

# HORMIGÓN *y acero*

nº 240

Segundo trimestre de 2006



**Asociación Científico-técnica  
del Hormigón Estructural**  
<http://www.e-ache.net>



**ARCEER**  
Armaduras para Hormigón



## Compromiso • Innovación • Prestación

En ARCEER la Investigación e Innovación Tecnológica son nuestra razón de ser. Por ello, hemos desarrollado una nueva generación de barras corrugadas para hormigón con unas mayores Prestaciones, asumiendo el Compromiso de mantener este elevado nivel de Calidad y de seguir aportando al usuario final el mejor de los aceros.

Partiendo siempre de aceros de Alta Ductilidad, las barras ARCEER superan los requisitos exigidos para estos productos tanto por la Reglamentación Oficial, como por las normas UNE de producto, lo que se

traduce en definitiva en un considerable aumento de la resistencia de la estructura frente al colapso.

El diagrama característico tensión-deformación de los aceros ARCEER ha sido determinado mediante un riguroso estudio experimental, en el que se han realizado más de 18.000 ensayos, lo que permite garantizar su utilización como dato de proyecto, tal y como se indica en los comentarios al Artículo 38.2 de la vigente Instrucción de Hormigón Estructural EHE.

La identificación de estos aceros de Altas Prestaciones y Calidad va a ser muy sencilla a partir de ahora, puesto que llevarán grabada la palabra ARCEER de forma clara en todas sus calidades y diámetros.

La confianza en nuestros productos, así como el convencimiento de que NO TODOS LOS ACEROS SON IGUALES, nos permiten garantizar el buen comportamiento de los aceros ARCEER mediante un seguro de Responsabilidad Civil por un importe de más de 3 MILLONES de euros por siniestro.

Instituto para la Promoción de  
Armaduras Certificadas (IPAC)

Orense, 58 – 10º D; 28020 MADRID

Tel.: 91 556 76 98 ; Fax: 91 556 75 89

E-mail: buzon@arcer.es

<http://www.arcer.es>



" La ductilidad es un puente sobre nuestra ignorancia" J. RUI-WAMBA

" La ductilidad es como la salud, se ignora su existencia...¡hasta que se pierde!". T. P. TASSIOS



Foto de portada: Arco de Almonte

EDITAN:

Instituto de Ciencias de la Construcción  
Eduardo Torroja (C.S.I.C.)Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y  
Puertos.Escuela Técnica Superior de Ingenieros de  
Caminos, Canales y Puertos de Madrid.DIRECTOR:  
Luis M<sup>a</sup> Ortega BasagoitiVOCALES:  
Pilar Alaejos Gutiérrez  
Juan Luis Alcalá Sánchez  
José M<sup>a</sup> Arrieta Torrealba  
Miguel Ángel Astiz Suárez  
Jaime Fernández Gómez  
Jaime C. Gálvez Ruiz  
Jesús Gómez Hermoso  
David Izquierdo López  
José Antonio Llombart Jaques  
Francisco Morán Cabré  
Antonia Pacios Álvarez  
Santiago Pérez-Fadón Martínez  
Javier Ripoll García-Mansilla  
Jesús Rodríguez Santiago  
Julio Vaquero García  
José M<sup>a</sup> de Villar LuengoASESORES:  
Antonio Aguado de Cea  
Ángel Aparicio Bengoechea  
Juan Carlos Arroyo Portero  
Alex Barbat Barbat  
Manuel Burón Maestro  
Pilar Crespo Rodríguez  
Ramón del Cuivillo Jiménez  
David Fernández Ordóñez  
Enrique González Valle  
Javier León González  
Rafael López Palanco  
Antonio Mari Bernat  
Julio Martínez Calzón  
Francisco Millanes Mato  
Carlos Siegrist FernándezSECRETARIO:  
Jaime Peribáñez Sebastián

La Asociación, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y sus materiales, no se hace responsable del contenido de ningún artículo y el hecho de que patrocine su difusión no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

De acuerdo con las disposiciones vigentes, deberá mencionarse el nombre de esta Revista en toda reproducción de los trabajos insertos en la misma.

Hormigón y Acero:  
E.T.S.I Caminos, Canales y Puertos  
Avda. Profesor Aranguren, s/n  
Ciudad Universitaria  
28040 Madrid  
Tel.: 91 336 66 98 - Fax: 91 336 67 02

Depósito Legal: M-853-1958

ISSN: 0439-5689

Diseño: María del Pozo

Imprime: Invoprint, S.L

# HORMIGÓN y acero

## REALIZACIONES

<b>Arco de Almonte. Autovía de la Plata. Tramo Hinojal-Cáceres . . . . .</b>	<b>5-29</b>
<i>Almonte Arch. La Plata dual carriageway. Hinojal-Cáceres stretch</i>	
<i>G. Siegrist Ridruejo</i>	
<b>Comportamiento estructural de puentes de dovelas prefabricadas con pre-tensado exterior y junta seca. Primera parte: Ensayos de vigas . . . . .</b>	<b>31-41</b>
<i>Structural behaviour of precast segmental concrete bridges with external prestressing and dry joints. Part 1: Beam tests</i>	
<i>J. Turmo, J. Piernagorda, G. Ramos y A.C. Aparicio</i>	
<b>Comportamiento estructural de puentes de dovelas prefabricadas con pre-tensado exterior y junta seca. Segunda parte: Modelización de ensayos . . . . .</b>	<b>43-53</b>
<i>Structural behaviour of precast segmental concrete bridges with external prestressing and dry joints. Part 2: Test modelling</i>	
<i>J. Turmo, G. Ramos y A.C. Aparicio</i>	
<b>Cálculo de muros de fábrica sometidos a cargas laterales de viento . . . . .</b>	<b>55-62</b>
<i>Calculation of masonry walls subjected to lateral wind loads</i>	
<i>J. Estévez Cimadevila y D. Otero Chans</i>	
<b>Aproximación al cálculo numérico de secciones de hormigón bajo cargas de incendio . . . . .</b>	<b>63-74</b>
<i>An approximation to numerical calculations of concrete under fire loads</i>	
<i>M. Álvarez Laita</i>	
<b>Un estudio del comportamiento de pilares incluyendo el régimen no lineal de los materiales . . . . .</b>	<b>75-93</b>
<i>A study of column behaviour including the material non-linear constitutive relationship</i>	
<i>M.A. Ortega, J.L. Romero y E. de la Rosa</i>	
<b>Modelado de tableros celulares de almas inclinadas mediante emparrillado plano . . . . .</b>	<b>95-107</b>
<i>Cellular decks with inclined webs modeling for 2D grillage analysis</i>	
<i>C.M. Mozos del Olmo y A.C. Aparicio Bengoechea</i>	
<b>RINCÓN DE ACHE</b>	
<b>Jornada sobre la Nueva Terminal T4 del Aeropuerto de Barajas . . . . .</b>	<b>109-110</b>
<b>Puentes, estructuras, actitudes . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>Situación actual de los Eurocódigos estructurales . . . . .</b>	<b>112-113</b>

# MIEMBROS PATROCINADORES DE LA ASOCIACIÓN CIENTÍFICO-TÉCNICA DEL HORMIGÓN ESTRUCTURAL

Según los Estatutos de la Asociación existen dos tipos de miembros, uno para personas jurídicas y otro para personas físicas. De entre los primeros, y por la importancia que tienen para la Asociación por su contribución económica, destacan los miembros Patrocinadores y los Protectores. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos como **Miembros Patrocinadores** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:



ACCIONA INFRAESTRUCTURAS  
Avda. de Europa, 18  
28108 ALCOBENDAS (Madrid)



AGUAS Y ESTRUCTURAS, S.A. (AYESA)  
Pabellón de Checoslovaquia - Isla de la Cartuja  
41902 SEVILLA



ALATEC, S.A.  
José Echegaray, 14 - Parque Empresarial Las Rozas  
28230 LAS ROZAS (Madrid)



ANEFHOP  
Bretón de los Herreros, 43 - bajo  
28003 MADRID



ASOC. NACIONAL PREF. Y DERIVADOS CEMENTO  
(ANECE)  
Paseo de la Castellana, 226 - Entreplanta A  
28046 MADRID



ASSOCIACIÓ DE CONSULTORS D'STRUCTURES  
C/ Gran Capità, 2-4. Edifici Nexus  
08034 BARCELONA



CALIDAD SIDERÚRGICA  
C/ Orense, 58 - 1º  
28006 MADRID

CARLOS FERNÁNDEZ CASADO, S.L.  
OFICINA DE PROYECTOS

CARLOS FERNÁNDEZ CASADO, S.L.  
C/ Orense, 10  
28020 MADRID



CEDEX (Laboratorio Central)  
Alfonso XII, 3. 28014 Madrid



COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS  
Almagro, 42  
28010 MADRID



CONSEJO GENERAL COLEGIOS ARQUITECTOS TÉCNICOS  
Paseo de la Castellana, 155 - 1º  
28046 MADRID

CYPE  
INGENIEROS, S.A.  
Avda. Eusebio Sempere, 5 Bajo  
03003 ALICANTE



DRAGADOS, S.A.  
Avda. Tenerife, 4-6 - Edificio Agua, 1º planta  
28700 SAN SEBASTIÁN DE LOS REYES (Madrid)



E.T.S. INGENIEROS DE CAMINOS - DPTO. MECÁNICA  
Ciudad Universitaria, s/n  
28040 MADRID

ESTEYCO  
ESTEYCO, S.A.  
Menéndez Pidal, 17  
28036 MADRID



EPtISA CINSA INGENIERÍA Y CALIDAD, S.A.  
Avda. Iparragirre, 82  
48940 LEOIA (vizcaya)

EBC EUROCONSULT

EUROCONSULT  
Avda. de lo Cortao, 17 - Zona Industrial Sur  
28700 SAN SEBASTIÁN DE LOS REYES (Madrid)

FCC  
FCC CONSTRUCCIÓN, S.A.  
Acanto, 24 - 4º  
28045 MADRID



Grupo Mecánica Estructural S.L.  
C/ Amílcar González Díaz, 18  
Arafo (SANTA CRUZ DE TENERIFE)



FUNDACIÓN LABEIN  
Parque Tecnológico de Bizkaia - C/ Geldo - Edificio 700  
48160 DERIO (Bilbao)

HILTI  
HILTI ESPAÑOLA, S.A.  
Avda. Fuente de la Mora, 2 - Edificio I  
28050 MADRID



IECA  
José Abascal, 53 - 2º  
28003 MADRID



INSTITUTO EDUARDO TORROJA  
Serrano Galvache, s/n  
28033 MADRID

INSTITUTO PARA LA PROMOCIÓN DE ARMADURAS CERTIFICADAS (IPAC)  
Orense, 58 - 1º D  
28020 MADRID



INSTITUTO TÉCNICO DE LA CONSTRUCCIÓN  
Avda. de Elche, 164  
03008 ALICANTE



INTEINCO  
Serrano, 85-2º dcha.  
28006 MADRID



INTEMAC  
Mario Roso de Luna, 29 - Edif. Bracamonte  
28022 MADRID



PRAINSA  
Madrazo, 86.- Entlo. 1ª  
08021 BARCELONA



S.G.S. TECNOS, S.A.  
C/ Trespuentes, 29.  
28042 Madrid



ZUBIA INGENIEROS  
República Argentina, 22 - 2º, Oficina 7  
36201 VIGO (Pontevedra)

## MIEMBROS PROTECTORES DE LA ASOCIACIÓN CIENTÍFICO-TÉCNICA DEL HORMIGÓN ESTRUCTURAL

Según los Estatutos de la Asociación existen dos tipos de miembros, uno para personas jurídicas y otro para personas físicas. De entre los primeros, y por la importancia que tienen para la Asociación por su contribución económica, destacan los miembros Patrocinadores y los Protectores. Hasta la fecha de cierre del presente número de la Revista, figuran inscritos como **Miembros Protectores** los que a continuación se indican, citados por orden alfabético:



Col·legi d'Arquitectes  
de Catalunya



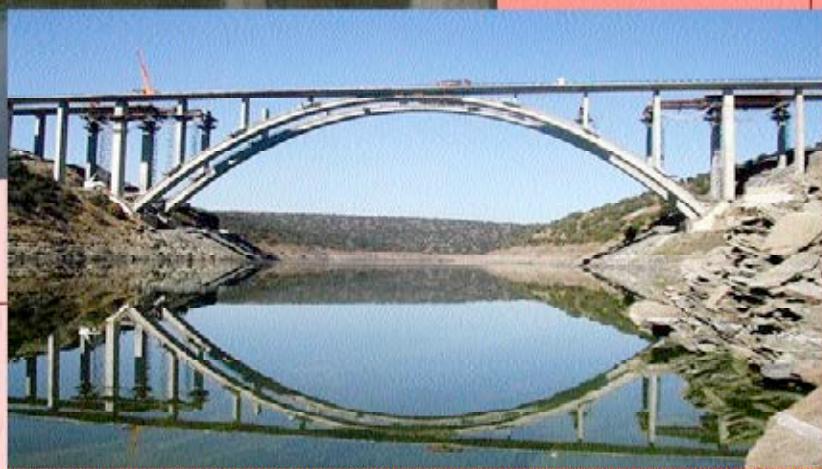
# Siegrist y Moreno S.L.

*Ingenieros especialistas en estructuras*



Viaducto Río Almonte Autovía de la Plata. Hinojal-Cáceres.

*Proyecto de Construcción y Asistencia Técnica a la Constructora*



# Arco de Almonte

## Autovía de la Plata. Tramo: Hinojal-Cáceres

**Almonte Arch**

**La Plata dual carriageway. Hinojal-Cáceres stretch**



**Guillermo Siegrist Ridruejo**

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Siegrist y Moreno, S.L.

### 1. RESUMEN

En este artículo se describe la tipología y proceso de construcción del Puente sobre el Río Almonte, en el Tramo Hinojal – Cáceres, de la Autovía de la Plata N-630, que une Gijón con

Sevilla, terminado de construir en el año 2005. Los arcos se construyeron combinando el avance por voladizos sucesivos con una potente triangulación de perfilería rígida de acero que permitía el tesado de perfiles convencionales. El tablero se ejecutó con autocimbra

### 1. SUMMARY

*This article describes the type and construction process involved in the Bridge over the River Almonte, on the Hinojal – Cáceres Stretch of La Plata N-630 dual carriageway joining Gijón*



Fig.1. Viaducto de Almonte.  
*Fig. 1. Almonte Viaduct.*

and Seville, whose construction concluded in 2005. The arches were built by combining the cantilever method with a powerful rigid rolled steel section triangulation which allowed for the tensioning of conventional rolled sections. The deck was built using scaffolding trusses from both ends and everything was real time monitored by efficient instrumentation that made use of state-of-the-art technology.



Fig.2. Embalse de Alcántara en el cruce con la Vía de la Plata.  
Fig.2. Alcántara Reservoir at the crossing with the Silver Route.

## 2. INTRODUCTION

The bridge over the river Almonte (Figure 1) stands out as a unique structure in the Hinojal Junction-North Cáceres stretch of the historic Roman Silver Route (Ruta de la Plata).

Crossing the river in this area is influenced by Alcántara Reservoir, which generates a flood area which may vary between 150 metres of channel at level 210 to about 170 metres at level 218, which is that of maximum storage, depending on the water level (Figure 2).

The Dual Carriageway's grade height above the maximum storage level is about 47 metres, and the plan alignment runs in a straight line and in a concave transition with a 10,500 parameter in elevation.

One of the most emblematic Roman bridges on Mainland Iberia, Alcantará Bridge is located downstream from the reservoir and presented an attractive challenge to the bridge's blending and aesthetics (Figure 3).

A fundamental conditioning factor for studying possible solutions to be

adopted for resolving the dual carriageway's crossing was the possibility of placing supports in the water, or not, since the bathymetric surveys obtained showed that the ground slope at flood level is quite steep, reaching ten metres depth fifteen metres from the shore, with respect to the maximum storage level.

Moreover, the decision was made not to place the bottom footing level below level 210, so as not to have problems with building these footings and to ensure the performance term's fulfilment.

The foregoing led to a large span being designed over the reservoir, varying between levels 210 and 218, depending on the level at which the footings were built, making it imperative to consider the cost of protection measures to prevent the work area from being flooded.

desde ambos extremos, y todo ello fue controlado en tiempo real por una eficaz instrumentación que hacía uso de la más moderna tecnología.

## 2. INTRODUCCIÓN

En el tramo Enlace de Hinojal-Cáceres Norte, de la histórica Ruta de la Plata romana destaca, como estructura singular, el puente sobre el río Almonte (Figura 1).

En esta zona, el paso sobre el río se ve influenciado por la existencia del Embalse de Alcántara, que genera una zona inundada que, dependiendo del nivel del agua, puede oscilar entre unos 150 metros de cauce a la cota 210, hasta unos 170 metros a la cota 218, que es de máximo embalse (Figura 2).

La altura de la rasante de la Autovía sobre la cota de máximo embalse es de unos 47 metros, desarrollándose el trazado en planta en recta, y en alzado en acuerdo cóncavo de parámetro 10.500.

Aguas abajo del embalse se encuentra uno de los puentes romanos más emblemáticos de la Península, el Puente de Alcántara, lo cual presentaba un sugerente reto hacia la integración y la estética del puente (Figura 3).

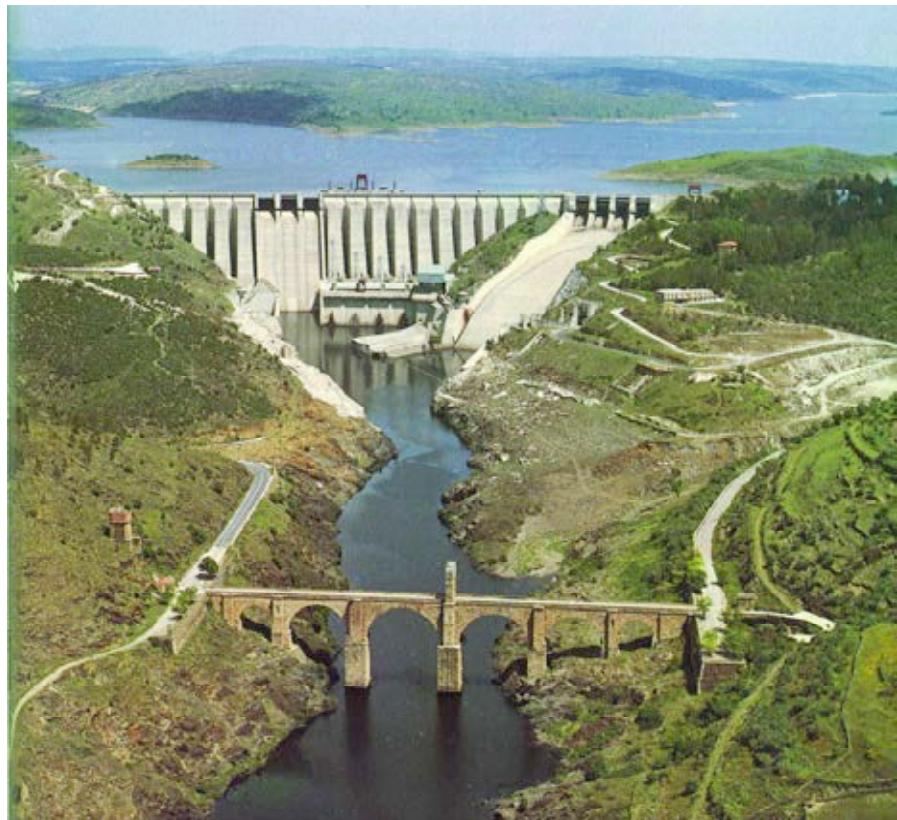


Fig.3. Puente Romano de Alcántara  
Fig.3. Alcántara Roman Bridge



Fig.4. Máximo nivel del embalse, en construcción.  
Fig.4. Maximum level of the reservoir, under construction.

Un condicionante fundamental para estudiar las posibles soluciones a adoptar para resolver el paso de la autovía, era la posibilidad o no de disponer apoyos dentro del agua, ya que, las batimétricas obtenidas indicaban que la pendiente del terreno en la cota de inundación es bastante pronunciada, alcanzando diez metros de profundidad a quince metros de la orilla, respecto a la cota de máximo embalse.

Por otro lado se adoptó la decisión de no poner la cota inferior de zapatas por debajo de la cota 210, para no tener dificultades en cuanto a la ejecución de estos elementos, y asegurar los plazos de ejecución.

Todo lo anterior condujo a disponer una luz importante en el vano sobre el embalse, variable, dependiendo de la cota a que se dispusiesen las zapatas, entre la 210 y la 218, haciendo imprescindible considerar el costo de las medidas de protección para impedir la inundación de la zona de trabajo.

Como consecuencia del estudio de soluciones realizado (véase apartado 3), se decidió adoptar una solución en puente arco de tablero superior, cimentando las zapatas del arco a la cota 214,00, siendo la de máximo embalse la 218,00, con lo que la cota mínima del arco en el arranque es la 220,934, muy por encima de la cota de máximo embalse, asegurando de esta forma la

posibilidad de construir el arco aún en el caso de niveles altos del agua (Figuras 4 y 5).

### 3. SOLUCIONES ESTUDIADAS

#### 3.1. Descripción de las Soluciones Estudiadas

Una vez definido el orden de magnitud de la luz principal y tratando de

As a result of the study carried out on solutions (see section 3), it was decided to adopt a deck arch bridge solution, with the arch footing foundations at level 214.00, with maximum storage level being 218.00, with which the minimum level of the arch at the springing is 220.934, far above the maximum storage level, thus ensuring the possibility of building the arch even in the event of high water levels (Figures 4 and 5).

### 3. SOLUTIONS STUDIED

#### 3.1. Description of the Solutions Studied

Once the order of magnitude of the main span had been defined and in an endeavour to make the construction of the deck independent of the bottom ground, 8 possible solutions which can be grouped into the following types were studied:

- A. Deck arch bridge, built with the cantilever method.
- B. Frame bridge or straight span built by the cantilever method.
- c. Stayed bridge, built by the cantilever method.

Four (4) alternatives were studied for the deck arch bridge (solution A), with one structure for each carriageway. It



Fig.5. Máximo nivel del embalse, en construcción.  
Fig.5. Maximum level of the reservoir, under construction.

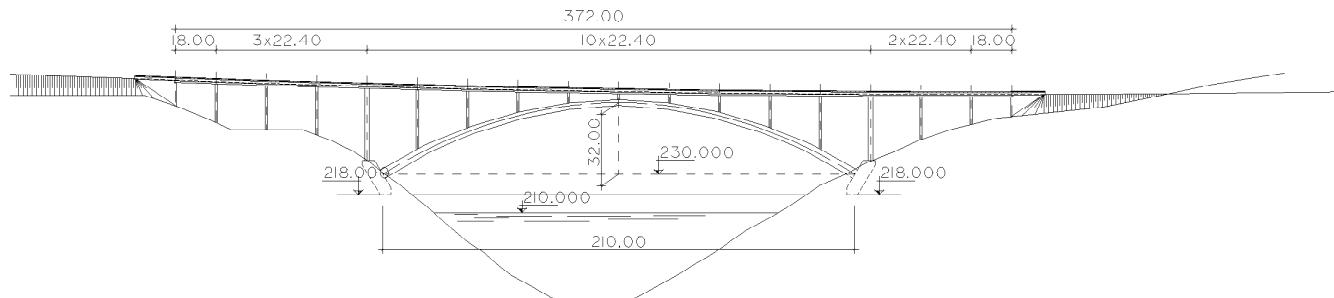


Fig. 6. Arco tablero superior. Solución A: Variante de arco en cajón de hormigón armado con luz máxima.  
 Fig. 6. Deck arch bridge. Solution A: Variant of a reinforced concrete box arch with maximum span.

*was estimated that when circumstances as occurred in this case concur, with a steep sided V shaped valley site in rocky ground with good characteristics for foundations, this was the most suitable solution both structurally and aesthetically (Figure 6).*

*Solutions were discussed in the first three for the reinforced concrete box arch for different arch footing foundation levels, between 210 and 218 of maximum storage, which lead to spans between 170 and 210 metres. The arch thickness varied in them all, whilst each arch had a constant width, the same as the bottom width of the decks.*

A fourth variant was also studied with mixed arches, with a steel U section, that served as an outside formwork for the concrete poured once the metal arch had been built (Figure 7). The arch's

*outside dimensions were the same as in the reinforced concrete, 184 metres span variant, and inside, expanded polystyrene weight relieving cylinders were placed.*

*It was planned to build the arch in the four variants by the cantilever system, staying from two towers built on the piers located at the arch springings, with their relevant retaining cables, in order to balance the horizontal loads on the provisional towers. These retaining cables were anchored in the access pier and abutment footings. The provisional towers were transversally guyed to ensure their stability in this direction.*

*Once the arches had been built and the provisional stayings had been removed, the piers were constructed with climbing formwork and the deck span by span using advance carriages*

independizar la construcción del tablero del terreno inferior, se estudiaron 8 posibles soluciones, que pueden agruparse en las tres tipologías siguientes:

- A. Puente arco, de tablero superior, construido por avance en voladizo sucesivo.
  - B. Puente pórtico o tramo recto construido por avance en voladizo sucesivo.
  - C. Puente atirantado, construido por avance en voladizo sucesivo.

Se estudiaron 4 variantes correspondientes al puente arco de tablero superior (solución A), con una estructura para cada calzada. Se estimó que, cuando concurren las circunstancias que se dieron en este caso, de una cerrada en V con laderas escarpadas, en un terreno rocoso de buenas características para cimentaciones, era la solución más adecuada, tanto estructural como estéticamente (Figura 6).

En las tres primeras se barajaron soluciones para el arco en cajón de hormigón armado para diferentes cotas de cimentación de las zapatas del arco, entre la 210 y la 218 de máximo embalse, que obligaban a unas luces comprendidas entre los 170 y los 210 metros. En todas ellas el canto del arco era variable, mientras que cada arco tenía una anchura constante, la misma que la anchura inferior de los tableros.

Se estudió asimismo una cuarta variante con arcos mixtos, con sección en U de acero que se revían de encofrado exterior al hormigón que se vertía una vez construido el arco metálico (Figura 7). Las dimensiones exteriores del arco eran las mismas que en la variante de 184 metros de luz de hormigón armado,

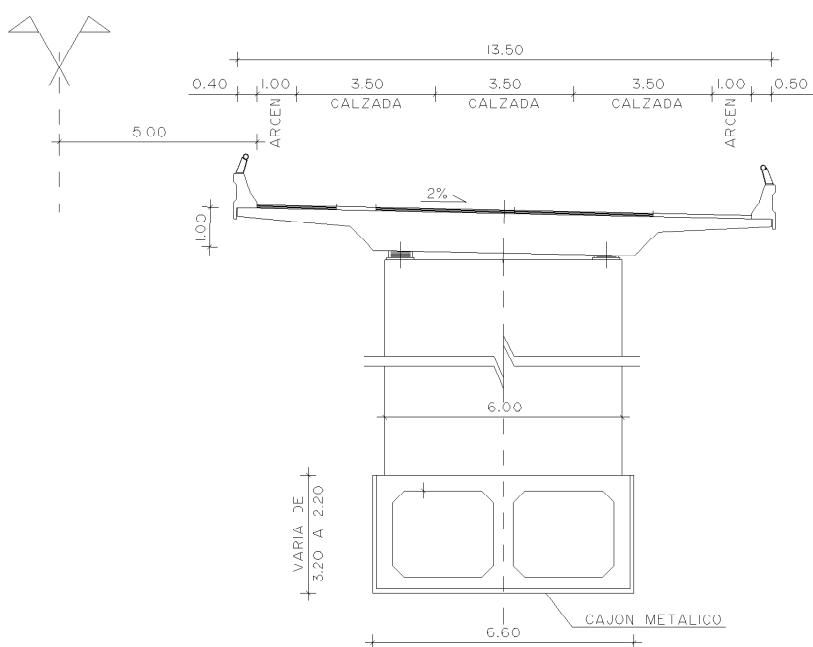


Fig.7. Solución A: variante de arco mixto de tablero superior.  
Fig.7. Solution A: mixed deck arch variant.

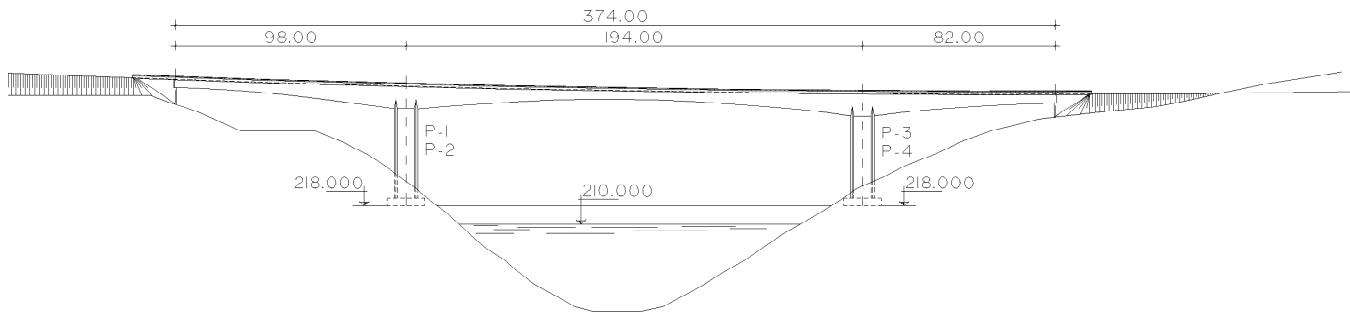


Fig.8. Solución B: variante en puente pórtico de máxima luz.  
 Fig.8. Solution B: maximum span frame bridge variant.

y se disponían aligeramientos interiores de poliestireno expandido.

En las cuatro variantes se previó la construcción del arco en voladizo sucesivo, atirantando desde dos torres instaladas sobre las pilas situadas en los arranques del arco, con sus correspondientes cables de retenida, para equilibrar las cargas horizontales sobre las torres provisionales. Estos cables de retenida se anclaban en las zapatas de las pilas de los accesos y de los estribos. Los pilones provisionales se venteaban transversalmente para asegurar su estabilidad en esta dirección.

Una vez construidos los arcos y suprimidos los atirantamientos provisionales, se construían las pilas con encofrados trepantes, y el tablero vano a vano mediante carros de avance que llevan incorporados cerchas de lanzamiento de unos 45 metros de longitud.

En cuanto a la tipología de puente pórtico construido por avance en voladizo sucesivo (solución B), se estudiaron tres variantes.

Esta solución, dependiendo de que las zapatas de las pilas se dispusiesen a las cotas 218, 214 ó 210, y suficientemente empotradas en el terreno para admitir cargas de cimentación elevadas, daba lugar a luces de 194, 182 y 172 metros respectivamente, con tableros de sección cajón de hormigón pretensado de canto variable parabólicamente, según las diversas luces (Figura 8).

La construcción de las pilas se efectuaba mediante encofrados trepantes, de unos 5 metros de altura y los tableros se construían por avance en voladizo sucesivo, hormigonando sobre cimbra una zona de 13 metros sobre las pilas tabique, y avanzando mediante dovelas hormigonadas sobre carro de avance.

Finalmente se estudió una quinta y última variante de la solución A correspondiente a un puente arco único, habiendo reducido la anchura de media en las dos calzadas, de forma que quedaba una estructura de 26.50 metros de anchura total, correspondientes, en primera y segunda fase, a una distribución de calzadas, arcenes, cebreados y apoyos de barreras exteriores igual a las de las soluciones de estructura doble, y dejando 0,50 metros en el centro para disponer una barrera rígida doble entre ambas circulaciones.

Se estudió el caso de disponer las zapatas del arco a la cota 214, para compararlo con las variantes de arco doble y de puente en estructura pórtico que tenían las cotas de zapatas a la misma altura, con la misma luz que en la solución A – variante 2 y una sección para el arco, en hormigón armado, en cajón monocelular (Figura 9).

El tablero era un cajón, también monocelular, de hormigón pretensado,

which have launching frames incorporated about 45 metres long.

*Three variants were examined for the type of frame bridge built by the cantilever system (solution B).*

*Depending on whether the pier footings were built at levels 218, 214 or 210, sufficiently embedded in the ground to take heavy foundation loads, this solution gave rise to spans of respectively 194, 182 and 172 metres, with prestressed concrete box section decks, parabolically varying in thickness, according to the various spans (Figure 8).*

*The piers were built using climbing formwork, about 5 metres high, and the decks were built by the cantilever method, concreting an area of 13 metres on centring on the partition piers, and advancing by means of segments concreted on the advance carriage.*

*Finally, a fifth and last variant of solution A was studied, a single arch*

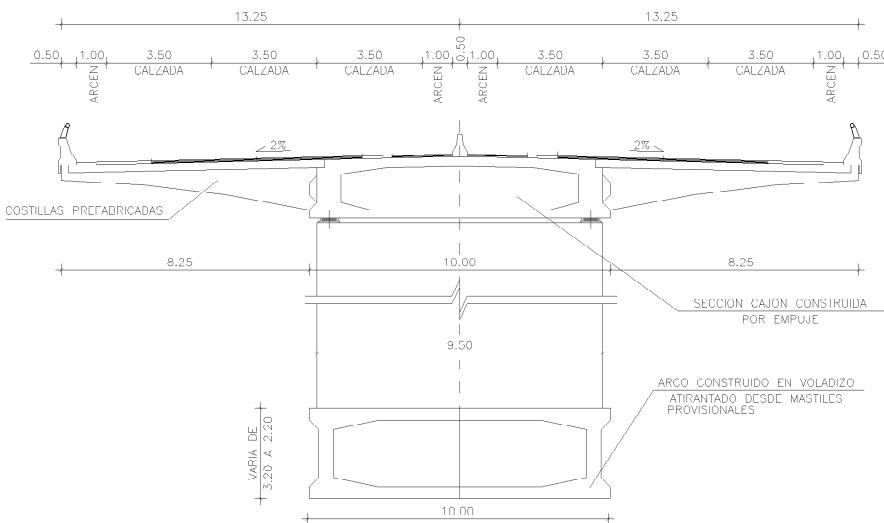


Fig.9. Solución A: variante en arco único de tablero superior.  
 Fig.9. Solution A: single deck arch.

bridge, having reduced the middle reservation width in the two carriageways so that a structure 26.50 m overall width remained, with a distribution of carriageways, hard shoulders, road markings and outside barrier supports in a first and second phase the same as those of the double structure solution and leaving 0.50 metres in the centre for fitting a rigid, double barrier between both traffic carriageways.

The case of building the arch footings at level 214 was studied, so as to compare it with the double arch and frame structure bridge variants which had the footing levels at the same height, with the same span as in solution A – variant 2 - and a section for the arch in reinforced concrete in a single cell box (Figure 9).

The deck was also a single cell box, in prestressed concrete, continuous and aided by precast side ribs serving to complete the 26.50 metres top width.

In the designers' opinion, the stayed solution (solution C) was not the most suitable for this range of spans since it was clearly more expensive than the foregoing two and, moreover, did not fit in well with very rough ground and steep sides as happened in this case, but on the other hand, would have been better on flat ground and a low grade height over the ground as this would enable the thickness of the deck in the frame or straight span solution to be reduced.

### 3.2. Comparative Analysis of the Solutions

The least expensive solution as regards the financial aspect was the double structure in a 170 metre span concrete arch bridge with footings at level 210, followed by the single bridge solution in a 180 metres span concrete arch, with foundations at level 214, with the concrete arch solutions becoming more expensive as the span increases when raising the foundation level of the footings. The mixed arch was, in turn, a little more expensive than the concrete arch, 3.5% difference between the two double arches with 180 metres span, with foundations at level 214.

The frame bridge solutions, building the deck by the cantilever system, proved more expensive than arch

bridges with foundations at the same levels, with the percentage difference increasing as the span diminished, from 4.3% for structures with foundations at level 218, to 8.3% for structures at level 210. This is due to the fact that the whole deck is expensive in these solutions, since long spans are maintained over the whole length and in arch bridge solutions, decks are much less expensive and their importance in the total cost increases as the arch span decreases.

In any event, the differences do not prove to be very large, with a 14.8% difference between the most expensive solution, which is the two frame structures of 194 metres span, and the least expensive, which is the 2 concrete arch structures with 170 metres span. The difference was really small and, at those values, it could not be ensured that the order in which the eight structures were placed was right, since it would depend a lot on the equipment the construction company had.

In the construction aspect, the solutions of a frame bridge built with the cantilever method was simpler to build than the solutions of an arch bridge with staying from provisional towers, that brought with it a series of quite delicate tensioning and detensioning operations, calling for highly skilled labour. However, it must not be forgotten that the straight span bridge with the longest span built in Spain by the cantilever system was Almaraz over the river Tagus on the Navalmaral-Jaraicejo stretch of the A-5 Madrid to Badajoz dual carriageway with a 175 metres central span, and, therefore, two of the solutions would be a record in Spain. Furthermore, the density of steel, both prestressed and passive, is very important in these decks, making their construction very difficult. In their favour was the fact that this is a construction method very well known to Spanish construction firms which have built quite a few bridges of this type.

The advantage of frame solutions over arch bridge solutions was greater as regards the performance term, although the total term for the arch solutions when a double viaduct is involved could be reduced by removing the self-bearing trusses whilst the arch of the first structure is being built, in order to build the access spans of the

continuo ayudado por costillas laterales prefabricadas que servían para completar los 26,50 metros de ancho superior.

En cuanto a la solución atrapada (solución C) se consideró, en opinión de los proyectistas, que no era la más adecuada para este rango de luces, ya que era claramente más cara que las dos anteriores y por otra parte no encajaba muy bien en un terreno muy accidentado, con laderas escarpadas como ocurría en este caso, y sí, en cambio, hubiera quedado mejor en un terreno llano y con altura de rasante reducida sobre el terreno, ya que permitía disminuir mucho el canto del tablero de la solución de pórtico o tramo recto.

### 3.2. Análisis Comparativo de las Soluciones

En cuanto al aspecto económico se refiere, la solución más económica era la estructura doble, en puente arco de hormigón, de 170 metros de luz, con zapatas a la cota 210, seguida de la solución en puente único, en arco de hormigón de 180 metros de luz, cimentado a la cota 214, encareciéndose las soluciones arco de hormigón a medida que, al subir la cota de cimentación de las zapatas aumenta la luz. A su vez, el arco mixto era un poco más caro que el arco de hormigón, un 3,5% de diferencia entre los dos arcos dobles de 180 metros de luz, cimentados a la cota 214.

Las soluciones de puente pórtico, construyendo el tablero por voladizos sucesivos, resultaron más caras que las correspondientes a puentes arco cimentadas a los mismos niveles, aumentando la diferencia porcentual a medida que disminuye la luz, pasando de un 4,3% para estructuras cimentadas a la cota 218, al 8,3% para estructuras cimentadas a la cota 210. Y ello es debido a que en estas soluciones, todo el tablero es caro, pues se mantienen luces importantes en toda la longitud, y en las soluciones de puente arco, los tableros son mucho más baratos, y su importancia en la composición del costo total aumenta a medida que disminuye la luz del arco.

En cualquier caso, las diferencias no resultaron muy importantes, habiendo una diferencia del 14,8% entre la solución más cara, que es la de dos estructuras en pórtico de 194 metros de luz, y la más barata, que es la de 2 estructuras en

arco de hormigón de 170 metros de luz. Realmente la diferencia era pequeña y, en esos valores, no podía asegurarse que el orden dado a las ocho estructuras fuese el verdadero, ya que dependería mucho de los medios con que contase la empresa constructora.

En el aspecto constructivo, las soluciones de puente pórtico construido por voladizos sucesivos, eran más simples de construcción que las soluciones de puente arco, con atirantamientos desde pilones provisionales, que conllevaban una serie de operaciones de tesado y destesado bastante delicadas, y que exigían una mano de obra muy especializada. Ahora bien, no hay que olvidar que el puente de tramo recto de vano más largo construido en España por avance en voladizo sucesivo, era el de Almaraz, sobre el río Tajo, en el tramo Naval-moral-Jaraicejo, de la Autovía A-5, de Madrid a Badajoz, con un vano central de 175 metros de luz, por lo que dos de las soluciones serían récord en España. Además, la densidad de acero, tanto de pretensado como pasivo, es muy importante en estos tableros, dificultando mucho la ejecución de los mismos. Tenían en su favor que es un método constructivo muy conocido por las empresas constructoras españolas, que han realizado bastantes puentes de esta tipología.

En lo que se refiere al plazo de ejecución, la ventaja de las soluciones pórtico frente a las de puente arco era mayor, si bien el plazo total de las soluciones arco cuando se trata de un viaducto doble se podría reducir desmontando las cerchas autoportantes mientras se está construyendo el arco de la primera estructura, para construir los vanos de acceso de la segunda estructura, con lo que la diferencia con las soluciones pórtico sería muy pequeña o nula.

Atendiendo al aspecto estético, las soluciones en puente arco eran, en principio, superiores a las de tipo pórtico, aunque estas últimas, con las dimensiones indicadas, tenían una gran diafanidad (Figura 10).

De todas formas, la expresividad de aquéllas, resultaba superior a la de estas últimas, con la idea de salto que lleva implícito el arco, aunque, en este caso, la longitud de los accesos, en especial el de la margen izquierda, disminuía la superioridad estética de estas soluciones (Figura 11).



Fig.10. La solución en voladizos aportaba gran diafanidad.  
Fig. 10. The cantilever solution provided great transparency.

### 3.3. Solución Elegida

Aunque en principio, la solución de puente arco único cimentado a la cota 214, parece muy atractiva, con un presupuesto igual, prácticamente, al de la solución en doble arco de 170 metros de luz que es la más barata, y con un riesgo de inundación de las cimentaciones bastante reducido, pues esta cota sólo estaba cuatro metros por debajo de la de máximo embalse, se desechó ya que tenía dos inconvenientes importantes, como son la reducción de mediana, que obligaba a hacer unas transiciones del ancho de la misma antes y después del viaducto y, sobre todo, el no poder dar

second structure, with which the difference with frame solutions would be very small or nil.

As regards the aesthetic aspect, arch solutions were initially superior to the frame type although the latter was greatly diaphanous with the dimensions given (Figure 10).

In any event, the expressivity of the former proved far superior to the latter's, with the idea of a leap the arch bears implicit with it, although, in this case, the access lengths reduced the aesthetic superiority of these solutions, particularly the left hand side's (Figure 11).

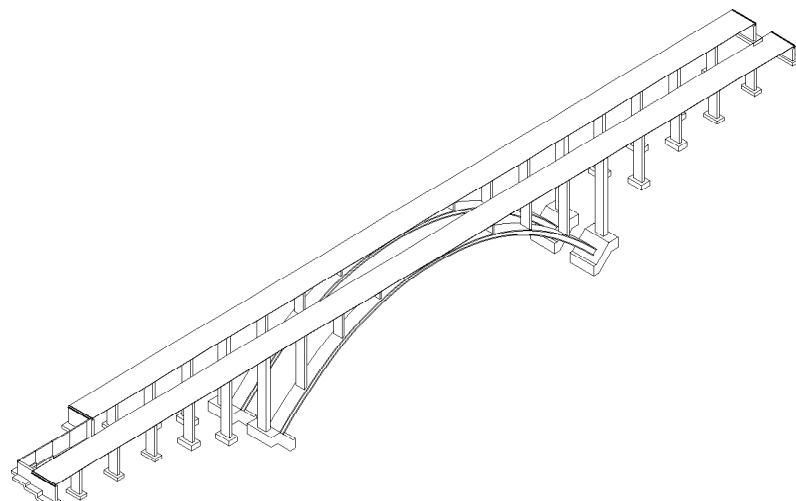


Fig.11. Solución en Arco escogida  
Fig.11. Arch solution chosen.

### 3.3. Solution Chosen

Although, initially, the single arch solution with foundations at level 214 would seem most attractive, with an estimated cost practically the same as the double arch with 170 metres span which is the least expensive and with a quite low foundation flooding risk since this level was only four metres below the maximum storage's, it was rejected since it had two major problems, the reduction in the middle reservation, which forced transitions of its width to be made before and after the viaduct and, particularly, not being able to allow site traffic to travel on it until it were completely concluded, as against the two structure solutions, where they could be opened to site traffic as soon as the first was finished, with the advantage of having the two parts of the span connected to expedite its construction. Likewise, there was the possibility of bringing one carriageway into service, without the complete span being finished.

The two concrete arch structures with a 180 metres span and foundations at level 214 were thus proposed as the solution to be undertaken, with much less risk of flooding than that with foundations at level 210, which was the least expensive, and only 2.6% more expensive than the latter. In addition, it had the advantage over the mixed, concrete arch variant of requiring less upkeep and blending better into the surrounding landscape, as a totally stone solution.

### 4. SOLUTION DESIGNED

Two structures were designed, one for each carriageway, with a width of 13.50 metres, with two 3.50 metre lanes, right shoulder of 2.50 and left of 1.00 metres, with a road marked area of 2.00 metres and two end areas of 0.50 metres for locating the rigid barriers. Thus, in a future extension to three lanes, there will be three 3.50 metre lanes and two 1.00 metre shoulders.

#### 4.1. Arch

The arches for both carriageways are identical, with 184 metres span and 42 metres deflection, and, therefore, the sag/span ratio is 1/4.38, very suitable for an arch of this size (Figures 12 and 13).

The section is a single cell box with a thickness varying linearly between 3.00 metres at springings and 1.80 metres at the crown, with slenderness ratios of 1/61.33 and 1/102.22. The width is kept constant at 6.00 metres, with 0.35 metre web and top and bottom slab thicknesses, and tapered beams in the slabs 0.50 metres long and 0.30 metres thick inside and, 0.30x0.30 outside, with which the overall width of the slabs is 6.60 metres (Figure 14). Thus, two lines are drawn delimiting the arch's thickness. The section becomes solid in the initial metre of both springings and in the areas where the piers that load directly onto the arch, are embedded, leaving circular

paso al tráfico de obra por el viaducto hasta que no estuviese completamente terminado, frente a las soluciones de dos estructuras, en las que se podía abrir al tráfico de obra en cuanto estuviese acabada la primera, con la ventaja que supone el tener conectadas las dos partes del tramo para agilizar la construcción del mismo. Asimismo, cabía la posibilidad de poner en servicio una calzada, sin tener finalizado el tramo completo.

Por todo ello se propuso como solución a desarrollar, la de dos estructuras en arco de hormigón de 180 metros de luz, cimentados a la cota 214, con mucho menor riesgo de inundación que la cimentada a la cota 210, que era la más barata, y sólo un 2,6% más cara que ésta. Además, tenía la ventaja sobre la variante en arco mixto de hormigón, de exigir menos conservación y quedar mejor integrada en el paisaje circundante como solución totalmente pétrea.

### 4. SOLUCION PROYECTADA

Se proyectaron dos estructuras, una para cada calzada, con una anchura de 13,50 metros, correspondientes a dos carriles de 3,50 metros, arcén derecho de 2,50 e izquierdo de 1,00 metro, con una zona cebreada de 2,00 metros y dos zonas extremas de 0,50 metros para ubicación de las barreras rígidas. De esta forma, en una futura ampliación a tres carriles, quedarán tres carriles de 3,50 metros y dos arcenes de 1,00 metro.

#### 4.1. Arco

Los arcos para ambas calzadas son idénticos, de 184 metros de luz y 42 metros de flecha, por lo que queda una relación de rebajamiento de 1/4,38, muy adecuada para un arco de esta envergadura (Figuras 12 y 13).

La sección es en cajón monocelular, con canto variable linealmente entre 3,00 metros en arranques y 1,80 metros en clave, con relaciones de esbeltez de 1/61,33 y 1/102,22. El ancho se mantiene constante, de 6,00 metros, con espesores de almas y losas superior e inferior de 0,35 metros, y unas cartelas en estas últimas de 0,50 metros de longitud y 0,30 metros de espesor en el interior, que en el exterior son de 0,30x0,30, con lo que el ancho total de las losas es de

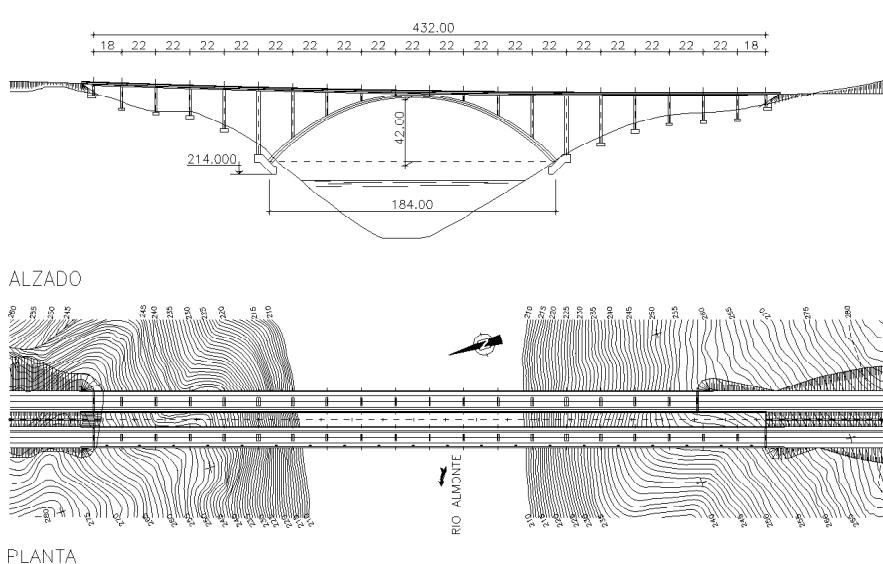


Fig.12. Solución Proyectada: Planta y Alzado generales.  
Fig.12. Solution Designed: General Plan and Elevation.



Fig.13. Solución Construida: Vista general.  
 Fig.13. Solution Built: General view.

6,60 metros (Figura 14). De esta forma se materializan dos líneas que delimitan el canto del arco. La sección se maciza en el metro inicial de ambos arranques, y en las zonas de empotramiento de las pilas que cargan directamente sobre el arco, dejando unos huecos circulares de 80 cm. de diámetro para paso de hombre y otros huecos del mismo diámetro en la losa inferior, a 1,70 metros de los arranques, para acceso al interior del arco.

Las zapatas de los arcos, escalonadas para adaptarse a la topografía de las laderas y ofrecer una superficie de apoyo prácticamente normal a la directriz del arco, tienen una dimensión transversal de 14 metros y una proyección horizontal, en dirección longitudinal, de 14,20 metros. El canto medio es de 5 metros, y transmiten una carga máxima de punta al terreno de 0,88 N/mm<sup>2</sup> y media de unos 0,50 N/mm<sup>2</sup>.

#### 4.2. Tablero

Los tableros se resuelven a base de losas aligeradas postesadas, con vanos intermedios de 22

gaps 80 cm in diameter for a man-pass and other gaps of the same diameter in the bottom slab 1.70 metres from the springings, for accessing the inside of the arch.

The arch footings, stepped to match the hillsides' topography and offer a support area practically perpendicular to the arch's directrix, are transversally 14 metres in dimension and project horizontally 14.20 metres in a longitudinal direction. The average thickness is 5 metres, and they transmit a maximum tip load of 0.88 N/mm<sup>2</sup> and average of about 0.50 N/mm<sup>2</sup> to the ground.

#### 4.2. Deck

Decks are made of lightweight, postensioned slabs with intermediate spans of 22 metres and end spans of 18 metres. In keeping with the existing topography, especially on the river's left bank, the left hand carriageway has 18 spans, with a length of 388 metres, and the right one 20 spans, with an overall length of 432 metres. The additional two spans in the latter are for the left hand bank, with the abutments of both carriageways being dorsal aligned.

The section is a slab, weight relieved by five circular, 75 cm diameter holes, with a constant thickness of 1.10 metres in the 6.40 central metres, inclined side facings with a horizontal projection of 0.70 metres and 2.85 metre overhangs,

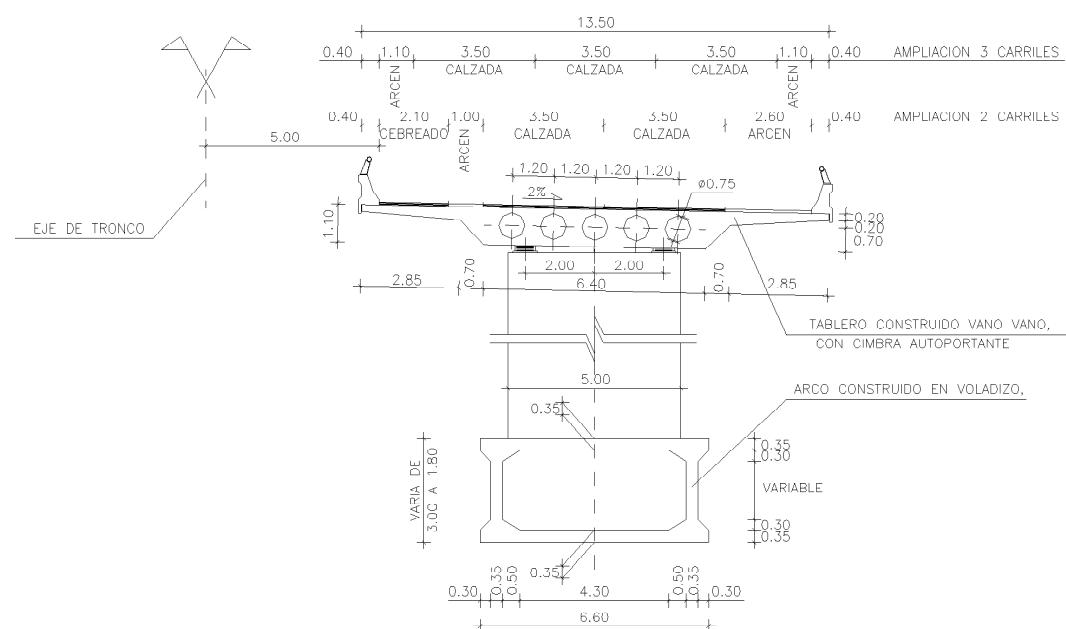


Fig.14. Sección tipo.  
 Fig.14. Typical section.



Fig.15. Vista tablero en construcción.  
Fig. 15. View of deck under construction.

until completing the overall width of 13.50 metres. The overhang thicknesses vary linearly between 0.40 and 0.20 metres at the end. The section becomes solid along 1.50 metres above abutments, and along 5.40 metres above piers, corresponding to the 4.40 metres of the span by span construction cantilever and one metre of the previous span (Figures 15 to 17).



Fig.16. Tablero listo para hormigonar.  
Fig. 16. Deck ready for concreting.

*The deck rests on neoprene bearings bound into the piers, which emerge from the arch, embeds into the piers framing the arch and is supported on neoprene-teflon bearings on the piers with foundations in the natural ground and in the abutments.*

*In accordance with construction requirements, the deck is built with self-bearing centring advancing from both abutments simultaneously, to symmetrically gravitate on the arch in the different construction phases (Figure 18).*

metros centrales, paramentos laterales inclinados con proyección horizontal de 0,70 metros y unos voladizos de 2,85 metros, hasta completar la anchura total de 13,50 metros. El canto de los voladizos varía linealmente entre 0,40 y 0,20 metros en el extremo. La sección se maciza en 1,50 metros sobre estribos, y sobre pilas en 5,40 metros, correspondientes a los 4,40 metros de voladizo de la construcción vano a vano, y un metro del vano anterior (Figuras 15 a 17).

El tablero se apoya sobre aparatos de neopreno zunchado en las pilas que salen del arco, se empotra en las pilas que enmarcan el arco, y se apoya sobre aparatos de neopreno-teflón sobre las pilas cimentadas en el terreno natural y en los estribos.

De acuerdo con las exigencias constructivas, el tablero se ejecuta mediante cimbra autoportante avanzando desde ambos estribos simultáneamente, para llegar a gravitar de manera simétrica sobre el arco en las diferentes fases constructivas (Figura 18). El último vano que se hormigona y tesa es el que está sobre la clave del arco.

Los tres vanos centrados sobre el arco se encofran con cimbra apoyada directamente sobre el arco por problemas de espacio para poder ubicar la autocimbra.

Para poder ejecutar el vano central de cierre, se procede a prolongar la mitad



Fig.17. Detalles frente de fase del tablero.  
Fig. 17. Details, front of deck phase.



Fig.18. Ejecución del tablero mediante autocimbra.  
 Fig.18. Building the deck with scaffolding truss.

de los cables de pretensado que vienen de cada uno de los dos lados, a modo de trenzado, dejando unas vainas en el vano opuesto por las que se enfilan los cables de pretensado y anclando los

mismos en unos alojamientos dejados a tal fin en la cara superior de la sección ejecutada (Figura 19). De esta manera se procede a tensar la mitad de los cables desde cada extremo, y la ley de esfuer-

The last span to be concreted and tensioned is the one over the arch crown.

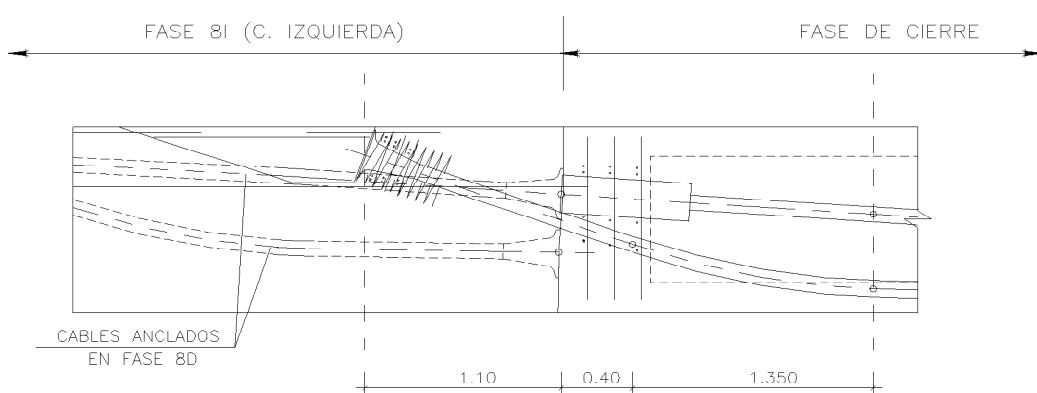
The three spans centred over the arch are shuttered with centring directly supported on the arch because of problems of space for locating the scaffolding truss.

In order to build the central closing span, half of the prestressing cables coming from each of the two sides is prolonged as braiding, leaving sheaths in the opposite span through which the prestressing cables are threaded, and anchoring them in housings left for such purpose in the top side of the section built (Figure 19). Thus half the cables are tensioned from each end and the law of prestressing stresses is symmetrical at all times.

#### 4.3. Piers and Abutments

The piers are prism shaped, 5 metres in the cross direction, and those with direct foundations in the ground, 1.50 metres in the longitudinal direction, 2.50 metres those with foundations on the arch footings, and those supported directly on the arch, 1.50, 1.20 and 0.80 metres, with the first dimension corresponding to the first piers, the second to the second piers and the third to the four centre piers.

Except for the 0.80 metre piers, which are solid, all the rest have a box section, with 0.25 metre walls. The height of the 2.50 metre piers is 41.11 and 37.95 metres, the same on both carriageways, the 1.50 metre piers are 32.45 and 29.99 metres high in those supported on



DETALLE DE CRUCE DEL PRETENSADO

Fig.19. Detalle de cruce del pretensado en la última fase del tablero.  
 Fig.19. Detail of the prestressing crossing in the deck's last phase.



