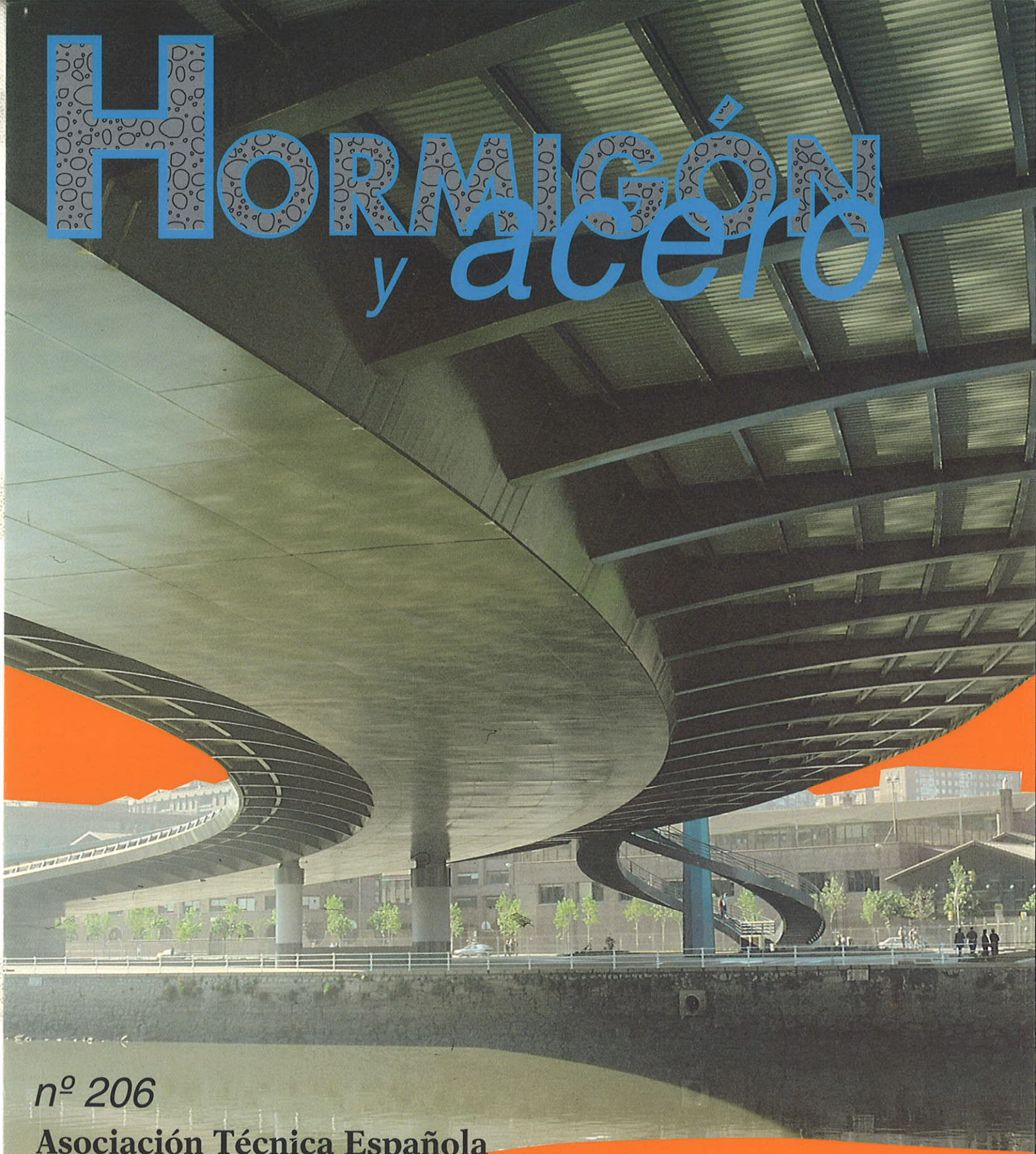
HORMIGÓN y acero



nº 206

Asociación Técnica Española del Pretensado

Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja

Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

Dentro de nuestra Asociación existe una categoría, la de **"Miembro Protector"**, a la que pueden acogerse, previo pago de la cuota especial al efecto establecida, todos los Miembros que voluntariamente lo soliciten. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos en esta categoría de **"Miembros Protectores"** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:

AGROMAN EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.–Avenida del Partenón, 4. 28042 Madrid.

ALVI, S.A. (PREFABRICADOS ALBAJAR).–Orense, 10. 28020 Madrid.

ARPO EMPRESA CONSTRUCTORA, S.A.–Avda. de la Innovación, s/n. Edificio Espacio, planta 3.ª, mód. 4-7. 41020 Sevilla.

AUTOPISTAS, CONCESIONARIA ESPAÑOLA, S.A.–Plaza Gala Placidia, 1. 08006 Barcelona.

AUXINI, S.A.–Velázquez, 134. 28006 Madrid.

CARLOS FERNANDEZ CASADO, S.L.–Grijalba, 9. 28006 Madrid.

CEMENTOS MOLINS, S.A.–C.N. 340, Km. 329,300. 08620 Sant Viçenc dels Horts (Barcelona).

COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.–Almagro, 42. 28010 Madrid.

COLEGIO DE INGENIEROS TECNICOS DE OBRAS PUBLICAS.–Miguel Angel, 16. 28010 Madrid.

COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.–Santa Eugenia, 19. 17005 Gerona.

COL.LEGI OFICIAL D'ARQUITECTES DE CATALUNYA.–Plaça Nova, 5. 08002 Barcelona.

C.T.T. STRONGHOLD, S.A.–Aribau, 185. 08021 Barcelona.

CUBIERTAS Y M.Z.O.V., S.A.–Parque Empresarial La Moraleja. Avda. de Europa, 18. 28100 Alcobendas (Madrid).

DIRECCION GENERAL DE OBRAS PUBLICAS Y TRANSPORTES (Servicio Carreteras).–Calvo Sotelo, 15-1.º 26003 Logroño.

DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES, S.A.–Avda. de Tenerife, 4-6. Edificio Agua. 1ª planta. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).

DYWIDAG - SYSTEMS INTERNATIONAL, S.A.–Azor, 25-27. Polígono Industrial Matagallegos. 28940 Fuenlabrada (Madrid).

EMESA-TREFILERIA, S.A.–Apartado 451. 15080 La Coruña.

ENTRECANALES Y TAVORA, S.A. Biblioteca.–Cardenal Spinola, s/n. Edificio E. 28016 Madrid.

ESCUELA TECNICA-SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.–Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

ESTEYCO, S.A.–Menéndez Pidal, 17. 28036 Madrid.

ESTUDIOS Y PROYECTOS TECNICOS INDUSTRIALES, S.A.–Arapiles, 14-4º Izda. 28015 Madrid.

EUROCONSULT, S.A.–Apartado 99. 28700 San Sebastián de los Reyes (Madrid).

FERROVIAL, S.A.–Príncipe de Vergara, 125. 28006 Madrid.

(Continúa en el int. de contraportada)

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

DECLARADA DE UTILIDAD PUBLICA CON FECHA 4-3-77

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA CONSTRUCCION EDUARDO TORROJA (C.S.I.C.)

COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

COMITE DE REDACCION

Director:
PIÑEIRO, Rafael

Miembros del Comité de Redacción:
APARICIO, Angel C.
BURON, Manuel
CUVILLO, Ramón del
ELICES, Manuel
GONZALEZ VALLE, Enrique
JODAR, Juan
LOPEZ PALANCO, Rafael
LLOMBART, José Antonio
MARTINEZ MARTINEZ, Ramón
MORAN, Francisco
ORTEGA, Luis
PEREZ-FADON, Santiago
RIPOLL, Javier
RODRIGUEZ SANTIAGO, Jesús
SIEGRIST, Carlos
VILLAR, José Mª de

SERVICIO DE ESTUDIOS ESPECIALES

HORMIGÓN y acero

nº 206

4º Trimestre 1997

CUOTAS ANUALES

	ESPAÑA	EXTRANJERO
Miembros "Personales" menores de 27 años	1.500 ptas.	
Miembros "Personales" (personas naturales)	8.750 ptas.	70 dólares
Miembros "Colectivos" (personas jurídicas)	21.600 ptas.	170 dólares
Miembros "Protectores" (personas naturales o jurídicas que deseen prestar una ayuda económica especial a la A.T.E.P.)	43.200 ptas.	340 dólares

(Más 16% IVA para España)

La Asociación, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, no se hace responsable del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocine su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

APARTADO 19.002 - 28080 MADRID - TEL. Y FAX: 766 07 03

Depósito Legal: M-853-1958
Imprime: ACOR, S.A.- M. Hernández, 50 - MADRID
ISSN: 0439-5689

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

RELACION DE ENTIDADES QUE, EN LA FECHA DE CIERRE DEL PRESENTE NUMERO DE LA REVISTA, FIGURAN INSCRITAS, EN LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO, COMO "MIEMBROS COLECTIVOS".

ESPAÑA

AEPO, S.A.–Estudios y Proyectos.–Madrid.
AGENCIA VALENCIANA DEL TURISME.–Valencia.
AREA DE PLANEAMIENTO, PROYECTOS Y OBRAS.–Demarcación de Carreteras del Estado en Asturias.–Oviedo.
ASOCIACIO ENGINYERS INDUSTRIALS DE CATALUNYA.–Barcelona.
CASTRO HERMANOS, S.L.–Mislata (Valencia).
CENTRO DE ANALISIS Y DISEÑO DE ESTRUCTURAS, S.A.–Oviedo.
CENTRO DE ESTUDIOS DE TECNICAS APLICADAS (CEDEX).–Gabinete de Información y Documentación.–Madrid.
CENTRO POLITECNICO SUPERIOR DE INGENIEROS.–Area de M.M.C. y T. de Estructuras.–Zaragoza.
CETRES ENGINYERS, S.L.–Barcelona.
C.I.C., S.A.–Consultor de Ingeniería Civil, S.A.–Barcelona.
CINSA-EP.–Leioa (Vizcaya).
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Andalucía Oriental.–Málaga.
COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS. Demarcación de Galicia.–La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE APAREJADORES Y ARQUITECTOS TECNICOS.–La Coruña.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS DE BALEARES.–Palma de Mallorca.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS.–Demarcación de Valencia.–Valencia.
COLEGIO OFICIAL DE ARQUITECTOS VASCO-NAVARRO.–Bilbao.
CONSTRUCCIONES LAIN, S.A.–Madrid.
CONTROLEX.–Alicante.
DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIONES ARQUITECTONICAS.–Escuela Técnica Superior de Arquitectura.–Sevilla.
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE LA CONSTRUCCION.–Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica.–Universidad de La Laguna (Tenerife).
DEPARTAMENTO DE MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS Y TEORIA DE ESTRUCTURAS.–Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica. Madrid.
DEPARTAMENTO DE RESISTENCIA DE MATERIALES, ESTRUCTURAS E INGENIERIA CIVIL.–Universidad de Valladolid.–Valladolid.
DIRECCION GENERAL DE CARRETERAS. Diputación Foral de Guipúzcoa. San Sebastián.
E.E.P., S.A.–Elementos Estructurales Prefabricados, S.A.–Sant Fruitos de BAages (Barcelona).
ENAGA, S.A.–Pozuelo de Alarcón (Madrid).
ESCUELA SUPERIOR DE AGRICULTURA.–Barcelona.
ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ARQUITECTURA DEL VALLES.–Sant Cugat del Vallés (Barcelona).
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.–Madrid.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA.–Sevilla.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.–Barcelona.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS.–Biblioteca.–La Coruña.
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACION.–Bilbao.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.–Granada.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.–La Laguna (Tenerife).
ESCUELA UNIVERSITARIA DE ARQUITECTURA TECNICA.–Madrid.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL.–Zaragoza.
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA MINERA.–Biblioteca.–León.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.–Barcelona.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA.–Córdoba.
ESCUELA UNIVERSITARIA POLITECNICA DE MANRESA.–Manresa (Barcelona).
EUROESTUDIOS, S.A.–Madrid.
EXISA.–Barcelona.
FERNANDEZ CONSTRUCTOR, S.A.–Madrid.
FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A.–Valencia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

FUERZAS ELECTRICAS DE CATALUÑA, S.A.–Barcelona.
FUNDACION DE LOS FERROCARRILES ESPAÑOLES.–Madrid.
GINPRO, S.A.–Pozuelo de Alarcón (Madrid).
G.O.C.S.A.–Orense.
HORMADISA, S.L.–Valga (Pontevedra).
IBERICA DE ESTUDIOS E INGENIERIA, S.A. (IBERINSA).–Madrid.
IDEAM, S.A.–Madrid.
INDAG, S.A.–Madrid.
INGENIERIA DE AUTOPISTAS Y OBRAS CIVILES, S.A.–Madrid.
INGENIERIA Y ECONOMIA DEL TRANSPORTE, S.A. (INECO).–Madrid.
INGENIERIA FLORS, S.A.–Grao de Castellón.
INGENIERIA DE PUENTES Y AUTOPISTAS, S.A.–Barcelona.
INGENIEROS Y ARQUITECTOS ASOCIADOS, S.A.–Madrid.
INSTITUCIONES COLEGIALES PARA LA CALIDAD EN LA EDIFICACION.–Murcia.
INSTITUT DE TECNOLOGIA DE LA CONSTRUCCIO DE CATALUNYA.–Barcelona.
INSTITUTO JUAN DE HERRERA.–Madrid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.–Consejería de Fomento.–Valladolid.
JUNTA DE CASTILLA Y LEON.–Dirección General de Transportes y Carreteras. Servicio de Gestión.–Valladolid.
LABORATORIO GEOCISA.–Biblioteca.–Coslada (Madrid).
LABORATORIO DE INGENIEROS DEL EJERCITO.–Madrid.
LABORATORIOS DEL SURESTE, S.L.–El Palmar (Murcia).
LUIS BATALLA, S.A. (LUBASA).–Castellón de la Plana.
METALURGICA GALAICA, S.A.–Narón (La Coruña).
MINISTERIO DE FOMENTO. SUBDIRECCION GENERAL DE ARQUITECTURA.–Madrid.
MINISTERIO DE FOMENTO. SUBDIRECCION GENERAL DE NORMATIVA TECNICA Y ANALISIS ECONOMICO.–Madrid.
O.C.P. CONSTRUCCIONES, S.A.–Madrid.
PENTIA INGENIERIA, S.A.–Llanera (Asturias).
POSTENSA, S.A.–Bilbao.
PREFABRICACIONES Y CONTRATAS, S.A.–Madrid.
PREFABRICADOS AGRICOLAS E INDUSTRIALES, S.A. (PRAINSA).–Barcelona.
PREFABRICADOS DEL CEMENTO, S.A. (PRECESA).–León.
PREFABRICADOS POUSA, S.A.–Santa Perpetua de Moguda (Barcelona).
PRODUCTOS BITUMINOSOS, S.A.–47008 Valladolid.
PUENTES Y CALZADAS, S.A.–Sigueiro (La Coruña).
RIOJANA DE PREFABRICADOS DE HORMIGON, S.A.–Logroño.
RUBIERA, S.A. FORJADOS Y CUBIERTAS.–León.
RUBIERA BURGOS, S.A.–Burgos.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.–Barcelona.
SERVICIO MILITAR DE CONSTRUCCIONES.–Burgos.
SERVICIO TERRITORIAL DE CARRETERAS.–Gerona.
SESTRA, S.A.L.–20009 Donostia (San Sebastián).
SOCIEDAD ANONIMA ESPAÑOLA TUBO FABREGA.–Madrid.
SPANDECK CATALANA, S.A.– El Bruc (Barcelona).
TECNICA Y PROYECTOS, S.A.–Madrid.
TECNOS, GARANTIA DE CALIDAD, S.A.–Madrid.
TERRATEST, S.A.–Madrid.
TIGNUS, S.A.–Valencia.
TUBERIAS Y PREFABRICADOS, S.A. (TYPSA).–Madrid.
UNIVERSIDAD DE BURGOS.–Sección Politécnica.–Burgos.
UNIVERSIDAD DE CADIZ.–Algeciras (Cádiz).
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA.–Biblioteca Universitaria.–Santander.
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA.–Biblitoteca General de Albacete.–Albacete.
UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA.–Biblioteca.–La Coruña.
UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA.–Rectorado.–La Coruña.
UNIVERSIDAD DE HUELVA.–Biblioteca.–Huelva.
UNIVERSIDAD DE LA RIOJA.–Logroño (La Rioja).
UNIVERSIDAD POLITECNICA.–Hemeroteca.–Valencia.
UNIVERSIDAD POLITECNICA.–E.T.S. de Ingenieros Agrónomos.–Departamento de Construcción y Vías Rurales.–Madrid.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

UNIVERSIDAD PUBLICA DE NAVARRA.–Pamplona
UNIVERSITAT DE GIRONA.–Girona.
UNIVERSITAT DE LLEIDA.–Lleida.
VORSEVI, S.A.–Ingeniería y Control de Calidad.–Sevilla.
V.S. INGENIERIA Y URBANISMO, S.L.–Sevilla.

EXTRANJERO

ASSOCIACAO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND.–São Paulo (Brasil).
LABORATORIO DE ENGENHARIA DE ANGOLA.–Luanda (República Popular de Angola).
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU.–Lima (Perú).
POSTES, S.A.–Lima (Perú).
PUENTES Y TORONES, LTD.–Santafé de Bogotá (Colombia).
SWETS SUBSCRIPTION SERVICE.–2160 Lisse (Holanda).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE QUITO.–Biblioteca.–Quito (Ecuador).
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO.–Biblioteca Central.–Valparaíso (Chile).
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO.–Biblioteca.–Mayagüez (Puerto Rico)
UNIVERSIDAD NACIONAL ANDRES BELLO.–Biblioteca Central.–Santiago (Chile).

MIEMBRO CORRESPONDIENTE

ASOCIACION BOLIVIANA DEL PRETENSADO (A.B.P.).–La Paz (Bolivia).

* * *

AVISO IMPORTANTE

DISCUSION DE LOS ARTICULOS ORIGINALES PUBLICADOS EN LA REVISTA "HORMIGON Y ACERO"

Todos los artículos originales que se publican en "Hormigón y Acero", quedan sometidos a discusión y al comentario de nuestros lectores. La discusión debe limitarse al campo de aplicación del artículo, y ser breve (cuatro páginas mecanografiadas a doble espacio, como máximo, incluyendo figuras y tablas).

Debe tratarse de una verdadera discusión del trabajo publicado y no ser una ampliación o un nuevo artículo sobre el mismo tema; el cual será siempre aceptado para su publicación en nuestra Revista, pero con tal carácter.

Debe ofrecer un interés general para los lectores. De no ser así, se trasladará al autor del artículo al que se refiera, para que la conteste particularmente.

Los comentarios deben enviarse, por duplicado, a la Secretaría de la A.T.E.P., Apartado 19002, 28080 Madrid, dentro del plazo de tres meses contados a partir de la fecha de distribución de la Revista.

El autor del artículo cerrará la discusión contestanto todos y cada uno de los comentarios recibidos.

Los textos, tanto de las discusiones y comentarios como de las contestaciones de los autores de los correspondientes artículos, se publicarán conjuntamente en una Sección especial que aparecerá en las últimas páginas de la Revista.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

NOTA. Texto de las Comunicaciones presentadas en la XVª Asamblea Técnica Nacional de la ATEP, celebrada en Logroño, durante los días 12 al 15 de noviembre de 1996.

EL COMITE DE REDACCION

hormigón y acero nº 206

índice

Págs.

TEMA II.–INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS

Armadura mínima en flexión: teoría, ensayos y comparación con la Normativa vigente 9-25

Renforcement minimum en flexion: théorie, essais et comparaison avec la normative actuelle.

Minimum reinforcement for bending: theory, experiments and comparison with recommendations.

G. Ruiz, J. Planas y M. Elices

Estudio de efectos diferidos, en secciones fisuradas, mediante el método multicapa. 27-62

Étude des effets différés dans des sections fisurées utilisant la méthode multicouche.

Study of time-dependent effects in craked sections using the multilayer model.

C. Iglesias

TEMA IV.–INSPECCIÓN, MANTENIMIENTO, REPARACIONES Y REFUERZOS

IV Puente sobre el río Guadiana, en Badajoz. Instrumentación y control del atirantamiento 63-79

IV Pont haubané sur le fleuve Guadiana à Badajoz. Dispositives de mesure et controle de la mise en tension.

IV Cable-stayed bridge over Guadiana river in Badajoz. Measuring and supervision during the instalation of stay-cables.

J. M. González Barcina y F. Millanes Mato

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Artículos originales no presentados en la XVª Asamblea.

TEMA II.–INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS

Método de análisis no lineal para estructuras discretizadas en barras. 2ª Parte **81-113**

Méthode d'analyse non linéaire pour structures discontinues, en barres. 2.ª Part.

Non-linear analysis method for beam discretized structures. 2.ª Part.

M. Juliá

Dimensionamiento automático de estribos de puentes **115-128**

Dimensionnement automatique des culées des ponts.

Automatic design of bridge abutments.

V. Gayraud y C. Iglesias

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Normas que deben cumplir los artículos que se envien para su publicación en "Hormigón y Acero"

1. CONDICIONES GENERALES

Los originales de los Artículos que se deseen publicar en "Hormigón y Acero", se enviarán a la Secretaría de la ATEP. Deberán cumplir rigurosamente las normas que a continuación se especifican. En caso contrario, serán devueltos a sus Autores para su oportuna rectificación.

Los que cumplan los requisitos exigidos pasarán al Comité de Redacción de la Revista el cuál, previo informe y evaluación de su calidad por los correspondientes Censores, decidirá si procede o no su publicación, sugiriendo eventualmente al Autor los cambios que, en su opinión, deben efectuarse para su final publicación en "Hormigón y Acero". Toda correspondencia en este sentido se mantendrá directamente con el Autor o primero de los Autores que figuren en el Artículo.

Los originales que por cualquier causa no fueran aceptados se devolverán al Autor.

2. PRESENTACION DE ORIGINALES

Los originales de los Artículos se presentarán, preferentemente, en disquete, en programas de tratamiento de texto de uso generalizado (Wordperfect Word, etc.). Además, se mandarán dos copias escritas en papel, por una sola cara, en hojas tamaño UNE A4, y con las figuras, fotografías y tablas, con el tamaño que se proponga para su reproducción.

2.1. Título

El título, *en español, francés e inglés* deberá ser breve y explícito, reflejando claramente el contenido del Artículo. A continuación, se hará constar nombre y apellidos del Autor o Autores, titulación profesional y, si procede, Centro o Empresa en el que desarrolla sus actividades.

2.2. Resumen y palabras clave

Todo Artículo deberá ir acompañado de un resumen *en español e inglés*, de extensión no inferior a cien palabras (unas ocho líneas mecanografiadas) ni superior a ciento cincuenta palabras (doce líneas).

Asímismo, se acompañarán entre tres y seis palabras clave, en español, que permitan la identificación bibliográfica dentro del área técnica específica del Artículo.

2.3. Gráficos y figuras

Los gráficos y figuras deberán ir numerados correlativamente en el orden en que se citen en el texto, en el cual deberá indicarse el lugar adecuado de su colocación.

Serán reproducibles, de muy buena calidad. Todas las figuras llevarán su correspondiente pie explicativo y el tamaño de letra se eligirá de tal modo que sea legible

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

en la figura al tamaño en que se vaya a reproducir en la Revista.

Se recomienda que los gráficos y figuras sean específicamente preparados para su publicación.

2.4. Fotografías

Se procurará incluir sólo las que, teniendo en cuenta su posterior reproducción, sean realmente útiles, claras y representativas. Con independencia de las copias que se piden para formar la maqueta, los originales deberán presentarse en copias de papel opaco, negro o en color, en negativo, o en diapositivas. Irán numeradas correlativamente, como fotografías, en el orden citado en el texto, y llevarán su correspondiente pie explicativo.

2.5. Tablas y cuadros

Cumplirán las condiciones indicadas para las figuras en el punto 2.3. Llevarán numeración correlativa, citada en el texto y un pie con la explicación adecuada y suficiente para su interpretación directa.

2.6. Unidades

Las magnitudes se expresarán, preferiblemente, en unidades del Sistema Internacional (S. I.) según las UNE 5001 y 5002.

2.7. Fórmulas, letras griegas, subíndices y exponentes

En las fórmulas se procurará la máxima calidad de escritura y emplear las formas más reducidas, siempre que no entrañen riesgo de incomprensión. Para su identificación se utilizará, cuando sea necesario, un número entre paréntesis, a la derecha de la fórmula.

Se eligirá un tipo de letra (Times New Roman u otras similares) tal que las letras griegas, subíndices y exponentes resulten perfectamente identificables, procurando evitar los exponentes complicados y letras afectadas simultáneamente de subíndices y exponentes.

Se diferenciarán claramente mayúsculas y minúsculas y aquellos tipos que puedan inducir a error (por ejemplo, la l y el 1; la 0 y el cero; la K y la k, etc.).

2.8. Referencias bibliográficas

Las referencias bibliográficas citadas en el texto se recogerán al final del mismo, dando todos los datos precisos sobre la fuente de publicación, para su localización.

Las citas en el texto se harán mediante números entre paréntesis. En lo posible, se seguirán las normas internacionales utilizadas generalmente en las diversas publicaciones, es decir:

Referencias de Artículos publicados en Revistas

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del Artículo; nombre de la publicación; número del volumen y fascículo; fecha de publicación, y número de la primera y última de las páginas que ocupa el Artículo al que se refiere la cita.

Referencias de Libros

Apellidos e iniciales del Autor o Autores; título del Libro; edición; editorial y lugar y año de publicación.

3. PRUEBAS DE IMPRENTA

De las primeras pruebas de imprenta se enviará una copia al Autor para que, una vez debidamente comprobadas y corregidas, las devuelva en el plazo máximo de quince días, con el fin de evitar el riesgo de que la publicación de su Artículo tenga que aplazarse hasta un posterior número de "Hormigón y Acero".

En la corrección de pruebas no se admitirán modificaciones que alteren sustancialmente el texto o la ordenación del Artículo original.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Armadura mínima en flexión: teoría, ensayos y comparación con la normativa vigente

Gonzalo Ruiz López
Jaime Planas Rosselló
Manuel Elices Calafat
Dres. Ingenieros de Caminos
Dpto. de Ciencia de Materiales
Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

Las vigas con poca armadura son elementos estructurales muy utilizados, ya que hay muchos criterios constructivos que conducen a unas dimensiones superiores a las estrictamente necesarias para soportar las cargas esperadas. Por lo tanto, estas vigas resisten holgadamente las cargas que las solicitan, aunque tengan muy poca armadura. Sin embargo, es necesario poner una cantidad mínima de acero para evitar que ese elemento estructural pueda romper de modo frágil.

Por otra parte, este tipo de vigas muestra el denominado *efecto de escala,* en virtud del cual la resistencia de una viga de laboratorio, de unos centímetros de canto, es mayor –expresada en términos de tensión– que la de una viga proporcional, con un canto varias veces superior, colocada en un forjado de edificación o en un viaducto de una carretera [1-6]. Esto significa que los criterios de diseño de este elemento estructural, y en particular la armadura mínima necesaria para evitar la rotura frágil, deben ser función del tamaño. Sin embargo, la mayoría de las normas de construcción ignoran el efecto de escala, ya que recomiendan la misma proporción de armadura independientemente del canto de la viga.

Debido al interés que tiene la determinación de la cuantía mínima, y a su aparente simplicidad, el Comité 9 de la ESIS (European Structural Integrity Society) promovió trabajos, de carácter experimental y teórico, sobre la rotura de vigas débilmente armadas, cuyo objetivo final es la obtención de expresiones de cuantía mínima que tengan en cuenta el efecto del tamaño.

Varios investigadores han abordado este problema usando la mecánica de la fractura aplicada al hormigón armado, llegando a fórmulas con las que se puede calcular la cuantía mínima en flexión. Bosco y Carpinteri [7] han propuesto la siguiente expresión empírica:

$$\rho_{mín} = \frac{K_{Ic}}{f_y \sqrt{D}} \left(0{,}1 + 0{,}0023\, f_c\right) \qquad (1)$$

donde $\rho_{mín}$ es la cuantía mínima (relación entre el área de acero, A_s, y el área de la sección de hormigón, A_c), K_{Ic} es la tenacidad de fractura del hormigón, f_y la tensión de cedencia del acero, D el canto de la viga y f_c el valor medio de la resistencia a compresión del hormigón, en MPa.

Otra fórmula semiempírica para armadura mínima en flexión es la propuesta por Baluch, Azad y Ashmawi [8]:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$\rho_{mín} = \frac{1{,}9132\, K_{Ic}^{0{,}82}}{f_y^{0{,}9922}\left(1{,}70 - 2{,}6\,\frac{c}{D}\right)} \qquad (2)$$

en la que c es el recubrimiento de la armadura y el resto de variables tienen los significados explicados anteriormente (K_{Ic} se tiene que expresar en MPa · $m^{1/2}$ y f_y en MPa; el coeficiente que multiplica a K_{Ic} no es adimensional).

También Gerstle y colaboradores [9] han propuesto una expresión, basada en un modelo teórico que tiene en cuenta el comportamiento cohesivo del hormigón:

$$\rho_{mín} = \frac{0{,}1}{n}\left\{\sqrt{81 + 74\,D/l_{ch}} - 9\right\}^{1/2} \qquad (3)$$

donde n es la relación entre los módulos de elasticidad del acero y del hormigón (E_s/E_c), y l_{ch} es la longitud característica del hormigón, que se define como [10]:

$$l_{ch} = \frac{E_c\, G_F}{f_t^2} \qquad (4)$$

donde G_F es la energía específica de fractura del hormigón, y f_t su resistencia a tracción.

Por último, hay otra expresión de armadura mínima que se debe a Hawkins y Hjorsetet [11]:

$$\rho_{mín} = 0{,}175\,\frac{f_r}{f_y}\,\frac{D}{D-c} \qquad (5)$$

donde f_r es el módulo de rotura de la sección de hormigón en masa, que depende de las propiedades en fractura del hormigón y del canto de la viga.

Estas fórmulas de $\rho_{mín}$ dependen de las características de los materiales: en particular, de las propiedades de la fractura del hormigón y de la tensión de cedencia del acero; sin embargo, ninguna de ellas es sensible a las propiedades de la interacción acero-hormigón, es decir, de la adherencia. Por otra parte, a excepción de la ec. (2), estas expresiones de armadura mínima manifiestan el efecto de escala, aunque la tendencia de variación con el tamaño no es uniforme. Mientras la cuantía mínima de Bosco y Carpinteri (1) disminuye proporcionalmente al aumento de $D^{1/2}$ –efecto de escala propio de la fractura elástica lineal–, la de Gerstle (3) aumenta en función de la raíz cuarta del canto. La de Hawkins y Hjorsetet (5) incluye su dependencia respecto del tamaño en el módulo de rotura f_r. Existen expresiones que permiten calcular f_r con buena aproximación, en función del canto de la viga [12].

En este artículo se deduce una expresión para el cálculo de la cuantía mínima que pretende representar objetivamente la influencia real de todos los parámetros del acero y del hormigón, de su interacción mutua, y de la geometría y el tamaño de la viga. En primer lugar, se resumen las características fundamentales del proceso de rotura de vigas débilmente armadas (sec. 2). A continuación, se discuten los parámetros de los que depende la armadura mínima en flexión (sec. 3). Nuestra fórmula de armadura mínima se deduce con la ayuda de un modelo teórico, contrastado con un programa experimental (sec. 4.1). Después de presentar la fórmula (sec. 4.2) vemos cómo varían sus cálculos si se modifica (a) el tamaño, (b) la adherencia acero-hormigón, (c) el recubrimiento, y (d) la tensión de cedencia del acero. Por último, comparamos los cálculos de nuestra fórmula con las recomendaciones de la normativa de construcción vigente en España y en algunos países de nuestro entorno, y con los resultados de las expresiones de otros investigadores. Finalmente, extraemos algunas conclusiones (sec. 5).

2. LA VIGA DEBILMENTE ARMADA

Las vigas débilmente armadas son elementos estructurales cuyo estudio se puede abordar, de modo sencillo, por medio de la mecánica de fractura, ya que, como se demuestra experimentalmente [13], la rotura se produce por una única fisura en la zona de máximo momento flector, y no por fisuración múltiple como en el caso de vigas armadas ordinarias.

El comportamiento típico de este elemento estructural se resume en la Figura 1. Las Figuras 1a-c muestran curvas carga-flecha (P – δ) obtenidas en ensayos de flexión

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

en tres puntos, sobre vigas con diversas cuantías de armadura. La Figura 1a muestra resultados de Bosco, Carpinteri y Debernardi [14], obtenidos con vigas fabricadas con hormigón de alta resistencia, armadas con acero de construcción corrugado. La Figura 1b corresponde a vigas ensayadas por Hededal y Kroon [15], fabricadas con materiales semejantes a los anteriores; sin embargo, en este caso, las vigas incorporan una pequeña entalla en su fibra inferior que favorece la aparición de un pico de carga más agudo. En la Figura 1c presentamos algunos de nnestros propios resultados [16 y 17], correspondientes a vigas de micro-hormigón armadas unas con acero liso y otras con idéntica cuantía de acero corrugado. A pesar de las diferencias existentes entre los materiales y los dispositivos de ensayo, las figuras guardan una gran similitud.

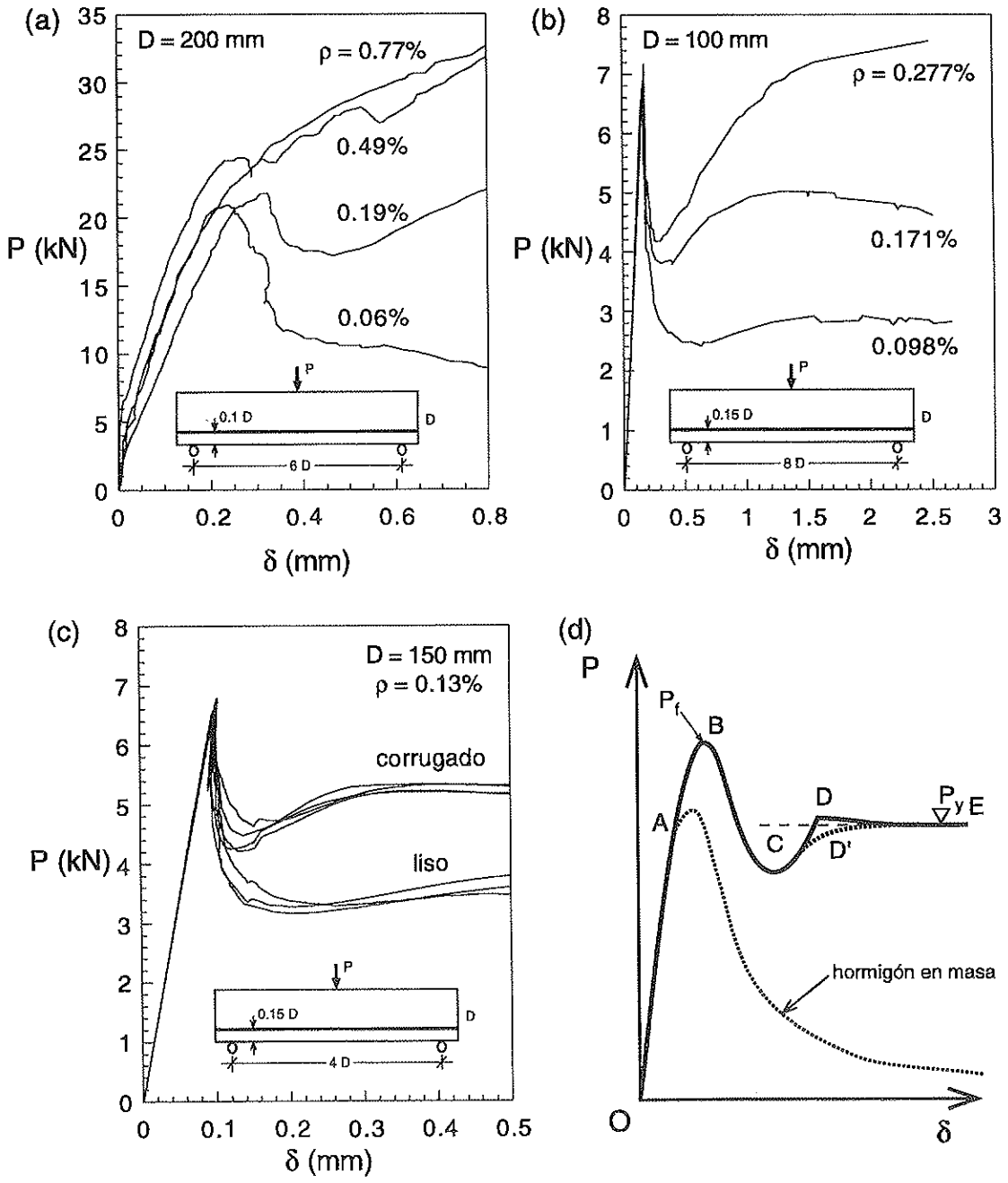


Fig. 1. Curvas carga-flecha (P-δ) de vigas débilmente armadas: (a) ensayos de Bosco, Carpinteri y Debernardi [14]; (b) ensayos de Hededal y Kroon [15]; (c) ensayos de los autores [16, 17].

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La curva carga-flecha (P – δ) de una viga débilmente armada con un acero con poco endurecimiento por deformación, se puede esquematizar como hace la Figura 1d. A una rama lineal inicial, OA, le sigue una respuesta no lineal hasta la carga máxima de fisuración –punto B–. Desde el máximo de fisuración, B, hasta el momento en que plastifica el acero –punto D– la respuesta de la viga sigue la curva BCD, en forma de U. En D la curva baja lentamente hasta una rama horizontal, E, que continuaría indefinidamente si el acero fuera perfectamente plástico, pero que, en la práctica, termina al producirse la estricción y consiguiente rotura del acero. Si el acero tiene una transición entre su respuesta elástica-lineal y su comportamiento perfectamente plástico, el pico D se suaviza y la curva presenta un codo suave, representado por la línea de trazos CD'E.

La posición del punto A, que marca el límite del comportamiento elástico, depende básicamente –si no hay tensiones internas debidas a retracción, fluencia, etc.– de la resistencia a tracción del hormigón, f_t. Después de dicho límite, se genera una zona de fractura que comienza a crecer hacia la armadura a través del recubrimiento. Cuando la zona de fractura alcanza el acero, se producen, simultáneamente, dos fenómenos: (1) La zona de fractura queda cosida por el acero, que está todavía en régimen elástico y se opone al avance de la fisura, y (2) al aumentar la solicitación en el acero, se llega al límite de la resistencia del contacto acero-hormigón en la zona próxima a la fractura, de modo que el acero desliza. Por lo tanto, el máximo B y las ramas adyacentes en la curva P – δ están controladas (1) por el proceso de fisuración del hormigón, (2) por la cuantía de armadura, (3) por las propiedades de la interacción acero-hormigón –la adherencia entre ambos materiales– y (4) por el recubrimiento.

La influencia de la cuantía de armadura en la respuesta global de la viga, queda clara en las Figuras 1a-b. La Figura 1c muestra que la adherencia también influye sustancialmente. La influencia del recubrimiento no es tan evidente, aunque se puede razonar sobre los casos límite: Si no existiera recubrimiento, se aproximarían los puntos A y B de la Figura 1d; mientras que si el recubrimiento fuera muy grande, tendríamos inicialmente un comportamiento muy semejante al del hormigón en masa, porque el máximo de fisuración se produciría antes de que la zona de fractura alcanzara la armadura.

Asimismo, es posible observar experimentalmente el efecto de escala que manifiestan este tipo de vigas. La Figura 2 representa las cargas máximas de fisuración, P_f –punto B en la Figura 1d–, de vigas de tres tamaños, fabricadas con los mismos materiales, con la misma cuantía de armadura y con las proporciones que se indican, frente al valor de su canto respectivo. La carga máxima aumenta con un factor de proporcionalidad menor que el que relaciona las dimensiones, lo cual señala que la carga máxima de este tipo de vigas es función del tamaño.

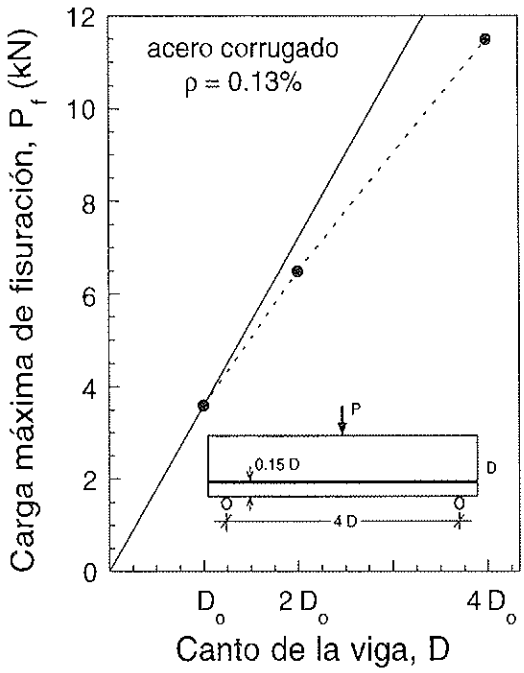


Figura 2. Efecto de escala experimental: la carga máxima de fisuración, P_f, aumenta en menor proporción que el canto de la viga. Las vigas ensayadas están fabricadas con los mismos materiales y tienen la misma cuantía; todas las vigas tienen el mismo ancho. En el tamaño pequeño se representa la media de 8 ensayos, en el intermedio de 4 y en el grande de 2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

3. LA ARMADURA MINIMA EN FLEXION

Respecto a la armadura mínima necesaria para conseguir una rotura dúctil, la Figura 3 esquematiza gráficamente la transición que se produce en una viga débilmente armada, solicitada a flexión en tres puntos, al ir creciendo, exclusivamente, la cuantía de armadura. Para cuantías pequeñas la carga máxima de fisuración, P_f, es mayor que la carga límite que pueden soportar las armaduras solas, P_y, por lo que si se alcanza una carga P_f la viga romperá frágilmente. Contrariamente, si la cuantía es suficientemente elevada, y $P_y > P_f$, la viga no colapsará aunque alcance la carga P_f, y el comportamiento será dúctil. La armadura mínima puede pues definirse como aquélla en que el comportamiento pasa de ser frágil a ser dúctil, es decir, aquella que hace que $P_f = P_y$. Estas consideraciones pueden resumirse como sigue:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{comportamiento frágil:} & P_f > P_y \\ \text{cuantía mínima } \rho_{mín}: & P_f = P_y \\ \text{comportamiento dúctil:} & P_f < P_y \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Como hemos visto en la sección anterior, el valor de P_f está controlado por el proceso de fractura que se desarrolla en el hormigón –del cual deriva el efecto de escala de este tipo de vigas– y por el efecto de cosido que realiza la armadura. Este depende a su vez de la posición de la armadura, de su cuantía y de la adherencia acero-hormigón. Por otra parte, P_y depende básicamente del recubrimiento y de la cuantía y tensión de cedencia del acero. Por lo tanto, una expresión que calcule la cuantía mínima según (6) ha de ser función de estos parámetros, y en particular, debe ser función del tamaño, como ya apuntábamos en la introducción.

4. FORMULA DE ARMADURA MINIMA

Para deducir una fórmula para armadura mínima, hemos utilizado el modelo de la longitud efectiva de anclaje [18], después de contrastar sus resultados con un amplio programa experimental [16 y 17].

4.1. Modelización teórica y experimentación

Al estudiar una viga débilmente armada con este modelo, se obtiene que el proceso de rotura depende del tamaño relativo a la longitud característica del hormigón, de la cuantía de acero, de la tensión de cedencia del acero y de la adherencia acero-hormi-

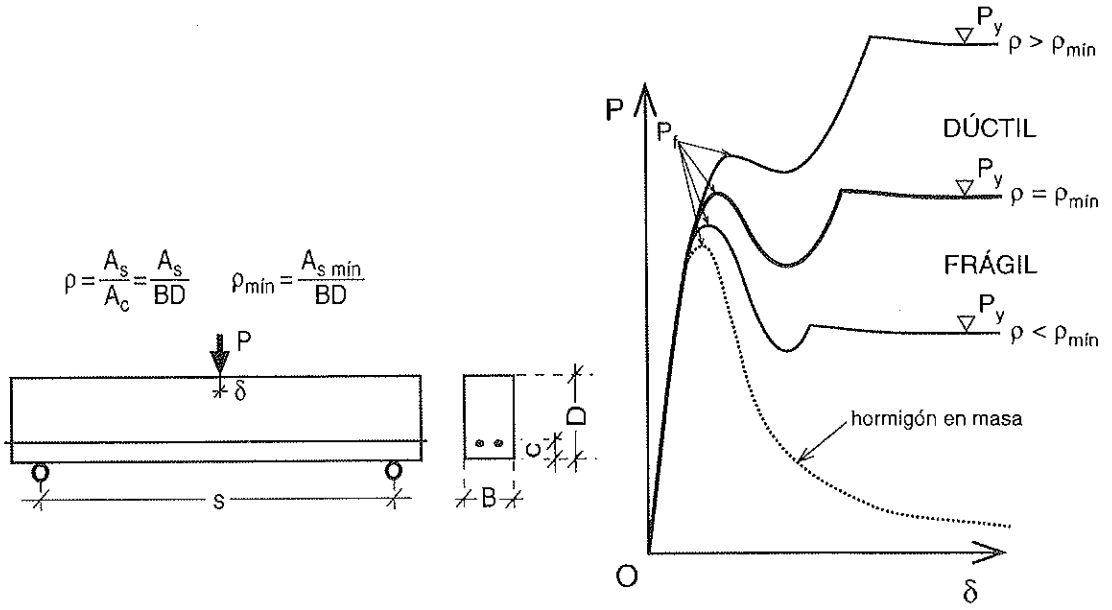


Figura 3. Transición frágil-dúctil, en una viga armada, a medida que vamos aumentando su cuantía de acero. El comportamiento límite marca la cuantía mínima, $\rho_{mín}$.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

gón. Estos cuatro parámetros, expresados de modo adimensional, son:

$$\left.\begin{array}{ll} D^* = \dfrac{D}{l_{ch}}, & \rho = \dfrac{A_s}{A_c} \\ \eta = \left(n\dfrac{\tau_c}{f_t}\dfrac{p\,l_{ch}}{A_s}\right)^{1/2}, & f_y^* = \dfrac{f_y}{f_t} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

η representa a la adherencia, y depende de la tensión rasante última entre hormigón y acero, τ_c, del perímetro de las barras, p, y de la relación entre los módulos de elasticidad del acero y el hormigón, $n = E_s/E_c$ (el resto de parámetros se introducen para que η sea adimensional). De un análisis detallado de las ecuaciones, se deduce que estos parámetros se asocian en grupos, de manera que sólo dos grupos afectan simultáneamente al comportamiento. Los grupos dominantes dependen de si el acero está en régimen elástico o plástico, y son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} D^* \text{ y } \rho\eta \text{ rég. elástico} \\ D^* \text{ y } \rho f_y^* \text{ rég. plástico} \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Este modelo es capaz de reproducir ensayos realizados sobre vigas con poca armadura siempre que se conozcan los valores de los parámetros indicados en (7), lo cual implica una completa caracterización del hormigón, del acero y de la adherencia que se desarrolla entre ambos.

Como los ensayos disponibles en la bibliografía no proporcionan estos datos, se realizó un programa experimental propio, diseñado para comprobar cómo se modifica la respuesta de vigas débilmente armadas cuando varía alguno de los parámetros deducidos por el modelo de la longitud efectiva de anclaje (7).

Para poder ensayar vigas dentro del rango de tamaños más amplio compatible con el equipamiento del laboratorio, se utilizó un micro-hormigón cuyo comportamiento en probetas reducidas es similar al de probetas de mayor tamaño elaboradas con hormigón convencional. En concreto, fabricamos vigas de 75, 150 y 300 mm de canto, con dimensiones proporcionales entre sí. El factor de escala conseguido hace que estas vigas tengan un comportamiento análogo a vigas ordinarias de 175, 350 y 700 mm de canto, es decir, un rango de tamaños que cubre la variación práctica que se da en este tipo de elemento estructural. Las proporciones de las vigas se pueden ver en la Figura 2.

Las armaduras también se fabricaron a escala, a partir de alambres de acero de 2,5 mm de diámetro. Las vigas se armaron con tres niveles de cuantía, conseguidos a base de poner 1, 2 ó 4 alambres, sin variar el diámetro. La mitad de las vigas se armó con alambre liso, y la otra mitad con alambre tratado superficialmente para aumentar la adherencia entre el acero y el hormigón.

La Figura 4 compara algunos de los resultados experimentales, con las predicciones del modelo. Al aumentar la cuantía, usando el mismo tipo de acero, aumenta la carga última que la viga puede soportar, como puede apreciarse en la Figura 4a. Por otra parte, la adherencia determina la resistencia post-pico de la viga: la viga con armadura lisa es menos resistente que la que lleva armadura corrugada (Figura 4b). Además, los resultados experimentales nos han permitido comprobar que el modelo reproduce el efecto de escala y el comportamiento de las vigas ante la variación del resto de los parámetros influyentes en la rotura. Las curvas que da este modelo teórico se ajustan bien a los resultados experimentales, como puede observarse en la Figura 4, y por lo tanto, constituye una buena herramienta para estudiar este tipo de estructura por medio de la realización de "ensayos teóricos", mucho más flexibles y económicos que los ensayos reales.

4.2. Fórmula para armadura mínima

Con el modelo de la longitud efectiva de anclaje, se puede deducir una expresión sencilla de la carga máxima de fisuración, P_f, en función de las cuatro variables definidas en (7) que, aparte de la geometría, determinan su valor. La carga última de plastificación, P_y, se obtiene fácilmente por equilibrio de la sección fisurada. Si hacemos que $P_f = P_y$ y despejamos la cuantía (6), obtenemos una expresión con la que podemos calcular $\rho_{mín}$ en función del canto de la viga, D, del recu-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

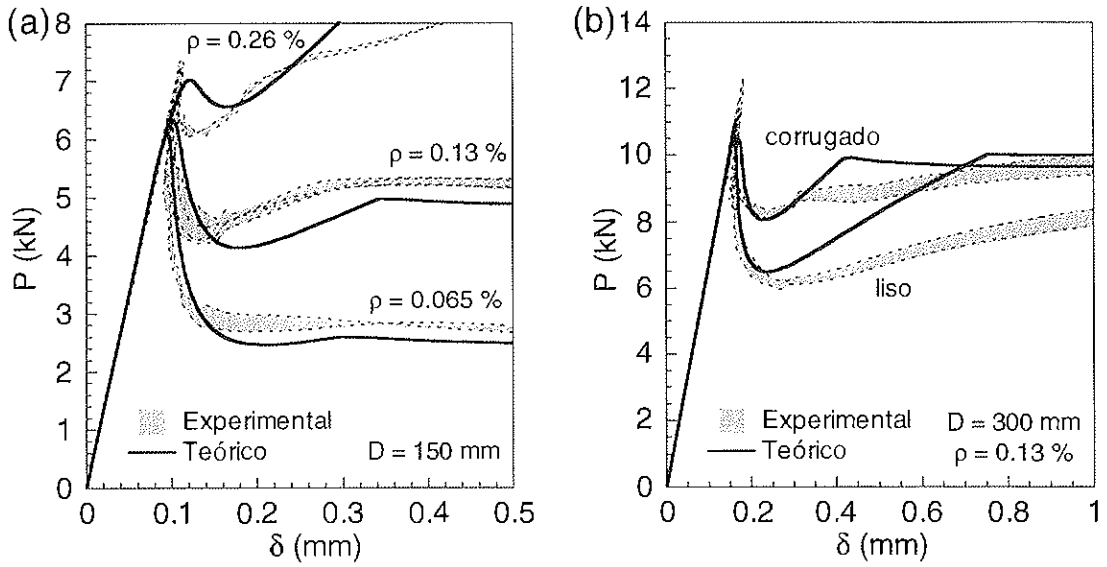


Figura 4. Curvas carga-flecha (P–δ) experimentales (región tramada) comparadas con los resultados del modelo teórico, para ese mismo tipo de vigas. (a) Curvas P-δ obtenidas para vigas de 150 mm de canto y varias cuantías; (b) Curvas P-δ para vigas de 300 mm de canto, con la misma cuantía, pero con distinta adherencia acero-hormigón.

brimiento, c, de la tensión de cedencia del acero, f_y, y de la adherencia, η:

$$\rho_{mín}\left(D_l^*, c_l^*, f_y^*, \eta_l\right) = \frac{0{,}174}{(1-\gamma)} \frac{1+\left(0{,}85+2{,}3\,D_l^*\right)^{-1}}{f_y^* - \eta_l\,\varphi} \qquad (9)$$

donde:

$$\left.\begin{array}{ll} D_l^* = \dfrac{D}{\alpha\, l_{ch}} & c_l^* = \dfrac{c}{\alpha\, l_{ch}} \\ f_y^* = \dfrac{f_y}{f_t} & \eta_l = \sqrt{\alpha}\;\eta \\ \gamma = \dfrac{c}{D} & \varphi = \left(D_l^*\right)^{0{,}25} - 3{,}61 c_l^* \end{array}\right\} \qquad (10)$$

α es un coeficiente que es función del comportamiento del hormigón en las primeras fases de la rotura. Se puede obtener experimentalmente siguiendo las indicaciones recogidas en [19]; a falta de esta medida experimental, su valor se puede aproximar por medio de la siguiente expresión, basada en las propiedades de fractura del hormigón establecidas en el Código Modelo [20]:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{65 + 15\, d_{máx}/d_o}{170} \\ \text{donde: } \begin{array}{l} d_{máx} = \text{t. máx. del árido} \\ d_o = 8 \text{ mm} \end{array} \end{array}\right\} \qquad (11)$$

El coeficiente φ es proporcional al aumento en la carga máxima de la viga cuando crecen la cuantía y/o la adherencia, y por lo tanto no puede ser negativo. Se tomará $\varphi = 0$ en el caso de que $[(D_l^*)^{0.25} - 3{,}61 c_l^*] < 0$.

Para ver la influencia de cada variable en la ecuación (9), resulta útil una representación tridimensional para valores fijos del recubrimiento y de la tensión de cedencia. En la Figura 5 se ha dibujado una perspectiva de la superficie de cuantía mínima, para $\alpha = 0{,}5$, $c = 0{,}10\, l_{ch}$ y $f_y = 120\, f_t$ (por ejemplo, si $l_{ch} = 300$ mm y $f_t = 4$ MPa, valores típicos en un hormigón normal, estamos hablando de un recubrimiento de 30 mm y de un acero de construcción de 480 MPa): los ejes horizontales son el tamaño ($D_l^* = 0{,}5$ a 8, es decir, D = 75 a 1200 mm) y la adherencia ($\eta_l = 0$ a 80, es decir, si usamos barras Ø5 con n = 7, la variación en la tensión crítica de adherencia es $\tau_c = 0$ a 30,5 MPa).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

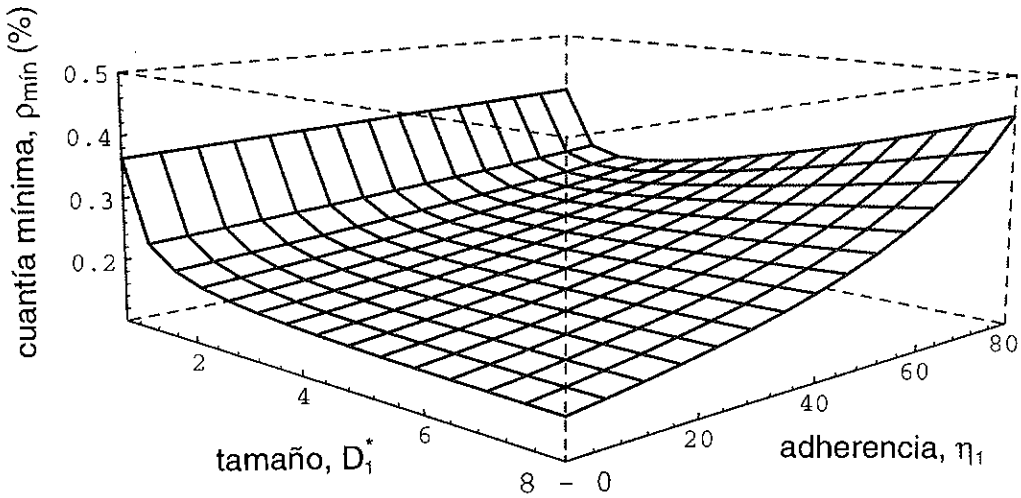


Figura 5. Superficie de cuantía mínima, para c = 0,10 l_{ch} y f_y = 120 f_t. Los ejes horizontales son el tamaño (D_1^* = 0,5 a 8) y la adherencia (η_1 = 0 a 80).

(a) Influencia del tamaño

En la superficie de armadura mínima dibujada en la Figura 5 se puede observar la influencia de la escala de la viga.

Para adherencias bajas (η_1 = 0 a 20) $\rho_{mín}$ disminuye a medida que aumenta el tamaño, de modo muy rápido primero pero con tendencia a suavizarse en los tamaños medios y grandes. Para adherencias medias (η_1 = 20 a 40) el descenso de la armadura mínima es igualmente grande al principio, aunque a medida que sigue aumentando el tamaño $\rho_{mín}$ se estabiliza (η_1 = 20) e incluso aumenta ligeramente. Sin embargo, para adherencias altas (η_1 = 40 a 60) y muy altas (η_1 = 60 a 80) en los tamaños grandes $\rho_{mín}$ crece rápidamente: Esta tendencia se debe al aumento de la carga máxima de fisuración, debida al aumento de rigidez del mecanismo de fisuración, cuando la armadura es muy adherente.

(b) Influencia de la adherencia

Para todos los tamaños, el aumento de adherencia supone un incremento de la cuantía mínima necesaria para conseguir una rotura dúctil, precisamente debido a que ese aumento de la adherencia rigidiza el conjunto de la viga. El mecanismo de fisuración es más rígido cuando el acero tiene menos posibilidades de deformarse por su cuenta, es decir, cuando está más adherido al hormigón y debe acompañarle en su deformación.

La rigidez del mecanismo de fisuración depende también del tamaño: Para tamaños pequeños, el aumento de $\rho_{mín}$ con la adherencia es suave y casi lineal para cualquier adherencia, mientras que a medida que aumenta el tamaño –y por lo tanto crece la rigidez– el incremento de $\rho_{mín}$ tiende a ser más brusco, especialmente con adherencias altas ($\eta_1 \geq 40$).

(c) Influencia del recubrimiento

La Figura 6 dibuja los resultados que da la ecuación de cuantía mínima, para dos valores del recubrimiento: c = 0 (Figura 6a) y c = 0,15 l_{ch} (Figura 6b). Para una longitud característica de l_{ch} = 300 mm, propia de un hormigón normal, estos valores corresponden a c = 0 y 45 mm respectivamente. Con objeto de facilitar la comparación entre las dos figuras, se ha superpuesto una trama gris sobre las soluciones en las que $30 \leq \eta_1 \leq 50$.

Con recubrimiento nulo (c = 0 mm; Figura 6a), la fisura se propaga desde el principio con la oposición de la armadura, lo cual provoca que, al llegar al máximo de fisuración, el acero esté bastante solicitado y la influencia de la adherencia sea muy significativa. Por el contrario, con recubrimientos relativamente grandes puede ocurrir que la

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

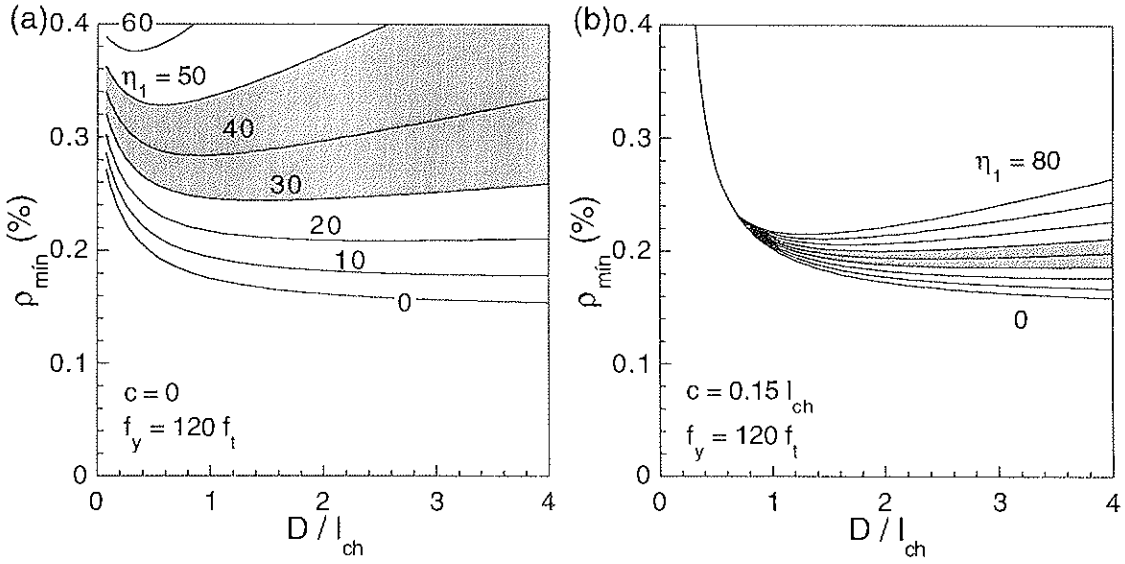


Figura 6. Curvas de cuantía mínima, para dos valores distintos del recubrimiento y $f_y = 120\ f_t$. La abscisa es el tamaño. En cada figura, se dibujan curvas para varias adherencias. (a) c = 0, y (b) $c = 0{,}15\ l_{ch}$. Se ha sombreado la zona que abarca las curvas entre $\eta_1 = 30$ y 50, para facilitar la comparación entre las dos figuras.

carga máxima de fisuración se alcance con parte del recubrimiento todavía intacto, en cuyo caso el acero contribuye muy poco a la resistencia máxima de la viga. En la Figura 6b se da esta situación, en el caso de tamaños pequeños ($D \leq 0{,}7\ l_{ch}$); en esa zona, la cuantía mínima es la que genera la misma resistencia última en la viga que la resistencia máxima de una viga de hormigón en masa de esas proporciones (y es independiente de la adherencia).

