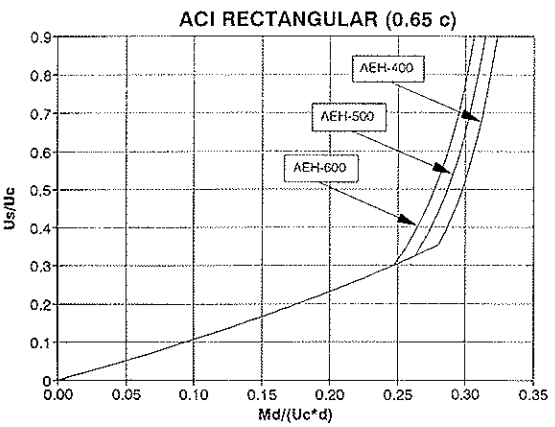


Figura 12. ACI rectangular (0.65 c).

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

rectangular de compresiones para hormigones con resistencia superiores a 28 MPA, lo hace función de la resistencia, llegando al diagrama que acompañamos en la (Fig. 6), para hormigones de resistencia superior a 56 MPA.

Para todos los diagramas que hemos citado, hemos obtenido los diagramas de cálculo en flexión simple que relacionan la cuantía $\left(\frac{U_s}{U_c}\right)$ con el momento flector aplicado $\left(\frac{M_d}{U_{cd}}\right)$, en valores adimensionales. En las figuras 7, 8, 9, 10, 11 y 12 se acompañan tales diagramas, que se han calculado para tres calidades de acero AEH. 400, AEH. 500, AEH. 600 y sección rectangular.

En los diagramas:

f_c =resistencia del hormigón.

U_s $=A_s\ f_{yd}$, siendo f_{yd} la tensión de cálculo del acero y A_s el área de la armadura de tracción.

U_c $=f_{cd}$ bd, siendo f_{cd} la tensión de cálculo del hormigón y **b** y **d** las dimensiones de la sección.

M_d =momento flector de cálculo.

4. COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Hemos procedido a un análisis comparativo de los diagramas de cálculo de secciones, en los cuales hemos analizado dos aspectos principales:

a) La influencia del diagrama en la cuantía, para valores de momento flector constante.

b) La influencia del diagrama en la cuantía límite y en el momento límite que admite la sección, denominando como momento límite el que se obtendría movilizando un bloque de compresiones que conduce a la profundidad de fibra neutra, en deformaciones, correspondiente al valor de la deformación del acero en la que se moviliza, como tensión de cálculo, el límite elástico del acero.

En el cuadro que sigue se acompaña el resumen de la comparación.

MOMENTOS Y CUANTIAS LIMITE PARA H-80

	Diagrama	AEH-400		AEH-500		AEH-600	
		M_d/U_{cd}	U_s/U_c	M_d/U_{cd}	U_s/U_c	M_d/U_{cd}	U_s/U_c
1	CEB parábola rectángulo (0.35%)	0,333	0,462	0,318	0,428	0,303	0,400
2	CEB parábola rectángulo (0.22%)	0,263	0,336	0,244	0,304	0,228	0,279
3	CEB rectángulo (0.24%)	0,240	0,340	0,227	0,311	0,214	0,280
2/1		0,79	0,73	0,77	0,71	0,75	0,70
3/1		0,72	0,74	0,71	0,73	0,71	0,70
3/2		0,91	1,01	0,93	1,02	0,94	1,00
4	ACI parábola rectángulo (0.30%)	0,313	0,419	0,296	0,388	0,280	0,459
5	ACI rectángulo (0.85 c)	0,336	0,459	0,318	0,418	0,302	0,393
6	ACI rectángulo (0.65 c)	0,279	0,351	0,263	0,325	0,247	0,300
5/4		1,07	1,10	1,07	1,08	1,08	1,09
6/4		0,89	0,84	0,89	0,84	0,88	0,84
6/5		0,83	0,76	0,83	0,78	0,82	0,76

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

6. CONCLUSIONES

Se ha realizado un análisis de la influencia del tipo de diagrama tensión-deformación para el hormigón, en el comportamiento a flexión de los elementos elaborados con hormigón de alta resistencia. El análisis se ha realizado por aplicación de las especificaciones contenidas en el Código Modelo CEB-FIP 1990 y en la norma ACI-318/89.

De acuerdo con los resultados obtenidos, podemos establecer las siguientes conclusiones:

A) DIAGRAMAS DEL MC-90 CEB-FIP

A-1. La incidencia de la aplicación de diferentes diagramas tensión deformación para el hormigón, según establece el MC-90 CEB-FIP, para el dimensionamiento a flexión de secciones rectangulares de hormigón armado, con HAR, es importante en lo referente al establecimiento de la cuantía límite y del momento correspondiente a dicha cuantía, momento límite.