Fig.20. Alzado general en construcción.  
Fig.20. General elevation under construction.

the arch, and varies between 14.75 and 33.25 metres for those supported on the ground in the left hand carriageway, and between 12.84 and 30.55 metres for those of the right hand carriageway. Likewise, the 1.20 metre piers are 17.58 and 15.82 metres high and the 0.80 metre piers, 8.20, 3.90, 3.55 and 7.14 metres.

The piers supported on the ground have footing foundations, the dimensions of which are 7x4x1.50 metres and 8x5x2.00 metres, depending on the height and the loads on them.

The abutments are reinforced, 1.35 m thick concrete walls, with the footprint corresponding to the deck's perimeter in order to achieve a twin effect of the latter in the former, with a toe wall thickness of 0.30 metres. The latter thickens along the top 25 cm to 0.60 metres, with the purpose of laying the expansion joint which is the reinforced neoprene type for 230 mm. run. The abutment wall height is 8.95 metres at abutment 1; 7.75 metres at abutment 2; 8.34 metres at abutment 3 and 7.80 metres at abutment 4 on average and their foundations are footings of 5.35 metres and 1.50 metres thick, except at abutment 2, where the footing measures 4.85 metres. Abutment 3 and 4 footings are stepped

to adapt to the ground's configuration, and a longitudinal wall is built between them both, at the edge of the left hand carriageway, 43.45 metres long, with joints every 10 metres. Wing walls are designed at the outside edges of these abutments and at all edges of abutments 1 and 2, over the length of the front wall footings, with wings 5 metres in length (Figure 21).

zos de pretensado permanece simétrica en todo momento.

#### 4.3. Pilas y Estripos

Las pilas son prismáticas, de 5 metros en dirección transversal, de 1,50 metros en dirección longitudinal las que van cimentadas directamente en el terreno, de 2,50 metros las cimentadas sobre las zapatas de los arcos, y de 1,50, 1,20 y 0,80 metros las apoyadas directamente en los arcos, correspondiendo la primera dimensión a las primeras, la segunda a las segundas pilas y la tercera a las cuatro pilas centrales.

Excepto las de 0,80 metros, que son macizas, todas las demás son de sección cajón, con paredes de 0,25 metros. La altura de las pilas de 2,50 metros es de 41,11 y 37,95 metros, iguales en ambas calzadas, la de las de 1,50 metros es de 32,45 y 29,99 metros en las que apoyan sobre el arco, y oscila entre 14,75 y 33,25 metros en las que apoyan sobre el terreno en la calzada izquierda, y entre 12,84 y 30,55 metros en las de la calzada derecha. Asimismo, la altura de las pilas de 1,20 metros es de 17,58 y 15,82 metros y la de las pilas de 0,80 metros de 8,20, 3,90, 3,55 y 7,14 metros.

Las pilas apoyadas sobre el terreno se cimentan mediante zapatas, cuyas dimensiones son de 7x4x1,50 metros y de 8x5x2,00 metros, según la altura y las cargas sobre las mismas.



Fig.21. Alzado del Estripo 2.  
Fig.21. Elevation of Abutment 2.



Fig.22. Viaducto de Almonte. Proceso constructivo por triangulación.

Fig.22. Almonte Viaduct. Triangulation construction process.

Los estribos son muros de hormigón armado, con un espesor de 1,35 metros, con la huella correspondiente al contorno del tablero para obtener un efecto de macla de éste en aquél, quedando un espesor de murete de 0,30 metros. Éste se regresa en los 25 cm. superiores hasta 0,60 metros, con objeto de poder colocar la junta de dilatación, que es del tipo de neopreno armado para 230 mm. de recorrido. La altura de los muros de estribo es de 8,95 metros en el estribo 1; 7,75 metros en el estribo 2; 8,34 metros en el estribo 3, y 7,80 metros en el estribo 4, de media, y se cimentan sobre zapatas de 5,35 metros y 1,50 metros de canto, excepto en el estribo 2, en el que la dimensión de la zapata es de 4,85 metros. Las zapatas de los estribos 3 y 4 se escalonan para adaptarse a la configuración del terreno, y entre ambos se dispone un muro longitudinal, al borde de la calzada izquierda, de 43,45 metros de longitud, con juntas cada 10 metros. En los bordes exteriores de estos estribos y en todos los de los estribos 1 y 2, se diseñan muros en vuelta en la longitud de las zapatas de los muros frontales, con aletas voladas de 5 metros de longitud (Figura 21).

la estructura del Viaducto sobre el río Almonte, tanto lo que se estudió en el proyecto original, como lo que finalmente se construyó de acuerdo con las propuestas y sugerencias de ACCIONA Infraestructuras, la Empresa Constructora (Figura 22).

(a) *Proceso constructivo mediante atirantamiento desde mástiles provisionales*

La construcción de los arcos se previó en principio en el proyecto original, avanzando en voladizo sucesivo, atirantando provisionalmente desde unos mástiles de hormigón armado, en prolongación de las pilas que enmarcan el

#### 4.4. Construction Process

The work necessary for building the Viaduct structure over the river Almonte is described below, both as studied in the original design and as finally built, according to the estimates and suggestions of ACCIONA Infraestructuras, the Construction Company (Figure 22).

(a) Construction process by staying from provisional towers

It was initially planned to build the arches in the original design by the cantilever system, provisionally staying from concrete towers in a prolongation of the piers framing the arch, with 14 segments projecting 5.50 metres horizontally, and one of 4.50 metres for each semi-arch, having concreted the first 9.50 metres on centring (Figure 23). Finally, a closing segment 2 metres long was concreted at the crown.

The deck was built span by span from both abutments until the arch framing piers into which it was embedded had been passed. As from then, the arch was built and, once finished, the stay cables were removed and the provisional towers were demolished and the deck's construction continued span by span symmetrically to the arch, closing at the centre span with a 13.20 metre segment.

(b) Rigid triangulation construction method

A cantilever vault and final piers construction process was finally adopted for building the vaults of the arch over the river Almonte, modified in comparison with the aforescribed,

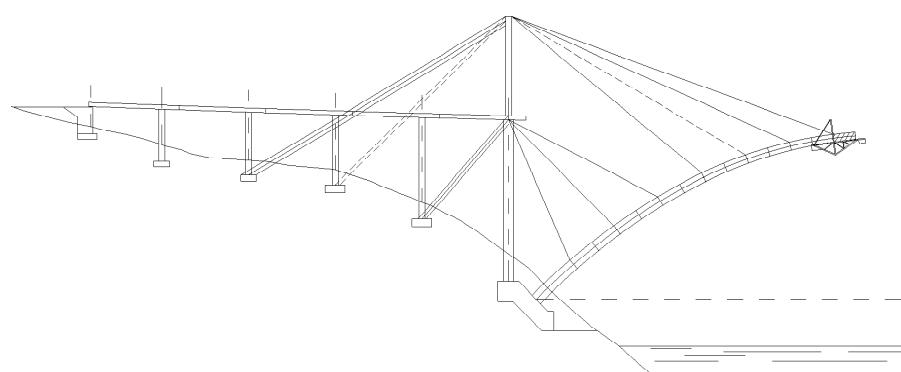


Fig.23. Viaducto de Almonte. Proceso constructivo del proyecto inicial.  
Fig.23. Almonte Viaduct. Initial design's construction process



Fig.24. Viaducto de Almonte. Proceso constructivo desarro llado para ACCIONA Infraestructuras.  
Fig.24. Almonte Viaduct. Construction process developed by ACCIONA Infraestructuras.

forming a triangulated structure with a top flange and provisional metal diagonals, formed by conventional rolled sections of S-355 steel, except in the case of the last quadrant where the diagonals are prestressed cable (Figures 20, 22 and 24).

The arch construction sequence was as follows (Figure 29):

- Construction of foundations of arches and adjacent piers, anchoring the latter to the ground.

- Building up piers located on the foundations of the arch and construction of its segment 1 using conventional centring.

- Advancing the arch by means of provisional staying and retaining cables until passing the first pier located on it (Figure 25).

- Placing and tensioning rigid diagonals up to the foregoing pier and removing the auxiliary stays.

arco, con 14 dovelas de 5,50 metros de proyección horizontal, y una de 4,50 metros por cada semi-arco, habiendo hormigonado sobre cimbra los 9,50 metros primeros (Figura 23). Por último se hormigonaba una dovela de cierre en clave de 2 metros de longitud.

El tablero se construía vano a vano, desde ambos estribos, hasta sobrepasar las pilas que enmarcan el arco, en las que estaba empotrado. A partir de este momento, se procedía a la construcción del arco y, finalizada ésta, se desmontaban los cables de atirantamiento y se demolían los pilones provisionales, continuando con la construcción vano a vano del tablero, de forma simétrica respecto al arco, cerrando en el vano central con una dovela de 13,20 metros.

#### (b) Proceso constructivo mediante triangulación rígida

Para la construcción de las bóvedas del arco sobre el Río Almonte finalmente se adoptó un proceso constructivo de avance en voladizo de la bóveda y de las pilas definitivas modificado respecto al anteriormente descrito, formando una estructura triangulada, con un cordón superior y diagonales provisionales metálicas, formadas por perfiles laminados convencionales de acero S-355, salvo en el caso del último cuadrante, donde las diagonales son de cable pre-tensado (Figuras 20, 22 y 24).

La secuencia constructiva del arco era la siguiente (Figura 29):

- Ejecución de cimentaciones del arco y pilas adyacentes con anclajes al terreno en estas últimas.
- Trepa de las pilas situadas sobre las cimentaciones del arco, y ejecución de la dovela 1 del mismo mediante cimbra convencional.
- Avance del arco mediante atirantamiento provisional y retenidas hasta pasar la primera pila situada sobre él (Figura 25).
- Colocación y tesado de diagonales rígidas hasta la pila anterior y eliminación de los tirantes auxiliares.
- Construcción de la primera pila sobre el arco.



Fig.25. Trabajos simultáneos en pilas, arcos y tablero.  
Fig.25. Simultaneous work on piers, arches and deck.



Fig.26. Avance del arco. Trabajos nocturnos.  
Fig.26. Arch advance. Night work.

– Construction of the first pier on the arch.

– Erecting a provisional metal lintel beam between the two piers built, which will act as a traction flange (Figure 26).

– Simultaneous construction of the abutments, piers and deck access spans by advances with self-bearing centring.

– An opening is made in the crown to finish the construction of each arch, putting in an axial stress of 6000 kN with jacks between the two semi-arches. With relative movements between them prevented, the crown is concreted and then the auxiliary equipment used is removed (Figures 27, 28 and 29).

Finally, the deck spans located over the arch are built, as will be explained later.

The great advantage of this construction process over that initially proposed in the design is the greater overall rigidity which enabled the movements expected to be controlled at all times with errors under 10 mm. This effect is not only achieved with the use of metal rolled sections instead of pre-stressing cables but also because a flexible element like the staying tower is eliminated.

In addition, the performance terms were considerably reduced by making the



Fig.27. Carros de avance en posición final.  
Fig.27. Advancing carriages in the final position.

– Montaje de un dintel metálico provisional entre las dos pilas construidas que actúe como cordón de tracción.

– Continuación de la ejecución del arco avanzando por triangulación según el método descrito en los puntos anteriores (Figura 26).

– Ejecución simultánea de estribos, pilas y vanos de acceso del tablero mediante avances con cimbra autoportante.

– Para terminar la construcción de cada arco se ejecuta una apertura en clave, introduciendo un esfuerzo axial de 6000 kN mediante gatos entre los dos semiarcos. Con los



Fig.28. Desmontaje de los carros de avance  
Fig.28. Removing the advancing carriages.

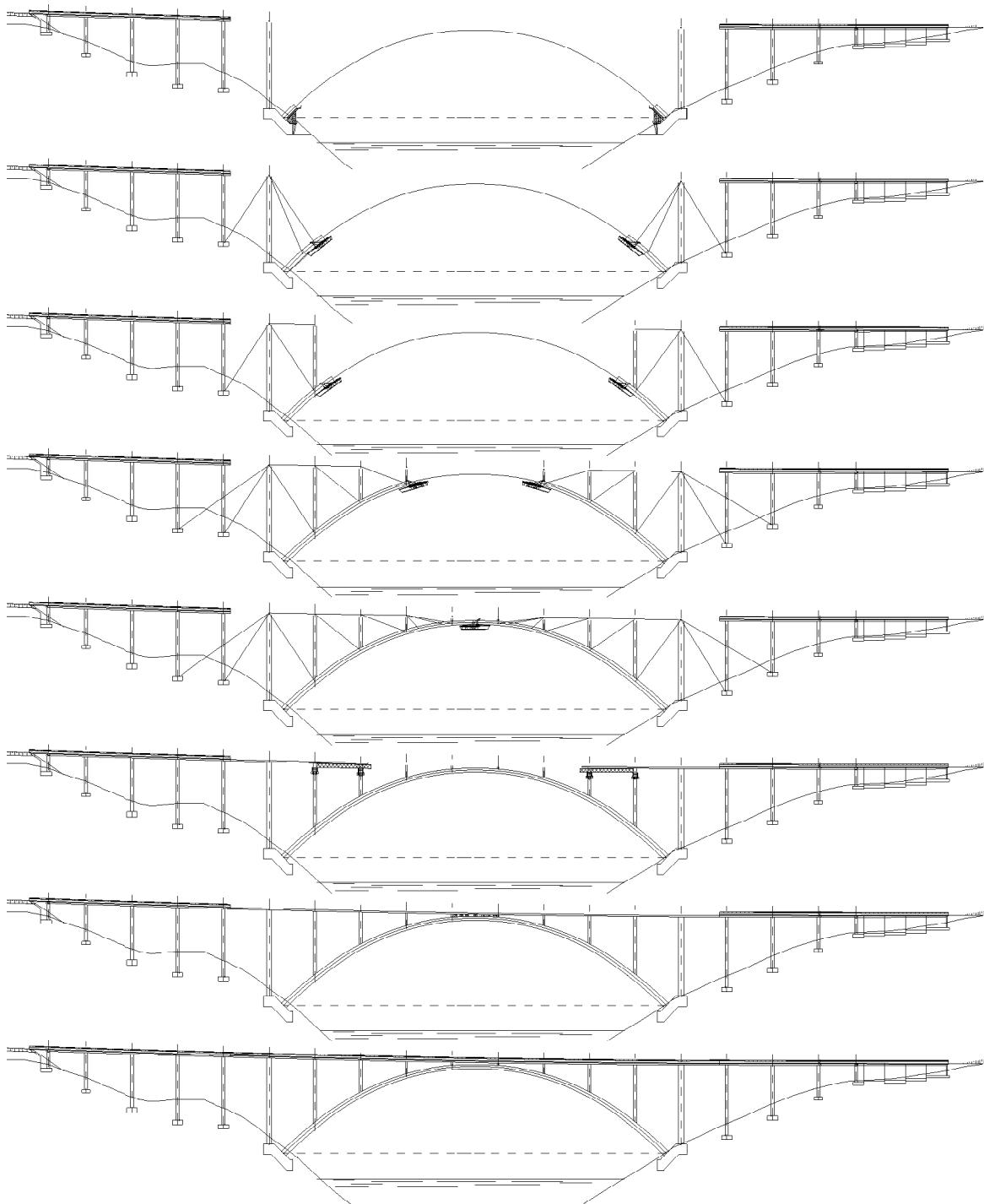


Fig.29. Esquema del proceso constructivo por triangulación.  
Fig.29. Diagram of the triangulation construction process.

arch construction independent of the access decks' since it is not necessary to have the staying tower embedded in the deck and in the bottom pier built in order to commence building the arch, which always forms part of the critical path.

Each semi-arch was divided into 18 segments plus a crown segment. The segments were 5.85 metres long in the axis except the first one, 7.9 metres long, which was built on conventional centring, the second segment of 5.45

metres, and segment number 18, 1.925 metres long. The closing segment was a total of 2 metres in length.

The balance of each cantilever defining a semi-arch is obtained by means of stays anchored from the top end of the end pier to the foundations of the two adjacent hillside piers.

These latter items' traction is balanced by 12 prior prestressing cables of the footings to the ground so that it

movimientos relativos entre ellos impeditidos se procede al hormigonado de la clave y posteriormente al desmontaje de los medios auxiliares utilizados (Figuras 27, 28 y 29).

Por último se ejecutan los tramos de tablero situados sobre el arco, como se explicará posteriormente.

La gran ventaja de este proceso constructivo frente al propuesto inicialmente en el proyecto es la mayor rigidez del

conjunto, que permitió controlar en todo momento los movimientos esperados con errores inferiores a los 10 mm. Este efecto no sólo se produce por el empleo de perfiles metálicos en lugar de cables de pretensado, sino también porque se elimina un elemento flexible como es la torre de atirantamiento.

Además se redujeron considerablemente los plazos de ejecución, al independizar la ejecución del arco de la de los tableros de acceso puesto que no es necesario tener construido el mástil de atirantamiento empotrado al tablero y a la pila inferior para poder comenzar con la construcción del arco, que siempre forma parte del camino crítico.

Cada semiarco se dividió en 18 dovelas más una dovela de clave. Las longitudes de las dovelas eran de 5,85 metros en el eje, salvo la dovela primera, de 7,9 metros de longitud, que se construyó sobre cimbra convencional, la segunda dovela de 5,45 metros, y la dovela número 18, de 1,925 metros de longitud. La dovela de cierre tuvo una longitud total de 2 metros.

El equilibrio de cada voladizo que define un semiarco se obtiene por medio de tirantes anclados desde el extremo superior de la pila extrema a las cimentaciones de las dos pilas de la ladera adyacentes.

La tracción de estos últimos elementos se equilibra por medio de 12 cables



Fig.30. Carros enfrentados para la ejecución de la apertura en clave.  
Fig.30. Carriages facing each other for the crown opening's construction.

de pretensado previo de las zapatas al terreno, de modo que en el caso de máxima solicitud, no se produzca la decompresión del mismo. Cuando finaliza la construcción del arco del viaducto se destesan 8 de los anclajes, habiendo de dejar 4 de ellos como definitivos por imposibilidad de destesado de los mismos, al estar hormigonadas sobre ellos cuñas de hormigón que recogen los cables de retenida del proceso (Figura 31).

Son necesarios además cables diagonales provisionales que se colocan durante el avance del voladizo, para limitar los esfuerzos de flexión al rango de valores permitido para evitar una fisuración significativa de los hormigones de pilas y bóveda, que se retiran al

*is not decompressed in the case of maximum stressing. When the viaduct arch's construction ended, 8 of the anchorings were detensioned, and 4 of them had to be left as final as it was not possible to detension them, as concrete wedges which collected the process retaining cables were concreted on them (Figure 31).*

*Provisional diagonal cables are also necessary, to be fitted during the cantilever's advance, in order to limit bending stresses to the range of values allowed to prevent significant cracking of the pier and vault concrete, and are removed when reaching the next rigid diagonal, having a further fixed triangular module (quadrant) (see Figures 29 – phases 2 and 3 -, 33 and 34).*

*Once the situation of maximum overhang had been reached, an opening is made in the crown, whilst awaiting the closing segment's concreting, by introducing self-balancing forces into the cantilever's ends (Figure 32). Part of the deformations and stresses which rheological effects will bring in after closing are thus offset.*

#### 4.5. The Calculation Model

*Checks were made on two flat linear bar element models, both for forces in the plane and for the perpendicular wind forces. This model corresponds to the structure's actual geometry and is highly evolutionary, both in the longitudinal direction, where bars are appearing and disappearing according to the configuration of each instant, and in the cross direction, since the section is con-*



Fig.31. Anclaje de pila 8 al terreno.  
Fig.31. Anchoring of pier 8 to the ground.



Fig.32. Apertura en clave.  
Fig.32. Crown opening.

*creted in three phases, according to the possibilities of the cantilever advance carriage used on the site and of the available auxiliary equipment.*

*In a first phase, the arch box's bottom slab is concreted after placing the bottom U's reinforcement on the perfectly*

*levelled outside formworks. Once hardened, the inside formworks are moved over the bottom slab and the section's side walls are concreted (Figure 33). Finally, the carriage advances to the next position to build the next bottom slab and the top slab of the previous segment is concreted using separate formwork.*

alcanzar la siguiente diagonal rígida, teniendo un módulo triangular fijo más (cuadrante) (véanse Figuras 29 – fases 2 y 3 -, 33 y 34).

Una vez alcanzada la situación de máximo voladizo, a falta de hormigonado de la dovela de cierre, se procede a efectuar una apertura de clave, por medio de la introducción de fuerzas autoequilibradas en los extremos del voladizo (Figura 32). Con ello se compensan parte de las deformaciones y esfuerzos que los efectos reológicos introducirán después del cierre.

#### 4.5. El Modelo de Cálculo

Las comprobaciones se han realizado sobre dos modelos lineales planos de elementos barra, tanto para las acciones en el plano como para las normales del viento. Este modelo corresponde a la geometría real de la estructura, y es altamente evolutivo, tanto en sentido longitudinal, donde van apareciendo y desapareciendo barras según la configuración de cada instante, como en sentido transversal, ya que la sección se



Fig.33. Carro de avance en voladizo para el arco, con tirantes auxiliares.  
Fig.33. Cantilever advancing carriage for the arch, with auxiliary stays.

hormigona en tres fases, de acuerdo con las posibilidades del carro de avance en voladizo empleado en la obra, y de los medios auxiliares disponibles.

En una primera fase se hormigona la losa inferior del cajón del arco tras colocar la ferralla de la U inferior sobre los encofrados exteriores perfectamente nivelados. Una vez endurecida, se desplazan los encofrados interiores sobre la losa inferior, y se hormigonan los hastiales de la sección (Figura 33). Por último se avanza el carro hasta la siguiente posición para ejecutar la próxima losa inferior y se hormigona la losa superior de la dovela anterior mediante un encofrado independiente.

Cuando se llega a uno de los macizados del arco que sirven de diafragma o riostra de las pilas que empotran en él, es necesario aumentar el desfase de hormigonado de la losa superior hasta dos dovelas para evitar interferencias con el carro empleado, reflejándose cada una de estas fases en el modelo de cálculo desarrollado.

La sección de las barras representativas de las diagonales provisionales, cables de retenida y cordón superior de tracción ha sido estimada a partir de cálculos previos de situaciones del montaje en la que tales elementos se consideran infinitamente rígidos, para así reducir al máximo los esfuerzos de flexión en tales configuraciones. Estas situaciones corresponden a los voladizos definidos por recuadros completos.

En primer lugar se calcula la situación pésima para los tirantes de retenida, y seguidamente cuatro situaciones intermedias auxiliares.

A lo largo de las comprobaciones de todas las situaciones de montaje se han tenido que variar algunas secciones de los elementos provisionales para limitar las tensiones sobre los mismos.

En cuanto a las acciones, para la comprobación de los cables de retenida se consideró la coexistencia del peso propio con una sobrecarga accidental de 6000 kN/m extendida en todo el cordón principal superior, (equivalente a 1 kN/m<sup>2</sup>) y un carro de hormigonado de 350 kN. El peso real del carro y sus encofrados era de 280 kN.

El peso de los elementos metálicos se incrementó entre un 25 y 30% para

tener en cuenta el sobrepeso de posibles rigidizadores, y para evaluar los efectos de las deformaciones por retracción y fluencia se adoptaron los criterios de la Instrucción EHE

Para reducir la incertidumbre de los efectos que intervienen en los desplazamientos del sistema durante la construcción, se limitaron las tensiones de tracción sobre la bóveda, durante las etapas de montaje y bajo las acciones sin ponderar, de forma que no se sobreponga la resistencia media, definida en el artículo 39 EHE. Este valor, aplicando la expresión de la instrucción, es de 3,5 N/mm<sup>2</sup>.

Este criterio tiene la finalidad de garantizar que durante el montaje no se producirá una degradación de las rigideces de los elementos, de difícil evaluación, que altere los desplazamientos previstos y plantea problemas de decisión sobre la idoneidad de las situaciones del montaje.

También se limitaron los valores de las tensiones de los cables diagonales al 65% de la de rotura. Esta cifra es superior a la permitida en situaciones permanentes de servicio, pero dada la provisionalidad de los elementos y a las pocas veces que se alcanza durante el montaje, no eran de temer problemas de fatiga.

#### (a) Estudio de las fases de Construcción

Para analizar la estructura durante su proceso constructivo se definieron más de 200 etapas diferentes, en cada una de

When one of the arch's solid parts acting as a diaphragm or brace of the piers embedding into it is reached, the lag between the top slab's concreting must be increased to two segments so as to prevent interference with the carriage used and each of these phases is reflected in the calculation model developed.

The section of the bars representative of the provisional diagonals, retaining cable and top traction flange was estimated from prior calculations of erection situations in which such elements are deemed to be infinitely rigid, to thus reduce the bending stresses as much as possible in such configurations. These situations relate to cantilevers defined by complete boxes.

Firstly, the worst situation for the retaining stays is calculated and then four intermediate auxiliary situations.

Some sections of the provisional elements had to be varied throughout the checks on all erection situations in order to limit the tensions on them.

With regard to forces, the coexistence of dead weight with a chance weight of 6000 kN/m extended over the whole of the main top flange (equivalent to 1 kN/m<sup>2</sup>) and a concreting carriage of 350 kN was considered in order to check the retaining cables. The actual weight of the carriage and its formworks was 280 kN.

The weight of the metal elements was increased between 25 and 30% in order to take into account the additional weight of possible stiffeners, and the criteria of the EHE Instruction were

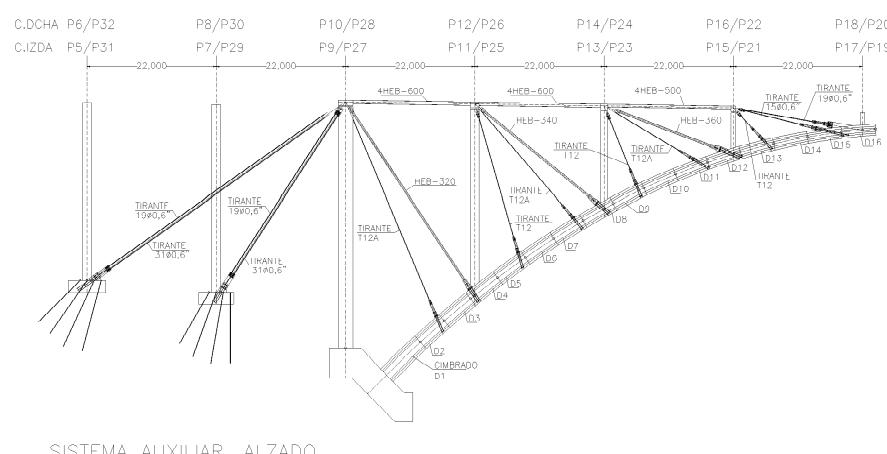


Fig.34. Sistema auxiliar. Alzado general.  
Fig.34. Auxiliary system. General elevation.



Fig.35. Detalle de nudo sobre las pilas principales.  
Fig.35. Detail of the node on the main piers.

*adopted to assess the effects of shrinkage and creep deformations.*

*Tensile stresses on the vault were limited during the erection stages and under unweighted forces, in order to reduce the uncertainty of the effects involved in the system's movements during construction, so that the average resistance as defined in article 39 EHE were not exceeded. By applying the instruction's expression, this value is 3.5 N/mm<sup>2</sup>.*

*The purpose of this criterion is to guarantee that the rigidities of the elements will not degrade during erection, something difficult to assess, which will in turn alter the movements expected and raise decision making problems on the suitability of the erection situations.*

*Stresses in diagonal cables were also limited to 65% of the ultimate tensile strength. This figure is higher than that allowed in permanent service situations, but in view of the provisional nature of the elements and the few times it is reached during erection, problems of fatigue were not to be feared.*

#### (a) Study of the Construction Phases

*More than 200 different stages were defined in order to analyse the structure during the construction process, in each*

*of which an operation was carried out that resulted in a change in the static scheme of the structure or in its tension status.*

*Out of the final stages, those involving placing of provisional diagonals that triangulate the boxes defined by the spans of the deck and of the vault between each two piers are worthy of note. The stresses in the said elements were entered into the latter so that the distance between the points they join, one in the deck and the other in the vault, resulted the same as that existing in the geometry of the model without stresses. This reduced the bending stresses of the elements defining each box and the movements of their nodes.*

*The first enables the cracking stresses on the vault not to be exceeded and reduces the importance of the increases in movement caused by creep which are thus basically a consequence only of the axial shortening of the sections and not of their rotations. The reduction in node movements facilitates prior levelling of formworks, and reduces the importance of possible differences between the theoretical values of the cambers and those entered into the work.*

*The remaining stages relate to the concreting of vault segments, pier shafts, placing metal decks and carriage and crane movements. During the*

*las cuales se realizó una operación que resulta en un cambio del esquema estático de la estructura o en el estado tensional de la misma.*

*De entre las etapas definitivas caben destacar las etapas de colocación de las diagonales provisionales que triangulan los recuadros definidos por los vanos del tablero y de la bóveda entre cada dos pilas. En éstas se introdujeron los esfuerzos en dichos elementos de forma que la distancia entre los puntos que unen, uno del tablero y otro de la bóveda, resultase igual a la existente en la geometría del modelo sin esfuerzos. Con ello se redujeron las flexiones de los elementos que definen cada recuadro, y los desplazamientos de sus nudos.*

*Lo primero permite que no se superen las tensiones de fisuración sobre la bóveda, y reduce la importancia de los incrementos de desplazamiento producidos por la fluencia que son así básicamente consecuencia tan solo del acortamiento axil de las secciones y no de sus giros. La reducción de los desplazamientos de los nudos facilita las operaciones de nivelación previa de los encorados, y disminuye la importancia de las posibles diferencias entre los valores teóricos de las contraflechas y los introducidos en la obra.*

*Las demás etapas corresponden al hormigonado de las dovelas de la bóveda, fustes de pilas, colocación de tableros metálicos, y movimientos de carros y grúas. Durante el avance de las dovelas de la bóveda de un recuadro es necesario ayudar a dichos elementos atirantándolos provisionalmente al tablero. Estas diagonales "auxiliares", de menor importancia que las de triangulación del recuadro, se eliminan al final de cada una de las etapas de regulación de diagonales principales, por lo que no influyen en el posterior avance.*

*Los enlaces entre las nuevas barras que se van colocando y la parte ya construida, no cambian de configuración a lo largo de la obra, excepto en algunas que corresponden al cordón superior. Estos tramos se montan apoyándolos sobre el extremo ya construido; después se elimina la articulación y pasan a tener continuidad total con el resto del cordón de tracción.*

*Los cables de retenida van retesándose de forma activa para reducir los des-*

plazamientos del voladizo, y conseguir los mismos fines ya indicados.

#### (b) Comprobaciones.

Se comprobaron en todo momento las tensiones en bóveda durante el proceso constructivo.

Las tensiones se componen de dos sumandos. En primer lugar las correspondientes a la situación de las secciones sin la fase 3, que es la losa superior, situación que se denomina en artesa. Para los frentes del voladizo esta situación es la pésima en muchos casos, de modo que ha sido preciso realizar un pretensado con barras Diwidag entre las dovelas 2 y 3, 5 y 6, 9 y 10, 13 y 14, para mantener las cabezas de la artesa dentro de los límites previstos, inferiores a la tensión de fisuración (Figura 36).

En las últimas dovelas, números 17, la configuración en artesa produce tracciones del orden de 5 N/mm<sup>2</sup>. Sin embargo dado que la influencia de esta pequeña zona fisurada en el desplazamiento del sistema será despreciable, al estar en el borde del voladizo máximo, se ha optado por reforzar la armadura pasiva de modo que se reduzca el tamaño de las fisuras.

En segundo lugar aparecen los incrementos de esfuerzos sobre la sección

completa que producen tensiones a sumar a las que existían en la artesa después de endurecer la fase 3. Los máximos permanecen dentro del rango previsto.

Por último, se procede a la retirada del sistema de tablero y diagonales provisionales, llegándose a la situación de bóveda exenta. En esta configuración todas las tensiones se reducen.

#### 4.6. Sistemas Auxiliares Metálicos y Auscultación en tiempo real

Dos de las aportaciones más importantes de estos puentes son el cuidado diseño y ejecución de toda la perfilera metálica auxiliar, así como la efectiva instrumentación que se hizo de los principales elementos de la estructura, con un tratamiento de datos posterior que permitió controlar en tiempo real los esfuerzos sobre cada uno de los elementos resistentes. Se instrumentaron los tirantes superiores, cables de retención, diagonales rígidas, secciones de arranque y riñones de los arcos con sus correspondientes gradientes térmicos y temperatura ambiente. Asimismo se controlaron en todo momento el movimiento longitudinal en la cabeza de las pilas de retención, y la velocidad y dirección del viento.

El sistema de monitorización controlado por ordenador tenía 120 canales de

advance of the segments of a vault of one box, these elements must be helped by provisionally staying them to the deck. These "auxiliary" diagonals, less important than the box triangulation's, are removed at the end of each of the main diagonals' regulation stages and do not, therefore, influence the subsequent advance.

The links between the new bars which are being placed and the part already built do not change in configuration throughout the work, except in some relating to the top flange. These stretches are mounted by supporting them on the end already built; then the linkage is removed and they are totally continuous with the rest of the traction flange.

The retaining cables are actively retensioned to reduce the cantilever's movements and achieve the same ends as already indicated.

#### (b) Checks

The vault tensions were checked at all times during the construction process.

The tensions are made up of two addends. Firstly, those relating to the situation of the sections without phase 3, which is the top slab, which situation is called trough. This situation is the worst in many cases for the cantilever fronts so that it was necessary to carry out prestressing with Diwidag bars between segments 2 and 3, 5 and 6, 9 and 10 and 13 and 14 to keep the trough heads within the limits provided for, which are lower than the cracking tension (Figure 36).

The trough configuration in the last segments, numbers 17, produces tensile stresses in the order of 5 N/mm<sup>2</sup>. However, given that the influence of this small cracked area on the system's movement will be negligible, on being at the edge of the maximum overhang, it was decided to strengthen the passive reinforcement so that the size of the cracks diminishes.

Secondly, increases in stresses on the full section occur, producing tensions to be added to those that existed in the trough after phase 3 hardened. The maximums are within the range provided for.

Finally, the deck and provisional diagonals system is removed, reaching the sit-

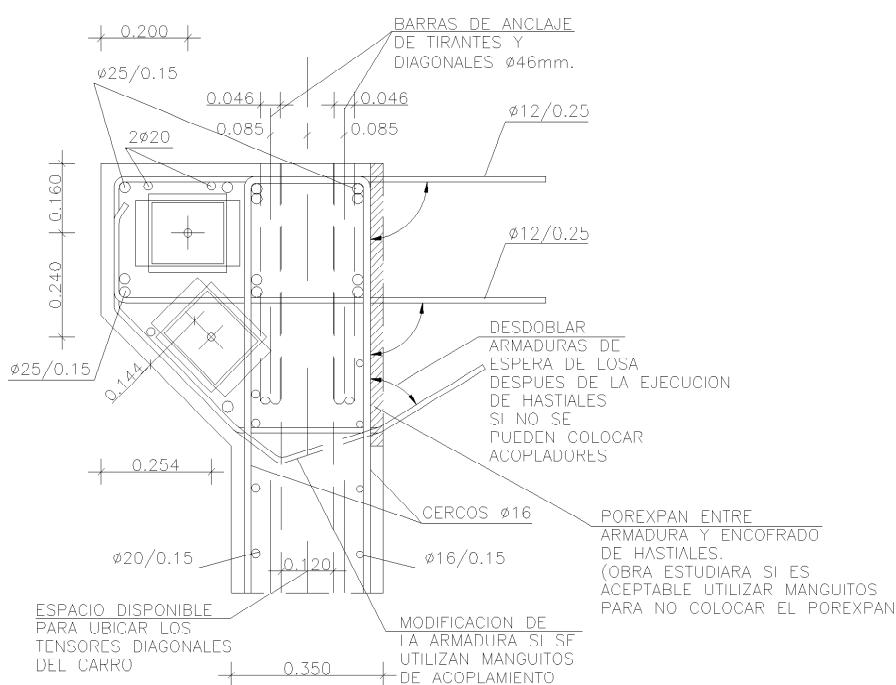


Fig.36. Detalle de ejecución del pretensado local del arco.  
Fig.36. Detail of the arch's local prestressing.

uation of a self-standing vault. All tensions are reduced in this configuration.

#### 4.6. Auxiliary Metal Systems and Real Time Auscultation

Two of the major contributions of these bridges are the careful design and construction of the auxiliary metal sections, as well as the effective instrumentation made on the main structure elements, with subsequent data processing that enabled the stresses on each of the resistant elements to be real time monitored. The top stays, retaining cables, rigid diagonals, springing sections and haunches of the arches with their pertinent heat gradients and ambient temperature were instrumented. Likewise, the longitudinal movement at the head of the retaining piers and wind direction and speed are monitored at all times.

The computer controlled monitoring system had 120 channels capacity (60 per semi-arch) and automatically recorded the state of the structure every 15 minutes. This interval was reduced to 2 minutes when a singular operation was being undertaken.

The sensors used in the instrumentation were the following types:

- Load cells to measure forces in retaining cables and flexible diagonals.
- Clinometers to measure turns and movements at the head of the piers located at the arch springings.
- Extensometers for measuring tensions in arch reinforcements (springing sections, haunches and crowns), in rigid diagonals and in traction flange beams.
- Thermometers for measuring gradients in concrete and steel.

The data base was real time updated after each measurement so that a possible electric supply failure would not lead to a loss of information.

The sensors were connected to the data gathering centre by means of shielded cable hoses reaching hundreds of metres in length. The system's design minimised electrical perturbations, compensated for signal drop in lines and allowed for reconnection without



Fig.37. Ejemplo de gráfico acumulado en tiempo real de uno de los sensores controlados.  
Fig.37. Example of a real time accumulated graph of one of the monitored sensors.

throwing any sensor that had suffered a cable break out of adjustment.

The structure's state could be monitored at all times, with graphs like those in figure 37, as well as a pictogram like that shown in figure 38.

The system had a natural language based on variables enabling not only direct measurement values to be monitored and analysed, but also complex expressions (which may include structural concepts). The information process included statistical analysis and modelling, taking such to be the obtaining of the behavioural scheme of a variable as a weighted sum of others influencing it. The model was useful for making predictions of future behaviour and for discounting the influence of one or more variables, in a given phenomenon; for example, the dependence of the retaining force in connection with the arch's thermal gradient.

- The control software is the Kinesia developed MERLIN program which performs all the data gathering and analysis functions (statistical, frequential, structural), publication

capacidad (60 por semiarco) y realizaba un registro automático del estado estructural cada 15 minutos. Este intervalo se reducía a 2 minutos cuando se estaba llevando a cabo una operación singular.

Los sensores utilizados en la instrumentación eran de los tipos siguientes:

- Células de carga para medida de fuerzas en cables de retenida y diagonales flexibles.
- Clinómetros para medida de giros y desplazamientos en las cabezas de las pilas situadas en los arranques de los arcos.
- Extensómetros para medida de tensiones en armaduras de arcos (secciones de arranques, riñones y claves), en diagonales rígidas y en vigas del cordón de tracción.
- Termómetros para medida de gradientes en hormigón y acero.

Tras cada medida la base de datos se actualizaba en tiempo real, de forma

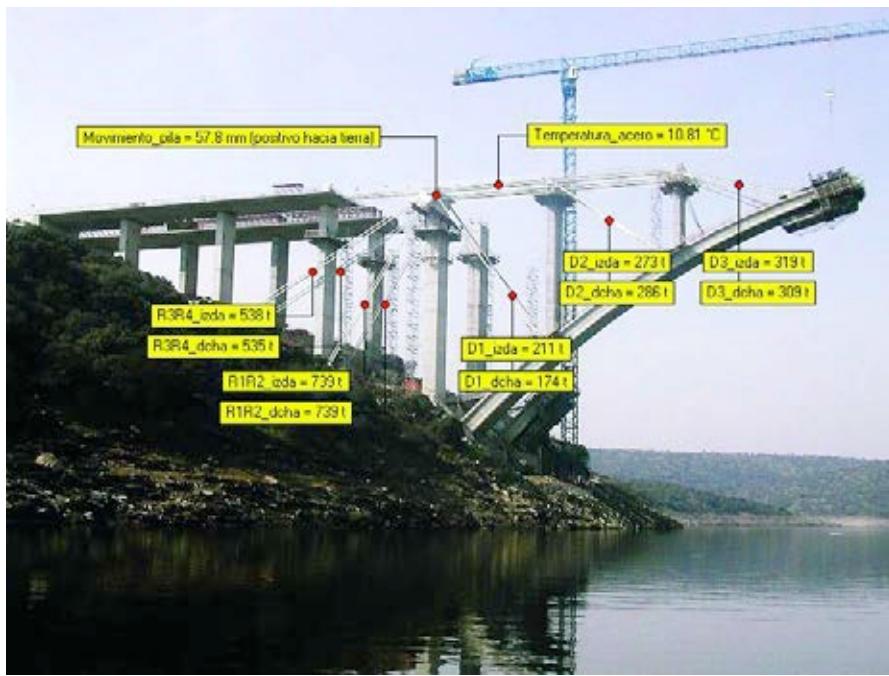


Fig.38. Pictograma en tiempo real de las principales magnitudes controladas.  
 Fig.38. Real time pictogram of the main magnitudes monitored.

que un eventual fallo de alimentación eléctrica no diese lugar a una pérdida de información.

Los sensores se conectaban al centro de adquisición de datos mediante mangueras de cable apantallado que alcanzaban longitudes de centenares de metros. El diseño del sistema minimizó las perturbaciones eléctricas, compensaba las caídas de señal en las líneas y permitía la reconexión sin desajuste de cualquier sensor que hubiera sufrido una rotura de cableado.

En todo momento se pudo controlar el estado de la estructura, con gráficos como los de la Figura 37, así como con un pictograma como el que se muestra en la Figura 38.

El sistema disponía de un lenguaje natural basado en variables que permitía monitorizar y analizar no sólo valores de medida directos, sino, también, expresiones complejas (que pueden incluir conceptos estructurales). El proceso de la información incluía el análisis estadístico y la modelización, enten-

(vector graphs, layout), as well as all the support for remote control through a page in Internet, including a chat service.

Part of the instrumentation was left installed as final to thus be able to gather data, at the Owner's requirement, during the structure's whole lifetime. Specifically, all non auxiliary sensors were left (basically, those measuring stresses at arch springings, haunches and crowns) plus a set of additional temperature probes to characterise the action and thermal performance of the structures so that the concrete's rheological phenomena may be monitored at all times.

With regard to the auxiliary elements used in the staying and triangulation system, the materials employed in building the first carriageway were reused for the second arch. The structural system was perfectly two-hinged for the rigid diagonals and retaining cables, mounted with lugs and bolts, that allowed for a novel rolled steel section tensioning system, using prestressed steel bars, and the use of bolts housed in slit orifices and metal gauges, thus achieving precisions in the order of one millimetre in elongations (Figure 39).

All cables, both auxiliary and retaining, are tensioned from the bottom anchorings, the design of which was drawn up for using a single wire jack, with overall force monitoring through the instrumentation system (Figures 40 and 42).

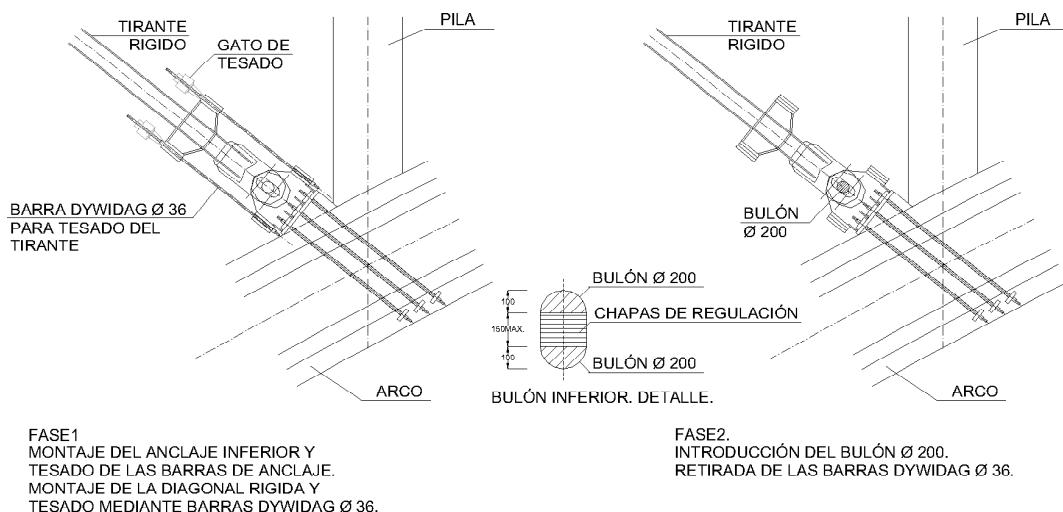


Fig.39. Esquema de tesado de las diagonales rígidas.  
 Fig.39. Diagram of rigid diagonal tensioning.



Fig.40. Detalle de tesado de los cables de retenida.  
Fig.40. Detail of retaining cable tensioning.

*The top tensile stays are made with HEB sections with a cross section varying at the rate at which they need to resist less stress, and are joined by prestressed bolts to box section steel lintels anchored to the piers by means of Dywidag bars. The lugs to which the various provisional staying, retaining and rigid diagonal cables arrive protrude from this lintel (Figures 35 and 41).*

**C. Concrete Arch Bridge Doctorate Notes.** Carlos Siegrist Fernández. Civil Engineers University School. Madrid Polytechnic University

diéndose por tal la deducción del esquema de comportamiento de una variable como suma ponderada de otras que le influyen. El modelo fue útil para hacer predicciones del comportamiento futuro y para descontar en un fenómeno dado la influencia de una o más variables; por ejemplo, la dependencia de la fuerza de retenida en relación con el gradiente térmico del arco.

- El software de control es el programa MERLIN, desarrollado por Kinesia, que realiza todas las funciones de adquisición y análisis de datos (estadístico, frecuencial, estructural), publicación (gráficos vectoriales, maquetación), así como todo el soporte para el control remoto a través de una página en Internet, incluso servicio de *chat*.

Parte de esta instrumentación quedó instalada como definitiva para así poder tener datos, a requerimiento de la Propiedad, durante todo el período de vida de la estructura. En concreto se dejaron todos los sensores que tenían carácter no auxiliar (básicamente, los que miden esfuerzos en arranques, riñones y claves de arcos), más un conjunto de sondas de temperatura adicionales destinadas a caracterizar la acción y el comportamiento térmico de las estructuras, de manera que pueda controlarse en todo momento los fenómenos reológicos del hormigón.

En cuanto a los elementos auxiliares empleados en el sistema de atrantamiento y triangulación, los materiales empleados en la construcción de la primera calzada fueron reutilizados para el segundo arco. El sistema estructural era perfectamente biarticulado para las dia-



Fig.41. Detalle de nudo en pila sobre el arco.  
Fig.41. Detail of a pier node on the arch.

## 5. REFERENCES

A. Almonte Viaduct Construction. Natividad García Mayor. ACCIONA Infraestructuras. 3rd ACHE Congress. Zaragoza, 2005.

B. Almonte Viaduct Construction. E. Javier Ayala Luna. ACCIONA Infraestructuras. Spanish Road Association. Conference on Bridge Lifetimes. San Sebastián, 2005.

gonales rígidas y cables de retenida, montados con orejetas y bulones, que permitían un novedoso sistema de tesado de los perfiles de acero, mediante barras de acero pretensado, y el empleo de bulones alojados en orificios rasgados y galgas metálicas logrando así precisiones en los alargamientos del orden del milímetro (Figura 39).

Todos los cables son tesados desde los anclajes inferiores, tanto los auxiliares como los de retenida, cuyo diseño se previó para el empleo de gato unifilar, con control de fuerza global a través del sistema de instrumentación (Figuras 40 y 42).

Los tirantes superiores de tracción se materializan mediante perfiles HEB de sección variable conforme van precisando resistir menos esfuerzo, y se unen mediante tornillos pretensados a unos dinteles de acero de sección cajón anclados a las pilas mediante barras tipo Dywidag. De estos dinteles salen las

orejetas a las cuales llegan los diversos cables de atirantamiento provisional, retenidas y diagonales rígidas (Figuras 35 y 41).

## 5. REFERENCIAS

A. Construcción del Viaducto de Almonte. Natividad García Mayor. ACCIONA Infraestructuras. III Congreso de ACHE. Zaragoza, 2005.

B. Construcción del Viaducto de Almonte. E. Javier Ayala Luna. ACCIONA Infraestructuras. Asociación Española de la Carretera. Jornadas sobre la Vida de los Puentes. San Sebastián, 2005.

C. Apuntes de Doctorado de Puentes Arco de Hormigón. Carlos Siegrist Fernández. E.T.S.I Caminos Canales y Puertos, U.P.M



Fig.42. Detalle de tesado de diagonal rígida.  
 Fig.42. Detail of rigid diagonal tensioning.

## FICHA TÉCNICA (TECHNICAL INFORMATION)

**Nombre de la obra (Name):**

**Propiedad de la obra (Owner):**

Director de Obra (Manager):

Ayudante del Director de Obra (Assistant Manager):

**Autores del Proyecto y Asistencia**

**Técnica a la Empresa constructora**

(Designers and Technical Assistance to the Construction Company):

**Empresa constructora (Construction Company):**

Jefe de Obra (Manager):

Director Proyectos de Construcción (Construction Design Manager):

**Estructuras auxiliares:**

Director de Proyectos Especiales (Special Projects Manager):

**Instrumentación (Instrumentation):**

**Asesoría geotécnica (Geotechnical Adviser):**

**Asistencia técnica a la Dirección de obra**

(Technical Assistance to the Site Management):

**Presupuesto viaductos completos**

(Cost estimate, Complete viaducts):

**PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS DEL PUENTE (MAIN CHARACTERISTICS OF THE BRIDGE):**

Luz de los arcos (Arch span):.....	184 m
Flecha de los arcos (Arch deflection): .....	42 m
Sección de los arcos (Arch section): .....	cájon de 6.60 m de ancho y canto variable entre 3,00 y 1,80 m
Hormigón en tablero (Deck concrete):.....	6720 m <sup>3</sup>
Hormigón en arco (Arch concrete): .....	2749 m <sup>3</sup>
Hormigón en pilas (Pier concrete): .....	2642 m <sup>3</sup>
Acero de armazón B 500 S (Reinforcing steel):.....	1.937.924 kg
Acero en tirantes y retenidas (Stay and retaining cable steel): .....	65.477 kg
Acero en anclajes al terreno (Ground anchor steel):.....	75.520 kg
Acero estructural en medios auxiliares (Auxiliary equipment structural steel): .....	544.343 kg
Acero activo en tablero (Active deck steel):.....	181.830 kg



MUCHOS SE FIJARÁN  
EN LO QUE HACEMOS.  
NOSOTROS PREFERIMOS FIJARNOS  
EN CÓMO LO HACEMOS.

**ACCIONA** Infraestructuras (antes NECSO), lleva años situada en la vanguardia del I+D+i y nuestras obras han sido siempre reconocidas por su excelencia técnica, tanto en su complejidad como en su valor estético. Pero para nosotros, más importante que lo que se construye es cómo se construye.

Por eso, siguiendo nuestra vocación innovadora, todos nuestros proyectos deben cumplir antes de ponerse en marcha con un exigente criterio de sostenibilidad que asegure el progreso social desde el máximo respeto al medio ambiente.

Esto puede comprobarse ya en obras como el Puente Siekierkowski en Polonia; la Presa de Montearagón en Huesca; el Viaducto de Almonte en la Autovía Hinojal - Cáceres; en los trabajos realizados con el dique flotante Kugira en los puertos de Ferrol, Cartagena y Tarragona; y en varios tramos del Metro de Madrid.

Para hacer de este mundo un sitio mejor donde vivir hoy, y mañana.

**ACCIONA.**  
**POR DELANTE DE LOS SUEÑOS.**

[www.accionia.com](http://www.accionia.com)

 **accionia**  
Infraestructuras



VIAS DE COMUNICACIÓN • OBRAS HIDRÁULICAS • OBRAS MARÍTIMAS • OBRAS SUBTERRÁNEAS • PLANTAS  
INDUSTRIALES • EDIFICACIÓN Y ARQUITECTURA • EDIFICACIÓN INDUSTRIAL • RESTAURACIÓN Y REHABILITACIÓN

# Comportamiento estructural de puentes de dovelas prefabricadas con pretensado exterior y junta seca.

## Primera parte: Ensayos de vigas

***Structural behaviour of precast segmental concrete bridges with external prestressing and dry joints.  
Part 1: Beam Tests***

♦  
**José Turmo**

ETS de Ingenieros de Caminos. Universidad de Castilla-La Mancha

♦  
**Joel Piernagorda**

Dept. de Ingeniería de la Construcción. Universidad Politécnica de Cataluña

♦  
**Gonzalo Ramos**

Dept. de Ingeniería de la Construcción. Universidad Politécnica de Cataluña

♦  
**Ángel Carlos Aparicio**

Dept. de Ingeniería de la Construcción. Universidad Politécnica de Cataluña

### RESUMEN

Este trabajo de investigación presenta un estudio sobre el comportamiento de los puentes de dovelas de hormigón con pretensado exterior y juntas secas conjugadas, centrándose en el estudio de la respuesta a solicitudes de flexión y cortante combinados, en servicio y en rotura. Se evalúa, asimismo, la posibilidad de sustituir total o parcialmente la armadura convencional de las dovelas tras la inclusión de fibras metálicas en el hormigón. Se presentan unos ensayos realizados sobre seis vigas con distinto grado de pretensado sometidas a flexión y a cortante, unas realizadas con hormigón convencional y otras con hormigón reforzado con fibras de acero. De todo lo anterior se han extraído interesantes conclusiones referentes al armado de las dovelas y al comportamiento global de este tipo de estructuras.

*conclusions have been reached regarding the reinforcement detailing in the segments and the global behaviour of segmental structures with dry castellated joints.*

### ABSTRACT

*This work presents a study of the behaviour of segmental concrete bridges with external prestressing, focussing on the response under combined flexure and shear, in the service and ultimate limit states. The possibility of replacing entirely or partially the conventional reinforcement of the segments through the incorporation of steel fibres in the concrete is also evaluated. Tests have been performed on large-scale beams with different levels of prestressing for evaluating the response under flexure and shear. These tests were conducted on conventional and steel fibre reinforced concretes. Significant*

### 1. INTRODUCCIÓN

Los puentes de dovelas de hormigón prefabricadas con pretensado exterior y junta seca se asocian a un proceso constructivo que pasa por ser el más rápido en su género. Estos puentes son construidos vano a vano. Para la construcción de cada vano las dovelas se disponen una junto a la otra suspendidas de una viga o apoyadas en una cimbra móvil y son ensambladas con pretensado exterior. En general no es necesaria la aplicación de una resina epoxy entre caras de dovelas. Son precisamente los puentes de dovelas con juntas secas sin resina con pretensado exterior los que son objeto de este estudio. Su característica más significativa es que no existe armadura adherente, ni activa ni pasiva, atravesando la junta. El primer ejemplo construido fue el Long Key Bridge<sup>1</sup>. Un ejemplo más reciente lo encontramos en Bangkok<sup>2</sup>.

Ante cargas de servicio, estos puentes se dimensionan para que no se alcance el estado límite de descompresión, las secciones mantengan una compresión mínima de  $\sigma_n = 0,5$  MPa y las juntas permanezcan cerradas. Cuando la sobrecarga aumenta hasta alcanzar los niveles de Estado Límite Último las juntas se abren ostensiblemente (Figura 1), la estructura pierde rigidez rápidamente y alcanza una flecha considerable. Además, no hay armadura pasiva que cruce la junta. De ahí

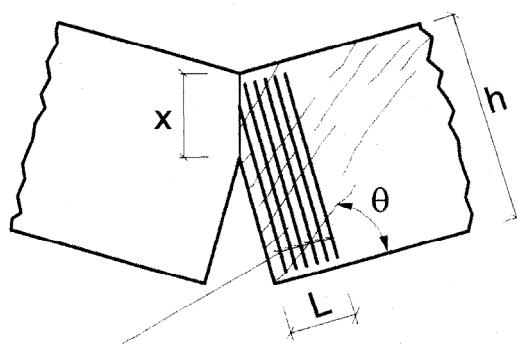


Figura 1. Junta abierta en ELU.

tema más complejo. La teoría universalmente aceptada propone que el cortante es transmitido a través de las juntas por forjados y almas mediante dos mecanismos cualitativa y cuantitativamente diferentes. El primero recoge el efecto del apoyo de las llaves conjugadas de las que normalmente están provistas estas juntas. El segundo representa la fuerza de rozamiento que surge cuando dos superficies planas y comprimidas intentan deslizar la una contra la otra y que es proporcional a las compresiones actuantes<sup>4</sup>.

Uno de los puntos controvertidos en la evaluación de la resistencia a cortante de una junta es la cuantificación de la parte lisa comprimida de la sección que es susceptible de transmitir cortante ( $A_{sm}$ ). Algunos autores<sup>5,6</sup> acotan la parte de forjado capaz de transmitir cortante únicamente a la zona próxima a almas.

Otro punto que enfrenta a los investigadores es el armado de la dovela en la proximidad de la junta abierta. Algunos autores<sup>5,6</sup> defienden la necesidad de disponer una armadura para suspender el cortante en la proximidad de la junta abierta. En la Figura 2 se justifica gráficamente la inclusión de esta armadura.

Figura 2. Bielas de cortante con flexión positiva y armadura de suspensión<sup>6</sup>.

Aunque ya han sido ensayados modelos de puentes de dovelas con armadura no adherente bajo esfuerzos de flexión y

que los momentos flectores tengan que ser resistidos bien por más armadura activa bien por mayores tensiones iniciales en el acero. En puentes isostáticos, el ELU de solicitudes normales, y no el ELS de descompresión, es el que guía el diseño<sup>3</sup>.

La transferencia de cortante a través de juntas abiertas es un

cortante combinados<sup>7,8,9,10</sup>, los autores creen que se aborda por primera vez un estudio experimental completo del comportamiento de estas estructuras tan singulares que incluya específicamente la armadura de suspensión y el ancho efectivo para la transmisión de cortante. También por primera vez se hacen ensayos a gran escala de este tipo de vigas con SFRC y se compara su comportamiento con vigas similares realizadas con hormigón convencional.

## 2. ESTUDIOS ANALÍTICOS

La respuesta de las vigas convencionales de hormigón ante solicitudes tangentes, no se puede estudiar a nivel seccional. La formación de un mecanismo de celosía para la transmisión del cortante, antes de que se produzca la rotura, obliga a realizar un estudio espacial de la respuesta a cortante. De una manera análoga, la respuesta estructural de las vigas de hormigón con junta seca y pretensado exterior impide un mero análisis seccional para evaluar la respuesta a cortante.