En definitiva, la Figura 6 muestra que, si la armadura es adherente, se da una fuerte disminución de $\rho_{mín}$ cuando aumenta el recubrimiento. Este resultado merece una reflexión pausada, ya que parece contradecir el hecho de que la viga es más resistente cuanto menor es el recubrimiento, para cuantía y resto de parámetros constantes; lo que ocurre es que al aumentar la resistencia en fisuración de la viga, es necesaria más cuantía para obtener idéntica resistencia última con el hormigón roto. Recíprocamente, si el recubrimiento es grande el acero apenas influye en la resistencia de fisuración de la viga y, por lo tanto, la cuantía necesaria para obtener esa misma resistencia última es más pequeña. Además, hay que recordar que, con la armadura mínima, queremos dotar de ductilidad a una pieza que resiste las cargas previstas sin apenas cuantía. Es decir, no buscamos mayor resistencia, sino evitar la rotura frágil de un elemento que ya es suficientemente resistente.

(d) Influencia de la tensión de cedencia del acero

La tensión de cedencia del acero es otro de los parámetros que intervienen en la ecuación (9), que determina las curvas de cuantía mínima que estamos estudiando.

En las Figuras 7a-b, hemos dibujado dos curvas de cuantía mínima, variando únicamente la tensión de cedencia, para $f_y = 100 \cdot f_t$, y 160 f_t. Resulta lógico comprobar que si f_y es mayor, va a ser necesaria menos cuantía mínima, a igualdad del resto de los parámetros.

Sin embargo, esta reducción de $\rho_{mín}$ no es directamente proporcional a f_y, excepto en el caso límite de adherencia nula: La cuantía mínima depende, verdaderamente, de la tensión de cedencia. Con la fórmula (9) no estamos hallando una cuantía mínima que se pueda reducir a la mitad si el acero tiene el doble de tensión de cedencia. Esto se debe a que la carga máxima de plastificación, P_y,

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

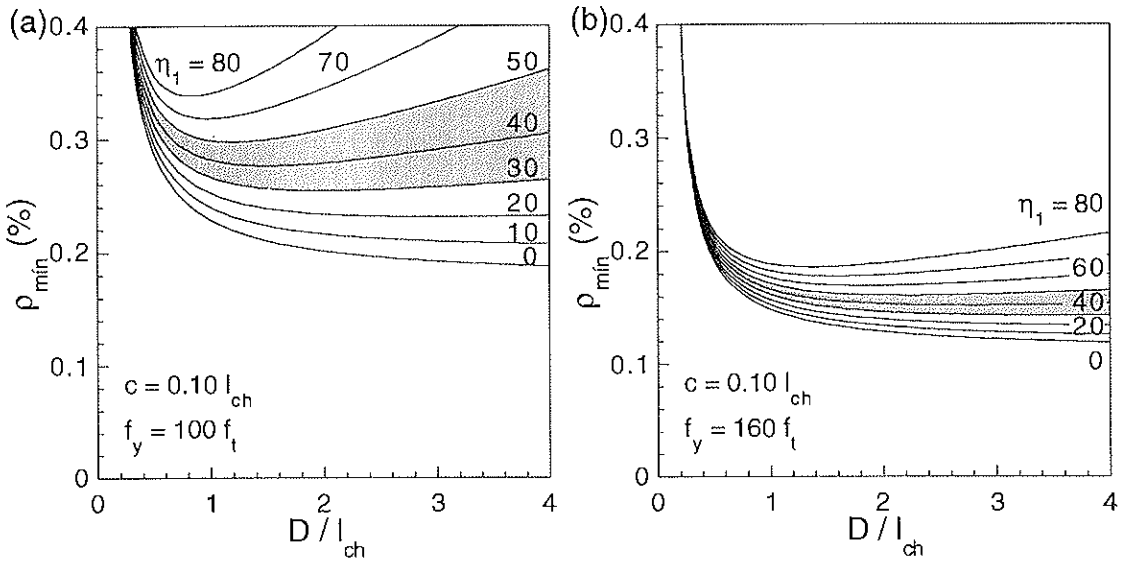


Figura 7. Curvas de cuantía mínima, para distintos valores de la tensión de cedencia del acero, con recubrimiento constante, $c = 0{,}10\ l_{ch}$. El eje de abscisas es el tamaño ($D = 0{,}25\ l_{ch}$ a $8\ l_{ch}$); en cada figura se dibujan curvas para varias adherencias ($\eta_1 = 0$ a 80). (a) $f_y = 100\ f_t$; y (b) $f_y = 160\ f_t$. Se ha sombreado la zona que abarca las curvas entre $\eta_1 = 30$ y 50, para facilitar la comparación entre las dos figuras.

depende de la tensión de cedencia, mientras que la carga máxima de fisuración, P_f, es independiente de ella, puesto que el acero está todavía en régimen elástico.

(e) Comparación con las normas de construcción

Para comparar las recomendaciones de armadura mínima recogidas en la normativa, con los cálculos de nuestra fórmula, del modo más completo posible, hemos elegido ocho tipos de hormigón, con las características que se indican en la Tabla 1. Se trata de hormigones tipo definidos según el Código Modelo en sus secciones 2.1.3-4 [20]; cada hormigón se denomina por el valor de su resistencia a compresión característica, f_{ck}, en MPa.

Hormigón-tipo Código Modelo	f_{ck} MPa	f_c MPa	f_t MPa	G_f N/m	E_c GPa	l_{ch} mm	$\alpha\ l_{ch}$ mm
C12	12	20	1,6	50	27	527	295
C20	20	28	2,2	60	30	372	208
C30	30	38	2,9	75	34	303	169
C40	40	48	3,5	90	36	264	148
C50	50	58	4,1	105	39	243	136
C60	60	68	4,6	115	41	223	125
C70	70	78	5,1	125	43	206	115
C80	80	88	5,6	135	44	189	106

Tabla 1. Parámetros característicos de los hormigones tipo del Código Modelo, con un diámetro máximo de árido de 16 mm.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Eu las Figuras 8a-h se dibujan las curvas de cuantía mínima, en función del canto, para una viga de sección rectangular, recomendadas para cada uno de los ocho tipos de hormigón definidos en la Tabla 1 por cuatro Normas distintas: EH-91[21], ACI 318 [22], Eurocódigo 2 [23] y Código Modelo [20]; el recubrimiento es igual a dos veces y media el tamaño máximo del árido ($d_{máx}$ = 16 mm; c = 40 mm) y el acero tiene una tensión de cedencia de f_y = 480 MPa y un módulo de elasticidad de E_s = 210 GPa. Hemos representado el eje de ordenadas en escala logarítmica, para poder dibujar cómodamente curvas de $\rho_{mín}$ en un amplio rango de valores. Se comparau con los resultados de nnestra fórmula de armadura mínima (9) y también con las fórmulas de otros investigadores presentadas en la iutroducción. En nuestros cálculos hemos considerado dos tipos de adherencia, para barras lisas (η_1 = = 15), y corrugadas (η_1 = 50), y que corresponden, aproximadamente, al aumento de un orden de magnitud en la tensión de adherencia crítica, τ_c, por efecto de las corrugas.

En las Figuras 8a-h se ve que, excepto la EH-91, las Normas tienen una disminución

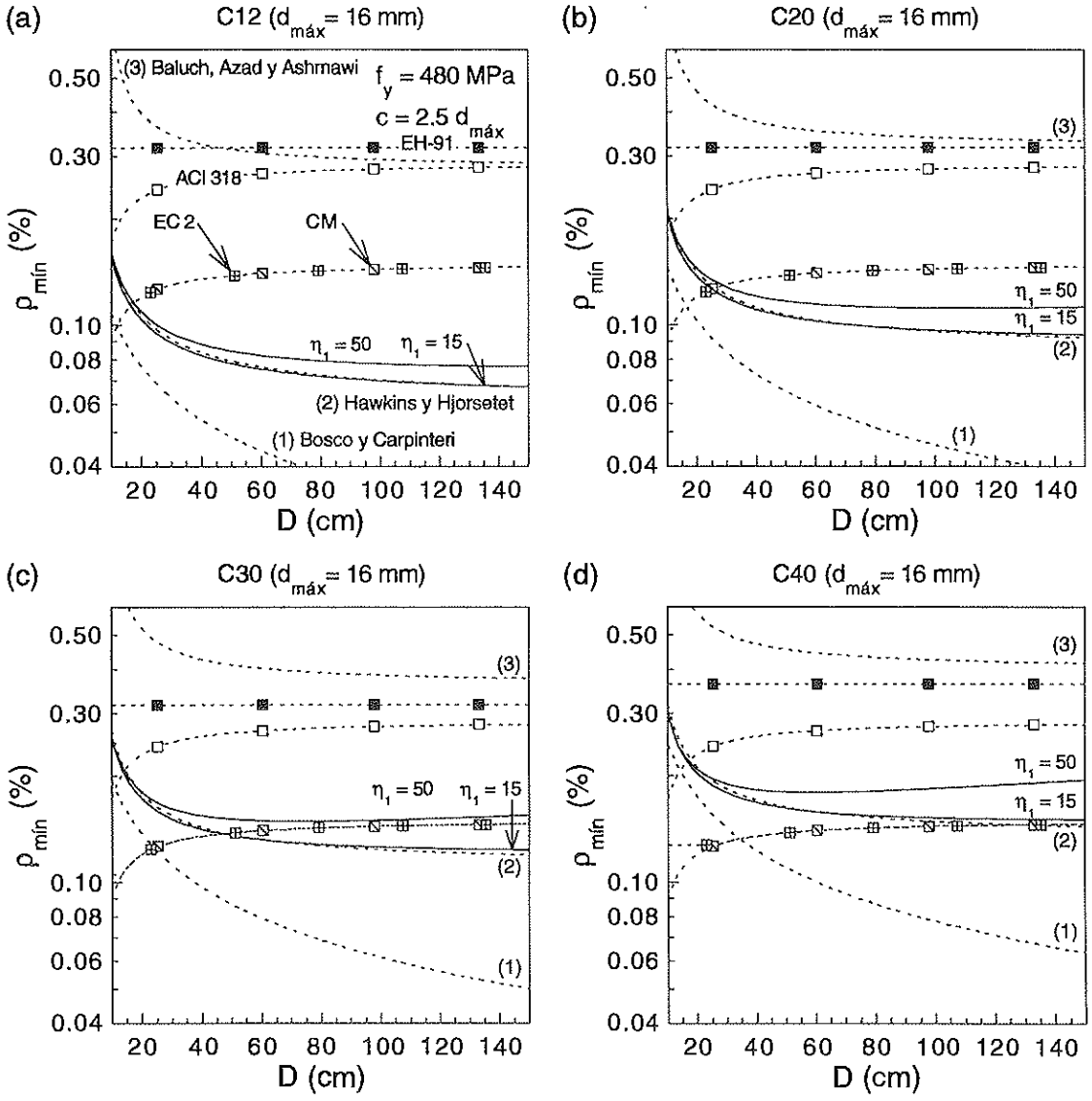


Figura 8a-d. Abacos de cuantía mínima para: (a) hormigón tipo C12; (b) C20; (c) C30; y (d) C40. En todos los casos la tensión de cedencia del acero es f_y = 480 MPa, el tamaño máximo del árido mide $d_{máx}$ = 16 mm, y el recubrimiento es c = 40 mm.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

de la cuantía mínima para tamaños pequeños (D < 30 cm) debida a que dependen del recubrimiento relativo (γ = c/D): Como el recubrimiento es constante, en la zona de tamaños pequeños es donde la variación de γ con el tamaño es más rápida. Para D < 30 cm, sin embargo, nuestra fórmula de cuantía mínima (9) calcula valores de $\rho_{mín}$ crecientes, a medida que disminuye el canto y, en general, superiores a los recomendados por las Normas. Unicamente la EH-91 está, en todos los casos, por encima de los valores dados por la fórmula.

Para tamaños medios y grandes (D≥30 cm), las recomendaciones del Eurocódigo 2 y del Código Modelo son cada vez más inseguras –si damos por buenos nuestros cálculos– a medida que vamos utilizando hormigones más resistentes. Con el hormigón-tipo C30 (Figura 8c), las curvas del Eurocódigo 2 y del Código Modelo caen de lleno en nuestra banda de resultados, mientras que para resistencias superiores sus recomendaciones serían inseguras. La ACI 318 –que es independiente de la resistencia del hormigón– queda por encima de nuestros cálculos en los hormigones de resistencia convencional; y sólo en hormigones de alta resistencia recomienda valores en el entorno de nuestros cálculos. La EH-91 también queda del lado de la seguridad en tamaños medios y

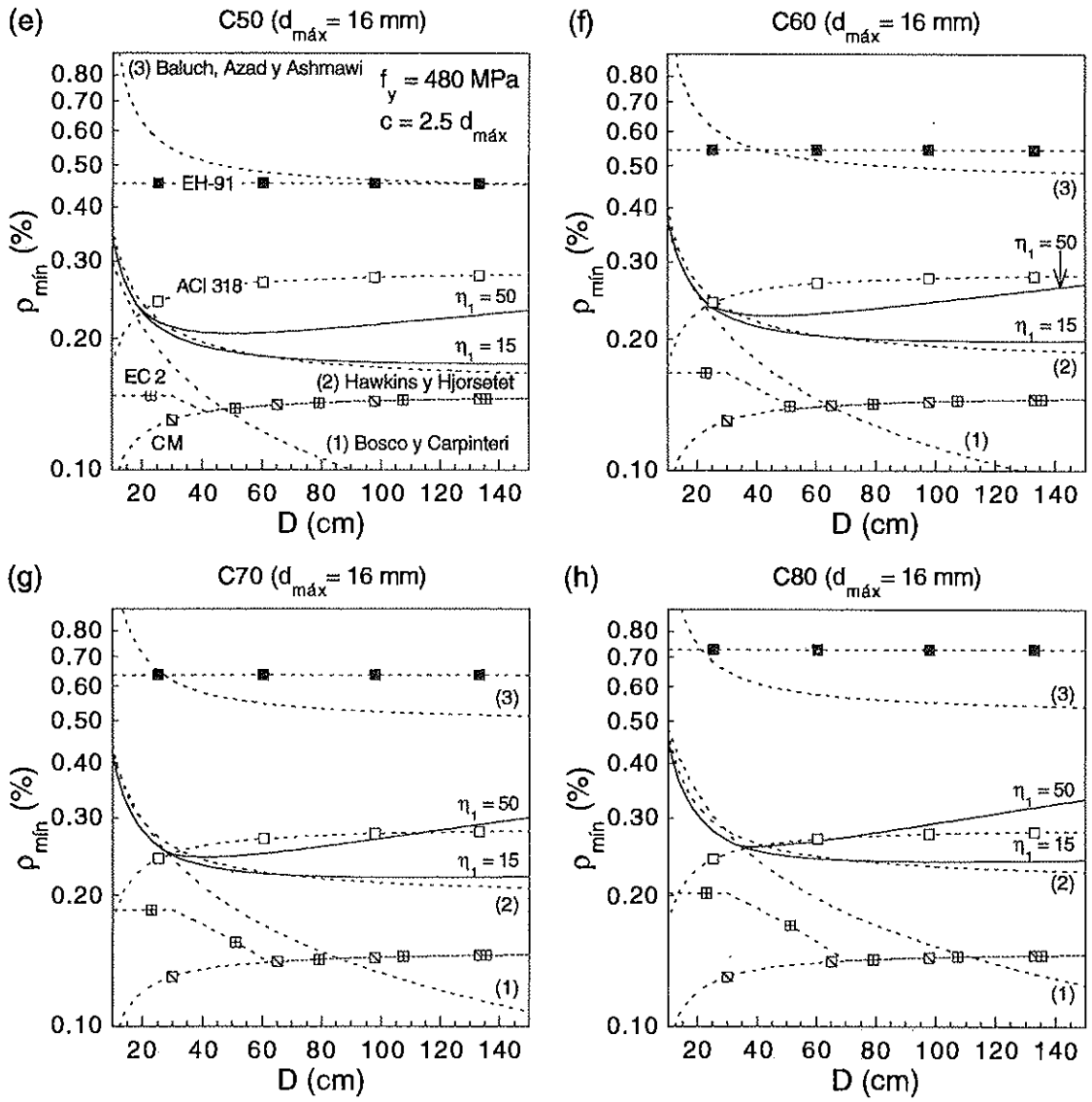


Figura 8e-h. Abacos de cuantía mínima para: (e) hormigón tipo C50; (f) C60; (g) C70; y (h) C80. En todos los casos la tensión de cedencia del acero es f_y = 480 MPa, el tamaño máximo del árido mide $d_{máx}$ = 16 mm, y el recubrimiento es c = 40 mm.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

grandes, especialmente a medida que crece la resistencia del hormigón: por ejemplo, en el C50 con acero corrugado (Figura 8e), llega a recomendar más del doble de cuantía mínima que la que calcula nuestra fórmula, 70% más cuantía que la ACI 318, y más del triple de la recomendada por el Eurocódigo 2 y el Código Modelo.

Si utilizamos acero con distinta tensión de cedencia, las tendencias de variación, para los distintos hormigones, son totalmente semejantes al caso anterior. Las variaciones de $\rho_{mín}$ en función de la tensión de cedencia, se pueden observar en las Figuras 9a-d, donde se muestran las curvas $\rho_{mín}$ con el hormigón-tipo C40, y acero con distintos valores de f_y (f_y = 240, 360, 480 y 600 MPa). Las cuantías dadas por las normas son, en general, inversamente proporcionales a la tensión de cedencia del acero (excepto en el Código Modelo, en el que hay únicamente un salto de valores si f_{yk} < 400 MPa); nuestra fórmula (9) también aumenta las cuantías al disminuir f_y, aunque no de modo proporcional.

La variación del tamaño máximo del árido tiene también repercusiones en las curvas de armadura mínima a través del parámetro α (11). Además, en estos ejemplos tomamos el recubrimiento proporcional al tamaño máximo del árido ($c = 2{,}5\ d_{máx}$), de modo que al cambiar $d_{máx}$ también cambiamos c.

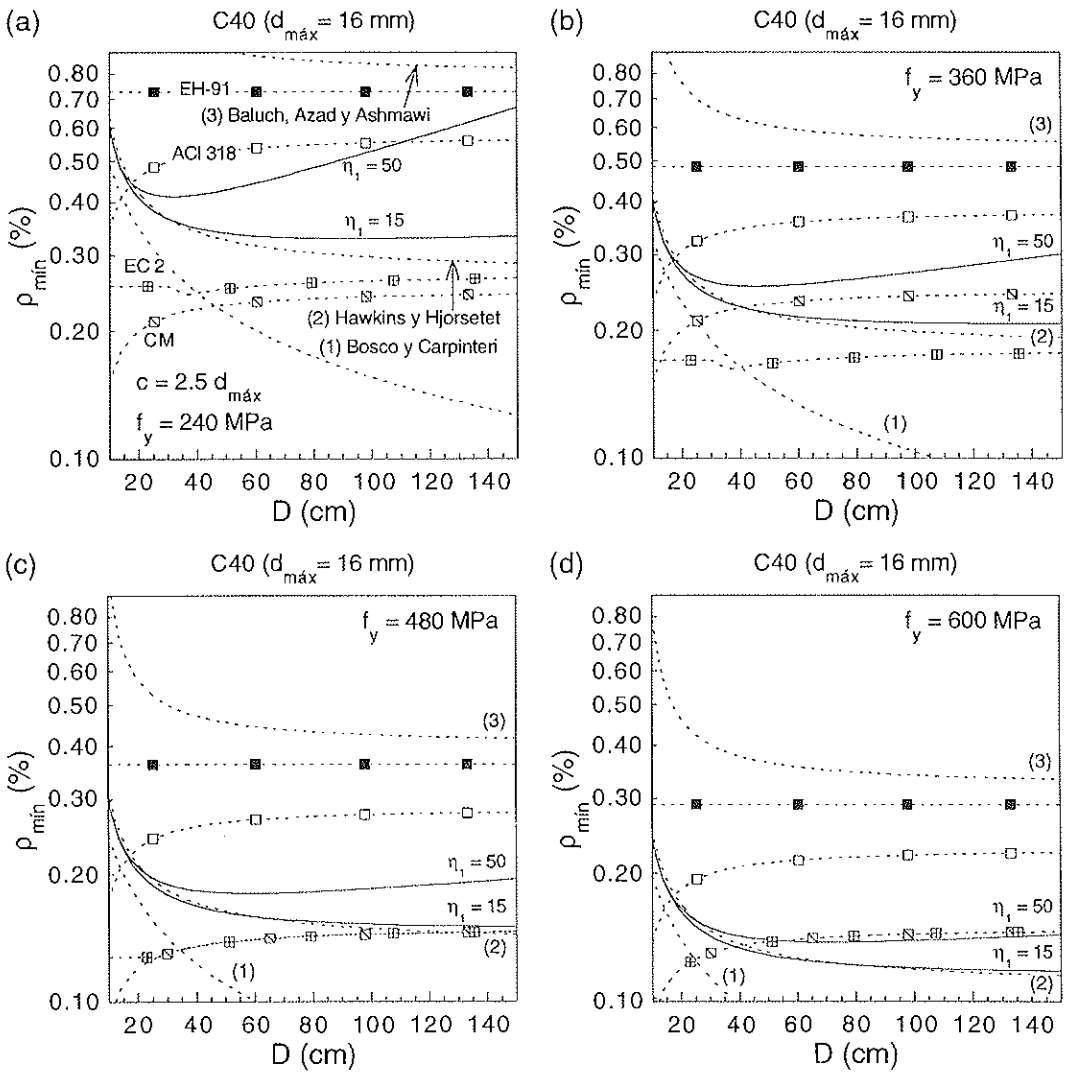


Figura 9. Abacos de cuantía mínima, para hormigón tipo C40; la tensión de cedencia del acero es: (a) f_y = 240 MPa; (b) f_y = 360 MPa; (c) f_y = 480 MPa; y (d) f_y = 600 MPa. El tamaño máximo de árido es $d_{máx}$ = 16 mm, y el recubrimiento mide c = 40 mm.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En las Figuras 10a-c, se puede ver la variación en las curvas a medida que aumenta $d_{máx}$ desde 8 a 32 mm. Las recomendaciones de las normas experimentan una variación muy pequeña debida al cambio del recubrimiento que sigue al cambio en $d_{máx}$; los valores calculados con la fórmula sí que cambian, especialmente con adherencias altas: el aumento del tamaño máximo del árido genera la misma tendencia de variación que frente a la disminución de la resistencia en el hormigón. Esto se debe a que el parámetro α crece por el aumento del tamaño máximo de árido (11), y además l_{ch} aumenta cuando disminuye la resistencia a compresión (Tabla 1).

En la Figura 10d hemos hecho los cálculos con recubrimiento nulo. Ya hemos comentado que las normas de construcción son sensibles al recubrimiento relativo, $\gamma = c/D$; como en este caso γ es constante (y además igual a cero) las recomendaciones de las normas son líneas rectas horizontales (no dependen del tamaño). Unicamente en este caso ideal hay una zona –vigas grandes con armadura corrugada– en la que nuestra fórmula está por encima de las recomendaciones de la Norma española.

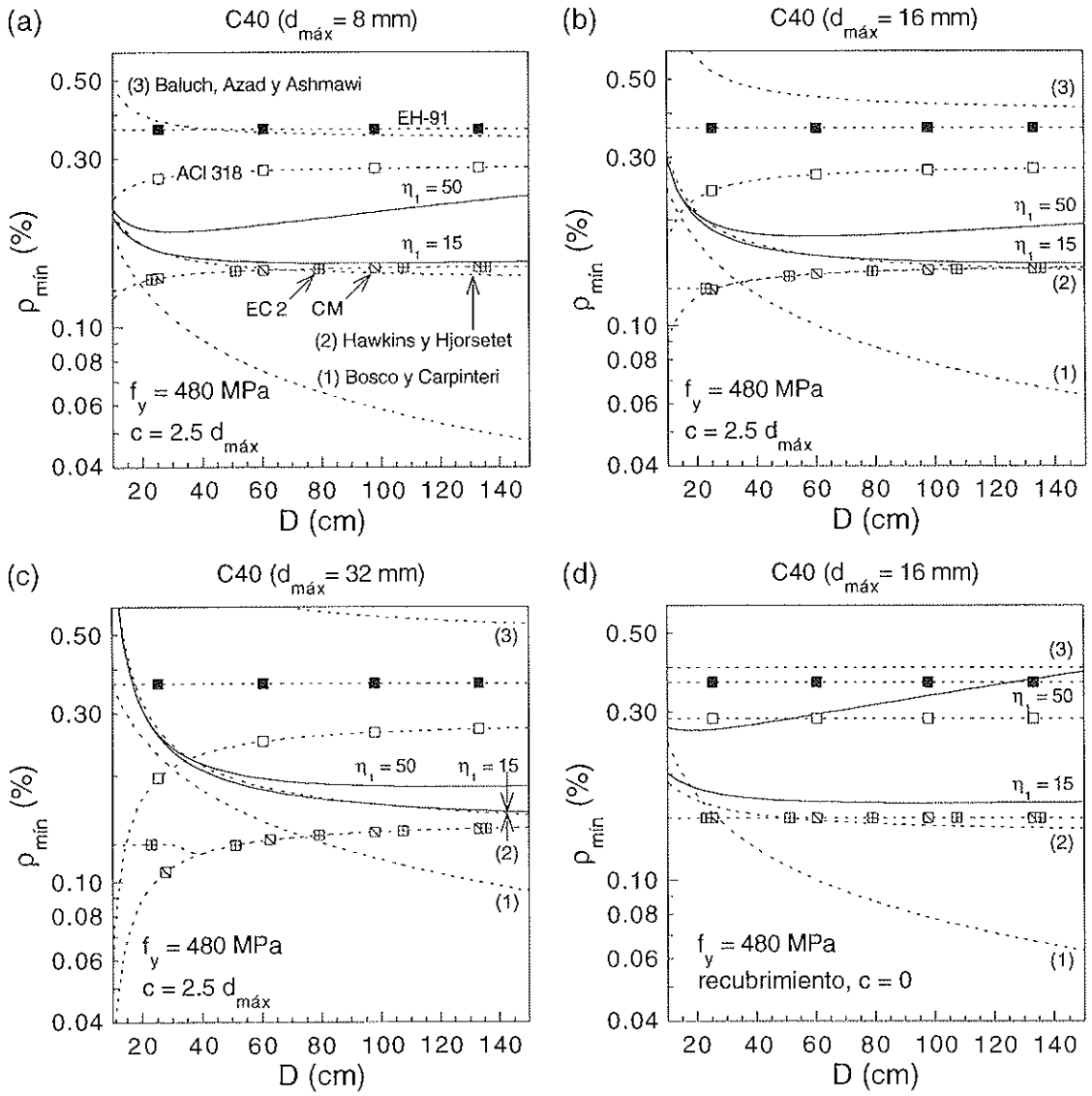


Figura 10. Abacos de cuantía mínima, para hormigón tipo C40, con distintos valores del tamaño máximo de árido y del recubrimiento: (a) $d_{máx}$ = 8 mm y c = 2,5 $d_{máx}$; (b) $d_{máx}$ = 16 mm y c = 2,5 $d_{máx}$; (c) $d_{máx}$ = 32 mm y c = 2,5 $d_{máx}$; (d) $d_{máx}$ = 16 mm y c = 0.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

(f) Comparación con otras fórmulas de armadura mínima

Como vimos en la introducción (s. 1), varios investigadores han estudiado el problema de la rotura dúctil usando la mecánica de la fractura aplicada al hormigón armado, llegando a expresiones con las que se puede calcular la cuantía mínima en flexión. Son las fórmulas de Bosco y Carpinteri (1), Baluch, Azad y Ashmawi (2), Gerstle (3) y Hawkins y Hjorsetet (4).

Las curvas dadas por estas fórmulas se han dibujado en todas y cada una de las Figuras 8-10, a excepción de la fórmula de Gerstle, ya que da valores de $\rho_{mín}$ muy elevados, superiores a los del resto de las fórmulas y a las recomendaciones de todas las normas. Al calcular los resultados de cada fórmula, hemos tenido en cuenta las hipótesis que hacen los respectivos autores, ya que los hormigones C12 a C80 están perfectamente definidos, incluso en sus parámetros de fractura y, además, hemos fijado las características del acero de refuerzo. Para obtener resultados con (4), hemos hecho uso de la expresión de f_r obtenida en [12].

La fórmula de Bosco y Carpinteri da cuantías mínimas, decrecientes en función del tamaño. Para cantos pequeños (D<30 cm) los resultados son ligeramente menores que los que da nuestra expresión (9), pero para tamaños medios y grandes se sitúa muy por debajo de nuestras curvas, de las recomendaciones de las Normas y de los cálculos de las demás fórmulas. Recordemos que tiene un origen semi-empírico a través de una serie de resultados relativamente limitada.

La fórmula de Baluch, Azad y Ashmawi depende del tamaño, en los gráficos dibujados, debido a que el recubrimiento se mantiene constante en todos los casos y, por lo tanto, el recubrimiento relativo es variable. Para tamaños pequeños calcula cuantías mínimas muy elevadas, mientras que en tamaños grandes se sitúa en el entorno de las recomendaciones de la EH-91. La sobrevaloración de $\rho_{mín}$ qne hace esta fórmula se debe a que imponen un coeficiente de seguridad de 2 en la carga máxima de fisuración a la hora de igualar con la carga última de plastificación y despejar el valor de $\rho_{mín}$.

Los cálculos que obtenemos con la fórmula de Hawkins y Hjorsetet son muy semejantes a los nuestros cuando la armadura es lisa: de hecho, esta fórmula es prácticamente un caso límite de (9) cuando la adherencia tiende a desvanecerse ($\eta_1 = 0$). Hawkins y Hjorsetet no tienen en cuenta el aumento de la carga máxima de fisuración debida a la armadura.

Sólo nuestra fórmula (9) es sensible a la adherencia acero-hormigón.

5. CONCLUSIONES

De este estudio sobre la armadura mínima podemos concluir:

- La armadura mínima en flexión manifiesta el efecto de escala típico de las estructuras de hormigón.
- La armadura mínima es, asimismo, función de la adherencia acero-hormigón, de la tensión de cedencia del acero y del recubrimiento de las barras de armado.
- Hemos deducido una expresión sencilla para el cálculo de $\rho_{mín}$, en función de estas variables, basándonos en un modelo teórico basado en la mecánica de la fractura y contrastado con un amplio programa experimental.
- Al comparar los criterios de diseño de la Normativa relativos a la armadura mínima, con los resultados que da nuestra expresión, se puede afirmar que es necesaria una revisión de dichos criterios, ya que no son sensibles ni al tamaño de la viga ni a la adherencia acero-hormigón. En particular, la EH-91 recomienda cuantías más elevadas que el resto de la normativa, y que las propuestas por los distintos equipos de investigación.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la DGICYT la ayuda económica recibida a través del proyecto PB93-0031, y a la CICYT a través del proyecto MAT94-0120-003. Asimismo, agra-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

decen a la empresa Cementos Portland S.A. la donación del cemento utilizado para fabricar las probetas del programa experimental.

7. REFERENCIAS

[1] Bazant, Z. P., and Cedolin, L., "Fracture mechanics of reinforced concrete", J. of the Eng. Mech. Div., 106, EM6 (Ed. ASCE), 1980, 1257-1306.

[2] Bazant, Z. P., and Cedolin, L., "Discussion and closure on 'Fracture mechanics of reinforced concrete'", *J. of the Eng. Mech. Div.,* 108, EM2 (Ed. ASCE), 1982, 464-471.

[3] Bosco, C., Carpinteri, A., and Debernardi, P. G., "Contribution to the discussion about minimum reinforcement in reinforced concrete beams", RILEM TC 90-FMA Code Work, Cardiff, 20-22 September 1989.

[4] Bosco, C., Carpinteri, A., and Debernardi, P. G., "Size effect on the minimum steel percentage for reinforced concrete beams", in *Fracture of Concrete and Rock, Recent Developments* (Ed. Shah, S. P., et al.), Elsevier Science Publishers, London, 1989, 672-681.

[5] ACI Committee 446, Fracture Mechanics, "State-of-art report", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures* (Ed. Bazant Z. P.), Elsevier Science Publishers Ltd., London, 1992, 1-140.

[6] Ozbolt, J., and Eligehausen, R., "Size effect in concrete and reinforced concrete structures", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures* (Ed. Wittmann, F. H.), Aedificatio Publishers, Freiburg, 1995, 665-674.

[7] Bosco, C., Carpinteri, A., and Debernardi, P. G., "Minimum reinforcement in high-strength concrete", *Journal of Structural Engineering,* 116, N. 2 (Ed. ASCE), 1990, 427-437.

[8] Baluch, M. H., Azad, A. K., and Ashmawi, W., "Fracture mechanics application to reinforced concrete members in flexure", in Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete (Ed. Carpinteri, A.), Elsevier Applied Science, London, 1992, 413-436.

[9] Gerstle, W. H., Partha, P. D., Prasad, N. N. V., Rahulkumar, P. and Ming, X., "Crack growth in flexural members–A fracture mechanics approach", *ACI Structural Journal,* 89, Title n. 89-S58, N. 6, 1992, 617-625.

[10] Hillerborg, A., Modeer, M. and Petersson, P. E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research,* 6, 1976, 773-782.

[11] Hawkins, N., and Hjorsetet, K., "Minimum reinforcement requirement for concrete flexural members", in *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete* (Ed. Carpinteri, A.), Elsevier Science Publishers, London, 1992, 379-412.

[12] Planas, J., Guinea, G. V., and Elices, M., "Rupture modulus and fracture properties of concrete", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures* (Ed. Wittmann, F. H.), Aedificatio Publishers, Freiburg, 1995, 95-110.

[13] Rokugo, K., Uchida, Y. and Koyanagi, W., "Flexural failure behavior of lightly reinforced concrete beams", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures* (Ed. Bazant, Z. P.), Elsevier Science Publishers, London, 1992, 775-781.

[14] Bosco, C., Carpinteri, A. and Debernardi, P. G., "Minimum reinforcement in high-strength concrete", *Journal of Structural Engineering,* 116, N. 2 (Ed. ASCE), 1990, 427-437.

[15] Hededal, O., and Kroon, I. B., "Lightly reinforced high-strength concrete", M. SC. Thesis, University of Åalborg, Denmark, 1991.

[16] Planas, J., Ruiz, G., and Elices, M., "Fracture of lightly reinforced concrete beams: theory and experiments", in *Fracture Mechanics of Concrete Structures* (Ed. Wittmann, F. H.), Aedificatio Publishers, Freiburg, 1995, 1179-1188.

[17] Ruiz, G., "El efecto de escala en vigas de hormigón débilmente armadas y su repercusión en los criterios de proyecto", Tesis Doctoral, Departamento de Ciencia de Materiales, E.T.S. Ingenieros de Caminos, C.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

y P., Universidad Politécnica de Madrid, 1996.

[18] Ruiz G., y Planas, J., "Propagación de una fisura cohesiva en vigas de hormigón débilmente armadas: modelo de la longitud efectiva de anclaje", Anales de Mecánica de la Fractura, 11, 1994, 506-513.

[19] Planas, J., Guinea, G. V., and Elices, M., "SF-2. Draft test method for linear initial portion of the softening curve of concrete", *Draft Proposal to the Committee of the JCI International Collaboration Project on Size Effect in Concrete Structures,* 1994.

[20] CEB-FIP Model Code, "CEB-FIP Model Code 1990, Final Draft", *Bulletin D'Information,* N. 203, 204 et 205, EFP Lausanne, 1991.

[21] EH-91, "Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado (EH-91)", Centro de Publicaciones del M.O.P.T.M.A., Madrid, 1992.

[22] ACI Committee 318, "Building Code requirements for reinforced concrete (ACI 318-89) (Revised 1992) and commentary–ACI 318-R89 (Revised 1992)", in ACI Manual of Concrete Practice, Part 3 (Ed. American Concrete Institute), Detroit, 1993.

[23] Eurocódigo 2, Subcomité CEN/TC 250/SC2, "Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón (ENV 1992-1-1:1991)" (Ed. de la traducción española: Asociación Española de Normalización y Certificación, AENOR), Madrid, 1993.

RESUMEN

Las normas de construcción calculan la cnantía mínima de acuerdo con la teoría de agotamiento (plasticidad), que da resultados independientes del tamaño. Sin embargo, las vigas débilmente armadas muestran el efecto de escala: la carga máxima que pueden soportar crece en menor proporción que el canto de la viga, a igualdad de cuantía y tipo de acero, sobre vigas proporcionales. La Mecánica de la Fractura aplicada al hormigón armado, permite reproducir este efecto. En este artículo se presenta una expresión, desarrollada por los autores a través de un modelo contrastado con un amplio programa experimental. Esta fórmula se compara con las recomendaciones relativas a la cuantía mínima de las más importantes normas de construcción, y con las expresiones propuestas por otros autores. De este análisis se desprende la conveniencia de revisar la Norma Española EH-91 en este punto, puesto que, además de no ser sensible al tamaño del elemento estructural, recomienda cuantías más elevadas que las del resto de la normativa y que las propuestas por los distintos equipos de investigación.

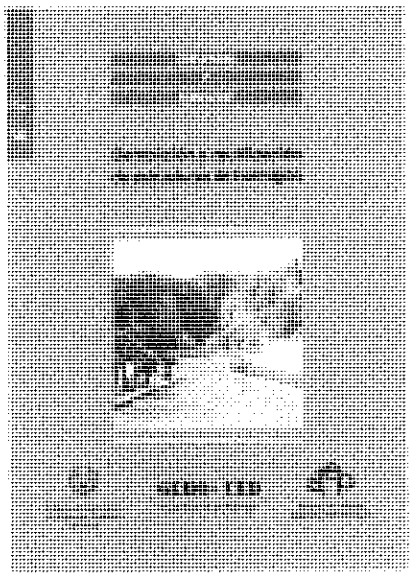
SUMMARY

Minimum reinforcement in building codes in usually calculated in agreement with limit state theories (plasticity), whose results are not size dependent. Nevertheless, lightly reinforced beams show size effect: maximum load grows slower than beam depth in proportional beams, reinforcement ratio and steel characteristics remaining constant. Concrete fracture mechanics catches this size effect: this paper presents a new reinforcement ratio formula, based on fracture mechanics, obtained through a model and an experimental program. This expression is also compared with building codes and another authors formulae. This comparison shows the convenience of revising Spanish EH-91 in this subject, because its minimum reinforcement recommendations do not depend on the beam size and seem to be too conservative.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

NUEVA PUBLICACION DE LA ATEP

"DEMOLICIÓN Y REUTILIZACIÓN DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN"



Por un doble motivo es una verdadera satisfacción presentar este nuevo manual "Demolición y reutilización de estructuras de hormigón". De un lado, por la rabiosa actualidad de la materia de que se trata, sobre la cual no teníamos prácticamente ninguna literatura hasta ahora pese a la creciente necesidad de la misma. Y de otro, por ser fruto del trabajo de un grupo mixto de ATEP y de GEHO, asociaciones hermanas que hasta ahora han competido limpiamente en la tarea de facilitar a los técnicos del hormigón herramientas avanzadas de ayuda en sus trabajos.

Conscientes del deseo albergado por la mayoría de sus respectivos asociados en el sentido de que ambas asociaciones se fusionasen, los órganos directivos de GEHO y ATEP crearon hace un año un Grupo Mixto de Reflexión para preparar las bases de dicha fusión.

Por la novedad de la materia que trata, el presente documento debe ser considerado como un primer paso. Un paso firme, que tiene la virtud de presentar un marco perfectamente ordenado en el que figuran los conocimientos actuales y en el que encontrarán fácil cabida los nuevos avances. Queda así abierto un procedimiento de mejora al que pueden contribuir todos los técnicos españoles haciéndonos llegar sus críticas y sugerencias.

En los últimos años se han realizado en España demoliciones muy significativas de estructuras de hormigón armado y pretensado y, previsiblemente, se seguirán realizando. Los condicionantes de estas demoliciones son cada vez más estrictos por la progresiva sensibilización, en relación al medio ambiente, de las Propiedades (Administraciones Públicas y Empresas privadas) y ciudadanos. Esta sensibilización hace referencia tanto a las condiciones ambientales durante la ejecución (menor ruido, vibraciones, polvo, molestias a los tráficos circundantes, etc.) como al destino final de los residuos obtenidos y el impacto ambiental de los mismos. Ello ha contribuido a una diversificación y especialización importante de las técnicas de demolición en estos años.

Conscientes de esta problemática global, la Asociación Técnica Española del Pretensado (ATEP) y el Grupo Español del Hormigón (GEHO) se plantearon de forma conjunta la creación de un grupo de trabajo, en julio de 1995, que abordase estos temas. Se contó con la colaboración de expertos profesionales que han redactado y supervisado la versión final del manual.

Asimismo, es intención de GEHO y ATEP presentar el documento, una vez mejorado, con las aportaciones de sus socios respectivos, a la recién nacida **fib** (Federaión Internacional del Hormigón), fruto de la fusión del CEB y de la FIP, ya que puede constituir una base de discusión y culminar en un documento de carácter internacional.

Los interesados en adquirir esta publicación, cuyo precio es de 1.950,– pesetas (IVA incluido), para los Miembros de la ATEP y 2.600,– pesetas (IVA incluido), para los no Miembros, deberán dirigirse a:

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA
DEL PRETENSADO
Apartado de Correos 19002
28080 MADRID
Tel. y Fax: (91) 766 07 03

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Estudio de efectos diferidos, en secciones fisuradas, mediante el método multicapa

Celso Iglesias
Dr. Ingeniero de Caminos
M.S. (ENPC)
Carlos Fernández Casado, S. L.

1. INTRODUCCION

Este trabajo resume la tesis doctoral que el autor ha desarrollado bajo la dirección del Prof. Javier Manterola, dentro del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de las Estructuras, de la ETS de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid, la cual no hubiera sido posible sin el incondicional apoyo de todos los miembros de CARLOS FERNANDEZ CASADO, S. L., a quienes se les agradece desde aquí.

2. OBJETO CONCRETO DE LA TESIS DOCTORAL

Se establece un método para el cálculo en servicio de estructuras de hormigón, contando con los efectos diferidos de fluencia y deformaciones impuestas. La aproximación se basa en el *modelo multicapa (MMC)*, que permite considerar la fisuración, a nivel sección, en un método paso-a-paso.

Se modeliza la sección en capas, obteniendo un sistema de ecuaciones, de orden doble al número de capas. Cada capa soporta un axil y un momento reducidos, en su *centro de gravedad (cdg)*, con los que se calcula su deformación y curvatura, con esta secuencia:

1. Distribución en el tiempo, de las cargas exteriores (N, M) y de las deformaciones autoinducidas o impuestas.
2. Cálculo de la distribución inicial de tensiones, con el MMC o *"solución instantánea"*, al inicio del intervalo en curso.
3. Cálculo de tensiones al final del intervalo, resultante de imponer las ecuaciones de compatibilidad o *"solución diferida"*.

En lugar de tomar como incógnitas los 2n axiles y flectores en las capas, se resuelve "a priori" el sistema de orden 2n, tomando como incógnitas la deformación longitudinal y la curvatura en el cdg de la sección, reduciéndose a un sistema de 2x2. Los coeficientes del sistema dependen de la geometría y de las deformaciones ficticias en las capas, o sea, las que tendrían aisladas. Al colaborar con las demás, se modifican por la deformación y curvatura total de la sección completa. Este método, que recibe el nombre de *equilibrio de autotensión (EA)*, se adapta bien a un cálculo paso-a-paso, con fisuración y *tensión-stiffening (TS)*, muy importante al calcular flechas en estructuras fisuradas. La fisuración aparece, a veces, por tensiones de origen térmico, y con el MMC se modeliza muy bien una variación de temperatura con el canto. El número y canto de las capas depende de la hipótesis de linealidad de la deformación en cada capa.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El método paso-a-paso calcula, en cada etapa, la "sección transformada" respecto a un material de referencia. En fisuración, se establece un método iterativo para calcular la *fibra neutra (fn)*. En cada capa se toma un número suficiente de puntos de integración de tensiones, para obtener su distribución, con las hipótesis clásicas:

1. Fluencia lineal e hipótesis de Navier.
2. Fluencia de tracción igual a fluencia de compresión.
3. Aceros en régimen elástico.

3. BREVE DESCRIPCION DEL MODELO

Al haber redistribución tensional y deformación de fluencia, la rigidez de la sección fisurada varía. La fluencia modifica la posición de la fn con el tiempo, estableciéndose un método iterativo para su cálculo.

Los desplazamientos de la estructura se calculan con los métodos habituales, a partir de los esfuerzos reducidos en cada capa i, y de las rigideces calculadas con el MMC. Se tiene en cuenta el efecto TS considerando que las capas fisuradas, en contacto con los aceros pasivos, contribuyen a la rigidez de la sección, aunque se ignoran resistiendo a tracción. El efecto se estima con un modelo de TS y se integra en el cálculo general. El cálculo "a nivel estructura" se hace con los esfuerzos seccionales, obtenidos integrando en todas las capas. Estos generan deformaciones seccionales y permiten calcular "a nivel estructura", con las técnicas habituales basadas en la discretización en el tiempo, es decir:

1. Modelización de la sección transversal con el MMC.
2. Cálculo de las deformaciones de retracción y fluencia.
3. Cálculo a "nivel sección" con fisuración y TS.
4. Cálculo a "nivel estructura", contando con las redistribuciones a nivel sección y los esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad.

4. ¿QUE SE ESPERABA DEL TEMA DE LA TESIS?

1. Establecer un modelo de cálculo evolutivo de estructuras en servicio, con deformaciones de fluencia, autoinducidas (retracción) e impuestas (temperatura).
2. Modelizar con el MMC a nivel sección.
3. Modelizar la fisuración vertical de flexión, a nivel sección, con seguimiento de la fn en el tiempo.
4. Consideración del fenómeno de TS.
5. Integración del cálculo a nivel sección y a nivel estructura.

5. ¿QUE SE HA CONSEGUIDO?

Se han implementado dos algoritmos, basados en el EA, y para sección multicapa genérica.

- *Programa FLUSEC:* Solución cuasiestática, aproximada, para tanteos iniciales en los que no importa el control de deformaciones.
- *Programa AUTOFLU:* Solución incremental paso-a-paso. En su versión actual, trata estructuras de hormigón o mixtas no pretensadas y fisuradas, con TS y fn variable.

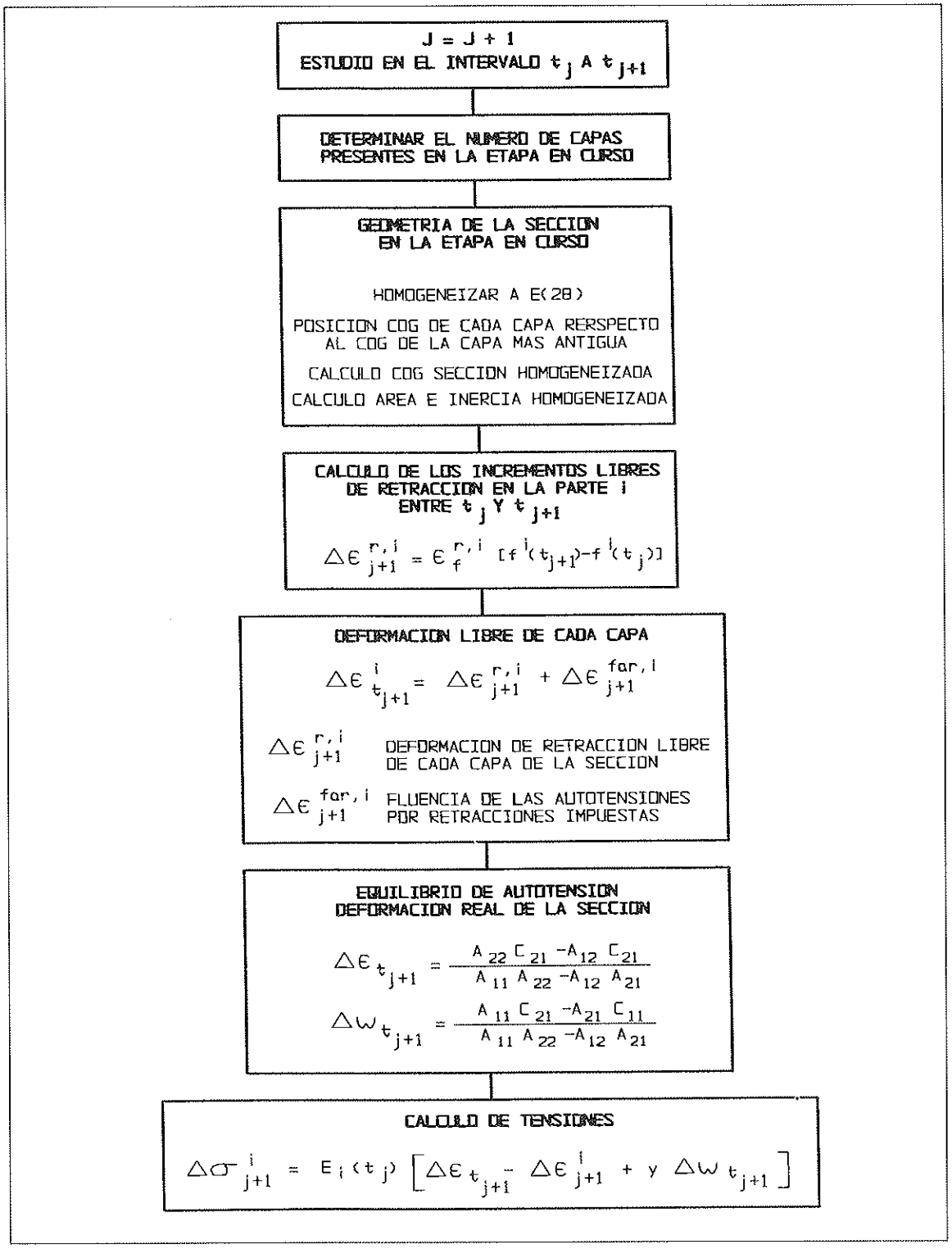
6. EL EQUILIBRIO DE AUTOTENSION

En el número 197 de Hormigón y Acero, se publicó el método clásico del *equilibrio de autotensión (EA), Iglesias (1995)*, que da el estado tensional en una sección evolutiva, con la hipótesis de Navier. La sección consta de hormigones de edades distintas, acero activo, pasivo y estructural. Se dedujo la formulación para sección de n capas, y discretizando el tiempo, un método paso-a-paso con los modelos CEB-1970 y CEB-1990.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

6.1. Problema de retracción

Hay que conocer la evolución de la deformación de retracción en el tiempo. Entre dos instantes, se produce un incremento de retracción, $\Delta\varepsilon_r$, en la capa i, que se supone aparece al final del intervalo y se establece entonces el EA. La retracción se trata como una sucesión de deformaciones autoinducidas, instantáneas, impuestas en el instante final de cada paso del cálculo.



Organigrama N.º 1.

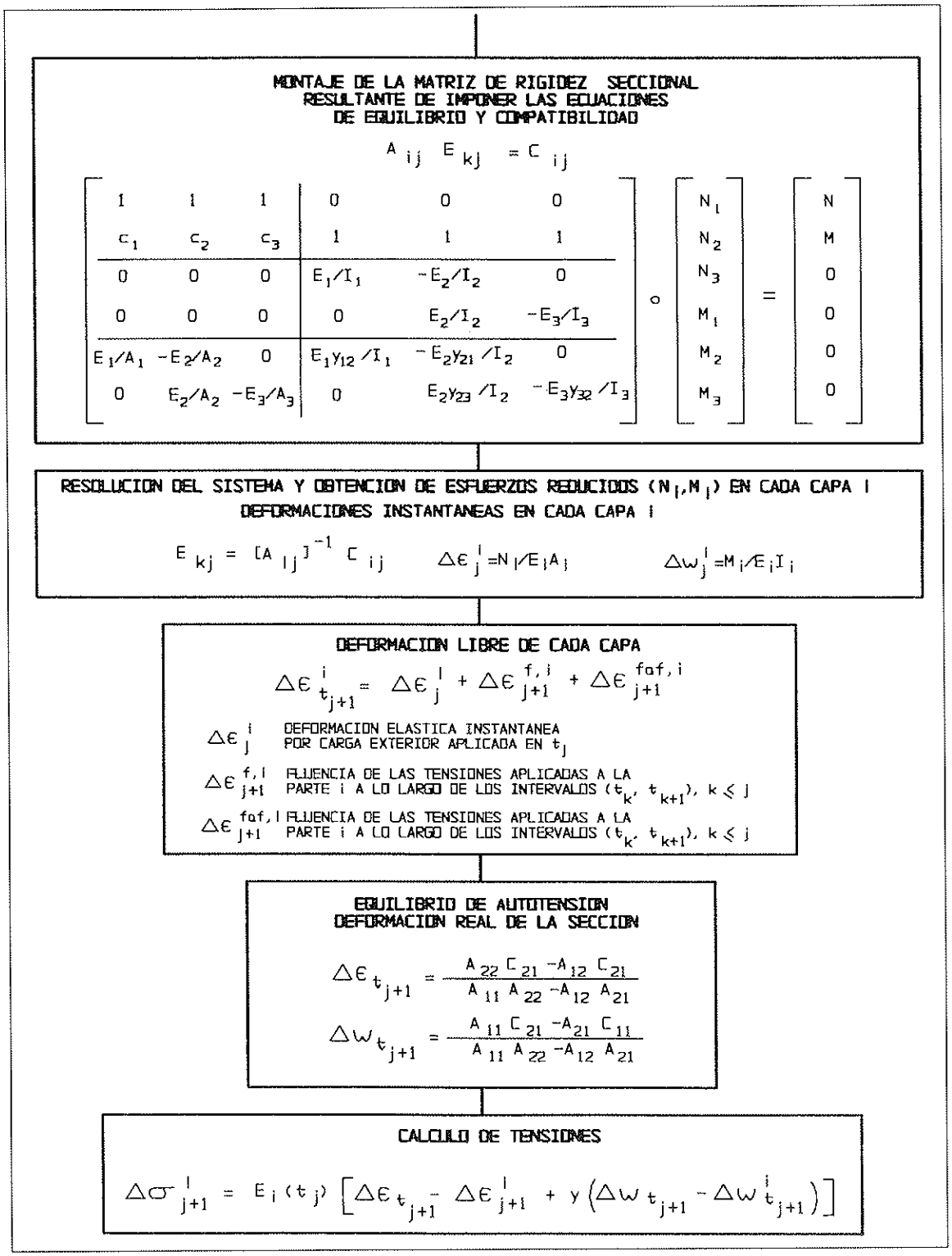
Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

6.2. Problema de fluencia

Hay que obtener, a partir de los esfuerzos exteriores aplicados en el cdg de la sección, la distribución de axiles y flectores reducidos, en cada capa, y a partir de éstos las deformaciones iniciales:

1. Cada capa se deja deformar por fluencia de las tensiones debidas a (N_i, M_i), un intervalo de tiempo, Δt, como si estuviese libre.

2. Al final del intervalo, se establece el



Organigrama N.º 2.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

EA, con las deformaciones libres para cada capa ($\Delta\varepsilon_i$, $\Delta\omega_i$).

3. Esto genera nuevas autotensiones (esta vez auténticas autotensiones, al provenir de deformaciones impuestas de fluencia).
4. El proceso se repite en el siguiente intervalo, teniendo en cuenta las tensiones impuestas iniciales y las sucesivas autotensiones generadas en los intervalos anteriores al actual.

6.3. Variación no lineal de temperatura con el canto

En una estructura isostática, un incremento de temperatura uniforme, o un gradiente lineal, no genera tensiones, si se acepta la hipótesis de Navier. Si el gradiente es no lineal y se acepta esta hipótesis, se produce un estado de autotensión que no cambia los esfuerzos internos. La deformación de la fibra genérica vale:

$$\varepsilon_f = \alpha_t\, T(y) \qquad (1)$$

En una sección genérica, si se consideran n+1 puntos de interpolación en el canto, se puede calcular el valor de T(y), y establecido el EA, obtener la ley de tensiones. Si T(y) es arbitraria la ley de tensiones es no lineal.

Estos puntos de interpolación definen n capas que, por simplicidad, pueden considerarse rectangulares. Su canto se escoge lo bastante pequeño como para aceptar la hipótesis de linealidad de T(y) entre dos puntos de interpolación. En cada una de estas n subcapas, la función T(y) toma valores entre dos puntos de interpolación PI_i, PI_{i+1}:

$$T(y = PI_i) = T_{sup} \quad T(y = PI_{i+1}) = T_{inf} \qquad (2)$$

La carga térmica "impuesta" se divide en dos partes:

1. *Temperatura uniforme:*

$$T_{unif} = T_{inf} \qquad (3)$$

2. *Gradiente lineal:*

$$\Delta T = T_{sup} - T_{inf} \qquad (4)$$

Conocidas las (ε_i, ω_i) en cada capa, se impone el EA y se obtiene la deformación y curvatura de la sección completa:

$$\varepsilon = \frac{A_{22}C_{21} - A_{12}C_{21}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \qquad \omega = \frac{A_{11}C_{21} - A_{21}C_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \qquad (5)$$

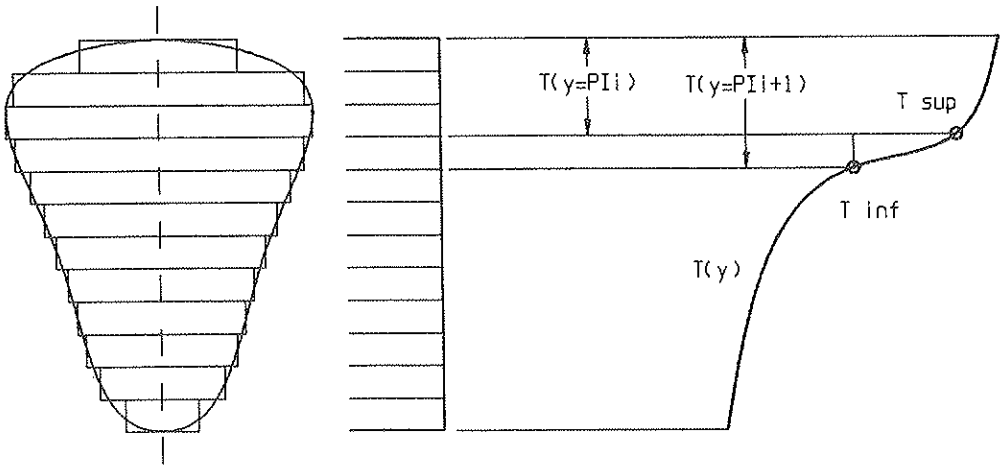


Fig. 1. Discretización de una sección en capas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

El estado tensional en cada punto de interpolación de la curva T(y) es:

$$\sigma (y = PI_i) = E_i [\varepsilon - \varepsilon_i + y (\omega - \omega_i)] \qquad (6)$$

Como el estado de tensiones es autoequilibrado, si la estructura es isostática, los esfuerzos son nulos, mientras que la sección se deforma según la hipótesis de Navier, que es con la que se deduce el EA.

6.4. Gradientes térmicos variables con el tiempo

Este planteamiento permite estudiar el efecto de un gradiente no lineal, variable con el tiempo. En este caso, la función que define la temperatura es:

$$T = T (y, t) \qquad (7)$$

Se pueden formular leyes térmicas en variables separadas:

$$T = T(y) \ f(t) \qquad (8)$$

Donde f(t) es la variación diaria, estacional, etc.

7. SECCIONES FISURADAS: SOLUCIÓN INSTANTANEA

7.1. Introducción

Se supone que sobre la sección actúa un axil y un flector y que está "completamente fisurada", es decir, en algún momento anterior soportó una sobrecarga que la fisuró, y la resistencia a tracción del hormigón es nula.

7.2. Cálculo de la posición de la fn en vacío

Se supone que sobre la sección se aplican los esfuerzos (XNa, XMf), axil y flector, y que ésta no tiene un estado de deformación ni de tensión previo.

Para calcular la fn, se utiliza el método de las fuerzas:

1.° Actualizar geometría, homogeneizando a E(28).

2.° Calcular deformaciones respecto a la fibra superior (referencia).

3.° Referir los esfuerzos en la sección, XNa(NET) y XMF(NET) a la fibra superior, obteniendo los esfuerzos (Ni,Mi).

4.° Obtener la deformación en la fibra superior (ε_{0i}, ω_i) y, por tanto, la deformación instantánea en cada capa i.