A-2. La aplicación del diagrama parábola rectángulo, con $\varepsilon_{cu} = 0{,}0022$, como corresponde a un hormigón H-80, ($f_c = 80$ MPA), supone reducciones:

–En el momento límite que puede soportar la sección, del 21% al 25%
–En la cuantía límite, del 27% al 30%

dependiendo del tipo de acero empleado, todo ello frente a hormigones con resistencias normales del tipo H-40 ($f_c = 40$ MPA).

A-3. La reducción a que aludimos en A-2, se ve asimismo reflejada si se emplea el bloque rectangular preconizado por MC-90, con valores de la reducción:

–En el momento límite, del 28% al 29%
–En la cuantía límite, del 26% al 30%

frente a los hormigones de resistencia normal.

B) DIAGRAMAS ACI/318.89

B-1. La aplicación del diagrama rectangular establecido por ACI-318 para los HAR, supone reducciones:

–En el momento límite, del 11% al 12%
–En la cuantía límite, del 16%

frente a los hormigones de resistencia normal, cuando se empleas diagrama parábola rectángulo con $e_{cu} = 0{,}0030$.

B-2. La aplicación del diagrama rectangular establecido por ACI-318 para los HAR, supone reducciones:

–En el momento límite, del 17% al 18%.
–En la cuantía límite, del 22% al 24%

frente a los hormigones de resistencia igual o inferior a $f_c \leq 28$ MPA, ($f_c \leq 4.000$ psi), cuando se emplea diagrama rectangular.

C) Desde un punto de vista práctico, las incidencias aludidas en A y B, no tienen repercusión ya que las cuantías geométricas, a que conducen las cuantías mecánicas límites, serían muy elevadas, pudiéndose plantear problemas de ejecución por la gran densidad de armaduras.

BIBLIOGRAFIA

1. ACI-318/89 "Building code requirements for reinforced concrete". ACI Detroit Michigan (1989).

2. CEB-FIP MC-90 "CEB-FIP Model Code 1990". Bulletin d'Information nº 213/214. Lausanne (1993).

3. NS-3473E "Concrete Structures. Design rules". NS-3473E. 1992.

4. Rak MK.B4. 1984 "Finish code for concrete structures". Supplement Draft 1989. Finland.

5. EH-91 "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado". Comisión Permanente del Hormigón. Madrid 1991.

6. EP-93 "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón pretensado". Comisión Permanente del Hormigón. Madrid 1993.

RESUMEN

El dimensionamiento y la comprobación de secciones de hormigón armado, queda condicionado por el diagrama tensión deformación que se adopte para el hormigón.

Los hormigones de alta resistencia (HAR) presentan diferencias notables en la forma del diagrama σ–ε, afectando, en consecuencia, a algunos aspectos que condicionan el dimensionamiento.

Algunas normas, tales como el MC-90 y la norma ACI, contemplan diagramas para el hormigón, diferentes para los hormigones de resistencia normal ($f_{ck} \leq 50$ MPA) y para los HAR ($f_{ck} \approx 80$ MPA).

En la presente comunicación se analizan cuales son los aspectos más importantes que condicionan los diferentes diagramas, llegando a la conclusión de que, a un nivel teórico, los aspectos condicionados, para las secciones rectangulares de hormigón armado solicitadas a flexión, son el momento límite y la cuantía límite. Desde un punto de vista práctico, no obstante, los citados aspectos no tienen mucha relevancia, dadas las considerables

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

cuantías geométricas a que conduciría la cuantía límite.

SUMMARY

The size and verification of reinforced concrete sections, is determined by the tensile deformation diagram adopted for the concrete.

High strength concretes (HSC) show appreciable differences in the form of the diagram σ–ε, which subsequently affects some of the aspects governing size.

Some standards, such as the MC-90 and the ACI code, consider different diagrams for the different concretes; $f_{ck} \leq 50$ MPA for normal strength concretes and $f_{ck} \geq 80$ for high strength concretes.

The present communication analyses the more important aspects which affect the different diagrams, and reaches the conclusion that at a theoretical level the conditional aspects for rctangular sections of reinforced concrete subjected to bending are the limit moment and the limit quantity. However, from a practical point of view, the said aspects are not very relevant, given the considerable geometrical quantities that lead to the limit quantity.

* * *

Informe sobre el Simposio IABSE, celebrado en Roma, en Septiembre 1993, bajo el título "Conservación Estructural de la Herencia Arquitectonica"

La conservación de estructuras es esencial para salvaguardar la valiosa historia arquitectónica de la civilización de todo el mundo.