Es sabido que, en una viga cualquiera, el cortante  $V$  actuante en una sección  $x$  queda relacionado matemáticamente con el momento flector exterior  $M$  mediante la ecuación 1.

$$V(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} \quad (1)$$

El momento flector exterior  $M$  en cada sección  $x$  de la viga es compensado por un par de fuerzas compuesto por un axil de compresión  $N_c$  y por un axil de tracción  $N_s$ , separados un brazo mecánico  $z$  (ecuación 2).

$$M(x) = N_s \cdot z = N_c \cdot z = N \cdot z \quad (2)$$

La ecuación 1, por tanto, se puede elaborar transformándose de la siguiente manera:

$$V(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = \frac{\partial(N \cdot z)}{\partial x} = z \cdot \frac{\partial(N)}{\partial x} + N \cdot \frac{\partial(z)}{\partial x} \quad (3)$$

En las vigas de hormigón convencional, el brazo mecánico  $z$  permanece aproximadamente constante entre dos secciones contiguas de la viga, al menos en los primeros estadios de carga, por lo que

$$\frac{\partial(z)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

y

$$V(x) = z \cdot \frac{\partial(N)}{\partial x} \quad (5)$$

La ecuación 5 es lo que tradicionalmente se conoce como el efecto viga, y conduce a una distribución de tensiones tangenciales repartidas a lo largo y ancho de la sección transversal (Figura 3.a), de modo que se suelen disponer unos cercos para que, cuando el alma de la viga fisure por cortante, se resistan

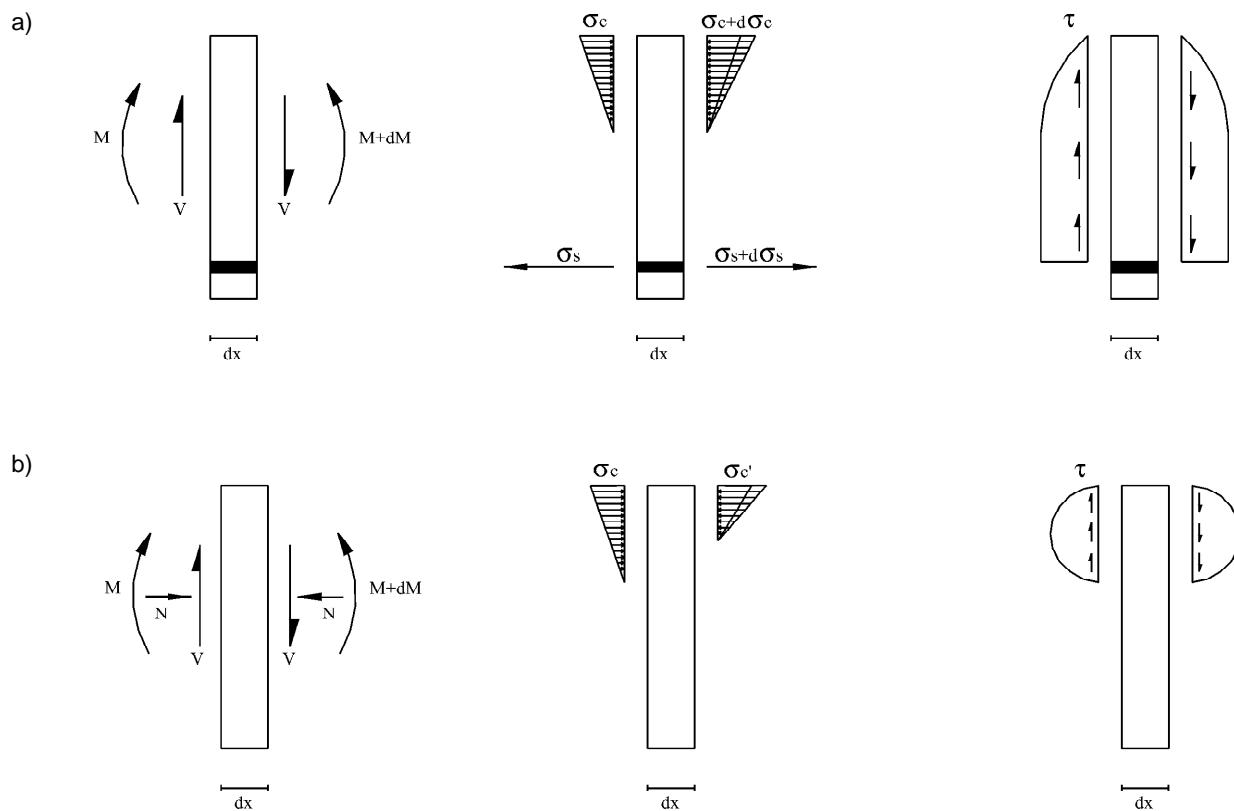


Figura 3. Tensiones normales y tangenciales en una viga de hormigón armado (a) y en una viga de dovelas con pretensado exterior (b).

las tracciones que antes soportaba el hormigón (analogía de la celosía). Si, por cualquier circunstancia, se pierde la adherencia entre la armadura longitudinal y el hormigón que la rodea, la armadura es incapaz de variar su tensión entre dos secciones de la viga, lo que implica en este caso

$$\frac{\partial(N)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

y

$$V(x) = N \cdot \frac{\partial(z)}{\partial x} \quad (7)$$

La ecuación 7 se conoce como efecto arco, e implica que el cortante es resistido por inclinación del eje de compresión. En general, estos dos mecanismos se superponen antes de que una viga agote por solicitudes tangentes.

En una estructura de dovelas, con pretensado exterior, donde no existe armadura pasante, y el acero de pretensado sólo entra en contacto con el hormigón en anclajes y desviadores, el eje permanece constante en todas las secciones de la viga (aunque aumente con el nivel de carga), siendo por tanto el efecto arco el responsable de la transmisión de cortante. Así

pues, tensiones longitudinales de compresión y tensiones tangenciales se asocian, de modo que éstas están siempre presentes allí donde se encuentren aquéllas. La distribución de tensiones normales y tangenciales en una sección de la estructura queda representada en la Figura 3.b.

### 3. CAMPAÑA EXPERIMENTAL

#### 3.1. Diseño de los ensayos

Se ensayaron a cortante un total de seis vigas con sección transversal en doble T de 0,60 m de canto y 7,60 m de longitud, tres de ellas de hormigón convencional (PC) y otras tres de hormigón reforzado con fibras de acero (SFRC). Las vigas estaban provistas de juntas secas conjugadas, con tres llaves de cortante cada una de 9 cm de altura.

Estos ensayos pueden dividirse en dos series. La primera constaba de cuatro vigas biapoyadas de 7,20 m de luz, compuestas de tres dovelas de longitud variable ensambladas con pretensado exterior, a las que se les aplicaba una carga exterior  $Q_1$  llevándolas hasta rotura (Figura 4). Los ensayos de los que constaba esta serie se denominaron:

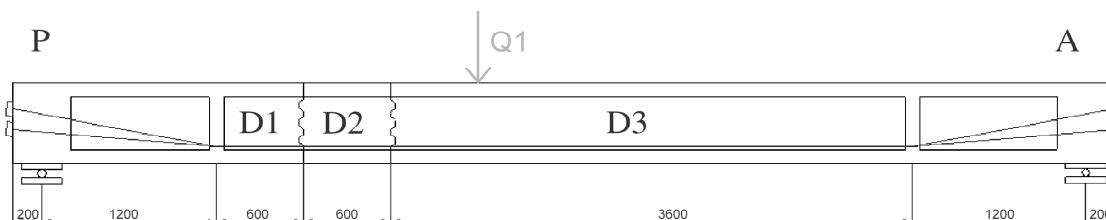


Figura 4. Ensayos V1. Dimensiones en mm.

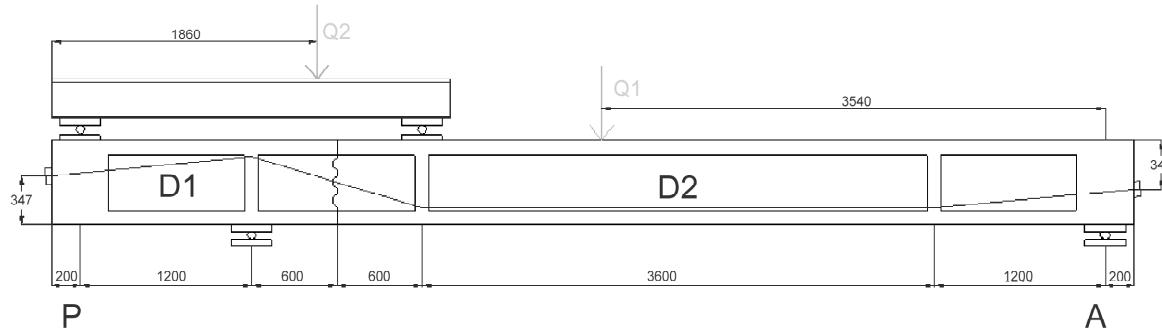


Figura 5. Ensayo V3. Dimensiones en mm.

1. V1-PC-35. Ensayo sobre una viga de hormigón de  $f_c=30$  MPa con un axil de pretensado de 0,350 MN.
2. V1-PC-70. Ensayo sobre una viga de hormigón de  $f_c=30$  MPa con un axil de pretensado de 0,650 MN.
3. V1-SFRC-35. Ensayo sobre una viga de hormigón reforzado con fibras de  $f_c=30$  MPa con un axil de pretensado de 0,290 MN.
4. V1-SFRC-70. Ensayo sobre una viga de hormigón reforzado con fibras de  $f_c=30$  MPa con un axil de pretensado de 0,650 MN.

Los ensayos V1-PC tenían como objetivos el verificar el comportamiento de la junta abierta ante solicitudes de cortante, el cuantificar la influencia del axil de pretensado en la resistencia de la junta y de la estructura, y estudiar la eficacia de la armadura de cortante próxima a la junta abierta, para determinar si es necesario incluir la armadura de suspensión propugnada por algunos autores<sup>5,6</sup>. Con los ensayos V1-SFRC, complementarios de los anteriores, se quería además tantear la posibilidad de la sustitución de la armadura convencional de cortante en el caso de utilización de hormigones con fibras de acero. Para ello, la armadura convencional en estas vigas se eliminó por completo (salvo unos refuerzos longitudinales para evitar roturas prematuras por flexión en la dovela más larga y las armaduras presentes en anclajes y desviadores).

La segunda serie intentaba profundizar en el comportamiento de la junta abierta en la transmisión de cortante. En concreto, se pretendía medir la resistencia de la junta y comprobar la colaboración del forjado comprimido a la hora de transmitir cortante en estructuras con relaciones (luz de cortante)/d (canto útil) mayores que las empleadas en los ensayos de Fouré<sup>10</sup>. Para ello, se ensayaron a rotura dos vigas de 7,60 m de longitud y 0,60 m de canto, constituidas por dos dovelas, sometidas a tres puntos de carga (Figura 5). En cada estructura, que constaba de una luz principal de 6,00 m. y un voladizo de 1,40 m., se superaba el estado límite de descompresión mediante la actuación de una carga  $Q_1$ . Una vez conseguida la apertura de junta, se aplicaba la carga  $Q_2$  y se llevaba la viga a rotura, manteniendo constante la carga  $Q_1$ . La carga  $Q_2$ , permitía aumentar el cortante actuante en la junta, sin aumentar la ley de momentos flectores.

La disposición del ensayo V3 quería intentar reproducir las condiciones de una viga continua, en la que las juntas próxi-

mas a los apoyos se ven obligadas a soportar grandes momentos flectores y cortantes actuando concomitantemente. Se quería, además, comparar la influencia del SFRC en caso de vigas armadas con cercos. Las vigas se armaron convencionalmente, disponiendo una potente armadura de cortante en la zona de juntas (cercos φ16 cada 200 mm).

Los ensayos de los que constaba esta segunda serie se denominaron:

1. V3-PC. Ensayo sobre una viga de hormigón de  $f_{cm}=33$  MPa con un axil de pretensado de 0,250 MN.
2. V3-SFRC. Ensayo sobre una viga de hormigón reforzado con fibras de  $f_{cm}=38$  MPa con un axil de pretensado de 0,250 MN.

En la Figura 6, se representa la sección transversal de las vigas en zona de centro luz. Una definición geométrica más completa y los detalles de armado de estos ensayos se encuentran descritos en los trabajos de Piernagorda<sup>11</sup> y Turmo<sup>12</sup>.

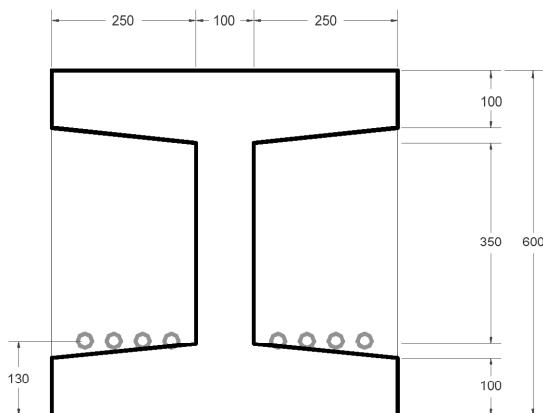


Figura 6. Sección transversal de las vigas.

### 3.2. Fabricación

El encofrado de las vigas se realizó mediante el serrado y unión de paneles fenólicos. Para configurar la geometría de la llave se utilizó chapa metálica moldeada en fábrica, que se adhirió al encofrado existente. La ferralla fue suministrada desde taller y posteriormente colocada en obra. En la Figura 7 se muestra un detalle de la disposición de la armadura en las vigas V1-SFRC. En la Figura 8, el armado de la viga V1-PC.



Figura 7. Armado de la viga V1-SFRC.



Figura 8. Armado de la viga V1-PC.

Nótese la diferencia, apreciable a simple vista, entre las cantidades de armado de las dos series.

El hormigón fue fabricado y transportado a obra desde planta. Las fibras (Dramix RC 65/35 BN) se incorporaron al camión hormigonera en la misma obra. Como se intentaba emular al máximo las condiciones reales de fabricación de los puentes de dovelas, el hormigonado se realizó en dos fases. En una primera fase se hormigonaron las dovelas extremas de la viga V1 (dovelas D1 y D3 de la Figura 4) y la dovela D1 de la viga V3 (Figura 5). Se procedió al vibrado con vibrador de aguja. Una vez endurecidas, se hormigonaron contra éstas la dovela central de la viga V1 y la dovela D2 de la viga V3. A los dos días se procedió al desencofrado.

El tesado fue realizado con el sistema BBR, mediante gato alevín. Las vigas V1-75 estaban provistas de ocho cables de pretensado, las V1-35, de cuatro, y las V3, de dos. El tesado se realizó desde el lado activo (marcado con una A en las Figuras 4 y 5).

### 3.3. Materiales

Para cada viga se usaron dos tipos distintos de hormigones. La dosificación de la mezcla por  $m^3$  fue 400 kg de cemento, 825 kg de arena (0-5 mm), 950 kg de grava (5-12 mm), 190 litros de agua y 0,9% de superplastificante. En el SFRC se añadieron, además, 60 kg/ $m^3$  de fibra Dramix RC 65/35 BN.

Las resistencias a compresión del día del ensayo y los asientos de cono quedan resumidos en la tabla 1. Como acero pasivo se emplearon barras corrugadas de acero de calidad B500S, suministradas cortadas y dobladas. Como acero activo se empleó acero Y 1860 S7 de 15 mm (0,6") de diámetro.

### 3.4. Instrumentación

Las tensiones del acero activo se controlaron mediante células de carga (modelo C6A de HBM, con una carga nominal de 0,5 MN). Las células se dispusieron en los extremos activo y pasivo en los ensayos V1-SFRC-35, V1-SFRC-70 y V1-PC-35. También se efectuaban medidas de los incrementos de deformación de los cables mediante galgas adheridas a los cables de pretensado tras el tesado (G). Además, se midieron flechas y aperturas de junta mediante extensómetros magnéticos (Temposonic). Con todas estas medidas se quería recabar información para poder deducir, no sólo la magnitud del pretensado actuante, sino también la pérdida de excentricidad del mismo.

En los ensayos V1-PC, con objeto de comprobar la distribución de tensiones normales en el ancho del forjado, se embedieron unas galgas (EG) en el ala superior de la viga, en la zona próxima a la junta. También se introdujeron unas galgas embebidas (EG) en el seno de la dovela para intentar determinar la distribución de tensiones en el interior de la dovela entre juntas abiertas. Los actuadores utilizados en los ensayos, dos

Tabla 1. Características físicas y mecánicas de los hormigones de las vigas UPC.

	PC		SFRC			
	D1	D3	D2	D1	D3	D2
Asiento del cono (cm)	16		15	11		16
$f_c$ (MPa)-V1	37,2		33,9	33,9		34,5
$f_c$ (MPa)-V3	40,7		33,1	40,0		38,1

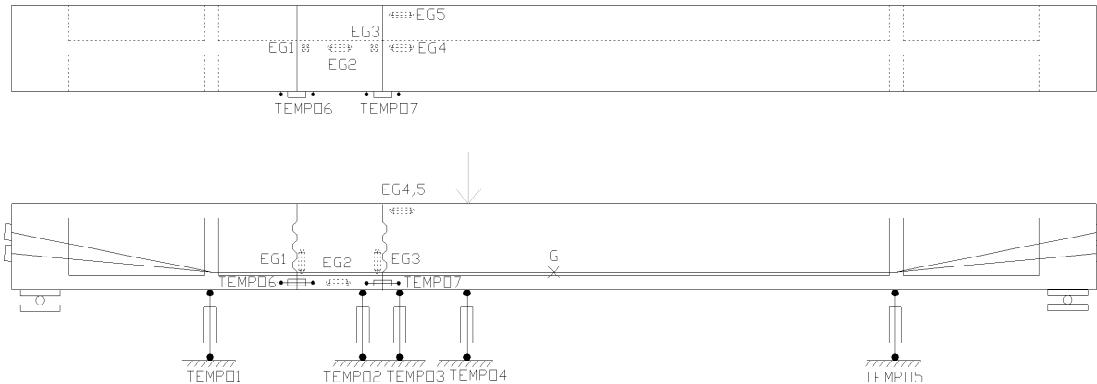


Figura 9. Instrumentación V1-PC.

gatos MTS de pistón hidráulico de 1 MN y 0,250 MN de capacidad, medían la carga aplicada con su propia célula de carga.

Se presenta a modo de ejemplo en la Figura 9, la distribución de la instrumentación dispuesta en la viga V1-PC.

### 3.5. Resultados

#### 3.5.1. Serie de ensayos VI

El comportamiento de las vigas es lineal hasta que se produce la descompresión de la junta (entre dovelas D2 y D3), momento en el cual se produce una pérdida drástica de rigidez y la junta se abre. La carga de descompresión está íntimamente ligada al axil de pretensado, y su valor en cada ensayo se puede deducir, tanto de los puntos de cambio de pendiente en las curvas carga-flecha (Figura 10), como de los gráficos carga-apertura de junta (Figura 11). Una vez descomprimida la junta, ésta continúa abriendo ante carga creciente y la flecha de la viga aumenta. La junta entre las dovelas D1 y D2 no llega a abrirse en ningún ensayo.

El comportamiento del pretensado medido en los anclajes a lo largo del ensayo V1-SFRC-70 queda definido en la Figura 12, siendo este gráfico cualitativamente similar a los obtenidos en los otros ensayos de la serie V1. En el gráfico se aprecia cómo el pretensado permanece prácticamente constante antes de alcanzar la carga  $Q_D=0,152\text{MN}$ , correspondiente a la descompresión de la junta. El pretensado sólo aumenta significativamente tras la apertura de junta, permaneciendo prácticamente constante antes de ésta. El incremento medio de pretensado en rotura llega a ser de un 45% con respecto al pretensado inicial (de  $\sigma_{p0}=574\text{MPa}$  hasta  $\sigma_{pf}=833\text{MPa}$ ), siendo mayor el incremento de tensión en los cables más cortos (medidos con la célula C2) que en los más largos (medidos con la célula C1). Los incrementos de tensión medidos en el anclaje activo coinciden con los medidos en el anclaje pasivo.

Las galgas embebidas sólo se dispusieron en los ensayos V1-PC. En la Figura 13 se reflejan las curvas carga-deformaciones en las galgas embebidas obtenidas en el ensayo V1-PC-70. El comportamiento de las galgas EG4 y EG5, situadas en el ala superior de la viga, es muy similar, aumentando paulatinamente sus deformaciones de compresión a medida que

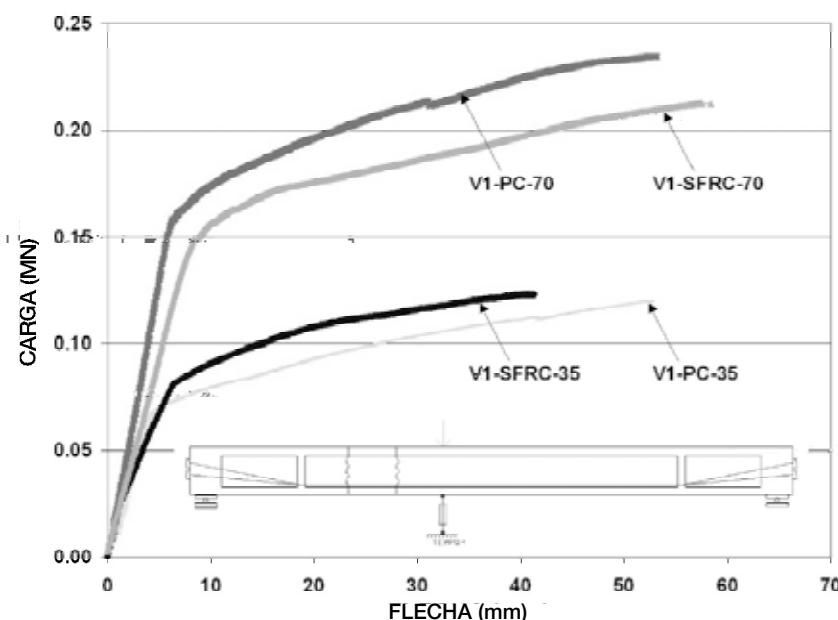


Figura 10. Gráfico carga-flecha bajo carga en ensayos V1.

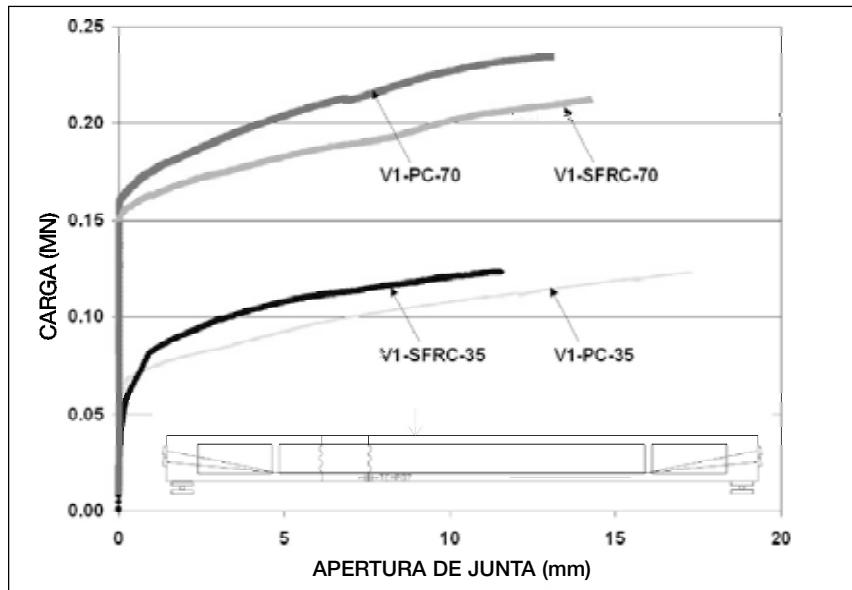
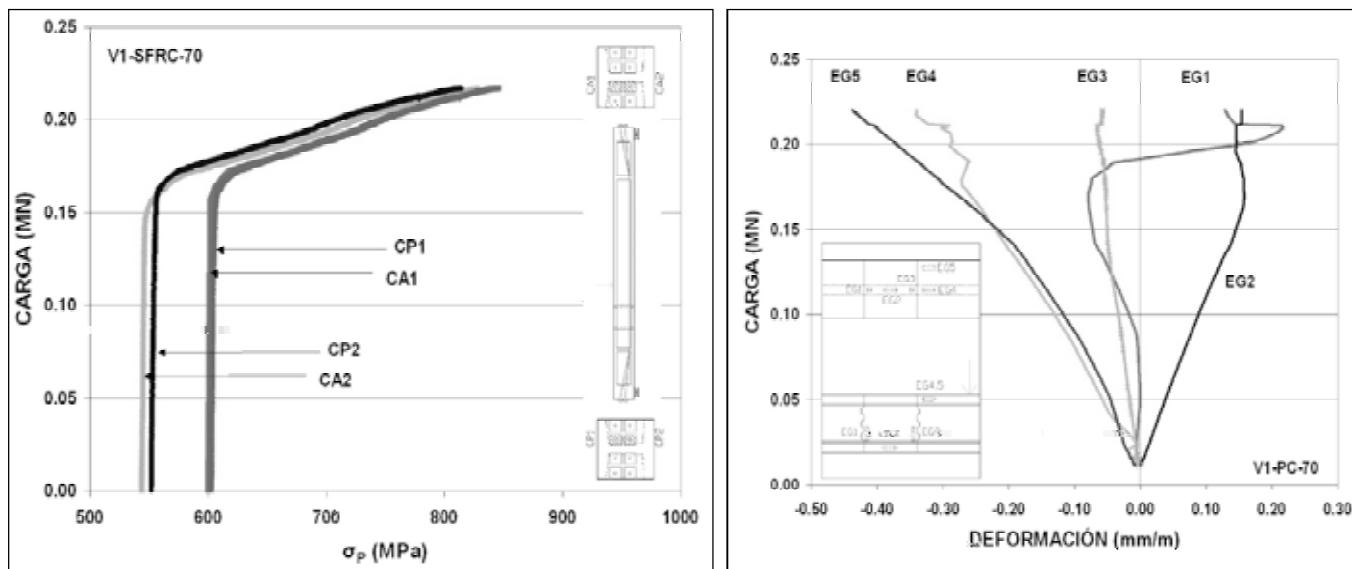


Figura 11. Gráfico carga-deformación en las galgas embebidas en el ensayo V1-PC-70.



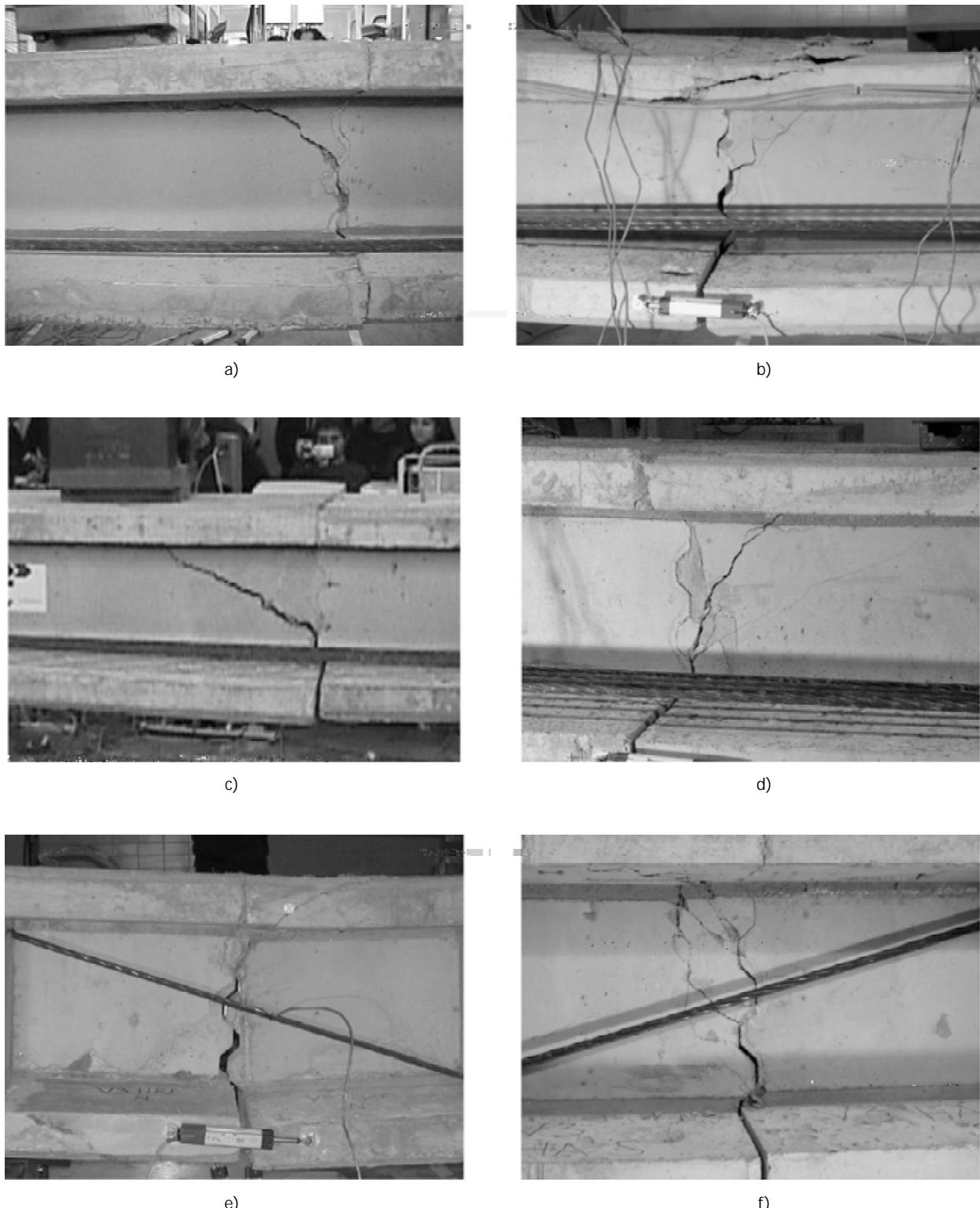


Figura 14. Fisuración obtenida en los ensayos.

V1-SFRC-35(a); V1-PC-35 (b)  
 V1-SFRC-70 (c) ; V1-PC-70 (d)  
 V3-SFRC (e) ; V3-PC (f).

la fibra neutra. De nuevo el armado de la dovela induce una bifurcación de la fisura en dos, de modo que la fisura progresa siguiendo el trazado de la armadura de cortante, perpendicular a la directriz de la pieza. Es esta fisura la que termina concentrando toda la apertura, discurriendo con una inclinación de 70°. La rotura se produce por penetración de la fisura de cortante en la cabeza de compresión para un cortante  $V_u=0,136$  MN.

En la viga V1-SFRC-35 apareció una fisura partiendo de la base de la llave central. Ésta progresó a 45° hasta llegar a la zona inferior del forjado, momento en el cual continuó desarrollándose en el plano horizontal de unión entre alma y forjado, formándose una fisura de rasante. Esta fisura alcanzó una apertura notable, como se aprecia en la Figura 14.a. La viga alcanzó un cortante máximo en la junta  $V_u=0,074$  MN. El ensayo fue interrumpido sin alcanzar la carga de rotura.

En la viga V1-SFRC-70 apareció una gran fisura que partía de la base de la llave inferior y progresaba hacia el punto de carga, con un ángulo de 30° (Figura 14.c). Esta fisura desarrolló una gran apertura, prolongándose la apertura de junta por el seno de la dovela a través de la fisura. Las deformaciones de la viga fueron considerables, apreciándose a simple vista. El ensayo fue interrumpido sin alcanzar la carga de rotura cuando la junta soportaba un cortante  $V_u=0,126$ .

### 3.5.2. Serie de ensayos V3

En los ensayos V3 se aplica en primer lugar una carga  $Q_1$  en la zona de centro luz. El comportamiento de las vigas es lineal hasta que se produce la descompresión de la junta, momento en el cual se produce una pérdida de rigidez y la junta se abre. Una vez descomprimida la junta, ésta continúa abriéndose ante carga creciente y la flecha de la viga aumenta ostensiblemente. Cuando la carga  $Q_1$  alcanza el valor  $Q_{1u}=0,198$  MN, la bomba de aceite se bloquea, manteniendo esta carga  $Q_{1u}$  constante hasta el final del ensayo. En ese momento, no se aprecia ningún tipo de fisuración en el seno de la viga.

Manteniendo constante la carga  $Q_{1u}$ , el segundo actuador introduce dos cargas en la estructura de valores  $0,31 \cdot Q_2$ , actuando en la zona de voladizo, y  $0,69 \cdot Q_2$ , actuando en el vano.

En la viga V3-PC, las fisuras surgen de las dos llaves superiores (Figura 14.f). Estas fisuras, que surgen de las llaves y avanzan hacia el punto de carga, son interceptadas por el cerco de cortante próximo a la junta. La fisuración progresó siguiendo este cerco y su apertura se hace considerable, concentrándose en la fisura que surge de la llave central. Esta fisura, con su apertura, hace que las caras de la junta situadas por debajo de ella se alejen. La viga termina rompiendo por combinación de tensiones normales y tangenciales en el forjado superior para un cortante en la zona de junta  $V_u=0,134$  MN.

La fisuración observada en la viga V3-SFRC parte de las dos llaves superiores (Figura 14.e). La primera fisura, que parte de la base de la llave superior, se forma para una carga  $Q_2=0,04$  MN. A partir de ese momento se aprecia una pérdida de rigidez en la estructura, aunque la presencia de fibras hace que esta pérdida de rigidez sea más gradual que en V3-PC. Esta fisura progresó a 45° hacia el punto de carga, sin inter-

ceptar ningún cerco. La viga no responde a los incrementos de carga aumentando la apertura de junta, sino aumentando la apertura de fisura, de modo que la fisura aparece ser una prolongación de la junta abierta. La junta abierta y la fisura dan la impresión de separar la estructura en dos mitades que tienen movimiento de sólido rígido, encontrándose el centro de rotación en el plano de la fisura. La fisura inicial progresó hasta romper el forjado por combinación de tensiones normales y tangenciales, para un cortante  $V_u=0,132$  MN.

## 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Los resultados de los ensayos sobre vigas quedan resumidos en la tabla 2. En ésta se incluye el cortante máximo  $V_{u,exp}$  en la junta crítica y el momento exterior  $M_d$  concomitante actuante en esta sección de junta. Se tabula, asimismo, el axil de pretensado  $P_f$  medido en los anclajes por las células de carga en el momento de alcanzarse este cortante máximo  $V_{u,exp}$ . Se añade el momento último respuesta  $M_u$  de la sección de junta crítica. Este momento  $M_u$  se ha calculado considerando la pérdida de excentricidad del pretensado  $\Delta e$  máxima medida en los ensayos. Antes de interpretar los resultados, hay que recordar que las vigas V1-SFRC no fueron llevadas a rotura.

El análisis de la tabla 2 parece descartar una rotura por solicitudes normales puras en el plano de la junta. El coeficiente de seguridad a la rotura  $\gamma_p$  calculado como cociente entre el momento actuante en la zona de junta  $M_d$  y el momento último respuesta de la sección de junta  $M_u$ , es siempre menor que la unidad, con valores que oscilan entre 0,73 y 0,89. La tabla 2 parece indicar una tendencia, y es que las vigas no rompen debido a agotar su capacidad por tensiones normales en la sección de junta. Esto, junto con el análisis de la propagación de la fisuración hasta rotura, indica una rotura por elevadas tensiones normales combinadas con tensiones tangenciales, con un mecanismo de rotura que no es seccional, sino espacial.

Del estudio teórico se deducía que en una estructura de dovelas, con pretensado exterior, donde no existe armadura pasante, es el efecto arco el responsable de la transmisión de cortante. Esto implicaba que las tensiones longitudinales de compresión y las tensiones tangenciales quedaban asociadas, transmitiéndose el cortante tras la apertura de junta a través de

**Tabla 2. Resultados vigas UPC**

	$V_{u,exp}$ (MN)	$P_f$ (MN)	$M_d$ (MNm)	$M_u$ (MNm)	$\Delta e$ (mm)	$\gamma_p$
V1-PC-35	0,081	0,582	0,217	0,247	42	0,88
V1-SFRC-35	0,074	0,529	0,195	0,234	24	0,83
V1-PC-70	0,136	0,905	0,350	0,394	23	0,89
V1-SFRC-70	0,126	0,933	0,326	0,407	21	0,80
V3-PC	0,134	0,309	0,074	0,088	6	0,84
V3-SFRC	0,132	0,654	0,074	0,101	5	0,73

todo el ancho eficaz del forjado. Los resultados obtenidos en los ensayos confirman estas teorías.

Uno de los resultados aparentemente más sorprendentes obtenidos de los ensayos es el hecho de que vigas con un armado muy distinto presenten resistencias muy similares. Las vigas armadas con armadura de cortante V1-PC presentan un cortante último muy similar a aquellas reforzadas con fibras pero desprovistas de cercos V1-SFRC. El ancho de la fisura principal, apreciada a simple vista en los ensayos, permite afirmar que la contribución de las fibras a la transmisión de cortante a través de la zona de fisura se puede despreciar en la práctica, así como cualquier tipo de transmisión de tensión tangencial proveniente del efecto de engranaje de los áridos. El mecanismo de respuesta a cortante que permite asegurar la transmisión de tensiones tangenciales en las vigas sin armadura de cortante es el efecto arco. Sólo el efecto arco permite justificar que vigas sin cercos soporten cortantes tan similares a las de las vigas con cercos.

Las armaduras de cortante, por tanto, no parecen eficaces en este tipo de ensayos. Aunque pueden servir para controlar la fisuración (como pone de manifiesto la comparación entre las Figura 14.c y Figura 14.d), las armaduras contiguas a la junta abierta no tienen encomendada la misión de transmitir cortante ya que no enlazan cordón traccionado y comprimido de ninguna celosía. El hecho de no existir efecto viga y de limitarse la transmisión de tensiones tangenciales a las zonas comprimidas, dificulta la formación de una celosía haciendo que los cercos de cortante tengan un papel secundario. De hecho, la fisura que en el ensayo V1-SFRC-70 se propaga entre la junta y el punto de carga (Figura 14.c), haciendo que en la fase final del ensayo la fibra neutra se encuentre en el plano de unión entre alma y forjado, no impide a la estructura la transmisión de cortante.

Resulta evidente que, si no se forma celosía alguna, las armaduras de suspensión no parecen necesarias. Además, el mapa de fisuración observado en los ensayos no refleja aquel representado en la Figura 2 que justificaba la colocación de armaduras de suspensión. A pesar de la fisuración diagonal, no hay posibilidad de formación de una celosía, ni siquiera localmente, por debajo de las llaves en contacto. Las bielas de compresión no pueden equilibrarse en la zona de junta abierta, ya que no se dispone de armadura longitudinal convenientemente anclada que recoja la componente horizontal de las compresiones.

El análisis de la fisuración que experimentan las vigas en el estado de prerrrotura, con una fisura diagonal que atraviesa todo el ancho del forjado, (Figura 14.a y Figura 14.e) confirman que todo el forjado es susceptible de transmitir cortante (o, al menos, era susceptible de transmitir cortante en todo su ancho eficaz). La transmisión del cortante por el forjado incrementa la flexión transversal, debiendo proveerse, si no se quiere comprometer la capacidad portante de la estructura, las oportunas armaduras de flexión transversal.

## 5. CONCLUSIONES

Los ensayos realizados sobre vigas nos permiten extraer conclusiones muy interesantes sobre el comportamiento de

las estructuras con junta seca, a pesar que su extrapolación a puentes reales deba ser realizada con cuidado. El hecho de que en la sección transversal de la viga no se guardara la proporcionalidad entre el ancho del forjado y el canto de la sección que se encuentra en la sección cajón de un puente real, (la relación entre el ancho del forjado y el canto de la viga es menor que en un puente real), la inserción de llaves de dimensiones reales en una viga de canto reducido, la propia geometría de las vigas, realizadas con dovelas de diferentes longitudes, y las cargas introducidas, todas ellas puntuales y no repartidas, hace que la extrapolación a puentes reales no sea directa.

La adición de fibras al hormigón no parece aumentar la capacidad de resistencia de las vigas. Así lo muestran los resultados obtenidos con las vigas V3.

A partir de la junta surge una fisuración que termina por agotar la estructura. La rotura por cortante en las vigas no es seccional, como en flexión, sino espacial.

El mapa de fisuras que se dibuja en la zona próxima a la junta, parece estar muy influido por la profundidad de la fibra neutra, o al menos, por el número de llaves en contacto.

El mapa de fisuras que justifica la colocación de armadura de suspensión en la proximidad de juntas abiertas no aparece. Es más, la armadura convencional de cortante no parece ser efectiva en estos ensayos, resistiendo las vigas provistas de cercos, esfuerzos cortantes últimos muy similares a vigas análogas de SFRC sin armadura (serie V1).

La forma de rotura del forjado, con fisuras que lo atraviesan de lado a lado, parece descartar la teoría de transmisión de tensiones tangenciales únicamente en la zona de almas.

Tanto el análisis teórico como los ensayos apoyan la tesis de que tensiones normales y tensiones tangenciales se asocian en este tipo de estructuras, siendo capaz el forjado de transmitir tensiones tangenciales en todo su ancho eficaz.

El incremento de flexión transversal que supone el hecho de que parte del cortante se transmita por el forjado deberá ser tenido en cuenta en el dimensionamiento de la armadura transversal del forjado.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Ciencia y Tecnología, por financiar parcialmente la investigación desde el proyecto MAT2002-00849. Al Ministerio de Fomento por la financiación parcial de la investigación a través del proyecto "Estudio teórico experimental de la transferencia de cortante en vigas de dovelas de hormigón reforzado con fibras, con pretensado exterior y junta seca". Al Ministerio de Educación y Cultura por la beca de Formación de Profesorado Universitario que recibió uno de los autores y que disfrutó desde 2000 hasta 2003. A FCC y BBR que realizaron la construcción y el desarrollo de las vigas.

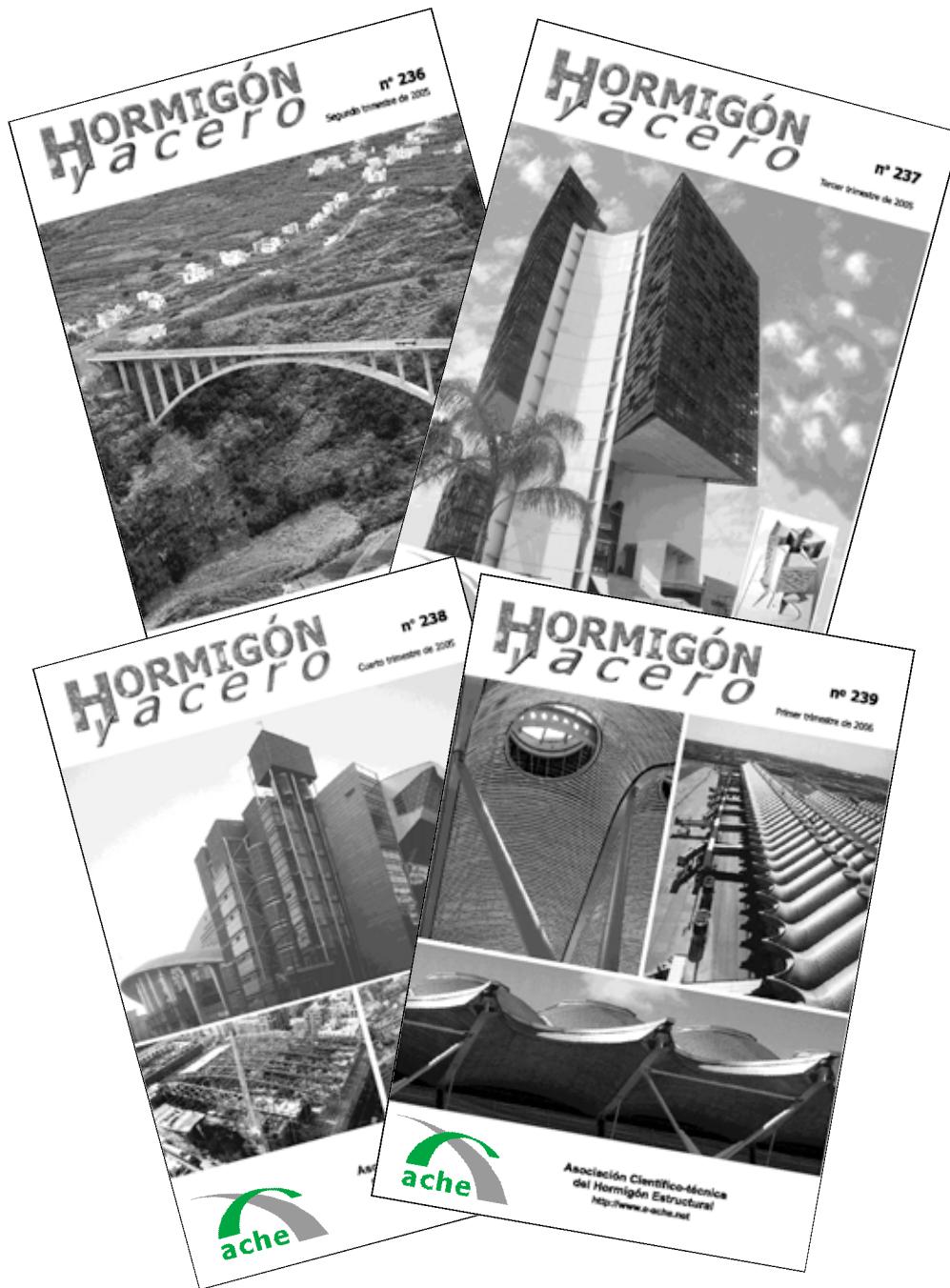
## 7. BIBLIOGRAFÍA

1. Muller, J. "Construction of the Long Key Bridge". *Journal of the Prestressed Concrete Institute*. November-December 1980, pp 97-111.
2. Shafer, G. "Bangkok Blockbuster". *Civil Engineering Magazine*. ASCE. January 1999. Vol 69. Number 1
3. Ramos, G.(1994) "Estudio del comportamiento en servicio, prerrrotura y rotura de puentes de hormigón con pretensado exterior", Tesis doctoral. Barcelona. Febrero, 1994
4. Breen, J. et al.(1993). "Shear Strength of Segmental Structures". *Proceedings of the Workshop AFPC External Prestressing in Strucutres*. Saint-Rémy-lès-Chevreuse. June, 1993, pp287-296.
5. Virlogeux, M. et al. «Some Elements for a Codification of External Prestressing and of Precast Segments». *Proceedings of the Workshop AFPC External Prestressing in Strucutres*. Saint-Rémy-lès-Chevreuse. June, 1993, pp 449-466.
6. ATEP "Proyecto y construcción de puentes y estructuras con pretensado exterior. Madrid. Septiembre 1996.
7. Mac Gregor, R. J. G. "Evaluation of Strength and Ductility of a Three-span Externally Post-tensioned Box Girder Bridge Model". Directed by: Prof. Dr. J.E. Breen. Ph. D. Dissertation. University of Texas at Austin. August 1989.
8. Ramírez Aguilera, G. "Behavior of Unbonded Post-tensioning Segmental Beams with Multiple Shear Keys". Directed by: Prof. Dr. J.E. Breen. Master Thesis. University of Texas at Austin. January 1989.
9. Anlló, M. "Análisis Experimental hasta Rotura de Vigas de Hormigón con Pretensado Exterior". Tesina de Especialidad. Universitat Politècnica de Catalunya. Mayo 1996.
10. Foure, B. et al. "Shear Test on Keyed Joints between Precast Segments". *Proceedings of the Workshop AFPC External Prestressing in Strucutres*. Saint-Rémy-lès-Chevreuse. June, 1993, pp 297-319.
11. Piernagorda, J. (2002) "Ensayo hasta rotura por cortante de vigas de dovelas" Tesina de especialidad. ETS de Ingenieros de Caminos de Barcelona. Junio 2002
12. Turmo J. Estudio del comportamiento a flexión y cortante de puentes de dovelas de hormigón con pretensado exterior y junta seca. Dirigida: Prof. Dr. A.C. Aparicio and Prof. Dr. G. Ramos. Tesis Doctoral. ETSICCP de Barcelona. Dept. Ing. de la Construcción. Julio 2003.

<http://www.tdx.cesca.es/TDX-1030103-090157/>

# HORMIGÓN y acero

últimos números publicados



Base de datos de artículos  
publicados en números  
anteriores disponible en:  
<http://www.e-ache.net>

# Comportamiento estructural de puentes de dovelas prefabricadas con pretensado exterior y junta seca.

## Segunda parte: Modelización de ensayos

***Structural behaviour of precast segmental concrete bridges with external prestressing and dry joints.  
Part 2: Test modelling***

♦  
**José Turmo**

ETS de Ingenieros de Caminos. Universidad Castilla-La Mancha

♦  
**Gonzalo Ramos**

Departamento de Ingeniería de la Construcción. Universidad Politécnica de Cataluña

♦  
**Ángel Carlos Aparicio**

Departamento de Ingeniería de la Construcción. Universidad Politécnica de Cataluña

## RESUMEN

Este trabajo de investigación presenta la modelización por el método de los elementos finitos de una serie de ensayos de vigas de dovelas de hormigón con pretensado exterior y juntas secas conjugadas, centrándose en el estudio de la respuesta a solicitudes de flexión y cortante combinados, en servicio y en rotura. Se han puesto a punto dos modelos de junta para estudiar la transmisión de cortante entre juntas conjugadas. Un modelo elaborado con elementos tipo junta a los que se les confiere un comportamiento de rozamiento coulombiano y que modeliza la junta (y sus llaves conjugadas) con su geometría. Otro modelo de junta plana que modeliza el comportamiento medio de la junta en la zona de llaves con elementos tipo junta dotados de un modelo de comportamiento de rozamiento cohesivo. Estos modelos de junta han sido calibrados y aplicados al estudio de los ensayos. De la aplicación de estos modelos se han extraído conclusiones referentes al modelo de análisis, al armado de las dovelas y al comportamiento global de este tipo de estructuras.

## SUMMARY

*This work presents a FEM study on the behaviour of some segmental concrete beams with external prestressing, focusing on the response under combined flexure and shear, in the service and ultimate limit states. Two models have been used for simulating the transmission of shear along joints between match-cast segments. In one of the approaches, the geometry of the joints (and the shear keys) is represented with interface*

*elements with Coulomb frictional behaviour. In the other approach, the global behaviour of the key zone of the joint is represented by flat interface elements with cohesive frictional behaviour. These joint models have been calibrated using the results of the experiments. The results of the numerical analyses have led to significant conclusions regarding the modelling, reinforcement detailing in the segments and the global behaviour of segmental structures with dry castellated joints.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La transferencia de cortante a través de juntas abiertas en puentes de dovelas con armadura no adherente es un tema controvertido. La teoría universalmente aceptada propone que el cortante es transmitido a través de las juntas por forjados y almas mediante dos mecanismos cualitativa y cuantitativamente diferentes. El primero representa la fuerza de rozamiento que surge cuando dos superficies planas y comprimidas intentan deslizar la una contra la otra y que es proporcional a las compresiones actuantes, llamándose este factor de proporcionalidad, coeficiente de rozamiento  $\mu_f$ . El segundo recoge el efecto del apoyo de las llaves conjugadas (Figura 1). Estas llaves permiten la transferencia de cortante cuando están en contacto una con otra, comportándose como unas pequeñas ménsulas de hormigón en masa (sus pequeñas dimensiones impiden que éstas estén convenientemente armadas). La resistencia a cortante de estas llaves por unidad de área es lo que se llama cohesión  $c$ . Si sobre estas llaves están actuando tensiones de compresión  $\sigma_n$ , la ménsula de hormi-

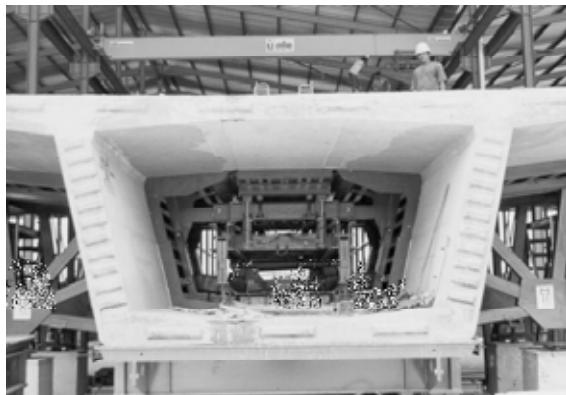


Figura 1. Dovela prefabricada de hormigón con llaves de cortante.

gón en masa será ahora una ménsula pretensada, incrementándose la tensión tangencial última de manera proporcional a la compresión. A este factor de proporcionalidad, siguiendo la terminología de Fouré<sup>1</sup>, lo llamaremos rozamiento interno  $\mu_2$ .

Un punto que enfrenta a los investigadores es el armado de la dovela en la proximidad de la junta abierta. Algunos autores<sup>2,3</sup> defienden la necesidad de disponer una armadura para suspender el cortante en la proximidad de la junta abierta.

La principal contribución de este estudio es la calibración de un modelo con ensayos específicamente realizados a cortante. Si bien es cierto que otros autores (Huang<sup>4</sup> y Rombach<sup>5</sup>) ya han presentado estudios de la transferencia de cortante por el FEM de este tipo de puentes, sus modelos, o no han sido calibrados, o han sido calibrados con ensayos en los que se induce una rotura por flexión. Las conclusiones de este trabajo son por tanto originales. En opinión de los autores es la primera vez que se aplica un modelo de estas características a estudiar la respuesta ante solicitudes combinadas de flexión y cortante de estas estructuras. Fruto de la aplicación de este modelo, se han alcanzado innovadoras conclusiones acerca de los criterios de armado de las mismas y del mecanismo resistente de estas estructuras tras la apertura de junta.

En concreto, se presentan tres tipos de modelos con distinto grado de complejidad. En el primero de ellos se intenta reproducir el comportamiento de las vigas en las que la junta ha sido modelizada con su geometría. El segundo intenta refinar el modelo introduciendo la fisuración observada en los ensayos en forma de fisura discreta. El tercero intenta evaluar la posibilidad de reproducir los resultados de los ensayos utilizando un modelo de junta plana que no reproduzca la geometría del dentado de las llaves, simplificando así la modelización. Los modelos que aquí se presentan fueron calibrados con los ensayos V1 y V3 presentados en 6. En aras de una mayor brevedad, sólo se presentarán aquí los resultados obtenidos de los análisis de los ensayos V1.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS

Con objeto de estudiar el mecanismo espacial de respuesta a cortante se realizaron varios análisis en teoría de segundo orden con el código comercial de elementos finitos Diana 8.1. Para ello se prepararon varios modelos en dos dimensiones con elementos bidimensionales. El pequeño ancho de los forjados y las medidas efectuadas con las galgas embebidas en el forjado superior en el ensayo V1-PC permite asegurar un comportamiento uniforme en anchura del forjado<sup>6</sup>.

Así, las vigas quedan modelizadas con elementos bidimensionales de cuatro nodos y ocho grados de libertad, a los que se les asigna una anchura de 0,60 m para los forjados, 0,10 m para las almas y 0,35 m para la transición entre forjado y alma. A los elementos que simulan anclajes y desviadores se les asigna una anchura de 0,10 m para no enmascarar las trayectorias de tensiones, incrementando a cambio el módulo de elasticidad del material que los conforma para simular su rigidez.

Las juntas quedaban modelizadas mediante elementos tipo interface de dos nodos a los que se les asignaba distintas ecuaciones constitutivas según el modelo considerado. Habida cuenta que tanto el laboratorio como los ensayos numéricos apuntaban a que sólo la junta próxima a centro luz alcanzaba el estado límite de descompresión, el modelo usado en el análisis fue simplificado y se le dotó de dos dovelas en lugar de tres, y de una junta en lugar de dos (Figura 2). Intentar realizar un análisis en el que existen tantas fuentes de no linealidad implica priorizar entre éstas si se quiere alcanzar la convergencia y elegir aquéllas que son más significativas.

La viga era sustentada por dos apoyos puntuales que impedían movimientos verticales. Uno de los apoyos impedía también movimientos horizontales. Las cargas eran introducidas de manera puntual en el forjado superior. La introducción del pretensado inicial se realizaba aplicando fuerzas extemas actuantes en anclajes y desviadores. Para simular la evolución del mismo a lo largo del desarrollo del ensayo los cables eran modelizados con elementos tipo barra. Así, cada cable de pretensado era modelizado mediante tres elementos tipo barra de manera que reproduían el trazado poligonal del pretensado (Figura 3). El inconveniente de este modelo es que simula que existe un rozamiento infinito en la zona de desviadores que impide a los cables deslizar. Experimentalmente se comprobó que cuando las juntas abren, la descompensación entre fuerzas a un lado y otro del desviador hacen que el cable deslice, repartiendo los incrementos de deformación en toda la longitud del cable<sup>6</sup>. Para evitar que el elemento que modeliza el tramo de cable que cruza la junta abierta sea demasiado rígido, al acero de pretensado se le confirió un módulo de elasticidad  $E_p' = 119000 \text{ MPa}$ , con objeto de modelizar de una manera sencilla el deslizamiento libre del cable en los desviadores. Este valor ficticio del módulo de elasticidad  $E_p'$  se deduce de la

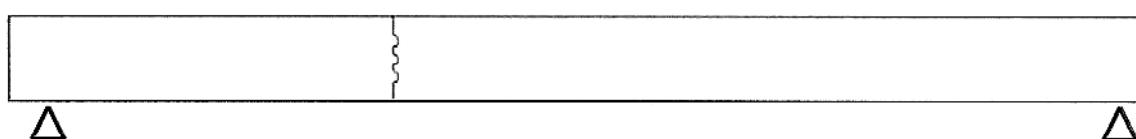


Figura 2. Modelización de los ensayos V1, realizada con una única junta y dos dovelas.

ecuación 1, en la que se relaciona la longitud del cable entre desviadores  $L_1$ , la longitud total del cable medio equivalente  $L_T$  y el módulo de elasticidad del acero de pretensado  $E_p$ .

$$E'_p = \frac{L_1}{L_T} \cdot E_p = \frac{4,800\text{m}}{7,629\text{m}} \cdot 190000\text{Mpa} = 119543\text{MPa} \quad (1)$$

Así, la rigidez  $EA/L$  del elemento tipo barra que recoge todos los incrementos de deformación tras la apertura de junta, tiene la rigidez del cable entero. Este método proporciona buenos resultados, de modo que los incrementos de axil del elemento afectado por la apertura de junta aproximan bien los incrementos de pretensado medidos en desviadores, si bien tiene el inconveniente de que el incremento de tensión de los cables no se reparte en la totalidad de la longitud del mismo. Para evitar este problema, una vez conocido el incremento de axil de pretensado  $\Delta P_i$  en el tramo central antes de rotura, se procedía a repartir este incremento  $\Delta P_i$  en toda la longitud del cable. Para ello, se procedía a cargar la estructura con un sistema nulo de fuerzas actuantes en anclajes y desviadores, de magnitud, el incremento de pretensado  $\Delta P_i$  y, de dirección, la de los segmentos extremos de pretensado (Figura 3). Con este último paso se pretendía no enmascarar los efectos que las fuerzas de desviación de los cables de pretensado tenían en la distribución tensional de la estructura en prerrotura.

El hormigón quedaba modelizado con un material elástico y lineal. Sólo a los elementos que conformaban el forjado superior se les asignó un material con un comportamiento plástico en compresión, con resistencia característica a la compresión  $f_{ck} = 35\text{MPa}$ , de modo que la ley constitutiva que relacionaba tensiones y deformaciones ajustaba a aquella propugnada por 7.