5.° Obtener la distribución de tensiones y controlar fisuración.

6.° Si la sección está fisurada, calcular la posición de la fn, y luego, tras actualizar la geometría, repetir el proceso anterior.

La fn se calcula resolviendo la ecuación habitual, con N≠0:

$$\frac{\int_0^{d_n} (d_n - y)\, y\, dA + \sum_{k=1}^{m} n (d_n - d_{sk}) A_{sk} d_{sk}}{\int_0^{d_n} (d_n - y)\, dA + \sum_{k=1}^{m} n (d_n - d_{sk}) A_{sk}} = -\frac{M_i}{N_i} \qquad (9)$$

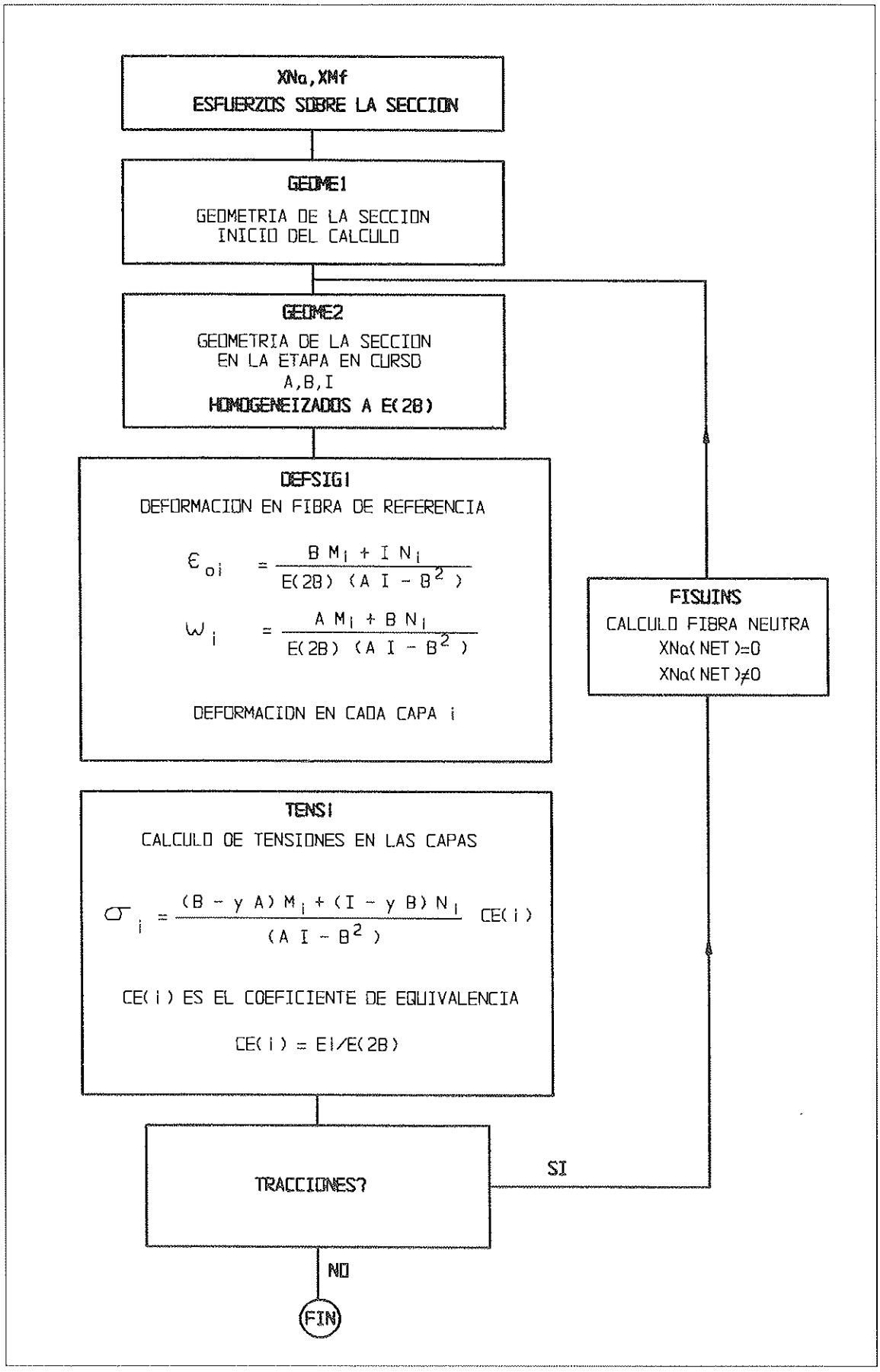
Las integrales de (9) se extienden a sección genérica de n capas, homogeneizadas al material de referencia E(28). Se obtiene una cúbica que da d_n, se calcula la geometría (A,B,I), y luego la deformación en la fibra de referencia. El valor d_n depende de los esfuerzos internos (Mi,Ni) en flexión compuesta. En flexión simple (Ni=0), y (9) queda:

$$\int_0^{d_n} (d_n - y)\, y\, dA + \sum_{k=1}^{m} n (d_n - d_{sk}) A_{sk} d_{sk} = 0 \qquad (10)$$

Por tanto, el valor de d_n no depende del momento aplicado.

El EA utiliza deformaciones en el cdg de las capas. Conocidas éstas, no hay que calcular los esfuerzos reducidos (Ni,Mi). El cálculo de las integrales en (9) ó (10) es inmediato en una sección con capas rectangulares.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



Organigrama N.º 3

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

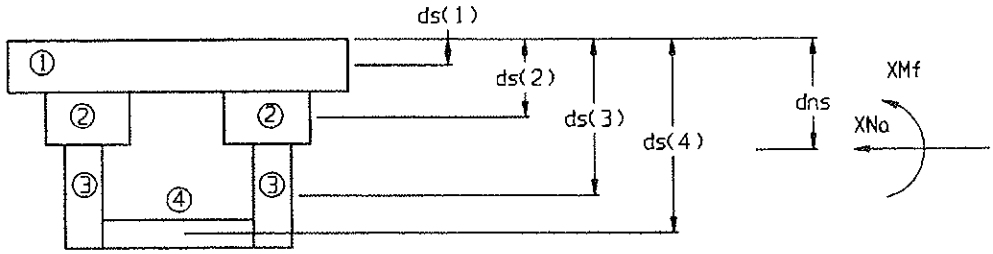


Fig. 2. Obtención de la fibra neutra (fn) en secciones genéricas.

XNa,XMF: axil y flector aplicados.

VS(i), VI(i): excentricidades fibra superior e inferior.

ds(i): posición cdg capa *i*, respecto fibra superior.

dns: posición punto de aplicación de *(XNa,XMf)*.

dn: posición fn, respecto fibra superior.

BBT(i): área homogeneizada de trabajo actual, capa i.

ancho(i): ancho de capa i.

LI(i) / LS(i): límite inferior/superior de búsqueda de fn, en capa i.

Los intervalos de búsqueda de la fn son:

I1 $0 < d_n \leq ds(1) + VI(1)$

I2 $ds(2) - VS(2) < d_n \leq ds(2) + VI(2)$

I3 $ds(3) - VS(3) < d_n \leq ds(4) - VS(4)$

I4 $ds(4) - VS(4) < d_n \leq ds(4) + VS(4)$

La ecuación (9) queda:

$$\frac{a_5\, dn^3 + a_1\, d_n - a_2}{a_6\, dn^2 + a_3\, d_n - a_4} = -a_0 \qquad (11)$$

Donde los a_i son:

$$a_1 = \sum BBT(i)\, ds(i) - \frac{LI^2\, ancho\,(i)}{2}$$

$$a_2 = \sum BBT(i)\, ds(i)^2 + \frac{LI^3\, ancho\,(i)}{3} \qquad (12)$$

$$a_3 = \sum BBT(i) - LI\, ancho\,(i)$$

$$a_4 = \sum BBT(i)\, ds(i) + \frac{LI^2\, ancho\,(i)}{2}$$

$$a_5 = \sum \frac{ancho\,(i)}{6} \qquad (12)$$

$$a_6 = \sum \frac{ancho\,(i)}{2}$$

$$a_0 = \frac{XMf - XNa\, dns}{XNa}$$

Para XNa≠0, la ecuación anterior se reduce a una cúbica:

$$z_1\, d_n^3 + z_2\, d_n^2 + z_3\, d_n + z_4 = 0 \qquad (13)$$

Donde el valor de cada coeficiente z_i es, para XNa≠0:

$$z_1 = a_5 \quad z_2 = a_0 a_6 \quad z_3 = a_1 + a_0 a_3 \quad z_4 = -a_2 - a_0 a_4 \qquad (14)$$

Las expresiones (12) se obtienen de las integrales que intervienen en (9).

Integral n.º 1:

$$I_1 = \int_{LI}^{LS} \left(d_n - y\right) dBBT(i) =$$

$$= \int_{LI}^{LS} d_n\, dBBT(i) - \int_{LI}^{LS} y\, dBBT(i) = \qquad (15)$$

$$= d_n\, ancho(i)\, (LS - LI) - ancho(i) \frac{LS^2 - LI^2}{2}$$

En capas por encima de d_n ($LS \leq d_n$):

$$I_1 = \Sigma\, ancho\,(i) \left[\left(LS - LI\right) - \frac{LS^2 - LI^2}{2} \right] \qquad (16)$$

Si LI=0 y LS=d_n:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$I_1 = \Sigma \frac{\text{ancho(i)}}{2} d_n^2 = a_6 d_n^2 \qquad (17)$$

Si LI≠0 y LS=d_n:

$$I_1 = \Sigma \text{ ancho (i)} \left[d_n (d_n - LI) - \frac{d_n^2 - LI^2}{2} \right] =$$
$$= \Sigma \frac{\text{ancho(i)}}{2} d_n^2 + \Sigma \left[- LI \text{ ancho(i)} \right] d_n + \qquad (18)$$
$$+ \Sigma \frac{LI^2 \text{ancho(i)}}{2}$$

Integral n.º 2:

$$I_2 = \int_{LI}^{LS} (d_n - y) \text{ y dBBT(i)} =$$
$$= d_n \text{ ancho(i)} \frac{LS^2 - LI^2}{2} - \text{ancho(i)} \frac{LS^3 - LI^3}{3} \qquad (19)$$

En capas por encima de d_n (LS≤d_n):

$$I_2 = \Sigma d_n \text{ ancho(i)} \frac{LS^2 - LI^2}{2} -$$
$$- \text{ancho(i)} \frac{LS^3 - LI^3}{3} \qquad (20)$$

Si LI=0 y LS=d_n:

$$I_2 = \Sigma \frac{\text{ancho(i)}}{6} d_n^3 = a_5 d_n^3 \qquad (21)$$

Si LI≠0 y LS=d_n:

$$I_2 = \Sigma \text{ ancho (i)} \left[d_n \frac{d_n^2 - LI^2}{2} - \frac{d_n^3 - LI^3}{3} \right] =$$
$$= \Sigma \frac{\text{ancho(i)}}{6} d_n^3 + \Sigma \left[- \frac{LI^2 \text{ ancho(i)}}{2} \right] d_n + \qquad (22)$$
$$+ \Sigma \frac{LI^3 \text{ancho(i)}}{3}$$

El cálculo se extiende a todas las capas de hormigón, definiendo primero los intervalos de búsqueda de la fn [LI,LS] y resolviendo la cúbica por barrido de los intervalos. Encontrada la fn, se recalcula la geometría A,B,I en sección fisurada, las deformaciones y tensiones. Los aceros, se engloban en I1 e I2, discriminando según el material; y el cálculo de a_i se extiende a todas las capas i, para cada posición de barrido de la fn en cada intervalo J de búsqueda.

Inicialización:

Si capa de hormigón:

$$ANCHO(i) = BB(I) / [VS(i) + VI(i)]$$
$$BBT(i) = 0$$

Si capa de acero:

$$ANCHO(i) = 0 \qquad BBT(i) = BB(I)$$

Posición de las capas de hormigón:

- Capa sin fisurar, *por encima* de la fibra neutra

  $dsT(i) + VIT(i) \leq LI(J)$; entonces
  $BBT(i) = BB(I)$, $ANCHO(i) = 0$

- Capa sin fisurar, *por debajo* de la fibra neutra

  $dsT(i) - VST(i) \geq LS(J)$; entonces
  $BBT(i) = 0$, $ANCHO(i) = 0$

7.3. Cálculo de la fn con estado previo de tensión-deformación

El problema cambia si en la sección, en el instante t_{j+1}, hay un estado de tensión como el de la figura 3, debido a cargas (N^e,M^e) aplicadas en t_k, k≤j, y en el instante t_{j+1}, se aplica una nueva carga elástica (ΔN^e,ΔM^e). Para averiguar la nueva posición de la fn, si no hay estado autoequilibrado, se aplican (9) y (10) y los esfuerzos:

$$N = N^e + \Delta N^e \qquad M = M^e + \Delta M^e \qquad (23)$$

Caso contrario, la deformación en la fibra de referencia es:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^{auto} + \Delta\varepsilon_0^e$$
$$\omega_0 = \omega_0^e + \omega_0^{auto} + \Delta\omega_0^e \qquad (24)$$

La profundidad de la fn es:

$$d_n = \frac{\varepsilon_0^e + \varepsilon_0^{auto} + \Delta\varepsilon_0^e}{\omega_0^e + \omega_0^{auto} + \Delta\omega_0^e} \qquad (25)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Sin estado autoequilibrado $\varepsilon^{auto} = \omega_0^{auto} = 0$ y, con las ecuaciones de equilibrio de axiles y momentos, se deduce (9) ó (10) y se calcula d_n. Caso contrario, no se obtiene (9) ó (10) al ser las tensiones en las capas:

Hormigón:

$$\sigma^e = E_c\,(\varepsilon_0^e - y\omega_0^e)$$
$$\sigma^{auto} = E_c\,[(\varepsilon_0^{auto} - \varepsilon_i) - y\,(\omega_0^{auto} - \omega_i)] \qquad (26)$$
$$\Delta\sigma^e = E_c\,(\Delta\varepsilon_0^e - y\,\Delta\omega_0^e)$$

Acero:

$$\sigma^e = E_s\,(\varepsilon_0^e - d_{sk}\,\omega_0^e)$$
$$\sigma^{auto} = E_s\,[(\varepsilon_0^{auto} - \varepsilon_i) - d_{sk}\,(\omega_0^{auto} - \omega_i)] \qquad (27)$$
$$\Delta\sigma^e = E_s\,(\Delta\varepsilon_0^e - d_{sk}\,\Delta\omega_0^e)$$

Donde $[\varepsilon_i\,(y),\ \omega_i\,(y)]$ es la deformación libre de cada capa; y, por tanto, si el estado de tensión-deformación previo no contiene un estado autoequilibrado, se aplica el método clásico, con esfuerzos iguales a la suma de los aplicados hasta ese momento. Con autotensiones previas, se recurre a un proceso iterativo.

7.4. Proceso iterativo para calcular la fn

Los estados de tensión previos, hasta t_{j+1}, se reducen a un único estado tensional, sobre el que se aplica el estado elástico (ΔN, ΔM); y, por tanto:

1. Se parte del estado inicial, antes de aplicar (ΔN^e, ΔM^e), con fn d_n conocida.
2. Se toma un valor auxiliar de fn dnT, que se supone solución del estado final, después de aplicar (ΔN^e,ΔM^e).
3. Cálculo del volumen de descompresión, por (ΔN^e, ΔM^e), y momento respecto a la fibra de referencia.
4. Sobre la sección con geometría *(A: área, B: momento estático, I: inercia)* modificada según el valor supuesto de *dnT*, se aplican:

$$\Delta N^e + INCAXIL \qquad \Delta M^e + INCMOME \qquad (28)$$

Donde *(INCAXIL, INCMOME)* son el axil y momento respecto a la fibra de referencia del volumen de descompresión. Lo anterior permite calcular el valor de la profundidad de la fn *dnI*.

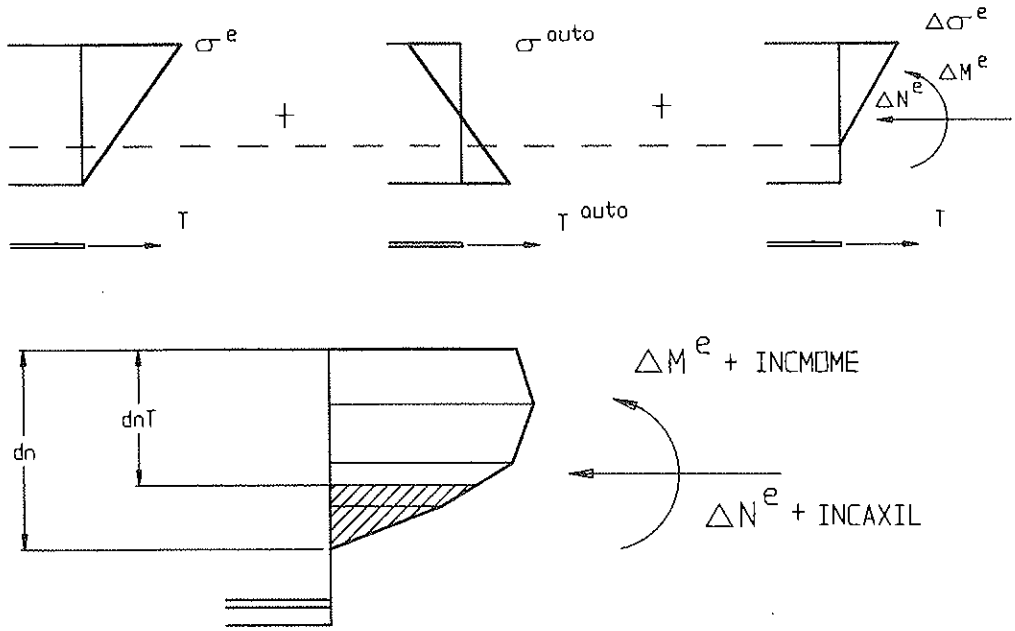


Fig. 3. Proceso iterativo para la búsqueda de la fn.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

5. Se repite el proceso hasta que, por barrido de la sección, se encuentra *dnT* tal que $|dnT-dn1| < TOLERANCIA$. El valor inicial para $dnT=dn0=0{,}22\ CANTO$, se elige en servicio:

$$d_{n0} = \frac{0{,}0035 \cdot d}{0{,}0135} = \frac{0{,}0035 \cdot 0{,}85(\text{CANTO})}{0{,}0135} = 0{,}22\ \text{CANTO} \qquad (29)$$

8. SOLUCION DIFERIDA: SECCION FISURADA

8.1. Introducción

En secciones fisuradas, la posición de la fn varía por fluencia, aumentando, en general, su profundidad con el tiempo. Se suele aceptar su constancia, lo que permite sumar tensiones y deformaciones instantáneas, con diferidas, por superposición, igual que en secciones no fisuradas.

El programa AUTOFLU calcula la fn en la solución instantánea, y luego su variación hasta el final de la etapa. En $[t_{j-1}=T(NET-1), t_j=T(NET)]$ se producen deformaciones diferidas por fluencia de las tensiones aplicadas en todos los intervalos anteriores. El EA se impone en la geometría *(A,B,I)* del instante t_{j-1}. Como la fn varía, se itera sobre la geometría, desconocida a priori, ajustando en cada paso los valores *(A,B,I)* y garantizando que en t_j se cumplen las condiciones de equilibrio y compatibilidad.

8.2. Primer proceso iterativo

En el caso general, la sección tiene una posición de la fn y un estado tensional, al inicio de la etapa *NET (Solución Instantánea)*. A partir de *T(NET–1)* se deja que las capas presentes *(NCP)* se deformen libremente por retracción, fluencia de las tensiones elásticas de los intervalos anteriores y de las autotensiones de los *NET–1* EA anteriores, hasta *T(NET)*. La necesidad del proceso iterativo está en el desconocimiento a priori, en *T(NET–1)*, de la geometría de llegada, sobre la que se produce la fluencia de la sección.

Supóngase que la fluencia en el intervalo en curso produce, tras sumar el estado instantáneo en *T(NET–1)* y el estado de autotensión generado de *T(NET–1)*, a *T(NET)*, un aumento de compresión en la fibra inferior. La fn baja y aumenta el área de compresión en fluencia. Se itera hasta que la geometría de partida sea tal que el estado de autotensión no baje la fn. El proceso converge en pocas iteraciones y su precisión va ligada a la de los puntos de interpolación de tensión.

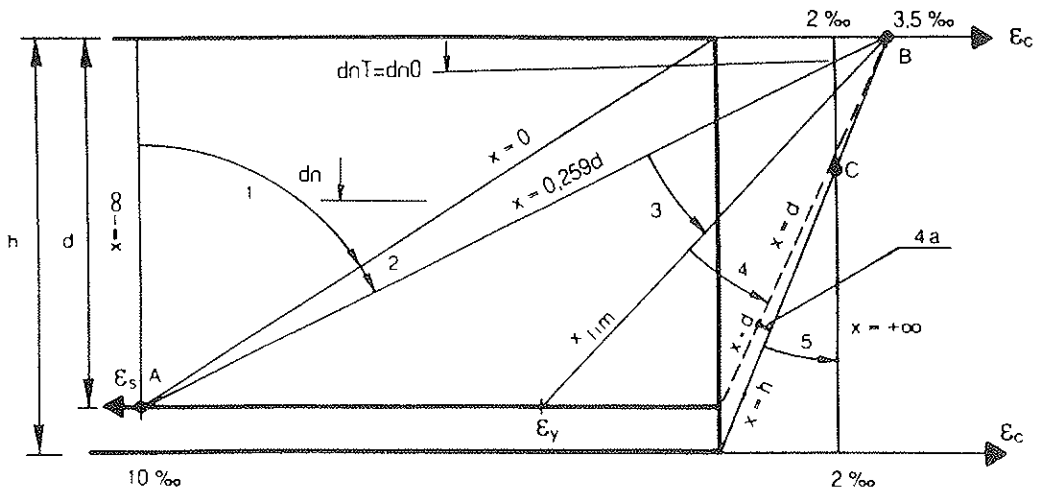
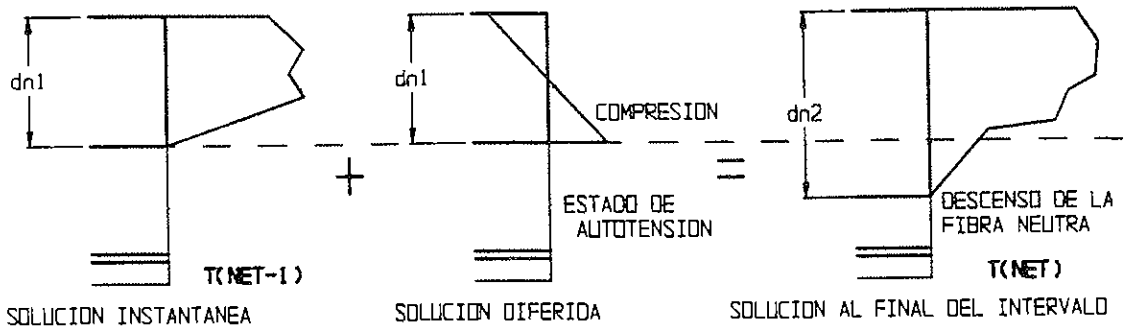
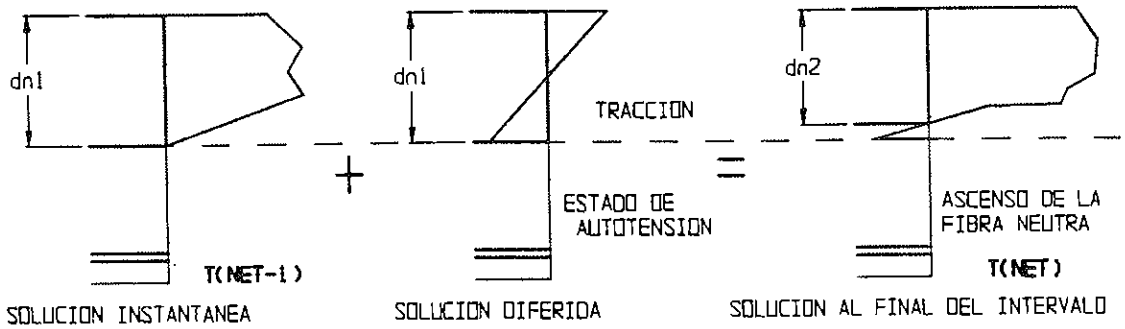


Fig. 4. Justificación del primer valor para dnT, al iterar.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

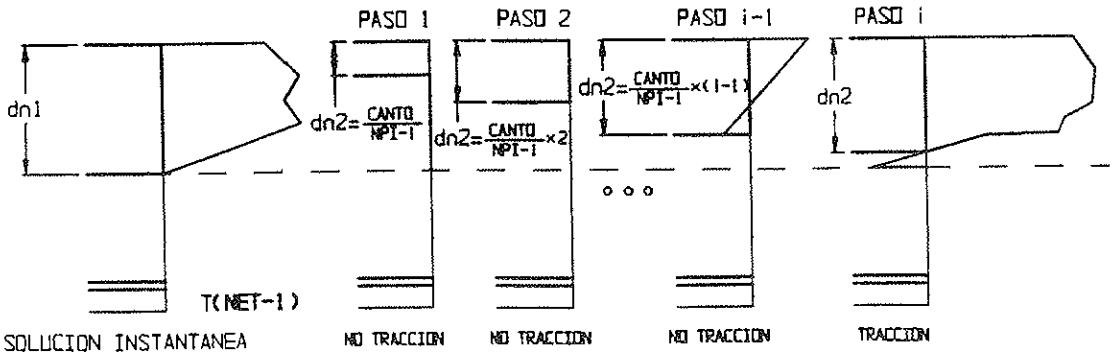


CASO 1: LA SOLUCION DIFERIDA NO DA TRACCIONES, HACE BAJAR LA POSICION DE LA FIBRA NEUTRA. SE ITERA HASTA QUE EL VALOR dn1 DE PARTIDA SEA IGUAL AL DE LLEGADA dn2.



CASO 2: LA SOLUCION DIFERIDA DA TRACCIONES, HACE SUBIR LA POSICION DE LA FIBRA NEUTRA. SE ITERA TOMANDO VALORES COMO

dn2 ACTUAL = dn2 ANTERIOR + CANTO/(NPI-1)



SOLUCIONES DIFERIDAS EN CADA PASO
ITERACION EN dn2

Fig. 5. Procesos iterativos de búsqueda de la fibra neutra.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

8.3. Segundo proceso iterativo

El segundo proceso iterativo cubre el caso en que el estado de autotensión de la solución diferida, da tracciones en el estado inicial de partida, o sea, la fn remonta.

Se supone una profundidad de fn variable y creciente en cada paso del proceso. Para cada profundidad supuesta, se establece el EA al final de la etapa en curso, hasta que la geometría de partida produzca tracción al final del intervalo. Detectada ésta, se vuelve al paso anterior, es decir, el de la última geometría que no da tracción. O sea, si en el *paso i* hay tracción, se recupera el valor *dn2* correspondiente al *paso i–1* que no da tracciones, es decir, *dn2(i–1)*. Con este valor *dn2(i–1)* se calcula la solución diferida.

8.4. Ajuste de la fn

Se garantiza la correspondencia entre el plano de deformaciones y el de tensiones, pues hay pequeños desajustes de la fn obtenida con ambos planos.

1. Calcular la pendiente *m* del plano de deformación correspondiente al resultado de sumar la solución instantánea más la solución diferida, calculada con *dn2(i–1)*, obtenida por iteración.
2. Calcular la fn media tensión-deformación: *xftd=(xftd1+xftd2)/2*.
3. Modificar las deformaciones totales, obligando a que el plano de deformación pase por *xftd*. Para ello, se traslada paralelamente el plano de pendiente, *m*, haciéndolo pasar por *xftd*.

$$\frac{DEsup(i) - D\,Einf(i)}{VS(i) + VI(i)} = \frac{DE\,sup\,(I)}{Xftd1} \qquad \frac{D1}{D4} = \frac{D2}{D3} \qquad m = \frac{D1}{D4} \tag{30}$$

4. Eliminar las tensiones totales en los puntos de interpolación, PI, de tensio-

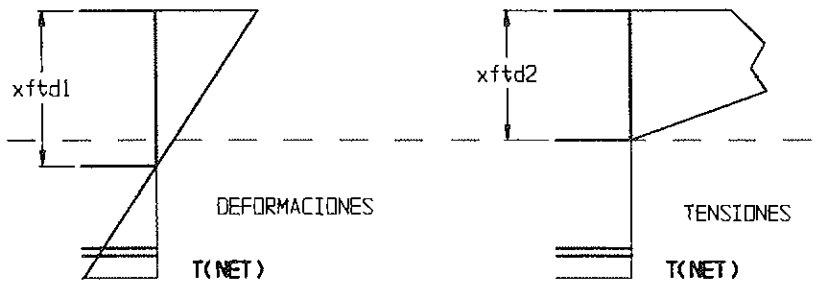


Fig. 6. Fibra neutra de tensiones y deformaciones.

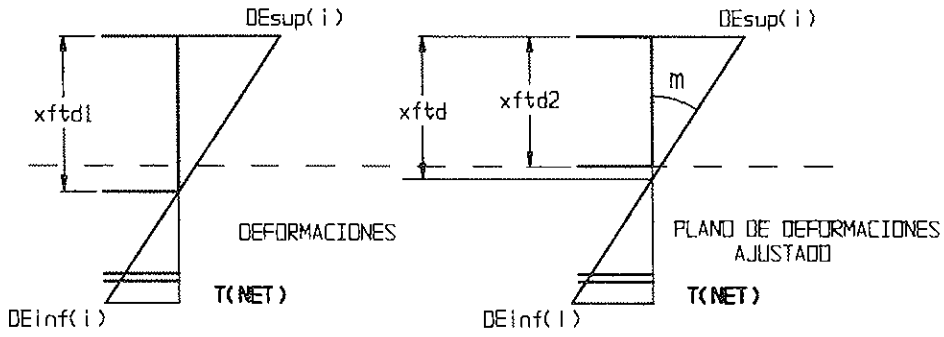


Fig. 7. Ajuste de la fibra neutra.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

nes por debajo de la nueva fn media, *xftd*.

5. Fase siguiente del cálculo instantáneo y diferido, con fn *xftd*.

9. CALCULO A NIVEL ESTRUCTURA

9.1. Introducción

El programa *AUTOFLU* calcula, a nivel estructura, en el intervalo:

1. Al inicio: es la *"solución instantánea, a nivel estructura"*.
2. Al final, tras el EA: *"solución diferida, a nivel estructura"*.

Carga exterior

Aplicar una carga exterior a la estructura, genera, en la *etapa NET* y *nudo NNU*, a nivel sección, los esfuerzos: *XNa (NET, NNU), XMf(NET, NNU)*. Estos esfuerzos impuestos, dan deformaciones de fluencia en cada nudo, calculables imponiendo el EA en *T(NET)*, al final del intervalo.

Esfuerzos de compatibilidad

En el tiempo Δt, aparecen deformaciones y curvaturas impuestas, en cada nudo de la estructura. Al imponer la compatibilidad de las coacciones externas, se obtienen los esfuerzos seccionales de compatibilidad, a nivel estructura: *AXIL(NET,NNU), FLECS (NET,NNU)*. Si la estructura es isostática, los esfuerzos seccionales de compatibilidad son nulos y, simplemente, la etapa diferida impone una ley de deformaciones y de giros en la estructura. Los esfuerzos seccionales de compatibilidad *(AXILS,FLECS)* deben añadirse a partir de *T(NET)*, para redistribuirlos a nivel transversal.

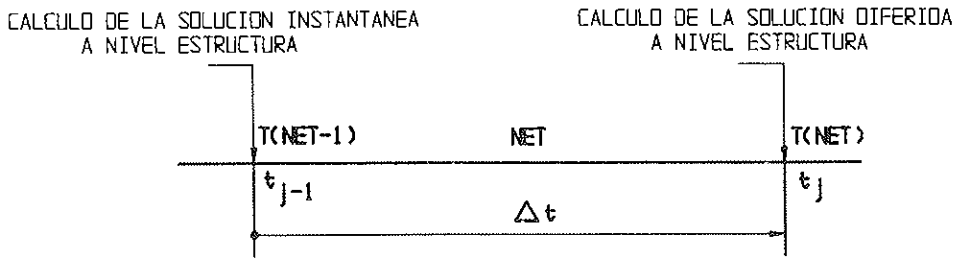


Fig. 8. Cálculos a nivel estructura.

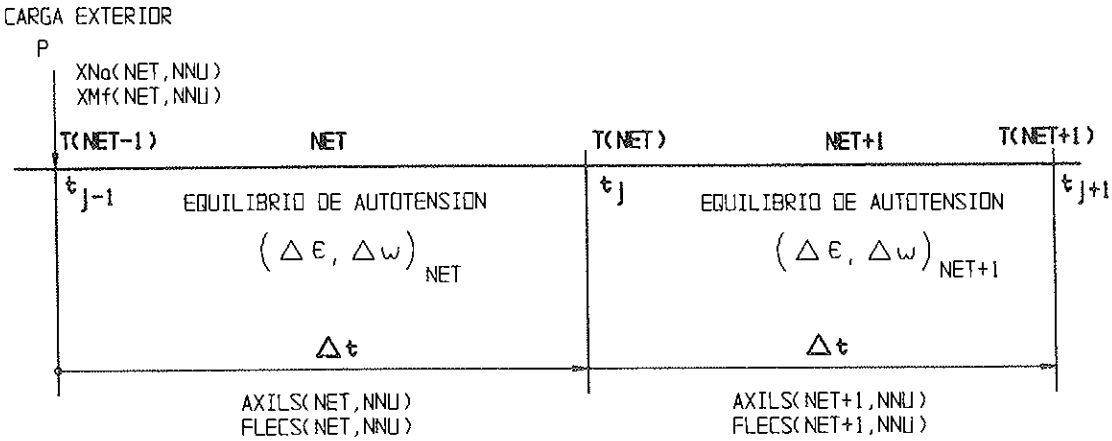


Fig. 9. Esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

9.2. Cálculo instantáneo a nivel estructura

El cálculo instantáneo a nivel estructura, se hace con el programa *SICAL*, de elementos finitos, tipo barra espacial, con 6 grados de libertad:

1. *Solución instantánea en el instante T(NET–1,NNU). Primer cálculo a nivel estructura. Programa SICAL:* Obtención, en cada nudo de la estructura, de los esfuerzos a nivel sección, a partir de la carga exterior: *P(NET–1): XNa(NET–1,NNU), XMf (NET–1, NNU).*

2. *Solución instantánea en el instante T(NET–1,NNU). Cálculo a nivel sección:* Obtención, en los nudos de la estructura, a partir de los esfuerzos anteriores, de la solución instantánea a nivel sección.

3. *Cálculo en cada nudo: Efecto TS.*

4. *Cálculo de la solución instantánea en T(NET–1, NNU). Segundo cálculo a nivel estructura, con rigidez modificada por fisuración y TS. Final de la solución instantánea.*

Se hacen dos cálculos elásticos, a nivel estructura, para obtener flechas instantáneas correctas. La matriz de rigidez de la estructura se calcula homogeneizando a *E(28)*. En una estructura isostática, el segundo cálculo, con rigidez modificada por fisuración y TS, no cambia esfuerzos. En una hiperestática influye la rigidez mediante los esfuerzos de compatibilidad y los esfuerzos son menores por menor rigidez de la estructura fisurada.

La solución instantánea a nivel sección, da la fn en ese instante. Antes del segundo cálculo instantáneo, se modifica la rigidez de la estructura por TS. Se modifica la rigidez a flexión de cada nudo, de la barra; y, por tanto, la matriz de rigidez de la estructura. Evaluar bien el efecto permite conectar el cálculo a nivel sección y a nivel estructura. La fibra de referencia para calcular la matriz de rigidez de la estructura es la del cdg de cada nudo, en cada instante. Los esfuerzos

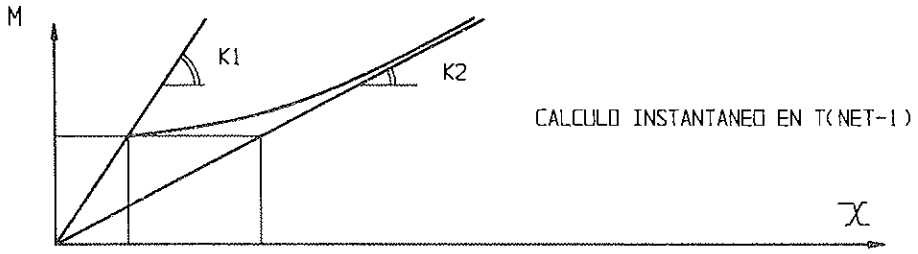


Fig. 10. Modificación rigidez instantánea de la estructura.

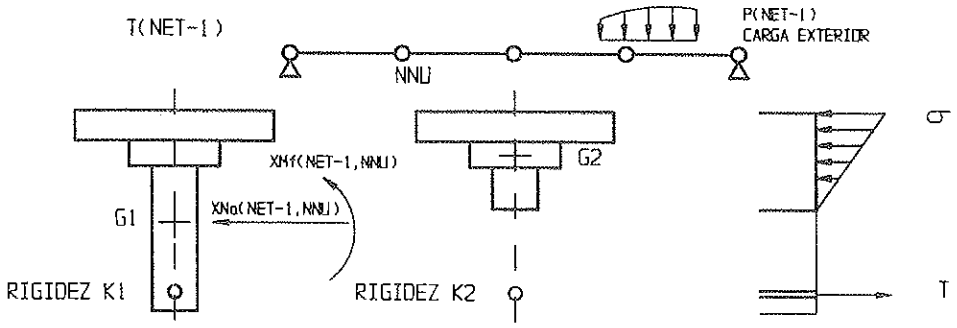


Fig. 11. Cálculo instantáneo a nivel sección y estructura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

(XMfa,XNa) se aplican en el cdg *G1* del nudo. La sección se fisura y su cdg se convierte en *G2*. Con la nueva posición del cdg, se calcula la matriz de rigidez *K2*, antes del segundo cálculo elástico de la estructura. Además, se establece el EA en *G2*, obteniendo la deformación y curvatura ($\Delta\varepsilon,\Delta\omega$).

9.3. Cálculo diferido a nivel estructura

El cálculo diferido a nivel estructura se hace con el programa *SICAL*, al final del intervalo. Calculada la solución instantánea, pasa el tiempo *T(NET–1)–T(NET)*, calculando la solución diferida, a nivel sección, en cada nudo, con el EA en *T(NET)*. Se obtiene la deformación longitudinal *DELTAEd (NET,NNU)* y la curvatura *DELTAWd (NET,NNU)*, en el cdg, *G2*, de los nudos *NNU*.

Los valores anteriores se introducen como deformaciones impuestas. Si la estructura es isostática, no cambian los esfuerzos internos y sólo supone una ley de deformaciones y giros. Si es hiperestática, aparecen esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad, por hiperestatismo a nivel sección, que modifican los esfuerzos en los nudos, en *T(NET–1)*, y sus giros y deformaciones:

1. *Calcular solución diferida en T(NET–1, NNU), a nivel sección: EA.*
2. *Calcular solución diferida en T(NET–1, NNU), a nivel estructura: Programa SICAL.*

- Cálculo en cada nudo, efecto TS.
- Cálculo de la estructura con deformaciones impuestas

DELTAEd(NET,NNU)=
=DELTAEd(NET,NNU)+DEFLS(NNU)

DELTAWd(NET,NNU)=
=DELTAWd(NET,NNU)+GIROS(NNU)

Lo anterior indica que, tras imponer el EA, hay en *T(NET)* variación de la fn y cambia la rigidez de cada nudo y, por tanto, la de cada barra. Hay que actualizar, además, el efecto TS, que cambia la fn.

El cálculo a nivel estructura se hace imponiendo el resultado del EA *DELTAEd (NET,NNU), DELTAWd(NET,NNU)* en cada nudo; y, si la estructura es hiperestática hay deformaciones de compatibilidad a nivel estructura *DEFLS(NNU), GIROS(NNU)* dependientes de los esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad, por hiperestatismo seccional, *AXILS (NNU), FLECS(NNU)*.

Para contar con estos esfuerzos hiperestáticos, se itera, introduciendo en cada paso la deformada isostática *(DELTAEd,DELTAWD)* y la hiperestática *(DEFLS,GIROS)* de compatibilidad, hasta obtener una deformada hiperestática *(DEFLS, GIROS)* igual a la introducida.

Al iterar en *(DEFLS,GIROS)*, se actualiza la fn en cada nudo y, en consecuencia, el efecto TS del hormigón. Esto obliga a actualizar a su vez la matriz de rigidez de la estructura en cada paso. Terminadas las iteraciones en el cálculo, se pasa a la solución instantánea de la etapa siguiente.

9.4. Estructuras isostáticas

En estructuras isostáticas, los esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad *AXILS (NNU)* y *FLECS(NNU)*, son nulos, al no haber coacciones hiperestáticas externas. Los valores *DEFLS(NNU)* y *GIROS(NNU)* lo son también y las deformaciones *DELTAEd (NET,NNU), DELTAWd(NET,NNU)* introducidas en cada nudo de la estructura, permiten calcular la flecha en cada nudo, o sea, se trata de una simple integración de una ley de curvaturas impuestas sobre la estructura.

9.5. Estructuras hiperestáticas

En estructuras hiperestáticas, aparecen los esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad *AXILS(NNU)* y *FLECS(NNU)* y dan lugar a las deformaciones:

$$\mathrm{DEFSL(NNU)} = \frac{\mathrm{AXILS(NNU)}}{\mathrm{E(28)\ ARE(NNU)}} \qquad \mathrm{GIROS(NNU)} = \frac{\mathrm{FLECS(NNU)}}{\mathrm{E(28)\ INE(NNU)}} \tag{31}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

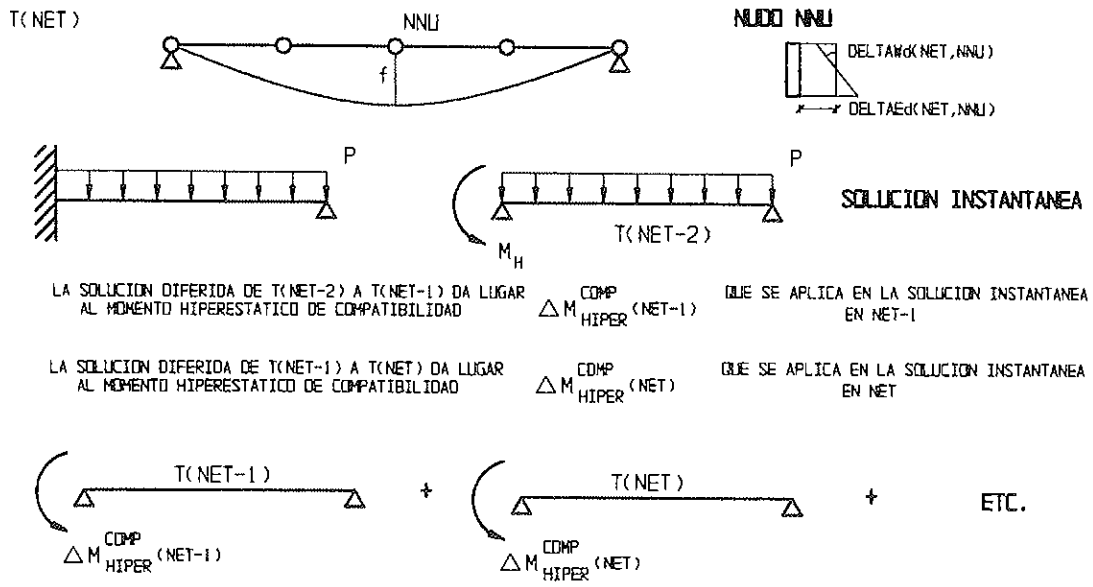


Fig. 12. Viga empotrada-apoyada.

El tratamiento correcto de los esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad, obliga a integrarlos en el cálculo, desde la etapa en que aparecen, y redistribuirlos como una carga impuesta más, desde ese momento.

En la viga empotrada-apoyada de la figura 12, obtenida la solución instantánea, con carga en *T(NET-2)*, se obtiene un momento hiperestático, M_H. Pasa el tiempo Δt y en *T(NET–1)*, establecido el EA a nivel sección y calculada la solución diferida a nivel estructura, se obtiene el valor ΔM_{HIPER}^{COMP} (NET–1).

9.6. Esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad, a nivel sección

Se opta por resolver este problema recurriendo a un método aproximado:

1. Se calculan todos los ΔM_{HIPER}^{COMP} (NET) de cada etapa *NET*, de forma independiente, como si no hubiese interacción entre ellos.

2. Se relajan desde su aparición hasta el instante de control.

El primer punto, acepta que los ΔM_{HIPER}^{COMP} (J), generados en *T(J), con J<NET*, no influyen en el valor de ΔM_{HIPER}^{COMP} (NET). La estructura es transversalmente homogénea, respecto a los momentos hiperestáticos de compatibilidad. Esta hipótesis es aceptable, al ser esfuerzos muy pequeños respecto a los de la solución instantánea (del orden del 5% a 28 días). De esta forma, se obtienen flechas exactas sumando la solución instantánea y las diferidas. Sin embargo, no se obtiene una solución exacta en esfuerzos.

El punto segundo, aproxima la solución

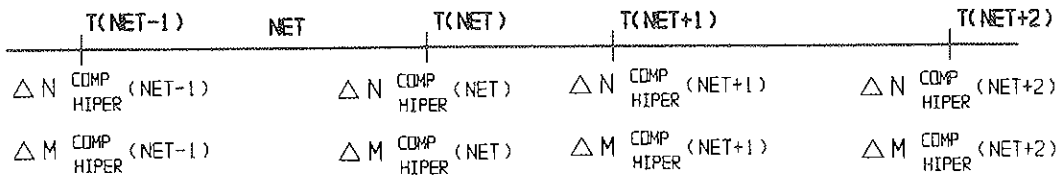


Fig. 13. Esquema de esfuerzos de compatibilidad.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

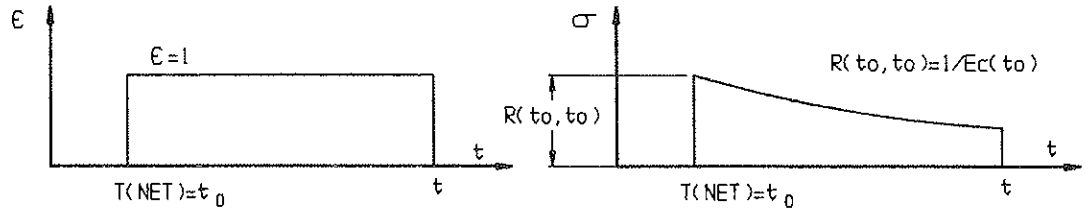


Fig. 14. Función de relajación.

en esfuerzos por relajación, hasta el instante de control *T(J)*:

$$\Delta M_{HIPER}^{COMP}(NET,t) = \Delta M_{HIPER}^{COMP}\left|T(NET)\right| \times \frac{R\left|T(NET),t\right|}{E_c\left|T(NET)\right|} \qquad (32)$$

Los esfuerzos se multiplican por *R[T(NET),t)]/E[T(NET)]*, cuyo cálculo obliga al de la función de relajación, por inversión de la de fluencia. Al obtener relajaciones, a tiempo infinito, de los esfuerzos hiperestáticos de compatibilidad a 28 días, del orden del *80%*, a tiempo infinito aparece un esfuerzo hiperestático de compatibilidad residual, de 5% x 20% ∝ 1%.

9.7. Esquema general del cálculo

El esquema general del programa *AUTOFLU* se basa en estos pasos:

1. Definir la geometría en cada nudo, discretizando en capas.
2. Especificar los instantes en que entran a colaborar, en cada nudo, cada una de las capas.
3. Definir las deformaciones diferidas y el modelo de fluencia:
   - *Retracción diferencial:* Valor a tiempo infinito.
   - *Fluencia:* Coeficiente de fluencia.
4. Definir el modelo de TS.
5. Fichero *SICAL.DAT*, con la geometría de la estructura.
6. Fichero *CARGAS.DAT*, lista de hipótesis de carga.
7. Fichero *FI_MAMIN*, base de datos que almacena esfuerzos y desplazamientos de las hipótesis del cálculo instantáneo y diferido.
8. Ejecutar *AUTOFLU:* recurre a los programas *SICAL* y *SICMOD*, residentes en el sistema operativo, con la instrucción *CALL SYSTEM*.
9. Combinar las hipótesis del cálculo con el programa *MAMIN*.
10. Manejo de resultados gráfico-numéricos con el programa *MAMIN*.

10. TENSION-STIFFENING (TS)

10.1. Introducción

Es sabido que, aunque se supere la resistencia a tracción del hormigón, éste colabora en la rigidez a nivel estructura, por transferencia de tensiones, entre armadura y hormigón entre fisuras. Estimar bien la rigidez a nivel sección influye en dos cosas:

1. Cálculo correcto de esfuerzos internos en los nudos de estructuras hiperestáticas, donde interviene la rigidez.
2. Cálculo correcto de las flechas y control de fisuración, que en estructuras isostáticas no depende de los esfuerzos internos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

10.2. Modelos implementados

Se han implementado dos modelos distintos:

1. *Modelo de Gilbert (1988):* Recibe el nombre de *"Método de la Seccion Fisurada Media"*, al obtener, con una fórmula empírica, un área de hormigón en tracción, A_{ct}, que contribuye a la rigidez.

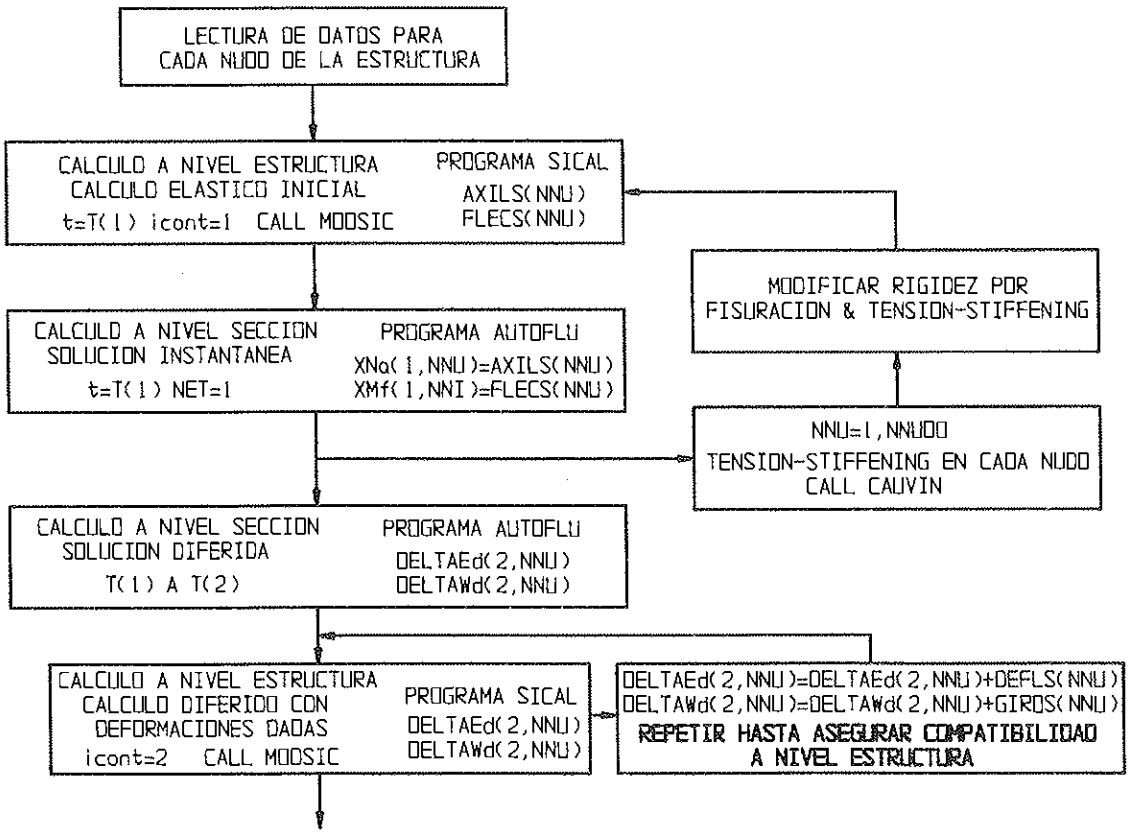
2. *Modelo de Cauvin (1991)*, basado en la *Teoría Clásica de la Fisuración*, que considera una armadura pasiva de tracción virtual; A_s^* adicional, que representa la contribución del hormigón traccionado entre fisuras.

El programa *AUTOFLU* sólo tiene en cuenta modelos en los que el estado tensodeformacional y de fisuración de la sección basta para resolver el problema, transformándolo en un incremento virtual de área de hormigón o de acero, que aumenta rigidez sin contribuir al equilibrio.

10.3. Conclusiones

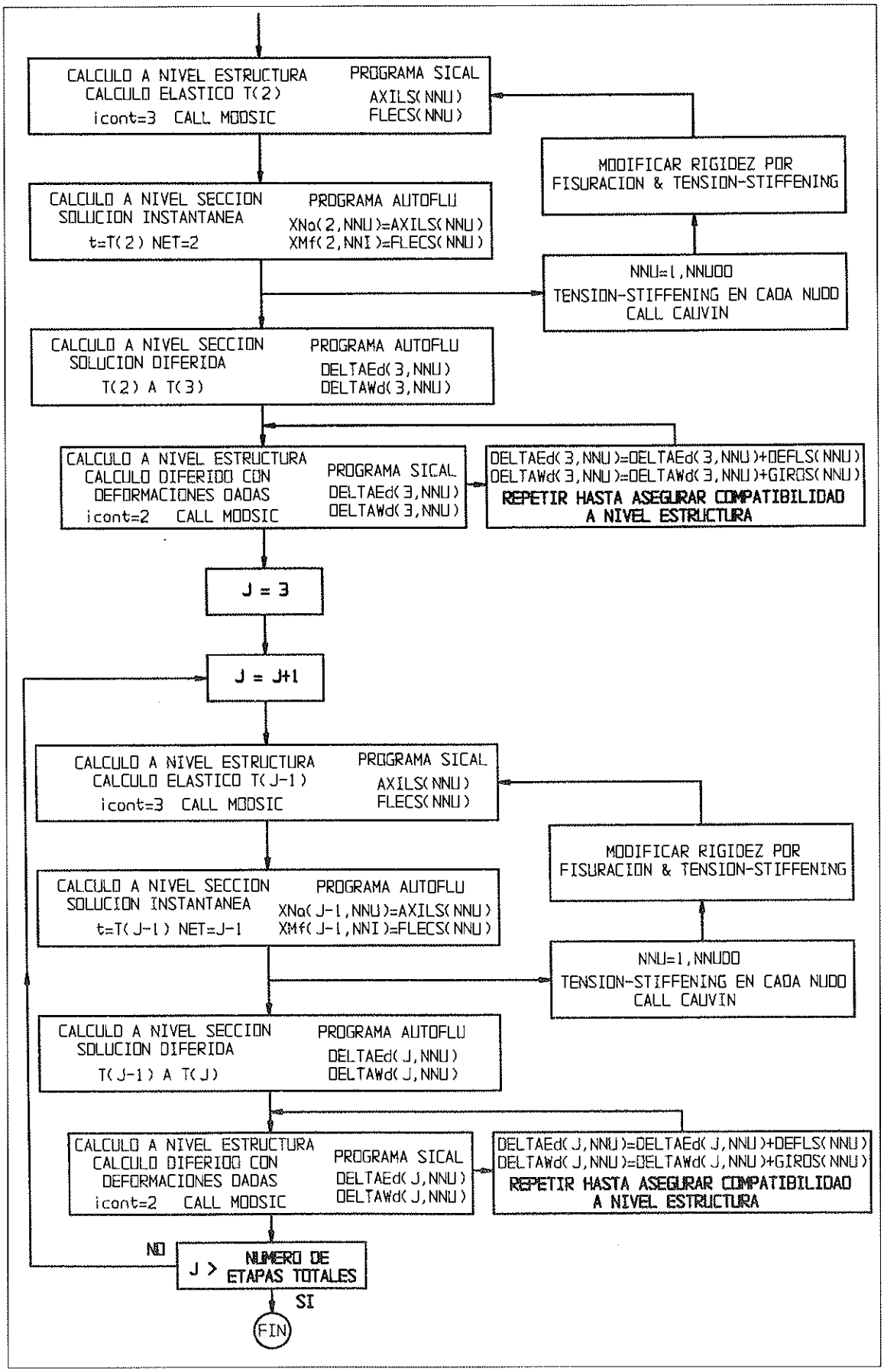
Se suele admitir que el efecto TS se mantiene constante, desde la fisuración estabilizada, hasta la plastificación del acero. Esto equivale a aceptar que afecta sólo al cálculo de flechas instantáneas y no al de flechas diferidas, lo que se justifica si la distancia entre fisuras no cambia mucho desde la carga hasta rotura.

El programa *AUTOFLU* cuenta con el efecto TS en carga instantánea y en fases diferidas. El control del aporte adicional de rigidez es continuo, actualizando, en cada paso, la matriz de rigidez de la estructura, tanto al inicio como al final del intervalo. La contribución TS en fases diferidas es pequeña, con variación de inercia de un 1% desde primera fisuración hasta tiempo infinito, adoptando el *modelo de Cauvin.*



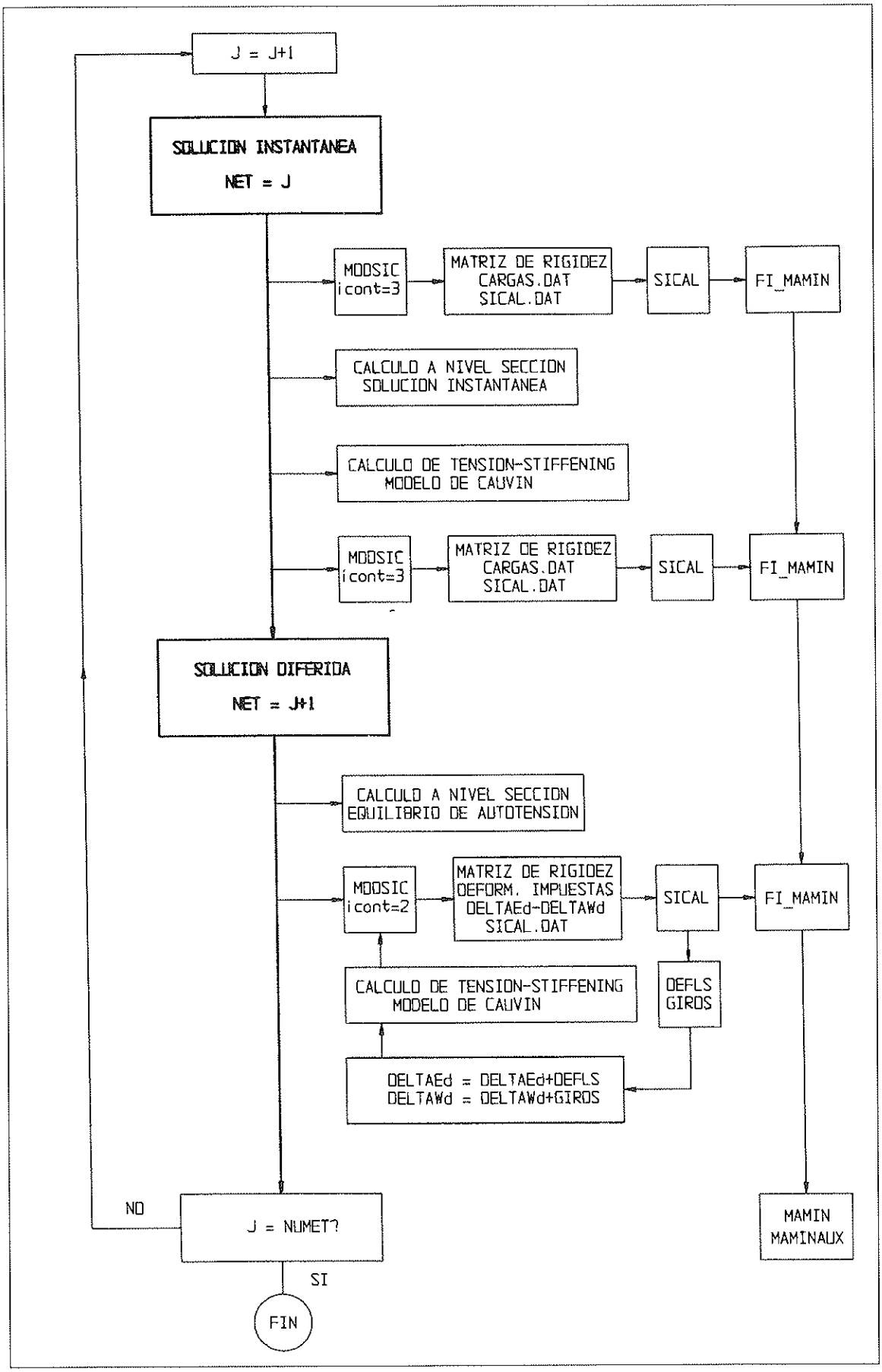
Organigrama N.º 4..