Evaluar la estabilidad de la estructura de un monumento, así como diseñar las medidas de intervención, son objetivos en los que los ingenieros emplean todo su conocimiento sobre mecánica estructural y ciencia de los materiales. Sin embargo, se requiere la cooperación con otras especialidades en el esfuerzo de conservación, para poder evaluar los valores artísticos e históricos de monumentos y edificios antiguos. Los ingenieros estructurales deben trabajar dentro de grupos multidisciplinares, aplicando su experiencia técnica con especial cuidado para conseguir alterar minimamente las cualidades arquitectónicas e históricas que hacen que una estructura merezca la pena ser conservada. Un primer paso fundamental es el análisis apropiado para establecer la verdadera necesidad de intervenir. Son esenciales métodos adecuados de diagnóstico antes de iniciar un programa de conservación de una estructura.

En el "Informe" se estudian los aspectos arquitectónicos, sociales y económicos de la conservación de estructuras. Se describen métodos especiales utilizados para la conservación de estructuras, tales como los de inspección y supervisión, tasación, y una amplia gama de sistemas de reparación. Este "Informe" es una interesante fuente de consulta para todo aquel relacionado con la conservación de estructuras, un campo de creciente importancia para los ingenieros y el conjunto de la socidad.

DATOS SOBRE ESTA PUBLICACION

Informe IABSE Volumen 70

103 artículos y posters, de los cuales 95 son en Inglés, 5 en Francés y 3 en Alemán.

Resúmenes en Inglés, Francés y Alemán.

774 páginas y 625 láminas. Formato 170 x 240 mm ISBN 3-85748-083-1. Publicación: Septiembre 1993.

Precio: Miembros de IABSE SFr. 98,–
No Miembros SFr. 147,–
Más gastos de envío

Los interesados en adquirir esta publicación, deberán dirigirse a:

IABSE Secretariat
EHT-Hönggerberg
CH-8093 Zurich
Télf.: Int + 41 1-633 26 47
Fax: Int + 41 1-371 21 31

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A. (FCCSA).–Acanto, 22. 28045 Madrid.

FORMIGONS GIRONA, S.A.—Carretera C-250 de Girona a Sant Feliú de Guixols, Km. 4,3. 17242 Quart (Gerona).

FREYSSINET, S.A.—General Perón, 24. 28020 Madrid.

GRACE, S.A.—Apartado 523. 08080 Barcelona.

HUARTE, S.A.—Oficina Técnica.—Avda. General Perón, 40-C-4.º. 28020 Madrid.

IBERDROLA, S.A. Servicio Formación.—Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.

IBERDROLA, S.A. Servicio Formación.—Referencia 8501. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.

IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).—Avda. de Burgos, 11. 28036 Madrid.

INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.—Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.

INGENIERIA DEL ATLANTICO, S.A. (IDASA).—Pérez Cepeda, 5 y 7. 15004 La Coruña.

INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES (IECA).—José Abascal, 53-2.ª planta. 28003 Madrid.

INSTITUTO TECNICO DE LA CONSTRUCCION, S.A.—Avda. de Elche, 164. 03008 Alicante.

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).—Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.

INTERNACIONAL DE INGENIERIA Y ESTUDIOS TECNICOS (INTECSA). Biblioteca.—Orense, 70. 28020 Madrid.

JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.—Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.

LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES. CEDEX.—Alfonso XII, 3. 28004 Madrid.

MECANOGUMBA, S.A.—Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).

PACADAR, S.A.—Hermosilla, 57. 28001 Madrid.

PREFABRICACIONES Y CONTRATAS, S.A.—Apartado 138. 36600 Villagarcía de Arosa (Pontevedra).

PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.—Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).

PROYECTOS Y ESTRUCTURAS, S.A. (PROES).—Padre Damián, 42-1º-D. 28036 Madrid.

SENER, INGENIERIA Y SISTEMAS, S.A.–Avda. de Zugazarte, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).

SIKA, S.A.–Carretera de Fuencarral, 72. Polígono Industrial. 28100 Alcobendas (Madrid).

TECPRESA, S.A.–Velázquez, 105. 28006 Madrid.

TREFILERIAS QUIJANO, S.A.–Fábrica de Forjas de Buelna. 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).

TRENZAS Y CABLES, S.L. (TYC, S.L.).–Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).

VSL IBERICA, S.A.–Paseo de la Castellana, 117-2.º dcha. 28046 Madrid.

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026

atep

asociación técnica
española del pretensado

Documento descargado de www.e-ache.com el 24/11/2026