## 2.1. Modelos de junta: Junta modelizada con su geometría

El comportamiento entre las caras de la junta es de tipo friccional. La naturaleza singular de la unión entre dovelas se modeliza por elementos tipo junta de dos nodos (interface elements), a los que se les da una ley de comportamiento de rozamiento coulombiano sin cohesión

Los valores adoptados para la caracterización de la junta se muestran en la Tabla 1. Normalmente, a los coeficientes de rigidez normal y tangencial ( $k_n$  y  $k_t$ ), que relacionan las tensiones normales y tangenciales de la junta ( $t_n$  y  $t_t$ ) con los desplazamientos normales y tangenciales relativos entre caras de la junta ( $\Delta u_n$  y  $\Delta u_t$ ), se les asignan valores muy grandes (penalty values) para simular la geometría inicial continua antes de la

**Tabla 1. Valores empleados para modelizar el comportamiento de una junta de hormigón**

$k_n$	50000 MN/m <sup>3</sup>
$k_t$	50000 MN/m <sup>3</sup>
$\tan\phi$	0,55
$c$	0,0
$\tan\varphi$	0,0

descompresión. Sin embargo, se ha comprobado que valores más moderados de estos parámetros simulan mejor el comportamiento físico de los contactos entre juntas en ensayos de paneles<sup>6</sup>. Esta menor rigidez intenta simular de una manera más realista el contacto de dos superficies de hormigón a través de las distintas protuberancias presentes en las mismas. Cuando dos piezas de hormigón se ponen en contacto, lo hacen entrechocando las distintas irregularidades de las que se componen sus superficies. Para tensiones de compresión crecientes, estas irregularidades se van deformando, imponiendo un acercamiento relativo entre las dos caras en contacto. El valor de  $\tan\phi$  se toma igual al coeficiente de rozamiento entre dos superficies de hormigón  $\mu_f$  propuesto por la AASHTO<sup>8</sup>. El valor de la cohesión es igual a cero, de manera que si la junta no está comprimida, no es capaz de transmitir tracciones ni tensiones tangenciales. Una vez alcanzada la máxima tensión tangencial, las caras entre las juntas deslizan, por tanto el valor del ángulo  $\phi$  o ángulo de dilatancia se toma igual a cero. Cuando se alcanza el estado límite de descompresión, los desplazamientos entre ambos lados de la junta dejan de estar directamente vinculados. Más detalles sobre la ley constitutiva adoptada puede encontrarse en 9.

## 2.2. Modelos de junta: modelo de junta plana

El principal problema de modelizar las llaves con su geometría radica en que la malla de elementos finitos exige un alto grado de refinamiento en las inmediaciones de la junta para poder adaptarse a la geometría de la misma. En un puente real, con dovelas de dos o tres metros de canto, con luces de cuarenta o cincuenta metros, con juntas cada tres o cuatro metros y con treinta o cuarenta llaves de cortante por junta, la potencia numérica necesaria es considerable.

La ventaja de emplear un modelo de junta plana radica en que la geometría de las dovelas puede ser reproducida por una malla compuesta por un menor número de elementos, lo que implica una drástica reducción del número de grados de libertad, redundando en un ahorro importante del tiempo de com-

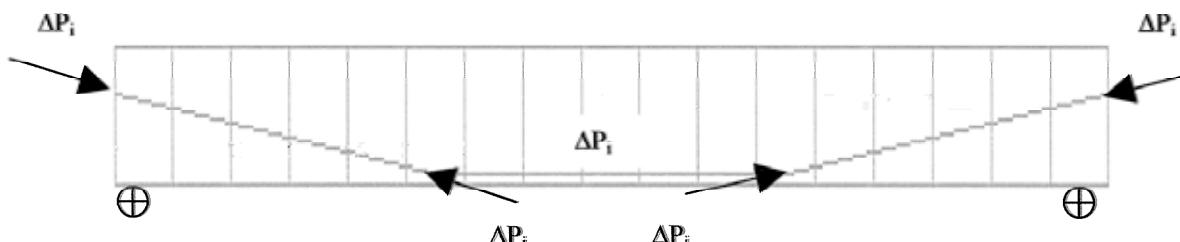


Figura 3. Esquema del sistema nulo de fuerzas introducido en el paso previo a rotura en el análisis.

putación. Además, la regularidad de la malla, formada por elementos rectangulares, favorece la convergencia numérica.

Para evitar este problema y proponer un modelo de cálculo que sea aplicable en la práctica, en 6 se calibró un modelo de junta plana. La junta quedaba modelizada mediante elementos tipo interface de dos nodos a los que se les aplicaba un modelo de comportamiento en función de cual fuera la geometría que modelizaban. La ecuación constitutiva de la junta fue derivada de la formulación para evaluar la resistencia a cortante propuesta por la la AASHTO<sup>8</sup>. Se ha comprobado<sup>6</sup> que esta fórmula es mucho más precisa que otras<sup>1, 3, 10</sup>.

A los elementos junta presentes en el forjado superior e inferior se les asignaba un comportamiento tipo rozamiento coulombiano sin cohesión. A los elementos junta que simulaban el contacto de las dovelas en la zona del alma, se les asignaba un comportamiento de rozamiento coulombiano con cohesión. Estas leyes quedan numéricamente definidas con los parámetros recogidos en la Tabla 2. La formulación de la AASHTO diferencia entre la resistencia del área de las llaves  $A_k$  y la resistencia del área lisa entre llaves  $A_{sm}$ . Para que el modelo sea simple y práctico interesa homogeneizar estas fórmulas y asignar un comportamiento medio para toda el área del alma. El valor de la cohesión  $c'$  y del coeficiente de rozamiento  $\mu_2'$  que definen el comportamiento medio del alma se deducen de las ecuaciones 2 y 3.

$$c' = \frac{c \cdot A_k}{A_k + A_{sm}} \quad (2)$$

$$\mu_2' = \frac{\mu_2 \cdot A_k + \mu_1 \cdot A_{sm}}{A_k + A_{sm}} \quad (3)$$

**Tabla 2. Valores de las constantes usadas en el modelo de junta plana**

	Unidades	Ala	Alma
$k_n$	MN/m <sup>3</sup>	50000	50000
$k_t$	MN/m <sup>3</sup>	50000	50000
$\tan\phi$		0,60	1,07
$c$	MPa	0,0	4,54
$\tan\varphi$		0,0	0,0

La ecuación constitutiva rige el comportamiento de los elementos junta del alma siempre y cuando éstos se encuentren comprimidos. En caso contrario, los movimientos de los nodos del elemento junta ya no quedan directamente vinculados. En la práctica, esto supone despreciar la contribución de las llaves en contacto por debajo de la fibra neutra, lo cual está en línea con las recomendaciones vigentes.

Se puede encontrar más información sobre el modelo de junta y su calibración en la referencia 6.

### 2.3. Modelo de fisuración

Debido a que la rotura observada en los ensayos<sup>6</sup> correspondía a la progresión de una única fisura que acumulaba en su seno todas las deformaciones, cuando se planteó la modelización se optó por un modelo de fisura discreta. El modelo elegido se materializa mediante elementos tipo junta (interface elements) de dos nodos con una ecuación constitutiva basada en la teoría de deformaciones totales (total deformation theory), que relaciona el vector de tensiones con los desplazamientos relativos totales entre caras de fisura. Tanto en estado elástico, como tras la fisuración, los comportamientos normal y tangencial de la junta se encuentran desacoplados.

La ecuación constitutiva de la fisura discreta queda numéricamente definida en la Tabla 3. En esta tabla, se ha usado la notación habitual en este tipo de modelos<sup>9</sup>.

**Tabla 3. Valores empleados para modelizar el comportamiento de la fisuración discreta**

$k_n$	$10^7 \text{ MN/m}^3$
$k_t$	$10^7 \text{ MN/m}^3$
$f_{ctm}$	2,6 MPa
$G_f$	0,105 Nmm/m <sup>2</sup>
$\beta$	0,0

En el modelo, los términos de la matriz de rigidez elástica  $k_n$  y  $k_t$  se han elegido lo suficientemente grandes para modelizar la geometría continua antes del deslizamiento, pero lo suficientemente pequeños como para evitar problemas numéricos durante el análisis. El valor de la resistencia a tracción  $f_{ctm}$  se deduce de la resistencia media a compresión del hormigón ( $f_{cm}=34 \text{ MPa}$ ) según la EHE<sup>7</sup>. El valor de la energía de fractura  $G_f$  se ha obtenido siguiendo las indicaciones del Código Modelo<sup>12</sup> a partir de la resistencia media a compresión del hormigón ( $f_{cm}=34 \text{ MPa}$ ) y del tamaño máximo del árido ( $d_{max}=25 \text{ mm}$ ). La tensión normal queda gobernada por una función de reblandecimiento (tension softening) lineal, aunque la gran apertura de fisura apreciada en los ensayos hace prácticamente irrelevante el comportamiento post-pico del material. Es por esto que se han elegido unas funciones comunes para hormigón convencional y hormigón con fibras. La rigidez de la fisura ante el esfuerzo cortante queda reducida a cero tras la fisuración ( $\beta=0$ ). Las grandes aperturas de fisura observadas en la experimentación permiten suponer que las tensiones tangenciales producidas por el desplazamiento relativo entre caras de fisura son nulas.

## 3. RESULTADOS

### 3.1. Análisis de sensibilidad

En el análisis de sensibilidad realizado se aprecia que el modelo es muy sensible a la cuantía de pretensado inicial y a los efectos de segundo orden, resultando que la inclusión de la no linealidad geométrica aumenta las flechas del modelo

del orden del 50% y que un decremento en el axil de pretensado inicial del 15% magnifica las flechas en un 50 %.

La combinación de elementos tipo junta con material elástico y lineal en los forjados aproxima muy bien el resultado del laboratorio en término de deformaciones, a costa de generar unas tensiones de compresión muy elevadas en las inmediaciones de la junta, que no tienen ningún sentido físico. La inclusión del material plástico en compresión apenas influye en término de deformaciones pero dulcifica notablemente el campo de tensiones en las inmediaciones de la junta. Los valores de la rigidez axial y tangencial  $k_n$  y  $k_t$  de los elementos tipo junta, que eran fundamentales para modelar el comportamiento tenso-deformacional en ensayos de cortante en paneles<sup>6</sup>, no influyen sin embargo en la deformación de la viga, gobernada fundamentalmente por la apertura de junta, y no por el apoyo entre llaves. Cuando se introduce la plasticidad en el hormigón del forjado, la influencia de  $k_n$  y  $k_t$  es nula. La fisuración por tracción del forjado inferior tampoco afecta a la modelización de estos ensayos. Aunque se alcanza la resistencia a tracción en parte del forjado inferior, esta zona es muy limitada y la modelización de la fisuración no afecta al comportamiento global de la estructura.

### 3.2. Análisis numérico de las vigas V1 modelizando la junta con su geometría

En esta serie de ensayos numéricos se ha estudiado el comportamiento de las vigas V1 centrando la atención en la no

linealidad que produce la presencia de juntas secas en el comportamiento de las vigas. Llaves y juntas fueron modelizadas con su geometría, dotándolas de elementos interface de dos nodos. La malla usada para llevar a cabo el análisis se reproduce en la Figura 4.

En la Figura 5 se presentan las curvas carga flecha obtenidas en el laboratorio para la viga V1-PC-35 y para la viga V1-SFRC-35 y se las compara con las obtenidas en los análisis numéricos, V1-35-FEM-A, con un pretensado inicial  $P_0=0,350$  MN; y V1-35-FEM-B, con un pretensado inicial  $P_0=0,290$  MN. En la Figura 6 se presentan las curvas carga-apertura de junta para los ensayos V1-35.

Hay que destacar, en primer lugar, cómo las curvas se ajustan razonablemente a las generadas durante el ensayo V1-SFRC-35 y cómo las del ensayo V1-PC-35 se reproducen por la modelización numérica V1-35-FEM-B.

El pretensado inicial influye considerablemente en la carga de descompresión y en la evolución de flecha y apertura de junta, en el sentido de que a menor pretensado inicial, menor es la carga de descompresión y mayores son la flecha y la apertura de junta final. El modelo reproduce bien la flecha de la viga, hasta que, para una carga  $Q_f$  del orden de 0,11 MN, la aparición de la fisuración de la dovela, no considerada en el modelo, hace que las curvas numéricas y experimentales se separen. Esta desviación no es grande, ya que la fisuración afecta a una parte muy limitada de la dovela<sup>6</sup>.

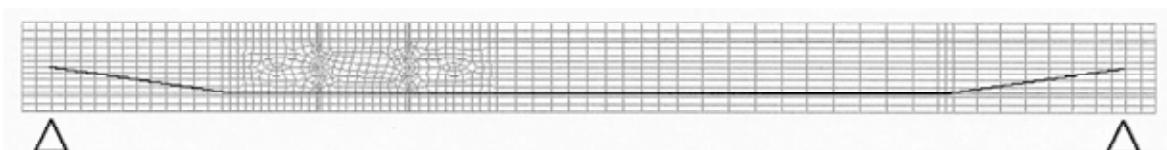


Figura 4. Mallado de la viga V1 incluyendo los elementos tipo cable (en negro).

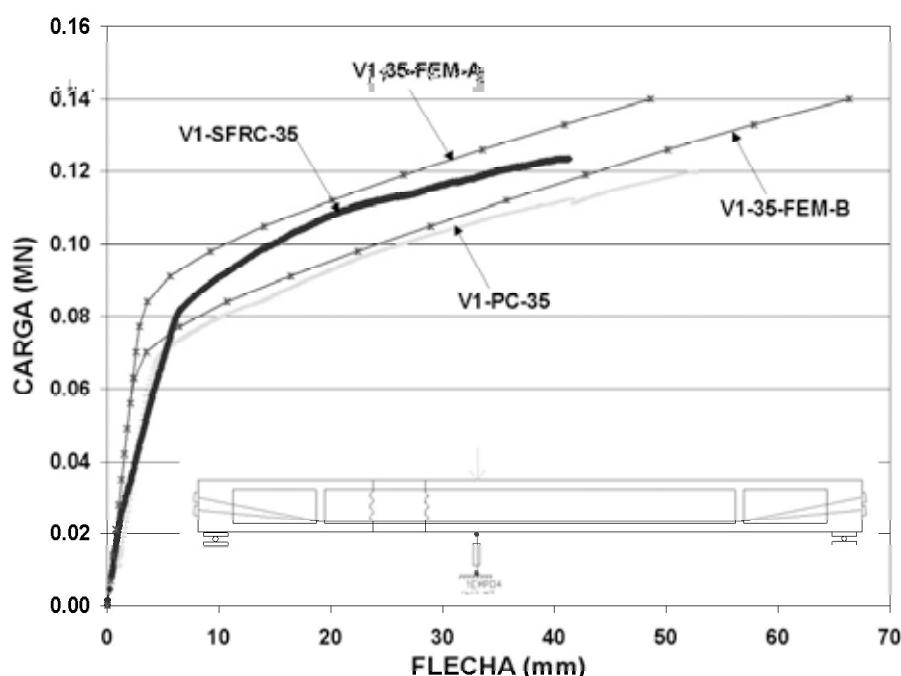


Figura 5. Curvas carga-flecha en V1-35. Ensayos (V1-PC-35 y V1-SFRC-35) y análisis numérico (V1-35-FEM-B y V1-35-FEM-A).

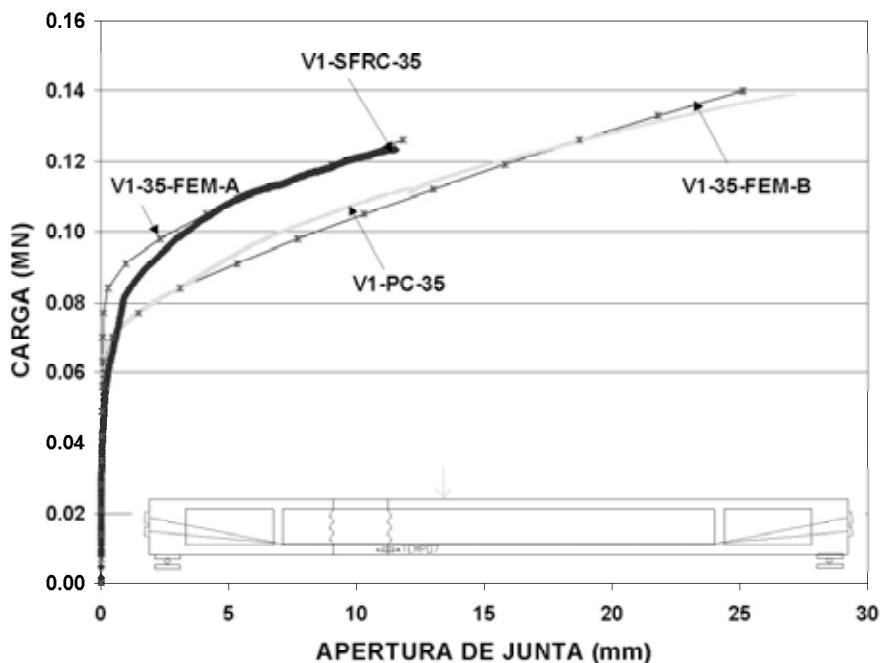


Figura 6. Curvas carga-apertura de junta en V1-35. Ensayos (V1-PC-35 y V1-SFRC-35) y análisis numérico (V1-35-FEM-B y V1-35-FEM-A).

Hay que destacar, además, que los incrementos de pretensado medidos por las células de carga en el instante de alcanzarse la máxima carga para cada ensayo quedan también reproducidos en los ensayos numéricos. Los valores de los incrementos de axil obtenidos en los ensayos numéricos son tan sólo un 7% superiores a los medidas en el laboratorio.

De igual modo que se procedió a la modelización de los ensayos V1-35, se acometió el estudio numérico de V1-PC-70 y V1-SFRC-70. Es decir, se utilizó el mismo modelo bidimen-

sional al que sólo se le variaba el pretensado inicial. El pretensado inicial  $P_0$  introducido para realizar la simulación fue común para los dos ensayos y tenía un valor de 0,650 MN.

Los resultados no son tan afinados como en el caso V1-35. La fisuración de la dovela, que atraviesa todo el canto de la viga, modifica profundamente el comportamiento deformacional de la estructura. Este efecto queda del todo patente en la Figura 7, que presenta las configuraciones deformadas de la estructura V1-PC-70 para distintos niveles de carga

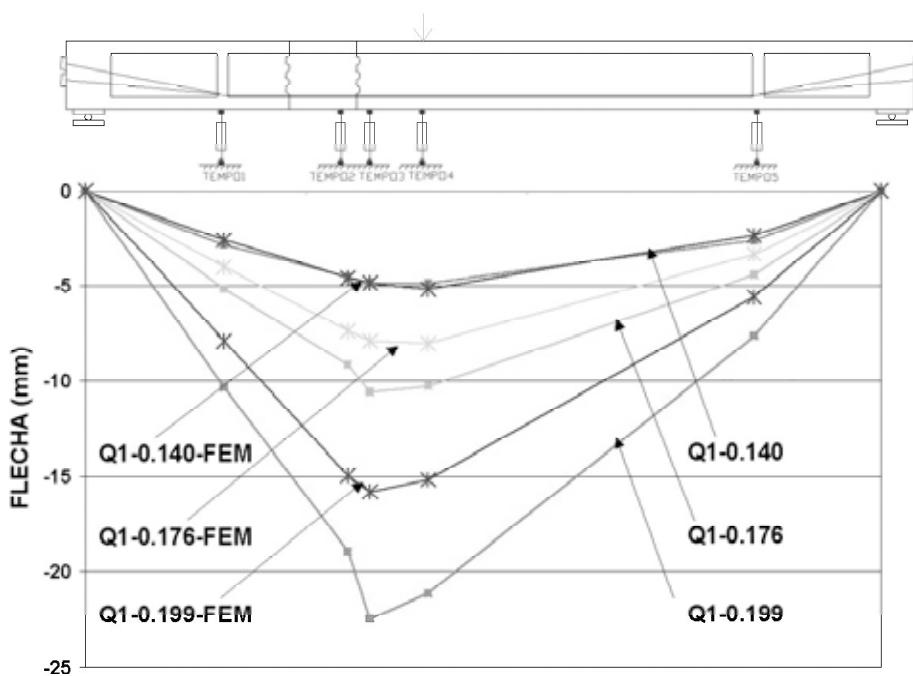


Figura 7. Configuración deformada de la viga V1-PC-70 para distintos niveles de carga (0,140MN y 0,199 MN). Ensayos y análisis (FEM).

(0,140MN; 0,176MN y 0,199MN) obtenidas en el laboratorio y con la modelización numérica (FEM). Aunque en la fase elástica el modelo capta perfectamente la deformación de la estructura, la apertura de junta y la fisuración diagonal de la dovela provocan un quiebro en la deformada que el modelo no es capaz de reproducir. Para modelizar adecuadamente el comportamiento de la viga, se hace necesario tratar adecuadamente la fisuración en el seno de la dovela.

Una selección de los campos tensionales obtenidos en el análisis V1-35-FEM-B, en la hipótesis de carga máxima pueden consultarse en la Figura 8. En ésta se incluye el campo vectorial de tensiones principales de compresión generado en la estructura cuyo valor absoluto es mayor que 2,5 MPa y menor que 35 MPa (Figura 8.a), otro gráfico análogo en el que se representan las tensiones de compresión con un valor absoluto superior a 4,5 MPa (Figura 8.b) y el detalle de la zona de la junta, tanto para tensiones de compresión mayores de 2,5 MPa (Figura 8.c) como para tensiones de tracción mayores de 2,5 MPa (Figura 8.d).

En la Figura 8.a se aprecia que el comportamiento resistente se asimila a dos arcos superpuestos: un arco que surge de un anclaje (A), atraviesa la junta abierta (C), pasa por el punto de carga (D) y muere en el otro anclaje (F); y otro arco que nace de un desviador (B'), atraviesa la junta abierta (C), pasa por el punto de carga (D), y muere en el segundo desviador

(E'). Las reacciones horizontales, necesarias para la formación de los arcos en el modelo, las proporciona el pretensado inicial en el primer arco, y el incremento de pretensado en el segundo arco. Las reacciones verticales las proporcionan los apoyos en el primer arco, y las fuerzas de desviación del pretensado de los desviadores en el segundo.

La Figura 8.b pone de manifiesto cómo en la zona en la que los dos arcos se superponen se generan mayores tensiones principales de compresión. En este ejemplo, la contribución de los arcos en la transmisión de la carga es muy similar. El primer arco (entre anclajes) transmite el 51% de la carga, y el segundo (entre desviadores) el 49%. El cálculo de la contribución de cada arco en la transmisión de carga se ha realizado verificando cual es la cantidad de cargas verticales que cada arco compensa, siendo medida ésta en función de las reacciones verticales de cada arco.

La Figura 8.c muestra como las tensiones principales de compresión se inclinan por efecto de las tensiones tangenciales en la zona de junta en la cabeza comprimida.

La Figura 8.d muestra un detalle del campo de tracciones, con unas direcciones perpendiculares a la fisuración observada en los ensayos. Sólo aparecen tensiones de tracción en las inmediaciones de la junta abierta y en la zona de anclajes, debido a la desviación de isóstáticas en la introducción del

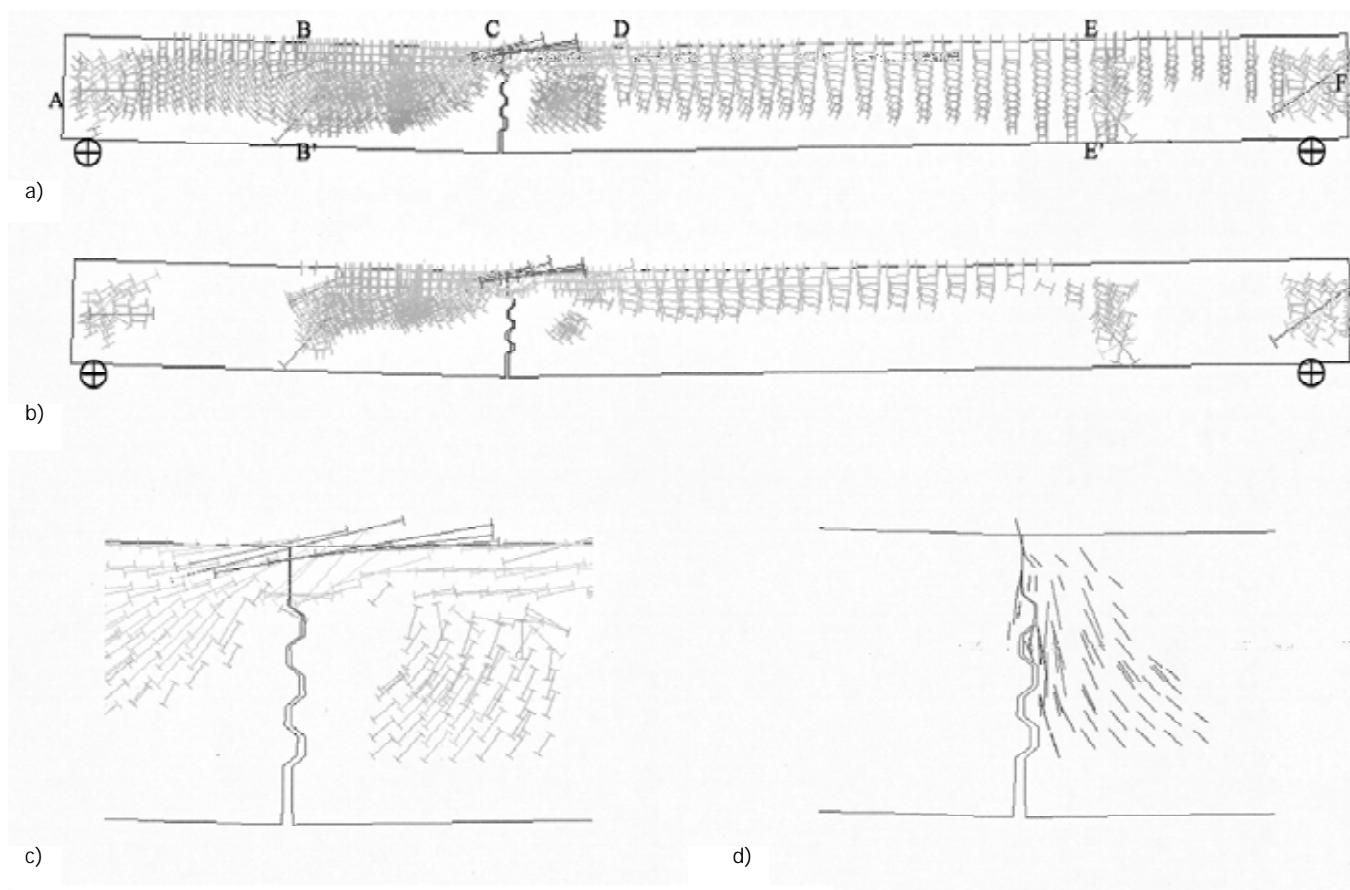


Figura 8. Campo de tensiones obtenido en el ensayo V1-35-FEM bajo carga máxima.

- a) Tensiones principales de compresión ( $|\sigma_{II}| > 2,5 \text{ MPa}$ )
- b) Tensiones principales de compresión ( $|\sigma_{II}| > 4,5 \text{ MPa}$ )
- c) Detalle zona de junta. Tensiones principales de compresión ( $|\sigma_{II}| > 2,5 \text{ MPa}$ )
- d) Detalle zona de junta. Tensiones principales de tracción ( $|\sigma_I| > 2,5 \text{ MPa}$ )

pretensado. La ausencia de tracciones en el cuerpo de la viga refuerza la idea de la presencia de un mecanismo resistente en forma de arco.

### 3.3. Análisis numérico de las vigas modelizando la fisuración en el seno de la dovela

Los ensayos de la serie V1-70, en los que una gran fisura diagonal atravesaba la dovela y concentraba en su plano grandes rotaciones<sup>6</sup>, no pueden modelizarse sin considerar el efecto de la fisuración. Para ello se modificó el mallado utilizado para el análisis de las vigas V1, introduciendo elementos tipo junta que reproducían la geometría de la fisura observada en los ensayos V1-PC-70 y V1-SFRC-70. En la Figura 9.a y 9.b se reproduce el detalle del mallado usado para modelizar los ensayos V1-PC-70 y V1-SFRC-70, conteniendo la junta seca y las potenciales fisuras.

Como puede apreciarse en la Figura 9, para la elaboración de este modelo no sólo fue necesaria la introducción de nuevos elementos interface para la simulación de la fisura, sino, además, tuvieron que emplearse en esa zona elementos triangulares de tres nodos y seis grados de libertad, de modo que la complicada geometría de la dovela en la proximidad de la junta pudiera ser cubierta con una tupida red de elementos.

En el modelo que reproducía el comportamiento del ensayo V1-PC-70 fue necesario incluir elementos que reprodujeran el armado presente en la dovela. Para ello se recurrió a elementos lineales de dos nodos, con cuatro grados de libertad que unían nodos de la malla a uno y otro lado de cada potencial fisura que pudiera formarse en la dovela. Estos elementos eran dispuestos horizontal y verticalmente cosiendo las fisuras en la posición en la que se encontraban las armaduras longitudinales y los cercos transversales en la dovela real. A cada uno de estos elementos se les asignó el área de la armadura que representaban y se les confirió un comportamiento elástico-perfectamente plástico, con una tensión de plastificación de 500MPa.

co-perfectamente plástico, con una tensión de plastificación de 500MPa.

Destacar, en primer lugar, que un modelo en el que se consideran tantas fuentes de no linealidad es numéricamente muy inestable. El modelo V1-PC-70-FEM no pudo llegar a reproducir el comportamiento del ensayo V1-PC-70 hasta rotura, ya que, para un nivel de carga  $Q_1$  del orden del 80% de la carga última, el programa de cálculo divergía o era incapaz de invertir la matriz de rigidez. A pesar de que se varió repetidas veces el número de incrementos de carga y el tamaño de los mismos para alcanzar la carga última, no se pudo soslayar el problema. El análisis se interrumpía poco después de alcanzarse la fisuración en la dovela, a pesar de que el hormigón del forjado superior tenía una tensión principal de compresión de 23,9 MPa y de que la tensión del estribo próximo a la junta era de tan sólo 317 MPa.

En el modelo V1-SFRC-70-FEM se alcanzó finalmente la carga última registrada en el ensayo a base de variaciones sucesivas en el tamaño de los incrementos de carga. El tamaño de los incrementos de carga era elegido arbitrariamente para soslayar la divergencia, ya que la disminución del valor de estos incrementos no implicaba necesariamente alcanzar la convergencia.

La Figura 10 presenta las configuraciones deformadas de la estructura para distintos niveles de carga (0,165MN; 0,185MN y 0,198MN) obtenidas en el laboratorio y con la modelización numérica (FEM). El quiebro de la deformada que se produce en las inmediaciones de la junta y que el modelo presentado en 3.2 era incapaz de reproducir (Figura 7), es ahora modelizado satisfactoriamente.

La Figura 11 nos muestra un detalle de la geometría deformada obtenida bajo carga máxima en los ensayos V1-PC-70 (a) y V1-SFRC-70 (b) y los compara con los resultados numéricos V1-PC-70-FEM (a) y V1-SFRC-70-FEM (b). Allí se ve

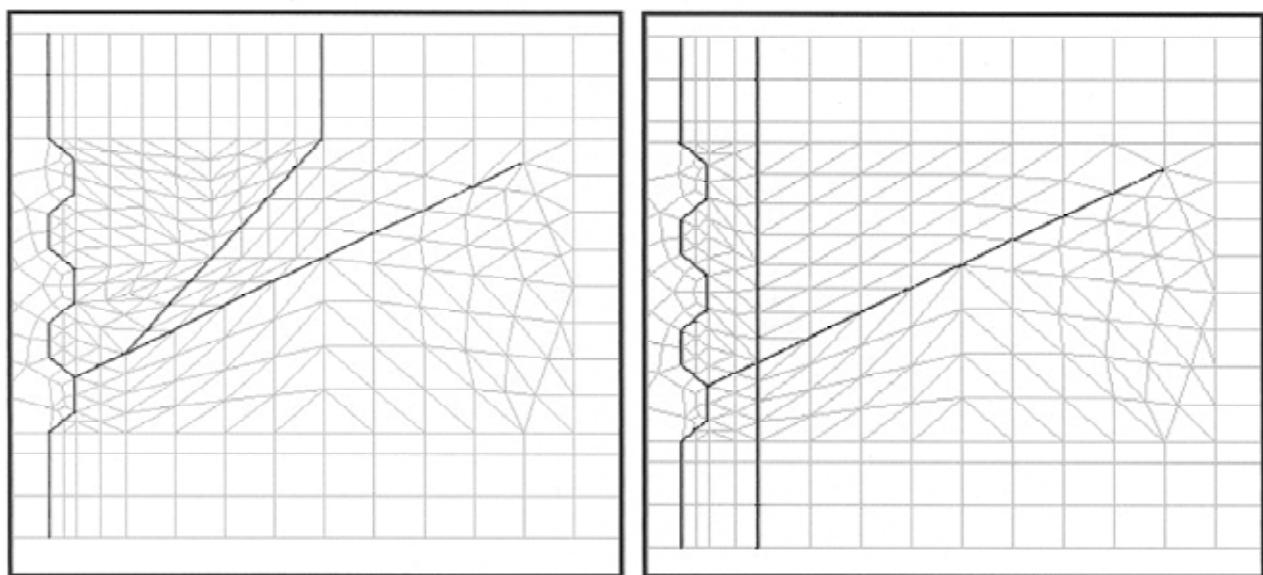


Figura 9. Detalle del modelo utilizado en la simulación del ensayo V1-PC-70 (a) y del ensayo V1-SFRC-70 (b).  
En negro junta seca y fisuración discreta.

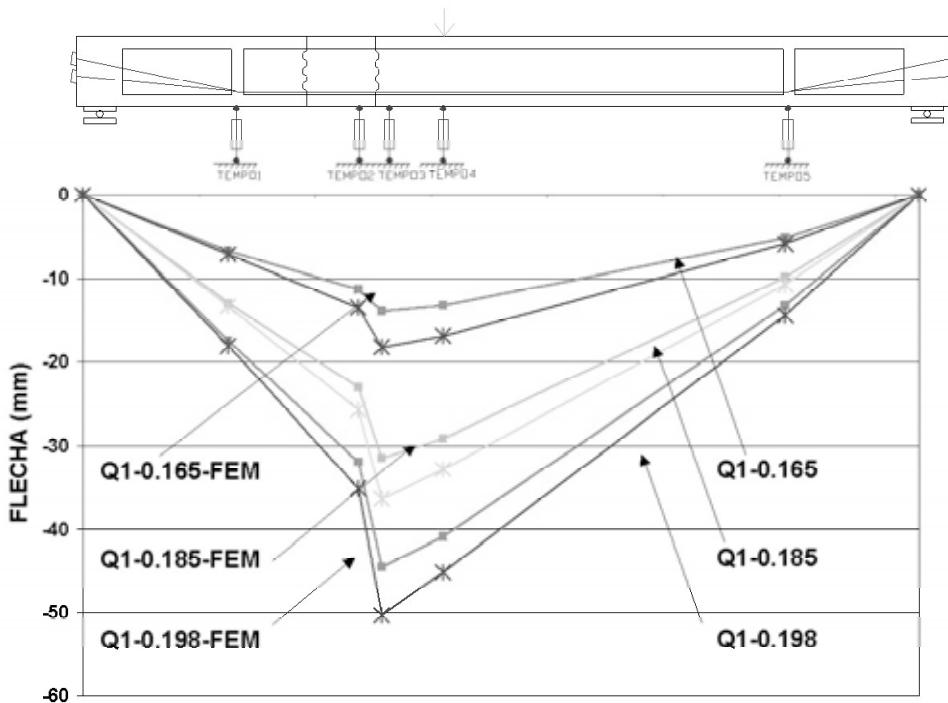


Figura 10. Configuración deformada de la viga V1-SFRC-70 para distintos niveles de carga (0,16MN; 0,185MN y 0,198MN). Ensayos y análisis (FEM).

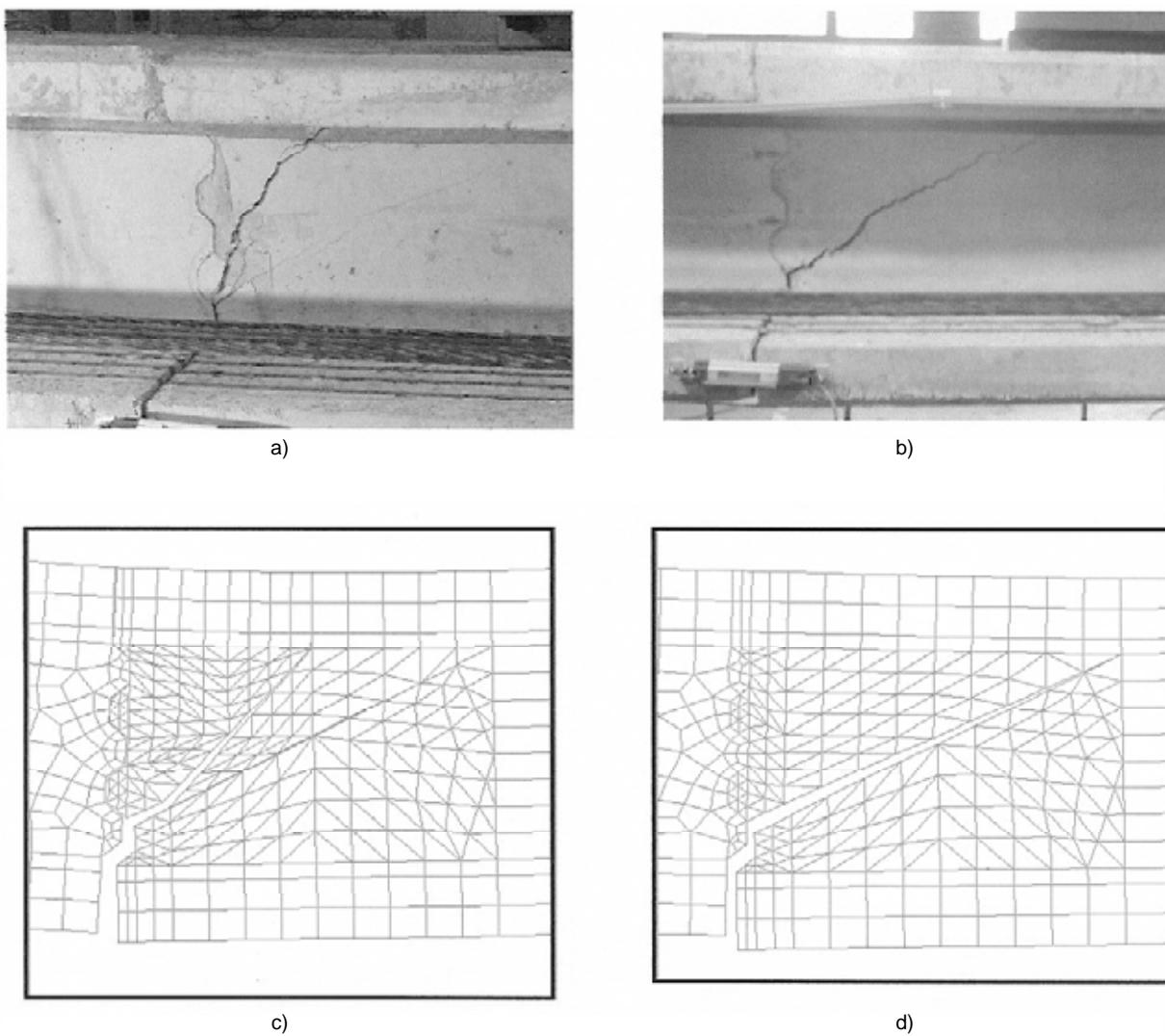


Figura 11. Detalle de la geometría deformada bajo carga máxima. Ensayo V1-PC-70 (a) y V1-SFRC-70 (b). Modelización V1-PC-70-FEM (c) y V1-SFRC-70-FEM (d).

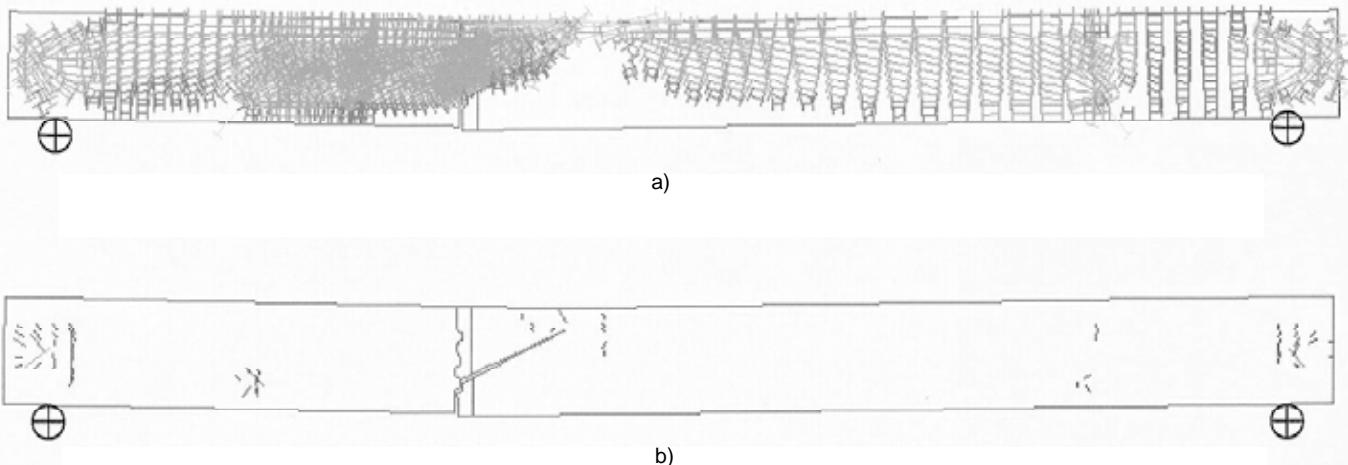


Figura 12. Campos de tensiones principales de compresión; ( $|\sigma_{II}| > 2,5 \text{ MPa}$ ) (a) y de tracción; ( $|\sigma_{II}| > 2,5 \text{ MPa}$ ) (b) obtenidos en el ensayo V1-SFRC-70-FEM-B, bajo carga máxima.

claramente como la apertura de junta progresiva por el seno de la dovela, permaneciendo en contacto las llaves que se encuentran por encima del punto de iniciación de la fisura.

En la Figura 12 se presentan los campos de tensiones principales obtenidos en el análisis V1-SFRC-70-FEM. La Figura 12.a, muestra el campo vectorial de tensiones principales de compresión mayores de 2,5 MPa. Allí se ve como la práctica totalidad de la viga se encuentra comprimida, salvo en las inmediaciones de la carga, en la que las isóstáticas se concentran en la cabeza de compresión, adquiriendo la forma de un arco. Es notoria la inclinación de las direcciones principales de compresión en la zona comprimida de las almas. Esto muestra cómo en esa zona son las almas las encargadas de la transmisión de las tensiones tangenciales. Por otro lado, una vez abierta la fisura, las tensiones de tracción mostradas en la Figura 8.d son liberadas. Este extremo se observa en la Figura 12.b, que muestra las tensiones principales de tracción mayo-

### 3.4. Análisis numérico de las vigas usando un modelo de junta plana.

En la Figura 13 se muestra un detalle de la malla usada en este análisis, con un total de 1327 elementos y 1422 nodos, en la que se ha introducido un modelo de junta plana.

En la Figura 14 se muestran las curvas carga-flecha obtenidas con los distintos modelos en los que la junta entre dovelas se modeliza con su geometría (V1-35-FEM-B) o con una junta plana (V1-35-FEM-B-P). El análisis de esta figura nos permite apreciar el buen comportamiento de las juntas planas. Sólo en la fase de apertura de junta se perciben pequeñas diferencias de comportamiento, que no empañan los buenos resultados obtenidos. Básicamente, el que los resultados obtenidos con los dos modelos sean tan similares, implica que el comportamiento deformacional de la estructura está en mayor grado gobernado por la apertura de junta que por el sistema de apoyos entre llaves. La posibilidad de modelizar la geometría de las llaves con modelos de junta plana nos permitirá simplificar notablemente los modelos empleados para el estudio de puentes reales.

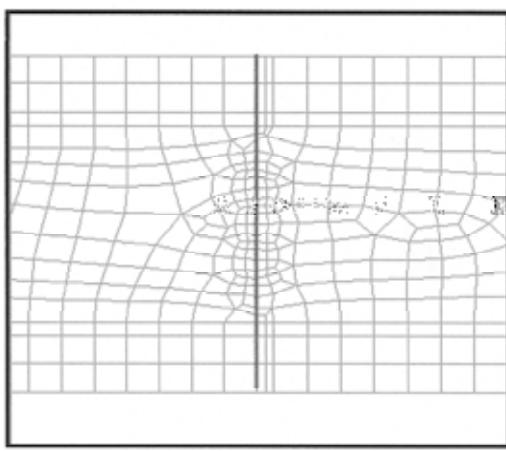


Figura 13. Detalle de la malla de elementos finitos empleada en el análisis V1-FEM-P (junta plana en negro).

res de 2,5MPa. Fuera de los campos de tracción generados para la regularización de las fuerzas de introducción del pretensado en anclajes y desviadores, las tensiones de tracción están prácticamente ausentes.

## 4. CONCLUSIONES

Se dispone de un modelo de análisis numérico que reproduce satisfactoriamente los resultados obtenidos en el laboratorio en vigas de dovelas de hormigón con junta seca y pretensado exterior. Mediante el empleo de elementos tipo junta a los que se les asigna un comportamiento de rozamiento coulombiano, se puede simular la apertura de junta. Si la fisuración en el seno de la dovela es importante, es necesario modelizar ésta, ya que la rigidez de la estructura está muy influenciada por la progresión de la fisura. En el modelo es necesario incluir el comportamiento no lineal en compresión del hormigón y realizar el análisis en teoría de segundo orden.

Se dispone asimismo de un modelo de junta plana que permitirá acometer el análisis de puentes completos, sin necesidad de modelizar las juntas con su geometría. Esto implica que se podrán estudiar con modelos sencillos, con los importantes ahorros en tiempo de computación que esto conlleva.

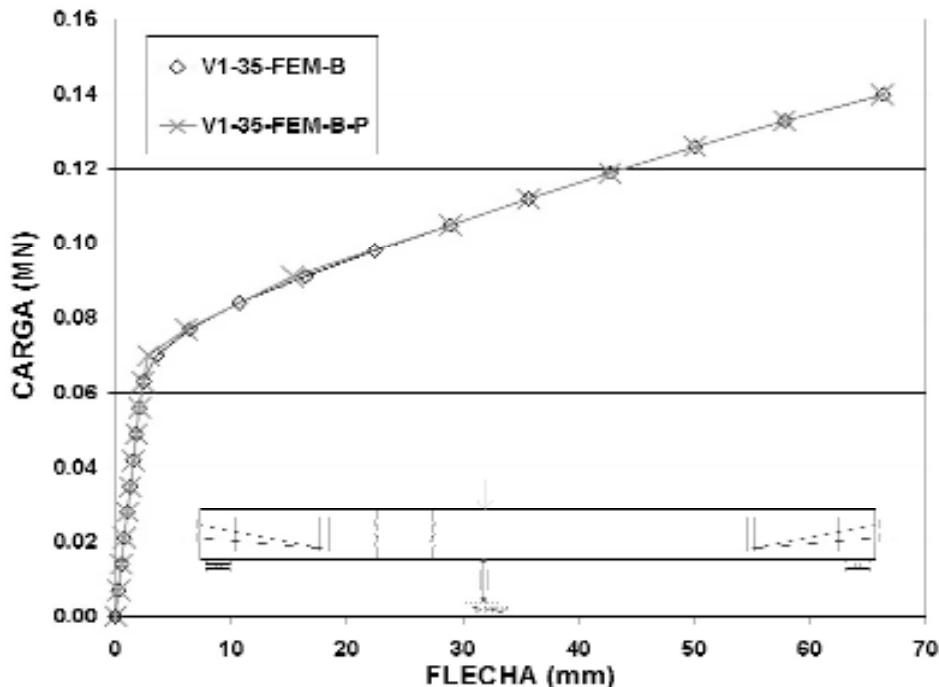


Figura 14. Curvas carga-flecha V1-35. Comparación de los resultados obtenidos con distintos modelos.

Los análisis efectuados nos confirman que el mecanismo resistente de este tipo de vigas es espacial y no seccional. Ante carga creciente la estructura responde con un mecanismo tipo arco. Un arco se configura naciendo de los apoyos de la viga y otro arco surge de los desviadores, que actúan como apoyos intermedios.

Es posible dibujar en el seno del hormigón un modelo de bielas comprimidas capaz de resistir las cargas actuantes en Estado Límite Último sin necesidad de tirantes traccionados, encontrándose éstos materializados por los cables de pretensado. Dicho de otro modo, en las vigas se forma un mecanismo resistente que permite la formación de un esquema resistente a flexión y cortante sin necesidad de armadura convencional. Esta armadura puede ser útil para controlar la fisuración en servicio, pero su eficacia para resistir cortante es muy limitada, especialmente en las inmediaciones de la junta abierta. Es cierto que en esta zona aparecen tensiones de tracción (Figura 8.d), pero su efecto es local y no contribuyen al mecanismo global resistente de la estructura. De hecho, cuando se alcanza la resistencia a tracción y la viga fisura, las tensiones de tracción se liberan y el arco continúa soportando carga (Figura 12.b). Los cercos han de colocarse para controlar la fisuración, pero su presencia no implica sustanciales incrementos de resistencia a cortante.

## 5. AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Ciencia y Tecnología, por financiar parcialmente la investigación desde el proyecto MAT2002-00849. Al Ministerio de Fomento por la financiación parcial de la investigación a través del proyecto "Estudio teórico experimental de la transferencia de cortante en vigas de dovelas de hormigón reforzado con fibras, con pretensado exterior y junta seca". Al Ministerio de Educación y Cultura por la beca de Formación de Profesorado Universitario que recibió uno de los autores y que disfrutó desde 2000 hasta 2003.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Foure, B. et al. *Shear Test on Keyed Joints between Precast Segments*. Proceedings of the Workshop AFPC External Prestressing in Strucutres. Saint-Rémy-lès-Chevreuse. June, 1993: 297-319.
- [2] Virlogeux, M. et al. *Some Elements for a Codification of External Prestressing and of Precast Segments*. Proceedings of the Workshop AFPC External Prestressing in Strucutres. Saint-Rémy-lès-Chevreuse. June, 1993: 449-466.
- [3] ATEP Proyecto y construcción de puentes y estructuras con pretensado exterior. Madrid. Septiembre 1996.
- [4] Huang, J., Eibl, J. *Design of Segmental Bridges under Combined Bending, Shear and Torsion FE-study* Proceedings of the Workshop AFPC External Prestressing in Strucutres. Saint-Rémy-lès-Chevreuse. June, 1993; 335-347.
- [5] Rombach, G. *Precast Segmental Box Girder Bridges with External Prestressing- Design and Construction* INSA, Rennes, Feb. 2002; 1-15
- [6] Turmo J. *Estudio del comportamiento a flexión y cortante de puentes de dovelas de hormigón con pretensado exterior y junta seca*. Dirigida: Prof. Dr. A.C. Aparicio y Prof. Dr. G. Ramos. Tesis Doctoral. ETSICCP de Barcelona. Dept. Ing. de la Construcción. Julio 2003.
- [7] <http://www.tdx.cesca.es/TDX-1030103-090157/>
- [8] A.A.S.H.T.O. *Guide Specifications for Design and Construction of Segmental Concrete Bridges*. Washington, 1998.
- [9] DIANA 8.1. *User's Manual*. TNO. Delft, 2002.
- [10] Bakhoun, M. M. *Shear Behaviour and Design of Joints in Precast Concrete Segmental Bridges*. Ph. D Dissertation. Massachusetts Institute of Technology, 1991.
- [11] *Model Code CEB-FIP 1990* Colegio de Ingenieros de Caminos. Madrid, 1995.



ÚLTIMAS  
**MONOGRAFÍAS**  
PUBLICADAS

**monografía**  
**M-6**

Método de Bielas y Tirantes

Comisión 1  
Grupo de Trabajo 1/3  
*Bielas y Tirantes*

Enero de 2003

Véase listado de monografías  
publicadas y formulario de petición  
de publicaciones en páginas  
114 y 115 de este mismo número

**monografía**  
**M-7**

Control Estadístico  
del Hormigón Estructural

Comisión 2  
Grupo de Trabajo 2/4  
*Control Estadístico  
del Hormigón Estructural*

Junio de 2003

**monografía**  
**M-8**

Recomendaciones  
para el proyecto  
de estructuras de hormigón de alta resistencia

Comisión 1  
Grupo de Trabajo 1/2  
*Bases de proyecto para  
hormigón de alta resistencia*

Enero de 2003

**monografía**  
**M-9**

Pruebas de Carga  
de Estructuras

Comisión 4  
Grupo de Trabajo 4/3  
*Pruebas de Carga de  
Estructuras*

Noviembre de 2004

**monografía**  
**M-10**

Comprobación  
de un  
tablero mixto

Comisión 5  
Grupo de Trabajo 5/3  
*"Puentes mixtos"*

Enero de 2006

<http://www.e-ache.net>

# Cálculo de muros de fábrica sometidos a cargas laterales de viento

***Calculation of masonry walls subjected to lateral wind loads***

◆  
**Javier Estévez Cimadevila**

Dr. Arquitecto

Catedrático de Universidad del Departamento de Tecnología de la Construcción Universidad de A Coruña

◆  
**Dolores Otero Chans**

Arquitecta

Profesora Asociada de Universidad del Departamento de Tecnología de la Construcción Universidad de A Coruña

## RESUMEN

A pesar de la importancia del problema, el cálculo de muros de fábrica sometidos a cargas laterales de viento no ha sido suficientemente abordado dentro del campo de la literatura técnica, lo que se ha traducido en una cuestión que las normativas hábilmente han soslayado hasta la aparición del Eurocódigo EC6, parte 1-3. El presente artículo clarifica los criterios del EC6, analizando desde un punto de vista comparativo los métodos de cálculo disponibles. Al mismo tiempo, se propone un análisis alternativo para la determinación de esfuerzos en la fábrica, criterio que aúna una significativa sencillez con una razonable precisión, acorde al nivel de conocimientos actualmente disponible sobre el comportamiento de las estructuras de fábrica.

## SUMMARY

*Even though the importance of the problem, the calculation of masonry walls subjected to lateral wind loads, has not been sufficiently discussed within the technical Literature. This subject has been avoided by all the codes until the appearance of Eurocode EC6, part 1-3. This report clarifies the criteria of available calculation methods. Furthermore, an alternative analysis for the determination of masonry stresses is discussed. This criterion combines both significant simplicity and reasonable precision, agreed at the level of knowledge available at the moment on the behavior of the masonry structures.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de muros de fábrica sometidos a acciones laterales de viento constituye un problema de notable complejidad. El escaso conocimiento existente respecto al comportamiento resistente de las obras de fábrica desaconseja el empleo de modelos sofisticados de cálculo que enmascaran, bajo una aparente precisión numérica, la debilidad de sus fundamentos. Las dificultades de cálculo inherentes al carácter ortotrópico de sus propiedades mecánicas y la heterogeneidad de resultados derivados de la notable incidencia que tiene todo el proceso constructivo, hacen deseable abordar la comprobación resistente bajo métodos aproximados que proporcionen una simplicidad en el procedimiento acorde con el nivel de conocimientos disponible.

Prescindiendo de la consideración del método de los elementos finitos, cuya principal dificultad se centra en el conocimiento fiable de las constantes elásticas de la fábrica necesarias para su aplicación, disponemos básicamente de dos modelos de cálculo para la determinación de esfuerzos en un muro sometido a cargas laterales:

- Funcionamiento del muro como arco rebajado.
- Funcionamiento del muro como placa.

En relación con el primero de los procedimientos, el conocimiento del mecanismo resistente como arco rebajado estriado entre sus apoyos es todavía insuficiente y, a pesar de la existencia de interesantes estudios [ref.4], su aplicación plan-

te numerosas dudas. En este sentido, no disponemos de ningún criterio para, atendiendo al carácter ortotrópico del muro y a las luces entre apoyos, determinar si deben considerarse sólo arcos verticales, o sólo horizontales o ambos simultáneamente. Por otra parte, la recomendación del Eurocódigo EC6 de considerar en el modelo exclusivamente arcos horizontales puede conducir a valores muy alejados de la realidad cuando los muros traveseros que actúan como apoyos se encuentran suficientemente distantes entre sí. Pero además de las incertidumbres anteriores, la posible presencia de retracción en la fábrica puede generar modificaciones en la geometría que, a pesar de su pequeña magnitud, alteran significativamente los resultados del modelo.

A la vista de las dificultades expresadas y atendiendo al estado actual de conocimientos, el cálculo de muros bajo acciones laterales debe abordarse admitiendo un funcionamiento como placa sustentada en sus bordes. Obviamente, dicho modelo debe tener presente la diferencia de propiedades de la fábrica en las dos direcciones ortogonales. A pesar de que se trata de un método de análisis claramente más contrastado que el anterior, siguen presentes incertidumbres que frecuentemente el técnico tiene que solventar atendiendo a su buen criterio. Una de las más habituales se refiere a las condiciones de sustentación y continuidad de la placa en los apoyos. En este sentido, deben tenerse presentes algunas recomendaciones de carácter fundamentalmente cualitativo y de difícil concreción práctica:

- Solamente debemos considerar apoyos en aquellos bordes que sean capaces de proporcionar la reacción correspondiente necesaria por equilibrio. Ello puede llevarnos a prescindir de la consideración de apoyo en los bordes superiores de muro no retacados eficazmente contra los forjados. Asimismo, es posible que la presencia de barreras antihumedad reste eficacia al apoyo del muro y, por tanto, puede ser aconsejable prescindir de su colaboración resistente.
- La continuidad estructural del muro sobre los apoyos debe establecerse atendiendo a las soluciones constructivas proyectadas. En general, los muros eficazmente trabajados a muros traveseros pueden suponerse continuos a los efectos de flexión horizontal. Por el contrario, la continuidad desde el punto de vista de la flexión vertical depende claramente de la solución adoptada para el enlace del forjado con el muro. Las soluciones más habituales, con entregas del forjado del orden de los 2/3 del espesor del muro y recubrimientos aislantes en el frente del forjado, aconsejan prescindir en tales casos de la continuidad estructural, considerando entonces el muro como simplemente apoyado en el forjado.

## 2. DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS FLECTORES RESISTENTES

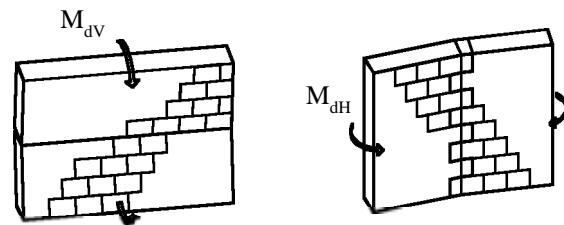
El tratamiento de las acciones laterales sobre muros de fábrica lo aborda el EC6 en su art. 4.6 de la parte 1-1 “Reglas generales para edificios. Reglas para fábrica y fábrica armada” [UNE-ENV 1996-1-1] [ref.1] y, de forma más detallada,

en la parte 1-3 “Reglas generales para edificios. Reglas detalladas para acciones laterales” [UNE-ENV 1996-1-3] [ref.2].

La condición de dimensionado en estado límite último se establece como:

$$M_d \leq M_{Rd} \quad (\text{ec. 1})$$

Dado el carácter ortotrópico de las fábricas, la diferencia existente tanto a nivel de esfuerzos como de capacidades resistentes respecto a los dos planos de flexión nos llevan a escribir la condición de dimensionado como:



$$M_{dV} \leq M_{RdV} \quad (\text{ec. 2})$$

$$M_{dH} \leq M_{RdH} \quad (\text{ec. 3})$$

A los efectos de determinar el momento flector resistente de cálculo  $M_{Rd}$  tenemos que distinguir entre fábricas sin armar y fábricas con armadura dispuesta en los tendales.