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



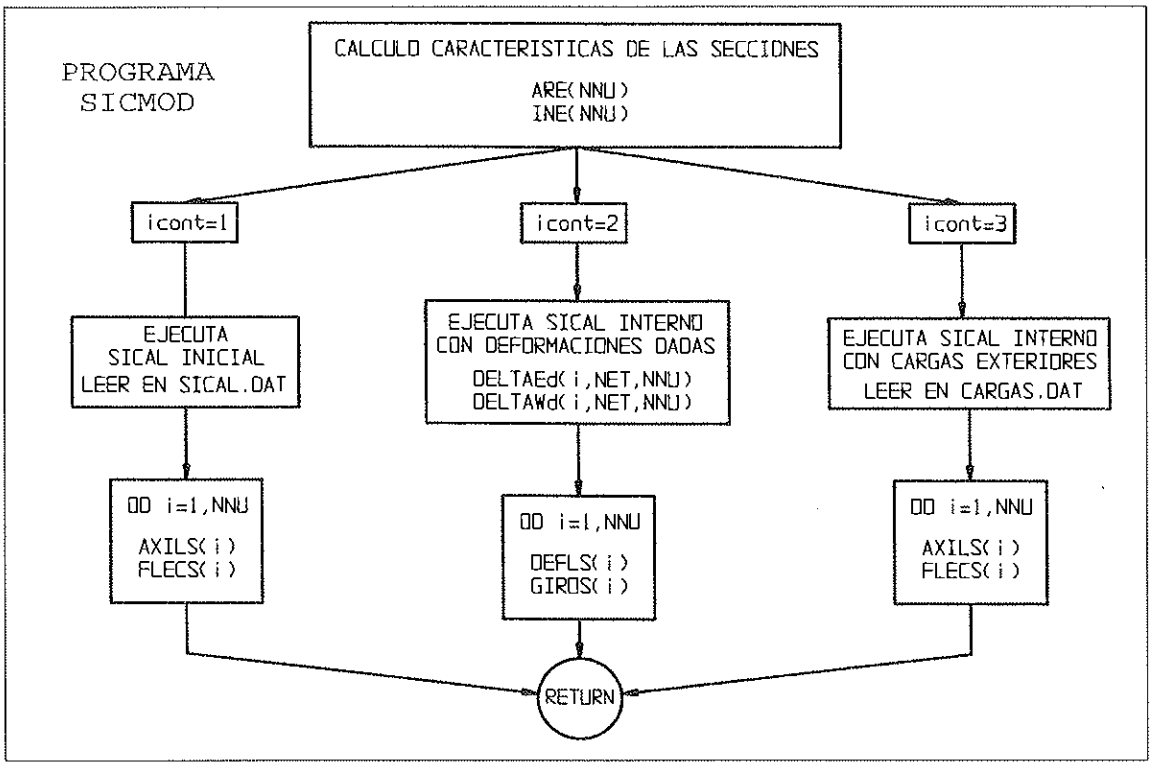
Organigrama N.º 4. (Continuación).

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



Organigrama N.º 5.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



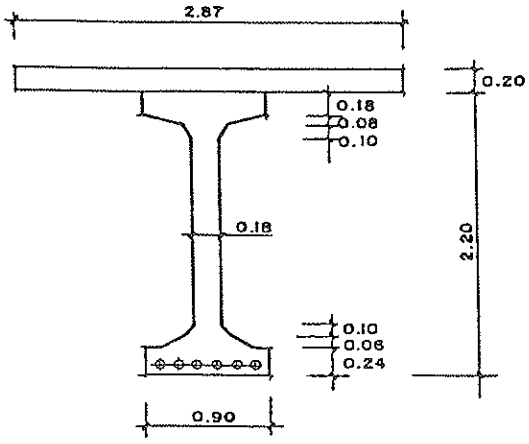
Organigrama N.º 6.

11. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

11.1. Comprobación a nivel sección

Ejemplo 1: Problema de retracción diferencial

Sea una viga pretensada que no retrae, y sobre ella se hormigona una losa, con retracción a tiempo infinito, de 0,00035. Se suponen condiciones irreales, de colaboración de la losa en el instante cero (TC=0) de vida de la viga, y que ésta no retrae. Se comparan los resultados obtenidos con el caso "más



viga $\begin{cases} A = 0,77 \\ I = 0,5103 \\ V = 1,131 \\ V' = 1,069 \end{cases}$ Losa $\begin{cases} A = 0,574 \\ I = 0,0019 \\ V = V' = 0,1 \end{cases}$ Viga + Losa $\begin{cases} A = 1,344 \\ I = 1,0105 \\ V = 0,8052 \\ V' = 1,5948 \end{cases}$

Fig. 15. Viga prefabricada y losa in situ.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

razonable" de comienzo de colaboración a 28 días.

CAPA	Tensiones [kp/cm²]		
	FIBRA	AUTOFLU	FLUSEC
LOSA	SUP	–6,3	–8,2
CAPA 2	INF	–7,8	–10,8
VIGA	SUP	+15,7	+21,9
CAPA 1	INF	–5,2	–6,9

1. Se alcanzan valores asintóticos muy rápidamente, ya que a los 250 días se obtiene más del 90% de la tensión final.

2. Las tensiones tienden al resultado previsto por *FLUSEC*.

El programa *FLUSEC* establece el EA en un único intervalo de tiempo. En retracción pura, equivale a que ésta es instantánea, lo que es falso. Es un problema de relajación de tensiones y, en un único intervalo de tiempo, se obtiene una buena aproximación al dividir por el módulo elástico de cada capa. Se considera un módulo elástico reducido, de 2.800.000 t/m², para hormigón fck=400 kp/cm² (3 días de edad) igual en ambas capas, para colaboración desde tiempo cero.

El programa *FLUSEC* admite un número indefinido de capas; pero si n=2:

$$\varepsilon = \frac{A_2\left(I_1 + I_2\right)}{AI}\,\varepsilon_r \qquad \omega = \frac{a_2 A_1 A_2}{AI}\,\varepsilon_r \qquad (33)$$

En la curva anterior casi toda la tensión se desarrolla en 500 días, por lo que se representa ahora esta curva en escala logarítmica.

1. Entre 1 y 5 días, el aumento de tensión es más lento. Al concentrar las tensiones entre 2 instantes en el paso siguiente, la fluencia de esta autotensión no influye hasta el siguiente paso.

2. Al despreciar en la losa la fluencia de las autotensiones, las tensiones finales que se obtendrían serían triples de las calculadas, ya que no tener en cuenta la fluencia de las autotensiones es como utilizar el módulo instantáneo.

3. La fluencia de las autotensiones tiene dos efectos:

   – Da oscilaciones en las curvas de tensión-tiempo.

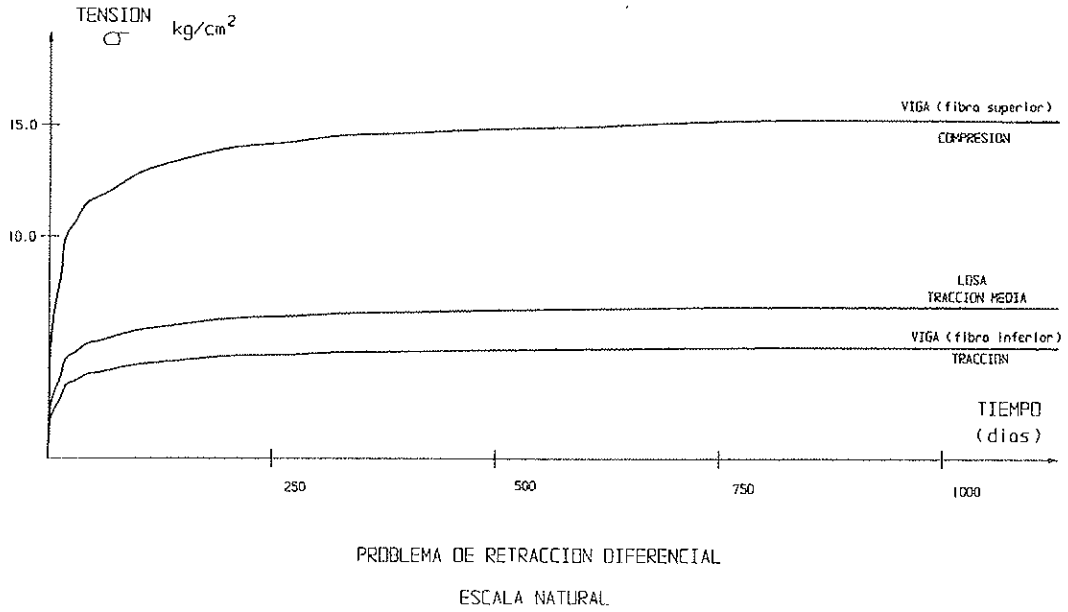


Fig. 16. Variación de la tensión generada por retracción de la losa.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

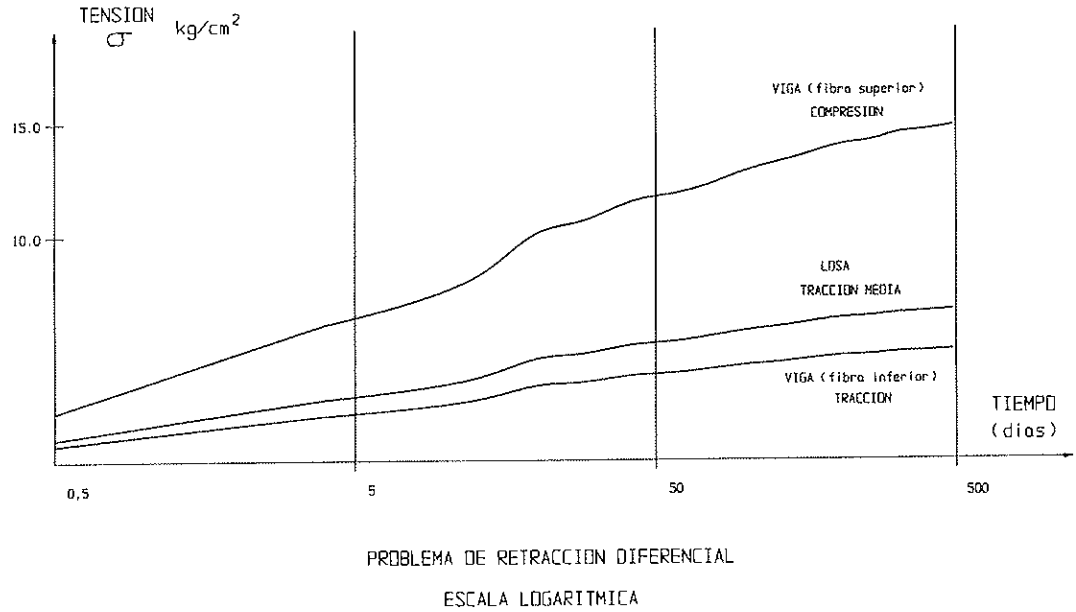


Fig. 17.

- Acelera el efecto de las autotensiones, hacia un límite.

4. Las oscilaciones aparecen porque la losa entra en tracción, y la deformación ficticia que tomaría por fluencia si estuviese aislada es un alargamiento, que va en sentido contrario al acortamiento por retracción que toma la losa con el tiempo.

5. La aceleración hacia el límite asintótico, se produce al provenir la tensión de la diferencia de dos términos anteriores, los cuales aumentan, aunque en sentido contrario, según una misma curva de fluencia. Al ser un límite asintótico menor que cualquiera de ambos por separado, se tiende más rápido a éste.

Se repite el cálculo suponiendo que la edad de la viga, al empezar a colaborar la losa, es TC=28 días.

CAPA	Tensiones [kp/cm²]		
	FIBRA	AUTOFLU	FLUSEC
LOSA	SUP	–7,9	–10,0
CAPA 2	INF	–9,3	–12,5
VIGA	SUP	+19,2	+25,9
CAPA 1	INF	–6,3	–8,2

Como conclusiones más importantes:

1. Se obtienen resultados clásicos en sección no fisurada y se comprueba *AUTOFLU*.

2. A mayor edad de la viga al empezar a colaborar la losa, ésta soporta tracciones mayores. La compresión en la fibra de contacto es también mayor, mientras que la tracción en la fibra inferior de la viga apenas varía, además de ser muy pequeña.

3. Se obtienen los resultados asintóticos previstos por *FLUSEC*, dando éste una cota superior, en ambos casos, de *AUTOFLU*.

4. Las fórmulas explícitas del equilibrio de autotensión, Iglesias (1995), podrían incluirse en normas de cálculo para estimar una cota superior de los efectos diferidos.

Ejemplo 2: Problema de fluencia diferencial

Se compara con la sección transversal de la figura 3, el método simplificado de *FLUSEC* y el método general paso-a-paso, con función de fluencia CEB-1990, de *AUTOFLU:*

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

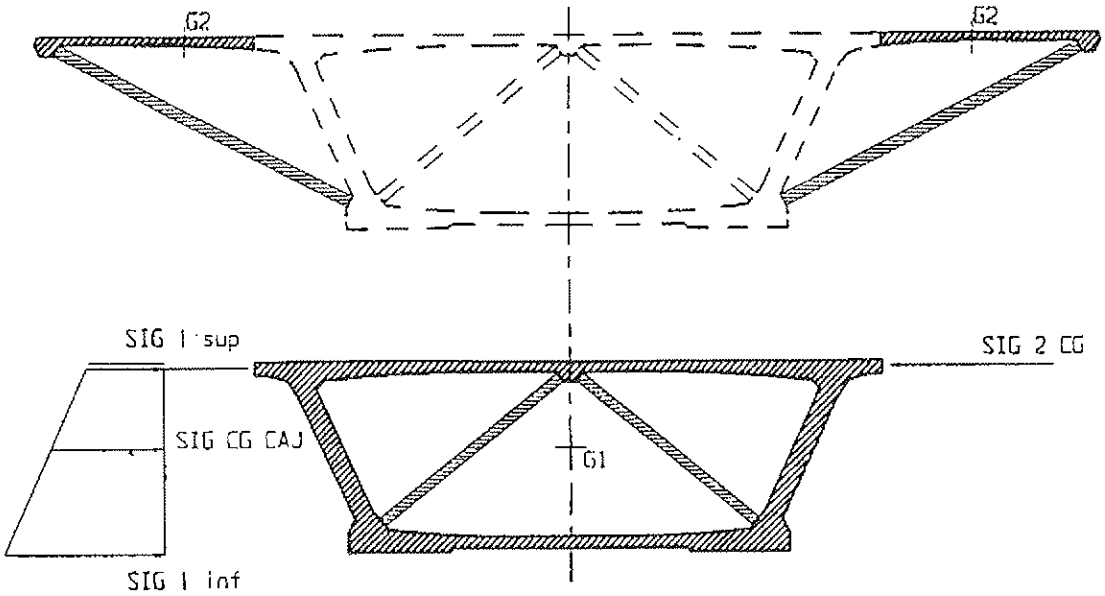


Fig. 18. Sección cajón, hormigonada en dos fases.

1. Con retracción pura, el cálculo aproximado con *FLUSEC* y coeficiente de fluencia 3, coincide con el cálculo paso-a-paso.
2. El valor obtenido en t=0 con el programa *FLUSEC*, se aleja del cálculo paso-a-paso. Esto se debe a que, aunque la retracción es un fenómeno más rápido que la fluencia, no es instantáneo. Con *FLUSEC* se concentra toda la deformación en el instante inicial.
3. En fluencia, se aproxima peor el resultado paso-a-paso, con *FLUSEC* y con coeficiente de fluencia 3. Con los valores reales 1,6 y 3,7 se obtienen idénticos valores con *FLUSEC* y con *AUTOFLU*.
4. Los resultados de *FLUSEC* en retracción pura, coinciden con *AUTOFLU*, al ser la retracción un fenómeno muy rápido en comparación con la fluencia. Por eso, el coeficiente de fluencia 3, en *FLUSEC*, aproxima casi exactamente el resultado de *AUTOFLU*.
5. El problema de fluencia, sin embargo, se distribuye en el tiempo y, por eso, es mucho más importante conocer el valor exacto de los coeficientes de fluencia; si no los resultados no son buenos.
6. A tiempo infinito, la fluencia compensa casi exactamente la tensión de tracción que provoca la retracción diferen-

Problema de fluencia					
		Tensiones [kp/cm²]			
		Autoflu		Flusec	
Capa	Fibra	t=0	t=inf	t=inf CF1=3 CF2=3	t=inf CF1=1,6 CF2=3,7
LOSA CAPA 2	C.G.	0,0	+4,5	+2,5	+4,7
CAJON CAPA 1	SUP	+27,8	+26,0	+26,8	+27,0
	INF	+94,1	+94,4	+94,3	+94,2

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

cial de la losa, respecto a la viga cajón que se supone no retrae. Esto es bastante real, pues debido a la deformación del pretensado y al ser un fenómeno rápido, se reduce mucho la retracción. Este resultado se obtiene, tanto en el cálculo paso-a-paso, con *AUTOFLU,* como con las ecuaciones del EA, con *FLUSEC.*

7. Para fijar formulaciones normativas, debe investigarse el valor del coeficiente de fluencia para el cálculo simplificado, lo que permitiría incorporar los resultados en forma de deformaciones impuestas (ε,ω), como una hipótesis más del cálculo estructural.

11.2. Comprobación a nivel estructura

Se estudia la viga biapoyada, de 15 m de luz y carga de 4 t/m.

11.2.1. Cálculo de flechas instantáneas

1. Método de Branson

Carga a 28 días de edad. Tiene en cuenta TS.

$$\left(\frac{M_f}{M}\right) = 0{,}063899$$

$$I_e = 0{,}063899\ I_b + (1 - 0{,}063899)\ I_{fis} = 1670440{,}38$$

$$f = \frac{5 \times 40 \times 1500^4}{384 \times E_c \times I_e} = 5{,}254 \text{ cm}$$

2. Integración del diagrama momento-curvatura

Carga a 28 días de edad. No tiene en cuenta TS:

$$f = 6{,}425771 \text{ cm}$$

3. Método del reglamento francés BAEL

Ancho losa superior (m)	=	1,00
Ancho de alma (m)	=	1,00
Canto total (m)	=	1,00
Canto de losa (m)	=	0,00
Canto útil (m)	=	0,95
Luz de la viga (m)	=	15,00
Carga permanente (MN/m)	=	0,04
Carga variable (MN/m)	=	0,00
fc28 (MPa)	=	25
fy (MPa)	=	510
ISO = 1 ; HIPER = 2 ? 1		
Acero inferior en centro de vano (cm²)	=	24,54
Acero superior en centro de vano (cm²)	=	10,05

Resultados:

Flecha instantánea debida a G = 58,33 mm, o sea 1/257

Flecha diferida debida a G = 70,19 mm, o sea 1/214

Flecha total debida a G = 128,52 mm

Tensión máxima en el hormigón = 15,61 MPa (n ≠ 15)

Tensión máxima en el acero = 525,03 MPa

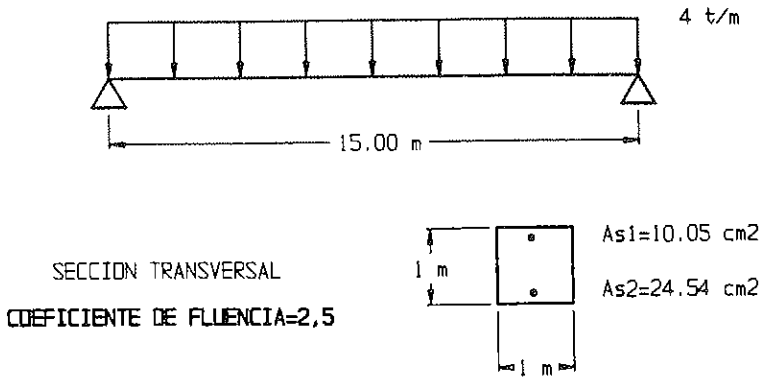


Fig. 19. Comprobación a nivel estructura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

4. Programa AUTOFLU, con TS

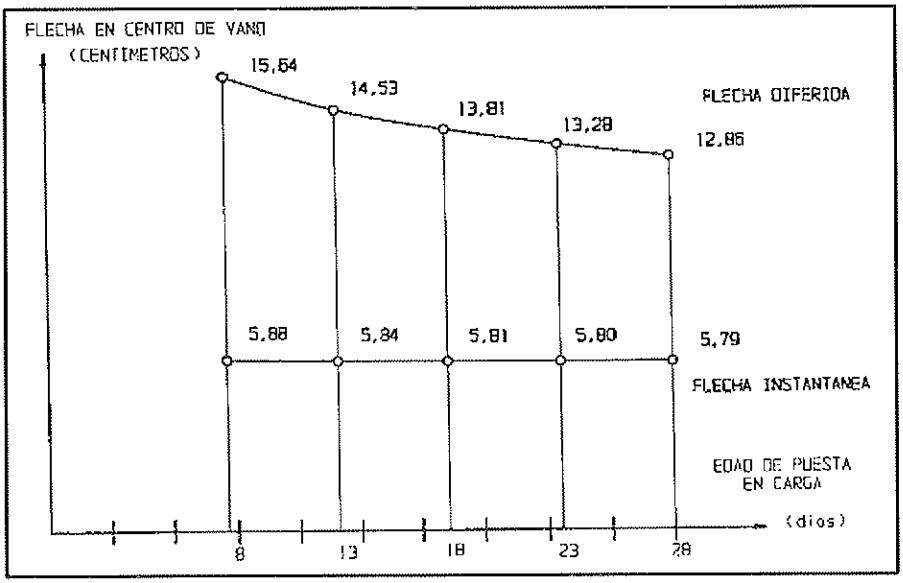
Se realiza el cálculo activando TS.

11.2.2. Cálculo diferido de flechas

Con TS y carga a diferentes edades, se obtiene, con *AUTOFLU,* los resultados de la figura 20.

Carga (días)	8	13	18	23	28
Flecha (cm)	5,8798	5,8382	5,8157	5,8012	5,7909

INFLUENCIA DE LA EDAD DE PUESTA EN CARGA
SOBRE LA FLECHA DIFERIDA



CARGA A 28 DIAS

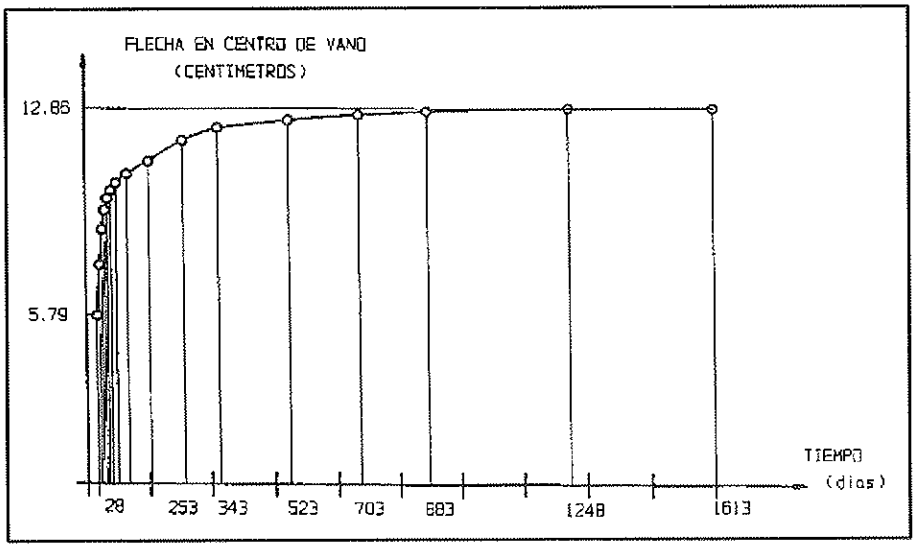


Fig. 20.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Si se carga a 28 días, anulando TS:

Método	Integración	Bael (con TS)	AUTOFLU
f INST.	6,425771	5,833	6,9535
f TOTAL	–	12,852	14,7049

11.2.3. Viga empotrada-apoyada

Se resuelve, con *AUTOFLU,* una viga de 15 m de luz y carga de 4 t/m, empotrada-apoyada. Se resumen los resultados de flechas y esfuerzos obtenidos en la estructura estudiada. El coeficiente de fluencia es 2,5.

Puesta en carga a 28 días	Flecha máxima total (mm)	Momento de empotramiento (mt)
t = 28 días	24,1	–112,7
t = 1613 días	56,8	–105,6

11.3. Contrastación experimental

11.3.1. Introducción

Para comprobar *AUTOFLU*, se compara con los ensayos de *Serrà (1994),* que ensaya una serie de vigas biapoyadas, todas de la misma luz (3,60 m). Se elige la viga C24, de la 2.ª serie, cargada a 28 días. El coeficiente de fluencia es $\varphi\ (t_0,\infty) = 3{,}91$ y deducido de las curvas experimentales.

Carga aplicada: 2P = 2,962 t

Características de los materiales:

$f_{ck} = 2.000\ t/m^2 \qquad f_{ct} = 230\ t/m^2$

$\varphi\ (t_0,t_\infty) = 3{,}91 \qquad t_0 = 28$ días $\qquad HR = 75\%$

El *Código Modelo CEB-1990* define la deformación de retracción:

$$\varepsilon_{sh}\ (t_0,t) = \varepsilon_{cs}\beta\ (t-t_0)$$

Donde ε_{cs} es el valor asintótico de la retracción, a tiempo infinito. Según la curva de retracción de la probeta PF4 del ensayo de fluencia a 28 días, C24, el valor de retracción que habría que considerar sería $\varepsilon_{cs} = 450\ \mu\varepsilon$.

1. Flechas instantáneas, totales y diferidas.
2. Deformación en la fibra superior del hormigón.
3. Deformación de la armadura traccionada.
4. Evolución de la curvatura seccional.
5. Evolución de la posición de la fn de la sección.

11.3.2. Resultados de AUTOFLU

Se modeliza la viga biapoyada, C24, como se indica en la figura 19 y se compara con los resultados obtenidos por *Serrà.*

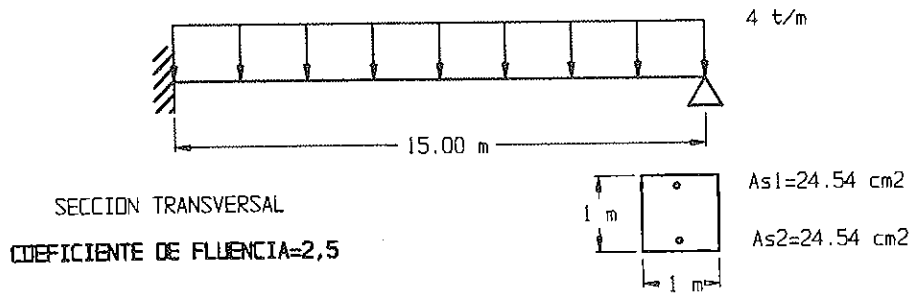
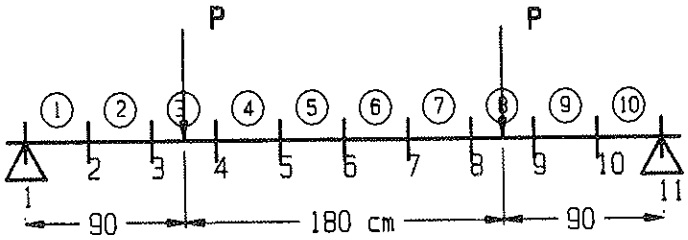


Fig. 21. Viga empotrada-apoyada.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



2P=29.62 kN

fck=20 MPa

fct=2,3 MPa

SECCION TRANSVERSAL

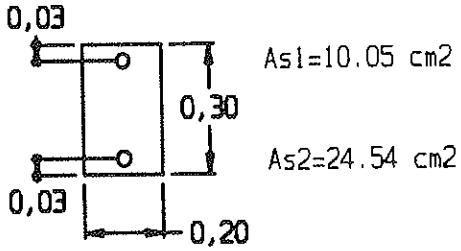


Fig. 22. Modelización de la viga ensayada.

Ensayos de Serrà		
ε_{cs} = 450 με	ε (t_0,t_∞) = 3,91	t_0 = 28 días
Flecha instantánea (mm)	4,85	
Flecha diferida (mm)	5,11	
Flecha total (mm)	9,96	

AUTOFLU			
ε_{cs} = variable	ε (t_0,t_∞) = 3,91	t_0 = 28 días	
Retracción	Flechas (mm)		
[με]	Instantánea	Diferida	Total
ε_{cs} = 300	3,65	4,36	8,01
ε_{cs} = 400	3,74	4,61	8,35
ε_{cs} = 450	3,79	4,70	8,49
ε_{cs} = 500	3,84	4,78	8,62
ε_{cs} = 600	3,93	4,96	8,89

AUTOFLU ε_{cs} = variable φ (t_0,∞) = 3,91 t_0 = 28 días	Deformación del hormigón comprimido [με]					
	Serrà	ε_{cs} [με] AUTOFLU				
		300	400	450	500	600
Instantánea	325	315	354	373	392	430
Diferida	775	572	624	651	676	729
Total	1100	887	978	1024	1068	1159

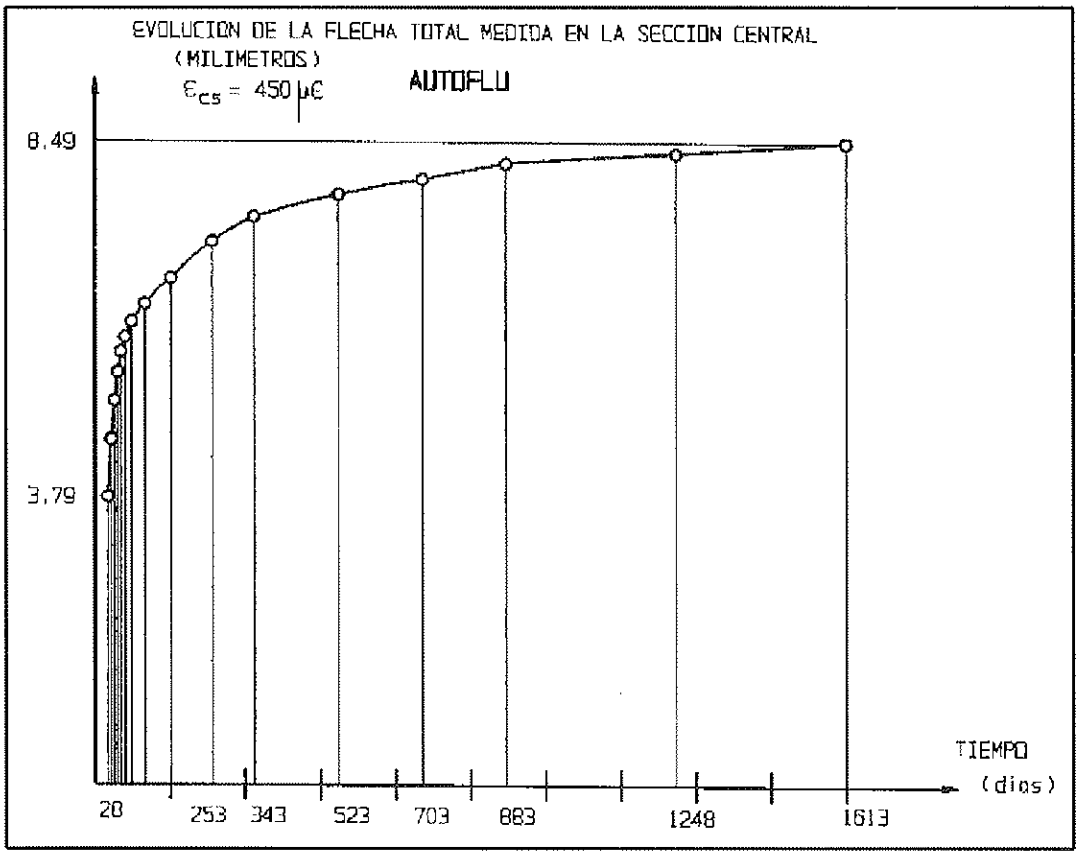
Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

AUTOFLU ε_{cs} = variable $\varphi(t_0,\infty) = 3{,}91$ t_0 = 28 días	Deformación de la armadura traccionada [με]					
	Serrà	ε_{cs} [με] AUTOFLU				
		300	400	450	500	600
Instantánea	600	504	526	538	549	571
Diferida	200	247	224	214	204	185
Total	800	751	750	752	753	756

AUTOFLU ε_{cs} = variable $\varphi(t_0,\infty) = 3{,}91$ t_0 = 28 días	Curvatura seccional [με]					
	Serrà	ε_{cs} [με] AUTOFLU				
		300	400	450	500	600
Instantánea	4000	2533	2591	2620	2650	2708
Diferida	3500	3023	3132	3188	3243	3358
Total	7500	5556	5723	5808	5893	6066

PROFUNDIDAD DE LA FIBRA NEUTRA xft			
t = 0	ε_c	ε_s	**xft [mm]**
Serrà	325	600	94,9
ε_{cs} = 300 με	315	504	103,8
ε_{cs} = 400 με	354	526	108,6
ε_{cs} = 450 με	373	538	110,5
ε_{cs} = 500 με	392	549	112,5
ε_{cs} = 600 με	430	571	116,0
$t = \infty$	ε_c	ε_s	xft [mm]
Serrà	1100	800	156,3
ε_{cs} = 300 με	887	751	146,2
ε_{cs} = 400 με	978	750	152,8
ε_{cs} = 450 με	1024	752	155,7
ε_{cs} = 500 με	1068	753	158,4
ε_{cs} = 600 με	1159	756	163,4

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



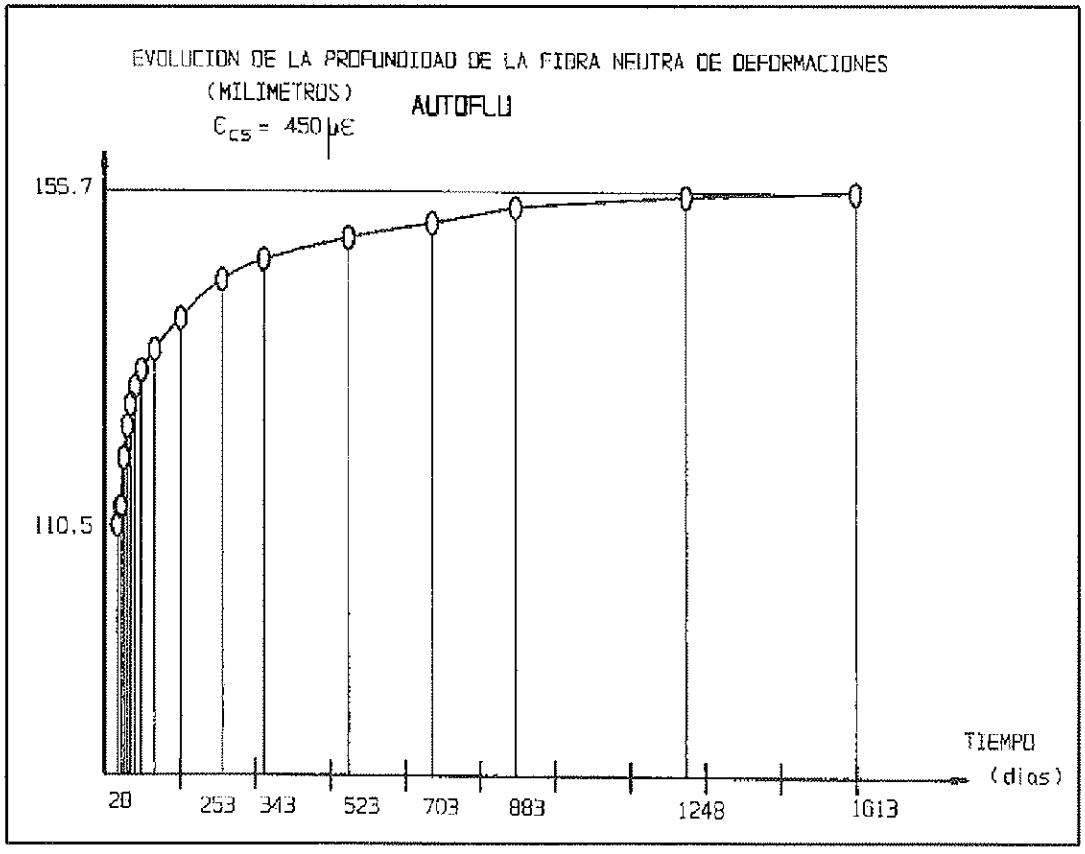


Figura 23.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

11.3. Conclusiones

1. La flecha instantánea calculada con ε_{cs} = = 450 με *(3,79 mm)* difiere de la del ensayo *(4,85 mm)*. La rigidización por TS es excesiva en la subrutina *CAUVIN* de *AUTOFLU*. Comparando con el resultado previo en la viga de 15 m y carga próxima a rotura, el efecto TS se aproxima mejor con niveles de carga altos.

2. Importancia de aproximar bien el efecto TS para evaluar correctamente la flecha instantánea y la flecha total.

3. La flecha diferida con *AUTOFLU (4,70 mm)* es menor que la de los ensayos *(5,11 mm)*. Se calcula con diferentes ε_{cs} para horquillar su influencia, obteniendo flechas iguales para ε_{cs} altos.

4. El cálculo con *AUTOFLU* y los ensayos muestran que la variación de tensión por fluencia, en las armaduras pasivas, es pequeña, siendo una hipótesis aceptable en métodos simplificados.

5. La hipótesis de variación de profundidad de la fn de *AUTOFLU* en fluencia, confirma que, en vigas prefisuradas (fn de tensión y deformación coincidentes), la hipótesis de constancia de posición de la fn es, cuando menos, cuestionable.

11.4. Un ejemplo real: Puente sobre el Andarax (Almería)

Se resumen a continuación los resultados obtenidos para este puente, de hormigón armado, de 6 vanos de 23 metros de luz, y canto 1,00 m.

Flechas en el centro del vano lateral		
	Método EH-91 (cm)	**AUTOFLU (cm)**
t = 0	6,80	6,83
t = inf	11,93	13,48

CP(t=inf) = CM + 0,75(PPusv) + + 0,25 (PP por fases)

flecha (t=inf) = flecha (CP t=0) + + flecha (CP t=inf)

COEFICIENTE DE FLUENCIA = 2

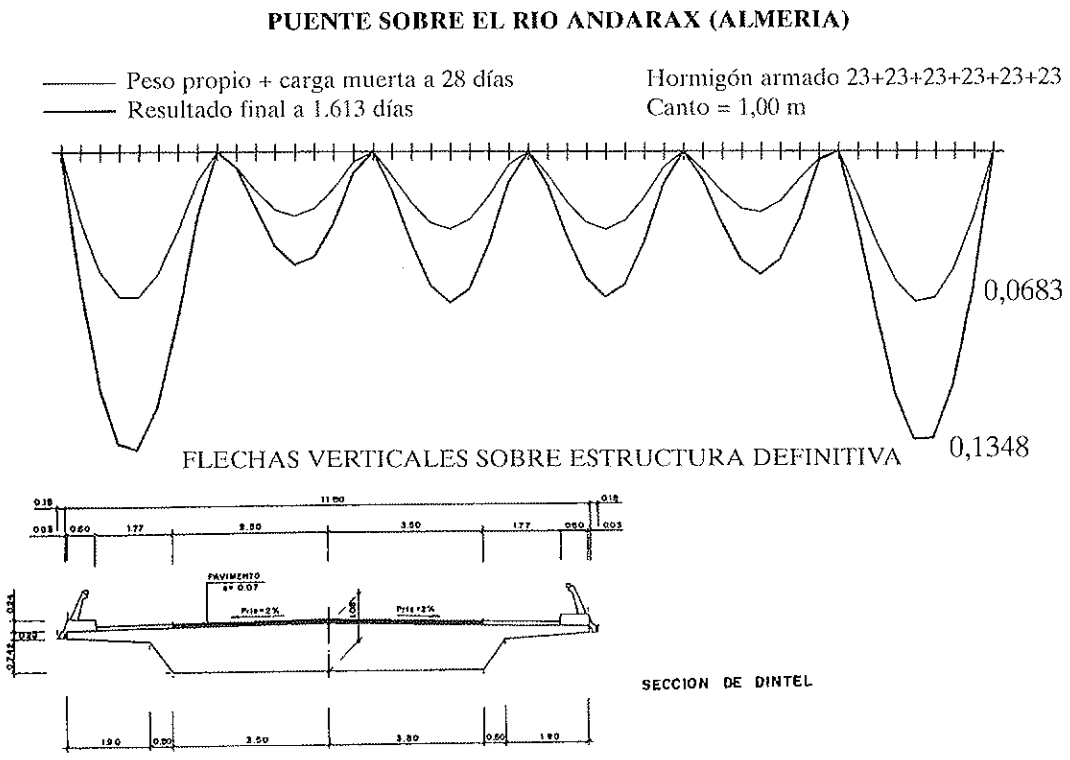


Figura 24.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

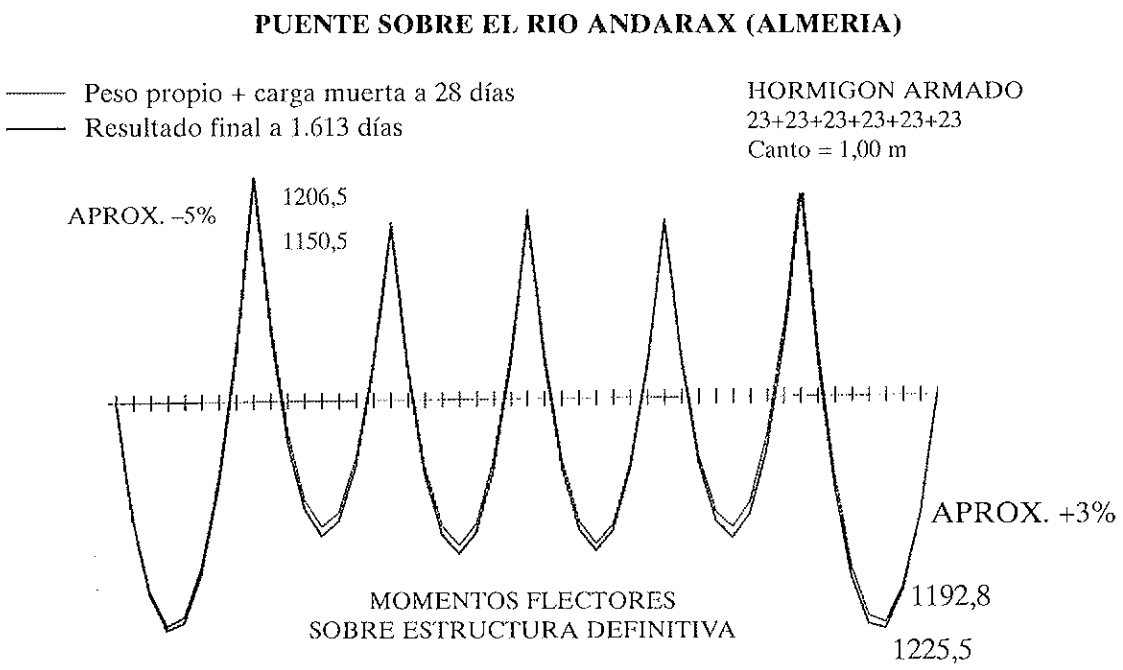


Figura 25.

12. DESARROLLOS FUTUROS

1. Estudio de gradientes térmicos variables en el tiempo, incluidos en el cálculo a nivel sección, con el EA.
2. Estudio de modelos de retracción y fluencia que sean variables con la profundidad de la fibra considerada en el canto.
3. Modelos en los que el EA se establezca con una hipótesis diferente a la Ley de Navier.
4. Formulación variacional del EA, con modelización mixta multicapa-multifibra.
5. Extensión del programa *AUTOFLU* a modelos multifibra, con efectos diferidos en planos verticales y horizontales.
6. Establecer modelos multicapa-multifibra en los que se simulen conectadores flexibles, con deslizamiento relativo entre capas de acero y hormigón, además de eventuales despegues.
7. Generalizar el modelo al cálculo en rotura, es decir, con leyes de elasticidad no lineales para los materiales.
8. Efectos no lineales ligados a hipótesis de pequeñas deformaciones con grandes desplazamientos; y generalización de la formulación para cables de pretensado exterior.
9. Estudio de criterios normativos en estructuras mixtas que, particularizando la formulación del EA, con intervalo de tiempo único, establezca cotas superiores de efectos diferidos de retracción, fluencia y temperatura.

BIBLIOGRAFÍA

Alameh, A.S. Harajli, M.H., "Deflection of Progressively Cracking Partially Prestressed Concrete Flexural Members". PCI Journal/May-June 1989.

Acker, P. Eymard, R. "Fluage du béton:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Un modèle plus perfomant et plus simple à introduire dans les calculs numériques". Annales de l'ITBTP n.º 507. Série Béton: 295. Octobre 1992.

Barbera, E. Perepérez, B. Benlloch, J. Fran, J.M. González, G. "Fisuración de elementos de hormigón armado sometidos a flexión simple: Evolución en el tiempo". Hormigón y Acero, n.º 178. 1er trimestre 1991.

Bazant, Z.P. Kim, S.S. "Approximate Relaxation Function for Concrete Creep". Journal of the Engineering Mechanics Division. Vol. 106. Dec. 1979.

Bazant, Z.P. Panula, L. "Creep and Shrinkage Characterization for Analizing Prestressed Concrete Structures". PCI Journal/May-June 1980.

Bazant, Z.P. Tsubaki, T. "Non Linear Creep Buckling of Reinforced Concrete Columns". Journal of the Structural Division. Vol. 106. Nov. 1980.

Bazant, Z.P. Wittmann, F.H. (Editores). "Creep and Shrinkage in Concrete Structures". John Wiley & Sons, Inc 1982.

Bresler, B. Selna, L. "Analysis of Time-Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Structures". Symposium on Creep of Concrete. ACI Special Publication SP-9. N.º 5. Mar. 1964.

Carol, I. Murcia, J. "Utilización de una formulación (exacta) para el análisis no lineal en el tiempo, de estructuras reticulares de hormigón armado". II Simposium sobre Aplicaciones de los Elementos Finitos en Ingeniería: "Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería: análisis de estructuras". Edtors: Oñate, E. Suárez, B. Canet, J.M. E.T.S.I.C.C.P.B., 1986.

Carol Vilasarau, I. "Modelos de análisis no lineal en el tiempo de estructuras reticulares de hormigón. Revisión integrada y propuesta de un nuevo modelo global para material y estructuras". Tesis. Barna., 1985.

Cauvin, A. "Influence of Tension-Stiffening on Behaviour of Structures". IABSE COLLOQUIUM. Structural Concrete. Stuttgart (1991).

Chan, H.C. Cheung, Y.K. Huang, Y.P. "Crack Analysis of Reinforced Concrete Tension Members". Journal of Structural Engineering. Vol. 118. N.º 8. August, 1992.

CEB. "Fissuration et Déformation". Manual du CEB, Ecole Polytechnique Féderal de Lausanne, Suisse, 1983.

CEB. "Manual on Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete". Georgi Publishing Co., 1984.

CEB. "Evaluation of the Time Dependent Behaviour of Concrete". Bulletin d'information N.º 199. Contribution à la 27ème Session Plénière du CEB. París, 1990.

Corres Peiretti, H. Rodríguez Cazar, R. "Diagrama momento-curvatura de secciones de hormigón armado y pretensado sometidas a carga instantánea y diferida. Modelo teórico y contrastación experimental". Hormigón y Acero, n.º 166. 1.er trimestre, 1988.

Corres Peiretti, H. Sánchez-Gálvez, V. Elices Calafat, M. "Pérdidas de pretensado por fluencia y relajación: Estudio comparativo de distintos modelos". Hormigón y Acero n.º 155. 2.º Trimestre, 1985.

Elbadry, M. Ghali, A. "Thermal Stresses and Cracking of Concrete Bridges". ACI Structural Journal. November-December 1986.

Elbadry, M. Ghali, A. "Serviceability Design of Plane Frames". ACI Structural Journal, 1989.

Fauchart, J. "Effets du retrait et du fluage dans les ponts en béton précontraint à poutres préfabriquées rendues continues". Rapports des Commissions de Travail. Symposium: "L'influence du fluage et du retrait, l'effet des changements de température sur les constructions en béton". AIPC. Madrid, 1970.

Favre, R. Koprna, M. Radojicic, A. "Effets différés, fissuration et déformations des structures en béton". Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Département de Génie Civil: Centre d'Etude du Béton Armé et Précontraint). Georgi Saint-Saphorin, 1980.

Ferraro Maia, A.C. Grelat, A. Foure, B.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

"Analyse non linéaire des ossatures en béton armé ou précontraint compte tenu du retrait, du fluage et de la relaxation". Annales de l'ITBTP. N.º 412. Série: Théories et méthodes de calcul 258. Février 1983.

Ghali, A. Favre, R. "Concrete Structures: Stresses and Deformations". CHAPMAN AND HALL. London, 1986.

Ghali, A. "Stress and Strain Analysis in Prestressed Concrete: A critical Review". PCI Journal November-December 1989.

Ghali, A. "Deflection of Prestressed Concrete Two-Way Floor Systems". ACI Structural Journal. January-February 1990.

Gilbert, R.I. Warner, R.F. "Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs". Journal of the Structural Division. Vol. 104. Dec. 1978.

Gilbert, R.I. "Deflection Calculations for Reinforced Concrete Beams". Civil Engineering Transactions. Institution of Engineers, Australia. Vol. CE25, N.º 2, Mayo 1983.

Gilbert, R.I. "Time Effects in Concrete Structures". Elsevier, 1988.

Glanville, W.H. "Studies in Reinforced Concrete-III. The Creep or Flow of Concrete under Load". Building Research Technical Paper N.º 12. Department of Scientific and Industrial Research. Londres, 1930.

Gupta, A.K. Maestrini, S.R. "Tension-Stiffness Model for Reinforced Concrete Bars". Journal of Structural Engineering. Vol. 116. N.º 3. March 1990.

Iglesias, C. "Redistribución de tensiones en secciones transversales ejecutadas por fases sucesivas". Hormigón y Acero, n.º 197 (1995).

Kang, Y.J. "Nonlinear Geometric, Material and time-dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames". Ph.D. Thesis, Univ. Berkeley, Ene. 1977.

Mari, A. "Nonlinear Material, Geometric and time-dependent Analysis of 3-D Reinforced Concrete Frames". Proc. Int. Conf. Num. Methods for Non-linear Problems, Barcelona, 1984. Ed. Pineridge Press, Swansea, U.K.

Scordelis, A. "Analytical Models for Nonlinear Material, Geometric and Time-dependent Effects". Proc. Int. Symp. Nonlinearity and Continuity in Prestressed Concrete, Waterloo (Canada), 1983. Vol. 2.

Selna, L.G. "Creep, cracking and shrinkage in concrete frame structures". Journal of the Structural Division. Vol. 95. Dic. 1963.

Serra Martín, I. "Estudio experimental del comportamiento de vigas de hormigón armado descimbradas a tempranas edades". Tesis Doctoral, E.T.S. ING. DE CAMINOS, UPC. Barcelona, 1994.

Ulm, F.J. Clement, J.L. Brioist, J.J. "Analyse parasismique des structures en béton armé par éléments finis poutre multifibres". Génie parasismique et aspects vibratoires dans le génie civil: 3ème Colloque National AFPS, Saint-Rémy-Les-Chevreuse (Francia), 1993.

Ulm, F.J. Clement, J.L. Gregeois, B. "Lateral buckling analysis of R/C beams". Proc. Col. Nat. Calcul des Structures. Ed. Hermes, París, France, 1993.

Ulm, F.J. Humbert P. Magnat, V. "A new Modelling of Prestressing in CESAR-LCPC". En "Modelling of external prestressing-state of the art report of AFPC". Ed. E. Conti et al., 1993.

RESUMEN

Este trabajo es el resumen de una tesis doctoral cuyo objetivo es establecer un modelo de cálculo de estructuras en servicio, teniendo en cuenta los efectos diferidos de fluencia y deformaciones autoinducidas e impuestas. Se adopta el modelo multicapa, con la hipótesis de Navier, que relaciona el cálculo local a "nivel sección" con el cálculo global a "nivel estructura". El modelo multicapa permite considerar la fisuración a nivel seccional; si bien es cierto que, al admitir sólo fisuración de tipo vertical, limita su aplicación a vigas en flexión. Se considera el efecto Tension-Stiffening con un método paso-a-paso, que establece el "equilibrio de autotensión" en cada intervalo temporal, algoritmo encuadrable dentro de los métodos de relajación de tensiones. La implementación del mismo condujo a un modelo, que se comprueba a nivel sección, a nivel estructura y se contrasta con ensayos reales de fluencia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

SUMMARY

This paper summarizes the principal results of a thesis whose objective is to set up a model for the service analysis of concrete structures, accounting for delayed effects of creep and self-induced and superimposed deformations.

The multilayer model is developed assuming the Navier Law wich relates the analysis at a "cross-section level" with the global analysis at a "structure level". The multilayer model permits to take into account cracking at a "cross-section level", although the assumption of vertical cracking restricts its application to beams in bending.

The tension-stiffening effect is considered in a general step-by-step analysis, establishing the self-stress equilibrium in every time interval. This method of analysis may be classified among stress relaxation procedures, from which follows the implementation of a model, that has been checked at a section level, at a structure level and compared with creep tests.

* * *

NOTA INFORMATIVA

La Comisión de Materiales y Sistemas de Pretensado de la *Fédération Internationale de la Précontrainte* (FIP) ha nombrado a **Manuel Elices Calafat** director del Comité sobre **"Tolerancia al Daño de Aceros de Pretensar"**. El Comité está constituido por representantes de la industria, empresas consultoras de ingeniería, empresas constructoras y centros de investigación de Europa, Estados Unidos y Japón. Tiene como objetivo elaborar una Recomendación Técnica sobre la tolerancia al daño de aceros de preteusar.

Manuel Elices trabaja desde hace más de treinta años en temas relacionados con las propiedades mecánicas de los aceros, su relación con la estructura del material, la modificación de sus propiedades debida a acciones termomecánicas y el comportamiento en ambientes agresivos. Dirige el Departamento de Ciencia de Materiales de la Universidad Politécnica de Madrid y ha participado como consultor en la solución de numerosos problemas de patología de aceros de pretensar y armar y de aceros estructurales.

Además, dentro de las actividades de la Comisión sobre Materiales y Sistemas de Pretensado de la FIP, el profesor Elices es miembro de los Comités sobre "Durabilidad de Aceros de Pretensar" y "Fibras de Carbono en Sistemas de Pretensado". Anteriormente fue director del Comité sobre "Comportamiento de Hormigón Pretensado en Condiciones Criogénicas".

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

IV Puente sobre el río Guadiana, en Badajoz. Instrumentación y control del atirantamiento

José Manuel González Barcina
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
ALEPH Consultores

Francisco Millanes Mato
Dtor. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
IDEAM, S.A.

1. INTRODUCCION

El presente artículo tiene por objeto describir los aspectos fundamentales y las conclusiones de mayor relevancia del proceso de control del atirantamiento del IV puente sobre el río Guadiana, a su paso por Badajoz.

La exposición se estructurará en 7 apartados, dedicándose este primero a realizar un encaje cronológico de las diversas etapas y entes que han participado en el Proyecto, la Construcción y la Dirección de Obra del Puente.

En el segundo apartado, se realizará una breve descripción de la obra, que aporte al lector un conocimiento mínimo de la estructura, suficiente para valorar la importancia de la misma y el interés de seguir leyendo los restantes epígrafes.

El tercer apartado se destina a la descripción de la instrumentación propiamente dicha, tanto en sus aspectos de adquisición, como de manipulación, registro y presentación de datos.

El grueso del trabajo de seguimiento y control realizado por los autores, dentro del marco estricto del atirantamiento, se desarrolla en los epígrafes 4 a 6, mencionando los aspectos fundamentales del establecimiento del plan de tesado, y las labores realizadas, tanto a pie de obra como en la oficina central.

En el último apartado se establecerán las conclusiones más significativas, que se han sintetizado tras valorar el trabajo realizado.

El puente atirantado de Badajoz fue objeto de un concurso de ideas, por parte del Ayuntamiento de dicha ciudad, en el año 1990. Como consecuencia del mismo, resultaron premiados los hermanos Francisco y Ramón Sánchez de León. Para la realización del diseño estructural definitivo, contactaron con IDEAM, S.A., en la que los autores del artículo colaboraron en la redacción del Proyecto Base.

Con dicho proyecto, la Junta de Extremadura realizó la licitación, con admisión de variantes, resultando adjudicataria la UTE formada por DRAGADOS y FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS. Los Servicios Técnicos de Fomento de Construcciones y Contratas redactaron el Proyecto de Construcción definitivo, firmado por D. Enrique Bofill de la Cierva, D. José Luis Alvarez Poyatos y D. José Ignacio González Esteban. La obra comenzó, a finales del año 1992, bajo la Dirección de D. Antonio Gómez Gutiérrez, por parte de la Consejería de Obras Públicas, Urbanismo y

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Medio Ambiente, de la Junta de Extremadura. IDEAM, S.A. fue adjudicataria de la Asistencia Técnica a la Dirección de Obra, incluyendo la supervisión del proyecto de Construcción, redactado por la constructora, y contando a pie de obra con la presencia de D. Javier Marco Ventura. La inauguración de la obra se realizó en diciembre de 1994.

2. DESCRIPCION DEL PUENTE

La figura 1 recoge las magnitudes fundamentales de la estructura. Se trata de un puente atirantado, con un vano principal, de 136 metros de luz; uno de compensación, de 88 m; y otro de retenida, de 32 m. Estos tres vanos atirantados se completan con un viaducto de acceso, formado por seis vanos, de 32 metros cada uno, construidos en continuidad con la zona atirantada. La longitud total del tablero, entre juntas, es de 452 metros.

La plataforma tiene un ancho total de 23 metros, que se materializan mediante un cajón central, de 11,40 metros en coronación, y dos voladizos laterales, de 5,80 m cada uno, sustentados mediante costillas metálicas cada cuatro metros, y losa de hormigón armado, de 20 cm de espesor. El cajón central es continuo a lo largo de todo el tablero, presentando dimensiones exteriores constantes; si bien es monocelular en la zona atirantada (Figura 1) y bicelular en los vanos de acceso, por la adición de un alma central. El ancho del cajón, en su fondo, es de 8 metros, y el canto en el eje es de 2,114 m.

La pila principal está formada por un pórtico en Δ, de 81,20 metros de altura sobre la cimentación. La separación máxima entre caras exteriores de fustes es de 39,6 metros. Los fustes son de sección variable, aproximadamente cuadrada, con unos rebajes en las caras longitudinales. Las dimensiones exteriores varían entre unos 5,80 m y 3,40 m. A nivel de cimentación se arriostran mediante un travesaño de 5 m de canto. En su coronación, la pila abraza una célula metálica, para el anclaje de tirantes, mediante recrecido transversal y macizado de los fustes, según se aprecia en la figura 1. La célula tiene un ancho transversal constante, de 1,50 m, con dimensiones longitudinales variables entre 4 y 5,4 m en el sentido longitudinal. La altura de dicha célula es de unos 15 m.

El tablero apoya, a nivel de la pila principal, por medio de una estructura metálica espacial, capaz de recoger, además de las cargas verticales, los esfuerzos longitudinales de desequilibrio entre vanos y los transversales de viento.

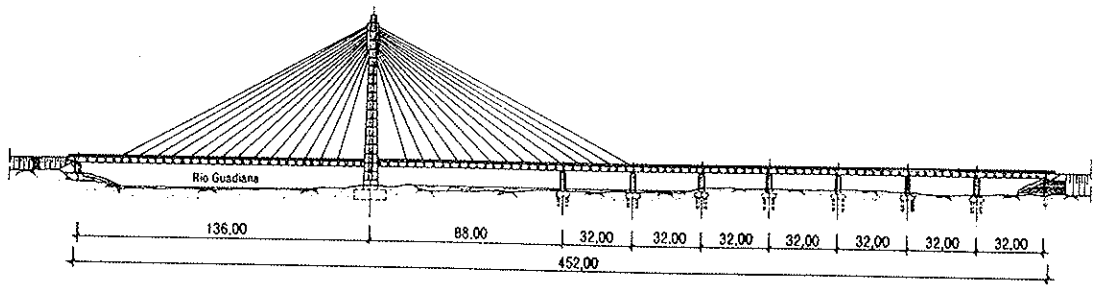
El atirantamiento se realiza, en plano único, mediante 28 cables, anclados en el eje del tablero, cada 8 m. El anclaje en pila se realiza en la célula metálica, con una separación media entre anclajes, de 85,0 cm.

La construcción del puente se ha efectuado independizando al máximo los distintos trabajos de tablero, pila y atirantamiento. El tablero se construyó ejecutando primero el cajón central, mediante el proceso de vanos sucesivos con cimbra autolanzable, construyendo un vano completo, más una ménsula de compensación correspondiente al vano siguiente. Para la utilización de este procedimiento, en la zona atirantada se dispusieron pilas provisionales cada 32 m, que soportaban el tablero hasta su posterior desapeo durante la fase de tesado de tirantes.