En el primero de los casos, fábricas sin armar, el momento flector  $M_{Rd}$  se obtiene con:

$$M_{Rd} = \frac{f_{xk} Z}{\gamma_M} \quad (\text{ec. 4})$$

Lógicamente, la resistencia característica a flexión depende del plano de flexión considerado. El EC6 establece que su magnitud se determine experimentalmente. Sin embargo, ante la habitual ausencia de dichos resultados experimentales pueden adoptarse los valores siguientes, de acuerdo con lo establecido en la Propuesta del Documento Nacional de Aplicación del EC6 (DNA ENV 1996-1-1:1995):

$$f_{xk1,\text{aparente}} = f_{xk1} + \gamma_M \sigma_{dp} \approx f_{vk0} + \gamma_M \sigma_{dp} \quad (\text{ec. 5})$$

$$f_{xk2} = 0,1 f_k \quad (\text{ec. 6})$$

En las estructuras de fábrica es usual la presencia de una significativa desigualdad en las resistencias a flexión respecto a los dos planos de flexión, desigualdad especialmente acusada en las fábricas pétreas y en las armadas. La presencia de carga vertical incrementa de forma sensible la resistencia característica a flexión  $f_{xk1}$ , cuando el plano de rotura es paralelo a los tendales. Es por ello importante la consideración de dicha carga vertical en la determinación de la resistencia a flexión, adoptando el valor de  $f_{xk1,\text{aparente}}$  en lugar de  $f_{xk1}$ , pues de esta manera se modifica el ratio de ortotropía de la placa y, por tanto, la distribución de momentos flectores en la misma.

En consecuencia, podemos expresar el momento flector resistente de cálculo en cada dirección de flexión como:

$$M_{RdV} = \frac{(f_{vk0} + \gamma_M \sigma_{dp})Z}{\gamma_M} \quad (\text{ec. 7})$$

$$M_{RdH} = \frac{0,1f_k Z}{\gamma_M} \quad (\text{ec. 8})$$

En el caso de fábricas con tendales armados, el momento flector resistente de cálculo  $M_{RdV}$  obviamente no varía. Por el contrario, la presencia de armadura modifica el momento  $M_{RdH}$  que se obtiene con:

$$M_{RdH} = \frac{A_s f_{yk} z}{\gamma_s} \quad (\text{ec. 9})$$

$$z = d \left[ 1 - 0,5 \cdot \frac{A_s f_{yk} \gamma_M}{bd f_k \gamma_s} \right] \leq 0,95d \quad (\text{ec. 10})$$

### 3. DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS FLECTORES APLICADOS

Las expresiones anteriores nos permiten determinar el momento flector resistente de cálculo correspondiente a los dos planos de flexión, tanto para fábricas sin armar como armadas. Ahora bien, la principal dificultad en la comprobación de la condición de dimensionado en estado límite último se nos presenta en la estimación de los momentos  $M_{dv}$  y  $M_{dh}$ . Cuando se trata de muros apoyados en dos bordes antagónicos, bien sean éstos los forjados o los muros traveseros, el problema no reviste complejidad, y los esfuerzos se determinan a partir del cálculo por asimilación a viga. En el caso de tratarse de un tramo aislado, los momentos serán:

$$M_{dv} = \gamma_F \frac{W_k H^2}{8} \quad (\text{ec. 11})$$

$$M_{dh} = \gamma_F \frac{W_k L^2}{8} \quad (\text{ec. 12})$$

Evidentemente, las expresiones anteriores son únicamente válidas para tramos de muros sin continuidad en los apoyos. En el caso de muros en los que sea factible la consideración de continuidad, podrán obtenerse los esfuerzos mediante cálculo elástico de la viga de asimilación correspondiente. Es importante señalar que en el Documento Nacional de Aplicación (DNA) del EC6 se establece que para muros apoyados únicamente en forjados debería calcularse el muro como arco entre apoyos, en lugar de cómo viga. En nuestra opinión, y dadas las actuales incertidumbres existentes respecto a dicho método, consideramos más adecuado el criterio de asimilación a viga.

Las dificultades para la determinación de esfuerzos surgen cuando se plantea el caso de muros sustentados en 3 ó 4 bordes. En este caso, y para tener en cuenta la incidencia que tiene en la distribución de esfuerzos de la placa el carácter ortotrópico de la fábrica, se define un coeficiente  $\mu$ , que representa el rateo ortogonal de las resistencias características a flexión de la fábrica respecto a las dos direcciones definidas anteriormente.

$$\mu = \frac{f_{xk1,\text{aparente}}}{f_{xk2}} = \frac{f_{vk0} + \gamma_M \sigma_{dp}}{0,1f_k} \quad (\text{ec. 13})$$

Conocido el coeficiente de rateo  $\mu$ , los momentos flectores de cálculo en cada dirección pueden obtenerse con:

$$M_{dv} = \mu M_{dh} \quad (\text{ec. 14})$$

$$M_{dh} = \alpha \gamma_F W_k L^2 \quad (\text{ec. 15})$$

El coeficiente de flexión  $\alpha$  depende del rateo ortogonal  $\mu$ , de la relación entre la altura y la longitud del muro  $\lambda$  y de las condiciones de sustentación en sus bordes. El EC6 en su parte 1-1 no define explícitamente el procedimiento para su obtención, señalando que se obtendrá mediante adecuada teoría. Se presentan entonces dos alternativas para su cuantificación:

- Aplicar los coeficientes recogidos en el DNA, obteniendo directamente los momentos con las expresiones siguientes:

$$M_{dv} = \frac{1}{8} \frac{\mu L}{\mu L + H} \gamma_F W_k H^2 \quad (\text{ec. 16})$$

$$M_{dh} = \frac{1}{8} \frac{H}{\mu L + H} \gamma_F W_k L^2 \quad (\text{ec. 17})$$

Es importante señalar que tanto en el DNA como en el borrador de Código Técnico SE-F, las expresiones recogidas son erróneas pues aparecen permutados los coeficientes indicando para  $M_{dv}$  el coeficiente correspondiente a  $M_{dh}$  y viceversa.

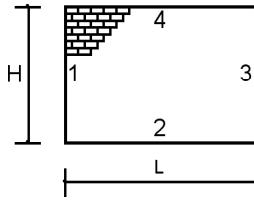
Las anteriores expresiones podemos escribirlas de forma que sean más fácilmente comparables con las proporcionadas con el criterio de placas, que se detalla en el siguiente punto:

$$\lambda = \frac{H}{L} \quad (\text{ec. 18})$$

$$M_{dv} = \frac{1}{8} \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda + \mu} \gamma_F W_k L^2 \quad (\text{ec. 19})$$

$$M_{dh} = \frac{1}{8} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \gamma_F W_k L^2 \quad (\text{ec. 20})$$

Tabla 1

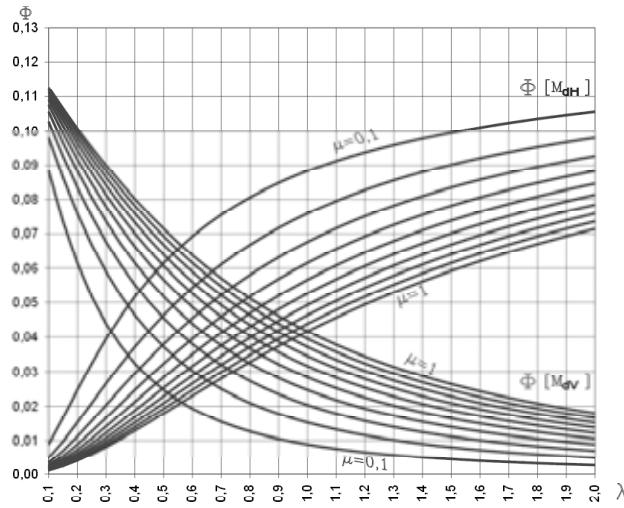
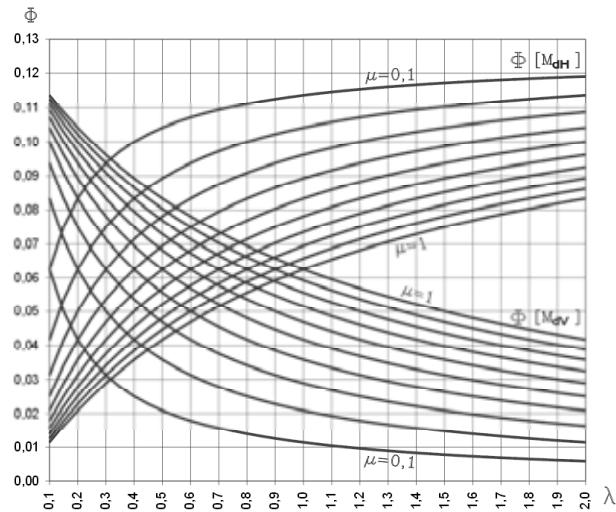
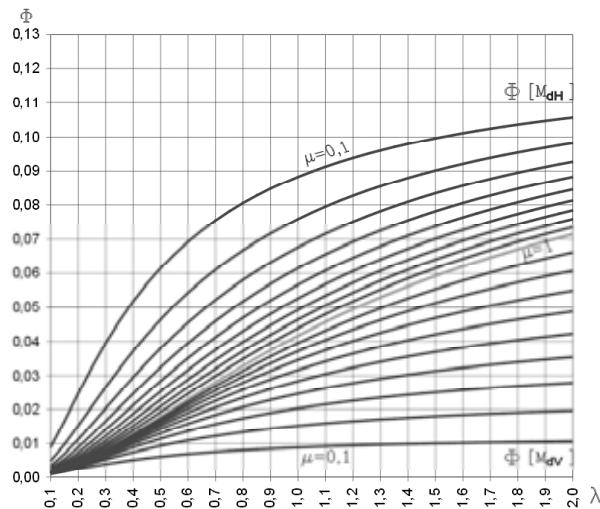
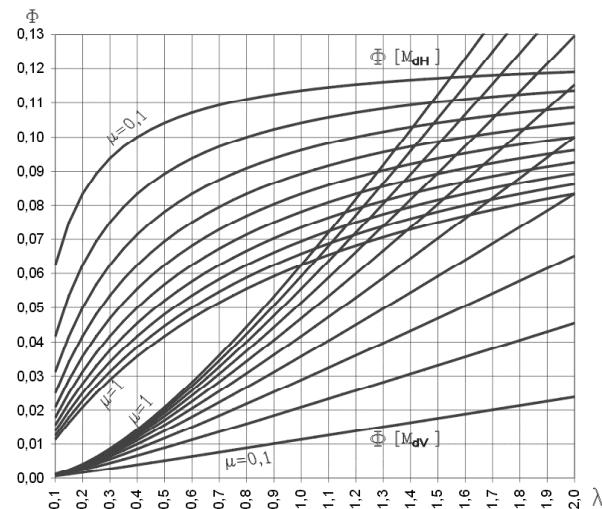
Muro sustentado en los cuatro bordes:	$M_{dh} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1^2 + \mu + \lambda_1 \sqrt{\mu})} \gamma_f W_k L^2$			
Muro con el borde superior libre:	$M_{dh} = \frac{\lambda^2}{6\lambda_3^2 + 8\lambda_3\sqrt{\mu} + 2k_2(\lambda_3^2 + \mu)} \gamma_f W_k L^2$	para $\lambda \leq \frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_3}}$		
	$M_{dh} = \frac{\lambda_4^2}{2(4\lambda_5^2 + \mu + 2\lambda_5\sqrt{\mu})} \gamma_f W_k L^2$	para $\lambda > \frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_3}}$		
Muro con un borde lateral libre <sup>(*)</sup> :	$M_{dh} = \frac{\lambda_6^2}{2(\lambda_7^2 + 4\cdot\mu + 2\lambda_7\sqrt{\mu})} \gamma_f W_k L^2$	para $\lambda \leq \frac{\sqrt{\mu}}{2} (\sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_4})$		
	$M_{dh} = \frac{\lambda_6^2}{6\mu + 8\lambda_6\sqrt{\mu} + 2k_1(\mu + \lambda_6^2)} \gamma_f W_k L^2$	para $\lambda > \frac{\sqrt{\mu}}{2} (\sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_4})$		
 $H$ height, $L$ width	$\lambda_1 = \lambda \frac{\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_3}}{\sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_4}}$	$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{(\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_3})^2}$	$\lambda_3 = \frac{\lambda}{2} (\sqrt{1+k_1} + \sqrt{1+k_3})$	
	$\lambda_4 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+k_2}}$	$\lambda_5 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{1+k_2}}$	$\lambda_6 = \frac{2\lambda}{(\sqrt{1+k_2} + \sqrt{1+k_4})}$	$\lambda_7 = \lambda_6 \sqrt{1+k_1}$
$k_1, k_2, k_3, k_4$ coeficientes de empotramiento de los correspondientes bordes del muro. $k_i = 0$ bordes apoyados. $k_i = 1$ bordes con empotramiento perfecto. $0 < k_i < 1$ bordes semiempotrados				
En todos los casos $M_{dv} = \mu M_{dh}$				

- Aplicar la tabla 4.1 del EC6 parte 1-3 que nos aporta los coeficientes de flexión  $\alpha$  correspondientes a placas con distintas condiciones de sustentación. En este segundo caso, la tabla nos proporciona el coeficiente  $\alpha$  para valores de  $H/L$  que se mueven entre 0,30 y 2,00 y valores de  $\mu$  variables entre 0,30 y 1,00. El cálculo real nos pone de manifiesto que las tablas de valores proporcionados son en muchos casos insuficientes, pues con frecuencia, especialmente en fábricas armadas, el coeficiente  $\mu$  de rateo se encuentra por debajo de 0,30.

El desafortunado criterio de EC6 de proporcionar la tabla de valores de  $\alpha$  sin explicitar ni las expresiones analíticas empleadas para su obtención, ni tan siquiera el método de cálculo empleado, comienza a ser desgraciadamente habitual en el ámbito normativo. Ello resulta si cabe más inexplicable en el caso presente, si tenemos en cuenta la simplicidad de las mismas, pues es fácil deducir, aunque no se cite expresamente, que la determinación de los coeficientes se ha obtenido aplicando el cálculo plástico del método de las líneas de rotura de Johansen [ref.3] en combinación con el método de la afinidad para placas ortótropas. Al objeto de facilitar la aplicación del criterio del EC6 y de darle mayor generalidad, se han obtenido las expresiones que nos permiten calcular los valores de los momentos flectores  $M_{dv}$  y  $M_{dh}$  para muros sustentados en tres y cuatro bordes, cualquiera que sea el grado de empotramiento en los mismos, el coeficiente de rateo  $\mu$  y la relación de lados  $\lambda$  (Tabla 1).

No obstante lo anterior, el empleo de un criterio de cálculo plástico en la determinación de las solicitudes es, cuando menos, discutible. La validez de dicho método ha sido ampliamente demostrada, desde un punto de vista experimental, en el campo del hormigón armado, sin que exista experiencia sobre su fiabilidad en estructuras de fábrica. Hay que tener presente que dicho método se sustenta en la hipótesis de redistribución de esfuerzos que se produce respecto a los proporcionados por la teoría elástica, conforme progresiva la fisuración y se alteran las inercias. En un material de ductilidad prácticamente nula como la fábrica, especialmente cuando no se arma, aceptar un grado de fisuración tal que lleguen a formarse secciones plastificadas situadas sobre las líneas de rotura constituye, a nuestro entender, un criterio de difícil sustentación sin una validación experimental.

Además del discutible criterio de aplicación de un método plástico para evaluar los momentos flectores actuantes en el muro en la hipótesis de placa sustentada en sus bordes, resulta sorprendente la diferencia de criterio y resultados que se obtienen aplicando los dos métodos recogidos en EC6 y DNA. Al objeto de visualizar las diferencias, se han representado gráficamente los resultados correspondientes al caso de muro apoyado en todo el contorno. La elección de este caso se debe a que el criterio del DNA solamente es aplicable a dicha situación, lo que reduce de forma casi total su utilidad práctica.

Figura 1. Valores de  $\Phi$  según EC6 para momentos expresados en función de  $H$  y  $L$ .Figura 2. Valores de  $\Phi$  según DNA para momentos expresados en función de  $H$  y  $L$ .Figura 3. Valores de  $\Phi$  según EC6 para momentos expresados únicamente en función de  $L$ .Figura 4. Valores de  $\Phi$  según DNA para momentos expresados únicamente en función de  $L$ .

Las expresiones utilizadas en la representación de las gráficas de las figuras 1 a 4 son las siguientes (Tabla 2):

Tabla 2

EC6	Figura 1	$M_{dv} = \frac{1}{8} \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu + \lambda\sqrt{\mu}} \gamma_F W_k H^2 = \phi \gamma_F W_k H^2$	$M_{dh} = \frac{1}{8} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu + \lambda\sqrt{\mu}} \gamma_F W_k L^2 = \phi \gamma_F W_k L^2$
	Figura 3	$M_{dv} = \frac{1}{8} \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda^2 + \mu + \lambda\sqrt{\mu}} \gamma_F W_k L^2 = \phi \gamma_F W_k L^2$	
DNA	Figura 2	$M_{dv} = \frac{1}{8} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \gamma_F W_k H^2 = \phi \gamma_F W_k H^2$	$M_{dh} = \frac{1}{8} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \gamma_F W_k L^2 = \phi \gamma_F W_k L^2$
	Figura 4	$M_{dv} = \frac{1}{8} \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda + \mu} \gamma_F W_k L^2 = \phi \gamma_F W_k L^2$	

$\phi \rightarrow$  coeficiente cuyo valor se determina, según los casos, a partir de las gráficas de las figuras 1 a 4.

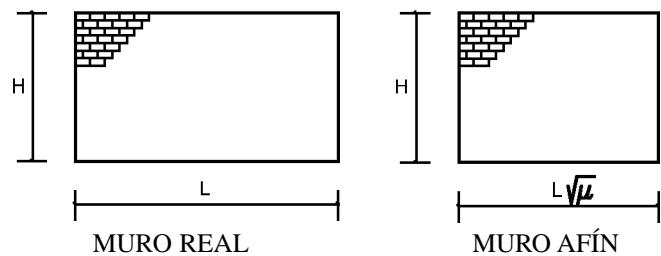
Las gráficas 1 y 3 correspondientes al EC6 no plantean ninguna duda, salvo la ya discutida validez del criterio plástico en su aplicación a la determinación de flectores en un muro de fábrica. Por el contrario, las gráficas 2 y 4 correspondientes al DNA nos ponen de manifiesto que dicho criterio de cálculo es claramente incorrecto. La Figura 2, en la que se representa los coeficientes  $\Phi$  que determina los momentos en función de la luz de flexión correspondiente ( $H$  y  $L$ ), nos muestran unas curvas de trazado análogo a las del EC6, pero con valores superiores a igualdad de esbeltez. Ello puede llevarnos a pensar en un criterio más conservador, pero coherente con el recogido en el EC6. Sin embargo, la Figura 4 donde se representa la variación de  $\Phi$  tomando como referencia siempre la misma luz de cálculo  $L$ , nos evidencia su incorrección. Puede observarse claramente como en muros isótropos ( $\mu=1$ ) y con esbelteces superiores a la unidad, el coeficiente correspondiente a  $M_{dv}$  supera a  $M_{dh}$ , lo que contraviene las teorías de cálculo. Para esbelteces inferiores a la unidad el efecto es el contrario e igualmente incorrecto. Por otra parte, puede observarse asimismo en las figuras 1 y 2 como el punto de corte de las gráficas en la que se igualan los momentos  $M_{dv}$  y  $M_{dh}$  se produce cuando  $\lambda=\mu$  en lugar de  $\lambda=\sqrt{\mu}$  tal y como ponen de manifiesto tanto el cálculo elástico como plástico.

En consecuencia, el método recogido en el DNA no sólo es aplicable a un único caso, el de muros apoyados en todo el contorno, lo que le resta utilidad, sino que además conduce a resultados erróneos y totalmente contrarios a los proporcionados por el método recogido en el EC6.

#### 4. PROPUESTA DE MÉTODO SIMPLIFICADO

Tal y como se ha expuesto en el apartado anterior, la casi nula ductilidad de las fábricas y el deseable criterio de evitar la aparición de fisuración, nos llevan a considerar como más adecuados los métodos basados en el cálculo elástico. En este sentido y al objeto de tener en cuenta el carácter ortotropo de

los muros de fábrica, es de gran utilidad la consideración del método de la afinidad que nos permite obtener los esfuerzos en un muro isótropo afín al muro real ortotropo.



La obtención de esfuerzos en el muro afín puede realizarse utilizando los métodos clásicos de cálculo elástico o alguna de las numerosas tablas disponibles para placas isótropas. Los momentos flectores  $M_{dv}$  obtenidos en el muro afín son directamente válidos. Por el contrario, los momentos flectores  $M_{dh}$  deben dividirse por el coeficiente de ortotropía  $\mu$ .

En el estado actual, caracterizado por el insuficiente nivel de conocimientos respecto a la capacidad resistente a flexión de una fábrica, el inicio de su fisuración y el valor real del coeficiente de ortotropía, consideramos que la utilización de un método simplificado, como el método de Marcus, para la obtención de los esfuerzos en el muro, aúna satisfactoriamente simplicidad y una eficiencia acorde al nivel de precisión de las hipótesis de cálculo.

En este sentido, podemos fácilmente formular de forma genérica las expresiones de los momentos flectores  $M_{dv}$  y  $M_{dh}$  para muros sustentados en cuatro bordes, cualquiera que sea el grado de empotramiento en los mismos, el coeficiente de rateo  $\mu$  y la relación de lados  $\lambda$  (Tabla 3).

Al objeto de comparar los resultados proporcionados por las expresiones anteriores se ha representado gráficamente en

Tabla 3

Momentos en apoyos		Momento en punto medio	
$M_{dh1}^- = -\frac{1}{8}\varphi_1 \frac{\varphi\lambda^4}{\varphi\lambda^4 + \mu^2} \gamma_f W_k L^2 = \phi \gamma_f W_k L^2$	$M_{dh3}^- = -\frac{1}{8}\varphi_3 \frac{\varphi\lambda^4}{\varphi\lambda^4 + \mu^2} \gamma_f W_k L^2 = \phi \gamma_f W_k L^2$	$M_{dh}^+ = \frac{1}{8}\varphi_5 \frac{\varphi\lambda^4}{\varphi\lambda^4 + \mu^2} \gamma_f W_k L^2 = \phi \gamma_f W_k L^2$	
$M_{dv2}^- = -\frac{1}{8}\varphi_2 \frac{\lambda^2\mu^2}{\varphi\lambda^4 + \mu^2} \gamma_f W_k L^2 = \phi \gamma_f W_k L^2$	$M_{dv4}^- = -\frac{1}{8}\varphi_4 \frac{\lambda^2\mu^2}{\varphi\lambda^4 + \mu^2} \gamma_f W_k L^2 = \phi \gamma_f W_k L^2$	$M_{dv}^+ = \frac{1}{8}\varphi_6 \frac{\lambda^2\mu^2}{\varphi\lambda^4 + \mu^2} \gamma_f W_k L^2 = \phi \gamma_f W_k L^2$	
 Donde:	$\varphi_1 = \frac{2k_1}{1+k_1+k_3}$	$\varphi_2 = \frac{2k_2}{1+k_2+k_4}$	$\varphi_3 = \frac{2k_3}{1+k_1+k_3}$
	$\varphi_5 = \frac{1}{1+k_1+k_3}$	$\varphi_6 = \frac{1}{1+k_2+k_4}$	$\varphi = \frac{1-0,6(\varphi_2+\varphi_4)}{1-0,6(\varphi_1+\varphi_3)}$
$k_1, k_2, k_3, k_4$ coeficientes de empotramiento de los correspondientes bordes del muro.			
$k_i = 0$ bordes apoyados	$k_i = 1$ bordes con empotramiento perfecto	$0 < k_i < 1$ bordes semiempotrados	

las figuras 5 a 7 la variación de los coeficientes  $\Phi$ . Asimismo, se ha procedido al cálculo, aplicando el método de los elementos finitos, de un total de 140 placas sustentadas en sus cuatro bordes con diferentes valores de esbeltez, cuyos resultados se plasman en las figuras 6 y 8.

La comparación entre el procedimiento simplificado y el MEF nos pone de manifiesto una clara concordancia, aceptando que se trata de un método claramente conservador; ello no debe suponer una puesta en cuestión del método, por cuanto el deficiente conocimiento actual del comportamiento de las fábricas flectadas, desaconsejan aventurarse en métodos aparentemente más rigurosos que se sustentan, sin embargo, en hipótesis sin avalar. En consecuencia, se propone la formulación recogida en la Tabla 3 anterior como alternativa de cálculo frente al EC6 y al DNA, pues nos aporta un análisis elástico en combinación con unas expresiones de

notable sencillez que permiten, sin embargo, abordar una amplísima casuística.

## 5. CONCLUSIONES

El criterio de cálculo plástico del EC6 para la determinación de las solicitudes en muros sustentados en tres o cuatro bordes no parece suficientemente avalado para su aplicación en fábricas sin ductilidad.

El método alternativo propuesto por el DNA es claramente incorrecto y debe ser revisado.

La aplicación del método de Marcus en muros isótropos afines al muro real nos permite determinar los esfuerzos de flexión en una amplia casuística, lo que constituye un procedimiento fiable y sencillo, cuyo nivel de precisión es acorde con el actual conocimiento del comportamiento de las fábricas.

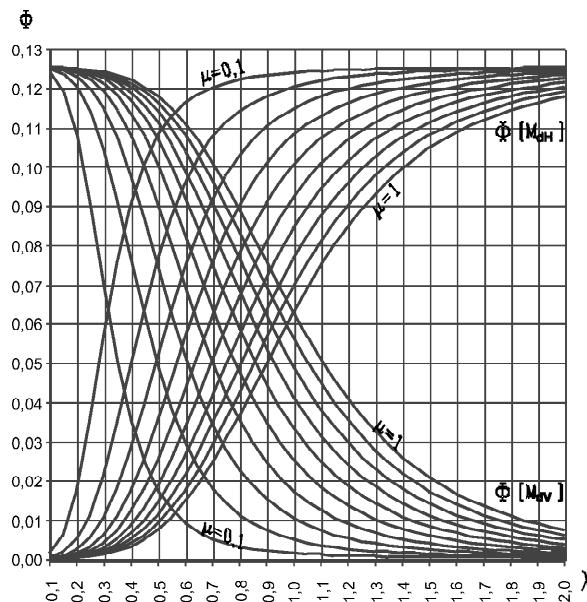


Figura 5. Valores de  $\Phi$  según método propuesto para momentos expresados en función de  $H$  y  $L$ .

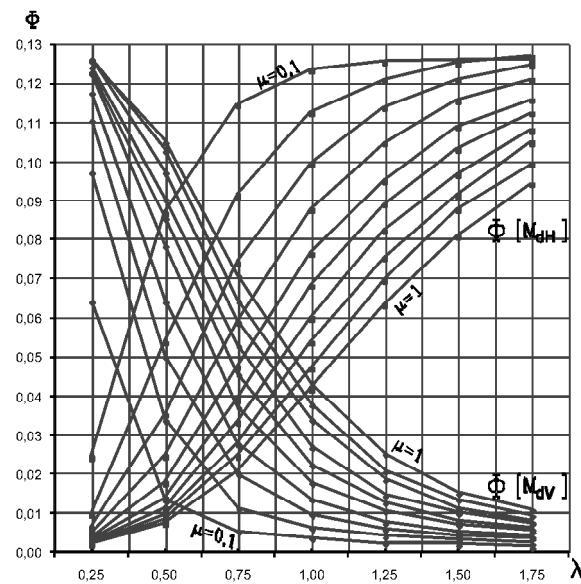


Figura 6. Valores de  $\Phi$  según MEF para momentos expresados en función de  $H$  y  $L$ .

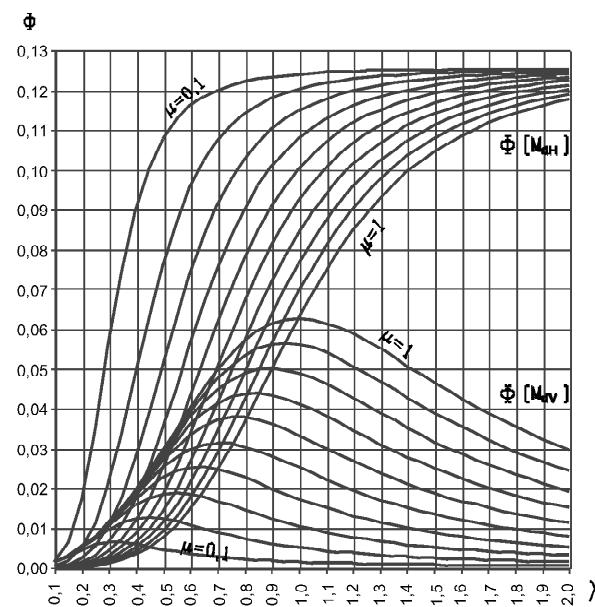


Figura 7. Valores de  $\Phi$  según método propuesto para momentos expresados únicamente en función de  $L$ .

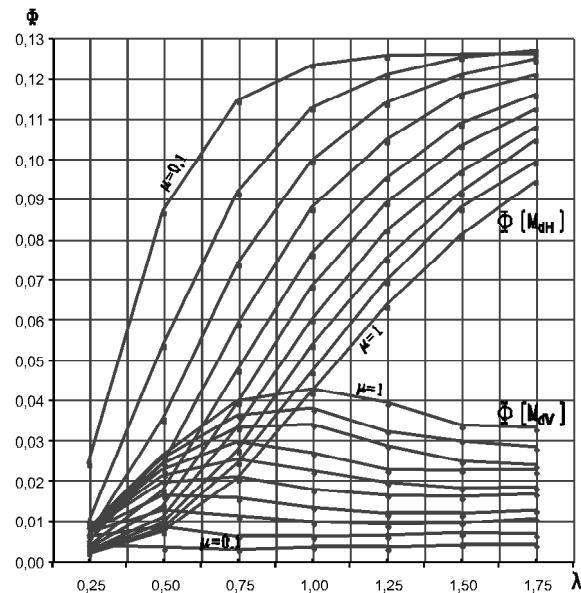


Figura 8. Valores de  $\Phi$  según MEF para momentos expresados únicamente en función de  $L$ .

## 6. NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA

$b$	Ancho de la sección flectada. Generalmente los cálculos se realizan para 1 m de ancho.	$M_{Rd}$	Momento flector resistente de cálculo del muro.
$d$	Canto útil de la sección.	$M_{RdH}$	Momento resistente de cálculo a flexión (plano de rotura perpendicular a los tendones).
$f_k$	Resistencia característica a compresión de la fábrica.	$M_{RdV}$	Momento resistente de cálculo a flexión (plano de rotura paralelo a los tendones)
$f_{vk0}$	Resistencia a corte puro con tensión de compresión nula. Se determina en tabla 3.5 de EC6.	$W_k$	Carga característica de viento por unidad de área.
$f_{xk1}$	Resistencia característica a flexión de la fábrica correspondiente al plano de flexión.	$Z$	Módulo resistente de la sección del muro.
$f_{xk1}$	Resistencia característica a flexión de la fábrica con plano de rotura paralelo a los tendones.	$A$	Coeficiente de flexión.
$f_{xk1,aparente}$	Resistencia característica a flexión de la fábrica con plano de rotura paralelo a los tendones teniendo en cuenta el incremento que se produce por efecto de la carga vertical.	$\alpha$	Coeficiente de flexión de placas (Tabla 4.1. EC6. parte 1-3).
$f_{xk2}$	Resistencia característica a flexión de la fábrica con plano de rotura perpendicular a los tendones.	$\gamma_F$	Coeficiente parcial de seguridad para acciones.
$f_{yk}$	Resistencia característica del acero.	$\gamma_M$	Coeficiente parcial de seguridad de la fábrica.
$k_i$	Coeficiente de empotramiento del correspondiente borde del muro.	$\gamma_S$	Coeficiente parcial de seguridad del acero.
$z$	Brazo de palanca (art. 4.7.1.6 de EC6).	$\lambda$	Esbelta geométrica del muro.
$A_s$	Área de la armadura de tracción de tendones para un ancho $b$ de la sección flectada.	$\mu$	Ratio de las resistencias características a flexión de la fábrica.
$H$	Altura libre del muro entre forjados.	$\sigma_{dp}$	Tensión debida a la carga vertical permanente de cálculo en el muro a la altura considerada.
$L$	Longitud libre del muro entre muros traveseros.		
$M_d$	Momento flector de cálculo aplicado al muro.		
$M_{dH}$	Momento flector de cálculo aplicado al muro (plano de rotura perpendicular a los tendones).		
$M_{dv}$	Momento flector de cálculo aplicado al muro (plano de rotura paralelo a los tendones).		

## BIBLIOGRAFÍA

[1] Eurocódigo 6. Proyecto de estructuras de fábrica. Parte 1-1: Reglas generales para edificios. Reglas para fábrica y fábrica armada. Asociación Española de Normalización y Certificación. Madrid, 2000.

[2] Eurocódigo 6. Proyecto de estructuras de fábrica. Parte 1-3: Reglas generales para edificios. Reglas detalladas para acciones laterales. Asociación Española de Normalización y Certificación. Madrid, 2000.

[3] Johansen, K.W. Yield-line formulae for slabs. Cement and Concrete Association. London, 1972.

[4] Río Vega, María Concepción del. Métodos de análisis para verificar la estabilidad y resistencia de los cerramientos de ladrillo. Conarquitectura. Madrid, 2003.

# Aproximación al cálculo numérico de secciones de hormigón bajo cargas de incendio

**An approximation to numerical calculations of concrete under fire loads**



Miguel Álvarez Laita

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

## RESUMEN

Se desarrolla un método de cálculo analítico ajustado a la normativa vigente: EHE, CPI y Eurocódigos de hormigón armado y pretensado, sin excluir su aplicación a otros materiales y normas.

Inicialmente se presentan unos conceptos básicos de termodinámica para posteriormente analizar el comportamiento termodinámico de secciones de forma y material cualquiera.

Se realiza un estudio teórico que conduce a plantear un sistema de miles de ecuaciones con miles de incógnitas, desarrollándose un método numérico de resolución mediante ordenador. Por otro lado se establece la formulación matemática de las ecuaciones de contorno y se analiza el campo de validez de la solución propuesta.

## SUMMARY

*A method of analytical calculation according to the operative regulations: EHE, CPI and Eurocodes of pre-stressed and reinforced concrete, is developed, and its application to other materials and regulations cannot be excluded.*

*Primarily, some basic thermodynamic concepts are shown in order to then analyse, afterwards, the thermodynamic response of sections of any shape and material.*

*A theoretical study is performed leading us to lay out a system of thousands of equations with thousands of unknown*

*results which forces us to a development of a numerical method of solution. On the other hand the mathematics formulas and the contour equations are set up, the range of validity of the solution proposed is also analysed.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La preocupación social y la imposición normativa del estudio de las situaciones accidentales de incendio han llevado, desde mediados del siglo XX, a la realización de amplias investigaciones de laboratorio acompañadas por desarrollos teóricos y normativos.

Los desarrollos normativos han llevado a la imposición de la comprobación estructural de las situaciones accidentales de incendio. El desarrollo normativo español se basa en la regulación de los Eurocódigos, existiendo escasos programas de ordenador de comprobación de estas situaciones.

En una primera fase, ésta que ahora se comenta, el objetivo es obtener los desarrollos matemáticos necesarios para la codificación de una aplicación informática que cumpla la normativa de carácter obligatorio existente al día de la fecha, proporcionando la formulación matemática necesaria y sus límites de validez.

En fases posteriores, algunas en estado avanzado, se pretende desarrollar una aplicación informática que proporcione las isotermas en secciones de hormigón armado y pretensado de forma genérica, el cálculo numérico de los esfuerzos sustitu-

tivos de dicha acción térmica, para finalmente abordar el cálculo de secciones sometidas a cargas térmicas de incendio de forma directa.

En resumen, el autor intenta seguir la invitación que se da en el Eurocódigo 4 1-2 (29): “*Se espera que organizaciones externas interesadas preparen ayudas para el dimensionamiento basadas en los modelos de calculo indicados en la Norma Experimental*”. (Realmente, en el momento actual las estructuras mixtas, a las que hace referencia la citada norma de estructuras mixtas, no “caben” en el modelo de cálculo que se desarrolla en este documento).

## 2. TERMODINÁMICA DEL FUEGO

En primer lugar se estudia la difusión del calor en un medio genérico bidimensional e isótropo, obteniéndose la ecuación diferencial que rige el fenómeno en los casos en los que el calor específico y la conductividad del material son constantes o se pueden suponer constantes si la variación térmica es suficientemente reducida.

Posteriormente se analiza la resolución de la ecuación diferencial que define la difusión del calor, estableciéndose las condiciones de contorno que permiten obtener la solución.

Finalmente se analizan las condiciones de consistencia, convergencia y estabilidad del sistema iterativo propuesto.

### 2.1. Difusión del calor en un medio superficial isótropo

Para establecer la ecuación del movimiento del calor, por conducción, en el interior de una sección bidimensional de forma cualquiera y variable con el tiempo, se deben conocer los dos primeros principios de la termodinámica:

**Primer principio.-** *La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo, a través de una unidad de área es directamente proporcional a la diferencia de temperatura e inversamente proporcional a la distancia que recorre.*

$$Q(x, y, \theta) = -k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

**Segundo principio.-** *La cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un material de masa m, de  $\theta$  a  $\theta + \Delta\theta$  es:  $c_e * m * \Delta\theta$ ; donde  $c_e$  es el calor específico del material.*

$$Q_t = \int_x^{x+\varepsilon_x} \int_y^{y+\varepsilon_y} c_e a \rho [\theta(x, y, t + \Delta t) - \theta(x, y, t)] dx dy$$

Considerando un punto de la sección plana, de coordenadas  $(x, y)$  y  $\varepsilon_x > 0$ ,  $\varepsilon_y > 0$ , en un medio isótropo y en la hipótesis de que o bien el calor específico y la conductividad son independientes de la temperatura, o un plazo temporal lo suficientemente reducido para poder considerar a ambos constantes:

Por una parte durante el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$  la temperatura de la celda ha pasado de  $\theta(x, y, t)$  a  $\theta(x, y, t + \Delta t)$

y por tanto, aplicando el segundo principio de la termodinámica, la cantidad de calor necesaria para cambiar la temperatura en el elemento  $[x, x + \varepsilon_x] - [y, y + \varepsilon_y]$  es:

$$Q_t = \int_x^{x+\varepsilon_x} \int_y^{y+\varepsilon_y} c_e a \rho [\theta(x, y, t + \Delta t) - \theta(x, y, t)] dx dy$$

Por último este calor solo ha podido ser aportado (Ver Figura 1) por:

- El lado  $[x, x + \varepsilon_x] - [y]$  hacia arriba
- El lado  $[x, x + \varepsilon_x] - [y + \varepsilon_y]$  hacia abajo
- El lado  $[x] - [y, y + \varepsilon_y]$  hacia la derecha
- El lado  $[x + \varepsilon_x] - [y, y + \varepsilon_y]$  hacia la izquierda

y las cantidades de calor aportadas son, según el primer principio de la termodinámica:

$$Q_1 = -\lambda \Delta t a \varepsilon_y \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x} + Q(\Delta t)$$

$$Q_2 = -\lambda \Delta t a \varepsilon_y \frac{\partial \theta(x + \varepsilon_x, y, t)}{\partial x} + Q(\Delta t)$$

$$Q_3 = +\lambda \Delta t a \varepsilon_x \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial y} + Q(\Delta t)$$

$$Q_4 = +\lambda \Delta t a \varepsilon_x \frac{\partial \theta(x, y + \varepsilon_y, t)}{\partial y} + Q(\Delta t)$$

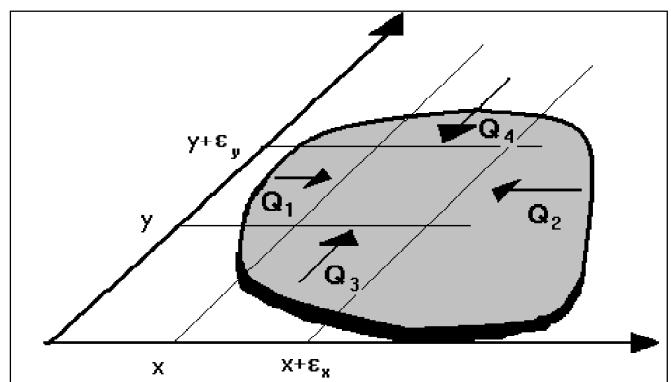


Figura 1. Difusión del calor en una placa.

dado que ambas cantidades de calor deben ser iguales para que se mantenga el equilibrio térmico:

$$Q_t = -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4$$

dividiendo ambos términos por:  $c_e \rho \Delta t a \varepsilon_x \varepsilon_y$  y haciendo  $\Delta t \rightarrow 0$ ;  $\varepsilon_x \rightarrow 0$   $\varepsilon_y \rightarrow 0$  resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \delta \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad [1]$$

que es la ecuación de transmisión del calor en el caso bidimensional, siendo:  $\delta = \frac{\lambda}{c_e \rho}$  la difusividad del material.

La fórmula general en el caso de considerar que el calor específico y la conductividad son dependientes de la temperatura puede expresarse, en un espacio de dos dimensiones, en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \delta \nabla^2 \theta + \beta \nabla \theta \cdot \nabla \theta = \\ &= \delta \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \beta \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

siendo:  $\delta = \frac{\lambda}{c_e \rho}$  La difusividad

$\beta = \frac{1}{\rho c_e} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)$  La difusividad complementaria o cuadrática

$\theta$  La temperatura

$t$  El tiempo

$c_e$  Calor específico del material

$\lambda$  Conductibilidad térmica del material

$x$  La ordenada del punto

$y$  La abscisa del punto

$\rho$  Densidad del material

En este trabajo se analizaran plazos temporales en los que la variación térmica es reducida y dentro de ellos se puede aplicar la forma simplificada. Posteriormente se analizaran los plazos temporales limites de aplicación.

Esta ecuación en derivadas parciales no tiene solución exacta más que en algunos casos particulares, secciones circulares con temperaturas con simetría axial y las rectangulares con iguales condiciones de simetría. El problema debe resolverse mediante métodos aproximados y entre ellos los más adecuados para cálculo numérico son el desarrollo en serie, el cálculo por diferencias finitas y el método de los elementos finitos.

El problema principal que presenta el método de desarrollo en serie es que se restringe mucho el tipo de secciones a las que es aplicable, puesto que en general solo es aplicable a secciones sencillas: circulares o rectangulares.

En el mercado existen múltiples programas de calculo por elementos finitos con los que es posible realizar los cálculos necesarios, en algún caso de forma directa y en general simulando la situación en un modelo estructural a costa de un análisis previo para convertir el problema térmico en un problema de resistencia de materiales o de un sobrecosto importante en la adquisición del programa.

El método de las diferencias finitas se puede aplicar a cualquier forma de sección, lo cual supone una importante mejora sobre el método de desarrollo en series y por otro lado se puede realizar un programa de cálculo térmico sin necesidad de asimilarlo a un problema de resistencia de materiales.

## 2.2. Análisis por diferencias finitas. Ecuación general

El calculo por integración directa de la ecuación diferencial, consiste en transformarla en una ecuación en diferencias finitas, es decir sustituir las derivadas por cocientes entre incrementos finitos. La ecuación se transforma en un sistema de ecuaciones lineales con numerosas incógnitas por ecuación.

Para ello se divide la sección en un cierto número de pequeños elementos, formando una estructura celular que ocupa toda la sección. Se eligen como incógnitas las temperaturas en cada uno de los nodos ficticios situados en el centro de cada una de las celdas. Las condiciones de contorno se pueden expresar también en forma de ecuaciones en diferencias finitas para lo que es necesario considerar también los nodos exteriores al perímetro de la sección.

Las derivadas se expresan con la ayuda de un polinomio de interpolación, mediante las abscisas y ordenadas de las funciones cuyos valores coinciden en cada punto con la función busca-

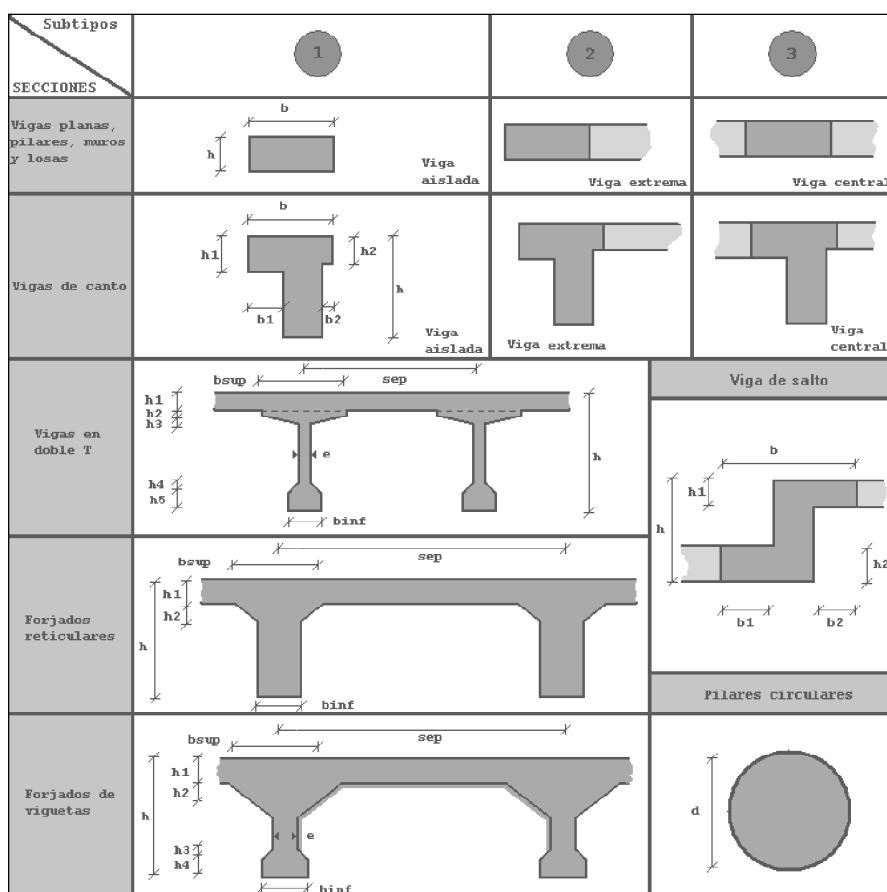


Figura 2. Ejemplos de secciones predefinidas, accesibles con un número limitado de datos de forma.

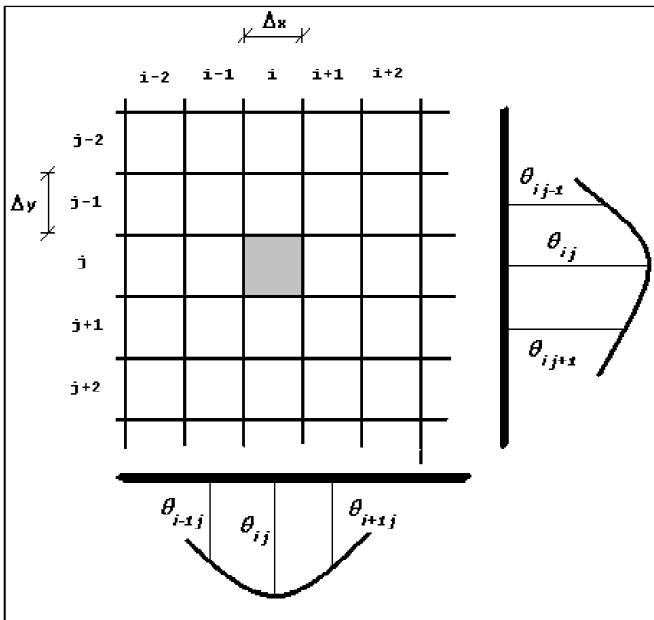


Figura 3. Aplicación del método de las diferencias finitas.

da. Las derivadas de este polinomio se consideran aproximadamente iguales a las derivadas de la función buscada. Lo más sencillo es adoptar como polinomio de interpolación una función cuadrática. Suponiendo que la separación entre puntos de la malla es  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , en general  $\Delta x \neq \Delta y$ .

Cuando la separación entre tres puntos de una curva con temperaturas  $\theta_{i-1,j}$ ,  $\theta_{i,j}$  y  $\theta_{i+1,j}$  es suficientemente pequeña, puede sustituirse el tramo de curva por el de parábola (Figura 3):

$$\theta = \frac{\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}}{2 * \Delta x^2} x^2 + \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2 * \Delta x} x + \theta_{i,j}$$

$$\theta = \frac{\theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}}{2 * \Delta y^2} y^2 + \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2 * \Delta y} y + \theta_{i,j}$$

Los valores aproximados de las derivadas en el punto estudiado, centro de la fila  $j$  columna  $i$ , valen entonces:

$$\frac{\delta \theta}{\delta x} \approx \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2 * \Delta x}; \quad \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} \approx \frac{\theta_{i-1,j} - 2 * \theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

y análogamente las derivadas en la dirección opuesta:

$$\frac{\delta \theta}{\delta y} \approx \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2 * \Delta y}; \quad \frac{\delta^2 \theta}{\delta y^2} \approx \frac{\theta_{i,j-1} - 2 * \theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

en nuestro caso:

$$\nabla^2 \theta = \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \theta}{\delta y^2} = \frac{\theta_{i-1,j} - 2 * \theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{\theta_{i,j-1} - 2 * \theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

haciendo  $\Delta x = \Delta y$  y sustituyendo el resultado en la ecuación [1] :

$$\frac{\Delta \theta_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{c_e \rho} \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{i+1,j} + \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1} - 4 * \theta_{i,j}}{\Delta x^2}$$

$$\Delta \theta_{i,j} = \frac{\lambda}{c_e \rho} \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{i+1,j} + \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1} - 4 * \theta_{i,j}}{\Delta x^2} \Delta t$$

considerando una partición del tiempo en períodos:  $\Delta t = \frac{c_e \rho}{4\lambda} \Delta x^2$  [2]; siendo preciso que el incremento de tiempo,  $\Delta t$ , sea suficientemente reducido para que las variaciones de temperatura también lo sean, así como que las características de los materiales permanezcan prácticamente constantes:

$$\Delta \theta_{i,j} = \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{i+1,j} + \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1}}{4} - \theta_{i,j} \quad [3]$$

$$\theta_{i,j} + \Delta \theta_{i,j} = (\theta_{i,j})_{t+\Delta t} = \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{i+1,j} + \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1}}{4} \quad [4]$$

Pudiéndose obtener las temperaturas en cada uno de sus elementos en función de las temperaturas de los elementos adyacentes.

Realmente el algoritmo matemático que se plantea puede parecer poco eficaz para resolver el problema, exigiendo un tiempo de cálculo importante comparado con otros métodos. Sin embargo tiene la ventaja de su sencillez a nivel teórico y su fácil y cómoda extensión a diferentes formas de la sección y a secciones de formas complicadas. Tanto es así que es el que utilizan la mayor parte de los programas que analizan problemas de transmisión térmica. (Por ejemplo el programa HEATING desarrollado por Oak Ridge National Laboratories (ORNL)).

### 2.3. Condiciones de contorno

En el contorno se pueden establecer dos tipos de condiciones:

- Condiciones de Rovin
- Condiciones de Neumann.

En las condiciones de Rovin se conocen los valores de la función en las celdas adyacentes al contorno y la condición, que une estos valores a los de las celdas del contorno. Como luego se verá una condición de este tipo lleva a formulaciones como:

$$\theta_0 = \frac{\theta_g \Delta x + \left( \frac{\lambda}{h} - \frac{\Delta x}{2} \right) \theta_{i,j}}{\frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2}}$$

En las condiciones de Neumann lo que se especifica es el valor de la derivada, frecuentemente igual a cero. Este tipo de condición permite establecer condiciones de simetría:

$$\frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial y} = 0$$

así, por ejemplo, la primera de las dos formulas obliga a una simetría respecto al eje vertical por lo que:

$$\theta_{i+1, j} = \theta_{i-1, j}$$

y sustituyendo en la formula [4] resulta:

$$(\theta_{i, j})_{t+\Delta t} = \frac{2\theta_{i-1, j} + \theta_{i, j-1} + \theta_{i, j+1}}{4} \quad [5]$$

## 2.4. Ecuaciones de contorno

La ecuación [4] ha de escribirse para todos los nudos situados en la sección, por tanto en todo su borde entraran también en el cálculo puntos exteriores a ella, en los que es preciso introducir las condiciones de contorno.

El análisis de los elementos perimetrales precisa incorporar un concepto nuevo, el coeficiente de intercambio de calor (norma FB) o el flujo térmico superficial (Eurocódigo).

Para el estudio de la difusión térmica en las celdas perimetrales y por consiguiente para establecer las condiciones de contorno, es preciso partir de unos conocimientos termodinámicos básicos. Se supone que el gas permanece a una temperatura  $\theta_g$ , pero esta temperatura decrece en las proximidades de la sección debido a la transferencia de calor a esta, a un valor  $\theta_o$  (Figura 4). Suponiendo  $\theta_g$  la temperatura del gas del ambiente inflamado,  $\theta_o$  será menor que ella y a su vez la temperatura de las celdas en el perímetro de la sección  $\theta_{i, j}$  será inferior a la de las celdas en el ambiente en contacto con ellas.

### Condiciones de contorno en los lados rectos

Si se supone una variación lineal de la temperatura en el ambiente en contacto con la sección desde el valor  $\theta_g$  hasta  $(\theta_g + \theta_{i, j})/2$ , (Figura 4) es posible establecer de forma sencilla las ecuaciones de contorno.

El flujo superficial de calor debido a la convección y a la radiación se puede considerar con suficiente aproximación de valor:

$$\Delta Q_1 = h \Delta x \left( \theta_g - \frac{\theta_{i, j} + \theta_o}{2} \right)$$

Por otro lado este calor debe ser igual al disipado en el interior de la sección de hormigón por lo que:

$$\Delta Q_2 = \lambda (\theta_0 - \theta_{i, j})$$

y dado que en situación de equilibrio ambos flujos deben ser iguales:

$$\Delta Q_2 = \Delta Q_1 \Rightarrow \lambda (\theta_0 - \theta_{i, j}) = h \Delta x \frac{(\theta_g - \theta_{i, j}) + (\theta_g - \theta_o)}{2}$$

operando resulta:

$$\left( \frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2} \right) \theta_0 = 2 \frac{\Delta x}{2} \theta_g + \frac{\lambda}{h} \theta_{i, j} - \frac{\Delta x}{2} \theta_o$$

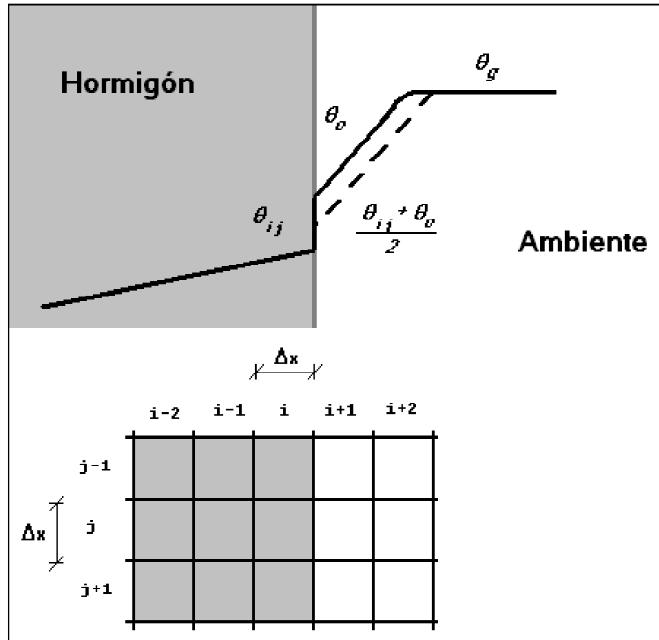


Figura 4. Condiciones de contorno en los lados rectos.

Por tanto la temperatura  $\theta_0$  en el centro de un cuadrado de lado  $\Delta x$  situado en el ambiente y en contacto con la superficie de separación de un sólido esta dada por:

$$\theta_0 = \frac{\theta_g \Delta x + \left( \frac{\lambda}{h} - \frac{\Delta x}{2} \right) \theta_{i, j}}{\frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2}} \quad [6]$$

La condición anterior esta implícitamente deducida para el lado caliente, las condiciones en el lado frío se analizan posteriormente.

### Condiciones de contorno en las esquinas

El flujo superficial de calor debido a la convección y a la radiación se puede considerar con suficiente aproximación de valor (Figura 5):

$$\Delta Q_1 = h \left( 2 \Delta x \theta_g - \Delta x \frac{(\theta_{i, j-1} + \theta_{i-1, j}) / 2 + \theta_o}{2} \right)$$

Este calor debe ser igual al disipado en el interior de la sección de hormigón por lo que:

$$\Delta Q_2 = \lambda (\theta_0 - (\theta_{i,j-1} + \theta_{i-1,j}) / 2)$$

y como en situación de equilibrio ambos flujos deben ser iguales:

$$\begin{aligned}\Delta Q_2 &= \Delta Q_1 \Rightarrow \lambda * (\theta_0 - (\theta_{i,j-1} + \theta_{i-1,j}) / 2) = \\ &= h \left( 2 \Delta x \theta_g - \Delta x \frac{(\theta_{i,j-1} + \theta_{i-1,j}) / 2 + \theta_0}{2} \right)\end{aligned}$$

La temperatura  $\theta_0$  en el centro de un cuadrado de lado  $\Delta x$  situado en el ambiente y en contacto con la superficie de separación de un sólido estará dada por:

$$\theta_0 = \frac{2 \theta_g \Delta x + \left( \frac{\lambda}{h} - \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\theta_{i,j-1} + \theta_{i-1,j}}{2}}{\frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2}} \quad [7]$$

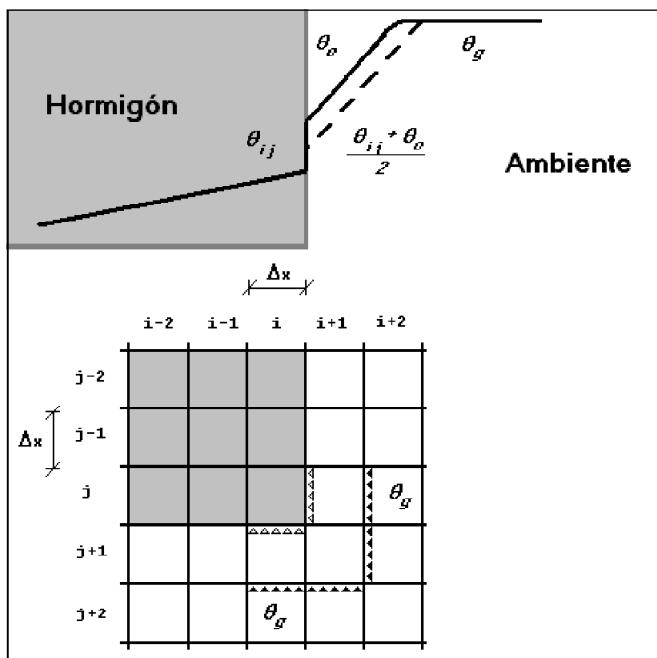


Figura 5. Condiciones de contorno en las esquinas.

#### Condiciones en el lado frío

La formulación en el lado frío es similar:

Lados rectos:

$$\theta_0 = \frac{\left( \frac{\lambda}{h} - \frac{\Delta x}{2} \right) * \theta_{i,j}}{\frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2}} \quad [8]$$

Esquinas:

$$\theta_0 = \frac{2 \theta_f \Delta x + \left( \frac{\lambda}{h} - \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\theta_{i,j-1} + \theta_{i-1,j}}{2}}{\frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2}} \quad [9]$$

siendo:  $\theta_f$  la temperatura del lado frío.

En el caso de aplicar los incendios nominales, en el lado frío se considera la temperatura ambiente y dado que lo que se analiza es la variación de temperatura sobre ella (20 °C), se suele considerar  $\theta_f = 0$ , en cuyo caso las formulas anteriores quedan simplificadas a:

Lados rectos:

$$\theta_0 = \frac{\left( \frac{\lambda}{h} - \frac{\Delta x}{2} \right) * \theta_{i,j}}{\frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2}} \quad [10]$$

Esquinas:

$$\theta_0 = \frac{\left( \frac{\lambda}{h} - \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\theta_{i,j-1} + \theta_{i-1,j}}{2}}{\frac{\lambda}{h} + \frac{\Delta x}{2}} \quad [11]$$

sin embargo en el caso de incendios reales ello no es así, al poder existir un recinto frío en condiciones de mala ventilación, su consideración debería ser en casi todos los casos obligatoria, por lo que en estos casos debe establecerse una curva de calentamiento de dicho recinto en función del tiempo y la temperatura alcanzada.

#### 2.5. Procedimiento de resolución

Planteadas las ecuaciones [4] a [11] en los nodos ficticios, centro de las celdas, se puede llegar a obtener un sistema lineal de hasta 90.000 ecuaciones (con secciones de 150\* 150 cms y cuadricula de 5 \* 5 mm), aunque en la mayoría de los casos el número de ecuaciones y de incógnitas es notablemente más reducido.

Los métodos de solución que se pueden utilizar son:

– *Método de Jacobi*

Se calculan las temperaturas en cada etapa suponiendo que las temperaturas en los nodos no varían, es decir la temperatura en un nodo se calcula como media aritmética de las temperaturas en los nodos adyacentes de la etapa anterior, por tanto el error nunca es nulo puesto que las temperaturas en los nodos adyacentes varían, aunque es posible demostrar la convergencia hacia una solución en el problema tratado.

– *Método de Gauss-Seidel*

Se calculan las temperaturas en cada etapa utilizando los valores más recientes de las temperaturas en los nodos adya-

centes, es decir se calcula con la temperatura del nodo adyacente y etapa actual si se conoce, en caso contrario se calcula con el valor correspondiente de la etapa anterior. Este método presenta dos ventajas, mejora la convergencia y permite ahorrar memoria de ordenador dado que solo se guardan las temperaturas calculadas.

#### – Método de la relajación

Se introduce un parámetro ( $k_\alpha$ ) para corregir el valor de las temperaturas calculado en cada nodo. La temperatura en cada punto se calcula partiendo del valor de la etapa actual, si se conoce, en caso contrario del de la etapa anterior. Así la formula [4] se convierte en:

$$\left( \theta_{i,j} \right)_{t+\Delta t} = k_\alpha \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{i+1,j} + \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1}}{4}$$

El factor de relajación ( $k_\alpha$ ) se introduce para acelerar la convergencia (toma valores entre 1 y 2). Para  $k_\alpha=1$  coincide con el método de Gauss-Seidel. El valor 2 hace que el nuevo residuo sea igual al anterior con el signo cambiado, sin embargo valores próximos a 2 hacen que, usualmente, el proceso se vuelva inestable proporcionando resultados erróneos. El valor óptimo depende del problema analizado, los mejores resultados se obtienen normalmente con valores próximos a 1'5. Como se indica en el siguiente apartado, este método no puede ser aplicado por causar inestabilidad en la convergencia del algoritmo.

## 2.6. Análisis de la consistencia, convergencia y estabilidad del algoritmo de cálculo

La consistencia de un algoritmo mide la sensibilidad de dicho algoritmo a pequeñas variaciones de las variables, por ejemplo es muy común que aproximaciones en diferencias finitas “estándar” fallen en el punto  $r=0$  en coordenadas esféricas. Supondremos demostrada la consistencia del algoritmo, puede encontrarse en la bibliografía de este trabajo su demostración.

Un concepto relacionado pero no equivalente, es el de la estabilidad de un algoritmo, que describe la sensibilidad de un método numérico respecto a los errores de truncamiento cometidos durante su ejecución aritmética. Mientras la consistencia no depende de errores de truncamiento, la estabilidad de un algoritmo si depende del condicionamiento de la función que se pretende evaluar.

El último concepto, la convergencia, describe que la diferencia entre la solución exacta y la solución numérica a un tiempo finito  $t$  debe tender a cero. En general es muy difícil verificar analíticamente si la aproximación es convergente o no. Numéricamente, es fácil ver si la solución numérica converge a algo, sea a la solución exacta o a otra cosa.

Un resultado fundamental de la teoría de aproximaciones sucesivas en diferencias finitas es el teorema de Lax:

*Dado un problema de valores iniciales bien planteado matemáticamente y una aproximación por diferencias fini-*

*tas a él que satisface la condición de consistencia, la estabilidad es condición necesaria y suficiente para la convergencia.*

#### – Condición de estabilidad

La obtención de la formula [4] puede también realizarse por desarrollo en serie de Taylor, considerando una malla cuadrada de tamaño  $\Delta y = \Delta x$  en un espacio bidimensional:

$$\begin{aligned}\theta_{i+1,j} &= \theta_{i,j} + \Delta x \frac{\delta\theta}{\delta x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\delta^2\theta}{\delta x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\delta^3\theta}{\delta x^3} + \dots \\ \theta_{i-1,j} &= \theta_{i,j} - \Delta x \frac{\delta\theta}{\delta x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\delta^2\theta}{\delta x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\delta^3\theta}{\delta x^3} - \dots \\ \theta_{i,j+1} &= \theta_{i,j} + \Delta y \frac{\delta\theta}{\delta y} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\delta^2\theta}{\delta y^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\delta^3\theta}{\delta y^3} + \dots \\ \theta_{i,j-1} &= \theta_{i,j} - \Delta y \frac{\delta\theta}{\delta y} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\delta^2\theta}{\delta y^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\delta^3\theta}{\delta y^3} + \dots\end{aligned}$$

sumando estas expresiones se obtiene:

$$\theta_{i,j} = \frac{\theta_{i-1,j} + \theta_{i+1,j} + \theta_{i,j-1} + \theta_{i,j+1}}{4} + \text{Error}$$

siendo:

$$\text{Error} = \frac{\Delta x^2}{4} \left( \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right) + \Omega \left( \Delta x^n, \frac{\partial^n\theta}{\partial x^n}, \frac{\partial^n\theta}{\partial y^n} \right)$$

para todo  $n$  par y mayor o igual que 4

El error que se comete al utilizar el algoritmo puede ahora determinarse al estar relacionado con los términos despreciados de la serie, principalmente con los primeros. Tratándose de términos con derivadas de segundo orden el error cometido es pequeño. Este error puede reducirse de dos formas:

- Reduciendo el valor de  $\Delta x$ , es decir haciendo una malla más tupida.
- Considerando un mayor número de términos del desarrollo en serie, lo que obliga a introducir más nodos en la ecuación para eliminar las derivadas (Conviene señalar que el desarrollo en serie utilizado tiene la propiedad de, por causa de su simetría, anular los términos con derivadas de orden impar, por lo que considerando solo los nodos adyacentes es posible aproximar hasta la segunda derivada), complicando la formulación y su aplicación en un programa informático.

Si se desprecia el error cometido con los términos de cuarto y superior orden, se deduce, teniendo en cuenta la ecuación [1] que:

$$\text{Error} = \frac{\Delta x^2}{4} \frac{c_e \rho}{\lambda} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{c_e \rho}{4\lambda} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \Delta \theta$$

por lo que para que la condición es:

$$\frac{c_e \rho}{4\lambda} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \leq 1 \quad \text{o} \quad \frac{c_e \rho}{4\lambda} \Delta x^2 \leq \Delta t$$

expresión que coincide con la [2].

Dando en la fórmula anterior valores medios para el hormigón:  $c_e \approx 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ;  $\rho \approx 2400 \text{ kg/m}^3$  y  $\lambda$  entre 1'6 y 0'8  $\text{W/m} \cdot \text{K}$  la condición se convierte en:

$$\Delta t = 1000 * 2400 / (4 * 1'6) \Delta x^2 = 3'75 \cdot 10^5 \Delta x^2;$$

para el valor máximo de  $\lambda$ , con  $\Delta x$  en metros y  $\Delta t$  en segundos, se deducen los valores indicados en la Tabla 1.

Por otro lado existe una segunda consideración: al haberse despreciado la difusividad cuadrática,  $\beta$ , es preciso comprobar que en los intervalos de tiempo considerados el calor específico ( $c_e$ ) y la conductividad, ambas variables con la temperatura, permanecen sensiblemente constantes, o tienden a serlo al aproximarse a la solución. Considerando el incendio normalizado y las propiedades térmicas del hormigón definidas en la normativa vigente puede determinarse la convergencia de los valores en función del tamaño de las celdas (en el gráfico 1 se representan los errores en función del número de iteraciones para diversos tamaños de celdas).

Del gráfico [1] se deducen tres conclusiones:

- Con independencia del tamaño de la cuadricula el error en la determinación del calor específico y la conductividad tiende a cero (Ver gráfico 1).

**Tabla 1. Intervalos de tiempo y número de iteraciones (para RF-120) en función del tamaño de la cuadricula**

$\Delta x$ mm	$\Delta t$ Seg	RF-120 Nro. Iterac	$\Delta x$ mm	$\Delta t$ Seg	RF-120 Nro. Iterac	$\Delta x$ mm	$\Delta t$ seg	RF-120 Nro. Iterac
1	0.38	19201.00	11	45.38	159.00	25	234.38	31.00
2	1.50	4801.00	12	54.00	134.00	30	337.50	22.00
3	3.38	2134.00	13	63.38	114.00	35	459.38	16.00
4	6.00	1201.00	14	73.50	98.00	40	600.00	13.00
5	9.38	769.00	15	84.38	86.00	45	759.38	10.00
6	13.50	534.00	16	96.00	76.00	50	937.50	8.00
7	18.38	392.00	17	108.38	67.00	60	1350.00	6.00
8	24.00	301.00	18	121.50	60.00	70	1837.50	4.00
9	30.38	238.00	19	135.38	54.00	80	2400.00	4.00
10	37.50	193.00	20	150.00	49.00	90	3037.50	3.00

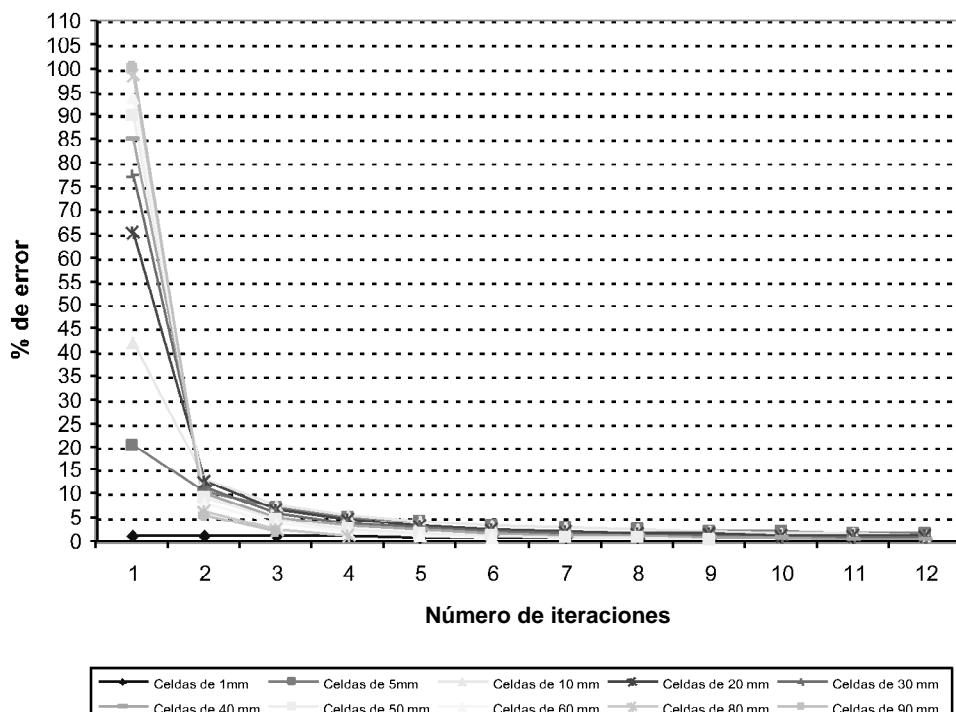


Grafico 1. Error en el cálculo del calor específico y la conductividad en función del número de iteraciones y del tamaño de las celdas.

b) Para garantizar obtener errores inferiores al 3% es preciso realizar como mínimo 6 iteraciones, con independencia del análisis temporal requerido (existen anchos de cuadricula en las que es posible alcanzar errores inferiores con menos iteraciones) (Ver Tabla 3).

c) Cuanto menor es la cuadrícula, al ser menor el plazo temporal y como consecuencia el incremento térmico, es

menor el error de las iteraciones iniciales necesarias para alcanzar valores limitados del error.

Todo ello con independencia del error que conlleva el uso del método iterativo propuesto.

Parece lógico exigir en un proceso iterativo no realizar menos de 6 iteraciones, por lo que serían admisibles todos los

**Tabla 2. Variación del error en el cálculo del calor específico y la conductividad en función del número de iteraciones y del tamaño de las celdas (hasta 36 iteraciones)**

<b>Δx mm</b>	<b>iter(120) nro</b>	<b>Error %</b>	<b>Temp.final °C</b>	<b>Tiemp. Final Segundos</b>	
5	36	0.48	597.7	346.88	(*)
10	36	0.36	803.0	1387.50	(*)
15	36	0.27	924.0	3121.88	(*)
20	36	0.19	1010.1	5550.00	(*)
25	32	4.90	1055.1	7500.00	
30	22	2.18	1053.6	7425.00	
35	16	0.36	1052.1	7350.00	
40	12	0.50	1049.0	7200.00	
45	10	0.59	1057.0	7593.75	
50	7	0.76	1055.1	7500.00	
60	6	0.99	1066.7	8100.00	
70	4	1.78	1052.1	7350.00	
80	4	2.67	1049.0	7200.00	

(\*) Casos en que es necesario realizar un número de iteraciones superior para alcanzar la solución.

**Tabla 3. Número mínimo de iteraciones necesarias para alcanzar errores inferiores al 3% en el cálculo del calor específico y la conductividad en función del tamaño de las celdas**

<b>Δx mm</b>	<b>iter(120) nro</b>	<b>Error %</b>	<b>Temp.final °C</b>	<b>Tiemp. Final Segundos</b>	
5	6	2.95	361.2	65.63	(*)
10	6	2.79	556.9	262.50	(*)
15	6	2.50	676.1	590.63	(*)
20	6	2.73	738.6	900.00	(*)
25	6	2.45	805.0	1406.25	(*)
30	5	2.86	832.2	1687.50	(*)
35	5	2.58	878.2	2296.88	(*)
40	5	2.32	918.1	3000.00	(*)
45	5	2.08	953.3	3796.88	(*)
50	4	2.74	951.4	3750.00	(*)
60	4	2.23	1006.0	5400.00	(*)
70	4	1.78	1052.1	7350.00	(*)
80	4	2.57	1049.0	7200.00	

(\*) Casos en que es necesario realizar un número de iteraciones superior para alcanzar la solución.

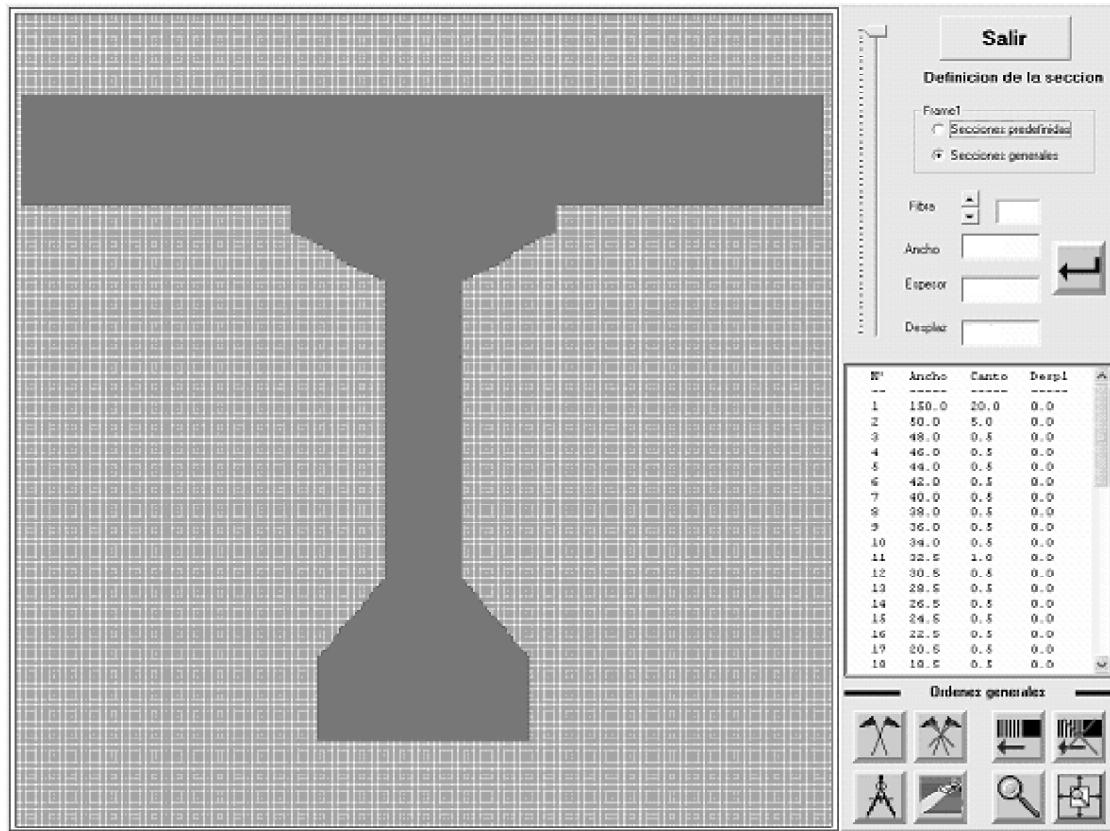


Figura 6. Ejemplo de sección en doble T (cuadricula de 5 \* 5 mm.).

tamaños de cuadrícula iguales o inferiores a 50\* 50 mm., por otro lado parece absurdo realizar un número alto de iteraciones por lo que deberían limitarse los anchos de cuadrícula a un mínimo de 5 \* 5 mm. (Estas limitaciones hacen referencia al calculo RF-120, debiendo ser modificadas para otras duraciones del incendio normalizado).

Por lo tanto el proceso será estable con la cuadrícula establecida en la que el valor de  $\Delta x$  podría fácilmente incrementarse, sin problemas de estabilidad del proceso numérico hasta valores de 80 \* 80 mm., disminuyéndose el número de iteraciones a costa de una menor precisión, no solo en relación a la nube de puntos de temperaturas, de indudable escasa importancia, sino en relación a la forma de la sección que puede verse afectada desfavorablemente en relación al proceso de introducción de datos y a la asimilación de partes no ortogonales a la cuadrícula.

## 2.7. Condiciones iniciales

Es posible establecer unas condiciones térmicas iniciales, pudiéndose poner todas o algunas de las celdas a temperaturas iniciales diferentes de las otras.

Las condiciones iniciales pueden ser de dos tipos:

- Condiciones de Dirichlet.
- Condiciones de Dirichlet de tipo general.

En las condiciones de Dirichlet se conocen los valores de la función en las celdas de la sección, es decir en las celdas inte-

riores al perímetro. En las de tipo Dirichlet todas las celdas están a una misma temperatura:

$$\theta_{i,j} = \theta_{\text{inicial}}(x,y) \quad (\text{siendo } i, j \text{ un elemento})$$

mientras que en las condiciones de tipo general la temperatura es variable:

$$\theta_{i,j} = \theta_{\text{inicial}}(x,y) \quad (\text{siendo } i, j \text{ un elemento})$$

## 2.8. Aplicación de las condiciones iniciales (Un sistema para abbreviar los tiempos de cálculo)

La razón por la que el autor ha dejado para el final las condiciones iniciales no es otra que la importancia que tienen para reducir los tiempos de cálculo.

En relación a las condiciones de iniciales se ha aplicado de forma implícita la condición de Dirichlet al suponer todas las celdas a una misma temperatura ( $\theta_{i,j} = 0^{\circ}\text{C}$ ). Por otro lado se ha planteado un sistema de cálculo no lineal en relación a las propiedades de los materiales.

La duración del proceso de cálculo es un problema que debe ser solventado intentando obtener una precisión suficiente en el cálculo sin que ello suponga que su duración temporal lo haga inabordable. Evidentemente, para un tamaño de celda dado, si se está calculando la sección para 120 minutos y se conocieran las temperaturas para 60 minutos bastaría introducirlas en el cálculo como temperatura iniciales y tomar como instante inicial  $t = 60$  minutos, para que el plazo se redujera a

la mitad, a costa de un trabajo tedioso de introducción de las temperaturas en todas y cada una de las celdas.

La realidad es que en muchos casos, con criterios técnicos y conociendo la forma aproximada de las isotermas, lo que no es complicado partiendo de las proporcionadas en diversas publicaciones (Eurocódigo, Norma FB,...), es posible extraerlas. Pero aún cabe una mejora del método propuesto, que el propio programa de ordenador calcule una sección similar a la propuesta, con una cuadrícula más grande, alterando ligeramente la forma y con esta sección calcular de forma aproximada las temperaturas de las celdas para un plazo temporal no superior a 7/8 del total y en cualquier caso dejando para el cálculo de la sección con un menor tamaño de celdas no menos de 6 iteraciones.

Es decir lo que se plantea como solución del problema para el caso de secciones de gran tamaño, en las que se requiera una gran precisión es, no solo considerar la no linealidad de los materiales, considerar también la forma de la sección y el tamaño de la cuadrícula de celdas como variables temporales, calculando inicialmente una sección "parecida" e introduciendo la sección compleja y real solo en la última parte del cálculo, dicho de otra forma, considerar la no linealidad de la forma.

Para ello se comienza por considerar una sección de forma similar, pero en cualquier caso más sencilla y con una cuadrícula de mayor tamaño, que la que va a ser estudiada. Se establece un tamaño de cuadrícula y un plazo de tiempo, durante el que el análisis se realiza con la sección simplificada. Obtenidas las temperaturas en la sección ficticia se inicia el cálculo con la sección real, estableciendo como tiempo inicial el final del proceso anterior y se calculan las temperaturas en las nuevas celdas mediante las obtenidas en el cálculo de la sección inicial.

El método de cálculo propuesto da resultados teóricamente correctos si el número de iteraciones que se dejan para el últi-

mo cálculo es suficiente, cumpliéndose las condiciones de convergencia de la solución por separado para cada uno de los dos grupos de iteraciones. El grado de aproximación de la solución final es función de las siguientes condiciones:

- Aproximación de las temperaturas de las celdas en el primer grupo de iteraciones.
- Forma de cálculo, en general por interpolación, de las temperaturas de las subceldas en que se subdividen las celdas del cálculo inicial.

En cualquier caso, y aun estableciendo temperaturas erróneas, el proceso tenderá a la solución real siendo mucho más sensible al número de iteraciones que se hayan dejado para el último cálculo que a las temperaturas supuestas a las celdas siempre que dichas temperaturas se supongan de un modo técnicamente racional.

De forma aproximada se puede establecer que los tiempos se reducen al 10 o el 15 % en el caso de incendios de 120 minutos, dejando para el cálculo con la sección "densa" 1/8 del tiempo total del incendio y trabajando el resto del tiempo con la sección simplificada.

Si, según lo indicado en la tabla 1 el número de iteraciones necesario para una cuadrícula de 5 mm es de 769, y para una de 20 mm es de 49 (Para RF-120), en el caso de establecer para la cuadrícula de 20 mm un plazo de 105 minutos (7/8) y para el cálculo final 15 minutos (1/8):

Sección tipo	Cuadrícula	Número de iteraciones
1	20 * 20	43
2	5 * 5	97
		140

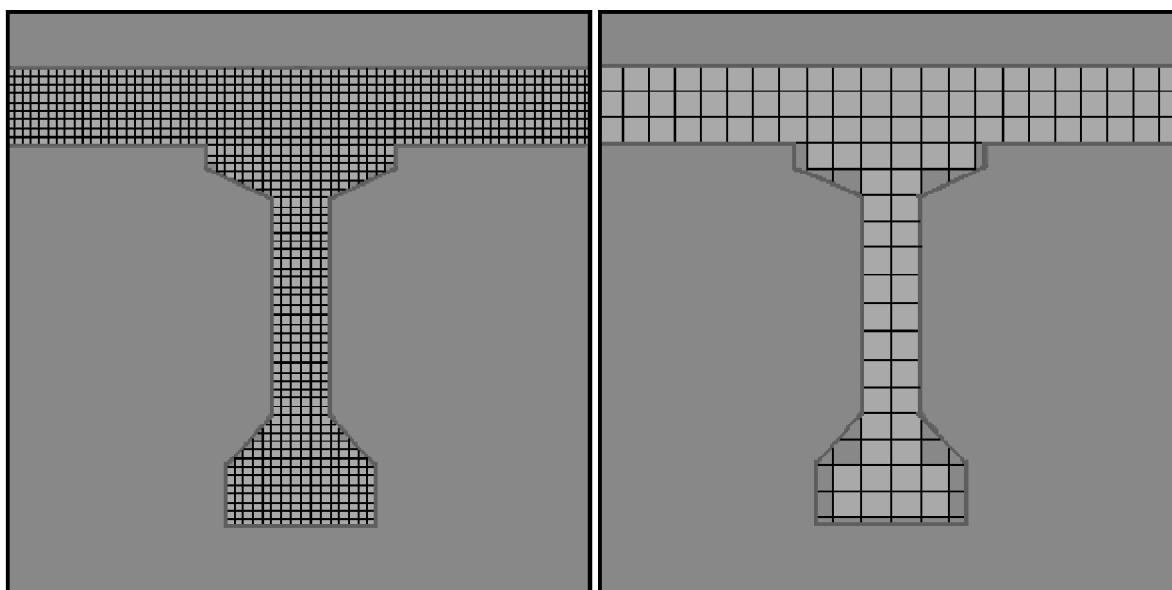


Figura 7. Esquemas de sección final e inicial.

Advertencia: La figura se incluye a efectos de aclarar el texto. El programa que se comenta realiza los cálculos necesarios para obtener una figura parecida, no igual (las diferencias nunca son tan grandes como en la figura).  
En rojo perímetro de la sección, en verde celdas consideradas.

Por tanto el número de iteraciones se reduce al 18%, pero la mejora no acaba ahí puesto que el número de ecuaciones a resolver en la primera sección es 16 veces inferior por lo que el beneficio real a nivel de tiempos de cálculo es del orden de:

$$\frac{43}{16} + 97 = 100 \text{ frente a } 769 \text{ (Ver tabla 1)}$$

es decir el tiempo de cálculo es la séptima parte, un 15% del que sería necesario sin hacer uso de la condición de Dirichlet.

Al transformar de forma la sección es inevitable un cierto gasto de tiempo de cálculo por lo que la realidad es que el plazo ronda un 20% del inicial. No existe una gran mejora si se consideran cuadrículas mayores a la indicada para el cálculo inicial, sin embargo los tiempos de cálculo se acortan muy sensiblemente si se aumenta el plazo temporal de la primera solución a costa de los de la segunda, si por ejemplo se utiliza una división de 9/10 y 1/10, con cuadrícula inicial de 30 \* 30 se alcanzan plazos de cálculo de un 10% de los iniciales.

Esta forma de aplicación presenta inconvenientes en el caso de piezas de escaso espesor (dimensiones próximas a 20 mm., inexistentes en la realidad) y en el caso de disponerse recubrimientos térmicos protectores.

### 3. CONCLUSIONES

Se ha expuesto una metodología analítica para la evaluación de la transmisión térmica en secciones isótropas y escasas limitaciones en relación a la forma, con esta metodología se pueden estudiar secciones no contempladas en los dibujos de isotermas de la EHE, Eurocódigo, ACI 216 y Norma FB.

Pese al desarrollo analítico del tema, el objetivo de este trabajo es codificar de una aplicación informática, por ello se ha estudiado un “artificio” informático que permite rebajar los tiempos de cálculo a un 15 o 20% de los plazos usuales, aunque de forma somera se indican las condiciones en las que la aplicación de este método presenta problemas.

Se ha presentado un desarrollo analítico completo, obteniéndose la formulación [4] a [11] que permite codificar una aplicación informática.

Como objetivo, aun en desarrollo, al conseguirse obtener las temperaturas en una malla muy densa es posible controlar las características mecánicas de cada elemento y establecer las condiciones de equilibrio de la sección de forma general, pudiéndose llegar al cálculo de una sección de forma genérica.

Aunque el tema se ha analizado para secciones de hormigón, es extensible a cualquier tipo de material en el que se puedan suponer válidas las hipótesis de: material isótropo, tamaño de celda como máximo la mitad del espesor mínimo de cualquier sección, inexistencia de celdas sometidas a dos ambientes con temperaturas diferentes, las características térmicas de posibles materiales adicionales al principal se desprecian.

### 4. BIBLIOGRAFÍA

1. Norma experimental Règles de calcul FB (XP P 92-701/A1 Diciembre 2000) AFNOR.
2. La seguridad de las estructuras de acero ante el incendio Publicaciones Ensidesa. (1989) J. Ortiz, J. Villa y E. Llamazares.
3. Fundamentos de la Física I Mecánica, Calor y Sonido. Ed. Aguilar (1967) F. W. Sears.
4. Computer methods for civil engineers. McGraw-Hill Book Company (1982) A. J. Cope, F. Sawko, A. G. Tickell.
5. Técnicas para el análisis de estructuras en pequeños ordenadores (Instituto Agustín de Bethencourt) (1982) ETSICCP. Florencio del Pozo.
6. Análisis de la protección contra el fuego de las estructuras metálicas Monografía 365 I.E.T.C.C. J. Ortiz Herrera, J.F. Millanes Mato.
7. Modelos diferenciales y numéricos en la ingeniería. E. Bellisco. (1999) Emilio de la Rosa.

# Un estudio del comportamiento de pilares incluyendo el régimen no lineal de los materiales

***A study of column behaviour including the material non-linear constitutive relationship***

◆  
Miguel A. Ortega

Dr. Ingeniero de Caminos.  
Empresarios Agrupados. Departamento Civil

◆  
José L. Romero

Dr. Ingeniero de Caminos.  
Facultad de Informática. UPM

◆  
Emilio de la Rosa

Dr. Ingeniero de Caminos.  
ETS, de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. UPM

## RESUMEN

En el presente trabajo se hace una revisión del comportamiento estructural de los pilares considerándolos como piezas prismáticas rectas sometidas a cargas de compresión. En primer lugar se indican las distintas hipótesis en relación con las ecuaciones cinemáticas, constitutivas y condiciones mecánicas de equilibrio que se pueden utilizar para formalizar los distintos tipos de modelos. En particular se mencionan los de Euler y Kirchhoff con sus resultados más destacados en los que aparecen las ideas básicas del análisis de pilares. También se comentan los conceptos que son la base para el estudio de modelos más generales: trayectorias carga-desplazamiento, estabilidad, puntos singulares (bifurcación, límite) y sensibilidad.

En segundo lugar, tras mencionar los principales trabajos en el campo del comportamiento plástico de pilares (Engesser, Considère y Shanley), las ideas anteriores se aplican a pilares en régimen elástico no lineal. Se describe el caso de un modelo discreto determinando la trayectoria, las zonas de estabilidad así como los puntos de bifurcación y límite para un caso de carga homogéneo y otro no homogéneo. Así mismo se analiza el comportamiento del pilar en el caso continuo deduciendo las ecuaciones del modelo y resolviendo dos ejemplos con la teoría de splines generalizados y el concepto de pilar lineal equivalente.

Finalmente se recogen los resultados del estudio de un pórtico en L formado por un pilar y una viga donde se obtiene una trayectoria asimétrica y se comparan los resultados de la

solución elástica lineal y la no lineal para estados de carga homogénea y no homogénea en el tramo de rama en el que aparece la carga límite menor.

Con todo lo anterior se desea poner de manifiesto los elementos, conceptos y aspectos básicos que deben formar parte de una teoría para el análisis de pilares.

## SUMMARY

*This paper reviews the structural behaviour of columns considered as straight prismatic pieces with compression loads. First, a number of different hypotheses are given in connection with the kinematic equations, constitutive relations and mechanical equilibrium conditions that can be used to formalize the different model types. Particularly, Euler's and Kirchhoff's classic models are mentioned, stating their most outstanding results which include the basic ideas about columns analysis. Concepts that provide the foundation for studying more general columns models are also discussed, including: load-displacement trajectories, stability, singular points (bifurcation, limit) and sensibility.*

*After mentioning the key works in the field of plastic column behaviour (Engesser, Consider and Shanley), the above ideas are applied to the study of columns in a non-linear elastic constitutive relationship. The case of a discrete model determining the trajectory, the regions of stability as well as the bifurcation and limit points for a homogeneous and non-homogeneous load is described. Second, the continuous*

*behaviour of the column is analysed by obtaining the equations from the model and solving two examples using generalized splines theory and the concept of equivalent linear column.*

*Finally, an L-frame composed of a column and a beam is examined. In this case, an asymmetric trajectory is obtained, and the results of the linear and non-linear elastic solutions are compared for homogeneous and non-homogeneous load states along the section of the branch with the minimum limit load.*

*The purpose of the above is to illustrate the elements, concepts and basic aspects that column analysis theory should cover.*

## 1. INTRODUCCION

El constante avance en los métodos de análisis de estructuras y en el estudio del comportamiento de los materiales lleva una renovación y extensión de las distintas áreas de trabajo en la Mecánica de los Medios Continuos. En particular, en el campo de las estructuras de piezas prismáticas, los elementos rectos sometidos a compresión han formado tradicionalmente un capítulo propio cuya evolución forma parte de dicho proceso general de transformación de la Mecánica de los Medios Continuos y del Cálculo de Estructuras. En el caso de los pilares se dio el hecho singular por el cual, las bases teóricas que explicaban su comportamiento quedaron establecidas antes de que se plantearan las necesidades técnicas. Euler determina la carga de pandeo un siglo antes de que el avance técnico permitiera utilizar materiales como el acero que dieron esbeltez a las piezas y en las que el pandeo puede ser más limitativo que la rotura del material.

Una buena muestra de la evolución en el estudio de los elementos prismáticos a compresión son los tratados de Z. P. Bazant-L. Cedolin [BaC91], W. F. Chen T. Atsuta [ChA76], W. F. Chen and E. M. Lui [ChL87] en los que quedan reflejados gran parte de los nuevos temas que se incorporan al estudio de los pilares así como la visión que sobre los mismos ofrecen los actuales elementos de análisis.

El gran avance alcanzado en el conocimiento de los pilares se debe en parte al desarrollo de instrumentos de análisis que han permitido por una parte la elaboración de diferentes modelos y por otra describir su comportamiento. El resultado final ha sido la creación de un marco teórico donde han surgido conceptos y métodos de resolución con los que abordar nuevos fenómenos.

Este marco teórico se apoya en la teoría de estructuras y en el área más general de la Mecánica de los Medios Continuos. La organización de las ecuaciones de los modelos se llevan a cabo por lo tanto de acuerdo con:

- Las ecuaciones de equilibrio o su contrapartida mediante planteamientos energéticos.
- Las condiciones cinemáticas que permiten describir el campo de desplazamientos y deformaciones.
- Finalmente las relaciones constitutivas de los materiales.

En relación con las ecuaciones constitutivas que recogen el comportamiento del material se pueden considerar distintas hipótesis:

- Comportamiento elástico lineal.
- Comportamiento elástico no lineal.
- Comportamiento plástico. El desarrollo de la plasticidad ha permitido incorporar distintos fenómenos en el estudio de los pilares: fractura, daño, etc.
- Relaciones constitutivas dependientes del tiempo. Reología, fluencia, relajación, etc.

Salvo en el caso elástico lineal, las restantes situaciones dan lugar a problemas no lineales.

En relación con las condiciones cinemáticas se han planteado una serie de modelos de vigas que se pueden aplicar al campo de los pilares y vigas-columna:

- Modelo de Bernoulli-Euler. Modelo para pequeñas deformaciones que se definen considerando posiciones planas para la sección.
- Por otra parte, en el caso de piezas prismáticas, las curvaturas se pueden considerar aproximadas por la derivada segunda de la deformada de la fibra neutra o considerar la curvatura exacta como en el caso de los modelos de Kirchhoff.
- Modelo de Timoshenko: en el que al considerar deformación por cortante, las deformaciones en la sección ya no son planas.
- Modelo de Levinson y otros de alto orden [Lev81] en el que se considera un campo de deformaciones no plana dependiente de varios parámetros.

Desde la consideración del campo de deformaciones solo el caso de curvatura aproximada permite plantear problemas lineales. Por su parte la curvatura exacta da lugar directamente a problemas no lineales.

Finalmente en relación con las condiciones mecánicas de equilibrio se pueden dar varios planteamientos:

- Considerar el equilibrio en la posición sin deformar.
- Equilibrio en la posición deformada tratando de recoger el efecto de los grandes desplazamientos.

En el caso de la pieza aislada las dos situaciones permiten plantear problemas lineales. En el caso de estructuras, el primer caso es la hipótesis básica para que el cálculo sea lineal mientras que el segundo da lugar a problemas fuertemente no lineales.

La adecuada combinación de las hipótesis mencionadas permite la construcción de diferentes modelos de pilares. Sin embargo fueron los modelos basados en el comportamiento elástico de los materiales desarrollados por Euler (1754) y Kirchhoff (1859) en el intervalo de poco más de un siglo en los que se fundamentaron las bases de la teoría de pilares poniéndose de relieve las ideas y conceptos que superan el propio ámbito de la teoría de estructuras. En este sentido

introducen conceptos clave y de naturaleza básica que en sí mismos son capaces de cimentar áreas nuevas de la mecánica: la estabilidad y la bifurcación. La expansión que tiene lugar a partir de finales del siglo XIX en esta línea, con los trabajos de Poincaré [Poi85] y Liapunov sobre estabilidad [Lia92], ha permitido ampliar estos conceptos. Las aportaciones de estos autores sobre el pandeo de barras comprimidas alcanzan tal magnitud que su generalización abre un extenso capítulo en el análisis y en la matemática aplicada en el que quedan incluidos una gran variedad de problemas a los que a su vez pertenecen todos aquellos relacionados con el estudio de pilares y vigas-columnas.

Algunos de los aspectos que conforman el área del estudio de pilares, y su interrelación antes mencionada, se recogen en la Figura 1

El estudio aislado del elemento estructural sometido a cargas de compresión es fundamental para comprender su funcionamiento, sin embargo es insuficiente. Una de las singularidades de su respuesta es que se ve afectada por la propia estructura de la que forma parte pudiéndose hablar de una interacción pilar-estructura. Así tanto en la práctica del cálculo de estructuras como en la normativa se establecen criterios empíricos que tratan de definir esta interacción a partir del cálculo lineal de la estructura (pérdida de rigidez del pilar con el aumento de la carga axil), longitud eficaz del pilar (parámetro  $\beta$ ), coeficiente de pandeo (método  $\omega$ ), etc. Sin embargo la respuesta del pilar es inseparable de la estructura de la que forma parte y por tanto el estudio de esta interacción debe formar parte del estudio del comportamiento de los pilares.

Lo anterior conduce a la integración de los distintos modelos de pilares en el cálculo general de estructuras [Bat02] y a la superación de las hipótesis del cálculo lineal de estructuras, que permite una descripción más realista y entre cuyos objetivos se encontrarían:

- Determinación de las trayectorias: relación cargas-variables de estado.
- Determinación de puntos críticos, límite, bifurcación.
- Análisis de la estabilidad.

- Análisis de la sensibilidad de las distintas variables.
- Asimismo el cálculo de estados de deformación y esfuerzos.
- Cálculo de diagramas de interacción para distintas variables.

Finalmente habría que señalar que la correcta interpretación de estos aspectos depende en gran parte de los instrumentos de análisis a la hora de abordar la complejidad de los problemas no lineales que hace prácticamente imposible llegar a soluciones cerradas. Ante esta dificultad se recurre a técnicas numéricas basadas en la discretización de la estructura o de los propios elementos estructurales que la forman. El objetivo es la descripción del comportamiento global con el cálculo de los valores aproximados de las variables en los puntos o elementos que definen la discretización con la contrapartida de perder la capacidad analítica de las soluciones cerradas en las que se recogen las relaciones funcionales de las variables.

Los métodos basados en la teoría de Splines Generalizados cuya aplicación al estudio de pilares se ha desarrollado en [Ort04], aun manteniendo la técnica de la discretización, presentan ciertas ventajas sobre los Elementos Finitos ordinarios pues permiten:

- Obtener soluciones nodalmente exactas en problemas lineales.
- Mejorar la aproximación en los nodos mediante técnicas de homotopía en problemas no lineales.
- Aproximar la solución en los elementos mediante el concepto de acción repartida equivalente.
- Obtener relaciones analíticas para ciertas variables del problema.

A lo largo del presente trabajo se realiza una descripción del comportamiento de los pilares recogiendo los fenómenos más destacados enumerando los aspectos básicos que constituyen los elementos esenciales sobre los que se construye la teoría de los pilares.

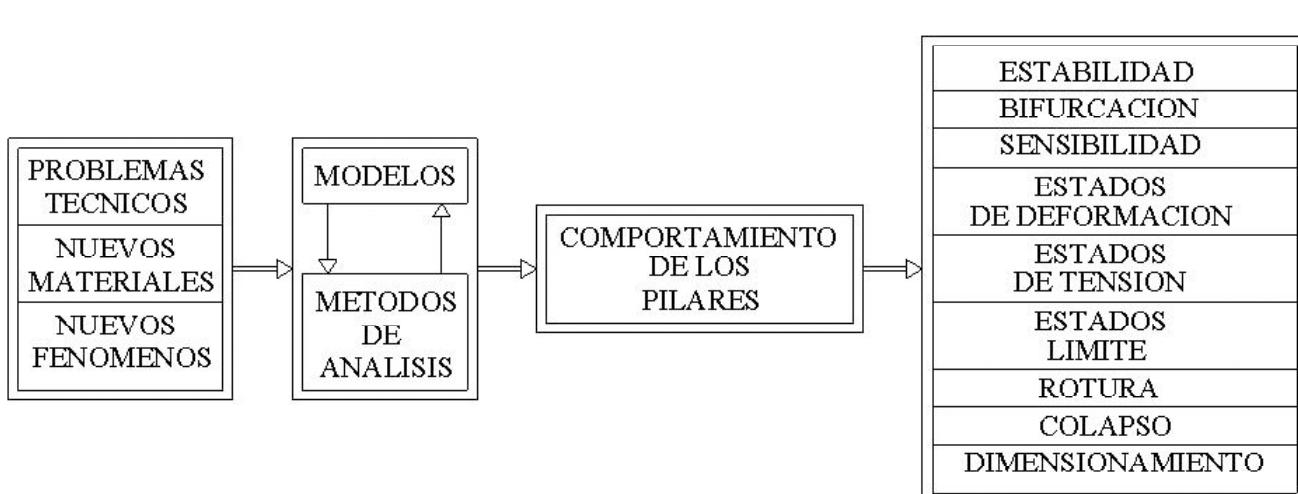


Figura 1.

## 2. ANTECEDENTES. COMPORTAMIENTO DE PILARES CON MATERIAL ELASTICO-LINEAL

El desarrollo del cálculo diferencial a lo largo del siglo XVII debido a Newton y Leibniz permitió plantear con mayor rigor las ideas que Galileo expone con su publicación “Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze” en 1638. A lo largo del siglo XVII los trabajos de J. Bernoulli sobre la ecuación de la elástica, proporcionaron a L. Euler los elementos para elaborar el primer gran modelo sobre el comportamiento de piezas rectas sometidas a compresión. Dicho modelo está basado en las hipótesis:

- h.1) El equilibrio de la sección se establece en la posición deformada.
- h.2) El campo de deformaciones de acuerdo con la viga Bernoulli-Euler obedece a una ley plana.
- h.3) El comportamiento del material es elástico.

En 1744 [Tim53] mediante su cálculo de variaciones obtuvo a partir de las sugerencias de Daniel Bernoulli la ecuación diferencial de la elástica, publicando dicho resultado en “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes”. En este primer trabajo Euler desarrolló un modelo no lineal basado en la ecuación:

$$A\chi(u) + Pu = 0$$

Si se considera como variable la longitud del arco ( $s$ ) (Figura 2) y la curvatura en su valor exacto, se llega a la ecuación no lineal:

$$A \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0 \quad (1)$$

En la cual, la relación constitutiva se expresa en función del valor exacto de la curvatura:

$$M(x) = A\chi(u) \quad \chi(u) = d\theta / ds = u'' / (1 + u'^2)^{3/2} \quad (2)$$

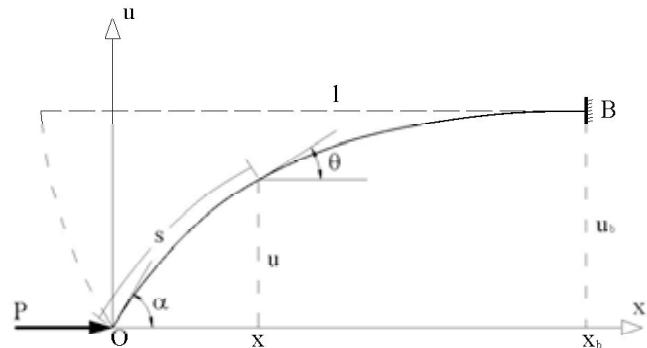


Figura 2.

En 1759 en su publicación “Sur les forces de colonnes” obtiene de nuevo el valor de dicha carga a partir de una simplificación (ecuación linealizada) de la ecuación diferencial de la elástica en la forma más conocida:

$$Au'' + Pu = 0 \quad (3)$$

En la que

$$M(x) = Au''(x)$$

donde la aproximación al valor exacto de la curvatura es válido para pequeños desplazamientos.

En ambos casos obtiene la carga de pandeo:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 A}{4l^2} \quad (4)$$

Este modelo simplificado pone de manifiesto que una vez alcanzada la carga crítica  $P_{cr}$  el pilar queda en una posición de equilibrio indiferente ya que la posición deformada es indeterminada tal y como se indica en la Figura 3 (a).

Los modelos de Euler fueron referencia a lo largo de un siglo hasta que Kirchhoff en 1859 aborda el problema del

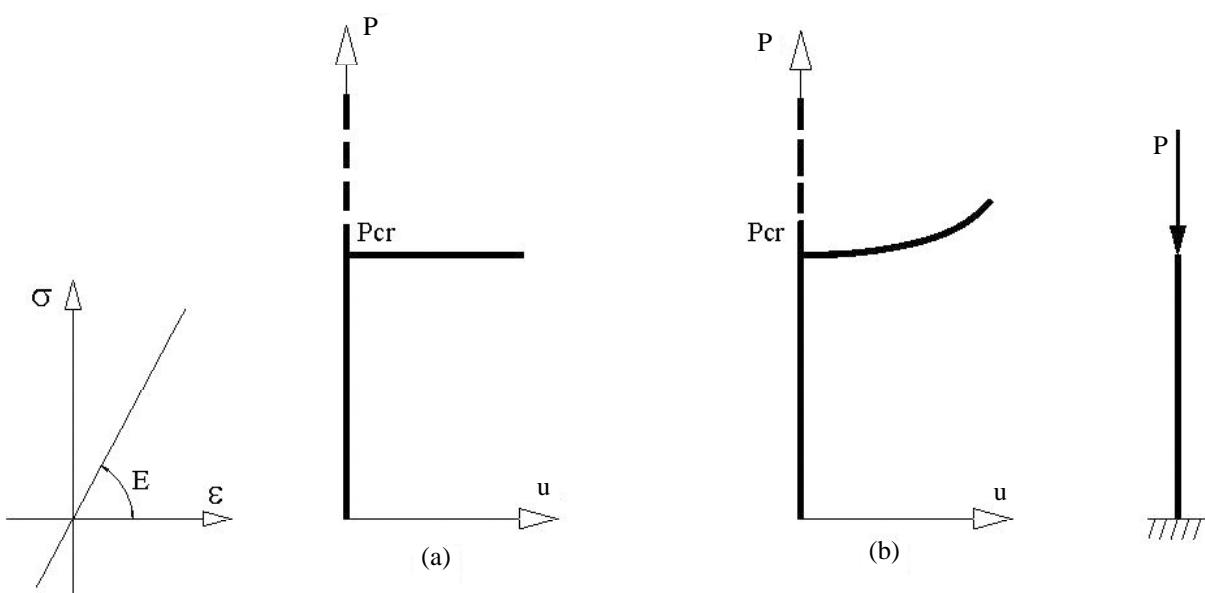


Figura 3.

pilar de una manera muy completa generalizando los trabajos anteriores obtenidos por Euler [Vil97], tratando con extensión el problema de grandes desplazamientos considerando así mismo la curvatura exacta de una pieza elástica inicialmente recta y condiciones de contorno más generales que las empleadas por Euler.

En el caso particular de la ecuación (1), la utilización de las integrales elípticas permite obtener a Kirchhoff [Vil97] las relaciones

$$P = \hat{K}^2(k) \frac{A}{l^2} \geq \frac{\pi^2 A}{4l^2} \quad (5)$$

$$u_b = \frac{2kl}{\hat{K}}$$

donde

$$\hat{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \right)^2 k^4 + \dots \right]$$

es la integral elíptica de primera especie, que permite relacionar  $(P, u_b)$ , dando una trayectoria estable, cuando el pilar se aparta de la vertical, en la que la carga  $P$  crece con el desplazamiento  $u_b$  tal y como se indica en la Figura 3-(b)

El modelo relativo a la ecuación (1) resuelto en los trabajos de Kirchhoff basado en las hipótesis (h.1, h.2, h.3), de acuerdo con lo anterior se caracteriza por:

- Utilizar relaciones constitutivas teniendo en cuenta la verdadera curvatura de acuerdo con (2),
- y por tanto reproduciendo un comportamiento con grandes desplazamientos.

Para casos generales, como pueden ser los modelos altamente no lineales, este tipo de problemas se caracterizan por un conjunto de variables ( $\mathbf{u}$ ) –variables de estado– que definen un determinado estado del sistema en función de unas variables de control ( $\boldsymbol{\lambda}$ ).

El comportamiento del sistema está gobernado por un conjunto de ecuaciones:

$$\Psi(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = 0 \quad (6)$$

El análisis se lleva a cabo mediante la descripción de las trayectorias ( $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}$ ). Para su solución se desarrollan distintos métodos numéricos, destacando entre ellos los métodos de continuación u homotopía.

En el caso que venimos estudiando de pilares con cargas a compresión, la variable de estado sería el desplazamiento en el extremo del pilar y el parámetro de control la carga  $P$ .

La Figura 3 pone de manifiesto para cada uno de los casos comentados la existencia de dos trayectorias:

– Una trayectoria que se podría definir como trivial en la que el pilar permanece en posición sin deformar de manera que por debajo de la carga crítica el pilar se encuentra en una posición de equilibrio estable y por encima inestable.

– Una segunda trayectoria que corta a la anterior en la que el pilar tiene para cada carga vertical  $P$  posiciones de equilibrio fuera de la vertical (pilar pandeado). En el caso de la Figura 2 (a) correspondiente al modelo simplificado de Euler el equilibrio como ya se ha indicado es indiferente, mientras que para el caso de Kirchhoff con relación  $(P, u_b)$  creciente, es estable.

La carga de pandeo es la carga crítica en la que se cortan las dos trayectorias de forma que alcanzado un punto crítico el pilar puede cambiar de comportamiento por alguna perturbación siguiendo una trayectoria diferente a la que se encontraba.

Los modelos de Euler y Kirchhoff de pilares construidos para materiales caracterizados por un comportamiento elástico lineal, marcan un primer periodo en el que surgen los materiales básicos que permiten conocer los rasgos básicos de su comportamiento al mismo tiempo que de su estudio surgen los elementos teóricos con los que extender su análisis precisando conceptos como el de pandeo.

### 3. ESTABILIDAD, BIFURCACIÓN Y PUNTOS CRÍTICOS

En el cálculo de estructuras se ha recogido el término pandeo, (en el ámbito anglosajón buckling y en la tradición francesa flambement) para tratar de definir, de una forma imprecisa, las posiciones de equilibrio que el pilar puede adoptar para el mismo estado de cargas. El análisis de las ecuaciones que modelizan el comportamiento de los pilares permite una descripción más rigurosa del fenómeno de pandeo. De hecho el estudio de fenómenos gobernados por sistemas de ecuaciones no lineales como los indicados en las líneas anteriores, ponen de relieve una serie de aspectos como: la existencia de puntos críticos y en particular los puntos de bifurcación en los que puede producirse cambios bruscos de la solución del sistema.

Por tanto la correcta descripción del pandeo se lleva a cabo mediante el análisis de la trayectoria carga desplazamiento para las distintas posiciones de equilibrio, la determinación de los puntos singulares: puntos críticos, puntos límite y puntos de bifurcación, que permiten separar distintos tramos de la trayectoria en los que se analiza su carácter estable o inestable. Finalmente otro de los aspectos de interés es la sensibilidad de la estabilidad frente a determinadas variables del sistema (imperfecciones, perturbaciones, etc.).

En este apartado se van a tratar de forma resumida, algunas de las ideas anteriores para delimitar mejor el concepto de pandeo.

#### 3.1 Estabilidad

Desde el punto de vista físico una de las características del comportamiento de los pilares es la capacidad de soportar

modificaciones respecto a los estados ideales de equilibrio (aparición de fuerzas perturbadoras, imperfecciones geométricas, alteración de las propiedades de los materiales, etc.). Lo cual proporciona una idea intuitiva de la estabilidad.

Sin embargo el análisis de la estabilidad a partir de las ecuaciones plantea ciertas cuestiones:

- Definición del carácter estable del sistema que se estudia. La definición y las propiedades de la estabilidad de los sistemas depende del área donde se pretenda aplicar, y dentro de la misma, del tipo de fenómeno que se esté analizando. Esto sucede en el caso de los pilares al considerar un carácter no lineal en el comportamiento de los materiales, estados de daño o fractura, fenómenos de fluencia, etc.
- Establecimiento de métodos para determinar si el sistema es estable de acuerdo con el criterio establecido.

Algunas de las características que hay que tener en cuenta para definir la estabilidad de un sistema de acuerdo con Felippa [Fel00], serían:

- La estabilidad se estudia a partir de un estado de equilibrio del sistema: dinámico siendo la solución la trayectoria del movimiento o estático si el equilibrio es independiente del tiempo.
- El problema de la estabilidad de la solución tiene que ver con el análisis en el entorno de la posición de equilibrio y por tanto es una cualidad local: de la trayectoria del movimiento en el caso dinámico o de la posición de equilibrio en el caso estático.
- El problema de la estabilidad es esencialmente dinámico en su naturaleza.

Desde un punto de vista general y en un sentido dinámico se han definido algunos criterios de estabilidad, los más conocidos que se citan sin descripción [BaC91] son: los de Lagrange, Poincare y Liapunov.

La aplicación de los criterios dinámicos presenta ciertas dificultades por lo que se han establecido algunos criterios para equilibrios estáticos siendo el más conocido el de Lagrange-Dirichlet cuya definición puede verse en [BaC91, p. 178].

Croll y Walker [CrW75] recogen los tres criterios básicos para el análisis de la estabilidad en los que se ponen de manifiesto las características anteriores: el estático, el dinámico y el energético. Por otra parte la aplicación de los criterios de estabilidad requiere su adaptación a los distintos problemas así, dada la dificultad de encontrar criterios generales de estabilidad se recurre a planteamientos dinámicos que tienen su punto de partida en los criterios de Liapunov. Sin embargo se hace necesario ampliar los criterios para problemas no lineales (teorema de Poincaré-Liapunov -[BaC91]) así como a medios elástico y materiales elasto-plásticos: criterios de Koiter y Petryck [Bat02].

### 3.2 Bifurcación

Junto al estudio de la estabilidad, del análisis de la trayectoria se pueden obtener otros tipos de información mediante la determinación de los puntos de bifurcación en los que se puede producir un cambio inesperado de la posición de equilibrio. Esto requiere la determinación de las trayectorias y la localización de sus puntos de corte.

Para el caso de problemas estáticos se puede distinguir una trayectoria carga-desplazamiento ( $P, u$ ), denominada principal que representa las posiciones de equilibrio cuando  $P$  crece desde el valor nulo. Cuando las cargas son lo suficientemente pequeñas es difícil que se produzcan cambios a otras posiciones de equilibrio pues se requiere tal nivel de desplazamiento que es físicamente imposible que se alcancen de forma natural para estados de carga en la trayectoria principal suficientemente alejados de las cargas críticas.

Sin embargo en las proximidades de un punto crítico continuar por la trayectoria principal es difícil ya que la existencia de cualquier imperfección tenderá a sacar al pilar de la posición de equilibrio tendiendo a pasar a posiciones de otras trayectorias. El paso tendrá lugar bruscamente apareciendo fenómenos dinámicos. Si la nueva trayectoria es estable podrá alcanzar el equilibrio pese a las perturbaciones dinámicas. En otro caso la perturbación provocará la inestabilidad.

El problema de la bifurcación estática se establece a partir de la resolución de ecuaciones del tipo (6). Normalmente una variación gradual de un parámetro de control  $\lambda$  corresponde a una única y continua curva solución y la teoría de la estabilidad lineal describe bastante bien o adecuadamente el estado del sistema. Sin embargo existen un gran número de problemas para los cuales la estabilidad y número de curvas solución cambia y la estructura del sistema varía bruscamente cuando el parámetro pasa a través de los valores críticos. En esta situación la estabilidad lineal falla, y no da mucha información sobre el comportamiento cualitativo del problema no lineal.

Así, en las situaciones habituales de las estructuras en las que los desplazamientos son suficientemente reducidos y se considera un comportamiento lineal de los materiales, el problema se puede considerar lineal bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos. En este caso es posible determinar los puntos críticos. Sin embargo no se conocen las trayectorias post-pandeo y por tanto no se sabe si la trayectoria secundaria tal y como se indica a continuación es estable o instable. Para ello sería necesario considerar problemas no lineales con grandes desplazamientos de las cargas de forma que el equilibrio se establece en la posición desplazada. Como cuestión de segundo orden se podrían considerar hipótesis de pequeñas o grandes deformaciones en los elementos estructurales complicando todavía más la naturaleza no lineal del problema.

La obtención y estudio de las trayectorias, que no es objeto de este trabajo, pone de manifiesto la existencia de una serie de situaciones típicas en los puntos de bifurcación algunas de las cuales se pasan a mencionar:

- Puntos de bifurcación simétrica con trayectoria secundaria estable. La trayectoria principal pasa de ser estable a inestable. (Figura 4-a).