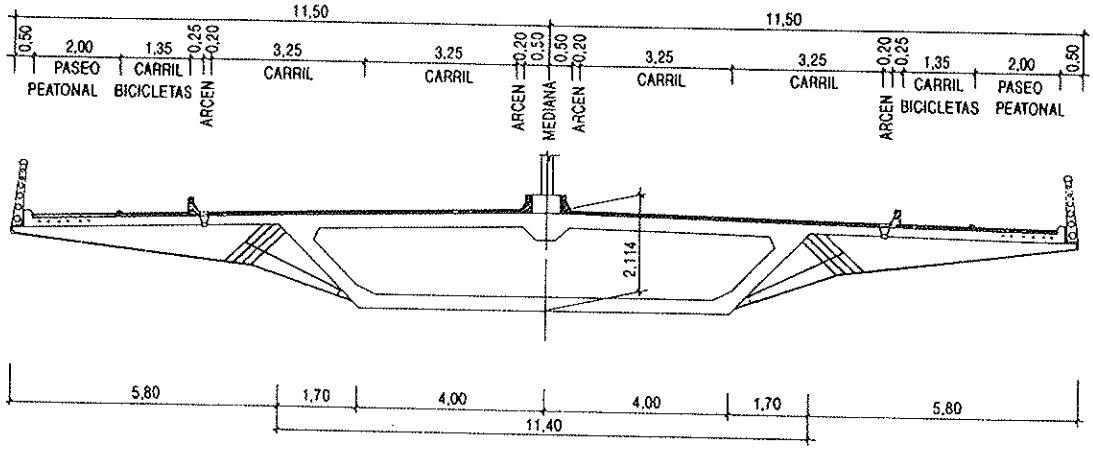
Los voladizos laterales se simultanearon a la ejecución del cajón central, con un retraso de unos dos vanos. Para la ejecución de los mismos, se colocaban primero las costillas metálicas, posteriormente unas prelosas semirresistentes y, por último, la armadura superior y el hormigón "in situ" (véase figura 2). La construcción de la pila se realizó mediante encofrado trepante, con módulos de unos 4 m, simultaneándose con la ejecución del tablero.

La instalación y el tesado de los tirantes se efectuó una vez construido el tablero completo, incluidos los voladizos laterales y, por supuesto, la pila principal. Se procedió a la colocación y tesado de los tirantes, desde los más próximos a la pila, avanzando hacia el exterior. El tesado se realizó torón a torón, por fuerza. Los primeros torones de cada tirante se tesaron inmediatamente después del enfilado (torones portantes). Alcanzado un número suficiente de los mismos, aproximadamente el tercio del total, de forma que fueran capaces de soportar el peso del resto de los torones, se enfilaban

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



ALZADO



SECCION TRANSVERSAL

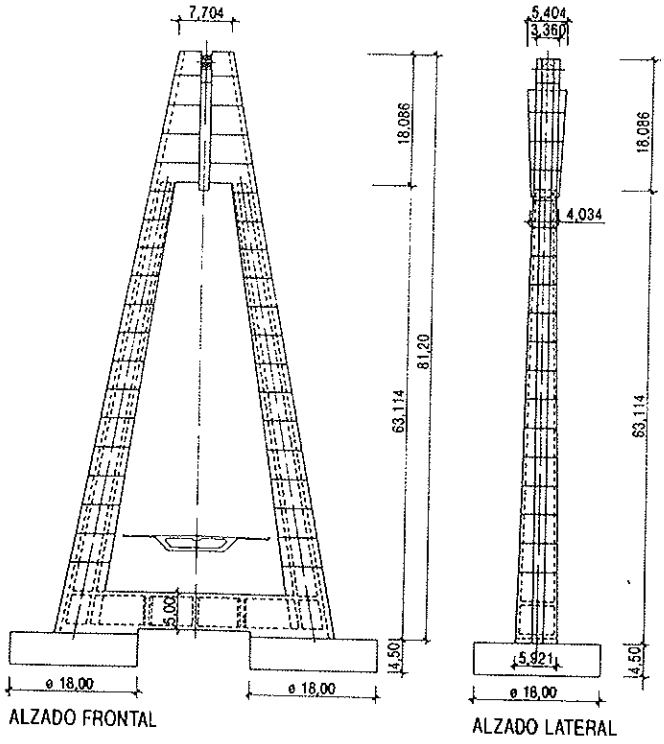


Fig. 1. Dimensiones fundamentales del puente.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Fig. 2. Vista del Proceso Constructivo.

los demás, sucesivamente, para proceder a su tesado una vez colocados todos ellos (torones no portantes). El tesado de los tirantes se realizó completamente torón a torón, hasta la fuerza final del tirante completo, sin reglaje o retesado posterior, con el gato múltiple. Este procedimiento se aplicó por primera vez en España, hasta donde los autores conocen, con éxito, gracias al alto grado de tecnificación de la obra, la ilusión y empeño de todos los participantes y nos gustaría creer que, en alguna medida, gracias al proceso de control y seguimiento que aquí se describe.

3. INSTRUMENTACION DISPUESTA

Desde el punto de vista estricto, cabe considerar como instrumentación, sólo el conjunto de sensores y aparatos de medida colocados para el seguimiento durante la fase de tesado de tirantes. De forma más amplia, cabe considerar en este apartado, todo el conjunto de adquisición de datos previos para la caracterización de los materiales empleados en la obra, con gran repercusión posterior en el éxito del tesado, como son:

- Densidades de los materiales empleados, fundamentalmente hormigones.
- Pesos de las distintas partes de la obra ejecutada.
- Módulos de deformación de los hormigones.
- Módulo de deformación del acero de tirantes.

La determinación de pesos presenta particular importancia, por cuanto las densidades, cuantías y los inevitables errores de ejecución (sobreespesores), arrojan un peso final del tablero normalmente mayor que el nominal, requiriendo la definición de las fuerzas de tesado conforme al peso real, con objeto de que el estado de carga permanente sea el supuesto en el dimensionamiento del tablero. En los apartados siguientes se incidirá más ampliamente en este aspecto.

La determinación de los módulos de deformación, permite ajustar los modelos de cálculo, y la interpretación de la respuesta de la estructura medida en la fase de tesado. En el caso de tesado por fuerza, como se realizó en el puente de Badajoz, la definición de los módulos de deformación del acero no es tan crítica como en el caso de tesado por longitud. Por lo tanto, se operó con los parámetros suministrados por el fabricante, con un mínimo contraste adicional que cabría encuadrar en el control de calidad general de la obra.

La instrumentación que podíamos denominar mecanizada, abarca un amplio conjunto de medidas, en la doble vertiente de datos para el tesado, y control de la evolución del mismo. La instrumentación realizada puede estructurarse en los siguientes grandes grupos:

1. Control térmico.
2. Medida de axiles en tirantes.
3. Medida de reacciones de apoyos.
4. Control tenso-deformacional y otros.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Además de estos apartados, y fuera de lo que habitualmente se define como instrumentación, se realizaron los oportunos controles topográficos, que cabe mencionar aquí porque se trataron con el mismo rigor y sistemática que las medidas mecanizadas.

A continuación se detallan los puntos de medida y sensores dispuestos, según cada uno de los apartados anteriores. La instrumentación fue desarrollada por IIC (Ingeniería de Instrumentación y Control), que además de disponer los equipos de lectura, confeccionó un programa automático de adquisición de datos, con capacidad para la conversión de las lecturas eléctricas en unidades de ingeniería, y agrupación de las medidas individuales en los parámetros ingenieriles (temperaturas medias y gradientes). Posteriormente, se comentarán con mayor amplitud las capacidades del programa; pero cabe mencionar, desde ahora, que a la vez que se agrupaban medidas en tiempo real, se presentaban los parámetros fundamentales mediante pantallas resumen, en las que se apoyará la descripción de los sensores instalados dado que, al final, la instrumentación no puede limitarse a proporcionar nna colección de medidas individuales, sino que deberá dar directamente los parámetros necesarios para la construcción y el control.

3.1. Control Térmico

Los paramentos térmicos fundamentales para la fijación de la fuerza de tesado, y el control de la evolución del mismo son:

- Temperatura media de tirantes.
- Temperatura media de tablero.
- Temperatura media de pilas.
- Gradiente térmico en tablero.
- Gradiente térmico en pila.

Además, se registró la temperatura ambiente, como parámetro fundamental para los estudios de correlación y contraste con las otras cinco medidas. Para realizar esta medida se dispuso un único sensor, adecuadamente protegido del soleamiento.

La medida de la temperatura en tirantes, se realizó mediante la instrumentación de cuatro de ellos, con dos sensores cada uno. Con objeto de calibrar la lectura de los mismos, se realizaron las oportunas pruebas previas, con la instalación de un mayor número de sensores y a diferentes alturas del tirante. Los resultados de estos ensayos permitieron reducir el número de sensores definitivos y la ponderación de sus lecturas.

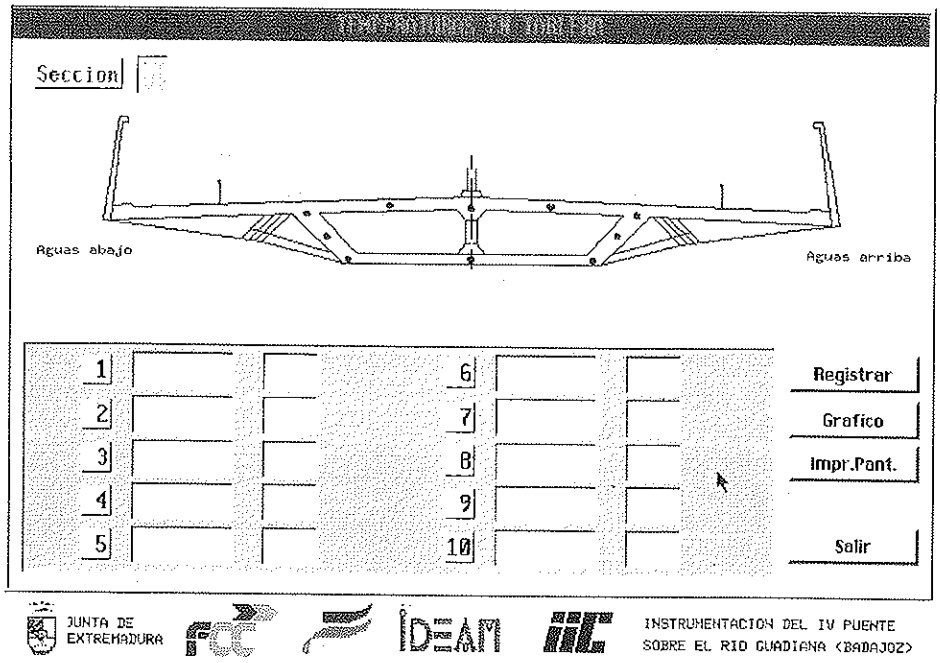


Fig. 3. Sensores térmicos en tablero.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

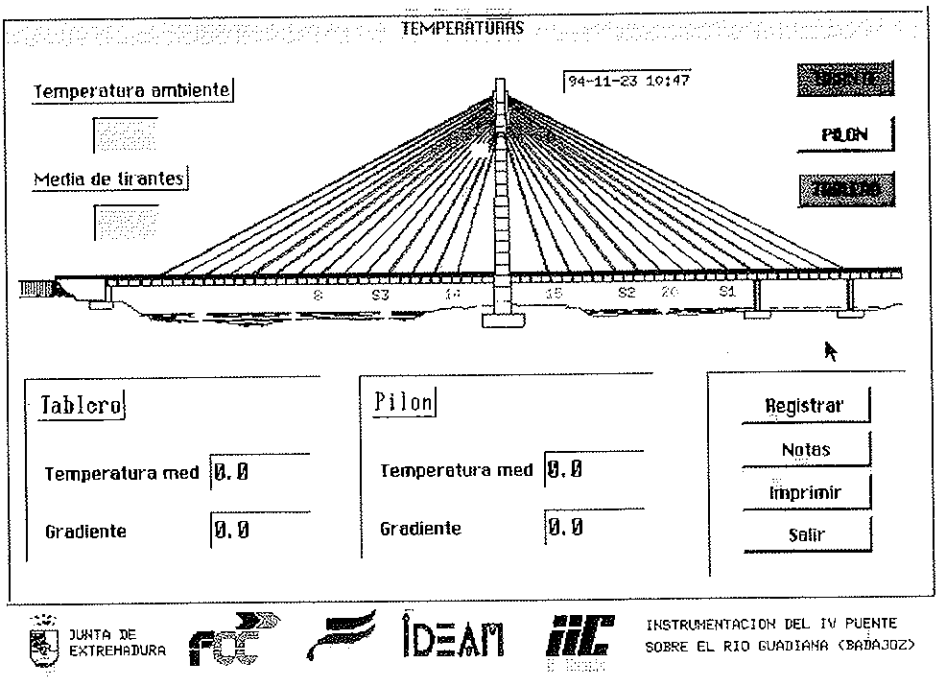


Fig. 4. Datos térmicos.

Para la instrumentación térmica del tablero, se dispusieron 18 sensores, repartidos en tres secciones del cajón. La primera sección se instrumentó mediante 10 termómetros, y cada una de las otras dos mediante otros cuatro. Las pruebas previas de calibración, permitieron reducir la lectura automática, durante el tesado, a 10 sensores de los 18 instalados. La figura 3 muestra el esquema de disposición de termómetros en la sección transversal del tablero.

La medida de la temperatura en la pila principal, se realizó mediante instrumentación de tres secciones por fuste, dos de ellas con cuatro sensores, y la tercera con seis. En total, se dispusieron 28 termómetros. La medida automática continua se limitó, finalmente, a 3 secciones completas.

La figura 4 reproduce la pantalla resumen de lecturas térmicas que presentaba el programa de adquisición de datos. Se aprecia que sólo figura la información relevante, agregada y en unidades ingenieriles (temperaturas medias y gradientes).

3.2. Medida de axiles en tirantes

La medida de axiles en tirantes se realizó mediante la disposición de bandas extensométricas, en número de 10 por tirante, en cada uno de los 28 existentes. Se dispusieron tres torones instrumentados, con tres bandas cada uno, y una banda adicional de compensación. La figura 5 muestra la instalación típica.

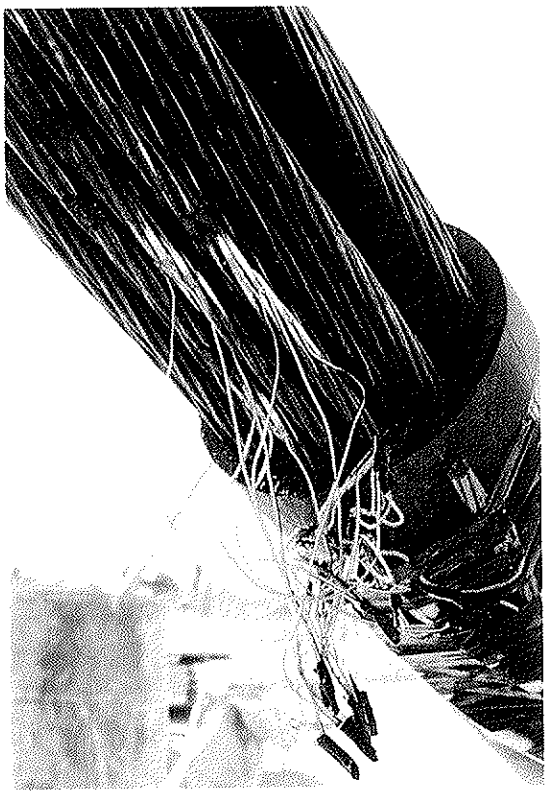


Fig. 5. Bandas extensométricas en tirantes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La lectura automática se dimensionó para un máximo de 12 tirantes simultáneos. A medida que se instalaban nuevos tirantes, se iba desconectando alguno de los anteriores, dejando dos cables con instrumentación continua a lo largo de todo el tesado. La figura 6 reproduce la pantalla resumen del programa de instrumentación, con capacidad para mostrar el axil de todos los tirantes, en unidades de fuerza.

3.3. Medida de reacciones en apoyos

La zona atirantada del tablero se construyó sobre pilas provisionales. A medida que se tesaban los tirantes, se iba produciendo la descarga de dichas pilas, y su posterior desapeo. Para el control del proceso, y la valoración del resultado final, se instrumentaron tres de las seis pilas provisionales, y todos los apoyos definitivos de la zona atirantada. La lectura de reacciones se realizó mediante apoyos instrumentados, tipo POT, en número total de seis.

El apoyo del tablero en la pila principal se realiza mediante una estructura metálica espacial, formada por dos trípodes. La lectura de reacciones en esta pila se realizó mediante la disposición de 18 bandas extensométricas, 2 por fuste, más una de compensación. La figura 7 reproduce la pantalla resumen correspondiente a las medidas de dicha pila.

3.4. Controles tenso-deformacionales y otros

Aparte de las medidas antes relacionadas, se completó la instrumentación mediante otra serie de controles adicionales, para el contraste de hipótesis de cálculo. Se midieron deformaciones en la célula metálica, para estudiar el reparto de tensiones horizontales y verticales. También se estudió el efecto de difusión horizontal de los axiles de tirante, en la losa superior del tablero, mediante bandas extensométricas para el hormigón. Así mismo, se dispusieron flexímetros en la unión célula-pila, para medir posibles corrimientos relativos en la conexión.

Para la lectura de todas las medidas en un plazo razonablemente corto, se dispuso una red de adquisición, gobernada por un ordenador central. Dicha red contaba con un a capacidad para la lectura simultánea de 20

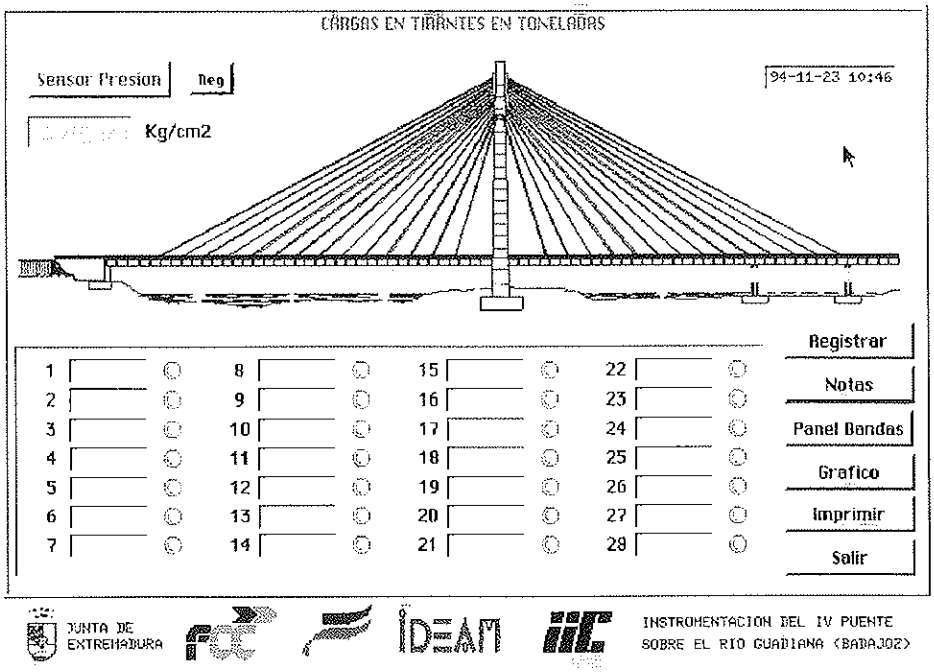


Fig. 6. Pantalla resumen de axiles en tirantes.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

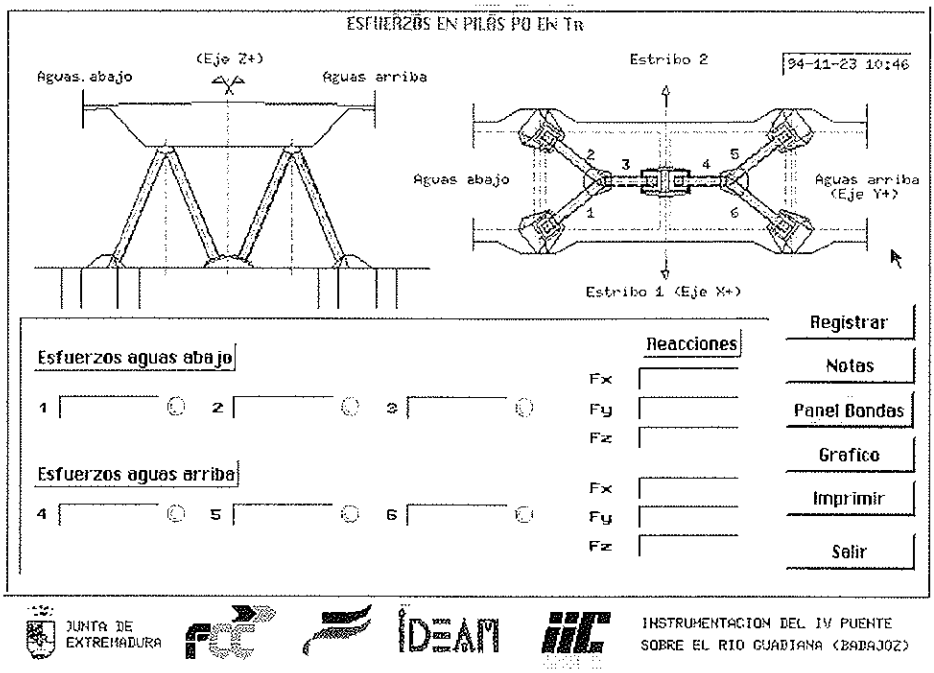


Fig. 7. Pantalla resumen de reacciones en trípode metálico.

nodos, con 10 canales cada uno; esto es, 200 canales simultáneos. El número total de canales leídos fue de 355; esto es, 36 nodos. De los 20 nodos simultáneos, 10 estuvieron fijos durante todo el tesado, y otros 10 se iban conectando y desconectando según avanzaba el tesado de tirantes (12 tirantes simultáneos, 2 fijos).

La empresa IIC elaboró un programa de adquisición, con manipulación de lecturas, con capacidad de transformar las medidas eléctricas en unidades de ingeniería, mediante parámetros configurables. El programa llevaba un registro histórico de lecturas, en el doble sistema de unidades (eléctrico/ingenieril), y tenía capacidad gráfica para representar los registros del archivo histórico. La presentación de los datos se realizó siempre mediante pantallas resumen, como las mostradas en las figuras precedentes. A través de estas pantallas, podía profundizarse hasta el nivel del sensor, para la comprobación de las medidas elementales y su estado. Además, y como resumen agregado fundamental para todos los procesos de decisión y control, se elaboró una pantalla resumen global, que se muestra en la figura 8. Dicha pantalla que podía volcarse en cualquier momento, por impresora, con objeto de disponer del estado de la estructura, con fecha y hora, fue de gran utilidad para la elaboración de los dossieres de tesado que posteriormente se comentan.

4. PLAN DE TESADO

El plan de tesado consiste, normalmente, en dar respuesta a los siguientes puntos:

- Definición del orden de tesado y desapeos.
- Evaluación de las fuerzas que hay que aplicar a cada tirante.
- Evaluación de las correcciones de la fuerza antes definida, según los parámetros térmicos.

No obstante, antes de responder a estas preguntas, deben tomarse nna serie de decisiones que, en cierta medida, condicionan y modifican el plan de tesado. En particular, debe establecerse una tecnología de tesado, y un estado final de carga permanente. En relación con el primer punto, se decidió realizar el tesado torón a torón, hasta la fuerza final de la unidad completa, intentando minimizar los errores para evitar reglajes posteriores del tirante completo, por cuanto

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

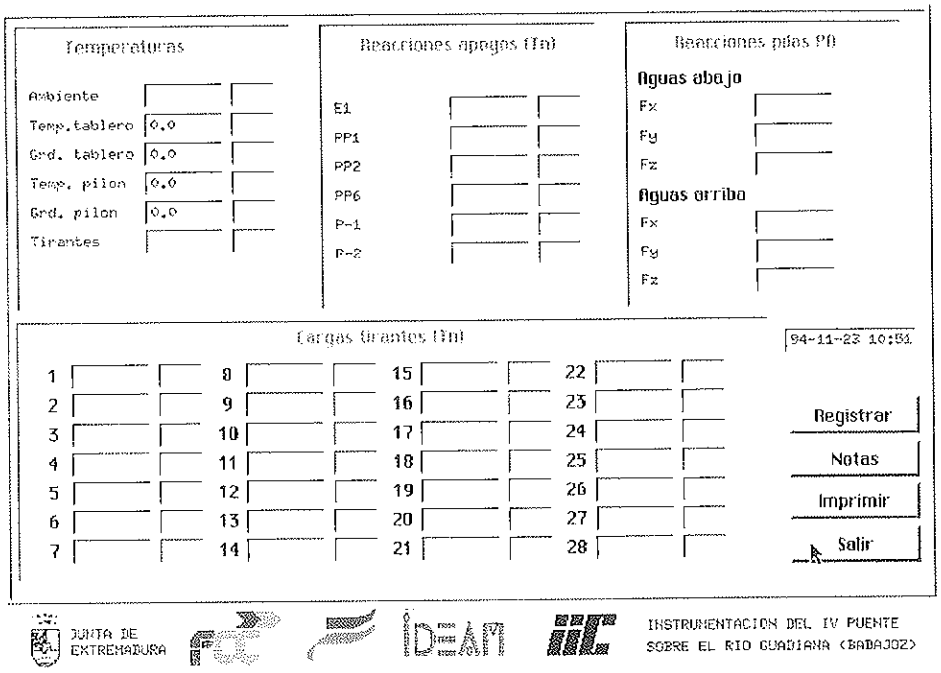


Fig. 8. Pantalla resumen del estado de la estructura.

suponen un tiempo de operación adicional costoso. Por otra parte, se decidió realizar un tesado por fuerza, dado que exige una menor precisión en el conocimiento de los datos tenso-deformacionales de los materiales; y se ha probado que da buenos resultados en puentes de hormigón.

En lo relativo al estado de carga permanente, hay que evaluar, con la mayor precisión posible, el peso del tablero, para conseguir que los esfuerzos de flexión en el tablero sean lo más parecidos posible a los supuestos en el cálculo. Se verá, más adelante, que un sobrepeso no detectado, supone una adaptación de los axiles en tirantes funcionando como elementos pasivos, que necesariamente incrementan los momentos flectores en tablero y posiblemente en pila. En el caso del puente de Badajoz, las medidas previas permitieron estimar un sobrepeso del 6%, frente al nominal del cálculo.

La definición del orden de tesado y desapeo, debe ser tal que se consiga un proceso lo más sistemático posible y con la mínima incidencia de los errores no evaluados y siempre existente. En nuestro caso, dado que el tablero reposa sobre pilas provisionales, se decidió que éstas fueran un elemento claramente activo dentro del plan de tesado, definiendo una fase específica, y una fuerza estimada de desapeo, objeto de control posterior. Se optó por esta vía, en lugar de permitir apoyos y desapeos libres, debido a la inseguridad que presenta un proceso de este tipo, en el que pequeños errores incontrolados pueden alterar el esquema estático supuesto, para una fase, y por lo tanto la evolución posterior.

Una vez definidas las distintas fases del proceso de tesado, se conocen las configuraciones estáticas, y pueden evaluarse las fuerzas de tesado y las correcciones térmicas, por los procedimientos habituales de desmontaje, o reglas similares. El objetivo es siempre que, una vez construido el último tirante, se tengan como resultado los axiles supuestos para el dimensionamiento de la estructura, en todos y cada uno de los tirantes.

En el caso de tesado unifilar (torón a torón), deben fijarse las fuerzas que hay que aplicar a cada uno de ellos para que, una vez colocado y tesado el último, se tenga una perfecta uniformidad de fuerzas en los torones que forman el tirante. Además, en el caso de tesado a fuerza final del tirante completo, la suma de fuerzas de todos los torones debe proporcionar la fuerza final del

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

tirante, deseada. En este caso, es importante considerar con exactitud el peso de la vaina y los torones, su orden de colocación y tesado, y la rigidez del resto de la estructura. Como resultado paralelo al cálculo de fuerzas de cada torón, se obtienen los alargamientos previstos, que permiten controlar el proceso de tesado.

La Asistencia Técnica participó, en esta fase, en los aspectos conceptuales de fijación del plan arriba expuesto, y realizando el chequeo del mismo, como luego se expondrá, evaluando el resultado del plan de tesado, tanto a nivel de tirante completo, como en lo relativo al tesado cordón a cordón de cada uno de ellos.

5. SEGUIMIENTO EN OBRA

La aplicación del plan de tesado se realizó con un alto grado de tecnificación por todas las partes, con disponibilidad total de técnicos cualificados a pie de obra. Los servicios técnicos de la constructora, informatizaron el plan de tesado, de forma que pudo realizarse una adaptación perfecta a las condiciones térmicas medidas mediante la instrumentación dispuesta, y un seguimiento constante de su evolución y los posibles errores que se estaban cometiendo. Con esta premisa, el seguimiento en Obra se planteó comenzando por la redacción de un procedimiento de operaciones, que permitiera coordinar a las distintas partes involucradas, definiendo responsabilidades e incluso rango horario de actuación. La tabla n.º 1 recoge, esquemáticamente, las necesidades de coordinación.

El programa de operaciones definía la forma de realizar la estimación de los parámetros térmicos de tesado. Como quiera que el proceso de construcción y puesta en carga de cada tirante tiene una duración no despreciable y variable con el número de torones (de 6 a 20 horas), se definió la forma de estimar los parámetros térmicos base. La figura 9 corresponde a un gráfico proporcionado por el programa de instrumentación, en el que se representan: la evolución diaria de temperatura ambiente; las temperaturas medias en tirantes, tablero y pila y los gradientes en estos últimos elementos. Para la estimación de los parámetros térmicos de referencia, se emplearon gráficos de este tipo, con la evolución de las temperaturas en días precedentes de condiciones similares, y en base a una duración prevista del proceso de tesado.

En el plan de tesado y programa de operaciones, se fijaron los errores admisibles, tanto en fuerza final como en homogeneidad de fuerzas entre cordones, en valores de ±2% para el primero y 2,5% para el

Tabla 1

Cuadro de Coordinación

Ente	Responsabilidad o función
Constructora	Obra en conjunto
Subcontratista de tirantes	Ejecución del tesado
Oficina Técnica de la Constructora	Aplicación y adaptación del plan de tesado
Asistencia Técnica	Garantía de Calidad técnica y material de la fase de tesado
	Cumplimiento del plan de tesado
	Control del resultado
Instrumentación	Datos relevantes para cumplimiento del plan

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

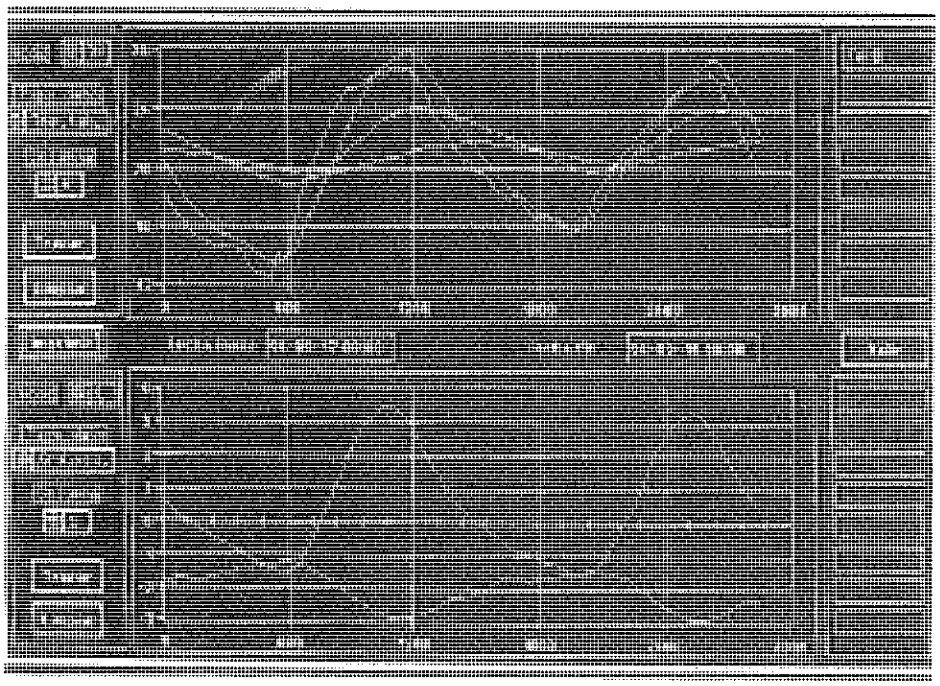


Fig. 9. Ejemplo de evolución diaria de parámetros térmicos.

segundo. Durante la duración del tesado de cada tirante, se realizaba un seguimiento constante de las condiciones ambientales. Si en algún momento se detectaba un error mayor del 2% en la fuerza de tesado que había que aplicar, se detenía el proceso y se elaboraba una nueva tabla de fuerzas de tesado de cada cordón. Se logró una sistemática tal que, a los pocos tirantes, se decidió elaborar siempre dos tablas de tesado, una para torones portantes, y otra para no portantes, dado que los rangos horarios de cada una de ellas, y la duración de su tesado eran muy distintos. De esta forma, se logró una mayor adaptación a las condiciones ambientales, y una minimización del error de estimación.

En lo que se refiere a las labores propiamente dichas de supervisión, el técnico de la Asistencia Técnica desplazado a pie de obra, comprobaba los aspectos fundamentales de suplemento del plan de tesado:

- Fuerzas de tesado.
- Correcciones térmicas.
- Tesado torón a torón.

Una vez concluido el tesado de cada tirante, se realizaban los oportunos controles de calidad del producto, de forma inmediata, en particular:

- Control de alargamientos.
- Control de uniformidad.
- Control de fuerza final

Adicionalmente, se realizaban los controles topográficos, mediante nivelación del tablero y lectura de movimientos en pila.

De acuerdo con el programa de operaciones, se elaboraba un dossier de tesado de cada tirante, que recogía toda la información de tesado y control antes mencionada, acompañada de la obtenida sobre el estado de la estructura (figura 8) en los momentos más significativos del proceso. El grado de sistematización fue tal que, salvo los controles topográficos, el dossier de tesado quedaba completamente elaborado nada más concluir los últimos controles del tirante, y antes de dar por concluida la jornada. Dichos dossieres constituyen la herramienta fundamental para el intercambio de información entre las distintas partes, y para el seguimiento del proceso desde las oficinas centrales de la Constructora y la Asistencia Técnica.

A modo de ejemplo del grado de precisión que puede conseguirse en obra, con un

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

procedimiento bien estudiado y controlado, se presenta la tabla 2, en la que se reproducen los errores medidos en la fuerza de cada tirante una vez tesado, valorados en porcentaje de la fuerza teórica. El orden de colocación de los tirantes en la tabla, se corresponde con el de construcción.

6. SEGUIMIENTO DESDE GABINETE

Las labores de seguimiento del tesado desde nuestras oficinas centrales, se realizaron en la doble vertiente de estimación previa del resultado, y del control de la evolución de la estructura durante el tesado. En el primero de los conceptos se trataba de introducir los datos reales de obra y evaluar la incidencia de una serie de incertidumbres:

- Peso real de la estructura.
- Rigidez de las pilas provisionales.
- Parámetros deformacionales reales.
- Efectos reológicos.
- Estado real a tiempo infinito.

En líneas generales, se trató de estimar el resultado de la aplicación del plan de tesado previsto, ante un abanico de hipótesis que reprodujeran rangos de validez de los parámetros que presentaban una cierta incertidumbre.

Para la realización de este estudio, se realizó un modelo completo de la estructura, mediante el programa DIFEV, que permite el cálculo evolutivo de estructuras, con consideración de los fenómenos reológicos, usado y contrastado en otros puentes singulares: puentes de Tortosa, Alcoy, San Vicente de la Sonsierra, río Lambre, etc. En principio, debía estudiarse el resultado del plan previsto, con datos irreales y con correcta consideración del proceso constructivo, reproduciendo la duración real o estimada en cada fase.

Además, sobre el modelo base, se realizaron hipótesis complementarias que reprodujeran las incertidumbres fundamentales de peso y rigidez de pilas provisionales.

Si bien se realizó un control de densidades de hormigón, cuantías de armaduras y volúmenes de hormigón dispuestos, es difí-

Tabla 2

Control de Fuerza de Tesado en Tirantes

Tirante	Error %	Tirante	Error %
14	1,57	15	–0,42
13	1,44	16	–0,37
12	1,26	17	–0,29
11	1,87	18	–1,11
10	0,63	19	0,67
9	0,13	20	0,25
8	1,00	21	–1,15
7	–1,12	22	–0,51
6	0,19	23	–0,07
5	–0,24	24	–0,66
4	–0,14	25	0,70
3	–0,89	26	–0,15
2	–0,79	27	0,31
1	–0,04	28	–0,32

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

cil llegar a un conocimiento exacto del peso real de la estructura, en una obra realizada "in situ". Para la redacción del plan de tesado, se estimó un sobrepeso del tablero, del 6% frente al teórico. No obstante, se decidió realizar un doble cálculo, con peso nominal y sobrepeso del 6%, introduciendo la fuerza de tesado prevista por el plan. Con ello, se obtiene un conocimiento de la capacidad de adaptación de la estructura ante un error de estimación en el peso, y las consecuencias del mismo en términos de esfuerzos y tensiones.

La incertidumbre relativa a la rigidez de las pilas provisionales, proviene del hecho de que, para permitir el desapeo de las mismas, se dispusieron unas cajas de arena entre aquellas y el tablero. En cierta operación de obra, pudo comprobarse que dichas cajas de arena presentaban una deformabilidad no despreciable y se estimó una constante de muelle. Dado que no se tenía una seguridad plena sobre el comportamiento del conjunto de las cajas de arena, y de la posibilidad de ciclos histeréticos con rigideces distintas en carga y descarga, se decidió realizar el cálculo, duplicado, en la hipótesis de pilas rígidas y pilas con una cierta deformabilidad estimada.

La unión de las dos incertidumbres antes reseñadas, supuso la realización de cuatro cálculos principales en paralelo, que se llevaron incluso a tiempo infinito, para conocer perfectamente la implicación estructural de los mismos.

A parte de estos cuatro cálculos fundamentales, según lo iba aconsejando la evolución de la obra, se realizaron variantes puntuales como son:

- Cálculos sin fluencia ni retracción.
- Modelización del tesado real, con los errores detectados (véase apartado 5).
- Cálculos con rigideces intermedias de las pilas.

Como muestra de los resultados obtenidos en estos análisis previos al tesado, se tienen las figuras 10 y 11. En ambos casos, se representan los errores esperables en el axil de tirantes, una vez concluido el tesado. La única diferencia existente entre ambas figu-

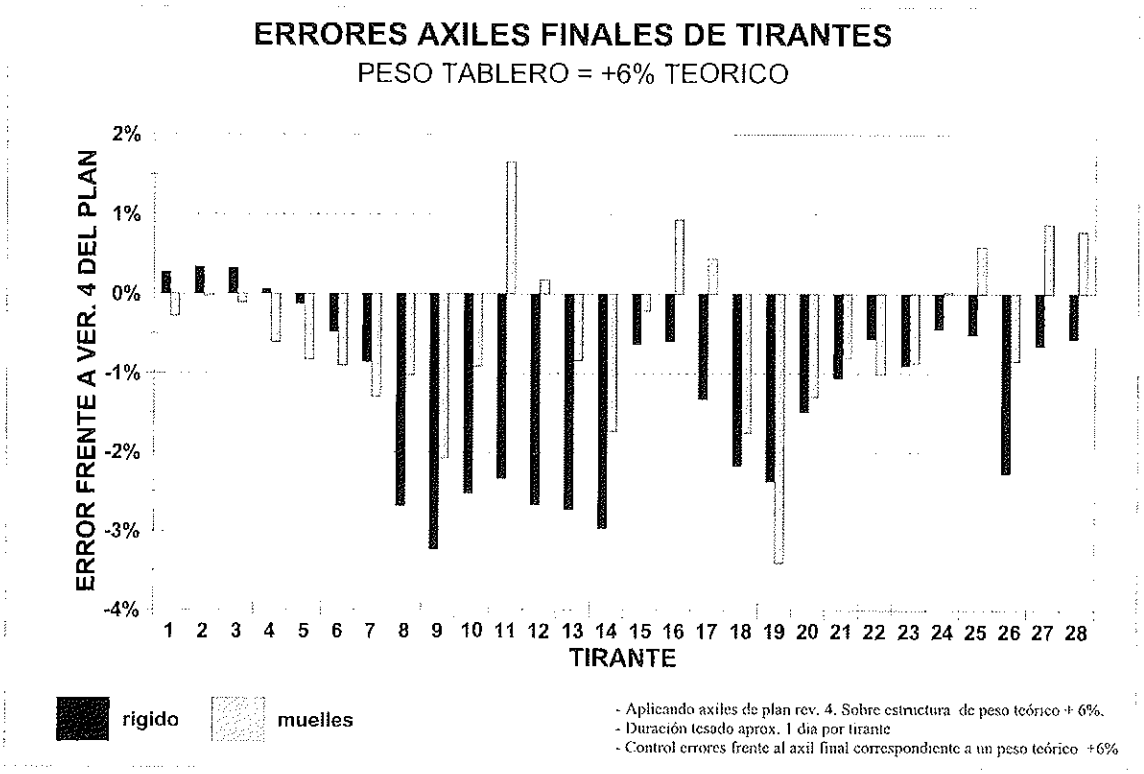


Fig. 10. Errores en axil de tirantes en hipótesis del plan de tesado. Con efectos diferidos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

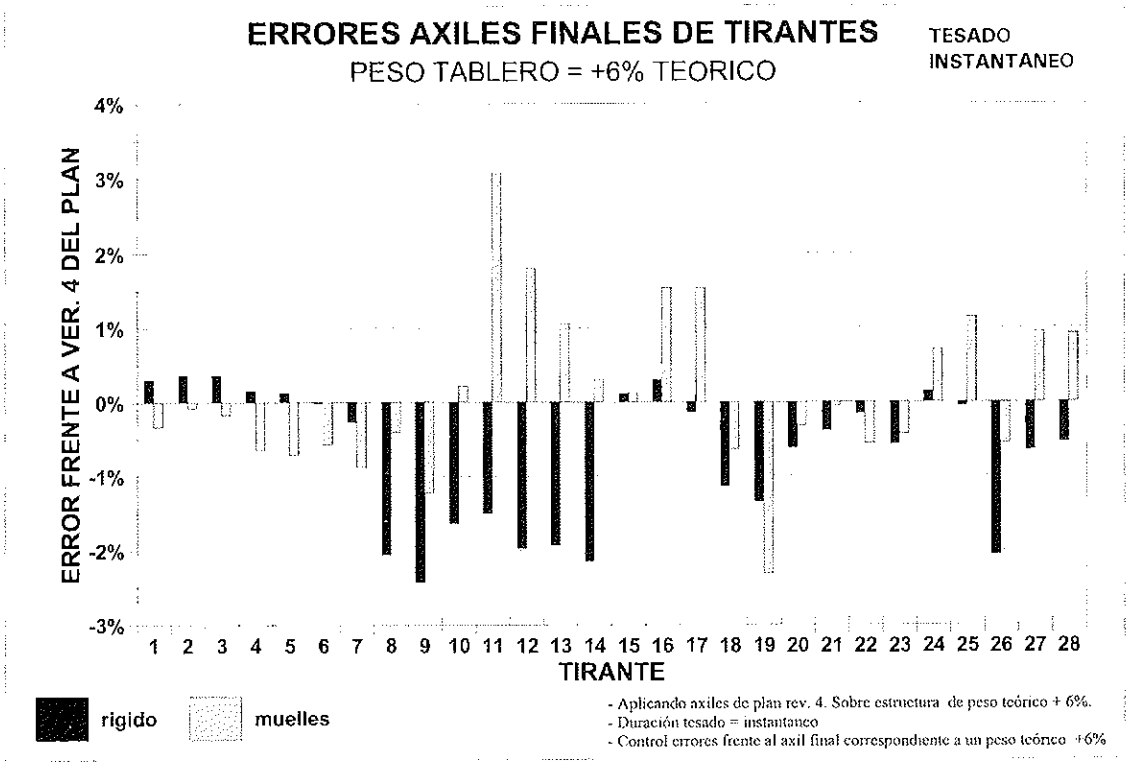


Fig. 11. Errores en axil de tirantes en hipótesis del plan de tesado. Sin efectos diferidos.

ras es la modelización o no de los fenómenos de fluencia o retracción. Se aprecia que, en ninguno de los casos, se obtiene error nulo, y que la incidencia de la rigidez de las pilas provisionales es significativa. El hecho de detectar errores del orden del 3% en la aplicación pura del plan de tesado, no supuso el rechazo del mismo. En efecto, se observa que el abanico del ± 3% es un rango probable de encaje de la solución final. No obstante, esta cifra no dice nada por sí misma; y es además esperable que el uso de un modelo distinto al de la oficina técnica de la constructora, que confeccionó el plan de tesado, con parámetros diferentes para los materiales, produzca resultados no idénticos.

La evaluación de la bondad o no del plan de tesado, se realiza conforme a un estudio del estado de la estructura a tiempo cero e infinito, valorando la situación tensional y los esfuerzos. La conclusión de este análisis fue positiva, aceptándose el tesado conforme al plan previsto.

Las figuras 12 y 13, presentan un particular interés técnico, pues permiten evaluar el resultado de un error en la estimación del peso del tablero. En ambas figuras se representa el error en los axiles de tirantes, frente al teórico, cuando el tablero no tiene sobrepeso y se aplica un plan de tesado correspondiente a un sobrepeso del 6%. De cara a la interpretación de la escala de ordenadas, hay que hacer la aclaración de que el primer plan de tesado (rev. 1), se desarrolló considerando que no existía sobrepeso del tablero. La versión final del plan de tesado (rev. 4), consideraba el peso adicional del 6% ya mencionado. En la figura 12 se representa el error en los axiles de tirantes, frente al axil teórico correspondiente al sobrepeso del 6%. Se aprecia que los errores son siempre negativos, con valores de hasta el 10% (mayor que el error en peso). Esto se debe a que la mayor ligereza del tablero no permite conseguir la sobretensión pasiva de los tirantes en el desapeo de las pilas provisionales. La distribución de errores, con máximos hacia el centro de la zona atirantada, se debe al proceso constructivo, de dentro a fuera. Los últimos tirantes tesados apenas presentan error, salvo por el hecho de que la última fase corresponde a un desapeo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

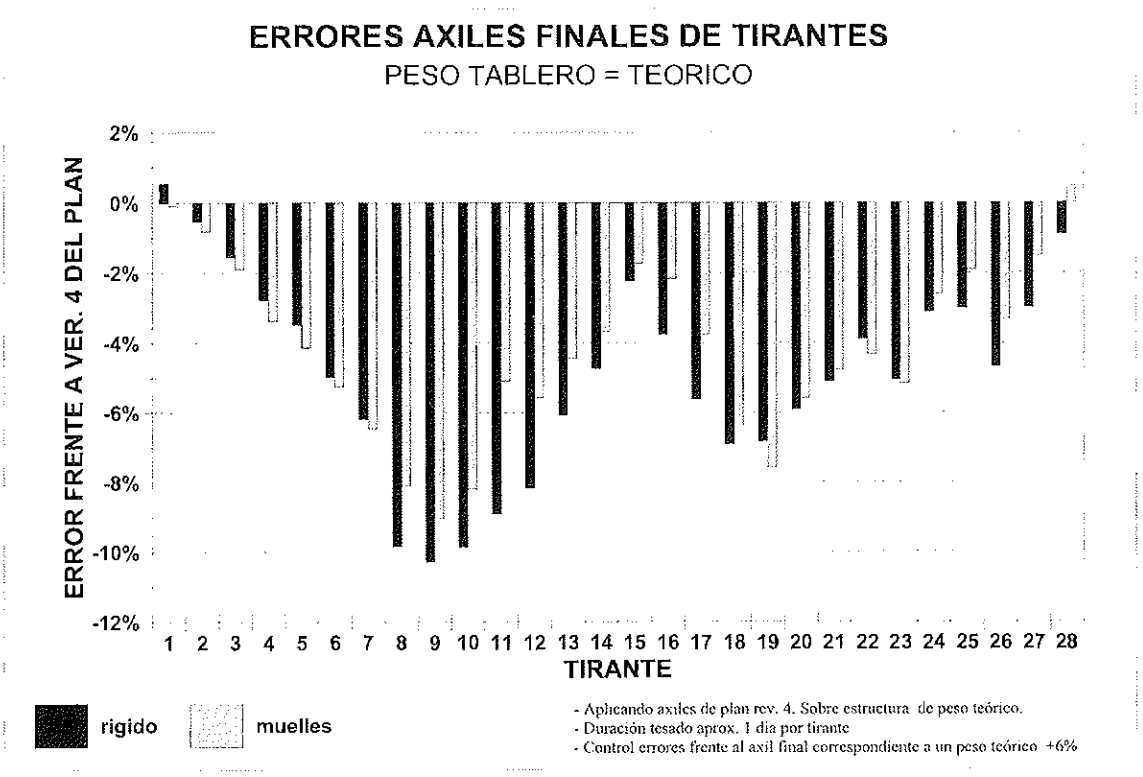


Fig. 12. Errores en axil de tirantes si se sobreestima el tesado en 6%. Comparación con axil final teórico.

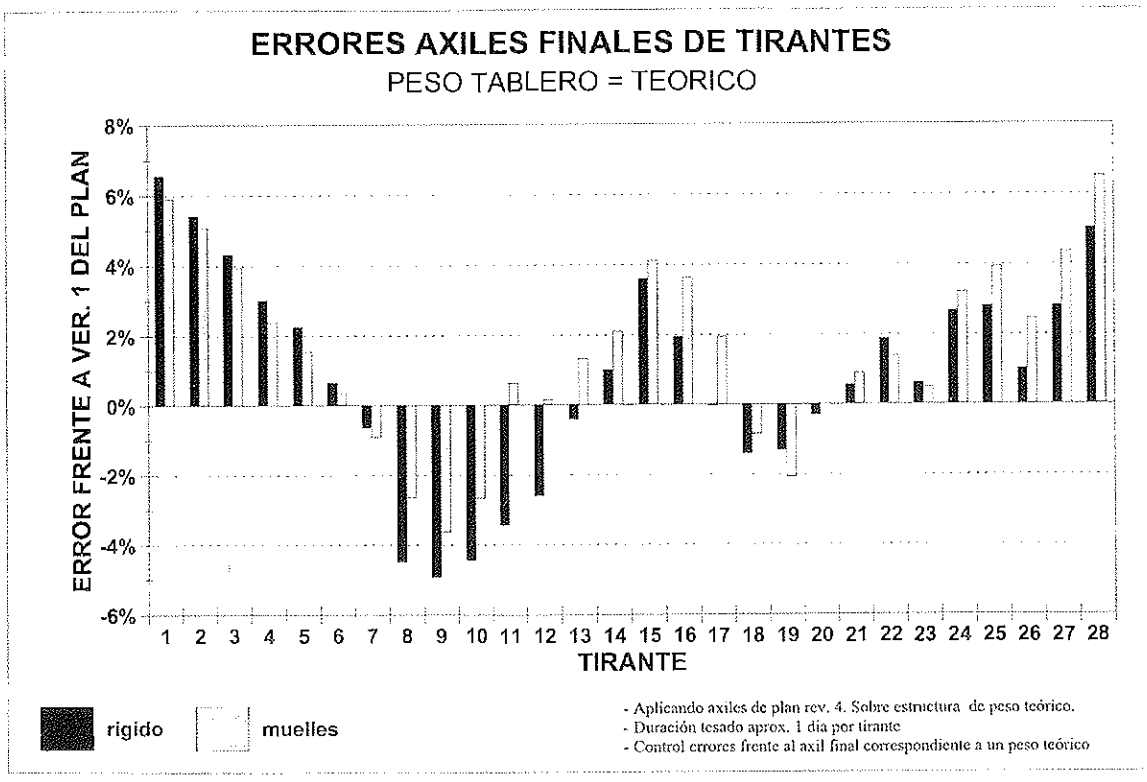


Fig. 13. Errores en axil de tirantes si se sobreestima el tesado en 6%. Comparación con axil final que correspondería con un tesado sin sobreestimación.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Sin embargo, esta forma de valorar el error es artificial y puramente mecánica. En efecto, si el tablero no tiene sobrepeso, el axil final de tirantes, correspondiente a la existencia de un 6% de más, no tiene ninguna validez. En la figura 13 se corrige este error, valorando axiles finales de tirantes, conforme al resultado de un plan de tesado establecido para el tablero sin sobrepeso. Se aprecia que, con este criterio de valoración más realista, los errores presentan un valor absoluto menor, con un máximo en el entorno del 6%, que corresponde al error de estimación de la fuerza de tesado. Por otra parte, la distribución de errores es mucho más favorable para el tablero. El estudio de estas gráficas, y otras similares, fue de gran importancia en el seguimiento de la obra, como luego se expone.

En lo relativo al seguimiento propiamente dicho, se realizó un control exhaustivo de la evolución de la estructura durante todo el tesado. Como herramienta fundamental, se contó con el dossier de tesado que recogía todos los hechos y parámetros relevantes. Se realizó un control de los axiles en tirantes, reacciones en pilas, y movimientos de tablero y pila. El contraste numérico permitió ir encuadrando el comportamiento de la estructura, con apoyo gráfico de evolución de parámetros. A título de ejemplo, se presenta la figura 14, en la que se muestra la evolución de la reacción en el estribo E1, comparando los diversos cálculos realizados y las medidas proporcionadas por la instrumentación.

Durante el proceso de tesado se comprobó que la estructura no se comportaba como predecían los modelos de cálculo. Se estimó que se había cometido un error en la valoración del sobrepeso, fundamentalmente en el vano principal. Los resultados de axiles en tirantes, y deformada, lo ponían claramente de manifiesto. Con objeto de apoyar esta hipótesis, se realizó una amplia campaña de medidas de espesores de los distintos elementos del tablero. Se comprobó que se había cometido un error, no detectado inicialmente, en el hormigonado de los voladizos.

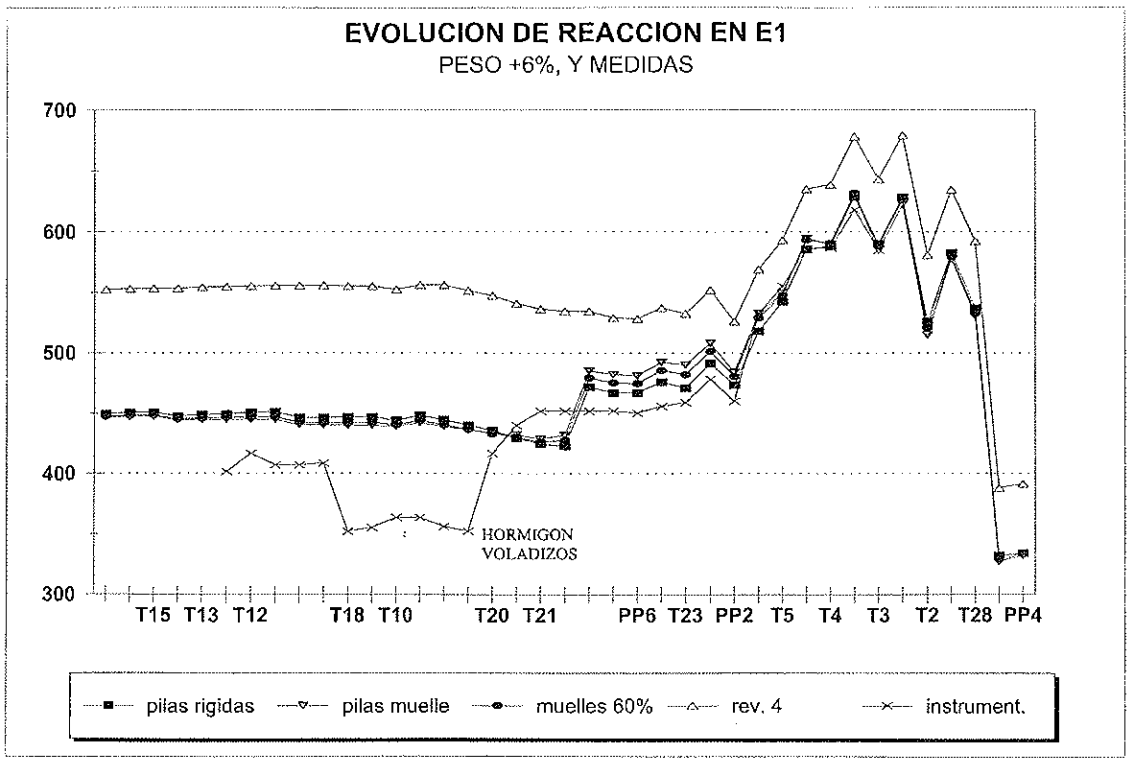


Fig. 14. Evolución de la reacción en estribo E1. Valores calculados y medidos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

La constatación del sobrepeso del tablero, podía motivar la confección de un nuevo plan de tesado correctivo, y la repetición de todo el proceso, con el consiguiente incremento del plazo de la obra.

Antes de tomar una decisión de tan fuertes repercusiones, se optó por realizar una evaluación del estado de la estructura con los axiles finales medidos, y los pesos reales estimados y contrastados. Se puso de manifiesto que la adaptación de la estructura al peso real disponible, si bien empeoraba el estado tensional y los esfuerzos en tablero, no salía del rango admisible. Además, los errores iniciales se reducían a tiempo infinito, por adaptación reológica. Como quiera que el estado a tiempo final era el condicionante, se consideró válido el resultado obtenido tras el tesado.

7. CONCLUSIONES

De todo lo expuesto anteriormente, cabe expresar las siguientes enseñanzas que los autores han podido sintetizar:

1. Se pueden conseguir unos altos grados de industrialización en obra, con procedimientos correctamente definidos y estudiados. El tesado apenas duró mes y medio, con rendimientos próximos al tirante diario.

2. Se pueden conseguir errores muy pequeños, con un alto nivel de tecnificación que permita una adaptación a las condiciones cambiantes de una obra. En estas condiciones, fijar rangos de tolerancia estrictos puede resultar un acicate para las personas implicadas, plasmándose en una importante cota de motivación.

3. Las tolerancias estrictas permiten controlar un proceso, evitando errores en cadena que resultan incontrolables. No obstante, el no cumplirse una determinada tolerancia no debe suponer un inmediato rechazo del resultado alcanzado.

4. Los errores en magnitudes medibles, por sí mismos, tienen poco significado. Se requiere un proceso de interpretación de la solución final completa, para llegar a la conclusión de aceptación o rechazo del producto.

5. La ingeniería es planteamiento, estudio, análisis y decisión. La inversión en ingeniería así planteada es rentable para las obras. Limitarse al escalón intermedio de control, resulta más económico en primer desembolso, pero, normalmente, redundará en un mayor costo global.

RESUMEN

En el presente artículo se realiza una exposición del tesado de los tirantes del puente de Badajoz, desde el punto de vista de la Asistencia Técnica a Dirección de Obra. Se describe la instrumentación dispuesta, los aspectos más significativos del desarrollo del tesado, y finalmente, la labor de análisis, seguimiento y control realizada.

SUMMARY

This paper describes the main items dealing with the process of putting in tension the stays of the forth bridge over the Guadiana River in Badajoz. It starts giving a brief overview on the cable-stayed bridge and its construction process, making a complete description of the different measuring devices and of the program specially designed for the bridge. At last, the work of inspection, supervision and evaluation carried out by the authors is established in detail.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

1er SIMPOSIUM NACIONAL DE HORMIGON DE ALTAS PRESTACIONES
Madrid, 25-27 de febrero de 1998

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid

FUNDACION AGUSTIN DE BETHENCOURT

PRESENTACION

El hormigón de altas prestaciones (HAP) –nombre que ha reemplazado al que venía empleándose anteriormente (hormigón de alta resistencia) porque realmente es un material que presenta en alto grado no sólo especiales propiedades resistentes sino muchas otras de elevado interés técnico– ha experimentado un desarrollo considerable en casi todo el mundo.

Por razones diversas, su desarrollo en España está siendo muy lento y ciertamente escaso. Un grupo de técnicos reducido ha llevado a cabo investigaciones y realizaciones importantes, pero su empleo en el país es todavía muy limitado.

El hecho de que la futura Instrucción EHE vaya a contemplar este material, tanto en sus propiedades como en sus aspectos particulares de cálculo, supondrá sin duda un paso importante.

La Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid ha considerado que la organización de un Symposium Nacional puede ser un punto de arranque adecuado para la generalización del uso de este material.

El Symposium cubre el tema de forma completa –los materiales componentes, la dosificación del hormigón, sus propiedades, el amasado, transporte y puesta en obra, el cálculo estructural y el control de calidad– y por último, intentará realizar una previsión de cómo este material influirá en los proyectos y obras futuros.

Creemos que la discusión completa y abierta del tema en todos sus aspectos, ha de ser el mejor camino para su conocimiento y empleo.

INFORMACION GENERAL

El Symposium tendrá lugar los días 25, 26 y 27 de febrero de 1998. Se celebrará en el Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, C/ Almagro, núm. 42.

La cuota de inscripción es de 75.000,– pesetas, tanto para los asistentes como para las personas que presenten comunicaciones. La inscripción incluye las comidas y cafés durante los días que dure el Symposium, el cocktail de clausura y la documentación correspondiente.