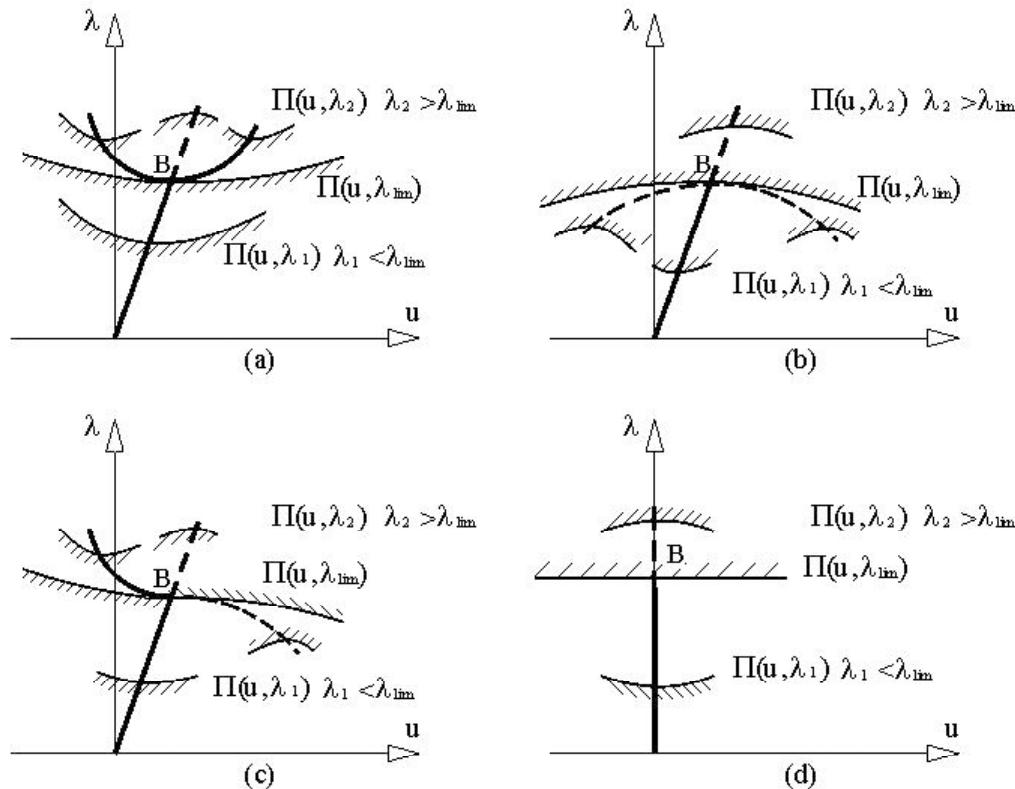


Figura 4.

- Punto de bifurcación simétrico con trayectoria secundaria inestable. Igual que antes la trayectoria principal pasa de ser estable a inestable (Figura 4-b).
- Puntos de bifurcación asimétrico en el que se produce un cambio en el punto de bifurcación pasando tanto la trayectoria principal como la secundaria de ser estable a inestable en cada una de ellas (Figura 4-c).
- Finalmente se puede producir una situación de trayectoria simétrica de carácter indiferente (Figura 4-d).

El carácter estable o inestable de acuerdo con el criterio de Lagrange-Dirichlet, se ha relacionado con el nivel de energía,  $\Pi(u, \lambda)$  del sistema, representada mediante sombreado en la Figura 4.

Finalmente, en relación con la estabilidad y la bifurcación se indican algunas de las conclusiones del importante trabajo de Koiter [Koi45] en el que se formula una teoría completamente general del inicio del post-pandeo. Examinando todas las posibles formas de la superficie de energía potencial cerca del punto de bifurcación y aprovechando las propiedades de continuidad, Koiter demostró [BaC91, pag. 262] que:

- El equilibrio en el estado crítico es estable si la carga  $P$  para el estado de equilibrio adyacente postcrítico es mayor que la carga crítica de pandeo  $P_{cr}$ . El estado postcrítico es estable y la estructura es insensible a la imperfección.
- El equilibrio en el estado crítico en la estructura perfecta es inestable si existe un estado de equilibrio adyacente postcrítico para el cual la carga  $P$  es menor que la carga crítica de pandeo  $P_{cr}$ . Las imperfecciones dan lugar a que la carga a la cual la estructura llega a ser inestable son menores que la carga  $P_{cr}$ .

### 3.3 Puntos críticos

Como se ha indicado en los puntos anteriores, en las trayectorias de carga-respuesta se distinguen una serie de puntos que definen comportamientos especiales, destacando por su significado físico los puntos límite y bifurcación.

Si se considera una barra articulada en su apoyo (véase Figura 5) en el que existe un resorte que reacciona frente al giro de la barra con una constante “ $k$ ” de forma que el momento del muelle frente a un giro  $\theta$  es:

$$M = k\theta$$

Es inmediato que para un giro  $\theta$  la carga que mantiene esta configuración de equilibrio es:

$$P = \frac{k}{l} \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

de forma que se pueden considerar dos trayectorias de equilibrio:

- La principal con  $\theta = 0$  que es estable cuando  $P < k/l$  e inestable si  $P > k/l$ .

- Y la secundaria por la expresión anterior que es estable.

La energía potencial del sistema es:

$$\Pi = \frac{1}{2} k\theta^2 - Pl(1 - \cos \theta)$$

La ecuación de equilibrio o residuo es:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = k\theta - Pl \operatorname{sen} \theta = 0$$

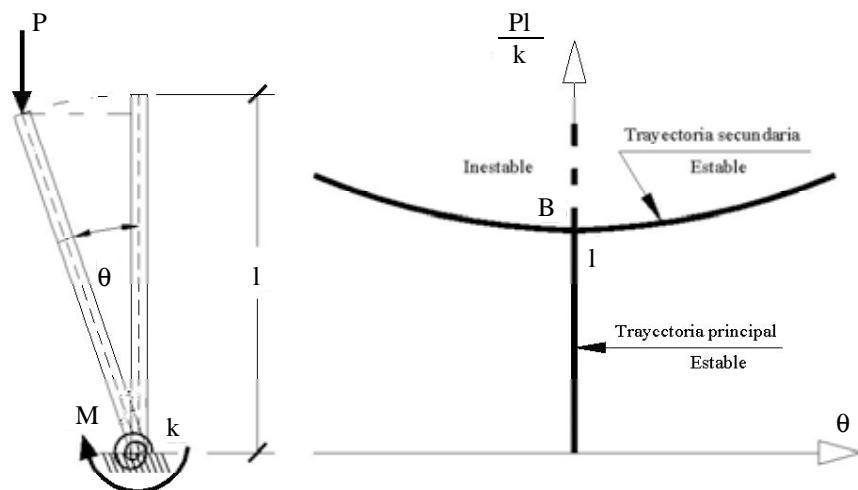


Figura 5.

y la segunda variación de la energía:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = k - Pl \cos \theta = k \left( 1 - \frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta} \right) = k \left( 1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) > 0$$

para  $|\theta| < \pi/2$  y por tanto estable.

Para el caso de una barra articulada en su extremo inferior y apoyada elásticamente en el extremo opuesto Figura 6, de forma que la respuesta del resorte es:

$$F = kl \operatorname{sen} \theta$$

Como se puede ver para un giro  $\theta$  la carga que mantiene esta configuración de equilibrio es:

$$P = kl \cos \theta$$

Igual que antes aparecen dos trayectorias de equilibrio:

- La principal con  $\theta=0$  que es estable cuando  $P < kl$  e inestable si  $P > kl$ .
- Y la secundaria inestable.

La energía potencial del sistema es:

$$\Pi = \frac{1}{2} k (l \operatorname{sen} \theta)^2 - Pl (1 - \cos \theta)$$

La ecuación de equilibrio o residuo es:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = kl^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - Pl \operatorname{sen} \theta = 0$$

y la segunda variación de la energía:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = kl^2 (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) - Pl \cos \theta = -kl^2 \operatorname{sen}^2 \theta < 0$$

y por lo tanto inestable.

El punto B en ambos casos representa un punto límite y a la vez un punto de bifurcación.

De acuerdo con esto existe una estrecha relación entre las configuraciones de equilibrio, los puntos críticos y la estabilidad del sistema.

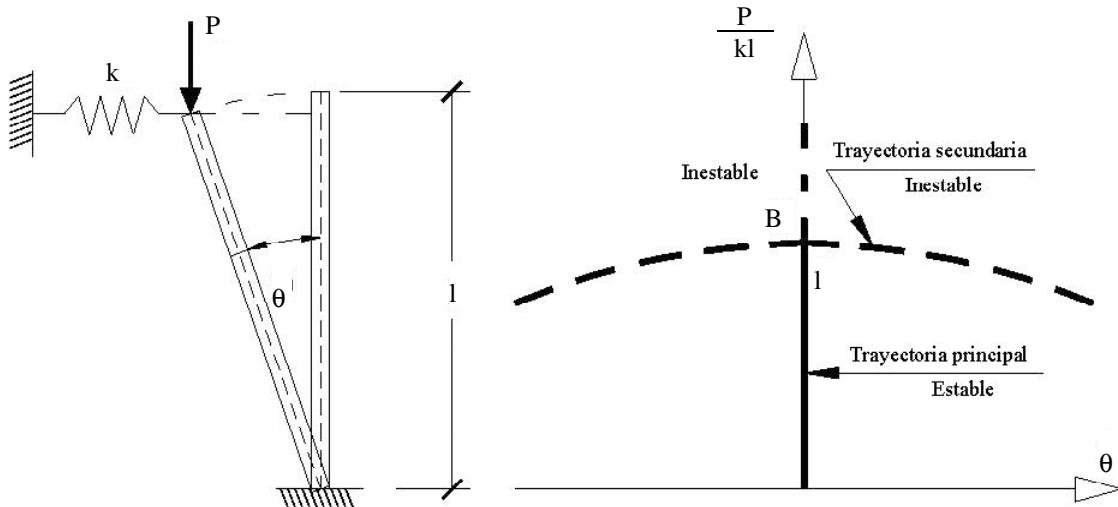


Figura 6.

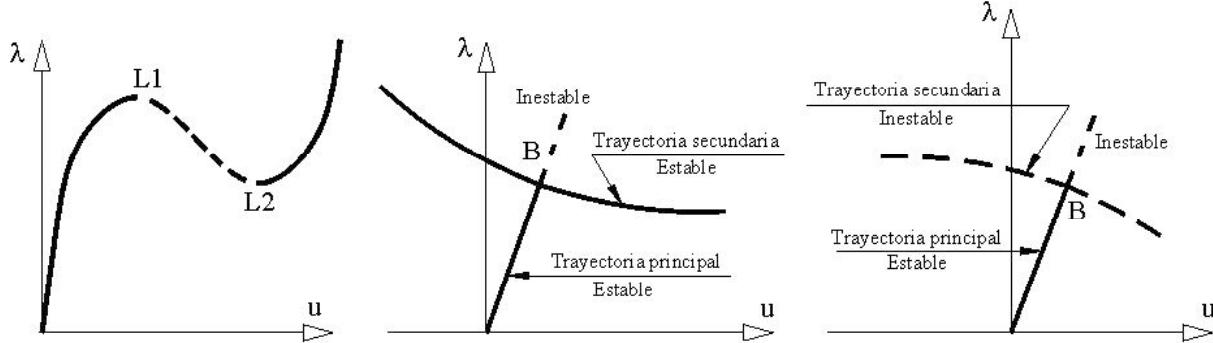


Figura 7.

En este sentido es posible encontrar otras situaciones [Fel00] como las indicadas en la Figura 7.

En las que se puede distinguir los siguientes tipos de puntos críticos de interés:

- Puntos límite: aislados en los que la tangente a la trayectoria es única y perpendicular al eje  $\lambda$ .
- Puntos límite múltiple. En los que existen varias tangentes a la trayectoria.
- Puntos de bifurcación (B) aislados en los que hay dos ramas de equilibrio que se cortan en dicho punto por lo tanto dos tangentes una a cada rama.
- Puntos de bifurcación múltiples en los que confluyen más de dos trayectorias de equilibrio.

También se consideran como puntos críticos los puntos de retorno en los que la tangente es perpendicular al eje de la variable estado pero tienen menos interés.

Tras el primer paso de la determinación de los puntos de bifurcación y de su estabilidad es conveniente llevar a cabo un análisis mediante la introducción de imperfecciones en el sistema para conocer el grado de sensibilidad en la evolución de la estabilidad denominando a los sistemas estructuralmente estables cuando no son sensibles a las imperfecciones. En este

sentido se pueden hacer las siguientes observaciones de acuerdo con [Fel00]:

- Los puntos simétricos estables tienen poca sensibilidad frente a las imperfecciones.
- Los puntos simétricos inestables son sensibles a las imperfecciones.
- Por su parte los puntos asimétricos tienen tendencia a ser altamente sensibles frente a las imperfecciones.
- Por su parte los puntos límite no manifiestan sensibilidad frente a las imperfecciones.

#### 4. COMPORTAMIENTO DE PILARES EN RÉGIMEN NO LINEAL

Como se ha indicado anteriormente, los trabajos de Euler y Kirchhoff contemplan casos de problemas lineales y no lineales en sentido geométrico, pero en todos los casos consideran un comportamiento elástico lineal para los materiales.

En el último cuarto del siglo XIX se inicia una nueva etapa en la visión del comportamiento de los pilares cuando un mejor conocimiento de los materiales lleva a algunos autores a utilizarlos más allá del rango elástico, entonces surge de

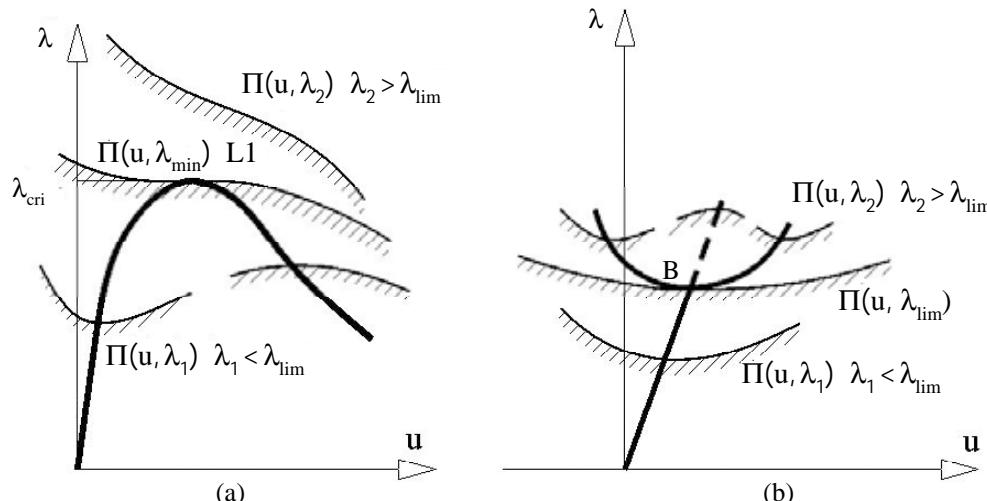


Figura 8.

nuevo el problema de la estabilidad cuando se utilizan pilares esbeltos con los materiales en régimen no lineal.

Los primeros pasos del estudio de la estabilidad en condiciones de plastificación se hacen a través de modelos que tratan de explicar el fenómeno de la inestabilidad cuando en determinados puntos de la pieza se entra en fase plástica.

Una primera teoría de pandeo que tiene en cuenta este comportamiento en régimen no lineal de los materiales es la teoría del módulo tangente propuesta inicialmente por Engesser en 1889 [Eng89], sin embargo unos años más tarde prevalece la idea de Considere en 1891 [Con91] del módulo reducido que es desarrollada con detalle por Engesser en 1895 (véase [ChA76] y [ChL87]). Teoría que es respaldada más tarde por Von Karman tanto teórica como experimentalmente en 1910. En estas teorías, en la expresión de la carga de Euler se sustituye el módulo de elasticidad  $E$  por el módulo tangente ( $E_t$ ) o reducido ( $E_r$ ) del material.

La polémica entre la teoría del módulo reducido y tangente dura medio siglo hasta que Shanley en 1947 elaboró su célebre modelo [Sha47] en el que simula la plastificación mediante un sistema discreto de dos resortes con comportamiento plástico en la sección crítica del pilar mientras que el resto del pilar a efectos de la demostración se puede considerar rígido. Con este modelo tratar de describir de forma intuitiva el comportamiento de elementos en régimen plástico. Shanley puso de manifiesto en primer lugar, a través de su modelo, que la teoría del módulo tangente era más realista que la del módulo reducido lo cual se confirmó experimentalmente.

En segundo lugar la teoría de Shanley destacó el hecho todavía más relevante de la existencia de una infinidad de puntos de bifurcación por encima de la carga dada por el módulo tangente ( $P_t$ ). Como se puede ver con cierta facilidad utilizando un modelo elasto-plástico bilineal y de acuerdo con el modelo simplificado de Shanley:

- a) Si el pilar es lo suficientemente esbelto como para que  $P_t < A\sigma_p$ , siendo  $\sigma_p$ , el límite de proporcionalidad donde empieza el comportamiento plástico y  $A$  el área de la sección, es a partir de  $A\sigma_p$  donde se empiezan a producir las bifurcaciones de forma que la rama secundaria es

creciente en el arranque y por tanto estable en los primeros momentos del post-pandeo.

- b) Si el pilar tiene un longitud algo menor de forma que  $A\sigma_p < P_t$ , es a partir de  $P_t$  cuando se producen las bifurcaciones también de forma estable en el post-pandeo inmediato debido a la rigidización que supone la rama de descarga.

Además en ambos casos la carga de pandeo correspondiente al módulo reducido ( $P_r$ ) siendo naturalmente  $P_t < P_r$  representa una carga de bifurcación con una trayectoria en el arranque de equilibrio indiferente. Por encima de  $P_r$  existe otra infinidad de puntos de bifurcación pero con trayectorias inestables en el arranque.

Estas situaciones se representan en la Figura 9 en la que las trayectorias a trazos se corresponden con el modelo aproximado de Shanley [BaC91, p.497] mientras que las de trazo continuo corresponden a soluciones exactas en las que para grandes deformaciones aparecen estados de estabilidad como también se expone más adelante para el modelo discreto mencionado en el apartado 4.1.

Estas situaciones presentes cuando se consideran fenómenos de plastificación en los que un mismo estado de tensiones puede ser debido a distintos estados de deformación es diferente del caso elástico no lineal aquí considerado en el que la relación tensión deformación es biunívoca. En este caso solo existe un punto de bifurcación correspondiente al módulo tangente a partir del cual surge una trayectoria inestable o con un tramo de equilibrio indiferente si la ley tensión deformación tienen un tramo elástico.

A partir de los trabajos de Engesser y Shanley ha habido multitud de estudios sobre el comportamiento de piezas rectas cortas y esbeltas en régimen elástico lineal o no lineal o régimen plástico, sometidas a compresión simultáneamente con otros estados de cargas. Así en el estudio de Cimetière y Léger [CiL96], se trató de demostrar matemáticamente que en el modelo plástico de Shanley existen infinitos puntos de pandeo entre la carga crítica del módulo tangente y la carga crítica de Euler. Hutchinson analiza un modelo continuo de Shanley con relaciones constitutivas del tipo Ramberg-Osgood [Hut74].

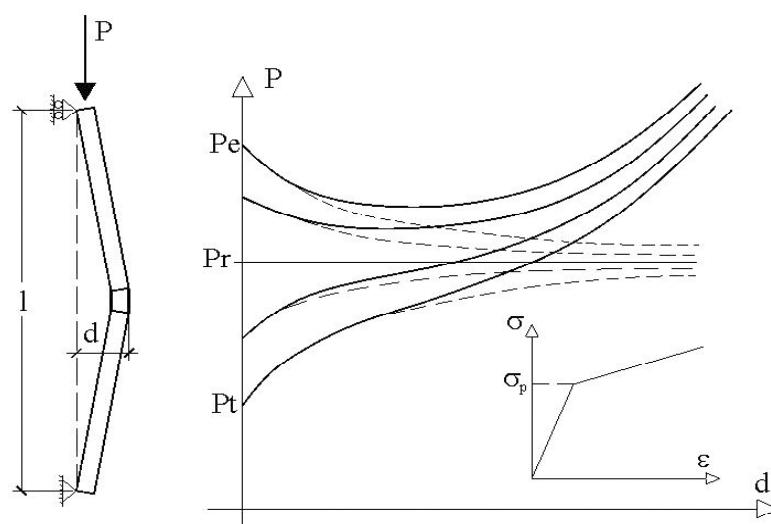


Figura 9.

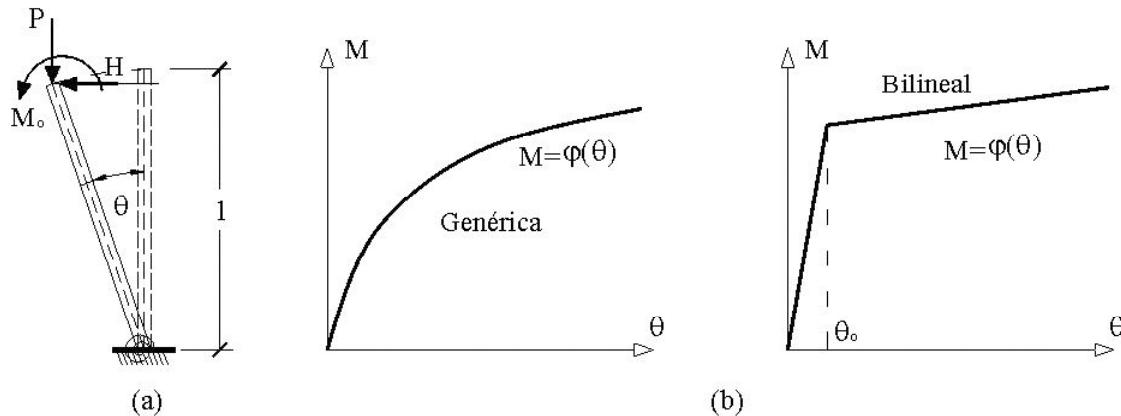


Figura 10.

#### 4.1 Modelos discretos con un grado de libertad en régimen no lineal

A continuación se expone de manera esquemática el caso de un modelo discreto con un grado de libertad en el que se considera la no linealidad geométrica y la no linealidad del material. Se indica la construcción de las curvas carga-giro en los casos homogéneo y no homogéneo.

Para ello se considera una barra de longitud  $l$  de rigidez infinita articulada en su base, Figura 10 (a), cuyo giro está restringido con un resorte de respuesta elástica no lineal, para el cual la relación constitutiva momento fletor-giro viene dada por una ley simplificada  $M = \varphi(\theta)$ , dada por una curva genérica representada por la gráfica de una función creciente con derivada decreciente, como la indicada en la Figura 10 (b), o mediante una gráfica bilineal como la que se indica en la misma Figura.

Para estas acciones la determinación de las posiciones de equilibrio, teniendo en cuenta la configuración deformada, donde la barra ha girado un ángulo  $\theta$ , conduce a la resolución de la ecuación en la variable  $\theta$ .

$$\varphi(\theta) = Pl \operatorname{sen}\theta + Hl \cos\theta + M_0 \quad (7)$$

Dichas posiciones de equilibrio en el estudio que sigue se limitan al intervalo  $[0, \pi/2]$ . Sea  $F(\theta)$  la función definida por el segundo miembro de la ecuación anterior, es decir,

$$F(\theta) = Pl \operatorname{sen}\theta + Hl \cos\theta + M_0 \quad (8)$$

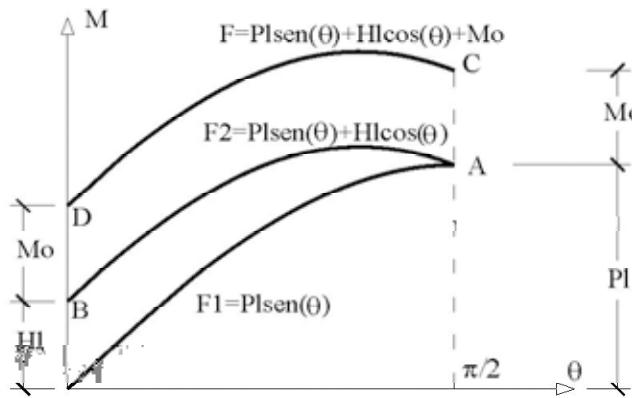


Figura 11.

su gráfica en el intervalo citado tiene el aspecto indicado en la Figura 11, donde las funciones del gráfico son:

$$F_1(\theta) = Pl \operatorname{sen}\theta, \quad F_2(\theta) = F_1(\theta) + Hl \cos\theta, \quad F(\theta) = F_2(\theta)$$

Obsérvese que  $F(\theta)$  verifica, en el intervalo  $[0, \pi/2]$ , que

$$F''(\theta) = -Pl \operatorname{sen}\theta - Hl \cos\theta < 0$$

o sea, la concavidad de la gráfica va dirigida hacia abajo. Las posiciones de equilibrio del pilar con las acciones indicadas se determinan a partir de las intersecciones de las gráficas de las funciones  $\varphi$  y  $F(\theta)$ .

##### 4.1.1 Problema homogéneo

Un desarrollo más detallado se hace en [Ort04]. Aquí de una forma más simplificada se considera el caso del sistema de fuerzas actuantes en el que  $H=M=0$ , modificando la carga  $P$  de forma creciente se tienen las gráficas de  $F$  que dan lugar a situaciones diferentes:

- a) Curva (1):  $\varphi(\theta) > F(\theta)$ . Para las curvas como la (1) en las que se cumple la condición indicada, las posiciones de equilibrio son estables para distintos valores de  $P$ . Estos puntos de equilibrio corresponden a puntos entre el origen y  $P_{cr}$  del eje de ordenadas.

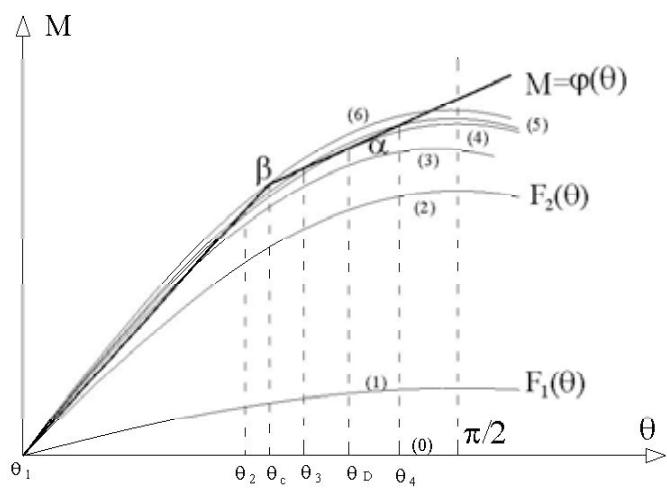
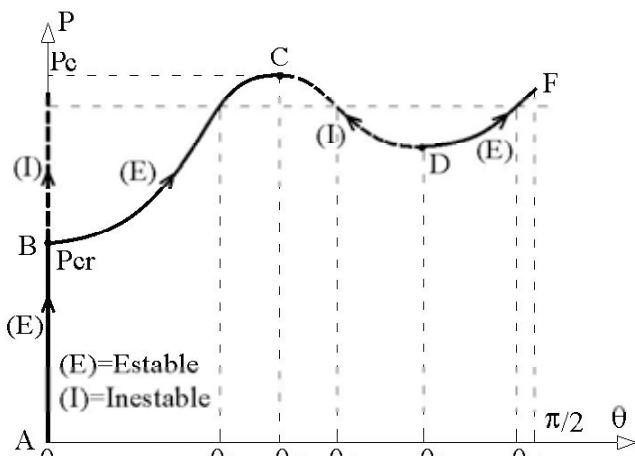


Figura 12.

- b) Curva (2): la tangente de  $F(\theta)$  en el origen coincide con la de  $\varphi(\theta)$ . El valor de la carga para la que se produce esta situación es el valor de la carga crítica.
- c) Para valores de  $P$  ligeramente mayores que la carga crítica, curva (3), hay dos soluciones, una inestable que corresponde a la pieza en posición vertical y otra estable con la pieza girada.
- d) Para el valor de la carga  $P$  que da lugar a la curva (4) que es tangente a  $\varphi(\theta)$  en  $\alpha$ , existen tres puntos de equilibrio, uno inestable que corresponde a la pieza en posición vertical y otra estable con la pieza girada. El tercero corresponde al punto D de la Figura 13.
- e) Para valores superiores de la carga  $P$  aparecen cuatro soluciones dos estables y dos inestables, curva (5).
- f) Para la curva (6),  $F(\theta)$  pasa por el punto de quiebre de  $\varphi(\theta)$ , apareciendo el punto límite C.
- g) Para valores de  $P$  mayores vuelven a darse dos posiciones de equilibrio, una inestable que corresponde a la pieza en posición vertical y otra estable con la pieza girada.



#### 4.1.2 Problema no homogéneo

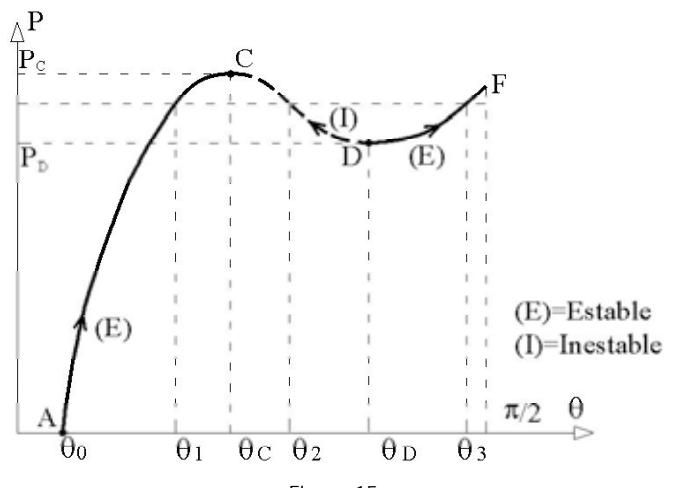
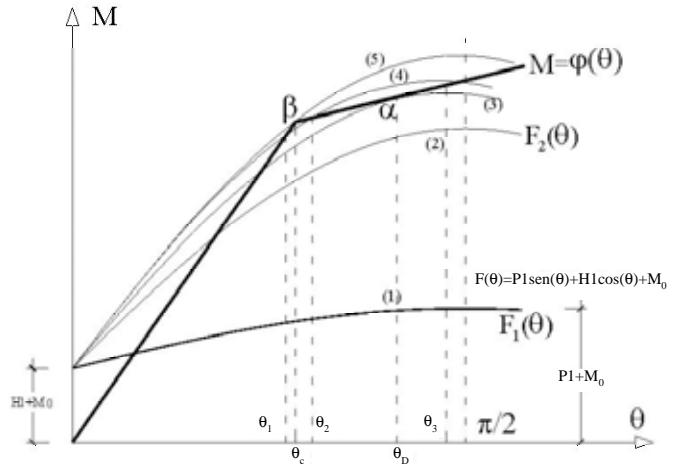
Para el problema no homogéneo se tiene para distintos valores de la carga  $P$  diferentes curvas  $F(\theta)$ , como se indica en la Figura 14, que dan lugar a distintas intersecciones con  $\varphi(\theta)$ , pudiéndose dibujar la relación  $P-\theta$  siguiente que se obtiene con razonamientos análogos al caso anterior (Figura 15).

#### 4.2 Modelo continuo

El objetivo de este apartado es introducir el problema continuo en régimen no lineal donde la no linealidad del problema se debe al comportamiento del material caracterizado por una relación momento-curvatura de la forma

$$M = g(x, P, \chi(u)) \quad (9)$$

tratando de establecer las hipótesis básicas que caracterizan el modelo y cuyo comportamiento, con algunas simplificacio-



nes, se estudia en el apartado 5 mediante dos ejemplos. Un desarrollo más completo del presente resumen puede seguirse en [Ort04].

La relación (9) representa una superficie respecto de las variables  $P$  y  $\chi$  denominada Superficie Mecánica en la que para cada carga  $P$  y cada sección  $x$  de la pieza el momento que se desarrolla es función de la curvatura  $\chi(u)$ , siendo dicha dependencia de la forma que se indica en la Figura 16.

Es decir la función es creciente con derivada, en los puntos donde esté definida, decreciente.

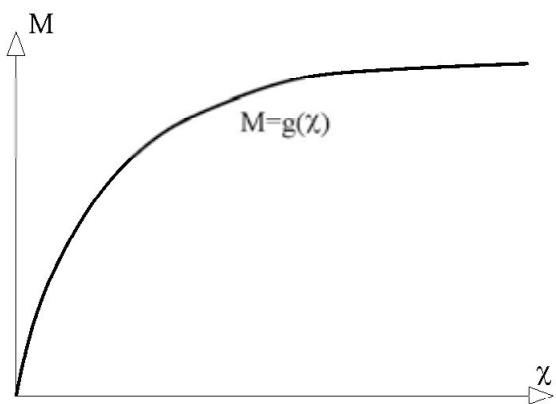


Figura 16.

La inclusión de la variable  $x$  se debe a la posibilidad de variar a lo largo de la directriz de la pieza, las características de la sección: dimensiones, cambio de material, cuantía de armaduras en piezas de hormigón, etc.

Suponiendo una pieza recta inextensible con una distribución transversal de carga  $F(s)$  actuando de manera perpendicular a la directriz de la pieza sin deformar y que se mantiene perpendicular a la directriz inicial después de la deformación se puede plantear el equilibrio en la posición deformada, tal y como se indica en la Figura 17, donde el axil  $P$  es constante y el cortante modificado o pseudocortante  $V$  (el que actúa perpendicularmente a la directriz inicial) y el momento flector  $M$  dependen de la longitud de arco  $s$ . Se obtiene la ecuación siguiente respecto de la variable  $s$ :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{dM}{ds} \right) + P \frac{d}{ds} (\operatorname{tg} \theta) = F(s) \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que la relación constitutiva puede ponerse también como:

$$M = g(s, P, d\theta / ds)$$

resulta la ecuación diferencial en la variable  $\theta$  (giro) siguiente:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{d}{ds} \left[ g(s, P, \frac{d\theta}{ds}) \right] \right) + P \frac{d}{ds} (\operatorname{tg} \theta) = F(s) \quad (11)$$

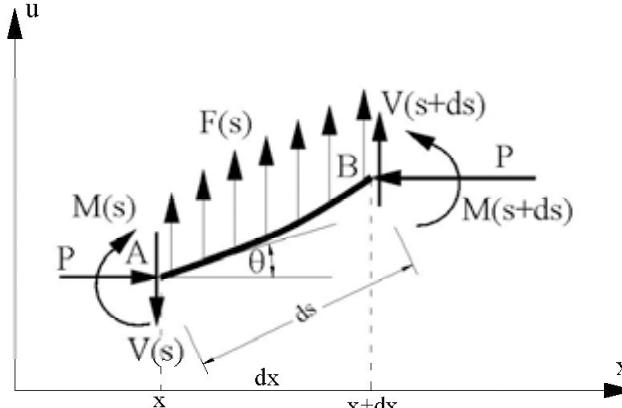


Figura 17.

Obsérvese que esta última ecuación permite teóricamente, una vez consideradas las correspondientes condiciones auxiliares, resolver el problema de pandeo para la elástica con no linealidad geométrica y no linealidad del material, de manera análoga a como se ha procedido en el clásico problema de no linealidad geométrica del apartado 2.

Es importante indicar que el dato de la acción repartida  $F(s)$  dependiendo de la deformada  $u$ , se modifica, dando lugar a una acción repartida en la dirección del eje  $x$  (dirección de la pieza antes de la deformación). La relación entre  $F(s)$  y  $f(x)$  viene dada por  $F(s)ds = f(x)dx$  luego:

$$f(x) = \frac{F(s)}{\cos \theta}$$

Como puede verse la acción distribuida o repartida  $f(x)$  depende de la solución  $\theta(s)$  que se tenga en cada caso, es decir, la correspondiente una vez fijadas las condiciones auxiliares en la ecuación diferencial (11).

La ecuación (10) también puede ponerse en términos del desplazamiento  $y$  de la variable  $x$  obteniéndose la ecuación clásica:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad (12)$$

dada por gran número de autores (véanse [ChA76,p.59] y [PiW94,p.623] entre otros) empleando otras vías de deducción diferentes a la aquí seguida donde hasta el momento no se han empleado hipótesis simplificadoras.

Considerando la ecuación constitutiva en la forma  $M = g(x, P, u''/(1+u'^2)^{3/2})$  resulta la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( g(x, P, \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}) \right) + P u'' = f(x) \quad (13)$$

Una simplificación notable del problema resulta al tomar en la ecuación anterior la función  $f$  igual al dato  $F$ , es decir se considera que la acción repartida no se modifica al deformarse la pieza. Esta simplificación va unida además a tomar como dominio para la variable  $x$  la longitud de la pieza  $l$  y no la proyección de la pieza deformada sobre la dirección del eje  $x$ . Esto hace que en realidad no se considere la pieza como inextensible.

A pesar de las hipótesis simplificadoras introducidas respecto al dominio y sobre la acción  $f$ , la ecuación diferencial es de cuarto orden no lineal, donde la no linealidad se debe por un lado a la no linealidad geométrica, resultado de considerar el valor exacto de la curvatura y por otro lado a la no linealidad del material dada por la relación momento-curvatura. Otra simplificación importante es la de aproximar la curvatura por la derivada segunda del desplazamiento, quedando entonces la ecuación en la forma

$$[g(x, P, u'')]'' + P u'' = f(x) \quad (14)$$

Esta última es también no lineal debido únicamente al comportamiento del material. La simplificación anterior conduce a que la validez de los resultados sea más limitada cuando los desplazamientos y la curvatura de los distintos puntos de la deformada no sean pequeños. Por tanto, el modelo no será aplicable en el caso de grandes flechas.

Para la ecuación anterior se define un problema de contorno de  $n$  puntos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  en el dominio formado por la unión de los elementos  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Desde un punto de vista clásico la ecuación diferencial tendrá como dominio la unión de los intervalos abiertos correspondientes. Consideraremos que el axil  $P$  y la función  $g(x, P, u'')$  no varían en cada intervalo. En realidad  $P$  en las aplicaciones será considerado como parámetro. Para cada sección y cada valor de  $P$  se tiene un diagrama diferente momento-curvatura, el cual resulta al seccionar la superficie mecánica por planos ortogonales al eje que representa la variable  $P$ .

Existen distintas técnicas para resolver este tipo de problemas. En particular en [Ort04] se han desarrollado dos tipos de métodos que aquí solo se enuncian:

- Método algebraico para casos con estados de carga y geometría sencillos. Dicho método es el que se utiliza para los ejemplos de los apartados siguientes.
- Método general. Para situaciones generales de condiciones de contorno, estados de carga y cambios de sección.

basados en el concepto de pilar lineal equivalente desarrollado en [Ort04].

## 5. COMPORTAMIENTO DEL PILAR AISLADO EN RÉGIMEN NO LINEAL

En el presente apartado se llevan a cabo dos aplicaciones de la última ecuación (14) del punto anterior resolviendo un problema homogéneo y otro no homogéneo mediante los que se trata de poner de manifiesto el comportamiento de los pilares aislados considerando la simplificación de aproximar la curvatura por  $u''$ . Así mismo para facilitar los cálculos mediante la aplicación del método algebraico se considera la relación  $M = g(x, P, \chi(u))$  formada por segmentos de la forma:

$$M = A_i u'' + b_i$$

El método algebraico permite la obtención de resultados mediante expresiones analíticas como puede verse en [Ort04] de forma que en el presente ejemplo solo se indican los resultados numéricos.

### 5.1 Ejemplo 1

Se considera el pilar siguiente cargado axialmente.

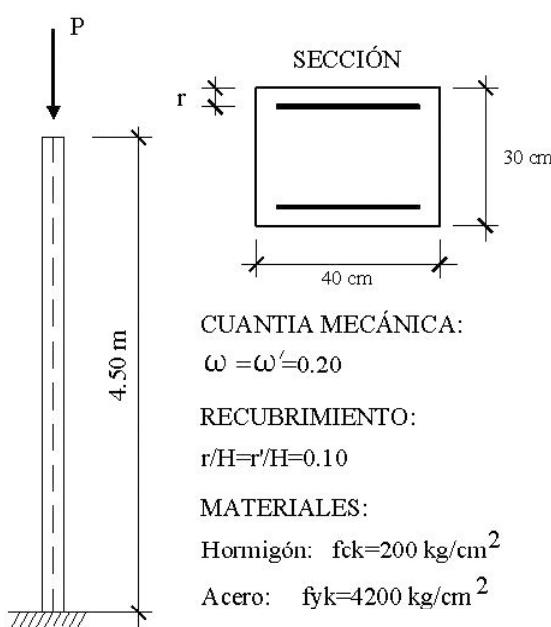


Figura 18.

La relación momento curvatura viene dada por la ley:

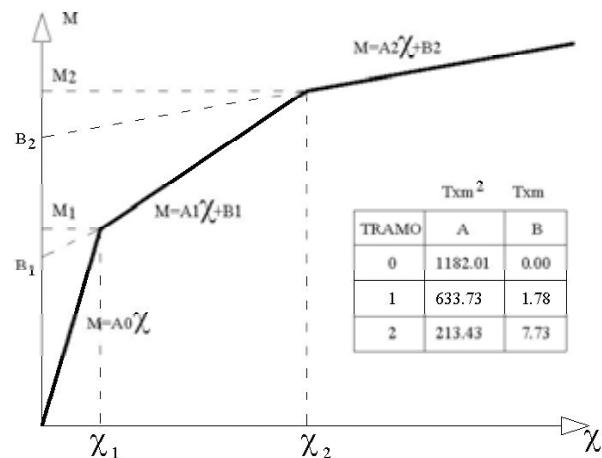


Figura 19.

PUNTO	$\chi$	M
1	0.003257	3.850
2	0.014142	10.748

Las cargas críticas para los tramos primero ( $A_0$ ) y tercero ( $A_2$ ) son:

$$P_{cr0} = \frac{\pi^2 A_0}{4L^2} = \frac{3.1416^2 * 1182.01}{4 * 4.50^2} = 144.02 \text{ t}$$

$$P_{cr2} = \frac{\pi^2 A_2}{4L^2} = \frac{3.1416^2 * 213.43}{4 * 4.50^2} = 26.00 \text{ t}$$

La carga de paso del tramo 2 al 1 (en [Ort04] se da una expresión analítica, pag. 280), es:

$$P'_2 = 97.53 \text{ t.}$$

La deformada en el extremo, en la que se produce el paso del tramo 0 al 1, es:

$$u_2 = \frac{A_0 \chi_1}{P_{cr}} = \frac{1182.01 * 0.003257}{144.02} = 0.0268 \text{ m}$$

En la Figura 20 se representa la trayectoria secundaria de la pieza pandeada (carga en toneladas y desplazamiento en metros). En ella se observan tres tramos:

- Un primer tramo horizontal cuando se llega a la carga de pandeo  $P_{cr0}$  en el que el equilibrio del pilar es indiferente.
- Cuando el desplazamiento del extremo libre supera 0.0268 m, el momento en el empotramiento es mayor que  $M_1$ , entrando en el segundo tramo de la relación momento-curvatura. Este tramo descendente representa un equilibrio inestable.
- Cuando la carga  $P$  es inferior al valor de 97.53 t. el momento en el empotramiento supera al momento  $M_2$ .

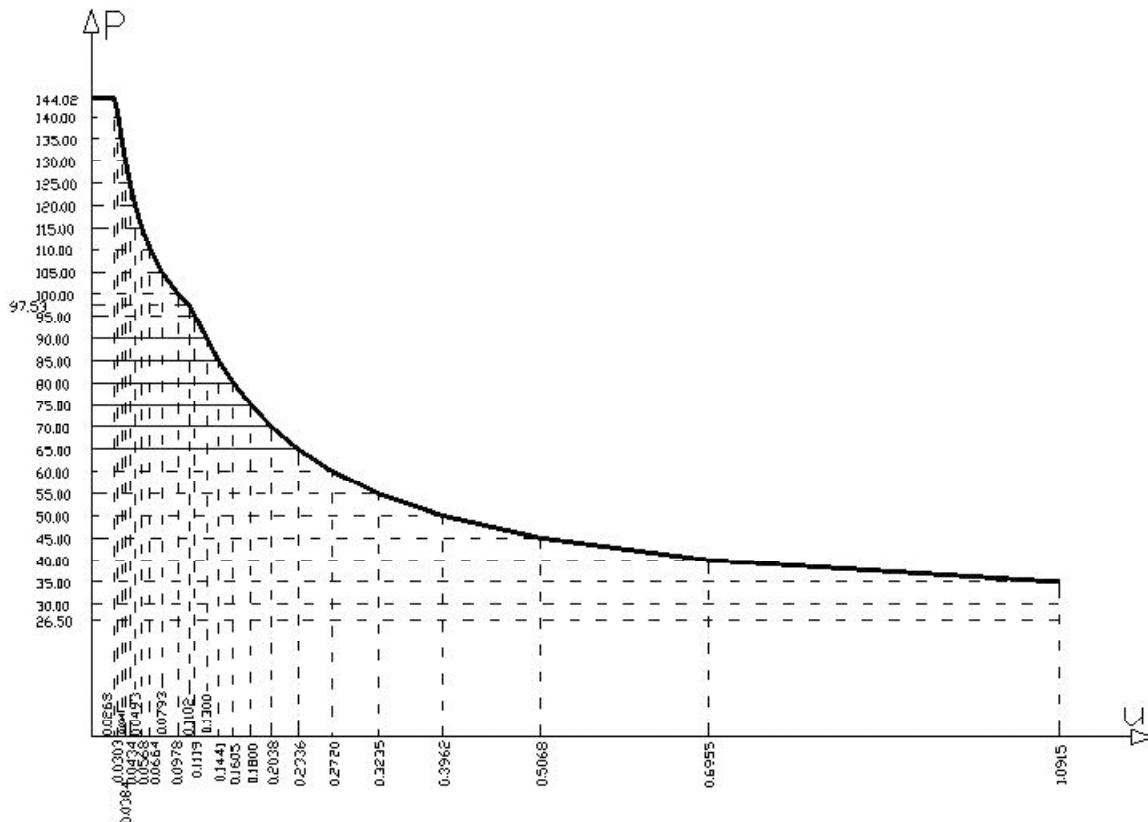


Figura 20.

apareciendo momentos correspondientes al tercer tramo de la relación momento curvatura.

La trayectoria principal corresponde a la pieza en posición vertical entre los valores [0, 144.02 t.]. Además como se ve en la figura, la trayectoria secundaria tiende de forma asintótica superiormente a la carga  $P_{cr2}$ .

## 5.2 Ejemplo 2

Como segundo ejemplo supongamos para un pilar de longitud  $L = 8m$  como el de la Figura 21, empotrado en la base y libre en el extremo superior, que los parámetros de la ley bilineal son  $A_0 = 40000$ ,  $A_1 = 10000$  y  $\chi_1 = 0.003$  y los valores de las acciones  $f = 2kN / m$ ,  $H = 7kN$  y  $M_0 = 5kNm$ .

Las cargas críticas correspondientes a las rigideces  $a_1 = A_1$  y  $a_2 = A_0$  son:

$$P_{cr2} = 1542.1257 \text{ kN}, P_{cr1} = 385.5314 \text{ kN}$$

Por otra parte, de acuerdo con la teoría del pilar lineal equivalente [Ort04], el momento exterior ficticio del pilar lineal equivalente aplicado en el nodo que hace que, a pesar del cambio de rigideces, la deformada sea de la clase  $C^2$  es

$$M_2 = (a_1 - a_2)\chi_1 = -90 \text{ kNm}$$

Dicho momento al ser negativo actúa realmente en el sentido de las agujas del reloj oponiéndose al aumento de curvatura.

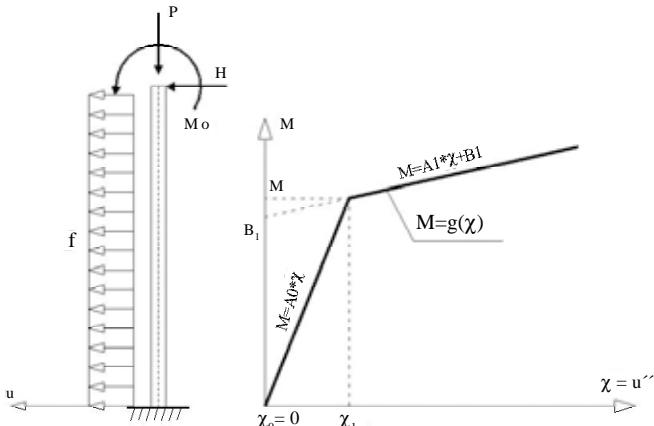


Figura 21.

El problema tiene una solución para aquellos valores de la carga axial comprendidos entre 0 y el valor de la carga crítica  $P_{cr1} = 385.53 \text{ kN}$ . Dos soluciones para los valores de  $P$  comprendidos entre  $P_{cr1}$  y la carga límite  $P_{lim} = 443.3263 \text{ kN}$  y ninguna solución para cargas superiores a esta última. En este caso la carga límite está muy por debajo de la carga crítica superior  $P_{cr2}$  y ligeramente por encima de la inferior  $P_{cr1}$ . La flecha en el extremo del pilar para el valor de la carga límite es del orden de 24 cm.

En la Figura 22 se representa la gráfica del desplazamiento en el extremo  $u_3(m)$  del pilar en función de la carga  $P(kN)$  y el pilar lineal equivalente, correspondiente al pilar en régimen no lineal, para el valor de la carga límite.

Es interesante destacar cómo para una de las soluciones la longitud  $h_1$  del tramo  $[x_1, x_2]$  (ver Figura 23) de rigidez peque-

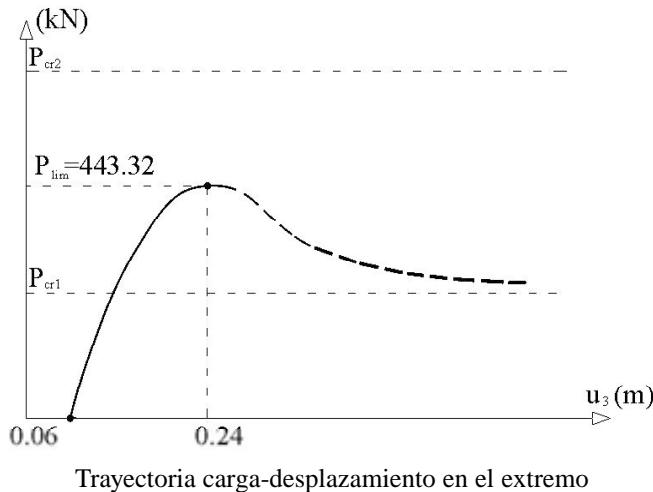


Figura 22.

ña  $a_1 = A_1$ , la curvatura  $c_1$  en el arranque de la ménsula y la flecha en el extremo crecen a medida que aumenta la carga. Se trata de la solución estable. Sin embargo para la otra solución los hechos suceden a la inversa, al aumentar la carga (siempre por encima del valor  $P_{cr1}$ ) la longitud  $h_1$ , la curvatura  $c_1$  y la flecha en el extremo disminuyen. La carga para la que se igualan los valores indicados de longitud del tramo de rigidez  $A_1$ , curvatura en el empotramiento y flecha en el extremo, de ambas soluciones es  $P_{lim}$ .

En la Figura 23 se representan las dos situaciones posibles del pilar para una carga  $P$  comprendida entre  $P_{cr1}$  y  $P_{lim}$  que corresponden a las configuraciones de equilibrio estable e inestable del pilar en régimen no lineal. En la Figura se ha representado el caso particular relativo a la carga  $P = 410 \text{ kN}$  indicando para ambas configuraciones la curvatura en la base del pilar, las longitudes de los dos tramos de la pieza correspondientes a las rigideces  $a_1 = 10000$  y  $a_2 = 40000$  y el desplazamiento del extremo libre del pilar.

## 6. EL PILAR COMO PARTE DE LA ESTRUCTURA

Cuando el pilar forma parte de una estructura su comportamiento se ve afectado por la interacción con el resto de la estructura modificándose las trayectorias de las variables de estado que determinan la posición de equilibrio y el valor de las cargas que actúan como parámetros de control. Para ilustrar este tipo de situaciones se resumen los resultados más destacados del análisis de un pórtico en L formado por un pilar articulado en su base y una viga con apoyo articulado deslizante en el extremo libre desarrollado en la ponencia [ORC05].

### 6.1 Ejemplo 3

La geometría y cargas del caso estudiado se indican en la Figura 24. El análisis se lleva a cabo considerando dos situaciones:

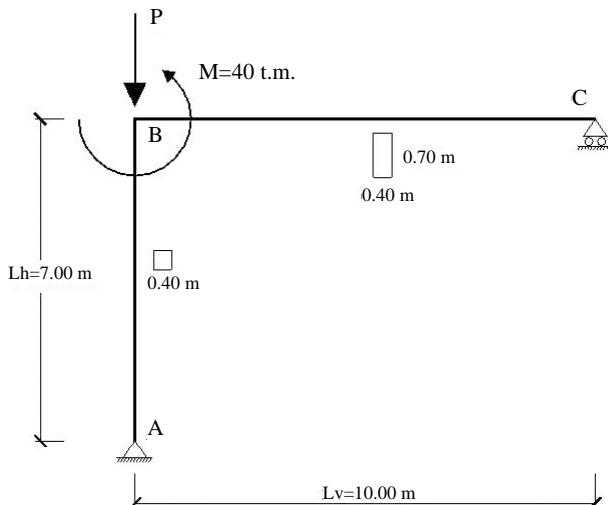


Figura 24.

$$P_{cr1}=385.53 \text{ kN} < P=410 \text{ kN} < P_{lim}=443.33 \text{ kN}$$

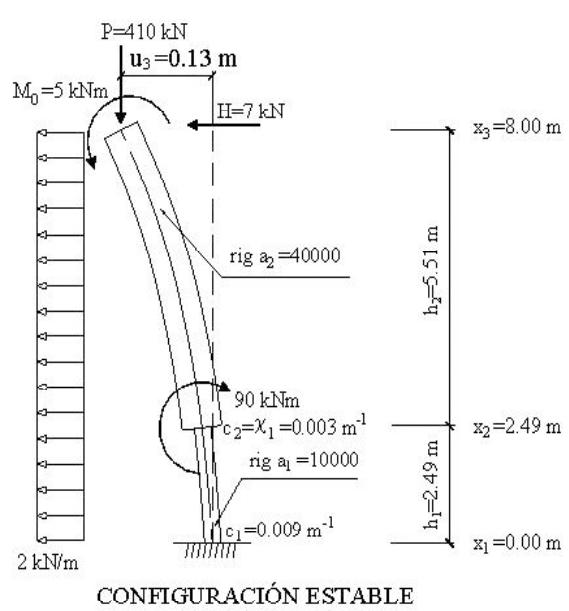
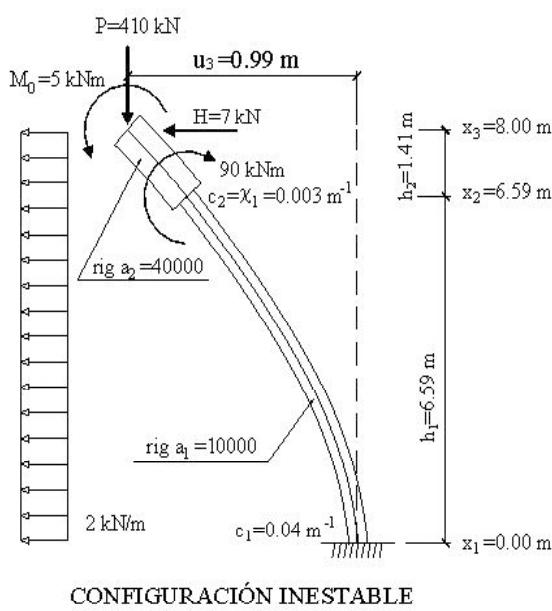


Figura 23.

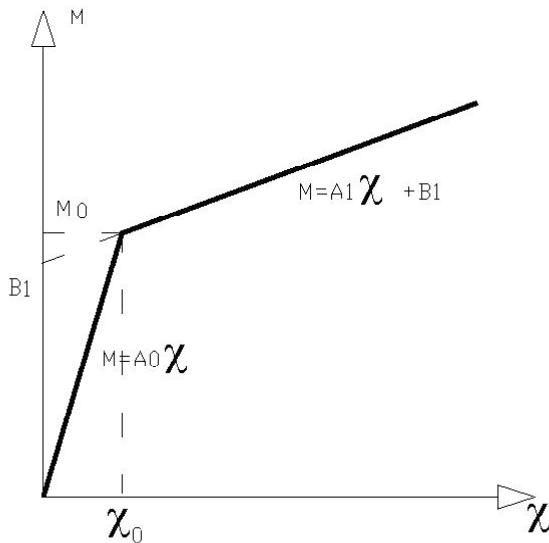


Figura 25.

- Caso homogéneo con  $M = 0$ .
- Y el caso no homogéneo con  $M = 40 \text{ tm}$ .

Estudiándose cada caso, en primer lugar para un comportamiento elástico lineal de los materiales y a continuación considerando una relación no lineal de la ley momento-curvatura del pilar.

Para el pilar se considera un comportamiento elástico no lineal caracterizado por la relación momento-curvatura (Figura 25):

$$\begin{aligned} M &= A_0 * \chi & \chi < \chi_0 \\ M &= A_1 * \chi + B_1 & \chi > \chi_0 \end{aligned}$$

En el ejemplo numérico se toman los siguientes valores;

$$A_0 = 4599.15 \text{ tm}^2.$$

$$A_1 = 2500.00 \text{ tm}^2.$$

$$B_1 = 12.2582 \text{ tm.}$$

Y por tanto

$$M_0 = 26.857 \text{ t.m.}$$

$$\chi_0 = 0.0058396 \text{ m}^{-1}$$

La interacción viga-pilar para el caso particular estudiado se refleja en la Figura 26, que pone de manifiesto cómo en el caso de la deformada (a), el estado de solicitud de compresión es mayor que en el caso (b) condicionando la estabilidad del conjunto. Esto determina un carácter asimétrico de la trayectoria carga(P)-desplazamiento(d).

De acuerdo con los desarrollos analíticos de [ORC05], de una forma cualitativa los resultados obtenidos se recogen en la Figura 27.

Con los resultados obtenidos en el ejemplo numérico, se han representado las trayectorias de la Figura 28 en el entor-

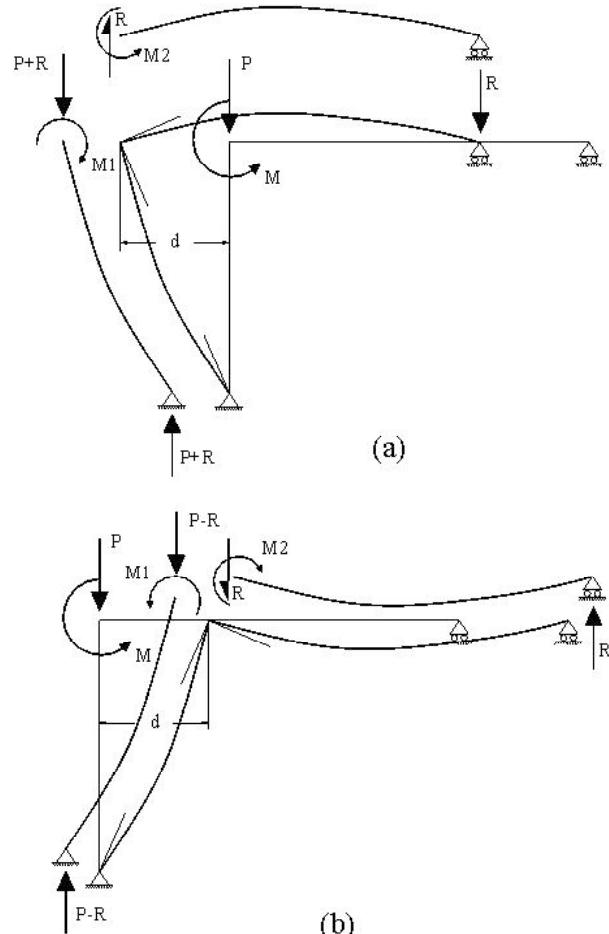


Figura 26.