INFORMACION E INSCRIPCIONES

FUNDACION AGUSTIN
DE BETHENCOURT
1.er Symposium Nacional de Hormigón
de Altas Prestaciones
Escuela Técnica Superior
de Ingenieros de Caminos, Canales
y Puertos
Ciudad Universitaria, s/n.
28040 Madrid

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Método de análisis no lineal para estructuras discretizadas en barras

Manuel Juliá Vilardell
Catedrático de Cálculo de Estructuras
E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Madrid

2ª PARTE

5. CORRECCIONES DE EQUILIBRIO

5.1. Principios Básicos

5.1.1. Las cargas exteriores que actúan en los nudos, y los esfuerzos sobre los extremos de las barras que concurren a ellos, obtenidos en un modelo lineal, están en equilibrio en la geometría sobre la que se han calculado. Este equilibrio se mantiene, suponiendo los esfuerzos proyectados en las direcciones de los elementos de la geometría desplazada, si las cargas en los nudos trasladados no cambian de orientación global, porque dichas proyecciones tienen la misma resultante. Las acciones que actúan en el interior de un elemento (eventualmente nulas) y los esfuerzos en cada rebanada en las direcciones normales y tangente inicial, dados por un análisis lineal, están en equilibrio. Este equilibrio se pierde si se consideran dichas acciones y esfuerzos proyectados sobre las direcciones principales de la rebanada en la geometría transformada, porque se ha producido un desplazamiento transversal y una elongación entre los bordes de aquella.

El desequilibrio depende de la curva que describe la deformada, que se debe a dos efectos: a la actuación de las cargas interiores, suponiendo los bordes sin coacción al giro, y a la existencia de pares flectores en aquellos. Se establece la hipótesis de que dicha curva es la correspondiente a los polinomios hermíticos, lineales y cúbicos, en que se basa la formulación matricial, ignorando los términos superiores al tercer grado, que puedan proceder del primer efecto antes citado.

El método supone que las acciones interiores sobre las barras mantienen su dirección global cuando se desplazan éstas, pero no su valor unitario, que se modifica en función de la longitud del elemento actualizado, para que su magnitud total permanezca invariable. Los elementos considerados en cada etapa de cálculo lineal son *inicialmente rectos*. Si la curvatura de la deformada es tal que el arco se aparta sensiblemente de la cuerda que subtiende los nudos desplazados, se realiza una subdivisión interna de ese elemento, de modo que cada uno de los lados de la poligonal inscrita cumpla la condición anterior.

5.1.2. Para la resolución de esta parte del problema no lineal pueden seguirse dos procedimientos: El primero es válido si los des-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

plazamientos y giros son tan pequeños como para que las correcciones de compatibilidad geométrica puedan ser ignoradas, lo que ocurre en la gran mayoría de los problemas estructurales en Ingeniería Civil. En tal caso, no es necesario actualizar las coordenadas de nudos ni las dimensiones de los elementos, formulándose las sucesivas matrices de rigidez utilizando la geometría inicial, ya que no es significativa la influencia de los desplazamientos. Los elementos, no obstante, adoptan propiedades mecánicas variables, de acuerdo con lo ya descrito para las correcciones de congruencia de material. El segundo es completamente general, sin limitaciones sobre los movimientos, y considera las geometrías actualizadas que van apareciendo a lo largo de las iteraciones. En ambos casos, el desequilibrio se considera a través de vectores que actúan en los extremos de las barras, cuyas componentes dependen de los desplazamientos que relacionan la geometría inicial (constante en el primer procedimiento) y las sucesivamente desplazadas.

5.2. Mecanismo de Corrección

Si se suponen proyectados los esfuerzos producidos por el modelo lineal, sobre las nuevas orientaciones de las rebanadas en la geometría actualizada, para mantener el equilibrio es necesaria la colaboración de unas acciones adicionales. Como se verá más adelante estas acciones son pares flectores. Introduciendo sobre el elemento, en la geometría actualizada, unas acciones contrarias a las anteriores, y realizando un cálculo lineal, se obtienen los esfuerzos suplementarios que, a nivel elemental, generan unas acciones opuestas a las necesarias para mantener el equilibrio. La superposición con lo previamente existente, da origen a un sistema de esfuerzos sobre la estructura actualizada que mantiene el equilibrio en esa geometría, sin necesidad de las acciones adicionales. El procedimiento es esencialmente idéntico al utilizado en las otras dos correcciones de efectos no lineales, aunque en este caso uo existe estado neutro, ya que no se introdncen deformaciones, sino acciones exteriores sobre los elementos. Se compone pues tan solo de los estados de movimientos impedidos y movimientos libres, típicos de todo análisis matricial lineal. El estado con desplazamientos libres es el resultante de la introducción de unos vectores en extremos de barra, que se llamarán *Acciones Equivalentes al Desequilibrio*, y son los contrarios de los que, junto con las acciones equilibrantes a lo largo de la barra, anulan los movimientos de los bordes (Figura 25).

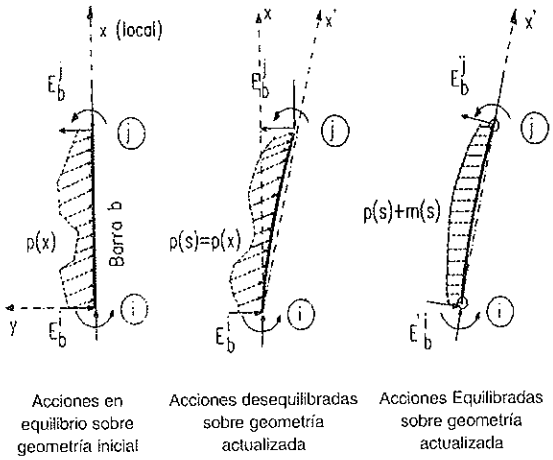


Figura 25. Restauración del Equilibrio en el elemento actualizado.

El equilibrio restablecido se pierde de nuevo al considerar el estado resultante proyectado sobre la siguiente geometría, desplazada por los movimientos realizados al aplicar las anteriores acciones, debiéndose proseguir con los cálculos de corrección. Además, se pierde la compatibilidad y la congruencia, al variar esfuerzos y deformaciones. Para que la estructura sea estable, la serie de incrementos de desequilibrio debe ser convergente. Ello hace necesario disponer de una *Medida del Desequilibrio* a nivel de elemento, de modo que, con independencia del camino que se ha seguido hasta llegar a una determinada configuración, pueda evaluarse su estado. El método adopta, como medida del desequilibrio en cada barra, la integral de la ley de pares desequilibrados elementales. La existencia de una Medida del Desequilibrio permite que las correcciones puedan realizarse cuándo y cómo se quiera, sin necesidad de obtener un estado totalmente equilibrado antes de proseguir con las correcciones de

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

congruencia y compatibilidad, ya que el proceso de equilibrado terminará cuando las medidas del desequilibrio de la última estructura actualizada sean menores que la norma de tolerancia establecida. Como consecuencia de ello, las comprobaciones de equilibrio no se sitúan de forma correlativa en el proceso global, sino que se realizan solamente cuando se han obtenido situaciones compatibles y congruentes. La Medida del Desequilibrio es independiente de las Acciones Equivalentes, que pueden adoptar valores arbitrarios utilizando coeficientes de ponderación, según el criterio del usuario, con el fin de mejorar la convergencia del proceso.

Cada actualización de la estructura produce un incremento de desequilibrio entre todos los esfuerzos y acciones acumuladas "ab initio" sobre los elementos de la misma. Por ello, es preciso, en el caso más general, considerar la coexistencia de todas las cargas y acciones exteriores aplicadas a través de los escalones sucesivos desde el estado descargado original. Sin embargo, para determinados tipos de acciones exteriores pueden formularse medidas independientes de aquéllas, como se indicará más adelante.

5.3. Desequilibrio entre dos posiciones Correlativas

5.3.1. Pares desequilibrados

Considérese una rebanada del modelo de cálculo lineal con equilibrio entre cargas y esfuerzos que, debido a la actuación de las acciones, se ha desplazado a la posición definida por el campo de movimientos $u(x)$ y $v(x)$, relativo a los ejes locales iniciales. La coordenada local previa, x, pasa a ser $x' = F[u,v]$ sobre el nuevo eje local, que es la cuerda que une los bordes. Si se supone que sobre las dos caras de la rebanada, en los puntos homólogos de la directriz transformada, actúan unos esfuerzos iguales a la proyección de los existentes en el sistema anterior, se pierde el equilibrio de momentos, porque se ha producido un alargamiento $du(x)$ y un desplazamiento transversal $dv(x)$ entre los dos puntos de aplicación (Figura 26).

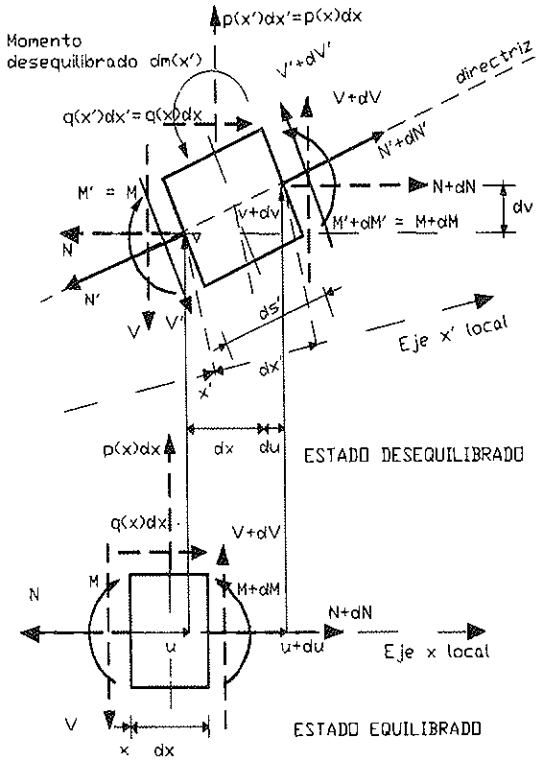


Figura 26. Desequilibrio sobre la transformada.

Planteando el equilibrio sobre la rebanada transformada, se obtiene un par desequilibrado de valor:

$$dm(x') = V(x')\cdot du(x') - N(x')\cdot dv(x') \qquad (5.1)$$

en donde: $V(x') = V(x)$

$$N(x') = N(x)\ ;\ M(x') = M(x) \qquad (5.2.a)$$

son los esfuerzos de la posición inicial *trasladados* a la transformada, mientras que $V'(x')$ y $N'(x')$ son sus *proyecciones* sobre la normal y la tangente actualizada, es decir, los nuevos esfuerzos. Además:

$$du(x') = du(x)\ ;\ dv(x') = dv(x) \qquad (5.2.b)$$

Para que las acciones exteriores, $p(x)$ y $q(x)$, actuando sobre la rebanada transformada estén en equilibrio con los esfuerzos trasladados o proyectados, debe actuar un par elemental, de valor $-dm(x')$, en la longitud ds' en que se ha convertido el dx inicial. La barra estará en equilibrio a nivel de rebanada y a nivel global, si a lo largo de su curva deformada actúa una ley de pares flec-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

tores, *por unidad de longitud de la cuerda,* de valor:

$$-m(x') = -dm(x')/dx' = N(x') \cdot$$
$$\cdot [dv(x')/dx]' - V(x') \cdot [du(x')/dx'] \qquad (5.3)$$

en donde los pares equilibrantes, los esfuerzos y los desplazamientos pueden referirse a la coordenada local anterior, x, a través de la transformación $x' = F(u,v)$.

5.3.2. Medida del Desequilibrio

5.3.2.1. Definición General

Como medida del desequilibrio se adopta la integral de la ley de pares elementales. Puede evaluarse, con mayor facilidad, en el sistema de coordenadas local antiguo, utilizando (5.2) y el jacobiano de la transformación $x' = F[u,v]$, $J(x) = dx'/dx$, obteniéndose:

$$M_{des} = \int_0^{L'} m(x') \cdot dx' = \int_0^{L} [V(x) \cdot du/dx -$$
$$- N(x) \cdot dv/dx] \cdot dx \qquad (5.4)$$

Los campos de desplazamientos supuestos en la formulación del análisis lineal, se basan en los polinomios bermíticos de 1er y 3er grado:

$$u(x) = u_1 \cdot (1 - x/L) + u_2 \cdot (x/L) =$$
$$= u_1 + \Delta u \cdot (x/L) \; ; \; \Delta u = u_2 - u_1$$

$$v(x) = v_1 \cdot N_1(x) + v_2 \cdot N_2(x) +$$
$$+ \theta_1 \cdot N_3 + \theta_2 \cdot N_4(x)$$

$$\Delta v(x) = \Delta v \cdot N_2(x) + \theta_1 \cdot N_3 + \theta_2 \cdot N_4(x) \; ;$$
$$\Delta v = v_2 - v_1$$

Suponiendo que esos son los desplazamientos que definen la posición transformada, resultan las siguientes expresiones de la Medida del Desequilibrio:

5.3.2.2. Elementos cuyas cargas interiores son pares flectores f(x)

$$p(x) = 0 \; ; \; q(x) = 0 \; ; \; f(x) \# 0 \; ; \; V(x) = V_2 ;$$
$$N(x) = N_2 \; ; \; M_{des} = V_2 \cdot \Delta u - N_2 \cdot \Delta v$$

Se observa cómo, al no existir cargas interiores, la forma de la directriz actualizada no interviene en el desequilibrio global, obteniéndose el mismo resultado que si la directriz coincidiera con la cuerda.

5.3.2.3. Elementos con Cargas Uniformes en toda su longitud

$$p(x) = p \; ; \; q(x) = q; \; V(x) = (V_2 + V_1) \cdot x/L - V_1;$$
$$N(x) = (N_2 + N_1) \cdot x/L - N_1$$
$$M_{des} = [V(L) + V(0)] \cdot \Delta u/2 - [N(L) + N(0)] \cdot$$
$$\cdot \Delta v/2 + [N(L) - N(0)] \cdot$$
$$\cdot (\theta_1 - \theta_2) \cdot L/12 \qquad (5.4.1)$$

Si la directriz se supone recta, desaparece el último sumando, al ser $\theta_1 = \theta_2$, lo cual puede ser aceptable si la longitud del elemento es suficientemente pequeña.

5.3.2.4. Elementos con carga Triangular Creciente

$$p(x) = p \cdot (x/L) \; ; \; q(x) = q \cdot (x/L); \; N(x) =$$
$$= -(q \cdot x^2/2L + N_1) \; ; \; V(x) =$$
$$= -(p \cdot x^2/2L + V_1)$$

$$M_{des} = [V(0) - p \cdot L/6] \cdot \Delta u -$$
$$- [N(0) - 3 \cdot q \cdot L/20] \cdot \Delta v - q \cdot L^2 \cdot$$
$$\cdot [\theta_1/30 - \theta_2/20] \qquad (5.4.2)$$

5.3.2.5. Elementos con carga Triangular Decreciente

$$p(x) = p \cdot (1 - x/L) \; ; \; q(x) = q \cdot (1 - x/L) \; ;$$
$$N(x) = [q \cdot (L - x)^2/2L + N_2] \; ; \; V(x) =$$
$$= [p \cdot (L - x)^2/2L + V_1)$$

$$M_{des} = [V(L) + p \cdot L/6] \cdot \Delta u - [N(L) +$$
$$+ 3 \cdot q \cdot L/20] \cdot \Delta v + q \cdot L^2 \cdot$$
$$\cdot [\theta_2/30 - \theta_1/20] \qquad (5.4.3)$$

5.3.2.6. Carga Puntual en $x = a$ (P, Q)

$$N(x) = N_2 \Rightarrow x > a \; ; \; N(x) = N_2 + Q \Rightarrow x < a \; ;$$
$$Q(x) = Q_2 \Rightarrow x > a \; ; \; Q(x) = Q_2 + P \Rightarrow x < a$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

$$M_{des} = [V(L) + Pa/L] \cdot \Delta u - [N(L) + Q \cdot N_2(a)] \cdot \Delta v - Q \cdot [\theta_1 \cdot N_3(a) + \theta_2 \cdot N_4(a)] \quad (5.4.4)$$

Las medidas del desequilibrio de los casos 5.3.2.2. y 5.3.2.3., tienen la gran ventaja de no tener que "recordar" las cargas interiores existentes, bastando con evaluar y utilizar los esfuerzos en los extremos. Puede evitarse la influencia de las cargas puntuales en el desequilibrio del elemento, definiendo nudos en sus puntos de aplicación. Si están situadas en el centro del elemento, la medida del desequilibrio es:

$$M_{des} = [V(L) + V(0)] \cdot \Delta u/2 - [N(L) + N(0)] \cdot \Delta v/2 + [N(L) - N(0)] \cdot (\theta_1 - \theta_2) \cdot L/16 \quad (5.4.5)$$

dejando de ser necesario retener su valor a lo largo del cálculo.

5.3.3. Acciones Equivalentes al Desequilibrio

Para retirar la ley de pares equilibrantes del elemento, se utiliza la técnica habitual de superposición de dos estados, uno con las acciones interiores y los vectores de empotramiento en los extremos, y otro con los valores contrarios de estos últimos (Acciones Equivalentes al Desequilibrio), situados en el interior del elemento, a distancia infinitesimal de los bordes. Estas últimas son, por lo tanto, los vectores de empotramiento correspondientes al elemento bajo los pares desequilibrados. Su cálculo se realiza sobre el elemento actualizado, de acuerdo con el siguiente procedimiento: A partir de la ley de momentos flectores y reacciones en situación isostática debidas a los pares desequilibrados, se obtienen los giros y desplazamientos en los extremos, $\Delta u'$, θ'_1, θ'_2, que son los valores que tienen que anular las acciones buscadas.

5.3.3.1. Leyes de flectores isostáticos

Sobre el elemento transformado, se tiene la siguiente ley de flectores y reacciones isostáticas:

$$R_1 = -R_2 = M_{des} / L'$$

$$M_f(x') = (x'/L') \cdot \int_0^{L'} m(x') \cdot dx' - \int_0^{x'} m(x') \cdot dx' = R_1 \cdot x' - \int_0^{x'} m(x') \cdot dx' \quad (5.5)$$

La expresión (5.5) se formula con mayor sencillez si se introduce la Medida del Desequilibrio formulada en el apartado precedente y se mezclan las coordenadas actualizadas (x'), con las coordenadas antiguas (x), evaluando las integrales utilizando (5.2) y el Jacobiano de la transformación, $x' = F[u,v]$. El resultado depende del tipo de carga que actúa sobre el elemento (Figura 27).

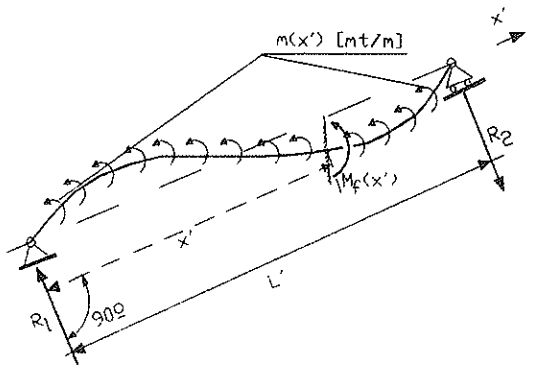


Figura 27. Momento flector en elemento transformado.

5.3.3.1.1. Elementos sin cargas o con pares flectores

$$M_f(x') = M_{des} \cdot (x'/L') - V(L) \cdot (x/L) + N(L) \cdot [\Delta v \cdot N_2(x) + \theta_1 \cdot N_3(x) + \theta_2 \cdot N_4(x)] \quad (5.6)$$

5.3.3.1.2. Elementos con carga uniforme

$$M_f(x') = M_{des} \cdot (x'/L') - [V(0) \cdot (x/L) + [V(L) - V(0)] \cdot x^2/2L^2] \cdot \Delta u + N(0) \cdot [\Delta v \cdot N_2(x) + \theta_1 \cdot N_3(x) + \theta_2 \cdot N_4(x)] + [(N(L) - N(0))/L] \cdot [\Delta v\,(2x^3/L^2 - 3x^4/2L^3) + \theta_1 \cdot (x^2/2 - 4x^3/3L + 3x^4/L^2) + \theta_2 \cdot (3x^4/4L^2 - 2x^3/3l)] \quad (5.7)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Al igual que con las Medidas del Desequilibrio, para estos dos tipos de cargas, las leyes pueden formularse sin necesidad de introducir los valores de las acciones interiores. Para los restantes tipos se obtienen leyes dependientes de los valores de las mismas.

5.3.3.1.3. Elementos con Momentos y acciones autoequilibradas según la cuerda, en los extremos (Figura 28):

$$M_f(x') = \hat{M}_2 \cdot (x'/L') - \\ - \hat{M}_1 \cdot (1 - x'/L') - \hat{N}_2 \cdot y' \qquad (5.8)$$

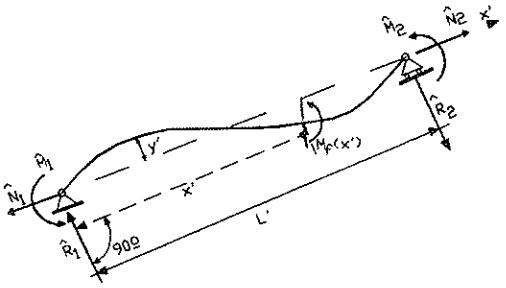


Figura 28. Acciones de empotramiento.

5.3.3.2. *Giros y Desplazamientos de los extremos*

Para el cálculo de los giros y desplazamientos se utiliza la formulación general de Bresse, teniendo en cuenta la correspondencia entre el arco (s'), la abcisa actualizada (x'), y la abcisa antigua, (x): $J_{s'}(x) = J_{s'}(x') \cdot J_{x'}(x)$. La flexión da lugar a:

$$\theta'_2 - \theta'_1 = \int_0^{S'} d\theta'(s') = \int_0^{L'} [M_f(x) / E \cdot I] \cdot J_{s'}(x) \cdot dx \qquad (5.9.a)$$

$$\theta'_1 = -(1/L') \cdot \int_0^{S'} (L' - x') \cdot d\theta'(s') = \\ = \int_0^{L'} (x'/L' - 1) \cdot [M_f(x) / E \cdot I] \cdot J_{s'}(x) \cdot dx \qquad (5.9.b)$$

$$\Delta u' = \int_0^{S'} y' \cdot d\theta'(s') = \int_0^{L'} y' \cdot [M_f(x) / E \cdot I] \cdot J_{s'}(x) \cdot dx \qquad (5.9.c)$$

mientras que los axiles originan

$$\Delta u'^* = \int_0^{S'} \varepsilon \cdot ds' \cdot \cos \beta = \\ = \int_0^{L'} [\hat{N}_2 / E \cdot A] \cdot \cos \beta(x') \cdot dx' \qquad (5.9.d)$$

Estableciendo la nulidad de giros y desplazamientos longitudinales, las ecuaciones (5.9) permitirían obtener las Acciones Equivalentes sobre la pieza curva. Estas acciones se aplicarían en la geometría actualizada; pero en ésta, las barras deberían tener las matrices de rigidez correspondientes a su directriz en curva.

Como ya se ha indicado para la corrección de la compatibilidad geométrica, se evita este inconveniente substituyendo la barra curva por una poligonal inscrita, tomando como coordenadas de los nuevos nodos internos las obtenidas a partir de los campos u(x) y v(x), de modo que los nuevos arcos se aparten muy poco de sus cuerdas. En esas condiciones es posible considerar que la actuación de los pares desequilibrados y de sus acciones equivalentes ocurre sobre las barras rectas de la poligonal, lo que simplifica la evaluación de las acciones equivalentes, al transformarse las ecuaciones (5.9) en los teoremas de Mhor, desapareciendo el desplazamiento longitudinal debido al acoplamiento entre axiles y flectores. Además, el jacobiano $J_{s'}(x)$ puede ser sustituido por $J_{x'}(x)$, lo que es igual a suponer que el elemento recto inicial se transforma en otra barra recta, aunque la correspondencia entre puntos homólogos no es proporcional. El Desequilibrio Global se obtiene sobre la barra curva, y las Acciones Equivalentes se calculan suponiendo que los giros de aquélla son iguales a los que se obtendrían si los pares actuaran en la cuerda que la subtiende (Figura 29).

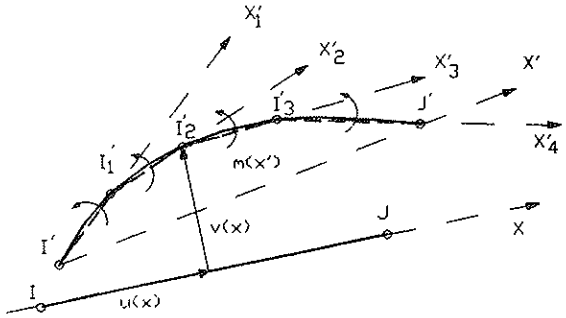


Figura 29. Subdivisión en elementos rectos.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

En la gran mayoría de casos prácticos no es necesario realizar la subdivisión porque, a lo largo de todo el proceso de cálculo, los arcos son asimilables a las cuerdas. Solamente en estructuras extremadamente flexibles, capaces de aceptar grandes curvaturas sin llegar al agotamiento, puede presentarse esa necesidad.

5.3.3.3. Elementos sin cargas o con pares flectores f(x)

Al aplicar los teoremas de Mhor con las leyes de flectores (5.6) y (5.8), con y' = 0, en el elemento transformado, y realizando parte de las integraciones en las coordenadas iniciales (x) y otra en las transformadas (x'), se obtienen las siguientes expresiones de las Acciones equivalentes:

$$M_1 = (-1/L'^2) \cdot [V(L) \cdot (6b_1 - 4a_1) + N(L) \cdot (6b_2 - 4a_2)] \qquad (5.10.a)$$

$$M_2 = (-1/L'^2) \cdot [V(L) \cdot (6b_1 - 2a_1) + N(L) \cdot (6b_2 - 2a_2)] \qquad (5.10.b)$$

$$R_2 = (-1/L') \cdot [V(L) \cdot \Delta u - N(L) \cdot \Delta v] - (1/L'^3) \cdot [V(L) \cdot (6a_1 - 12b_1) + N(L) \cdot (6a_2 - 12b_2)] \qquad (5.10.c)$$

donde:

$$a_1 = \Delta u \cdot \Delta v \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot L/12$$

$$a_2 = (L + \Delta u)^2 \cdot (\theta_1 - \theta_2) \cdot L/12$$

$$b_1 = \Delta u \cdot [L'^2/3 - (L + \Delta u)^4/3L'^2 - 13(L + \Delta u)^2 \cdot \Delta v^2/20L'^2 + (L + \Delta u)^2 \cdot \Delta v \cdot \theta_1 \cdot L/30L'^2 - (L + \Delta u)^2 \cdot \Delta v \cdot \theta_2 \cdot L/20L'^2 - 132\Delta v^4/420L'^2 + 2\Delta v^2 \cdot \theta_1^2 \cdot L^2/420L'^2 + 2\Delta v^2 \cdot \theta_2^2 \cdot L^2/420L'^2 + 13\Delta v^3 \cdot \theta_1 \cdot L/420L'^2 - 22\Delta v^3 \cdot \theta_2 \cdot L/420L'^2 - 3\Delta v^2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot L^2/420L'^2$$

$$b_2 = -\Delta v \cdot [L'^2/3 - 7(L + \Delta u)^4/20L'^2 - 288(L + \Delta u)^2 \cdot \Delta v^2/420L'^2 - 2(L + \Delta u)^2 \cdot \theta_1^2 \cdot L^2/420L'^2 - 2(L + \Delta u)^2 \cdot \theta_2^2 \cdot L^2/420L'^2 - 13(L + \Delta u)^2 \Delta v \cdot \theta_1 \cdot L/420L'^2 + 22(L + \Delta u)^2 \cdot \Delta v \cdot \theta_2 \cdot L/420L'^2 + 3(L + \Delta u)^2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot L^2/420L'^2 - \Delta v^4/L'^2] + (L + \Delta u)^4 \cdot (\theta_1/30 - \theta_2/20) \cdot L/L'^2$$

Si los cuadrados de los desplazamientos son despreciables, es decir si:

$\Delta u^2 \approx 0$; $\Delta v^2 \approx 0$; $\Delta v \cdot \Delta u \approx 0$; $\theta_1 \cdot L \cdot \Delta v \approx 0$, etcétera, las expresiones anteriores se transforman en:

$$M_1 = N(L) \cdot [\Delta v/10 - 2\theta_1/15 + \theta_2/30] \qquad (5.11.a)$$

$$M_2 = N(L) \cdot [\Delta v/10 + \theta_1/30 - 2\theta_2/15] \qquad (5.11.b)$$

$$R_2 = -R_1 = V(L) \cdot \Delta u/L' + N(L) \cdot [-6\Delta v/5L' + \theta_1 \cdot L/10L' + \theta_2 \cdot L/10L'] \qquad (5.11.c)$$

de modo que el Vector de Acciones Equivalentes puede expresarse como el siguiente producto matricial (5.12):

$$\begin{vmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{vmatrix} = N(L) * \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5L' & -L/10L' & 0 & 6/5L' & -L/10L' \\ 0 & -1/10 & -2L/15 & 0 & 1/10 & L/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5L' & L/10L' & 0 & -6/5L' & L/10L' \\ 0 & -1/10 & L/30 & 0 & 1/10 & -2L/15 \end{vmatrix} + V(L) * \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/L' & 0 & 0 & -1/L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L' & 0 & 0 & 1/L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{vmatrix}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

5.3.3.4. Elementos con cargas interiores

La obtención de las Acciones Equivalentes en elementos con cargas interiores uniformes, utilizando las expresiones (5.7), (5.8) y (5.9), o las análogas para cargas triangulares, resulta extremadamente farragosa debido a la expresión del Jacobiano de la transformación, no proporcional, entre los elementos rectos. Por ello, se admite que, a efectos de cálculo de los giros para determinar las acciones equivalentes, la transformación entre elementos mantiene la proporcionalidad de las coordenadas, como si se estableciera un campo, v(x) lineal, en vez de cúbico, es decir:

$$u(x) = u_1 \cdot (1 - x/L) + u_2 \cdot (x/L)$$
$$v(x) = v_1 \cdot (1 - x/L) + v_2 \cdot (x/L) \qquad (5.13)$$

con lo que:

$$x' = x \cdot L'/L \quad \text{y} \quad J_{x'} = L'/L \qquad (5.14)$$

Con ello, para el elemento siu cargas interiores o con pares, se obtiene una expresión de las Acciones Equivalentes idéntica a la del caso general, con los cuadrados de los desplazamientos despreciables, es decir, idéntica a la (5.12).

5.3.3.4.1. En el caso con cargas uniformes en toda la longitud del elemento, resulta (5.15):

gas uniformes, reduciéndose a la forma (5.12) si dichas cargas son nulas o pares flectores pues, en tal caso, $V(L) = V(0)$ y $N(L) = N(0)$. Si además, $\Delta u << L$ se reproduce la formulación clásica utilizada para dicha matriz. Es de notar que la matriz (5.15) carece de simetría, lo que supondría un grave inconveniente si se quisiera utilizar como tal para ensamblar una de las componentes no lineales de la matriz global de la estructura. Por el contrario, en el presente método, esta carencia de simetría no significa nada, ya que sólo se utiliza para generar el vector de Acciones Equivalentes que será aplicado como carga en los bordes de los elementos y no influye en la matriz de la estructura, que permanece simétrica. No es necesario retener los valores de las cargas interiores que se han ido acumulando desde el estado inicial, con la estructura descargada. Para las demás cargas (triangulares, y puntuales) se pierde esta ventaja.

5.3.4. Acciones Equivalentes Reducidas

La introducción de los Vectores de Acciones Equivalentes deducidos de la forma anterior, reestablece el equilibrio, a nivel de rebanada, en cada elemento y, por supuesto, el equilibrio global del mismo. Sin embargo, si la discretización de la estructura se realiza con elementos de pequeña longitud, pueden

$$\begin{vmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_m/L' & -6N_m/5L' & -N(L)L/10L' & -V_m/L' & 6N_m/5L' & -N(0)L/10L' \\ \Delta V/12 & -N(L)/10 & -[N(0)+N(L)/3]L/10 & -\Delta V/12 & N(L)/10 & N_mL/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -V_m/L' & 6N_m/5L' & N(L)L/10L' & V_m/L' & -6N_m/5L' & -N(0)L/10L' \\ -\Delta V/12 & -N(0)/10 & N_mL/30 & \Delta V/12 & N(0)/10 & -[N(0)/3+N(L)L/10] \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{vmatrix}$$

En donde: $\Delta V = V(L) - V(0)$; $V_m = [V(L) + V(0)] / 2$; $N_m = [(N(L) + N(0)] / 2$.

La matriz anterior es una expresión generalizada de la habitualmente llamada "Matriz de Rigidez Geométrica" (cambiada de signo por generar vectores *sobre* los bordes de la barra), válida para barras con car-

obtenerse resultados de gran exactitud, asegurando tan solo el equilibrio a nivel global de la barra. Para ello, basta con introducir un par de fuerzas transversales ±R, en sus extremos, cuyo momento sea igual al valor desequilibrado:

$$R_2 = -R_1 = M_{des} / L' \qquad (5.16)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

en donde M_{des} depende del tipo de cargas interiores, según el apartado 5.3.2. Las acciones (5.16) son las reacciones isostáticas (5.5), correspondientes a los pares desequilibrantes (Figura 30).

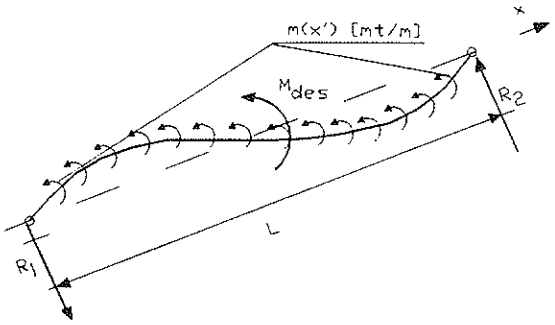


Figura 30. Acciones Equivalentes reducidas.

5.4. Acciones Equivalentes Ponderadas y Residuos Desequilibrados

El equilibrio, en la configuración actualizada, se pierde al proyectar el resultado sobre la nueva geometría desplazada, por lo que no es absolutamente necesario tratar de conseguir esa condición introduciendo la totalidad de las Acciones Equivalentes. Más aún, en algunos casos es conveniente dejar parte de los pares desequilibrantes, sin retirar, o incluso introducir desequilibrios en sentido contrario al existente, porque el residuo que queda compensa parte del desequilibrio creado por la actualización sucesiva; de tal modo que el total es menor que el que resultaría a partir de una situación estrictamente equilibrada. El método permite aplicar un factor de ponderación λ_E, a los componentes de los vectores de Acciones Equivalentes. Este parámetro puede ser mayor o menor que la unidad, es decir, puede dejar parte de la ley de pares desequilibrantes preexistentes, o puede "crear" una ley proporcional de signo contrario. En algunos casos, el equilibrio estricto produce divergencias espúreas que se corrigen sin más que asignar a λ_E un valor inferior a 1. En otros, se acelera la convergencia adoptando valores superiores a la unidad, siendo tanto más rápida cuanto más se aproxima el factor a 2. Se ha comprobado en varios ejemplos que, si se sobrepasa esta cifra, aparece una divergencia. Una posible explicación a este hecho es que la actuación del Vector de Acciones Equivalentes sobre la estructura, puede considerarse semejante a alterar su matriz de rigidez, de modo que ésta sea la suma de la de material y la de pseudo rigidez geométrica, con un factor de sobrerrelajación, λ_E. Este tipo de procesos iterativos tiende a la divergencia cuando el factor de sobrerrelajación es mayor que 2.

Si la ponderación es diferente de la unidad, la Medida del Desequilibrio de situaciones posteriores debe tener en cuenta la existencia de este residuo, por lo que no puede basarse solamente en los desplazamientos referidos al estado anterior, como se ha supuesto en su deducción en 5.3.2., puesto que tal estado ya no está equilibrado. Pero esta misma circunstancia se produce al intercalar, entre correcciones de desequilibrio, las correcciones de compatibilidad geométrica, que incorporan una actualización de la geometría, y por tanto un incremento de desequilibrio. Solamente en los casos en que no se activen las iteraciones de compatibilidad por ser pequeños los desplazamientos y giros, las iteraciones de corrección de equilibrio podrían referirse siempre a un estado anterior equilibrado, si en todas las etapas se ha utilizado $\lambda_E = 1$, ya que en las de congruencia de material no actualizan la estructura y, por tanto, no alteran el posible equilibrio previo.

Una manera de resolver este problema es analizar el desequilibrio global del elemento, considerando sus cargas interiores y los esfuerzos acumulados en sus bordes. Pero este criterio presenta el inconveniente de tener que retener las cargas, incluso las uniformes, introducidas desde el estado inicial sin acciones. En el método se plantea una solución válida para cargas uniformes y/o pares flectores, que evita el arrastre de las cargas desde el origen, tal como se describe seguidamente.

5.5. Acciones Desequilibradas entre dos Posiciones No Correlativas

5.5.1. Criterios Básicos

Cada vez que se actualiza la estructura, se genera un aumento en la ley de pares desequilibrados sobre los elementos. A este incremento de pares corresponde otro en la Medida del Desequilibrio y en las Acciones

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Equivalentes calculadas sobre la configuración actualizada que ha dado lugar al nuevo desequilibrio. Si no se restaura el equilibrio de forma inmediata, modificando los esfuerzos con la aplicación de las Acciones Equivalentes, es posible suponer que se consigue el mismo efecto, introduciendo una nueva carga exterior, igual a los pares con signo cambiado [$-m'(x')$], que acompañará al elemento junto con las cargas [$p'(x')$; $q'(x')$] en todas sus actualizaciones posteriores, hasta que sean retirados, total o parcialmente, utilizando las Acciones Equivalentes *acumuladas en la configuración sobre la que se introduzcan* estas. Los esfuerzos a lo largo de las etapas del cálculo intermedio estarán, por tanto, en equilibrio, aunque con unas acciones exteriores que no son las reales.

La Medida del desequilibrio en una determinada situación, la proporciona la integral de los pares equilibrantes actualizados hasta ese instante. Cuando se restablece el equilibrio, se introducen unos vectores de Acciones Equivalentes, contrarios a los de Empotramiento correspondientes a los pares que se hayan actualizado hasta esa configuración.

5.5.2. Medida del Desequilibrio

5.5.2.1. Incrementos de pares equilibrantes

Supóngase que en una geometría GEO0 no se ha restaurado el equilibrio de forma total, sino que se han aplicado las Acciones Equivalentes ponderadas por λ_E, de modo que, después de la superposición del resultado de esa iteración, la rebanada de abcisa x está en equilibrio bajo el conjunto de esfuerzos acumulados, $dN_t^0(x_0)$, $dV_t^0(x_0)$, $dM_t^0(x_o)$, las cargas reales, $q^0(x_0) \cdot dx_0$, $p^0(x_0) \cdot dx_0$, $f^0(x_0) \cdot dx_0$, y el par equilibrante $-(1 - \lambda_E) \cdot dm^0(x_0)$, residuo del par [$-dm^0(x_0)$], procedente de los equilibrantes acumulados por todas las actualizaciones anteriores.

Esa geometría se transforma en la GEO1 por los campos $u^0(x_0)$ y $v^0(x_0)$ y, de acuerdo con (5.3), si existiera equilibrio previo, se restablecería introduciendo en cada rebanada dx_I de GEO1, un par elemental de valor

$$-dm^I(x_I) = [V_t^0(x_0) \cdot du^0/dx_0 - N_t^0(x_0) \cdot dv^0/dx_0] \cdot dx_0 \qquad (5.17)$$

Sobre dx_I de GEO1, homóloga de dx_0, debe actuar un par elemental total, para restablecer el equilibrio sobre los esfuerzos proyectados, igual a la suma de los dos anteriores.

$$-dm_t^I = -(1 - \lambda_E) \cdot dm^0(x_0) - dm^I(x_I) \qquad (5.18)$$

ya que el par elemental preexistente se mantiene invariable en la transformación, al igual que las cargas elementales exteriores: $p^I(x_I) \cdot dx_I = p^0 \cdot (x_0) \cdot dx_0$. La ley de pares equilibrantes, por unidad de longitud, queda por tanto:

$$-m_t^I(x_I) = -dm_t^I/dx_I = -(1-\lambda_E) \cdot dm^0(x_0)/dx_I - [V_t^0(x_0) \cdot du^0/dx_0 - N_t^0(x_0) \cdot dv^0/dx_0] \cdot dx_0/dx_I \qquad (5.19)$$

Esta ley mantiene el equilibrio sobre GEO1, con todos los esfuerzos que puedan acumularse en esa misma geometría (procedentes de nuevas iteraciones de congruencia). Al actualizar la situación, a través del incremento de campos $u^I(x_I)$, $v^I(x_I)$, se obtiene GEO2, de modo que los esfuerzos y acciones reales y ficticias que estaban en equilibrio sobre dx^I de GEO1, necesitan un incremento del par equilibrante elemental, para restituir esa condición sobre la rebanada homóloga, dx_{II}. Nuevamente, aplicando (5.3) resulta:

$$-dm^{II}(x_{II}) = -[V_t^I(x_I) \cdot du^I/dx_I - N_t^I(x_I) \cdot dv^I/dx_I] \cdot dx_I \qquad (5.20)$$

El par equilibrante total, sobre la rebanada de GEO2, será:

$$-dm_t^{II}(x_{II}) = -[V_t^I(x_I) \cdot du^I/dx_I - N_t^I(x_I) \cdot dv^I/dx_I] \cdot dx_I - [V_t^0(x_0) \cdot du^0/dx_0 - N_t^0(x_0) \cdot dv^0/dx_0] \cdot dx_0 - (1 - \lambda_E) \cdot dm^0(x_0) \qquad (5.21)$$

Esta expresión es generalizable a k actualizaciones posteriores a GEO0, de modo que el par acumulado será:

$$-dm_t^K(x_k) = -(1 - \lambda_E) \cdot dm^0(x_0) - {}^k\sum_1 dm^i(x_i) \qquad (5.22)$$

con

$$dm^{i+1}(x_{i+1}) = -[V_t^i(x_i) \cdot du^i/dx_i - N_t^i(x_i) \cdot dv^i/dx_i] \cdot dx_i \qquad (5.23)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

5.5.2.2. Medida del desequilibrio Residual:

Sobre GEOK, la medida del desequilibrio será la integral de (5.22).

$$M_{des} = \int_0^{L_K} dm_i^K = (1-\lambda_E)\cdot\int_0^{L_K} dm^0(x_K) + \\ + \sum_{i=1}^{i=K} \int_0^{L_K} dm^i(x_k) \qquad (5.24)$$

Las integrales del incremento $i + 1$ -ésimo, extendidas entre 0 y L_k son iguales a las integrales extendidas a la longitud de la cuerda L_{i+1}, pues cada incremento de pares elementales, es invariante a lo largo de las transformaciones sucesivas del elemento.

$$\int_0^{L_K} dm^i(x_k) = \int_0^{L_{i+1}} dm^i(x_k) = \int_0^{L_i} [V_i^i(x_i)\cdot \\ \cdot du^i/dx_i - N_i^i(x_i)\cdot dv^i/dx_i)\cdot dx_i$$

Por consiguiente, la Medida del Desequilibrio acumulada en la geometría GEOK es la suma de las medidas de desequilibrio que aparecen en cada actualización geométrica anterior, calculadas con los esfuerzos acumulados hasta dichas etapas. Esto permite evaluar, de manera muy simple, el estado de cada elemento en una determinada posición, si se determina y almacena cada desequilibrio parcial utilizando las expresiones 5.4.2 a 5.4.6. Por lo tanto, para las cargas uniformes y pares flectores, la Medida sigue siendo independiente de los valores de aquéllas. Cuando se restaura total o parcialmente el equilibrio, a través de las Acciones Equivalentes, la suma acumulada se multiplica por el factor $(1 - \lambda_E)$, y el residuo $(1 - \lambda_E)\cdot M_{des}$, se arrastra hasta la próxima iteración de equilibrio.

5.5.3. Acciones Equivalentes Reducidas

Si el desequilibrio se corrige a nivel global, tomando como acciones equivalentes un par de fuerzas transversales en los bordes del elemento, basta con utilizar la Medida del Desequilibrio almacenada, y aplicar lo descrito en el apartado 5.3.4.

5.5.4. Acciones Equivalentes

5.5.4.1. Formulación a partir de acumulación de pares desequilibrados

Cada vez que se produce una transformación, cambia la distribución por unidad de longitud de los pares flectores desequilibrados, previamente acumulados en la barra (aunque, como se ha visto, el par elemental en cada rebanada es invariante).

El momento desequilibrado elemental aparecido sobre la rebanada dx_{i+1} en la transformación de i a i+1 dado por (5.23), contribuye a la ley de pares desequilibrados, por unidad de longitud, en la geometría GEOK, con el término:

$$m^{i+1}(x_K) = dm^{i+1}(x_{i+1})/dx_k = [dm^{i+1}(x_{i+1})/dx_{i+1}]\cdot \\ \cdot dx_{i+1}/dx_K$$

y en la ley de momentos flectores isostáticos creados por los pares desequilibrados en la GEOK, con:

$$M_f^{i+1}(x_K) = [\int_0^{L_K} m^{i+1}(x_K)\cdot dx_K]\cdot x_K/L_K - \\ - \int_0^{X_K} m^{i+1}(x_K)\cdot dx_K \qquad (5.25)$$

El término entre paréntesis del primer sumando de (5.25) es el incremento de momento desequilibrado global, que se calcula sobre la geometría GEOi utilizando (5.23). El segundo sumando, puede expresarse como:

$$\int_0^{X_K} m^{i+1}(x_K)\cdot dx_K = \int_0^{X_{i+1}} m^{i+1}(x_{i+1})\cdot dx_{i+1} = \\ = \int_0^{X_i} [V_i^i(x_i)\cdot du_i/dx_i - \\ - N_i^i(x_i)\cdot dv_i/dx_i]\, dx_i \qquad (5.26)$$

ya que el valor global de los pares elementales del tramo $0 - x_K$ debe ser el mismo que en el tramo homólogo $0 - x_{i+1}$. A la relación (5.26) puede llegarse considerando la invariabilidad de los pares elementales y utilizando los Jacobianos de las transformaciones:

$$dm^k(x_k)/dx_k = [dm^{k-1}(x_{k-1})/dx_{k-1}]\cdot[dx_{k-1}/dx_k] = \\ = \ldots[dm^{i+1}(x_{i+1})/dx_{i+1}]\cdot[(dx_{k-1}/dx_k)\cdot \\ \cdot (dx_{k-2}/dx_{k-1})\ldots(dx_{i+1}/dx_{i+2}) = \\ = [dm^{i+1}(x_{i+1})/dx_{i+1}]\cdot(J_{k,k-1})^{-1}\cdot \\ \cdot (J_{k-1,k-2})^{-1}\ldots\ldots(J_{i+2,i+1})^{-1}$$

$$\int_0^{X_K} m^{i+1}(x_K)\cdot dx_K = \int_0^{X_{i+1}} [dm^{i+1}(x_{i+1})/\cdot dx_{i+1}]\cdot \\ \cdot (J_{k,k-1})^{-1}\ldots\ldots(J_{i+2,i+1})^{-1}\cdot(J_{k,k-1})\ldots\ldots(J_{i+2,i+1})\cdot dx_{i+1}$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Con esta ley de momentos isostáticos, asociada a las reacciones (5.16), se procede a determinar los giros que produce su aplicación sobre el elemento en la posición GEOK, asimilando el arco a la cuerda, y considerando que los jacobianos de las distintas transformaciones son constantes, según (5.14). La condición de nulidad de dichos giros, proporciona las restantes componentes autoequilibradas del Vector de Empotramiento. De donde resulta que la contribución al vector de Acciones Equivalentes, que hay que aplicar sobre la GEOK, por los pares desequilibrados creados en cada una de las actualizaciones anteriores, desde la etapa i-ésima, se expresa de forma totalmente idéntica a las relaciones matriciales (5.12) y (5.15), sin más que considerar que los esfuerzos son los totales actualizados de cada etapa, y que los desplazamientos son los incrementos entre cada dos geometrías actualizadas consecutivas. Los pares residuales no equilibrados en la iteración i-ésima, creados en actualizaciones anteriores a ella, contribuirán con términos análogos, afectados por el factor $(1 - \lambda_E)$.

Este planteamiento tiene el grave inconveniente de que deben almacenarse, por separado, los esfuerzos totales y los desplazamientos aparecidos en cada una de las actualizaciones de geometría realizadas desde la etapa en la que se realizó un equilibrado total.

5.5.4.3. Formulación a partir de Acciones Equivalentes Actualizadas

5.5.4.3.1. Descripción del procedimiento

Para evitar lo anterior, suponemos que, además de los pares equilibrantes que van apareciendo en cada actualización, y que se van transformando y acumulando sobre las sucesivas posiciones de los elementos, se introduce sobre la barra un sistema neutro formado por el conjunto de los pares contrarios (desequilibrados) y sus acciones de Empotramiento aplicadas a una distancia infinitesimal de sus extremos, que corresponden a esa actualización. Ese conjunto no altera, ni los esfuerzos acumulados ni los desplazamientos, y en cada transformación sigue a la barra actualizada, cambiando lo necesario para seguir siendo neutro. Al llegar a la GEOK, para la restauración del equilibrio, las acciones contrarias a las de empotramiento acumuladas serán las Acciones Equivalentes que hay que aplicar. Por lo tanto, éstas son la suma de las obtenidas en cada actualización anterior, utilizando las expresiones (5.12) o (5.15).

A cada elemento se le asociará un vector de Acciones Equivalentes, que se compondrá de los incrementos de cada actualización, y de la transformación de la suma acumulada anterior, dejando de ser necesario el arrastre de esfuerzos y desplazamientos anteriores, y bastando almacenar un vector por elemento.

5.5.4.3.2. Actualización de Acciones

Cada vez que se produce una transformación de la estructura, los elementos se trasladan, giran, alargan y cambian de curvatura. Estos movimientos y deformaciones traen como consecuencia una redistribución, por unidad de longitud, de los pares flectores interiores, que ya ha sido analizado, y un cambio en los vectores de empotramiento para mantener el estado neutro del conjunto. El Incremento de Vector de Acciones Equivalentes sobre la configuración i+1, resultado de la actualización de la etapa i, se obtiene generalizando (5.15) sin más que establecer la correspondencia: $L = L_i$ y $L' = L_{i+1}$.

El vector procedente de las actualizaciones anteriores, verifica la condición de equilibrio sobre i (5.27):

$$\int_0^{L_i} m(x_i) \cdot dx_i + P_{2y} \cdot L_i + M_1 + M_2 = 0$$

Cuando este sistema neutro pasa a i+1, no sufre alteración en la traslación ni en el giro. Debido al alargamiento ΔL, la ley $m(x_i)$ se transforma en $m'(x_{i+1})$ y las nuevas acciones en los bordes deben satisfacer la relación de equilibrio (Figura 31):

$$\int_0^{L_{i+1}} m'(x_{i+1}) \cdot dx_{i+1} + P'_{2y} \cdot L_{i+1} + \\ + M'_1 + M'_2 = 0 \qquad (5.28)$$

Restando (5.27) de (5.28), resulta:

$$P'_{2y} \cdot L_{i+1} - P_{2y} \cdot L_i + M'_2 - M_2 + \\ + M'_1 - M_1 = 0 \qquad (5.29)$$

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

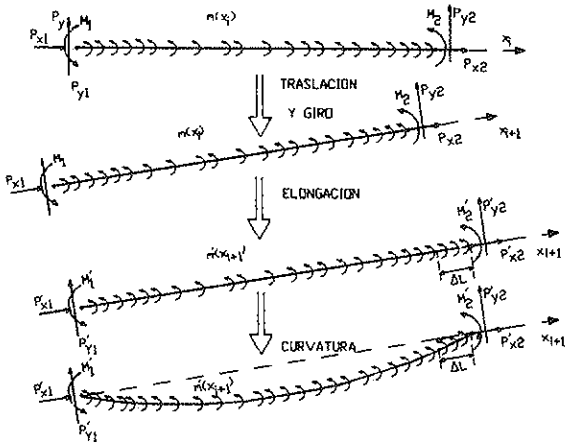


Figura 31. Desplazamientos y Deformaciones en la actualización.

Si elegimos como componentes transformadas $M' = M$, la ecuación (5.29) se cumple para

$$P'_{2y} = P_{2y} \cdot L_i / L_{i+1} = \rho_{i+1,i} \cdot P_{2y} \qquad (5.30)$$

aunque deja de ser un sistema neutro en desplazamientos, porque los giros dejan de ser nulos.

Por efecto de la curvatura, no se altera el equilibrio, al carecer los vectores de componente en dirección longitudinal (P_x).

En consecuencia, la actualización del vector de Acciones Equivalentes preexistentes, P_i, a la geometría i+1, manteniendo la condición de equilibrio global, consiste en alterar sus componentes en dirección transversal, multiplicándolas por el factor de alargamiento ρ correspondiente a la actualización. Su suma con el nuevo incremento, proporciona la totalidad de las Acciones Equivalentes, que prosiguen sobre la siguiente transformación, o son introducidas, total o parcialmente, en la iteración. Este es el criterio adoptado en el algoritmo de cálculo en que se desarrolla el método.

5.6. Ejemplos Numéricos

Se describen, a continuación, los resultados de aplicar el método a unos ejemplos de ménsula en situación de pre y post pandeo.

5.6.1. Ménsula de Timoshenko

Se comparan, en primer lugar, los resultados obtenidos al aplicar el presente método a una ménsula con una única carga vertical, que se va incrementando por escalones, y cuya solución teórica exige el cálculo de una integral elíptica. Puede verse en la publicación "Estabilidad Elástica", de S. Timoshenko, pg. 83/87. ANSYS presenta una solución numérica, bajo la identificación VM136, en el tomo de ejemplos, de su versión 4.4.

Se trata de una pieza metálica, de altura H = 2,54 m (100 in.), con una sección transversal, cuadrada, de 0,5 x 0,5 in. y un módulo E = $30 \cdot 10^6$ psi. Para su análisis con el método descrito, se discretiza en 10 elementos longitudinales y en 20 sub-elementos transversales. La carga crítica de Euler es P_{crit} = 0,0175 t. (Figura 32).

El algoritmo introduce una acción "estímulo inicial" (fuerza o momento), para desplazar a la estructura de su posición de partida y poder así buscar geometrías de equilibrio diferentes de aquélla. Este estímulo es retirado, aplicando otro de valor contrario simultáneamente con el sistema de acciones autoequilibrado en la primera iteración de compatibilización geométrica. En este ejemplo, dicha acción es una carga horizontal en el extremo, de valor 0,25 Kg. Dicha acción puede dejar de aplicarse cuan-

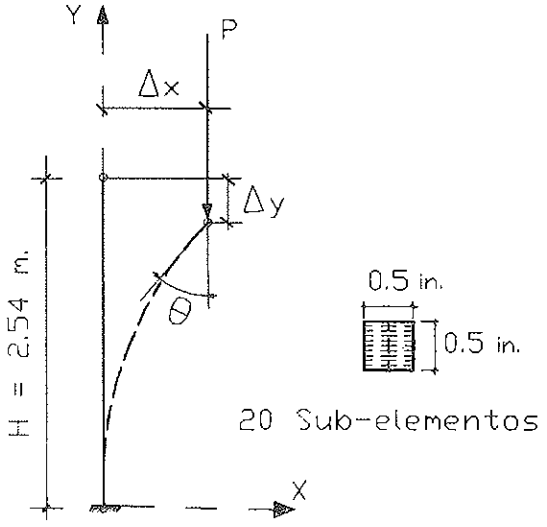


Figura 32. Ménsula de Timoshenko.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

do la posición de referencia del escalón de carga deja de ser la vertical inicial; pues a cualquier incremento de carga, la estructura responde con una readaptación de la deformada, diferente de la de partida.

La estructura desplazada por el "estímulo", converge siempre a la posición de equilibrio vertical, para cargas inferiores a la crítica. Para valores superiores, se obtienen convergencias a deformadas con curvatura creciente, llegando el ángulo θ del extremo a superar los 90°, de modo que parte de la pieza entra en tracción.

En la tabla I siguiente se comparan los resultados para una serie de cargas superiores a la crítica, indicándose los porcentajes de error en donde η es la relación entre la carga aplicada y la crítica de Euler.

Es de destacar que hasta $\eta < 1{,}884$ se obtienen, sin dificultad, convergencias con las Acciones Equivalentes al Equilibrio Estricto. Alrededor de $\eta = 2{,}2$ la convergencia es de carácter oscilante y lenta. Para valores mayores, aparecen divergencias, a no ser que las Acciones se ponderen por λ_E, inferiores a la unidad. A medida que aumenta la carga, se obtiene una mejora en la convergencia si se disminuyen los valores de λ_E; lo que permite, además, incrementar el escalón de carga sin que se produzcan divergencias. En el último escalón de la tabla ha sido de 0,02228 t, y se ha introducido con un valor del coeficiente igual a 0,1 (Figura 33).

Tabla I

CASO	CARGA P_v (t.)	mov.	Teoría	Ansys	Método	Ans/T	Met/t
1	0,02016	Δx (m)	1,50622	1,49606	1,50948	,993	1,0020
		Δy (m)	0,657860	0,64262	0,65890	,977	1,0015
	η = 1,152	θ (rad)	1,04719	1,03672	1,049227	,990	1,0019
2	0,02263	Δx (m)	1,82626	1,82245	1,82913	,998	1,0015
		Δy (m)	1,11760	1,10490	1,11780	,989	1,0002
	η = 1,293	θ (rad)	1,39626	1,3881	1,39687	,994	1,0004
3	0,02657	Δx (m)	2,01168	2,01140	2,013447	0,9999	1,0009
		Δy (m)	1,65354	1,64482	1,654339	,995	1,0005
	η = 1,518	θ (rad)	1,74533	1,741831	1,74785	,998	1,0014
4	0,03297	Δx (m)	2,03962	2,04335	2,043442	1,001	1,0018
		Δy (m)	2,22758	2,22125	2,225955	,997	,9993
	η = 1,884	θ (rad)	2,09439	2,09410	2,096287	0,9999	1,0009
5	0,04446	Δx (m)	1,90500		1,911591		1,0035
		Δy (m)	2,81178		2,804771		,9975
	η = 2,541	θ (rad)	2,44346		2,443342		1,000
6	0,07050	Δx (m)	1,58750		1,59362		1,0039
		Δy (m)	3,40360		3,39762		,9982
	η = 4,029	θ (rad)	2,79253		2,79396		1,0005
7	0,15953	Δx (m)	1,06934	1,07452	1,08084	,995	1,0108
		Δy (m)	4,00558	3,99999	3,99648	,986	,9977
	η = 9,116	θ (rad)	3,07177	3,0760	3,07360	1,0014	1,0005

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

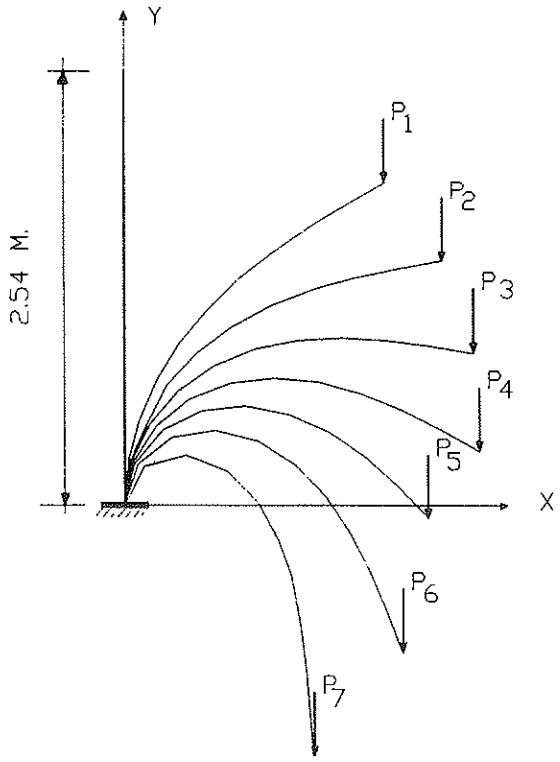


Figura 33. Geometrías para los casos 1 a 7.

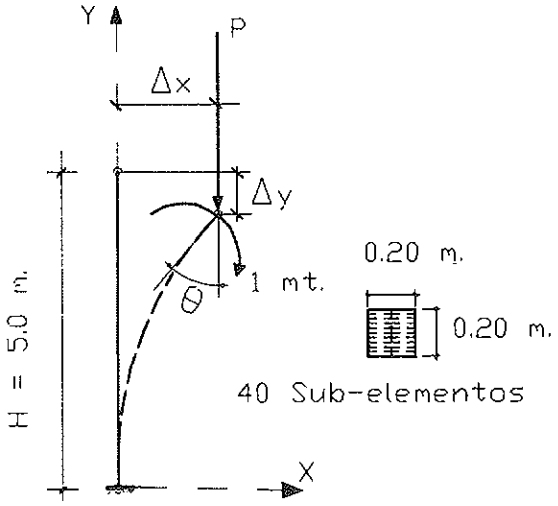


Figura 34. Ménsula de Marí - Carol

5.6.2. Ménsula de Marí-Carol

Marí y Carol han estudiado el desplazamiento horizontal del extremo superior, y el flector en la base, de una ménsula sometida a un momento fijo en cabeza y a una carga creciente hasta el 90% de la crítica de Euler, por un método de Formulación Matricial Generalizada (F.M.G.) y por Elementos Finitos. (Modelos Unidimensionales para análisis no lineal en el tiempo...), pg. 119/21.

Se trata de una pieza de H = 5,0 m con una sección transversal, cuadrada, de 0,2 x 0,2 m y un módulo $E = 3 \cdot 10^6$ t/m². Para su análisis con el método, se discretiza en 10 elementos longitudinales y en 40 sub-elementos transversales. Se han obtenido los resultados para los mismos escalones de carga y, además, superando la carga crítica de Euler (P_{crit} = 39,478 t) (Figura 34) (Tabla II).

La velocidad de convergencia aumenta, en todos los casos, tomando para λ_E valores superiores a 1. Para el valor de 1,8 se obtiene una aceleración tanto mayor cuanto más se aproxima la carga aplicada a la crítica, reduciéndose las iteraciones a la mitad, aproximadamente. Para el último escalón, se ha comprobado que la máxima rapidez corresponde a $\lambda_E = 2$. Valores superiores conducen a la divergencia.

Las tolerancias de convergencia adoptadas son de 10^{-6} para las deformaciones de congruencia, 10^{-4} para desplazamientos de los nudos en la compatibilidad y 10^{-3} para el equilibrio de los elementos.

6. METODO SIMPLIFICADO

6.1. Justificación

En la gran mayoría de los casos prácticos, los desplazamientos son pequeños en comparación con las dimensiones de la estructura, y los giros son muy reducidos, por lo que los cambios en las longitudes y orientaciones de los elementos no apartan significativamente las geometrías deformadas de la inicial. En esas condiciones, las correcciones de compatibilidad geométrica generan esfuerzos y desplazamientos despreciables frente a los producidos por las acciones exteriores y por las correcciones de congruencia y de equilibrio, por lo que aquéllas pueden ser ignoradas. Las proyecciones de los esfuerzos

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Tabla II

CASO	CARGA P_v (t.)	Control	F.M.G	M.E.F	Método
1	16,0 $\eta = 0{,}405$	Δx (m) Δy (m) M_{base} (mt)	0,531 – 1,85	,0532 – 1,85	0,5315 ,00128 1,851
2	25,0 $\eta = 0{,}633$	Δx (m) Δy (m) M_{base} (mt)	,0868 – 3,17	,0856 – 3,14	,08637 ,00198 3,156
3	36,0 $\eta = 0{,}912$	Δx (m) Δy (m) M_{base} (mt)	,03631 – 14,06	,03580 – 13,85	,03526 ,01693 16,685
4	40,0 $\eta = 1{,}013$	Δx (m) Δy (m) M_{base} (mt)	– – –	– – –	1,5680 ,3172 63,704

que van apareciendo en el transcurso del análisis, sobre las direcciones actualizadas, son sensiblemente iguales a los esfuerzos en las direcciones iniciales. Las coordenadas de los nudos difieren muy poco de las de origen y, por lo tanto, ellas y las dimensiones de las barras pueden suponerse invariables, por lo que las matrices de rigidez, pueden formularse con los nudos y elementos iniciales, aunque con sus propiedades mecánicas (área e inercias), cambiantes de acuerdo con lo exigido para una buena convergencia en la congruencia del material.

Para estos casos se ha implementado un algoritmo simplificado en el que no se procede a la actualización de la estructura, y se calculan sobre la geometría inicial, tanto las correcciones de congruencia como las de equilibrio.

6.2. Estructuración

El diagrama de flujo del algoritmo simplificado se obtiene a partir del descrito en el apartado 2, sin más que eliminar el ciclo de compatibilización geométrica y las fases de actualización de la estructura, tanto en esfuerzos como en dimensiones. Una vez alcanzada la convergencia de cada ciclo de congruencia del material, se produce una corrección de equilibrio.

6.3. Medida del Desequilibrio

Para evaluar la medida del desequilibrio, se admite la hipótesis de que la directriz del elemento deformado se aparta muy poco de la cuerda que subtiende sus extremos. El desequilibrio se controla en los dos planos principales del elemento, con lo que se obtienen dos parámetros por cada elemento. El desequilibrio acumulado en la iteración *i-ésima* se obtiene calculando el total referido a la geometría inicial, y restándole lo corregido hasta la iteración anterior. Para cargas uniformes y pares, la medida del desequilibrio total en cada plano principal, se obtiene de (5.4.3) haciendo $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y considerando que los desplazamientos, Δu y Δv, son los totales acumulados hasta esa iteración, u_i, v_i, con lo que:

$$M^i_{des} = [V(L) + V(0)] \cdot u_i/2 - [N(L) + N(0)] \cdot v_i/2 = V^i_m \cdot u_i - N^i_m \cdot v_i \qquad (6.1)$$

El incremento de desequilibrio generado

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

entre dos iteraciones consecutivas de corrección de desequilibrio, será:

$$\Delta M_{des} = V_m^i \cdot u_i - N_m^i \cdot v_i - V_m^{i-1} \cdot u_{i-1} - N_m^{i-1} \cdot v_{i-1} = -[N_{mi} \cdot \Delta v + \Delta N \cdot v_{i-1} - V_{mi} \cdot \Delta u - \Delta V \cdot u_{i-1}] \quad (6.2)$$

Si en todas las correcciones se restaura el equilibrio estricto, la expresión (6.2) será la medida del desequilibrio después de la i-esima corrección. En ella intervienen los esfuerzos acumulados hasta la iteración que se evalúa (V,N_{mi}), los desplazamientos anteriores (u, v_{i-1}), y los incrementos de esfuerzos y desplazamientos entre ambas (Δ). Puesto que los sucesivos Δu son despreciables, el efecto del esfuerzo cortante puede ignorarse, resultando:

$$\Delta M_{des} = -[N_{mi} \cdot \Delta v + \Delta N \cdot v_{i-1}] \quad (6.3)$$

En el caso que no se establezca el equilibrio estricto al ponderar las acciones equivalentes por el factor λ_E, el momento desequilibrado será:

$$M_{des} = -[N_{mi} \cdot \Delta v + \Delta N \cdot v_{i-1}] - (1 - \lambda_E) \cdot \Sigma_1^{i-1} [N_{mj} \cdot \Delta v_j + \Delta N_j \cdot v_{j-1}] \quad (6.4)$$

Al formular la medida en los dos planos principales del elemento, las expresiones (6.1) a (6.4) se desdoblan, tomando el desplazamiento v, sucesivamente, los valores de las dos componentes del desplazamiento transversal (v, w) en los planos principales locales OY, OZ; y V los valores de los dos cortantes (V_z, V_y). La contribución del axil N y del desplazamiento longitudinal, en ambos desequilibrios es análoga.

6.4. Acciones Equivalentes

En el método simplificado, se utilizan dos conjuntos de las Acciones Equivalentes Reducidas (5.16), basadas en las dos medidas de desequilibrio, que se aplican en los planos principales de las barras.

6.5. Consideraciones Finales

En el método simplificado, los esfuerzos que se obtienen no están en equilibrio sobre las orientaciones iniciales de los elementos pues, al haberse obtenido sobre la geometría original, generan el desequilibrio global que sólo se anula si se les supone actuando sobre la posición transformada.

Es necesario arrastrar, como mínimo, los resultados de la iteración anterior, ya que, al no efectuarse actualizaciones, los incrementos de esfuerzos obtenidos sobre la configuración inicial deben ser referidos a la posición en que se evalúa el equilibrio, dando lugar a los términos $\Delta N \cdot v_{i-1}$ de (5.33). Esta contribución es la que se anula en el proceso de actualización.

7. ALGORITMO DE RESOLUCION INVERSA DE LA SECCION

7.1. Justificación del Algoritmo

La viabilidad del método exige el cálculo de las deformaciones generalizadas, reales, concomitantes con la terna de esfuerzos longitudinales que actúan sobre cada sección, cuyo material presenta un comportamiento no lineal. Al algoritmo capaz de proporcionar dicha respuesta se le conoce como "Resolución Inversa de la Sección". En este trabajo, está desarrollado para ser aplicado a secciones heterogéneas, compuestas por uno o dos materiales cuyas leyes constitutivas esenciales son no lineales: acero y hormigón. El comportamiento de la sección transversal es consecuencia de la integración del efecto no lineal de un conjunto de elementos de reducido tamaño, en que se divide aquella, a los que se les exige que cumplan las condiciones de compatibilidad de deformaciones establecidas a partir de la hipótesis de Navier.

El que se presenta a continuación, solamente es válido si los esfuerzos que actúan sobre la sección son debidos a la aplicación de un solo escalón de acciones exteriores desde la situación descargada o, en caso de escalones sucesivos, cuando los esfuerzos acumulados no alteran, o van reduciendo, las rigideces de la sección. Ello es consecuencia de que no se formula la posibilidad del recorrido de descarga por una rama diferente del camino de carga, en el diagra-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ma tensión-deformación de los materiales. Esta limitación tiene la ventaja de no tener que recordar el estado tenso-deformacional de cada uno de los sub-elementos en que se discretizan las secciones.

Elaborar este algoritmo tiene la dificultad de que no existe una función analítica que relacione esfuerzos con deformaciones generalizadas, sino tan solo una metodología de cálculos encadenados que pueden proporcionar los esfuerzos concomitantes con una terna de deformaciones preestablecidas. Dadas unas deformaciones generalizadas que permitan definir el plano girado y trasladado en que se ha convertido el que contenía la sección inicial, los esfuerzos que han debido actuar para producir tal efecto son consecuencia de un proceso *directo* de cálculos encadenados que, con una sola pasada, conducen al resultado buscado. El camino contrario, la resolución *inversa*, no existe como tal, y sólo puede obtenerse por aplicación reiterada del directo, en un proceso de tanteo con los tres parámetros independientes que definen el plano deformado de la sección.

Se puede solventar esta dificultad calculando, por el procedimiento directo, los esfuerzos asociados a numerosas deformaciones, para formar con ellos un banco de datos, que definan los conocidos diagramas Axil-Momento-Curvatura. Con ellos es posible, mediante interpolación, resolver el problema inverso. Pero como no pueden generarse más que un número limitado de diagramas o tablas, la interpolación a los valores particulares de cada caso puede producir resultados con poca aproximación; sobre todo en el caso de flexión esviada, donde hay que realizar una triple interpolación. Es preciso, además, acotar el rango de variación de los esfuerzos o de las deformaciones generalizadas para los que se van a obtener los diagramas. Esto supone que no se puede proceder a su elaboración antes de haber realizado un análisis elástico previo que, en todo caso, solamente proporcionará valores aproximados. Al depender los resultados de las rigideces asignadas al modelo lineal, pueden obtenerse valores extremos, diferentes de los que aparecerán al cambiar las rigideces durante el curso del análisis. Puede ocurrir que, para alguna sección, en alguna etapa intermedia del proceso, cierto esfuerzo, sobrepase el de agotamiento, sin que ello signifique que la estructura es inestable o está agotada, puesto que, en tanto se está en el curso del cálculo, no hay situaciones definitivas, y un resultado parcial no debe considerarse como cierto, pudiendo variar como consecuencia de las correcciones posteriores. Si se presentara tal situación, la mecánica de interpolación se vería alterada, ya que los valores no estarían dentro del rango.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, la incorporación de la resolución inversa de la sección a un proceso automático de análisis no lineal, exige el desarrollo de un algoritmo específico, capaz de proporcionar las deformaciones concomitantes con una terna de esfuerzos, en cada caso puntual.

7.2. Hipótesis Básicas

7.2.1. Comportamiento de la Sección

La sección se deforma manteniéndose plana lo que, en el caso general de flexión esviada, significa que se precisan tres parámetros independientes para definir el estado; uno de los aspectos más significativos del algoritmo reside en la elección de dichos parámetros. Se han adoptado los siguientes:

a. *La Deformación de la fibra menos comprimida (o más traccionada)*

b. *La Orientación de la fibra neutra de deformaciones en el plano transversal OYZ.*

c. *La Curvatura de la sección en el plano normal a la fibra neutra.*

Los estados de agotamiento de la sección de hormigón armado son aquellos en que el plano de deformaciones coincide con alguno de los definidos en los dominios de deformación límite (Dominios 1 a 5), dados por la Instrucción EH, o similares, del ámbito del C.E.B. Las secciones de acero se consideran agotadas cuando la fibra más deformada, a tracción o a com-

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

presión, alcanza la deformación de rotura del diagrama $\sigma - \varepsilon$.

Entre las barras de acero y el hormigón no existen deslizamientos. Cada elemento infinitesimal del interior de la sección, tiene una tensión deducida de la relación elemental $\sigma - \varepsilon$ del material de que está formado. Estas relaciones constituyen el núcleo más profundo del algoritmo.

7.2.2. Relaciones Tensión Deformación del Hormigón

Para determinar la tensión de *Compresión* con que un elemento infinitesimal de hormigón responde a una determinada deformación, se puede elegir entre:

I. Diagrama *Parábola - Rectángulo* con tensión máxima minorada por el factor 0,85. La deformación máxima de agotamiento es de *0,0035*. Este diagrama subvalora la rigidez del material, por lo que su aplicación está del lado de la seguridad en tanto que, al producir mayores deformaciones, acrecienta los efectos de desequilibrio y descompatibilización.

II. Diagrama *Parábola - Rectángulo* sin minorar la tensión máxima. Este comportamiento se acerca más al comportamiento real. Se ha comprobado que produce resultados comparables con el diagrama hiperbólico, que se considera como más representativo para evaluar deformaciones en secciones no agotadas.

III. Diagrama *Hiperbólico* de Sargin. Permite una evaluación más aproximada de las deformaciones, al ajustar su pendiente inicial al módulo de elasticidad medio del hormigón, si se conoce o, en caso contrario, a valores de éste aproximados a través de la resistencia. La deformación máxima en agotamiento depende de la resistencia.

En cuanto a las tensiones de *Tracción*, puede optarse por:

a) Considerarlas nulas para todo valor de elongación.

b) Admitir una rama elástica, prolongación de la tangente en el origen de la rama de compresión, hasta el límite de resistencia a tracción.

c) Tener en cuenta el aumento de rigidez que para la sección supone la existencia de hormigón intacto en las zonas entre fisuras (efecto "Tensión - Stiffening"). Este efecto se evalúa, siguiendo a Zdeneck y Bazant, añadiendo a la rama de comportamiento lineal en tracción, otra recta ascendente que permite incrementar las deformaciones de elongación del hormigón en la cantidad:

$$\Delta\varepsilon_{ts} = (f'_t / E_c) \cdot (0{,}204 \cdot f'_t + 0{,}814) \qquad (7.1)$$

en donde:

f'_t = resistencia del hormigón a tracción

E_c = Módulo de deformación tangente, en el origen del diagrama Hiperbólico.

El aumento de rigidez por la contribución del hormigón entre fisuras es despreciable para secciones muy solicitadas. El refinamiento que supone considerar este efecto, determina que no tenga sentido tenerlo en cuenta si la zona de compresión se representa por un diagrama Parábola-Rectángulo, por lo que se asocia únicamente al diagrama Hiperbólico.

En la Figura 35 se describen los diagramas representativos de las leyes constitutivas del hormigón.

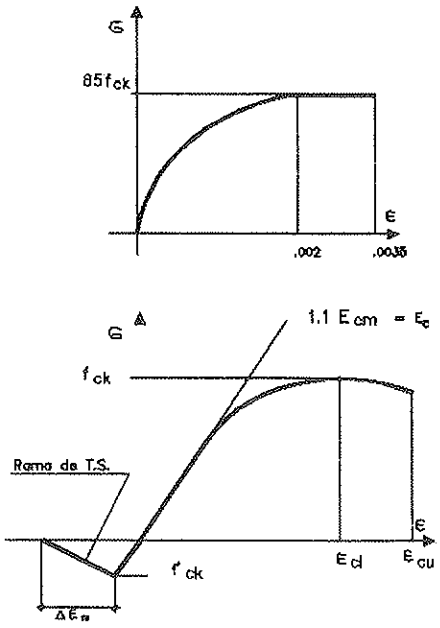


Figura 35. Diagramas σ–ε para el Hormigón.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

7.2.3. Efecto de la Fluencia

Para evaluar los efectos de las deformaciones diferidas por fluencia, se adopta el criterio simplificado de utilizar diagramas afines a los instantáneos anteriormente definidos, siguiendo los criterios indicados, tanto en el Código Modelo como en el Manual del Pandeo e Inestabilidad del CEB-FIP. En estos se admite que la razón de la afinidad, que hay que aplicar al eje de deformaciones es:

$$\zeta = (1 + \alpha * \beta * \phi) \qquad (9.2)$$

en donde α y β tienen en cuenta la relación entre los axiles y flectores de primer orden de larga duración (permanentes) y los totales (permanentes más sobrecargas); mientras que ϕ es el coeficiente de fluencia. Si se analiza el contexto en que aparece este coeficiente de afinidad, se advierte que está preparado para su aplicación al caso de soportes simples, donde la relación obtenida para los esfuerzos axiles, en el análisis de primer orden, permanece invariable a lo largo el proceso de cálculo no lineal, y que los flectores, aunque cambiantes, no lo son demasiado. Pero en una estructura hiperestática, estas relaciones variarán de modo muy significativo eu las distintas secciones, por lo que su sentido se desvanece. Ante esta situación, cabe tomar con valor unidad los coeficientes α y β, con lo que se está del lado de la segnridad, y se simplifica la información que es necesario asociar a cada sección; o bien obtener unos valores medios a partir de dos cálculos no lineales, con la carga permanente y con la carga total. Otra alternativa de cálculo del efecto de la fluencia se describe en el apartado 8.

7.2.4. Relaciones Tensión Deformación del Acero

Para las barras de acero pasivo se puede elegir entre el diagrama bi-lineal, con tensión de respuesta constante a partir del escalón de cedencia, típico de los de dureza natural; o con una rama plástica, a partir de dicho punto, defiuida por un polinomio de quinto grado, tal como figura en la Instrucción EH, para los aceros estirados en frío.

7.3. Discretización de la Sección: Parámetros y Convenios

Se supondrá que la geometría de la sección y la disposición de su armadura es siempre *SIMETRICA* con respecto al plano medio, *XOY*. Esta limitación, de índole exclusivamente práctica, responde al hecho frecuente de posible inversión del sentido de las acciones normales a la estructnra, que obliga a un armado simétrico en los paramentos laterales de las barras. Con ella se aumenta la velocidad de resolución del algoritmo, al limitar a un semiespacio las posibles orientaciones de la fibra neutra.

Sobre la sección, se define un triedro de referencia para los esfuerzos resultantes de la deformación, cuyo origen y direcciones coinciden con las que han servido para obtener los esfuerzos en los cálculos sobre el modelo elástico. Esto permite una comparación directa entre esfuerzos actuantes "exteriores" y esfuerzos de respuesta "interna", lo que facilita la operación de evaluar la aproximación entre ambos; pero no es esencial. La orientación de la fibra neutra se mide por el ángulo que forma con el eje *OZ* y es siempre *POSITIVO* y variable desde *0* a *180°*, en sentido *antihorario*. Se establece un sentido positivo sobre la fibra neutra, en cualquier orientación, como la dirección, hacia la derecha, de uua paralela por el origen, que deje tal punto a la izquierda. La Curvatura de la sección se define por el ángulo que forma el plano de deformaciones alrededor de la fibra neutra, y está representada por un vector contenido en dicha fibra, siempre en la dirección positiva antes definida. Se establece el sentido de giro siguiendo la regla de la mano izquierda. La curvatura es por tanto *SIEMPRE POSITIVA*. De esa orientación depende tambiéu el canto con que va a actuar la sección, y la máxima curvatura que puede originarse sobre ella hasta alcanzar una deformación de agotamiento.

Los parámetros que se adoptan para definir un estado de deformaciones de la sección son (Figura 36):

ALFA: Orientación de la fibra neutra con respecto al eje *OZ*.

CURVA: Curvatura *total* de la sección.

DFBASE: Deformación del punto (o fibra) menos comprimida.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

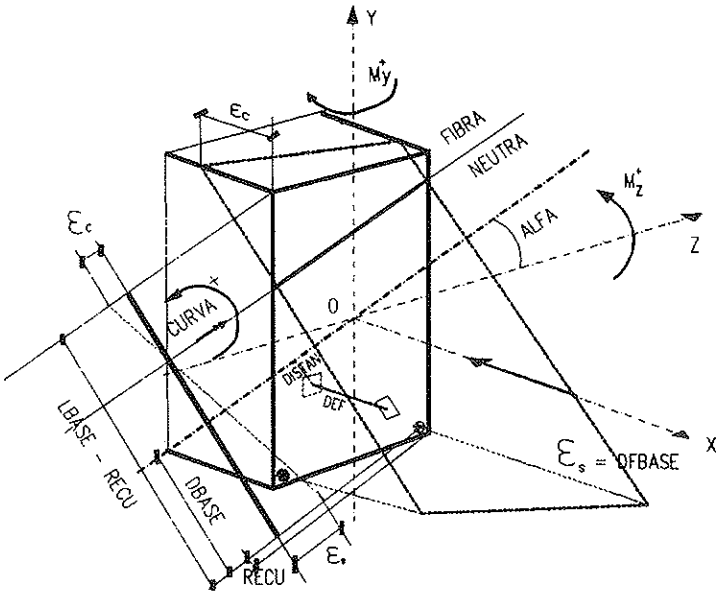


Figura 36. Definición del estado de Deformación de una sección.

LBASE: Canto útil de la sección normal a la fibra neutra.

RECU: Recubrimiento de la armadura menos comprimida, normal a la F.N.

DBASE: Distancia del origen del sistema de referencia, al punto menos comprimido en dirección paralela a la normal a la F.N.

DISTAN: Distancia de un elemento de la sección, a una paralela a la F.N. por el origen.

DEF: Deformación del elemento a la distancia DISTAN. Es positiva si es de acortamiento.

TENS: Tensión que corresponde a la deformación DEF, en el diagrama $\sigma - \varepsilon$, para el material del elemento a distancia DISTAN.

7.4. Descripción General del Procedimiento

Para una terna de esfuerzos actuantes sobre la sección, se genera un estado de deformaciones cuya resultante interna debe coincidir con la exterior. Llamando AXIL, MOMZ y MOMY a las componentes de dicha resultante interna, deben cumplir la triple condición de equilibrio:

$$N_x = AXIL \quad M_z = MOMZ \quad M_y = MOMY$$

De la posición del plano de deformaciones se obtienen las deformaciones generalizadas, referidas al sistema de ejes (Figura 37):

$$\varepsilon_x = DFBASE + CURVA * DBASE \quad (9.3.a)$$

$$C_z = CURVA * cos(ALFA) \quad (9.3.b)$$

$$C_y = CURVA * sen(ALFA) \quad (9.3.c)$$

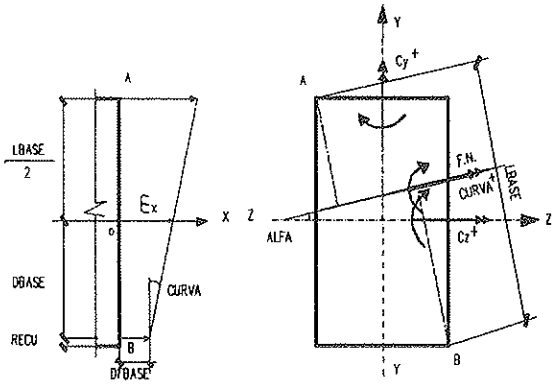


Figura 37. Deformaciones de la Sección.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Entre las deformaciones y sus esfuerzos concomitantes existe una relación sin formulación analítica posible. Para obtener las correspondientes a una terna de esfuerzos prefijada, hay que tantear planos de deformación, hasta que se consiga encontrar una posición que satisfaga las ecuaciones de equilibrio. En este algoritmo, se ha adoptado el encadenamiento de procesos iterativos sobre tres diagramas:

I. Diagrama de relación entre Axiles y Curvaturas de agotamiento de la sección, para una Orientación de la fibra neutra (ALFA) prefijada.

II. Diagrama de relación entre Axiles y Deformaciones base (DFBASE), para una Curvatura (CURVA) y orientación de la F.N. (ALFA) prefijada.

III. Diagrama de relación entre una componente del Flector respuesta y la Curvatura Total de la sección, para un axil (AXIL) y orientación de la F.N. (ALFA) prefijados.

Los dos primeros diagramas han sido utilizados en otros trabajos (Arenas-Villegas y Aparicio).

7.4.1. Diagrama AXIL-CURVATURA en agotamiento

Al fijar la orientación de la fibra neutra, queda establecida la curvatura última máxima que puede conseguir la sección:

$$C_3 = (\varepsilon_{su} + \varepsilon_{cu}) / H_\alpha,$$

en donde H_α es el canto útil normal a la orientación de la fibra neutra. El axil (N_3), correspondiente a tal plano, se calcula directamente utilizando las leyes constitutivas.

A cualquier otro plano de deformaciones de agotamiento con la misma orientación, le corresponderá una curvatura menor. Para una curvatura nula, existen dos planos de deformaciones que agotan la sección: A tracción, con una elongación constante en toda la sección, de ε_{su}; o a compresión con un acortamiento constante igual a ε_{cu}. Estos planos, paralelos a la posición inicial de la sección, son independientes de la orientación de la fibra neutra, y definen dos nuevos valores de los axiles, N_1 para la compresión y N_2 para la tracción. Se supone la existencia de un diagrama que, en abcisas contiene las curvaturas de agotamiento, y en ordenadas los axiles concomitantes, tal como el de la Figura 38.

Este diagrama se utiliza para determinar la máxima curvatura que puede generarse sobre la sección, con la fibra neutra orientada según ALFA*, cuando el axil resultante es un valor prefijado igual al exterior. Para ello, se utiliza un procedimiento iterativo apoyado en la intersección con secantes interiores, por lo que sólo es necesario definir previamente los puntos límites (N_1 , C_1); (N_2 , C_2) ; (N_3 , C_3). La recta secante inicial queda definida comparando el valor del AXIL dado, con el axil de máxima curvatura, N_3. Si AXIL > N3, debe considerarse la secante *1-3* y, en caso contrario, la *2-3*. Esta comparación establece el valor de la deformación que tiene la fibra menos comprimida. Si AXIL < N_3, el plano de deformaciones da lugar a un volumen de tracciones mayor que el que aparece en la frontera entre los dominios 2 y 3, está del lado del dominio 2, y pasa por el punto en que el acero está agotado con una elongación de ε_{su}. En caso contrario, pasa por el punto de máximo acortamiento del hormigón. Para secciones de Hormigón, esta última magnitud depende de la curvatura: Si es mayor que la del límite

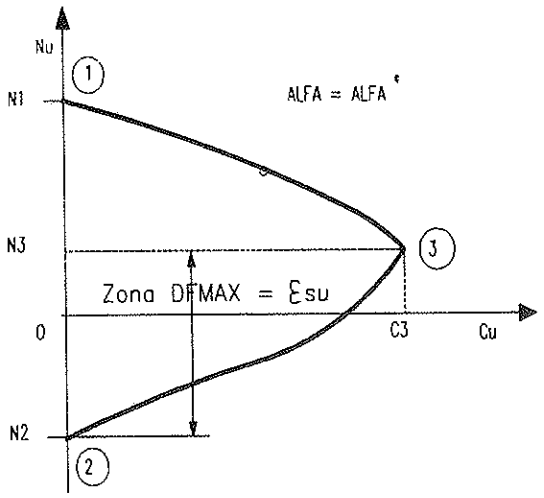


Figura 38. Diagrama Axiles - Curvaturas Ultimas.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

entre los dominios 4a y 5, resulta $\varepsilon_c = (1 + \phi) \cdot \varepsilon_{cu}$. Si es menor, toma el valor: $\varepsilon_{cl} \cdot (1 + \phi) + [H_\alpha \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{cl}) / \varepsilon_{cu}] * CURVA$.

Obtenida una curvatura, C_{ui}, por intersección de la recta horizontal AXIL con la secante, se calculan las deformaciones del plano definido por aquella y por la deformación base función de C_{ui}, sus tensiones concomitantes y el axil resultante N_i. Si este valor es suficientemente próximo al exterior:

$$mod(AXIL - N_i) < \xi$$

se adopta N_i y C_{ui} como solución válida. En caso contrario, se usan como punto de apoyo para la nueva secante de iteración, repitiendo el proceso hasta obtener la aproximación deseada.

Además de la curvatura última ($C_u = CURVAULT$) asociada al axil y a la orientación de la F.N. establecida, el plano de deformaciones nos proporciona los momentos máximos alrededor de los ejes OZ y OY *(MROTY* y *MROTZ)* que, con esa curvatura, proporciona la sección. Se utilizan para establecer los límites superiores de los diagramas de Momento-Axil-Curvatura.

7.4.2. Diagrama Axil-Deformación base, con Curvatura y Orientación prefijadas

El segundo de los diagramas permite calcular la deformación de la fibra más tendida (DFBASE) que corresponde a un plano de deformaciones, con una curvatura prefijada tal que el axil resultante coincide con un valor preestablecido. En ordenadas se representan los axiles, y en abcisas las deformaciones. El límite inferior (AX1), corresponde a una situación de agotamiento en la que el plano de deformaciones pasa por la fibra extrema agotada por tracción, con DBASE = ε_{su}. El límite superior (AX2), se obtiene considerando que el plano pasa por la fibra más comprimida, cuya deformación se calcula en función del dominio a que pertenezca la curvatura, en la forma descrita en el apartado anterior.

Para la curvatura prefijada pueden generarse axiles comprendidos entre estos dos extremos, que corresponden a posiciones trasladadas del plano, definidas por la deformación base, como se indica en la Figura 39. Recíprocamente, para un axil dado comprendido entre los dos límites, con una curvatura prefijada, existe una deformación base capaz de generar aquella magnitud. El diagrama puede verse en la Figura 40.

La obtención de la deformación base correspondiente al axil y a la curvatura preestablecida, se realiza por iteraciones, con el apoyo de secantes interiores, no siendo preciso definir más que algunos puntos del diagrama. Una vez obtenido ε_1 por intersección

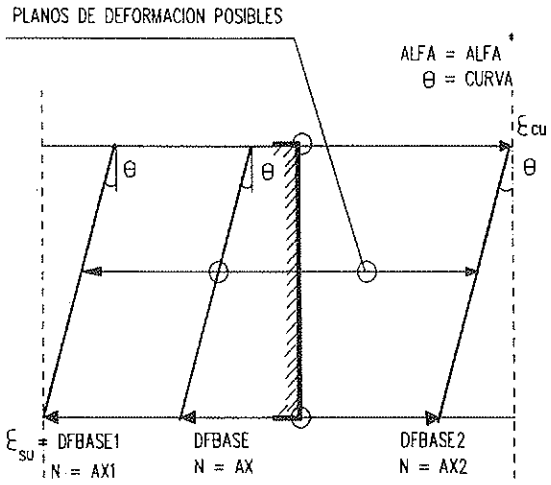


Figura 39. Posiciones del plano de Deformaciones con Curvatura Invariable.

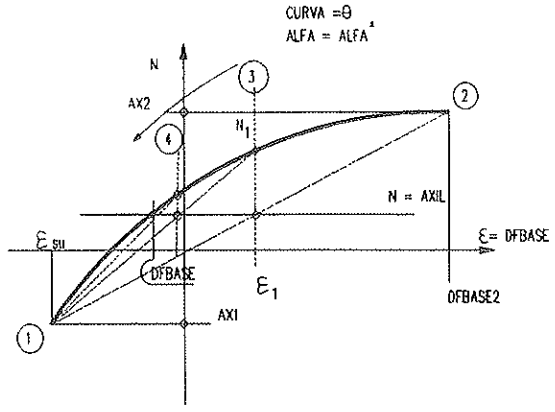


Figura 40. Diagrama Axil - Deformación Base con Curvatura y Orientación fija.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

con la secante inicial 1-2, se calcula el axil concomitante N_1, y si se verifica:

$$abs(AXIL - N_1) < \xi'$$

se tiene la solución buscada. En otro caso, los valores de ε_1 y N_1, se utilizan para definir la nueva secante para la siguiente iteración.

7.4.3. Diagramas Momento - Curvatura - - Axil

Los diagramas Momento - Curvatura se definen como relación entre *una de las componentes del Momento* y la *Curvatura Total*, para un valor fijo del Axil. Existen, por consiguiente, dos tipos de diagrama, según que la componente del momento considerada sea la del eje OZ o la del OY. En cualquiera de los dos casos, los diagramas consisten en una familia de curvas, a cada una de las cuales está asociado un valor constante del ángulo de orientación de la fibra neutra. En abscisas se dispone la curvatura total, y en ordenadas la componente del momento.

A cada punto de estas curvas corresponde, además, un valor concomitante de la componente complementaria del momento. El aspecto genérico de uno de tales diagramas se representa en la Figura 41. Los extremos de cada línea corresponden al estado de agotamiento, con máxima curvatura para el axil prefijado, y cuyos valores se obtienen a partir de iteraciones en el primero de los diagramas descritos. (MROTZ, MROTY, CURVAULT). Todas las líneas parten del mismo punto, ya que esa situación con curvatura nula es independiente de la orientación de la fibra neutra. El origen del haz está situado en el eje de momentos. En los diagramas de la componente M_y, este punto coincide con el origen, debido a la simetría supuesta. La determinación del origen del haz se efectúa a partir de la deformación base correspondiente al axil exterior, para curvatura nula, obtenida en un diagrama del tipo II.

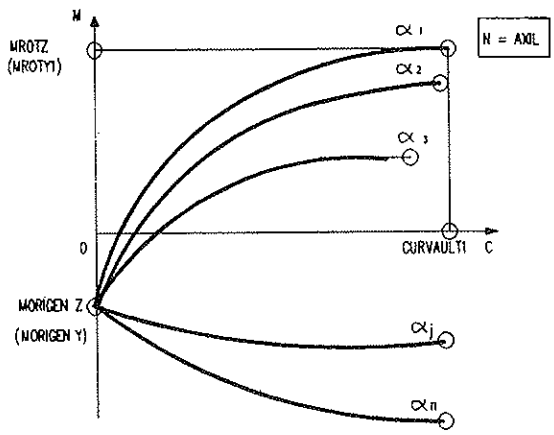


Figura 41. Diagrama Momento - Curvatura Total.

En esta definición del diagrama no pueden existir valores negativos de la curvatura que se considera referida a la fibra neutra orientada. Las curvas no llegan a obtenerse nunca en su totalidad, sino tan solo alguno de sus puntos, los necesarios para realizar las iteraciones por intersección con rectas secantes.

7.5. Descripción del algoritmo de resolución inversa

7.5.1. Criterio Básico

Suponiendo conocida la familia de curvas que relacionan una componente del momento *(MOMEXT)* con la curvatura de la sección *(CURVA)*, si existe solución, estará representada por el punto de intersección de una recta horizontal, de ordenada igual a MOMEXT en el diagrama, con una de las curvas del mismo, siempre que la otra componente del momento, complementario al del diagrama en uso, coincida con el correspondiente valor del exterior.

Elegida la componente sobre la que se definirá el diagrama, se inicia un proceso de doble iteración, con el apoyo de rectas secantes. Partiendo de una curva correspondiente a una cierta orientación de la fibra neutra, se trata de obtener un punto cuya ordenada coincida con la componente. Si se consigue, se comprueba la coincidencia de la componente concomitante en el otro eje, con la componente exterior. En caso de ser así, la curvatura asociada es la solución buscada. En caso contrario, no existe solución

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

con la orientación supuesta, y se pasa a tantear con otra, repitiendo el proceso hasta conseguir dicha concordancia. Si ésta no existe, se llega a una situación en la que el momento complementario exterior es superior al máximo que puede producir la sección, con cualquier orientación, por lo que está agotada. Si no se obtiene intersección con ninguna orientación, la sección también está agotada.

7.5.2. Procedimiento Iterativo

Se llama "obtención de la primera convergencia", a la operación de hallar la intersección de la recta horizontal representativa de la componente del momento exterior, con una determinada curva del diagrama de orientación ALFA; y "convergencia total", a la determinación de la solución. Para ello se establecen las siguientes actuaciones (Figura 42):

a) Obtención de los puntos Origen y Final (MORIGEN,0); (MROT, CURVAULT), utilizando los diagramas I y II, con orientación ALFA.

b) Obtención de la primera intersección de la secante definida por el origen y el final, con la horizontal. El resultado es una curvatura C_1.

c) Con esa curvatura, se determina la formación base de un plano de deformaciones, cuyo axil resultante sea el exterior (AXIL). Esta sub-operación supone otro proceso iterativo en el diagrama II, del que se calculan los puntos necesarios para llegar al resultado.

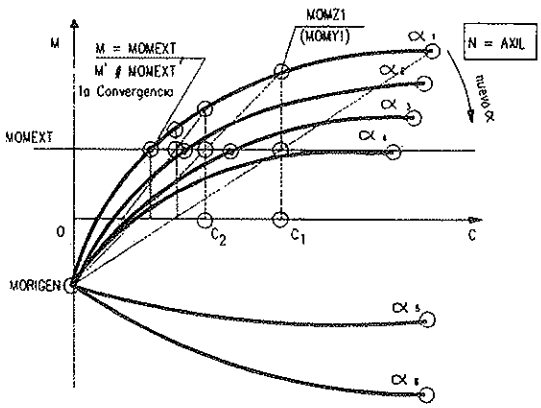


Figura 42. Obtención de la Convergencia.

d) El plano resultante, cuyo axil coincide con el exterior, define dos componentes de los momentos *(MOMZ1* y *MOMY1)*. Si la componente según el eje al que se ha referido el diagrama momento - curvatura difiere del valor exterior menos de la tolerancia admitida, el resultado corresponde a la "primera convergencia". En caso contrario, el punto (MOMZ1,C_1 o MOMY1,C_1) es utilizado para definir la nueva secante de apoyo en la iteración, cuya intersección con la horizontal definirá una nueva curvatura C_2.

e) Se prosigue hasta conseguir esa "primera convergencia"; se comprueba la diferencia entre las componentes complementarias del momento interior y exterior.

f) Si es admisible, se ha llegado a la "convergencia total" y la curvatura, deformación base del plano, y orientación de la F.N. obtenidas, definen las deformaciones generalizadas buscadas.

g) Si después de una primera convergencia no se verifica la convergencia total, se cambia el ángulo de la fibra neutra, reiniciando el ciclo desde el punto "a".

Cuando no existe solución, el resultado del proceso es una situación de agotamiento.

7.5.2.1. Elección del Diagrama de Iteración

La elección de la componente del momento que va a definir el diagrama sobre el que se itera, depende de la orientación de la fibra neutra "α" respecto a los ejes OZ u OY. Las curvas para la componente según OZ, correspondientes a valores de ALFA entre 0 y 180°, no tienen el mismo carácter. Para valores de la orientación de la F.N. próximos al eje transversal OZ, las líneas son monótonas, con su valor absoluto máximo en el extremo de agotamiento. Para valores próximos al eje OY, las curvas dejan de ser monótonas, y presentan un máximo antes del agotamiento. Cuanto más se acercan al eje OY, tienden a tener un trazado sub-horizontal y a perder su "estabilidad", en el sentido de presentar ondulaciones espúreas, ya

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

que los puntos que se van obteniendo son fruto de un proceso en el que no se llega a una solución exacta. Esta configuración se debe a que en las orientaciones próximas a 90°, la contribución al momento según OZ de cada semiespacio de la sección, a uno y otro lado de la fibra neutra, es de valor parecido y signo contrario, por la simetría respecto de OY, con lo que las tolerancias de convergencia producen pequeñas desviaciones respecto de la curva continua teórica, dándole el "aspecto" ondulado (Figura 43).

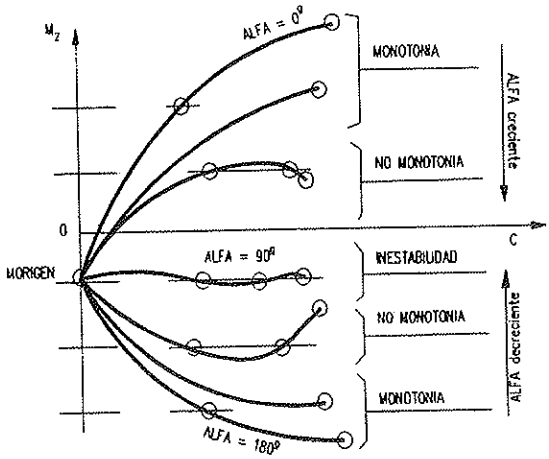


Figura 43. Carácter de las líneas del diagrama M-C-N.

La intersección con una horizontal de una curva monótona es única. Si no hay monotonía, la solución es doble, a partir de un cierto valor del momento exterior, y la solución obtenida depende de la elección de la recta secante de iteración inicial. Si la curva es "inestable", o sub-horizontal, resulta imposible llegar a la intersección. Debido a ello, es preciso arbitrar otro procedimiento iterativo distinto del de secantes interiores, si la curva no es monótona, y evitar las iteraciones en la zona de "inestabilidad". Un claro ejemplo de esta situación lo ofrece una sección bisimétrica (Figura 44). Para la fibra neutra orientada a 90°, la componente del momento según el eje OZ es siempre cero, desde una curvatura nula hasta la curvatura última (Figura 44). Nunca se podrá resolver el caso en que la terna de esfuerzos exteriores es: N, $M_z = O$, M_y, iterando en un diagrama basado en la componente OZ.

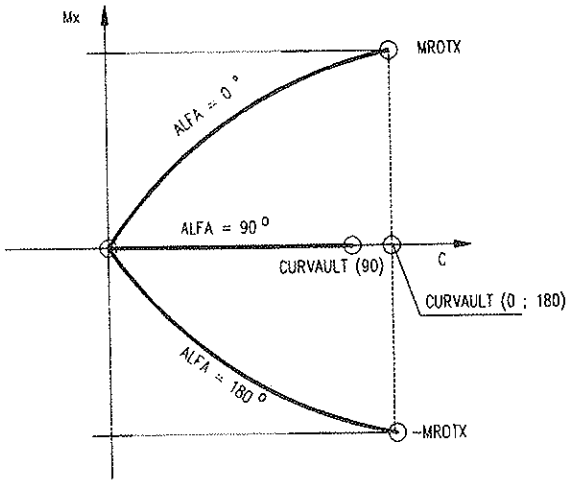


Figura 44. Diagrama M_z – C para sección bi-simétrica.

Esta horizontal, o en otros casos, la zona de "inestabilidad sub-horizontal", constituyen barreras que impiden la progresión de las iteraciones en las que el valor de la orientación de la fibra neutra debe cruzar más allá de aquellas orientaciones para las que aparece. Sin embargo, si se toma el momento complementario como base del diagrama, resultan curvas cuyo carácter es el opuesto a las anteriores, es decir, monótonas y numéricamente bien definidas en las proximidades de ALFA = 90°. Por ello, en esa zona, donde la sección responde más claramente a las variaciones de la componente M_y, se cambia de criterio y se analiza la "primera convergencia" en M_y, comprobando después si hay convergencia en M_z. Se identifica si la línea del diagrama con la que se va a iterar corresponde a una zona de inestabilidad, en cuyo caso debe adoptarse el correspondiente a la componente concomitante.

Después de una serie de ensayos numéricos sobre distintas configuraciones de sección, se ha optado por fijar de modo empírico los límites de la zona de inestabilidad, para orientaciones de la fibra neutra en el

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

interior de un huso de *mas menos Treinta grados* alrededor del eje OY (Figura 45).

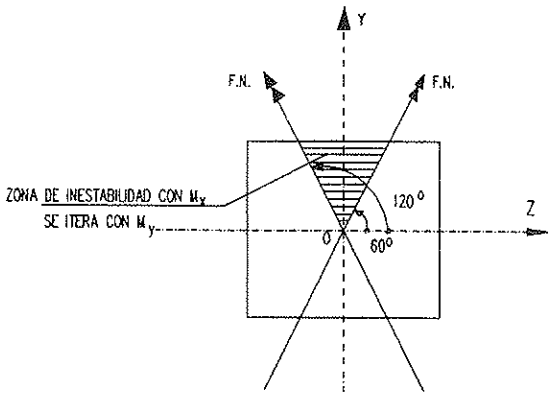


Figura 45. Zona de Curvas con inestabilidad.

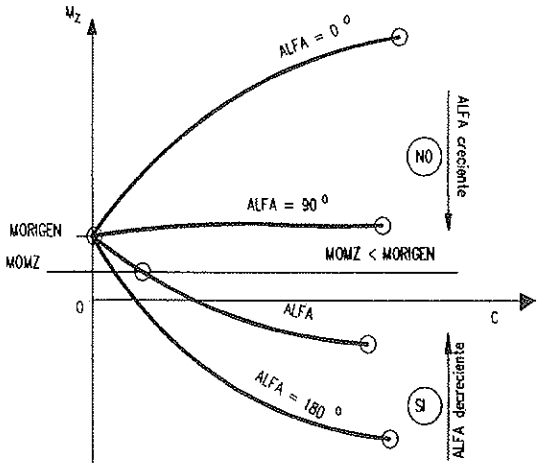


Figura 46. Origen y avance de la Orientación de la F.N.

7.5.2.2. *Orientación inicial y valor del incremento de ALFA*

Para aumentar la velocidad de convergencia, es conveniente partir de la orientación más próxima a la final, evitando atravesar la zona de inestabilidad si la convergencia se verifica al otro lado de la misma.

Partiendo de ALFA = 0°, si el momento M_z exterior (MOMZ), es positivo, y *menor* que el momento origen, MORIGENZ, es mucho más rápido iniciar con uua orientación de 180° y reducir el ángulo en las iteraciones sucesivas. De modo análogo ocurre con los valores negativos. Por lo tanto, además del signo del momento exterior, se compara su valor absoluto con el del origen; y si es inferior a éste, las iteraciones comienzan con las que producen el máximo de signo contrario. El valor del incremento (o decremento) del ángulo, adopta una cifra variable según sea la fase de iteración (Figura 46). El valor inicial es de 15°, cifra que se mantiene hasta llegar a la primera convergencia, a partir de la cual toma un valor mitad del anterior, en cada nueva iteración.

El criterio para definir el sentido del incremento angular se deduce del hecho de que a medida que la orientación se aproxima a 90° aumenta la capacidad de la sección para generar momentos según el eje OY, y disminuye el valor de los momentos positivos según OZ. Estos invierten su signo y aumentan en valor absoluto, a medida que nos acercamos a los 180°.

7.5.2.3. *Identificación de diagramas NO MONOTONOS*

Si la intersección de la recta representativa del momento exterior con la secante que une el origen y el final de una curva, sobre la que se va a empezar una iteración, proporciona una curvatura (CURVA) superior a la de agotamiento (CURVAULT), existe la posibilidad de que el diagrama sea no monótono, como puede verse en la Figura 47. En

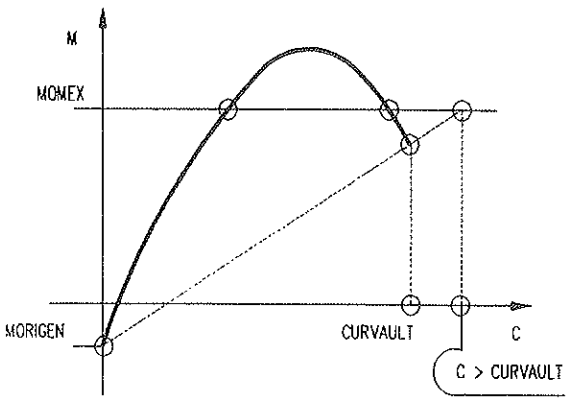


Figura 47. Diagrama No Monótono.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

ese caso, se comprueba si el diagrama es o no monótono, para adoptar el procedimiento de iteración adecuado. La no monotonía se identifica por el signo de las tangentes en el origen y en el final, lo que equivale (dado que no existe definición analítica de la curva), a obtener dos secantes por puntos suficientemente próximos a los anteriores.

7.5.2.4. Proceso de iteración en diagramas MONOTONOS

En diagramas monótonos, la iteración para conseguir la primera convergencia se efectúa con rectas secantes interiores, partiendo de la definida por los puntos origen y final, según 7.5.2. Si la horizontal representativa del momento exterior no corta la línea de ángulo ALFA, la intersección con la secante inicial dará lugar a una curvatura negativa, o a una curvatura mayor que la última. En el primer caso, esa orientación no es válida; pero puede existir otra en que exista primera convergencia, por lo que se procede a incrementar el ángulo y se prosigue con el nuevo ciclo. El segundo caso origina las situaciones que se recogen en la Figura 48. En la situación I se ha llegado a la curva *ALFA = 90°*, a partir de 0° o de 180°, por lo que el diagrama se basa en el momento M_y. Como el punto final es el máximo momento respuesta de la sección, según el eje OY, hay agotamiento.

En la situación II si el diagrama está referido a M_y, pero la orientación no es de 90°, puede existir solución para un ALFA más próximo a los 90°. Se cambia al siguiente diagrama de mayor ángulo de orientación de la F.N.

En la situación III, se itera con diagrama de M_z. Si el momento exterior es positivo y se ha ido incrementando ALFA desde 0°, puede existir solución en otra curva de valor más próximo a este límite. Por lo tanto, se reduce el ángulo de orientación y se generan los puntos de la curva correspondiente, sobre los que se reinicia la iteración. El decremento del ángulo debe ser menor que el incremento anterior, ya que si no fuera así obtendríamos una curva sobre la que ya hemos iterado. Se adopta un valor mitad del valor absoluto del incremento anterior. Si el ángulo es de 0° y el momento exterior MOMZ es superior al de agotamiento para esa curva, hay agotamiento. Se procede de forma análoga si el momento exterior es negativo, cambiando los límites de 0° por 180°, y el sentido de los incrementos.

7.5.2.5. Proceso iterativo en diagramas No Monótonos

Cuando la comprobación de No Monotonía es positiva, es preciso realizar una doble comprobación de primera convergencia,

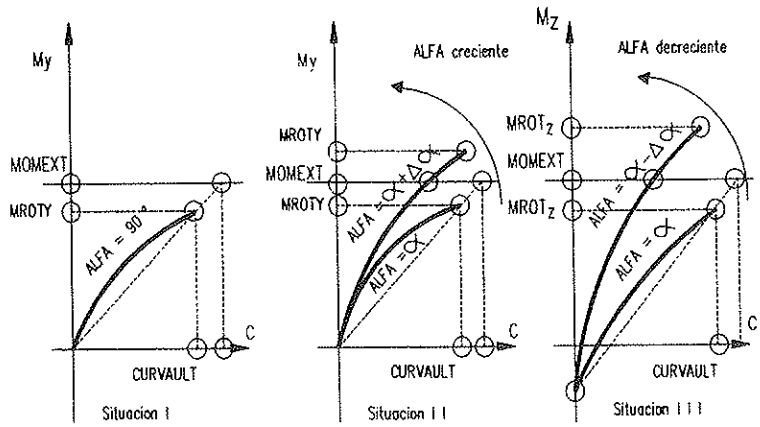


Figura 48. Situaciones en diagramas Monótonos en que la variable CURVA supera a C. Ultima.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

antes de abandonar la curva con la que se itera para pasar a otra. Un proceso basado en la secante que une los puntos origen y final, sólo proporcionaría una de las dos intersecciones. Esto se evita utilizando, primero una serie de secantes que pasen siempre por el punto origen, y después otra serie que lo haga por el punto final. La primera serie conducirá a la convergencia en el punto de menor curvatura, en tanto que la segunda lo hará hacia el de mayor. Para definir estas secantes se necesitan otros dos puntos, además de los conocidos en el origen y el final de la curva. Se calculan, por tanto, los momentos para curvaturas preestablecidas próximas a cero y a la de agotamiento, con valores de .01*CURVAULT y .99*CURVAULT, respectivamente. Partiendo de la secante que pasa por el origen, se busca una primera convergencia. Si ésta no existe, la iteración progresará hasta que la curvatura correspondiente a la intersección con la horizontal sea superior a CURVAULT, en cuyo caso se procederá a tantear con otro diagrama correspondiente a una orientación incrementada.

En la Figura 49 se describe este caso.

Al producirse una primera convergencia con la familia de secantes que pasa por el origen, si ésta no es además solución total, se procede a utilizar la familia de secantes desde el extremo. Si no hay una segunda intersección con la línea, se obtendrá una curvatura superior a la última, lo que será

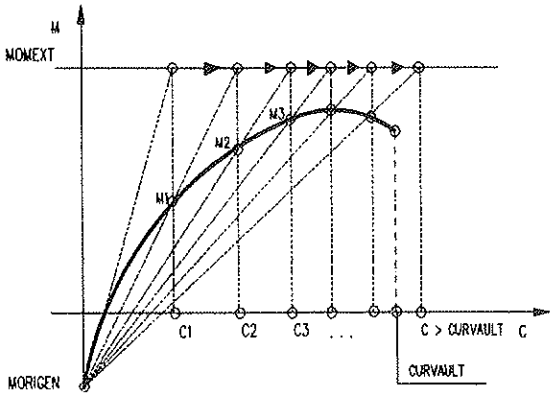


Figura 49. Diagrama No Monótono sin 1.ª convergencia.

señal de que debe procederse con otra orientación. Si la hay, pero el momento complementario no está suficientemente próximo al valor exterior, se abandona también la curva, buscando la de otra orientación, incrementando o reduciendo el ángulo ALFA. Eventualmente, puede seguir un diagrama monótono a otro no monótono, bien porque se cambie el momento base de iteración al entrar en zona de inestabilidad, bien porque la nueva orientación de la fibra neutra después de un incremento en sentido contrario al de avance hacia 90°, cambie su carácter.

En la figura 50 se representa gráficamente el proceso iterativo.

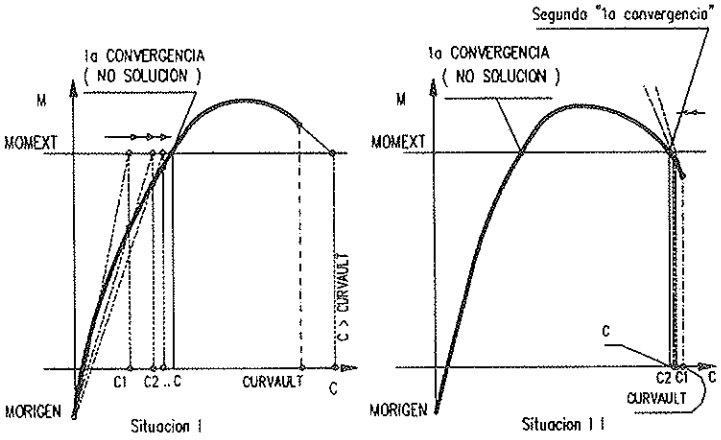


Figura 50. Iteraciones en Diagrama no monótono.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Para los diagramas no monótonos, la situación de agotamiento se caracteriza porque las curvaturas correspondientes a los dos puntos de intersección van aproximándose al mismo valor, sin que en ninguno de ellos se verifique la condición de igualdad entre momentos interior y exterior complementarios, habiéndose mantenido siempre el mismo sentido de las desigualdades en la progresión de iteraciones. En el límite, se obtiene el punto de tangencia de la recta horizontal representativa del valor de primera convergencia, sin que el complementario iguale al correspondiente momento exterior.

7.5.2.6. Casos de Agotamiento

Cuando se detecta una situación de agotamiento, se asignan como deformaciones asociadas a la terna que produce agotamiento, las correspondientes a la curvatura y elongación últimas con las que se estaba iterando cuando ha aparecido la situación de rotura.

El error de este resultado no influye en el proceso, ya que se utilizará en una situación de la estructura de carácter provisional, que podrá cambiar en iteraciones posteriores gracias a una nueva redistribución de esfuerzos. Si esto último no ocurre, y persiste el agotamiento, no se consigue la convergencia del proceso general, progresando el número de secciones que entran en estado último. Se produce una situación de colapso creciente en la estructura, que es señal de que no es capaz de resistir las acciones exteriores con la configuración y armadura con que se ha analizado.

7.6. Bandas de convergencia

El proceso de resolución inverso de la sección, consiste en el encadenamiento de una serie de algoritmos iterativos, cuyos resultados son sólo aproximados, en tanto que no resuelven de forma exacta las ecuaciones simbólicas $F(x) - A = 0$, sino que obtienen un valor de las incógnitas x^*, que se considera válido si cumple la desigualdad $|F(x^*) - A| <= \zeta$. El valor de ζ define una *"banda de convergencia"*. El "ancho" de estas bandas de convergencia establece la precisión del algoritmo global. En nuestro caso, el término independiente A, adopta distintos sentidos físicos en los algoritmos encadenados dentro del proceso global. En el I y en el II es el esfuerzo Axil exterior. En el III es una de las dos componentes del momento exterior sobre los ejes principales.

Si se define la banda de convergencia como producto de un infinitésimo por el valor de esfuerzo, cuando alguno de estos esfuerzos es muy pequeño, o nulo, resulta una cifra extremadamente pequeña que obliga a un número muy elevado de iteraciones, y puede hacer que se pierda la capacidad de convergencia, debido a problemas en lo que llamaremos "encadenamiento de bandas de convergencia".

7.6.1. Encadenamiento de Bandas de Convergencia

Puesto que los valores resultantes de cada iteración en los diagramas, son consecuencia de cálculos numéricos con número finito de dígitos significativos, o en su generación han intervenido otros algoritmos iterativos cuyo resultado es aproximado, no hay continuidad entre dos valores consecutivos $F(x_{i-1})$, $F(x_i)$, resultantes de dos iteraciones sucesivas, sobre dos valores próximos de x.

En tal caso, puede ocurrir que estos valores difieran entre sí más que el ancho de la banda de convergencia, de tal modo que se verifique:

$$F(x_{i-1}) - A < \zeta = \xi * A$$

$$F(x_i) - A > \zeta = \xi * A$$

como se representa en la Figura 51.

Para evitar este problema, si la discontinuidad de los dos valores consecutivos procede de una excesiva tolerancia de otras bandas de algoritmos iterativos anteriores a aquel que se trata de resolver, debe ampliarse la banda actual, o reducirse las anteriores. Este último camino no es deseable, ya que conduce a procesos sumamente lentos.

Por otra parte, si la banda es demasiado pequeña, y se itera con rectas secantes interiores, puede ocurrir que, al ir acercándose

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

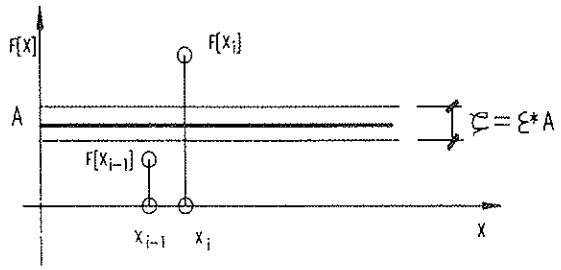


Figura 51. Banda de convergencia demasiado estrecha.

los extremos de la secante a la solución, la diferencia entre abcisas no pueda ser representada con suficiente precisión numérica por el ordenador, con lo que el denominador de la pendiente puede ser notablemente erróneo, e incluso nulo, produciéndose una situación de inestabilidad numérica.

Para solucionar los casos con esfuerzos pequeños o nulos, se establece un límite inferior a las bandas de convergencia, de modo que el algoritmo establece una doble definición de todas ellas, por una parte, proporcionales a los esfuerzos y, por otra, no menor que una cantidad fija:

$$\zeta = \xi * A \; ; \; \zeta > Cte.$$

Las magnitudes mínimas de las bandas dependen de la estructura que se analiza, dejando la posibilidad de ser variadas por el analista, en consonancia con la importancia de los esfuerzos que aparecen sobre ella.

7.6.2. Relación entre Bandas de Convergencia de las componentes M_z y M_y

Al detectar una primera convergencia, p. ej. en M_z, se comprueba si existe también en el complementario M_y. Si queda ligeramente fuera de su banda de convergencia, a pesar de estar próximos a la solución, se cambia la fibra neutra, para obtener otra convergencia: M'_z. Si el nuevo valor del momento asociado, M^*_y, difiere del anterior lo suficiente para sobrepasar su banda, el algoritmo puede entrar en un proceso de oscilación alrededor de la banda que, si es muy estrecha, puede prolongarse durante un tiempo inadmisible, o incluso no llegar nunca a la convergencia. Los puntos de convergencia en M_z, a la izquierda de S_3 o a la derecha de S_4 en la Figura 52, no pueden producir convergencia total, debido a la estrechez de la banda de M_y, de tal modo que si el escalón incremental de curvaturas hace saltar la primera convergencia de una a otra zona, no se llega a la solución.

En el método se definen bandas de convergencia en consonancia con la importancia relativa de las dos componentes del momento, tanto en los factores de proporcionalidad como en los límites inferiores.

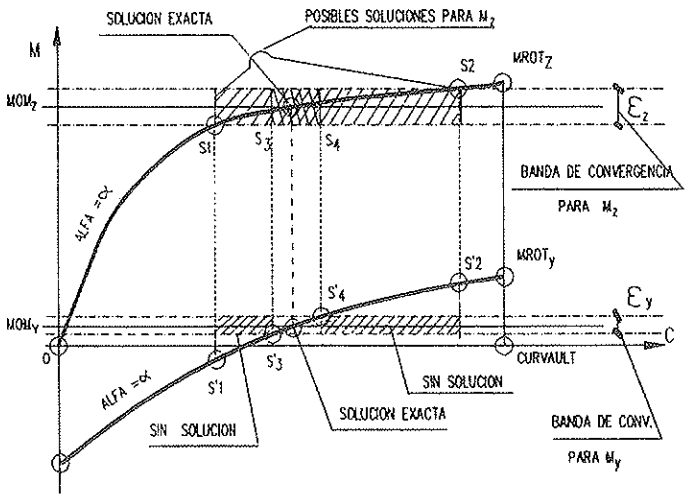


Figura 52. Zonas de indeterminación de convergencia.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

7.6.3. Mecanismos de Escape

Cuando el número de iteraciones en cualquiera de los diagramas supera un valor determinado, o cuando los incrementos angulares de la orientación de la fibra neutra se reducen por debajo de un valor muy pequeño, se aborta la iteración, adoptando como solución los últimos valores obtenidos; y se envía un mensaje de advertencia de problemas de convergencia. Estos pueden desaparecer de forma automática en la siguiente pasada, con valores ligeramente diferentes de los causantes del problema. Si ello no es así, pueden alterarse las bandas de convergencia.

8. TRATAMIENTO DE LOS PROBLEMAS DE FLUENCIA

8.1. La deformación que en un instante de tiempo, t, existe sobre un sub-elemento de hormigón, se compone de dos términos: la debida a la actuación instantánea de las cargas, llamada "deformación mecánica", y la procedente de los fenómenos reológicos y de la temperatura, conocida como "deformación no mecánica". La formulación de este principio es:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{m}(t) + \varepsilon^{nm}(t) \qquad (8.1)$$

que se corresponde con un modelo físico del hormigón, formado por partículas sólidas rodeadas por un fluido que se elimina con el paso del tiempo. Se supone que el agotamiento se alcanza cuando la deformación mecánica, sobre un diagrama instantáneo, alcanza el valor de rotura, que corresponde al fenómeno de colapsamiento del esqueleto sólido. (Scordelis y Kant en "Nonlinear Analisis of Prestressed Concrete Frames" ASCE Feb. 1980).

Los efectos de un sistema de acciones constantes, con fluencia, se determinan utilizando el diagrama afín. Puede calcularse el incremento por fluencia, entre dos instantes t_1 y t_0, a través de la diferencia entre dos cálculos. Supóngase el caso en que actúan unas acciones, A^0, en $t = t_0$ hasta el instante $t = t_1$. Sea Φ_{t1} el coeficiente de fluencia que corresponde al intervalo $t_0 - t_1$. Utilizando el algoritmo con un diagrama de tensión - deformación para el hormigón, con la afinidad $(1 + \Phi_{t1})$ en las deformaciones, obtendríamos los esfuerzos, deformaciones generalizadas y desplazamientos, considerando la fluencia $(E_0^1\ ,\ \varepsilon_0^1\ ,d_0^1)$. Repitiendo el análisis con el diagrama instantáneo, obtendríamos la configuración de la estructura sin fluencia $(E_0^0\ ,\ \varepsilon_0^0\ ,d_0^0)$. La diferencia entre ambos resultados sería la acción de la fluencia:

$$E^f = E_0^1 - E_0^0\ ;\ \Delta\varepsilon^f = \varepsilon_0^1 - \varepsilon_0^0\ ;$$
$$d^f = d_0^1 - d_0^0 \qquad (8.2)$$

Las deformaciones $\Delta\varepsilon^f$ (elongaciones y curvaturas), corresponden a la parte "no mecánica", más la "mecánica" debida a los esfuerzos de fluencia. En una estructura isostática, la última contribución sería nula.

8.2. Se obtienen las deformaciones mecánicas debidas a la fluencia, calculando la estructura con un escalón de carga ficticia (carga nula), utilizando el diagrama $\sigma - \varepsilon$ instantáneo, con unos esfuerzos del estado de partida iguales a los de las cargas con fluencia.

8.3. El resultado de la aplicación de un nuevo escalón de cargas instantáneas (A^1), después de desarrollarse la fluencia, puede obtenerse suponiendo que sobre el esqueleto sólido se producirán las deformaciones correspondientes a unos esfuerzos iguales a los previos (los de las acciones iniciales, A^0, con su fluencia) más el incremento debido al escalón. Las deformaciones de la sección se obtienen sumando las de fluencia, que no se deben al medio sólido, con las creadas sobre éste por un plano que genera los esfuerzos totales acumulados. Con esta hipótesis, la variación de las elongaciones y curvaturas de la sección quedará determinada por el diagrama de tensión - deformación instantáneo.

El procedimiento consiste en considerar como esfuerzos, y desplazamientos previos, los totales (con fluencia) de la etapa anterior, pero asignando a cada sección tan solo sus deformaciones generalizadas mecánicas, obtenidas de acuerdo con lo dicho en 8.1. Se calculan los esfuerzos de primer Orden del nuevo escalón de carga, y se acumulan. Aplicando el algoritmo con el diagrama instantáneo, se obtienen las deformaciones, que se

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

comparan con las mecánicas precedentes, para establecer las correcciones de congruencia. Así se prosigue hasta la convergencia. Los desplazamientos reales se obtienen sumando el efecto de las deformaciones mecánicas al de las de fluencia, lo que se hace automáticamente al haber tomado como estado anterior la geometría con fluencia.

El algoritmo procede en la forma habitual en las etapas iterativas siguientes, y en caso de producirse una situación de agotamiento, queda determinada porque se sobrepasa la deformación última sobre el diagrama tensión-deformación instantáneo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Aguado, A. y Murcia, J.: *Análisis no lineal de Estructuras a partir de deformaciones impuestas.* "Revista Hormigón y Acero", números 136 y 137.

2. Bazant, Z. y Byung, H.: *Deformation of Progressively cracking of reinforced concrete beams.* "ACI Journal". Mayo 1984, pp. 268/278.

3. Julia Vilardell, M.: *Método de Análisis no Lineal para estructuras hiperestáticas.* Escuela de Caminos, U.P. de Madrid, 1992.

4. Kang, Y. & Scordelis, F.: *Nonlinear Analisis of Prestressed Concrete Frames.* "Revista ASCE". Febrero 1980, pp. 445/461.

5. Mari, A. R.: *Modelos Unidimensionales para el análisis no lineal en el tiempo de estructuras de hormigón armado y pretensado.* "Grupo Español del Hormigón". Comisión II. Junio 1989.

6. Villegas, L. y Arenas, J. J.: *Diagramas Axil-Momento-Curvaturas en una sección de hormigón armado solicitada por una flexocompresión plana o biaxial.* "Revista Hormigón y Acero", número 148.

7. Villegas, L. y Arenas, J. J.: *Estudio de una pila esbelta en ménsula de hormigón armado.* "Revista Hormigón y Acero", números 149, 152 y 153.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

CURSOS DE ESPECIALIZACION 1998
INTEMAC

PRESENTACION

Los CURSOS DE ESPECIALIZACION DE INTEMAC se basan en seis aspectos esenciales:

1. Tratan siempre de temas de interés directo, con inmediata aplicación en la situación actual de la Construcción en España.
2. El número máximo de participantes es de 20 con objeto de permitir coloquios e intercambios de opiniones realmente eficaces.
3. Se imparten por conjuntos de profesores, normalmente del propio Instituto, adecuadamente coordinados y con una amplia experiencia de cada tema en concreto.
4. El curso se apoya en una documentación completa sobre la cuestión.
5. Su **duración** –una semana de lunes a viernes– y su **horario** –de 18,00 a 20,45 horas– son fácilmente compatibles con el trabajo profesional.
6. **Lugar de celebración**: Los cursos se celebrarán en la Sala de Conferencias existente en las Oficinas de Intemac, en Madrid, C/ Monte Esquinza, 30, 4.º izq.

A-ESTRUCTURAS:
Curso C-4

1998: 19 al 23 de enero.
Plazo límite de inscripción: 2 de enero.
"Criterios teóricos y prácticos para cimbrado y descimbrado rápido de estructuras".
Profesores: J. Calavera y J. Fernández Gómez.

Curso C-5

1998: 2 al 6 de febrero.
Plazo límite de inscripción: 23 de enero.
"Cálculo, detalles constructivos y proceso de ejecución de depósitos, tanques y piscinas".
Profesores: J. Calavera y E. González Valle.

B-ESTRUCTURAS METALICAS:
Curso C-6

1998: 20 al 24 de abril.
Plazo límite de inscripción: 25 de marzo.
"Control y patología de estructuras metálicas".
Profesores: E. González Valle; J. Jordán de Urríes; J. J. Benito y R. Alvarez Cabal.

C-OBRAS MARITIMAS:
Curso C-7

1998: 16 al 20 de febrero.
Plazo límite de inscripción: 30 de enero.
"La durabilidad como aspecto básico del proyecto, los materiales, la ejecución y el mantenimiento de las obras marítimas".
Profesores: J. Calavera; E. González Valle; L. Sanz; J. M. Izquierdo y P. López.

D-CARRETERAS Y FERROCARRILES:
Curso C-8

1998: 2 al 6 de marzo.
Plazo límite de inscripción: 13 de febrero.
"Muros de contención *in situ* y prefabricados. Proyecto, cálculo y ejecución. Aspectos estéticos de los muros".
Profesores: J. Calavera; E. González Valle y J. Cortés.

E-ALBAÑILERIA:
Curso C-9

1998: 23 al 27 de marzo.
Plazo límite de inscripción: 6 de marzo.
"Drenaje de plantas bajas e impermeabilización de sótanos en edificios".
Profesores: J. Calavera; J. M. Luzón; J. Jalvo y J. Tapia.

Curso C-10

1998: 4 al 8 de mayo.
Plazo límite de inscripción: 17 de abril.
"Detalles básicos y aspectos críticos relacionados con la estanqueidad de cerramientos, carpintería exterior, cubiertas y azoteas".
Profesores: J. Jordán de Urríes; J. Jalvo; J. M. Luzón y A. Muñoz.

F-INSTALACIONES:
Curso C-11

1998: 25 al 29 de mayo.
Plazo límite de inscripción: 8 de mayo.
"Conceptos básicos y defectos críticos en el proyecto y ejecución de instalaciones de climatización".
Profesores: F. Valenciano; J. Bueno y J. L. Ramírez.

Inscripciones e información:

C/ Monte Esquinza, 28, 2.º D. 28010 Madrid.
Tel.: (91) 310 51 58. Fax: (91) 308 36 09
E-mail: intemac@intemac.es

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

Dimensionamiento automático de estribos de puentes

Valérie Gayraud
Ingeniero École Centrale de París
Celso Iglesias
Dr. Ingeniero de Caminos, MSOA (ENPC)
Profesor asociado Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales
ETS de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

Este trabajo es el resumen de los principales resultados de un proyecto fin de carrera desarrollado en el Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid, con la colaboración de Carlos Fernández Casado, S.L., empresa a la que agradecemos la ayuda prestada durante los seis meses de duración del proyecto.

El trabajo desarrollado se inscribe dentro de los programas de intercambio de alumnos que la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid realiza con la École Centrale de París.

2. OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo del trabajo era la implementación de un programa informático que concibe, proyecta y calcula estribos de puentes.

3. ANTECEDENTES

El intento más clásico y conocido de sistematización del proyecto de estribos, corresponde al documento del SETRA, C. T. 66 (Culées type), que trata el caso de estribos para tableros con reacciones verticales. Con objeto de poder adaptar el estribo en estudio a las condiciones del puente, se resuelve el problema mediante un predimensionamiento, para el que el C.T. 66 contiene una serie de organigramas y esquemas de geometría y armadura, que constituyen una referencia inexcusable para aquel que desee plantearse una metodología completa del problema. No obstante, es evidente que el planteamiento del C.T. 66 corresponde a una época de pre-ordenador.

En España, destaca el trabajo de Ramos-Casas (1991), desarrollado en la Universidad de Barcelona, que presenta un sistema de proyecto, asistido por ordenador, de estribos de puentes de tramo recto, así como su cálculo, medición y valoración económica.

4. JUSTIFICACION DEL TRABAJO

El estribo es un elemento de difícil proyecto, por culpa de su complejidad estructural y del número importante de factores que entran en juego en su concepción.

Por supuesto, la informatización del cálculo de estructuras permite ahorrar tiempo y

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

dinero. Sin embargo, los programas comerciales de cálculo de estribos de puentes dejan de lado, por lo menos en lo que nosotros conocíamos antes de iniciar este trabajo, un dato importante: la forma del terreno. A la hora de proyectar un estribo singular, esta singularidad no sólo radica en sus dimensiones o en sus elementos, sino también en la morfología del terreno en que se apoya.

El presente proyecto pretendía introducir, en el dimensionamiento del estribo, los datos topográficos y el eje de trazado del puente.

Por supuesto, no se trataba de escribir un programa capaz de calcular y dibujar cualquier tipo de estribo, por ser un trabajo demasiado ambicioso, dado el importante número de tipologías de estribos existentes, sin hablar de las variantes que aparecen en cada caso particular.

El planteamiento de un trabajo como éste se justifica, por tanto, por los motivos siguientes:

1.° *Reducción de los tiempos de predimensionamiento y diseño en la práctica diaria de una oficina de proyectos.* Debe tenderse a un proyecto paralelo de estribos y tableros, utilizando las herramientas CAD actuales. En la práctica habitual, el proyectista tiende a centrar sus esfuerzos en el cálculo del tablero, dejando para el último momento los estribos. Psicológicamente, cree haber acabado el proyecto cuando termina el cálculo del tablero y obtiene planos de ejecución del mismo. En realidad, el proyecto y cálculo de los estribos, aunque son elementos conceptualmente simples, puede llevarle el mismo tiempo, con una "satisfacción intelectual" bastante menor.

2.° *Utilización de paquetes de datos consistentes, para el proyecto de los estribos y modificaciones de "última hora".* La utilización de bloques de datos con manejo automático, tal como topografía del terreno, permite disminuir los riesgos de posibles errores y facilita las modificaciones de "última hora", haciéndolas posible, de forma rápida y económica, para la Oficina de Proyectos.

3.° *Optimización del proyecto de los estribos.* Disponer de un sistema integrado de datos a partir de los cuales se genera automáticamente el estribo, permite, por prueba-error, optimizar su proyecto.

4.° *Creación de librerías de estribos.* Dentro de una filosofía como la descrita, sería interesante crear modelos paramétricos de muchos estribos de tipologías diferentes. El proceso sería entonces, elegir de forma rápida una de estas tipologías y, de acuerdo con el paquete de datos consistente (topografía) obtener un modelo de estribo completo.

5.° *Visualización de los resultados.* El objetivo final de un programa de este tipo, interactivo con una librería de estribos, pero completamente automático desde la comunicación del paquete de datos consistentes (topografía donde se implanta el estribo) tiene que ser doble:

Primero: Obtención de los planos de ejecución del estribo, planos de geometría y planos de armadura.

Segundo: Obtención automática de los planos de despiece de armadura y su medición completa (kg de acero, m^3 de hormigón).

6.° *Flexibilidad de los resultados.* Puede suceder que, en determinadas tipologías muy complicadas, sea preciso interaccionar con los planos obtenidos en el apartado anterior. En cualquier caso, siempre es más fácil modificar geometría y armadura sobre un plano existente "muy parecido" a la solución final, que crear "ex-novo".

5. PLANTEAMIENTO

El trabajo se compone de dos partes distintas: proyecto o dimensionamiento y cálculo, que está programado en lenguaje FORTRAN; y un programa en lenguaje CADKEY que se encarga del entorno del usuario (entrada de datos, visualización de resultados).

5.1. El programa FORTRAN

El programa FORTRAN se encarga de dimensionar el estribo, armarlo y dibujarlo en un fichero CADKEY para visualizar los

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

resultados. Las hipótesis de cálculo y el esquema de funcionamiento del programa, se detallan a continuación.

Tipologías de estribos

Se limita el presente proyecto a concebir tres tipos de estribos:

1. Estribos cerrados, de muro frontal, con aletas en vuelta.

2. Estribos cerrados, de muro frontal, con muros en vuelta.

3. Estribos cerrados, con contrafuertes.

En una segunda fase, se limitó el estudio al problema de los estribos cerrados, con aletas en vuelta y cimentaciones superficiales, pensando que era mucho más importante establecer la metodología completa, llegando hasta el final, dado el escaso plazo de tiempo.

Para cubrir ampliamente la gran mayoría de estribos que usualmente se proyectan, bastaría con tratar también los estribos abiertos y los estribos flotantes, y prever, para los estribos ya estudiados, cimentaciones profundas.

Por supuesto, existen más posibilidades de proyecto, como por ejemplo los estribos anclados al terreno, los estribos contrapesados, los estribos en los que se independiza el apoyo del tablero de la contención de tierras, los estribos huecos... Pero, aunque la lista sea prolija, la importancia de estas tipologías es relativa. En efecto, el porcentaje de estos estribos es pequeño y la complejidad de estos casos justifica, de todas formas, un estudio detallado.

Dimensionamiento: Criterios geométricos básicos

La longitud D, se fija en un valor de partida y está condicionada, sobre todo, por la estabilidad global del estribo y por la respuesta del terreno, de modo que exista seguridad frente al vuelco y al deslizamiento. Por tanto, se ha seguido el esquema de proyecto siguiente (Figura 1):

1. Tanteo de la zapata, muro frontal y murete de guarda, según los criterios geométricos anteriores y de forma que se cumplan los resguardos respecto al borde del terreno.

2. Evaluación de las acciones debidas a las tierras, tablero y peso propio, sobre el estribo así tanteado.

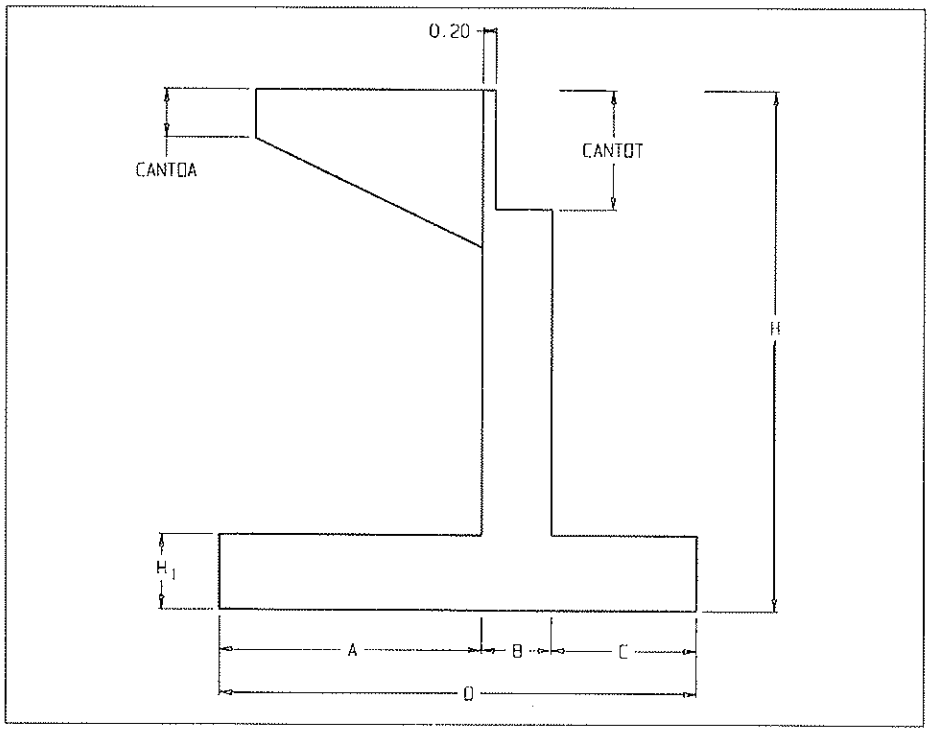


Fig. 1. Geometría básica del estribo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

3. Comprobación de los Estados Límite Ultimos de deslizamiento, vuelco y plastificación del terreno.

4. Si no se cumplen, aumento de la longitud A del talón, en un 10%, hasta conseguir verificar el punto anterior.

Etapas del programa

1. La primera etapa del programa es colocar la zapata de forma que se cumplan los resguardos geométricos. Por eso, los únicos datos son los levantamientos topográficos y el trazado del puente. Se guardan, de éstos, tres perfiles: un perfil que sigue el borde izquierdo del puente, otro el eje central de éste, y el último su borde derecho.

2. Puesto que el trazado del puente no es necesariamente recto, para desarrollar los cálculos de distancias, se proyectan los perfiles sobre planos. Por eso, es necesario seleccionar algunos puntos de interpolación, pertenecientes a los diferentes perfiles citados, en la zona del estribo.

3. Al colocar la zapata, se comprueban los resguardos en tres planos: el del perfil izquierdo, el del central y el del perfil derecho.

4. El usuario, fija el denominado punto A, punto del eje del trazado coincidente con el eje del estribo, situado en el eje del puente a la altura del pavimento. Se traduce este punto en coordenadas ficticias.

5. Una vez obtenidos estos perfiles desarrollados y el punto A, se posiciona la zapata con la relación:

$$H = \frac{cota + RV}{0{,}86}$$

donde H es la altura total del estribo, *"cota"* es la distancia del punto A al perfil central desarrollado y RV el valor límite del resguardo vertical (Figura 2).

Se dimensiona la zapata a partir del único valor H, con los criterios previamente descritos, comprobando a continuación los resguardos geométricos:

- RV (resguardo vertical): Distancia entre el vértice superior de la puntera de la zapata y el perfil del terreno.
- RH (resguardo horizontal): Distancia entre el vértice y el perfil.

El usuario, fija los valores límite de estos resguardos. Si las distancias obtenidas son inferiores, se aumenta H, hasta que se cumplen los resguardos previstos.

6. Una vez posicionada la zapata, se evalúan las cargas que actúan sobre el estribo y

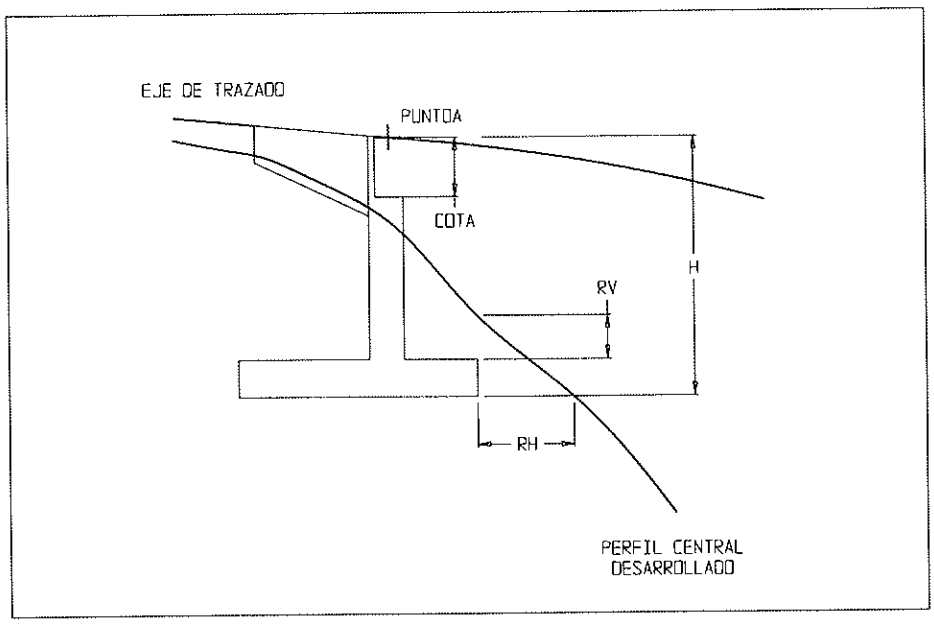


Fig. 2. Condicionantes geométricos para implantar el estribo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

se comprueba éste estructuralmente. La primera verificación se refiere a la estabilidad global del estribo. Si uno de los coeficientes de seguridad al vuelco o al deslizamiento no se cumplen, se modifica la zapata, aumentando A (longitud del talón), si A < H, o aumentando H, y en consecuencia A también, si A > > H. Sin embargo, se recomienda una altura H < 10 m. Cuando la altura del estribo supera los 10 m, o bien el punto A está mal elegido, o la solución puede ser el utilizar contrafuertes. Si H supera los 10 m, al posicionar la zapata, sin duda se debe cambiar el punto A. Si H llega a este valor al comprobar los coeficientes de seguridad, se recomienda prever contrafuertes. Puede, sin embargo, probarse de nuevo cambiando A.

7. Armado del estribo: Para nombrar las diferentes armaduras, se ha usado una nomenclatura basada en letras. El significado de las mismas es (Figura 3):

Elementos horizontales:

Letra A = longitudinal superior
Letra B = longitudinal inferior
Letra C = transversal superior
Letra D = transversal inferior

Elementos verticales:

Letra A = horizontal interior
Letra B = horizontal exterior
Letra C = vertical interior
Letra D = vertical exterior

El programa calcula primero el área de cada armadura, según una serie de criterios habituales en el proyecto de este tipo de estructuras, y luego evalúa ésta, en número de redondos y separación correspondiente de éstos.

El estribo y su armado se visualizan mediante un fichero de tipo fi. cdl en el CADKEY. Este fichero contiene los 6 planos siguientes representativos del estribo:

- Plano «Geometría-Sección".
- Plano "Geometría-Alzado"
- Plano "Geometría-Planta"
- Plano "Armadura-Sección"
- plano "Armadura-Sección, Detalles"
- plano "Armadura-Alzado, Detalles"

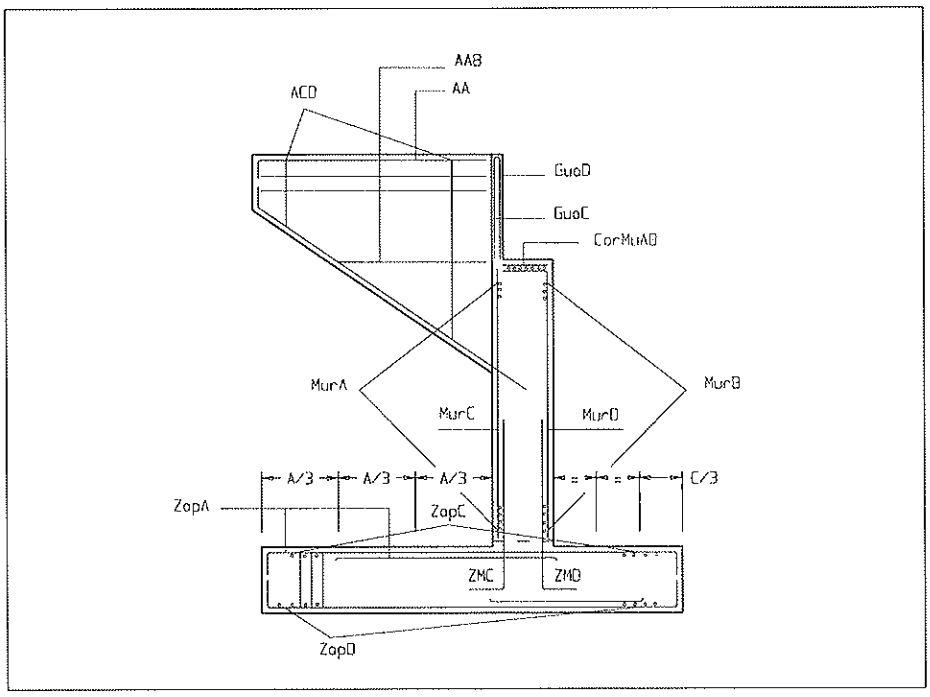
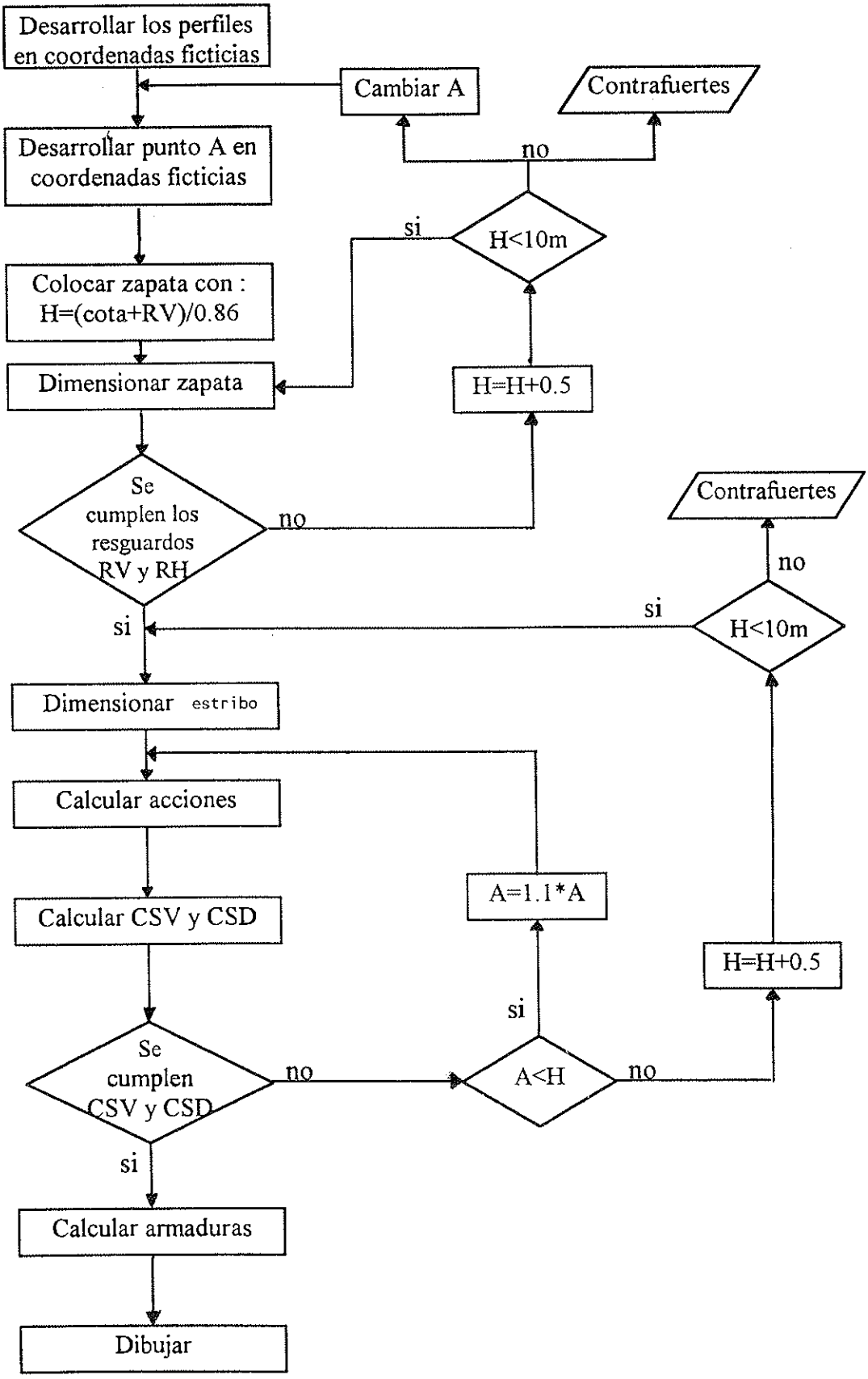


Fig. 3. Armadura del estribo.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



Organigrama del programa FORTRAN

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

5.2. El programa CADKEY

Puesto que el programa FORTRAN va a utilizar datos obtenidos a partir del programa CADKEY, parecía interesante instalar el programa de diseño de manera que el usuario no salga de CADKEY. Al seleccionar el programa "estribo" en el directorio CDL del CADKEY, aparece el menú siguiente:

- ENTRDAT: entrada de datos
- CALCULO
- RESULTA: Salida de resultados

Opción ENTRDAT

Esta opción contiene el submenú siguiente:

- MATERIA: Permite entrar los datos relativos a los materiales utilizados, las acciones del tablero, los resguardos y coeficientes de seguridad que quiere elegir el usuario.
- PERFIZQ: El usuario selecciona los puntos de cálculo del perfil izquierdo.
- PERFCEN: Sirve para seleccionar los puntos de cálculo del perfil central.
- PERFDER: Tiene la misma función que las dos opciones anteriores, para el perfil derecho.
- PUNTOA: Donde se elige el punto A.

Los datos recogidos en este menú se almacenan en ficheros de datos (tipo ".dat") que luego lee el programa FORTRAN.

Veamos ahora con más detalle lo que contiene la opción MATERIA, en donde se piden los siguientes datos:

- a propósito de resguardos y coeficientes de seguridad:
  - resguardo vertical en la puntera de la zapata.
  - resguardo horizontal en la puntera de la zapata.
  - coeficiente de seguridad frente al vuelco.
  - coeficiente de seguridad frente al deslizamiento.
- a propósito del suelo
  - el peso específico
  - la sobrecarga en superficie
  - el ángulo de rozamiento interno
  - tensión de plastificación del suelo de cimentación
- a propósito del hormigón
  - peso específico del hormigón.
  - resistencia característica
  - coeficiente de minoración de su resistencia
- a propósito del acero:
  - resistencia característica
  - coeficiente de minoración de su resistencia
- a propósito de las acciones:
  - acción horizontal total del tablero
  - acción vertical total del tablero
  - excentricidad de aplicación de la acción vertical
- datos geométricos:
  - canto del tablero
  - ancho del tablero.

Opción CALCULO

Esta opción manda el fichero de datos al programa FORTRAN, compila éste y manda los resultados al CADKEY, mediante un fichero de tipo ".cdl", sin abandonar el entorno operativo del programa CADKEY.

Opción RESULTA

Al seleccionar esta opción, el usuario visualiza los resultados. Se trata de dibujos, en dos dimensiones y a escala, de diferentes vistas del estribo, y del detalle del armado de éste. Estos dibujos, en el estado actual del programa, no pretenden constituir los planos definitivos de ejecución. Sólo son un primer esbozo de éstos. El usuario puede ahora utilizar todas las opciones del programa CADKEY para completar o modificar estos dibujos.

6. EJEMPLO DE APLICACION

El ejemplo de aplicación se hace con estos datos:

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

- resguardo vertical, en puntera de zapata = 2 m
- resguardo horizontal, en puntera de zapata = 3 m
- coeficiente de seguridad al vuelco = = 1,75 m
- coeficiente de seguridad al deslizamiento = 2,25 m

- peso específico del suelo = 1,8 t/m³
- sobrecarga sobre el relleno = 2 t/m²
- ángulo de rozamiento interno = 30°
- tensión de plastificación del suelo = = 100 t/m²

- peso específico del hormigón = 2,5 t/m³
- resistencia característica del hormigón = = 200 kp/cm²
- coeficiente de minoración del hormigón = = 1,5

- resistencia característica del acero = = 5100 kp/cm²
- coeficiente de minoración del acero = = 1,15

- acción horizontal total del tablero = 30 t
- acción vertical total del tablero = 300 t
- excentricidad del punto de aplicación de la acción vertical del tablero, respecto al centro del muro frontal = 0,1 m

- canto del tablero = 1,8 m
- ancho del tablero = 10 m

El problema estudiado es un caso real en el que los puntos se eligieron a partir del levantamiento topográfico, en la zona seleccionada para posicionar el estribo, creando automáticamente el fichero de datos (Figuras 4 y 5).

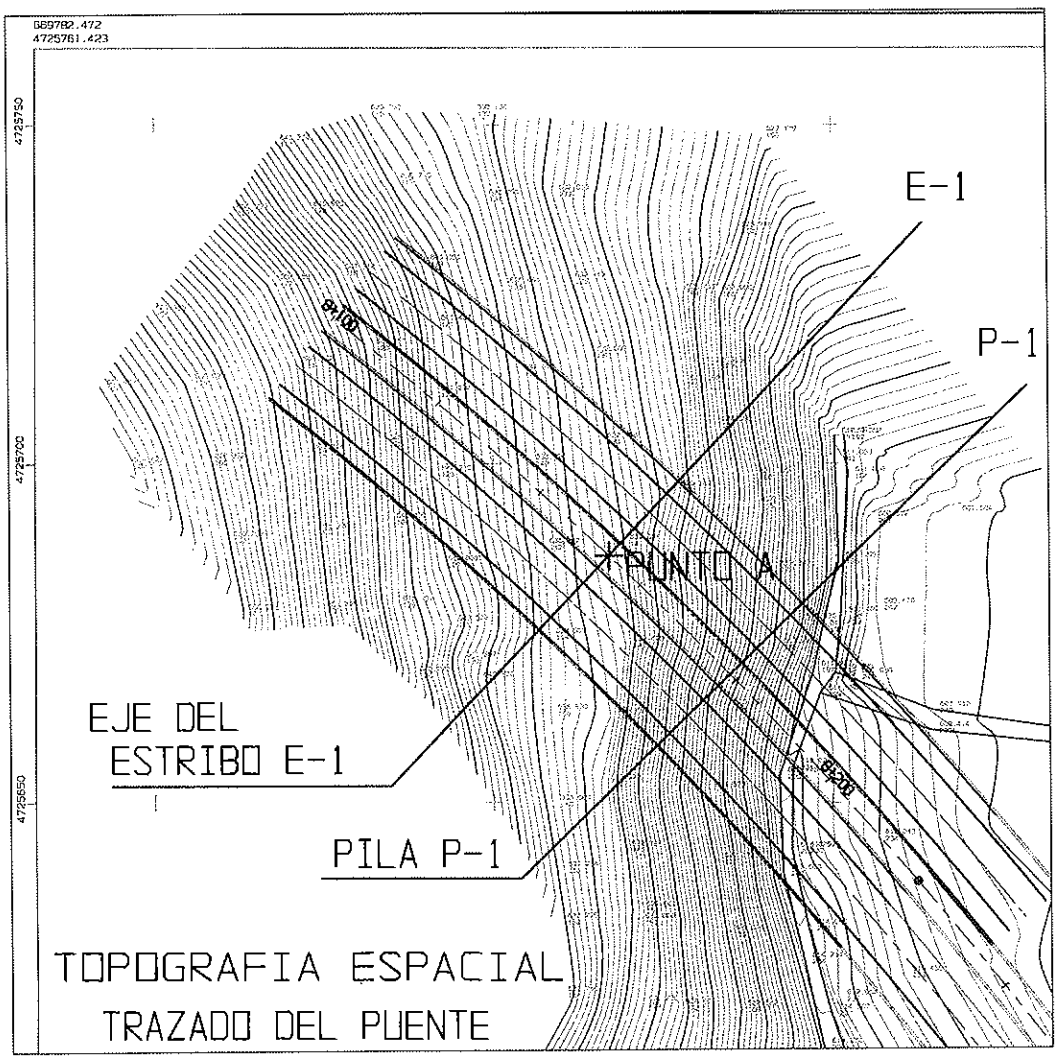


Fig. 4. Levantamiento topográfico y trazado del puente,.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

PERFIL IZQUIERDO

PUNTO	COORD X	COORD Y	COTA Z
1	669844.381	4725726.796	639.500
2	669847.984	4725723.833	638.500
3	669851.050	4725721.274	637.500
4	669852.547	4725720.013	637.000
5	669855.355	4725717.625	636.000
6	669858.760	4725714.689	635.000
7	669860.332	4725713.319	634.500
8	669863.393	4725710.625	633.500
9	669866.252	4725708.075	632.500
10	669868.987	4725705.606	631.500
11	669873.477	4725701.487	630.000
12	669876.519	4725698.650	629.000
13	669878.287	4725696.982	628.000
14	669879.813	4725695.533	627.000
15	669881.158	4725694.247	626.000
16	669882.486	4725692.970	625.000
17	669884.457	4725691.060	623.500
18	669885.776	4725689.773	622.500
19	669887.760	4725687.821	621.000
20	669889.090	4725686.504	620.000
21	669891.095	4725684.501	618.500
22	669892.489	4725683.098	617.500

PERFIL CENTRAL

PUNTO	COORD X	COORD Y	COTA Z
1	669830.839	4725718.009	647.500
2	669834.153	4725715.330	646.000
3	669836.725	4725713.224	644.500
4	669838.439	4725711.807	643.500
5	669841.009	4725709.662	642.000
6	669843.744	4725707.353	641.000
7	669846.640	4725704.876	640.000
8	669849.539	4725702.365	639.000
9	669852.432	4725699.826	638.000
10	669853.868	4725698.555	637.500
11	669855.298	4725697.279	637.000
12	669858.258	4725694.614	636.000
13	669861.440	4725691.708	635.000
14	669863.153	4725690.127	634.500
15	669866.527	4725686.975	633.500
16	669869.796	4725683.874	632.500
17	669872.385	4725681.386	631.000
18	669874.110	4725679.711	630.000
19	669876.563	4725677.306	628.500
20	669878.620	4725675.267	627.000
21	669880.918	4725672.967	625.000
22	669883.040	4725670.820	623.000

PERFIL DERECHO

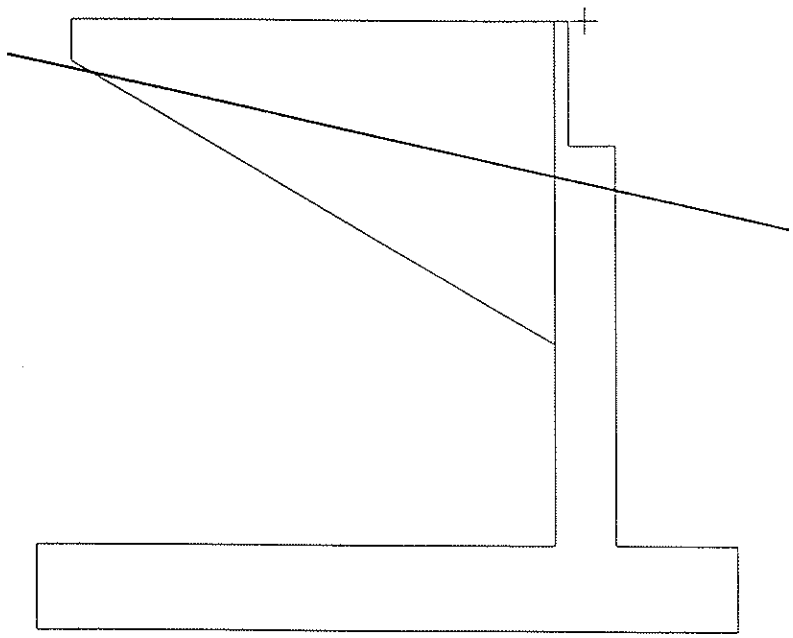
PUNTO	COORD X	COORD Y	COTA Z
1	669826.255	4725701.960	651.000
2	669828.123	4725700.419	650.000
3	669829.933	4725698.914	649.000
4	669832.649	4725696.634	647.500
5	669834.446	4725695.109	646.500
6	669837.155	4725692.786	645.000
7	669839.242	4725690.977	644.000
8	669841.354	4725689.129	643.000
9	669842.586	4725688.043	642.500
10	669844.194	4725686.615	642.000
11	669847.518	4725683.631	641.000
12	669849.256	4725682.052	640.500
13	669850.595	4725680.829	640.000
14	669853.884	4725677.786	638.500
15	669856.008	4725675.796	637.500
16	669858.341	4725673.587	636.500
17	669860.485	4725671.536	636.000
18	669862.626	4725669.468	635.500
19	669864.766	4725667.377	635.000
20	669867.992	4725664.187	634.000
21	669870.158	4725662.017	632.000
22	669871.249	4725660.916	631.000

PUNTOA

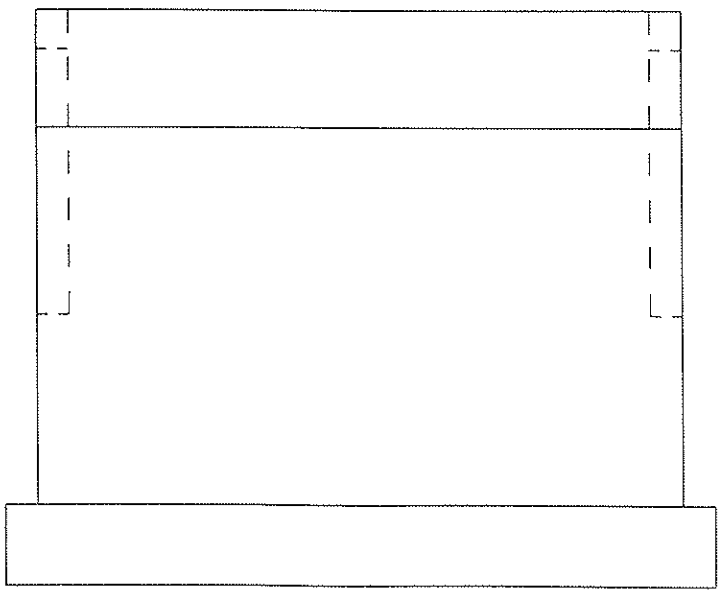
PUNTO	COORD X	COORD Y	COTA Z
1	669867.099	4725686.435	641.408

Fig. 4.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



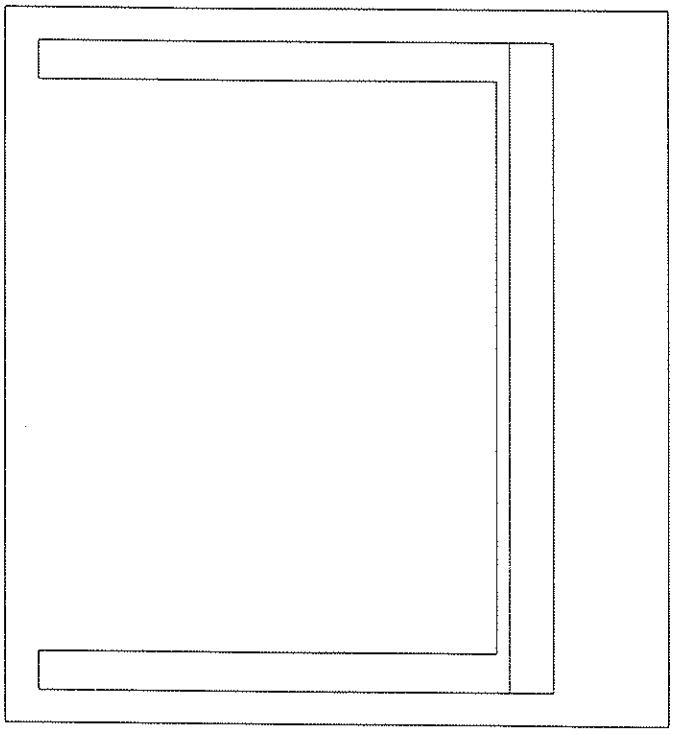
a.) PLANO GEOMETRIA - SECCION
ALTURA DEL ESTRIBO = 8.86 m.



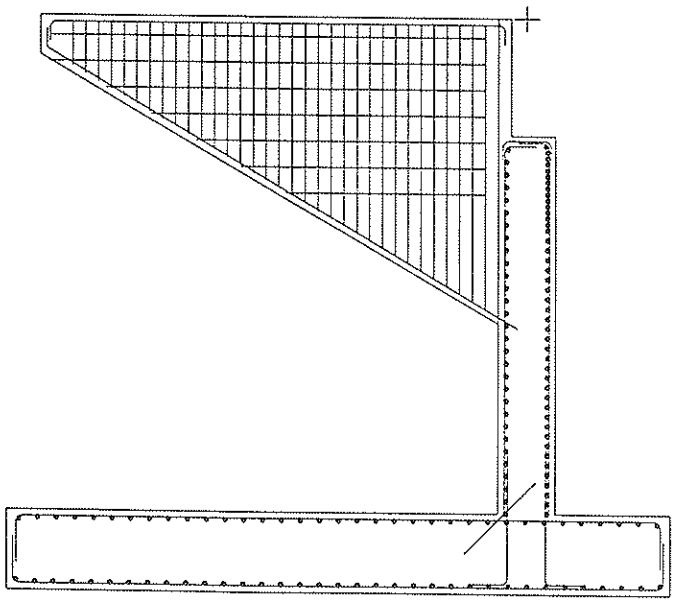
b.) PLANO GEOMETRIA - ALZADO

Fig. 5. Planos de geometría y armadura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



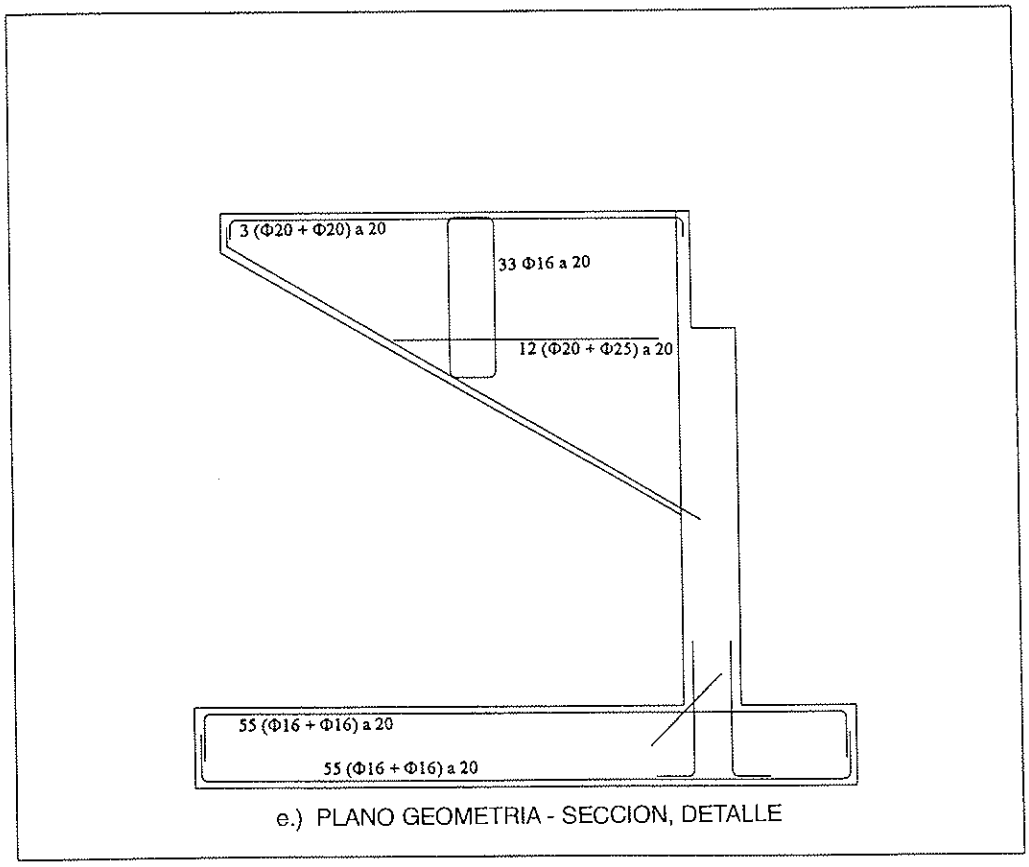
c.) PLANO GEOMETRIA - PLANTA



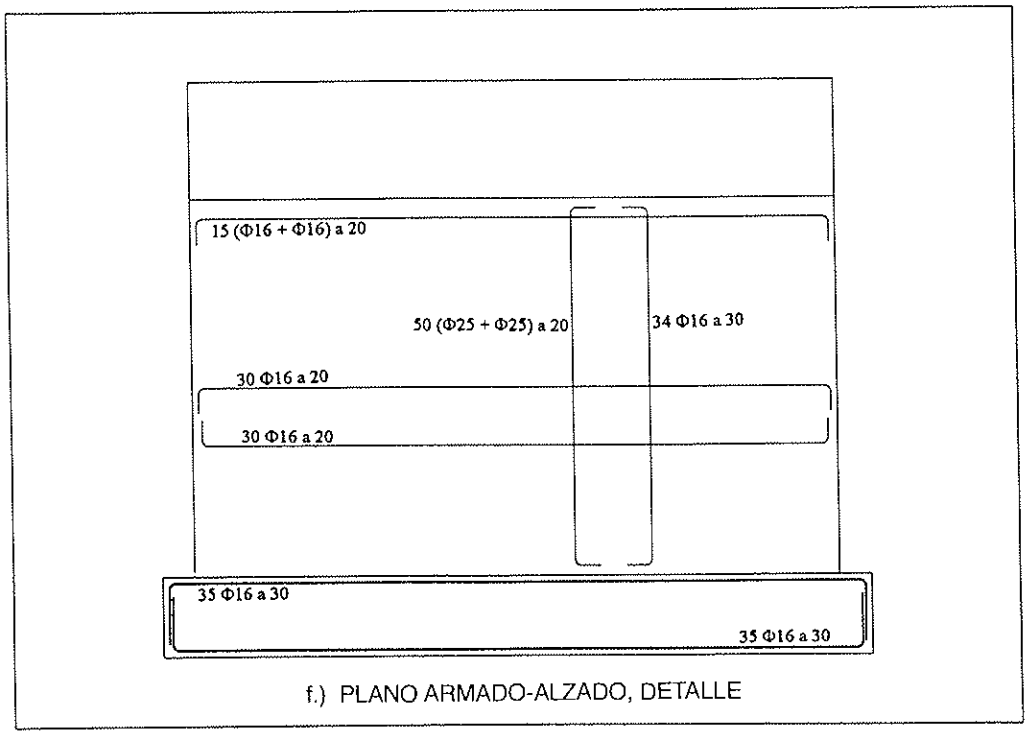
d.) PLANO ARMADO - SECCION

Fig. 5 (cont.). Planos de geometría y armadura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025



e.) PLANO GEOMETRIA - SECCION, DETALLE



f.) PLANO ARMADO-ALZADO, DETALLE

Fig. 5. (cont.) Planos de geometría y armadura.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

7. CONCLUSIONES

El presente trabajo intenta reunir dos estudios hasta ahora abordados por separado:

1.° La lectura y la interpretación de los levantamientos topográficos y del trazado de la carretera.

2.° El cálculo estructural del estribo, siendo conocidas las cargas actuantes sobre él, y las transmitidas por el tablero.

El presente trabajo consigue la coordinación entre estos dos estudios, optimizando la colocación del estribo. Para ello, utiliza como únicos datos tres perfiles (izquierdo, central y derecho) obtenidos a partir del levantamiento del terreno, y un punto elegido en el trazado por el usuario. El estribo así implantado, debe luego cumplir todos los criterios de estabilidad y resistencia, circunstancia que comprueba el programa.

La informatización del paso anterior supone una ganancia de tiempo, muy importante, en el conjunto de un proyecto.

Finalmente, este proyecto consigue una salida gráfica de los resultados, utilizable directamente por el proyectista.

8. EXTENSIONES

La principal extensión sería ampliar el abanico de posibilidades que el sistema presenta al usuario. Se podría completar añadiendo, a los tipos de estribos ya estudiados, los tipos siguientes:

- estribo cerrado, con aletas, en prolongación oblicua,
- estribos abiertos,
- estribos flotantes.

Para cada una de las tipologías anteriores, prever el caso de cimentaciones profundas mediante pilotes.

Sería interesante estudiar la posibilidad de proyectar aletas de espesor variable, muros en vuelta con nervios verticales, aletas en vuelta arriostradas entre sí mediante vigas de atado, zapatas múltiples, talones traseros frente a deslizamiento... No se trataría de prever todos los casos posibles, sino de poder utilizar este programa para calcular la mayoría de los casos usuales y sencillos.

Una vez programados todos estos casos, parece interesante considerar este paquete informático como una herramienta de optimización. En efecto, el problema radica, precisamente, en la decisión sobre la tipología de estribo que se debe ntilizar en cada caso concreto. La falta de criterios de diseño claros, conlleva la dificultad de poder realizar, a nivel de anteproyecto, un cuidado estudio de soluciones y alternativas donde escoger el proyecto final. Una vez elegido, con criterios a veces snbjetivos, el tipo de estribo, se continúa con él hasta el final.

Así, una vez conseguida una máxima generalidad posible en cuanto a tipologías, se podría incluir un estudio comparativo de cada caso, que permitiría al proyectista escoger, con suficiente garantía, la solución más adecuada bajo todos los puntos de vista (funcional, resistente, económico y estético). Este objetivo exige, por ejemplo, la elaboración de un cuadro de precios, fácilmente adaptable a cada proyecto.

Sería interesante obtener los planos de despiece de armaduras, con su medición completa, ampliación que resulta inmediata en el estado actual del paquete informático y muy necesaria dada la frecuencia con que se suele exigir este tipo de planos, en la actualidad.

Otra ampliación posible se refiere a la posibilidad de emplear un programa de elementos finitos, para realizar el cálculo global del estribo y evaluar correctamente su respuesta resistente.

Finalmente, se podría proyectar la visualización de los resultados en tres dimensiones, es decir, dibujar el estribo para que se pueda convertir en un sistema de diseño total (desde los puntos de vista numérico y gráfico), dirección en la que puede encaminarse una ampliación posible de este paquete informático.

BIBLIOGRAFIA

1. SETRA: "C.T. Culées Type". Paris, 1966.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

2. J. J. Arenas y A. C. Aparicio. "Estribos de puentes de tramo recto, concepción, diseño, cálculo". Departamento de Tecnología de las Estructuras. E.T.S. Ingenieros de Caminos. Santander, 1984.

3. G. Ramos Schneider y J. Casas i Rius. "Sistema de diseño asistido por ordenador, para estribos de puentes en tramo recto". *Hormigón y Acero*, n.º 181. 1991.

RESUMEN

Este trabajo aborda el problema de informatizar el proyecto de un estribo, integrando la lectura e interpretación de los levantamientos topográficos y del trazado del puente (necesarios para implantar el estribo) con su cálculo estructural. Se suponen conocidas las cargas transmitidas por el tablero y las características geotécnicas del terreno de cimentación. La entrada de datos topográficos se reduce a introducir 3 perfiles del terreno mediante "clics" de ratón en un programa CADKEY y, tras fijar las condiciones geotécnicas, se obtienen, como resultado, los planos de geometría y armadura.

SUMMARY

In this paper the problem of an integrated project and design of bridge abutments is presented. All this taking into acount the topographical computer disc survey, the bridge alignment and the geotechnical properties of the soil. These properties and the forces transmitted by the deck are supposed to be known. The topographical data necessary to determine the correct position of the abutment are 3 ground profiles that may be obtained by simple mouse clickings in a CADKEY program. The final result is a collection of drawings of abutment geometry and reinforcing steel bars.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

(Continuación de Int. Portada)

FOMENTO DE CONSTRUCCIONES Y CONTRATAS, S.A. (FCCSA).–Acanto, 22. 28045 Madrid.

FORMIGONS GIRONA, S.A.–Carretera C-250 de Girona a Sant Feliú de Guixols, Km. 4,3. 17242 Quart (Gerona).

FREYSSINET, S.A.–General Perón, 24. 28020 Madrid.

GRACE, S.A.–Apartado 523. 08080 Barcelona.

GRUPO ESPAÑOL DEL HORMIGON (GEHO).–Universidad Politécnica de Madrid.–Laboratorio de Estructuras de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, C. y Puertos.–Ciudad Universitaria, s/n. 28040 Madrid.

GRUPO TIERRA ARMADA.–Pº Castellana, 165. 28046 Madrid.

HIERRO INSTALADO Y SUMINISTRADO, S.A. (HIS, S.A.).–Luis Montoto, 105, 4º K. 41007 Sevilla.

HUARTE, S.A.–Oficina Técnica.–C/Gobelas, 35-37. El Plantío. 28023 Madrid.

IBERDROLA, S.A. Servicio Formación.–Referencia 3001. Gardoqui, 8. 48008 Bilbao.

INDUSTRIAS GALYCAS, S.A.–Portal de Gamarra, 46. 01013 Vitoria.

INSTITUTO ESPAÑOL DEL CEMENTO Y SUS APLICACIONES (IECA).–José Abascal, 53-2.ª planta. 28003 Madrid.

INSTITUTO TECNICO DE LA CONSTRUCCION, S.A.–Avda. de Elche, 164. 03008 Alicante.

INSTITUTO TECNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES (INTEMAC).–Monte Esquinza, 30. 28010 Madrid.

JOSE ANTONIO TORROJA, OFICINA TECNICA, S.A.–Príncipe de Vergara, 103. 28006 Madrid.

LABORATORIO CENTRAL DE ESTRUCTURAS Y MATERIALES. CEDEX.–Alfonso XII, 3. 28014 Madrid.

MECANOGUMBA, S.A.–Apartado 23. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).

MEKANO-4, S.A.–Polígono Can Magarola. Carretera N-152, Km. 19,8. 08100 Mollet del Vallés (Barcelona).

PACADAR, S.A.–Hermosilla, 57. 28001 Madrid.

PREFABRICACIONES Y CONTRATAS, S.A.–Apartado 138. 36600 Villagarcía de Arosa (Pontevedra).

PRETENSADOS DEL LOURO, S.A.–Polígono Industrial Atios. 36400 Porriño (Pontevedra).

PREVALESA, S.L.–Avda. Blasco Ibáñez, 20. 46010 Valencia.

PROYECTOS Y ESTRUCTURAS, S.A. (PROES).–Padre Damián, 42-1º D. 28036 Madrid.

SENER, INGENIERIA Y SISTEMAS, S.A.–Avda. de Zugazarte, 56. 48930 Las Arenas (Vizcaya).

SOCIEDAD DE ESTUDIOS DEL TERRITORIO E INGENIERIA, S.A.–Avenida Cardenal Herrera Oria, 167. 28034 Madrid.

TECPRESA, S.A.–Velázauez, 105. 28006 Madrid.

TREFILERIAS QUIJANO, S.A.–Fábrica de Forjas de Buelna, 39400 Los Corrales de Buelna (Cantabria).

TRENZAS Y CABLES, S.L. (TYC, S.L.).–Monturiol, 5. 08210 Barberá del Vallés (Barcelona).

VSL IBERICA, S.A.–Aribau, 185, 3º, 2ª. 08021 Barcelona.

La Asociación Técnica Española del Pretensado se complace en expresar públicamente su agradecimiento a las Entidades citadas, por la valiosa ayuda que le prestan, con su especial aportación económica, para el desenvolvimiento de los fines que tiene encomendados.

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025

asociación técnica
española del pretensado

Documento descargado de www.e-ache.com el 04/12/2025