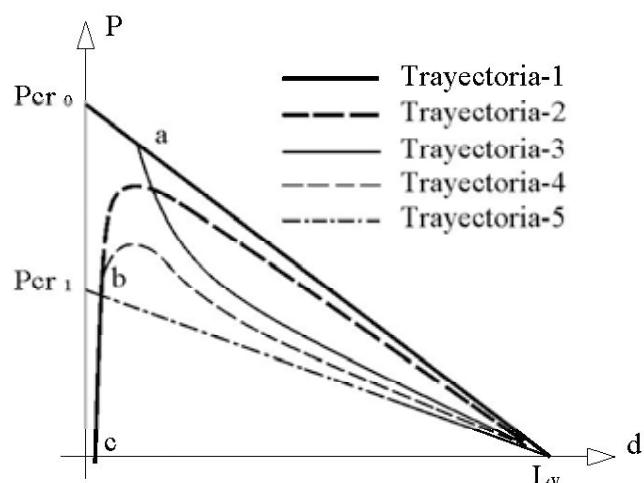


Figura 27.

no de los puntos límite con pequeños desplazamientos comparados con  $L_v$ .

- a) Trayectoria-1. Relación desplazamiento-carga para el caso homogéneo elástico-lineal con rigidez del pilar  $A_0$ . Dicha relación es la recta:

$$P = 194.676 \left( 1 - \frac{d}{10} \right)$$

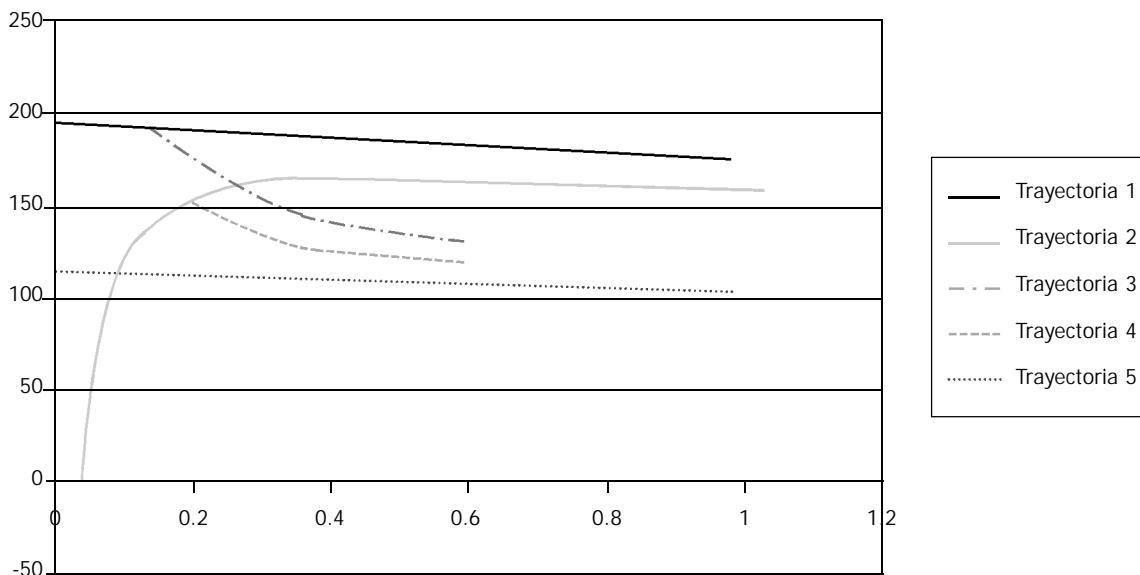


Figura 28.

La carga  $P=194.676$  t. representaría la carga crítica de bifurcación para el pórtico cuando el pilar tiene la rigidez  $A_0$ . Dicha recta corta al eje de abscisas en  $L_v = 10$  m.

- b) Trayectoria-2. Relación desplazamiento-carga para el caso no homogéneo elástico-lineal.

La trayectoria elástica como es conocido para este tipo de problemas tiene un punto límite a partir del cual la rama descendente representa posiciones de equilibrio inestables. El punto límite se ha encontrado para  $P = 168.07$  t.

- c) Trayectoria-3. Relación desplazamiento-carga para el caso homogéneo elástico-no lineal.

Dado que la relación constitutiva del pilar elástico-no lineal tiene un tramo elástico las trayectorias 1 y 3, coinciden hasta el punto en el que aparece el momento  $M_0$  en el pilar, entrando en fase no lineal y dando lugar a una rama descendente.

- d) Trayectoria-4. Relación desplazamiento-carga para el caso no homogéneo elástico-no lineal.

De forma análoga al caso anterior debido a la fase elástica del pilar no lineal hay un tramo de las trayectorias 2 y 4 coincidentes hasta el punto en el que aparece un tramo no lineal en el pilar que da lugar a que la trayectoria-4 se aparte de la trayectoria-2 elástica-lineal. La nueva trayectoria pasa por un máximo localizado para  $P = 149.5$  t. Esta trayectoria discurre por debajo de la trayectoria-3.

- e) Trayectoria-5. Relación desplazamiento-carga para el caso homogéneo elástico-no lineal con rigidez del pilar  $A_1$ . Dicha relación es la recta:

$$P = 114.294 \left( 1 - \frac{d}{10} \right)$$

La carga  $P=114.294$  t. representaría la carga crítica de bifurcación para el pórtico cuando el pilar tiene la rigidez  $A_1$ . Igual que en el caso de la Trayectoria-1 la recta corta al eje de abscisas en  $L_v = 10$  m.

Como se observa en la Figura las trayectorias 3 y 4 tienden asintóticamente a esta última trayectoria por encima.

Por tanto en este tipo de pórticos con comportamiento no lineal, para la trayectoria con carga límite, ésta aparece tras un tramo relativamente corto en fase no lineal y una caída rápida que hace que el conjunto de la pieza quede toda ella en régimen no lineal. Estos valores quedan por debajo de los correspondientes al comportamiento elástico, por lo que se puede apreciar una cierta disminución de la carga límite respecto del caso lineal, con perdida de la capacidad resistente. Esta situación cabe esperar que se vea agravada por problemas de imperfección. Esto pone de relieve que los problemas de inestabilidad se agudizan en el caso de comportamientos no lineales de los materiales en el entorno de los puntos límites.

## 7. CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo se ha tratado de recoger de forma resumida lo que se considera que son los elementos esenciales que permiten realizar el estudio del comportamiento de los pilares en régimen no lineal.

En primer lugar se ha llevado a cabo una introducción en la que se recogen las hipótesis de los distintos modelos para el análisis de los pilares. Estas hipótesis se han clasificado en tres grupos: las correspondientes a las ecuaciones constitutivas de los materiales, las que se refieren al campo cinemático de las secciones y aquellas que tienen que ver con las condiciones mecánicas de equilibrio. La elección de distintas hipótesis permite la creación de diferentes modelos con los que explicar el comportamiento de los pilares.

Históricamente los primeros modelos estaban basados en un comportamiento elástico de los materiales pero con un

carácter de no linealidad geométrica como ponen de relieve los modelos de Euler y Kirchhoff. En ellos aparecen los elementos básicos del análisis de pilares como son el estudio de las trayectorias, el carácter estable o inestable de las mismas y la determinación de sus puntos singulares (puntos de bifurcación y límite). En particular en el modelo de Euler se pone de manifiesto el equilibrio indiferente que da lugar a la trayectoria secundaria, mientras que en el modelo de Kirchhoff dicha trayectoria es estable a partir del punto de bifurcación.

Con los trabajos iniciales de Considere y Engesser en los que se considera un comportamiento plástico de los materiales, se abre un nuevo capítulo del estudio de pilares que culmina con el célebre modelo simplificado de Shanley el cual caracteriza el comportamiento de los pilares en régimen plástico. Con este último modelo se pone de manifiesto la existencia de una infinidad de puntos de bifurcación que inician una trayectoria estable si la carga es menor que la carga crítica correspondiente al módulo reducido o inestable si la carga es mayor.

Para clarificar el concepto de pandeo así como para poner de relieve su importancia en el análisis de pilares se han repasado brevemente los conceptos de estabilidad, bifurcación y puntos límite relacionándolos con la sensibilidad frente a imperfecciones que afectan de forma decisiva al pandeo como pusieron de manifiesto los trabajos de Koiter.

Con el fin de aplicar estas ideas se ha llevado a cabo un estudio del comportamiento de pilares en régimen elástico no lineal empezando con un modelo discreto con el que se pone de manifiesto de manera sencilla la existencia de los puntos de bifurcación y límite, zonas de estabilidad e inestabilidad, para pasar finalmente al caso continuo en el que se plantean las ecuaciones del modelo que se resuelven utilizando la teoría de splines generalizados y el concepto de pilar lineal equivalente para dos casos: uno homogéneo en el que se halla la trayectoria secundaria, en este caso inestable, y otro no homogéneo para el que se determina su trayectoria calculando la carga límite al mismo tiempo que se pone de relieve la existencia de dos posiciones de equilibrio para el mismo estado de cargas: una estable y otra inestable.

Finalmente se ha descrito el comportamiento del pilar como parte de una estructura mediante un ejemplo de un pórtico en L formado por un pilar y una viga destacando el carácter asimétrico de la trayectoria y comparándose el caso elástico lineal con el no lineal. Con ello se ha observado una reducción de la carga límite incluso para desplazamientos menores que en el caso lineal.

Todo lo anterior ha permitido poner de relieve la importancia de elegir adecuadamente los distintos modelos disponibles para el estudio de pilares y la utilización de los elementos en los que se basa su análisis para una correcta predicción de su comportamiento.

## BIBLIOGRAFIA

[BaC91] BAZANT, Z. P. and CEDOLIN, L.: *Stability of Structures*. Oxford University Press, 1991.

[Bat02] BATTINI J. M.: "Co-rotational beams elements in instability problems". Royal Institute of Technology. Ph. D. Stockholm 2002.

[ChA76] CHEN, W. F. and ATSUTA, T.: *Theory of Beam-Columns*. Vols.1,2, McGraw-Hill, 1976.

[ChL87] CHEN, W. F. and LUI, E. M.: *Structural Stability. Theory and Implementation*. Elsevier, 1987

[CiL96] CIMETIERE, A. and LEGER, A.: "Some problems about elastic-plastic post-buckling" Int. J. Solids Structures, 1996.

[Con91] CONSIDERE, A.: "Résistance des pièces comprimées", Congrés Internacional des procédés des constructions, Paris, Vol 3. 1891.

[CrW75] CROLL, J. G. A. and WALKER, A. C.: *Elementos de Estabilidad Estructural*. Reverté, S. A. 1975.

[Eng89] ENGESSER, F.: "Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe". Zeitschrift d. Arch.-u. Ing.- Ver. Zu Hannover. 1889.

[Fel00] FELIPPA, C. A.: *Introduction to the analysis of nonlinear elastic structures by the Finite Element Method*.

[Hut74] HUTCHINSON, J. W.: "Plastic Buckling". Advances in Appl. Mech. 1974.

[Koi45] KOITER, W.T.: "Over de stabiliteri vanher elasrische efenwicht", Dissertation, Delft, Holland.1945. Translation: "On the Stability of Elastic Equilibrium", NASA TT-F-10833, 1967 and AFFDL-TR-70-25, 1970 (Sec. 4.6).

[Lev81] LEVINSON, M.: "A New Rectangular Beam Theory". Journal of sound and Vibration. 1981 74(1), 81-87.

[Lia92] LIAPUNOV, A. M.: *Stability of Motion*. Academic Press. New York, 1966. 1892.

[ORC05] ORTEGA, M. A., ROMERO, J. L. y CORRALES, J. M.: "Análisis mediante Splines Generalizados de un Pórtico en L considerando un comportamiento no lineal de los materiales". Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería 2005. Granada."

[ORT04] ORTEGA, M. A.: "Análisis del pandeo de pilares en régimen no lineal mediante splines generalizados. Tesis Doctoral". E. T. S. Ingenieros de Caminos, UPM. 2004."

[PiW94] PILKEY, W. D. and WUNDERLICH, W.: *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press, Inc., U.S.A. 1994.

[Poi85] POINCARÉ, H.: "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", Acta Mathematica 7, 259-380. 1885.

[Sha47] SHANLEY, F. R.: "Inelastic column Theory". J. Aero. Science. 1947.

[Tim53] TIMOSHENKO, S. P.: *Teoría de la estabilidad elástica*. EDIAR, 1953.

[Vil97] VILLAGGIO, P.: *Mathematical models for Elastic Structures*. Cambridge University Press. 1997.



## ÚLTIMAS TESIS PUBLICADAS



Véase listado de tesis  
publicadas y formulario de petición  
de publicaciones en páginas  
114 y 115 de este mismo número

<http://www.e-ache.net>

# Modelado de tableros celulares de almas inclinadas mediante emparrillado plano

## ***Cellular decks with inclined webs modeling for 2D grillage analysis***

◆

**Carlos Manuel Mozos del Olmo**

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

ETS de Ingenieros de Caminos de la Universidad de Castilla-La Mancha

◆

**Ángel Carlos Aparicio Bengoechea**

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

ETS de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Cataluña

### **RESUMEN**

En este artículo se presentan una parte de los resultados obtenidos en el proyecto de investigación *Problemas de Seguridad Estructural y Aptitud de Servicio de los Puentes Atirantados*, financiado por la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha durante el periodo de 2005 a 2007. En dicho proyecto se desarrollará un estudio de las consecuencias que tiene sobre los puentes atirantados la rotura de uno de sus tirantes. Para ello se han tomado como modelo los puentes utilizados en el estudio paramétrico que se incluye en [Walther et al, 1999]. En la fase inicial del estudio teórico ha sido necesario desarrollar los modelos matemáticos de los citados puentes, planteándose entonces la disyuntiva sobre la utilización de Elementos Finitos o Modelos de Emparrillado Plano para el modelado de los tableros. Se incluye en este artículo el estudio realizado a este respecto y los resultados obtenidos, por entenderse que pueden ser de interés general para el análisis estructural de puentes de hormigón, donde la obtención de los esfuerzos mediante la técnica del emparrillado plano sigue siendo una estrategia interesante en el proyecto.

### **SUMMARY**

*This paper presents some of the results obtained in the research project PBI-05-031, supported by the Junta de Comunidades de Castilla La Mancha, Spain, from 2005 to 2007. This research project is focused on the structural answer of cable stayed bridges when the sudden loss of one of their stays takes place. The bridges used in the study are based on those presented in the parametric study included in*

*[R. Walther, 1999]. In the first part of the study, it has been necessary to decide how to develop the numerical models of the decks, either by the Finite Element Method or by a Grillage Analysis. Considering that the Grillage Analysis is a very popular method for analysing concrete bridges, this paper includes the study developed regarding to the question above mentioned and the obtained results.*

### **1. INTRODUCCIÓN**

Para la realización del estudio paramétrico que se incluye en [Walther et al, 1999], de donde se han tomado los tableros analizados en este estudio, el autor consideró cuatro tipos de tableros, Figura 1, todos ellos con una sección transversal de igual superficie. El modelado del tablero tipo losa no plantea más interrogante que el tamaño de la malla, tanto si se utiliza el M.E.F como si se recurre a un *Modelo de Emparrillado Plano*, por lo que no se incluye en este estudio. Sin embargo, los tableros celulares presentan almas laterales inclinadas y la utilización de *Modelos de Emparrillado Plano* para esta tipología se encuentra abordada con escaso detalle en la bibliografía existente a este respecto, planteando diversos interrogantes en cuanto a la repercusión que tiene, sobre la respuesta estática y dinámica del modelo, la forma de dividir el tablero longitudinalmente y los criterios de asignación de áreas e inercias a las barras del mismo. El objeto de este artículo es dar respuesta a estas cuestiones y establecer la formulación y estrategias de modelado adecuadas para este tipo de tableros celulares. Para ello se ha realizado un estudio de la

respuesta frente a varios tipos de carga de 11 *Modelos de Emparrillado Plano*, elaborados con distintos criterios, y correspondientes a un tramo de 31 m. de cada uno de los tres tableros celulares analizados. Resulta necesario, además, un *Modelo Patrón* con el que comparar la respuesta de cada uno de los modelos citados y que, por tanto, permita cuantificar la bondad de los mismos. Para cada tablero, el *Modelo Patrón* se ha confeccionado con elementos finitos, con un mallado lo suficientemente fino como para reproducir con la precisión necesaria el comportamiento del tablero real.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LOS TABLEROS

De los cuatro tableros incluidos en [Walter et al, 1999] se han analizado únicamente los tres de tipo celular, es decir, los Tableros b, c y d, Figura 1. Por esta razón en lo sucesivo nos referiremos sólo a ellos. Dichos tableros cuentan con cantos

diferentes, pero los distintos espesores de los forjados y almas han sido asignados de manera que los tres coincidan en el área de su sección transversal: 5,20 m<sup>2</sup>. Se tiene con ello tres tableros con la misma masa pero con las características geométricas que se resumen en la Tabla 1.

Los diafragmas están separados en todos ellos 6,20 m. y el espesor de estos es de 0,35 m. En cuanto al material considerado para la construcción de los mismos se ha contemplado un hormigón del tipo HP-40 cuyas características son:

$$E = 36.342,4 \text{ MPa} ; v = 0,2 ; \gamma = 24,5 \text{ kN/m}^3$$

## 3. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS

Con cada uno de los tableros celulares descritos se realizaron modelos matemáticos correspondientes a tramos de 31 m.

**Tabla 1. Canto, áreas e inercias de los tableros celulares**

Tablero	canto (m)	A(m <sup>2</sup> )	A <sub>Vy</sub> (m <sup>2</sup> )	A <sub>Vz</sub> (m <sup>2</sup> )	J <sub>T</sub> (m <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (m <sup>4</sup> )	I <sub>z</sub> (m <sup>4</sup> )
b	1,15	5,20	3,69	0,53	2,3340	0,8171	62,2594
c	1,55	5,20	3,47	0,78	4,5313	1,6532	61,9752
d	2,25	5,20	3,20	1,06	9,7350	3,7100	63,4887

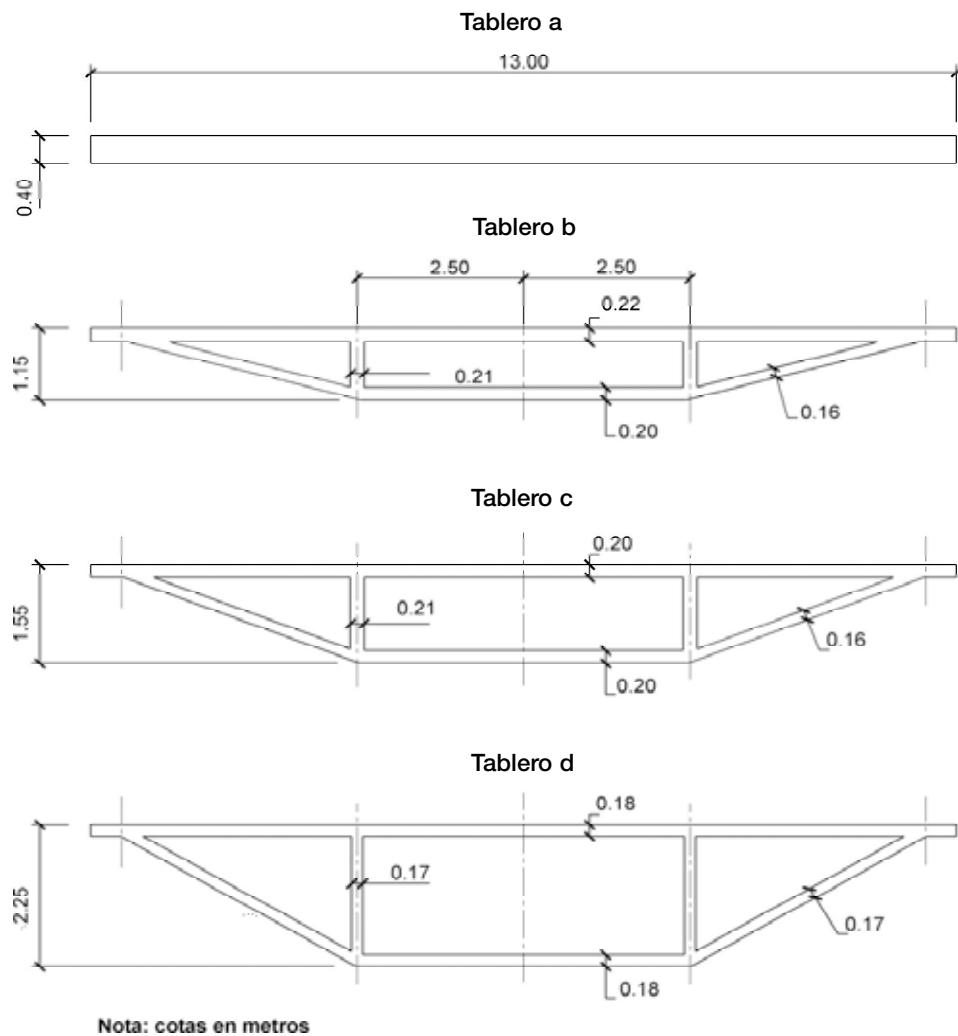


Figura 1. Dimensiones de los tableros.

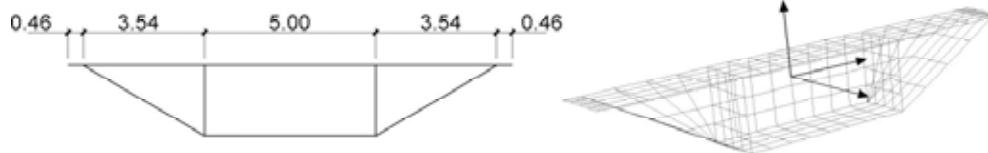


Figura 2. Esquema y mallado de una porción de 1,55m. de longitud de un Modelo Patrón.

de longitud con un extremo empotrado y el otro libre. Se detallan a continuación los criterios seguidos para su elaboración.

### 3.1. Modelo Patrón

El *Modelo Patrón* es un modelo de elementos finitos realizado empleando una discretización suficientemente fina, comprobándose para ello que un refinado de la malla no da lugar a una modificación de la respuesta del modelo frente a diversas cargas. En la Figura 2 se muestra la malla correspondiente a un tramo de 1,55 m. de longitud, así como el esquema general de la disposición transversal de nudos y elementos. Este esquema se corresponde con el plano medio de cada uno de los forjados y almas que conforman el tablero real.

El tipo de elementos empleados son los *SHELL* con deformación por cortante que incluye el programa de cálculo *SAP 2000* (*versión 8.0.8*). A todos los elementos *SHELL*, salvo a los correspondientes a las almas y diafragmas, se les ha asignado el espesor real de los elementos que representan, así como las características reales del material.

El programa de cálculo aplica la mitad del espesor especificado para cada elemento a cada lado de la línea media marcada por el esquema del modelo. Por esta razón, en el modelo generado, ciertas zonas situadas en los encuentros entre dos elementos no alineados son incluidas en ambos elementos, siendo el modelo generado ligeramente más pesado y rígido que el tablero real. Para corregir este aspecto se dio a las almas verticales una masa y un peso ficticio, obtenidos al multiplicar los valores reales por un coeficiente  $\alpha$  tal que coincidan las áreas de las secciones transversales del modelo y el tablero real. Quedan de esta forma ajustados el peso y la masa, pero resulta necesario modificar el comportamiento a flexión y axil del modelo. Para ello se multiplicó por el mismo coeficiente  $\alpha$  las rigideces a flexión (M11) y axil (F11) de los elementos que conforman las almas. Con los diafragmas se

siguió el mismo razonamiento asignándoles una masa y peso ficticio, así como se modificaron sus rigideces a flexión (M11) y axil (F11) conforme a la relación entre su peso real y el que arroja el modelo.

### 3.2. Modelos de Emparrillado Plano

#### 3.2.1. Descripción de los Modelos Considerados

Para cada uno de los tableros se han elaborado 11 *Modelos de Emparrillado Plano*, cuya disposición general de barras longitudinales BL1 y BL2 y transversales BT12 y BT22 se muestra en la Figura 3.

El emparrillado de cada modelo está situado a la altura de la fibra baricéntrica del tablero. Las barras transversales están separadas 1,55 m., por lo que siendo esta dimensión razonablemente pequeña, la asignación de características se ha realizado de forma que una barra situada en una sección x recoge las características del tablero contenidas en la porción del mismo situada entre x-1,55 m. y x. Con ello se consigue una pequeña simplificación de los modelos al hacer que las barras de extremo, x = 0 m. y x = 31 m., tengan las mismas características que el resto de barras y, por tanto, no es necesario el cálculo y disposición de los tipos adicionales de barras transversales de extremo. Los 11 modelos de emparrillado se han elaborado combinando dos tipos de criterios:

- Forma en que se divide del tablero y se asignan áreas e inercias a las barras longitudinales.
- Forma en que se obtiene y asigna la inercia de torsión a barras longitudinales y transversales.

Respecto al primero de los criterios, en la Figura 4 se muestran las cuatro posibilidades contempladas de corte del tablero entre las barras longitudinales exteriores BL1 y las interiores BL2:

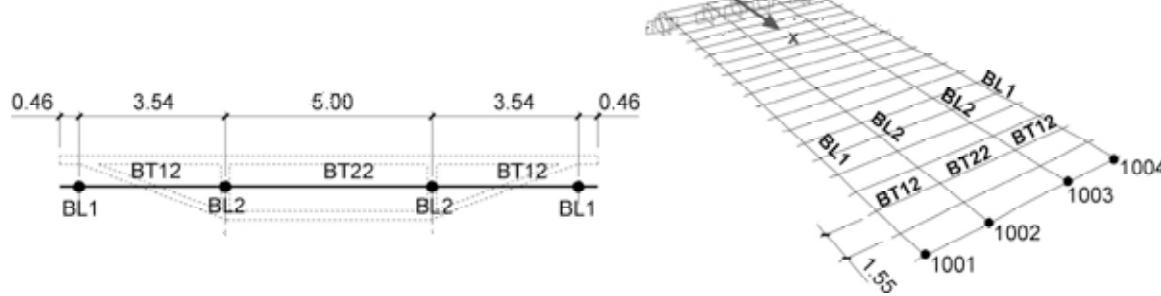


Figura 3. Modelos de Emparrillado Plano. Disposición de barras y nudos de referencia.

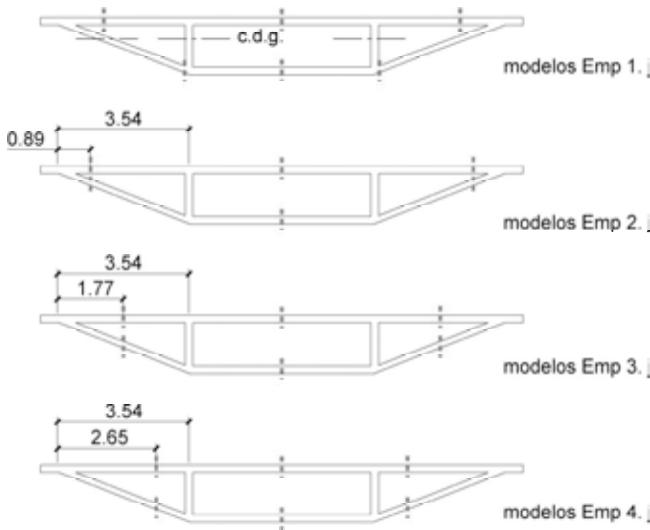


Figura 4. Modelos de Emparrillado Plano.  
Disposición de Cortes Longitudinales.

- La fibra baricéntrica de las barras longitudinales coincide.
- El tablero se corta a 1/4 de la distancia existente entre las barras longitudinales BL1 y BL2.
- El tablero se corta a 1/2 de la distancia existente entre las barras longitudinales BL1 y BL2.
- El tablero se corta a 3/4 de la distancia existente entre las barras longitudinales BL1 y BL2.

Respecto al segundo de los criterios, la obtención y asignación de la inercia de torsión, se han considerado las siguientes tres posibilidades, las cuales se detallan en el punto 3.2.2 :

- Reparto de la inercia total del tablero  $J_T$  entre las barras longitudinales y transversales.
- Criterio empleado por E. C. Hambly [Hambly, 1976].
- Inercia de torsión obtenida por integración para cada una de la barras.

Para designar los diferentes modelos de emparrillado se empleará el prefijo *Emp* seguido de dos índices que indican los criterios (división longitudinal . inercia de torsión) utilizados. La Tabla 2 resume el total de los modelos considerados.

**Tabla 2. Designación de los Modelos de Emparrillado**

	Reparto $J_T$	$J_{\text{Hambly}}$	$J_{\text{Integrada}}$
igual c.d.g.	Emp 1.1	Emp 1.2	
corte a 1/4	Emp 2.1	Emp 2.2	Emp 2.3
corte a 1/2	Emp 3.1	Emp 3.2	Emp 3.3
corte a 3/4	Emp 4.1	Emp 4.2	Emp 4.3

Es necesario realizar la salvedad de que en el modelo Emp 1.2 las barras longitudinales tienen la inercia de torsión asignada con el criterio de repartir la  $J_T$  del tablero mientras que a las transversales se les ha asignado la inercia con el criterio dado en [Hambly, 1976].

### 3.2.2. Características geométricas de las barras

Se describe a continuación la forma en que se ha asignado a las distintas barras longitudinales y transversales sus características geométricas y físicas. Están referidas a los ejes locales de las barras, asignados de manera que el Eje Z local coincide con el general.

#### 3.2.2.1. Área de la sección transversal

El área asignada a la sección transversal de las barras, tanto longitudinales como transversales del modelo, es la de la porción del tablero real que representan según la disposición de los cortes longitudinales y transversales.

#### 3.2.2.2. Áreas de cortante según el eje Y

Las áreas de cortante según el Eje Y se tomarán de valor infinito ya que la deformación por cortante en este sentido se ha incluido en la deformación por flexión sobre el Eje Z tal y como se indica más adelante.

#### 3.2.2.3. Áreas de cortante según el Eje Z

Para el área de cortante según el Eje Z de las barras longitudinales se han seguido los criterios que presenta E. C. Hambly en la referencia [Hambly, 1976].

Así, para las barras longitudinales BL1:

$$A_{Vz,BL1} = e_2 \frac{h}{2} \quad (1)$$

y para las barras longitudinales BL2:

$$A_{Vz,BL2} = e_3 h_2 + e_2 \frac{h_2}{2} \quad (2)$$

siendo las alturas  $h$  y los espesores  $e$  los indicados en la Figura 5.

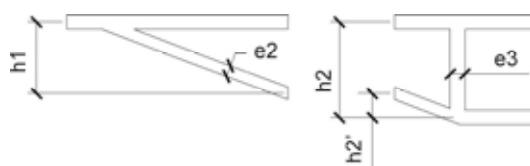


Figura 5. Dimensiones consideradas para el cálculo del área de cortante  $A_{Vz}$  en las barras longitudinales.

Para obtener el área de cortante de las barras transversales se ha recurrido a dos modelos de elementos finitos, uno de

ellos para las barras que no representen la presencia de un diafragma y otro para aquellas que deban incorporar la rigidez transversal aportada por estos elementos. A ambos modelos se les ha sometido a un estado de carga y sustentación externa como se muestra en la Figura 6. El área de cortante se obtiene a partir del desplazamiento relativo de los dos extremos de la barra:

$$A_{vz,BT} = \frac{V}{\frac{\Delta u}{b} G} \quad (3)$$

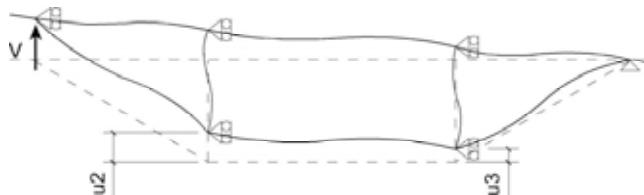


Figura 6. Modelos para la obtención del  $A_{vz}$  de las barras transversales.

### 3.2.2.4. Inercia de flexión en torno al Eje Y

Las inercias de flexión en torno al Eje Y de las barras longitudinales se han obtenido respecto a la fibra baricéntrica de la sección total del tablero. En las barras transversales, se ha tomado la fibra baricéntrica de la barra para calcular la inercia. Como las barras transversales BT12 que unen las longitudinales exteriores BL1 con las interiores BL2 tienen canto variable se ha obtenido la inercia en las secciones extremas y en el modelo se ha incorporado un elemento barra de sección variable.

### 3.2.2.5. Inercia de flexión en torno al Eje Z

Para la inercia de flexión en torno al Eje Z se ha seguido la formulación propuesta por [Hambly, 1976] para caracterizar elementos cruciformes. La formulación elegida considera que toda la deformación es debida a flexión, por lo que el elemento se supone infinitamente rígido a deformación por cortante. Así la inercia de un elemento de espesor  $e$  y dimensiones  $a$  y  $b$  como se muestra en la Figura 7 es:

$$I_z = \frac{b a^2 e}{6 \frac{E}{G}} \quad (4)$$

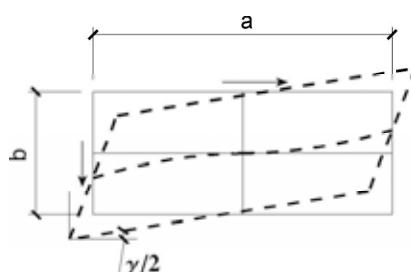


Figura 7. Deformación por flexión en su plano de un elemento cruciforme de espesor  $e$ .

### 3.2.2.6. Inercias de torsión

Como ya se ha mencionado, se han considerado tres criterios para la obtención y asignación de las inercias de torsión a las barras longitudinales y transversales. Se exponen a continuación cada uno de ellos.

#### 3.2.2.6.1. Inercias de torsión obtenidas a partir del reparto de JT

Siendo  $J_T$  la inercia de torsión de la sección total del tablero obtenida como viga, se asigna a las barras longitudinales la mitad de esta inercia, repartiéndola entre ellas de forma proporcional a las áreas encerradas por la línea media de los forjados que forman parte de la misma, Figura 8 (a).

$$J_{BLi} = \frac{J_T}{2} \frac{A_i}{\sum A_i} \quad (5)$$

La otra mitad de  $J_T$  se asigna a las barras transversales de manera proporcional a las áreas que se indican en la Figura 8 (b).

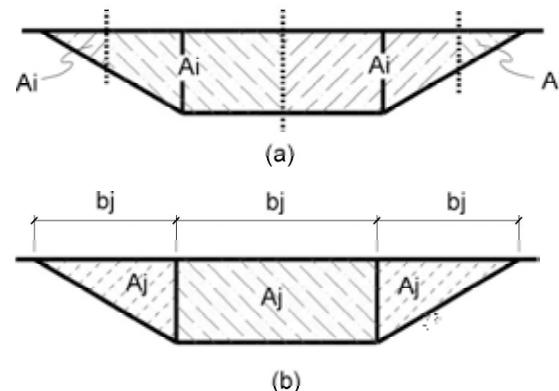


Figura 8. Áreas para el reparto de  $J_T/2$  entre las barras longitudinales y transversales.

$$J_{BTj} = \frac{J_T}{2} \frac{A_j}{\sum A_j} \frac{1}{b_j} S_t \quad (6)$$

siendo  $S_t$  la separación de las barras transversales.

#### 3.2.2.6.2. Inercias de torsión obtenidas con el criterio de Hambly.

Este autor propone en [Hambly, 1976] la obtención de la inercia de torsión de las barras longitudinales y transversales a partir del flujo de tensiones tangenciales existentes en los forjados superior e inferior de la barra, Figura 9 (a).

$$J_{Hambly} = 2 \frac{h^2 e_1 e_2}{e_1 + e_2} \quad (7)$$

Si la porción de tablero es de canto variable, Figura 9 (b), el criterio propuesto por este autor es utilizar esta misma formulación pero sustituyendo el canto total  $h$  por  $h/2$ , [Hambly, 1976].

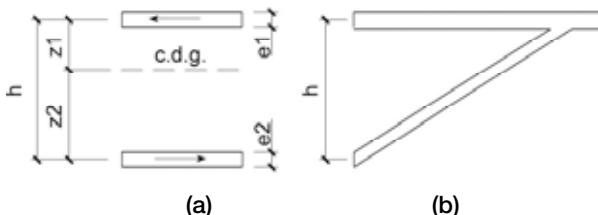


Figura 9. Flujo de tensiones tangenciales producidas por la torsión utilizadas para obtener  $J_{\text{Hamby}}$ .

### 3.2.2.6.3. Obtención de las Inercias de torsión mediante integración

Se propone la obtención de las inercias de torsión a partir de la rigidez que proporcionan los forjados frente a la deformación producida por tensiones tangenciales debidas a un momento torsor tal y como se expone a continuación.

Como se muestra en la Figura 10, el bien conocido mecanismo de trabajo de un modelo de emparrillado sometido a torsión debe verificar la igualdad entre el momento torsor que solicita la sección transversal del tablero y la suma de los pares proporcionados por los esfuerzos  $V_i$  más los momentos  $M_i$ . A su vez, los esfuerzos  $V_i$  a lo largo de las barras longitudinales se ven equilibrados por la aparición de otro momento torsor en las barras transversales.

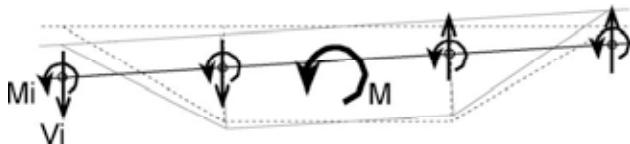


Figura 10. Movimientos y esfuerzos en las barras de los modelos de emparrillado plano debidos a torsión.

Todos estos esfuerzos dan lugar a las correspondientes deformaciones y movimientos en las barras del modelo: desplazamiento vertical y giro en torno al eje longitudinal de las mismas. Por tanto, la inercia de torsión tanto de las barras longitudinales como transversales debe ser aquella que proporciona la rigidez de estas barras frente a la torsión sobre su propio eje. Las inercias de torsión se calcularán, en consecuencia, mediante la integración de la rigidez que proporciona cada porción de tablero frente a la torsión en torno al eje de la barra del emparrillado a la que ha sido asignado.

De esta forma, la inercia de torsión  $J^{12}$  de una barra longitudinal que represente en el modelo una porción de tablero definida por las secciones longitudinales situadas a unas distancias al plano de simetría del tablero  $y_1$  e  $y_2$ , Figura 11, será la suma de los diferenciales de inercia que aportan cada uno de los  $dy$  que la componen. Como ya se ha mencionado, el momento torsor que actúa sobre la sección produce un flujo de tensiones tangenciales  $\tau$  que origina la deformación correspondiente en los forjados del tablero. Si se considera en primer lugar un  $dy$  situado entre los planos definidos por las distancias  $y_1$  e  $y_c$ , como la deformación angular de los forjados es

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

y siendo la curvatura de torsión

$$\chi_{xy} = \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

se obtiene

$$\gamma_{xy} = -2z \chi_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \Rightarrow \tau_{xy} = -2z G \chi_{xy} \quad (10)$$

Por otra parte, el diferencial de momento torsor asociado a las tensiones tangenciales de ese  $dy$  de tablero es

$$dM_t = \tau e_1 dy z_1 + \tau \cos \alpha \frac{e_2}{\cos \alpha} dy z_2 \quad (11)$$

y, en consecuencia, el momento torsor  $M_t^{1c}$  para una porción de tablero comprendido entre las secciones definidas por  $y_1$  e  $y_c$  es

$$M_t^{1c} = \int_{y_1}^{y_c} -G 2(e_1 z_1^2 + e_2 z_2^2) \chi_{xy} dy \quad (12)$$

$$\chi_{xy} = \frac{-M_t^{1c}}{\int_{y_1}^{y_c} G 2(e_1 z_1^2 + e_2 z_2^2) dy} \quad (13)$$

de donde se deduce

$$J^{1c} = 2 \int_{y_1}^{y_c} (e_1 z_1^2 + e_2 z_2^2) dy \quad (14)$$

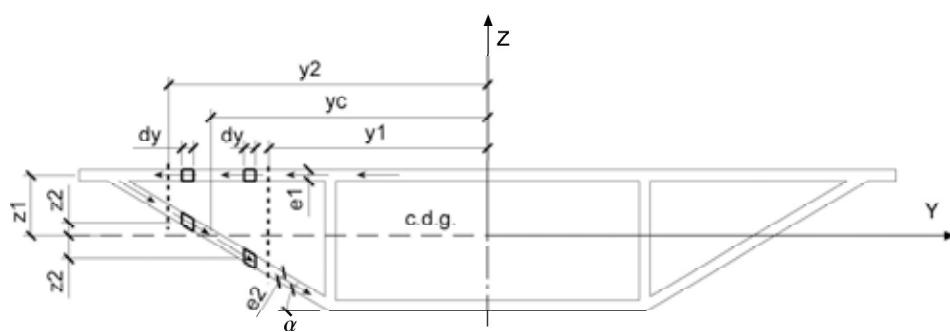


Figura 11. Flujo de tensiones tangenciales en la sección transversal del tablero.

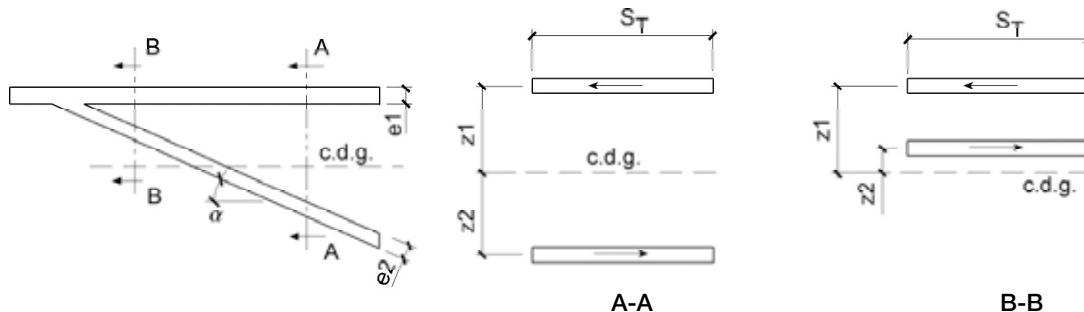


Figura 12. Integración de tensiones tangenciales en las barras transversales.

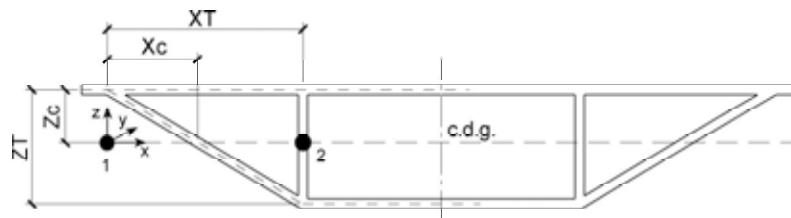


Figura 13. Sistema de referencia local para las barras transversales 1-2, BT12.

Si se repite el mismo razonamiento para un dy situado entre  $y_c$  e  $y_2$ , Figura 11, el  $dM_t$  es en este caso:

$$dM_t = \tau e_1 dy z_1 - \tau \cos \alpha \frac{e_2}{\cos \alpha} dy z_2 \quad (15)$$

Debe resaltarse el hecho de que, en este caso, las tensiones  $\tau$  de la porción de forjado situado a una distancia  $z_2$  de la fibra baricéntrica generan un momento torsor de signo contrario a las de la porción situadas a la distancia  $z_1$ . La inercia de torsión para la porción situada entre los planos definidos por  $y_c$  e  $y_2$  es entonces:

$$J^{c2} = 2 \int_{y_c}^{y_2} (e_1 z_1^2 - e_2 z_2^2) dy \quad (16)$$

Y la inercia que se buscaba,  $J^{12}$ , es la suma de ambas

$$J^{12} = J^{c2} + J^{c1} \quad (17)$$

Para las barras transversales se seguirá el mismo razonamiento, con lo que para una barra con ancho igual a  $S_T$  el flujo de tensiones tangenciales en una sección A-A, Figura 12, genera un momento torsor:

$$M_t = -2 G (e_1 z_1^2 + \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_r \chi_t \quad (18)$$

y la inercia de torsión en esta sección es:

$$J = 2 (e_1 z_1^2 + \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_r \quad (19)$$

Para una sección B-B, Figura 12, en la que los dos forjados están por encima de la fibra baricéntrica, lugar donde se ha situado el plano del emparrillado, los momentos generados por las tensiones son de signo contrario, siendo la inercia  $J$  en esta sección:

$$J = 2 (e_1 z_1^2 - \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_r \quad (20)$$

Con esto se tiene la inercia de torsión en cada una de las secciones extremas de las barras transversales, siendo esta inercia variable a lo largo de la longitud de la pieza. Se propone la utilización, en el modelo de emparrillado correspondiente, de una inercia  $J_{eq}$  constante a lo largo de la barra y que proporcione una rigidez equivalente. Para ello se igualan los giros relativos de los extremos de la barra sometida a un momento  $M_t$ . Si se utiliza un sistema de referencia local como el indicado en la Figura 13:

$$\theta_{1-2} = \int_0^{x_T} \frac{M_t}{G J} dx = \frac{M_t}{G J_{eq}} x_T \quad (21)$$

Ahora bien, utilizando la formulación anterior en  $x = 0$ , se tiene que  $z_1 = z_2$ , por lo que según (20)

$$J = 2 (e_1 z_1^2 - \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_r \approx 0 \Rightarrow \theta \approx \infty \quad (22)$$

lo que conduciría a unos resultados alejados de la realidad, por lo que en (21) el límite inferior de la integral debe ser un punto  $x$  en el que se garantice la inercia mínima,  $J_{min}$ , que realmente existe en el extremo inicial, Figura 14.

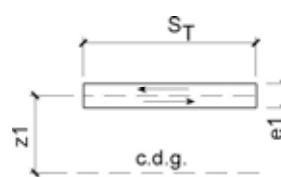


Figura 14. Flujo de tensiones en la sección extrema  $x = 0$  de las barras transversales 1-2.

$$J_{min} = 2 S_r [\frac{e_1}{2} (z_1 + \frac{e_1}{4})^2 - \frac{e_1}{2} (z_1 - \frac{e_1}{4})^2] = 2 S_r \frac{e_1^2 z_1}{2} \quad (23)$$

e igualando (23) a (20) en una sección en que  $z_2$  sea tal que proporcione la  $J_{min}$ :

$$J_{min} = 2 S_T \frac{e_1^2 z_1}{2} = 2 (e_1 z_1^2 - \frac{e_2}{\cos \alpha} z_{2,min}^2) S_T \quad (24)$$

de donde se puede despejar el valor de  $z_{2,min}$  a partir del que integrar el giro  $\theta$

$$z_{2,min} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{e_2} (e_1 z_1^2 - \frac{e_1^2 z_1}{2})} \quad (25)$$

y este punto se corresponde con un  $x_0$ :

$$z = z_c - \frac{z_r}{x_r} x \Rightarrow z_{2,min} = z_c - \frac{z_r}{x_r} x_0 \quad (26)$$

$$x_0 = (z_c - z_{2,min}) \frac{x_r}{z_r} = [z_c - \sqrt{\frac{\cos \alpha}{e_2} (e_1 z_1^2 - \frac{e_1^2 z_1}{2})}] \frac{x_r}{z_r} \quad (27)$$

y el giro (21) teniendo en cuenta (19) y (20) pasa a tener la expresión

$$\begin{aligned} \theta_{1-2} &= \int_{x_0}^{x_c} \frac{M_t}{G 2 (e_1 z_1^2 - \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_T} dx + \\ &+ \int_{x_c}^{x_r} \frac{M_t}{G 2 (e_1 z_1^2 + \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_T} dx = \frac{M_t}{G J_{eq}} x_r \end{aligned} \quad (28)$$

de donde

$$J_{eq} = \frac{x_r}{\int_{x_0}^{x_c} \frac{dx}{2 (e_1 z_1^2 - \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_T} + \int_{x_c}^{x_r} \frac{dx}{2 (e_1 z_1^2 + \frac{e_2}{\cos \alpha} z_2^2) S_T}} \quad (29)$$

siendo  $z_2$  dependiente de  $x$  según (26) y  $x_0$  el indicado en (27).

### 3.2.2.7. Pesos y masas

En todos los *Modelos de Emparrillado Plano* la masa y peso del tablero ha sido asignada a las barras longitudinales, por lo que para las barras transversales se ha utilizado un material de masa y peso nulo. El peso y la masa de los diafragmas se ha incorporado como cargas y masas puntuales situadas a lo largo de la sección transversal correspondiente.

## 4. CARGAS CONSIDERADAS

Para el estudio y comparación del comportamiento de los modelos descritos se han considerado 5 estados de carga:

- peso propio, G1, según la distribución de pesos descrita para cada modelo.
- 4 posiciones de una carga puntual  $Q = 1000$  kN, dispuesta en cuatro posiciones diferentes, Q1 a Q4, según se indica en la Figura 15.

## 5. RESPUESTA DE LOS MODELOS.

Todos los cálculos han sido realizados en régimen elástico y lineal, no considerándose por tanto la posibilidad de aparición de plastificaciones totales o parciales en ninguna sección ni ningún tipo de no linealidad mecánica o geométrica.

### 5.1. Respuesta Estática. Deformaciones

Se han obtenido los desplazamientos de los cuatro nodos 1001 a 1004 situados en el extremo libre, Figura 3, de cada uno de los modelos, y ello bajo la acción de las cargas G1, Q1, Q2, Q3 y Q4 antes descritas. Los resultados obtenidos han sido muy similares en los tres tipos de tableros b, c y d estudiados, por lo que se detallan únicamente los correspondientes al tablero b. Lo mismo puede decirse de la respuesta frente a peso propio G1 y la posición Q1, por lo que sólo se incluye esta última. Por otra parte, no siendo relevante la magnitud de los desplazamientos sino el grado de aproximación al comportamiento del *Modelo Patrón*, en la Figura 16 se muestra la relación entre los desplazamientos de los nodos de cada uno de los modelos y los del *Modelo Patrón*. Se analizan y comentan a continuación los resultados obtenidos para cada uno de los comportamientos del tablero.

#### 5.1.1. Comportamiento a Flexión sobre Eje Y y Cortante sobre Eje Z

- Todos los *Modelos de Emparrillado Plano* muestran un comportamiento homogéneo y reproducen la respuesta del tablero con una aproximación muy satisfactoria en todos los casos.
- No ejerce una influencia significativa la forma en la que se realicen los 'cortes' longitudinales ni la forma en que se obtienen las inercias de torsión de las barras.

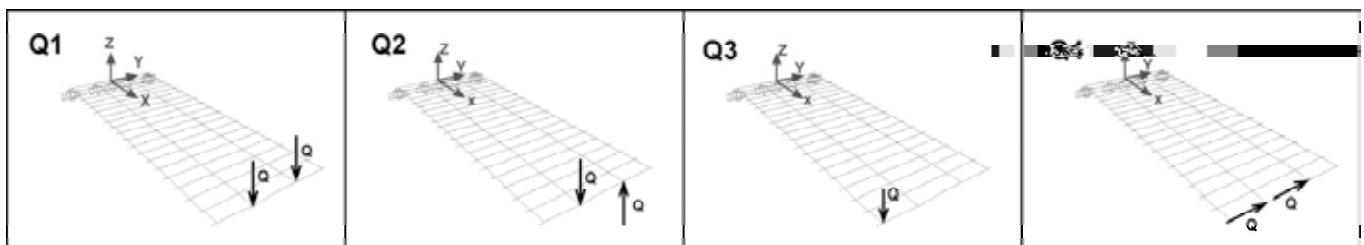


Figura 15. Cargas externas consideradas para la comparación de la respuesta de los modelos de tablero.

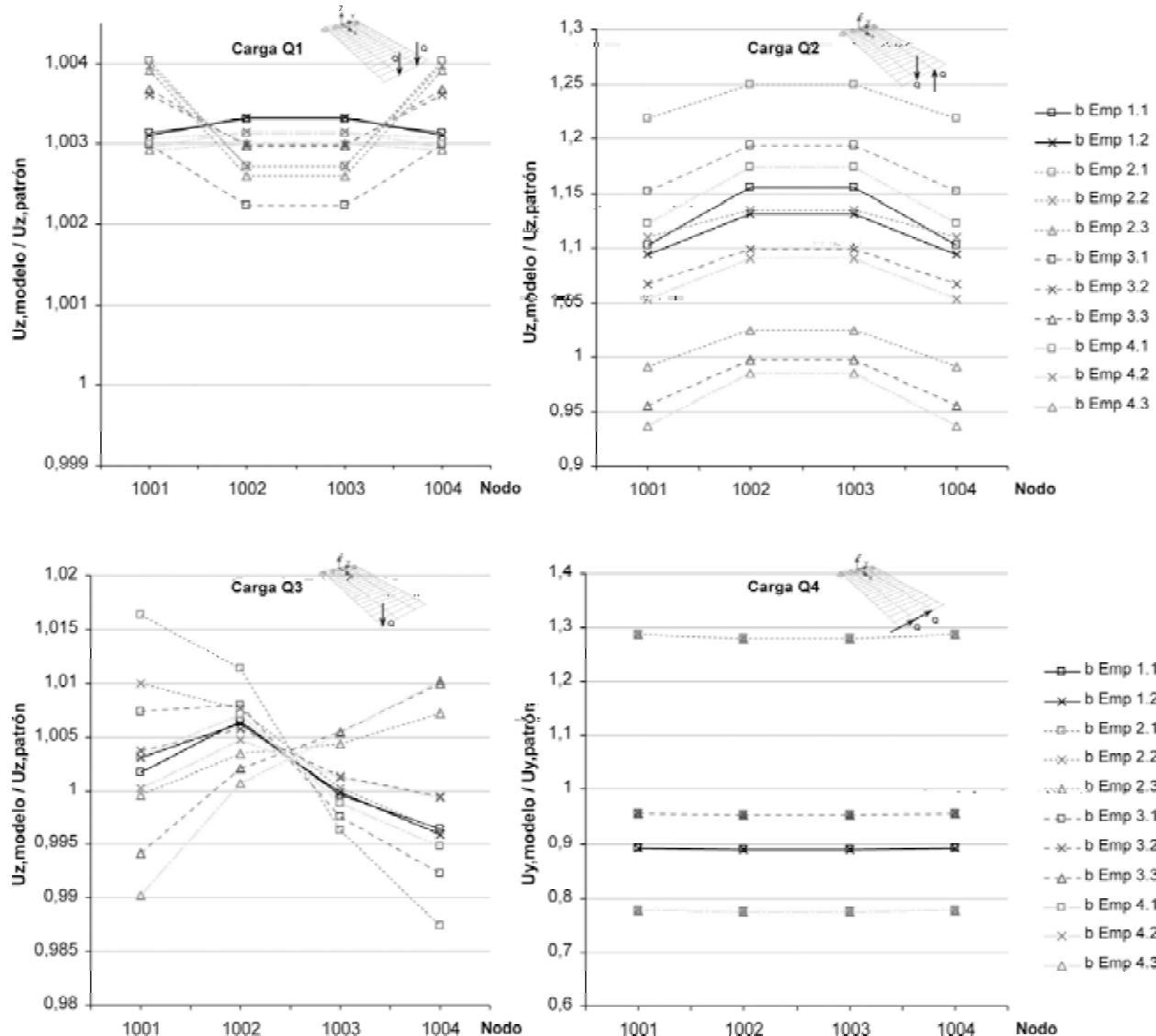


Figura 16. Tablero b. Desplazamientos de los nodos 1001-1004 bajo Q1, Q2, Q3 y Q4.

### 5.1.2. Comportamiento a Torsión

- En este caso los modelos analizados muestran un comportamiento sensiblemente heterogéneo muy determinado por el criterio de obtención de la inercia de torsión de las barras longitudinales y transversales y, en menor medida, por la distribución de inercias de flexión entre las barras longitudinales.
- En los tres tableros, los *Modelos de Emparrillado Plano* Emp i.3, en los que se emplea la *Inercia de Torsión*, calculada por integración mediante el método que se propone y describe en el punto 3.2.2, los desplazamientos obtenidos son sensiblemente más cercanos a los del *Modelo Patrón*.
- En cuanto a la forma en que se realizan los cortes longitudinales, cabe mencionar la mayor rigidez a torsión que muestran los modelos a medida que se concentra rigidez a flexión en las barras longitudinales exteriores.
- Con lo anterior, el *Modelo de Emparrillado Plano* Emp 3.3, es decir, con los cortes longitudinales equidistantes de las barras BL1 y BL2 y la *Inercia de Torsión* obtenida

por Integración, proporciona en los tres tipos de tableros el mejor comportamiento.

### 5.1.3. Comportamiento a Flexión según el Eje Y, Cortante y Torsión

La combinación flexión y cortante con torsión se ha estudiado mediante la posición Q3. Tras el análisis de la Figura 16 se pueden realizar las siguientes reflexiones:

- La gran dispersión que mostraban en su comportamiento a torsión los diferentes modelos se ve *enmascarada* y atenuada por los desplazamientos debidos a flexión al ser estos mucho mayores en magnitud que aquellos y más homogéneos para todos los modelos.
- El comportamiento de los *Modelos de Emparrillado Plano* trabajando por separado a flexión y cortante y a torsión se vuelve a poner de manifiesto bajo la acción de la posición Q3. Así, los mayores desplazamientos que, de forma generalizada, muestran los modelos frente a la flexión se ven acentuados o compensados según sea el comportamiento del modelo a torsión.

- Se vuelve a mostrar la importancia del criterio de obtención de la inercia de torsión de las barras agrupando los resultados de los modelos en los que se ha utilizado el mismo criterio.

#### 5.1.4. Comportamiento a Flexión según el Eje Z y Cortante según el Eje Y.

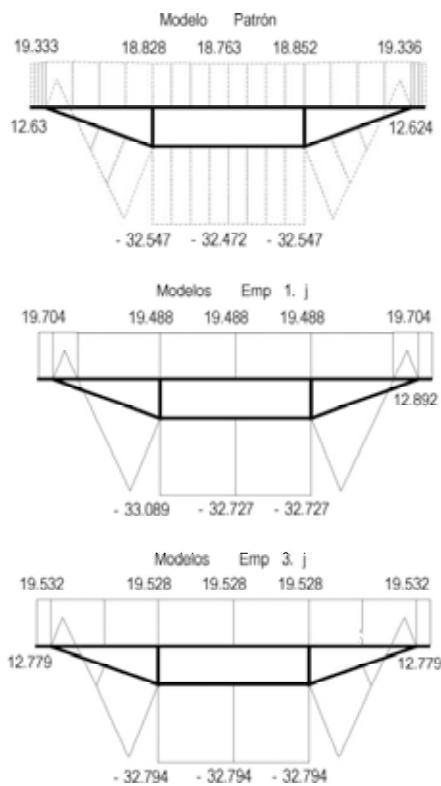
El estudio del comportamiento de los modelos sometidos a flexión sobre el Eje Z y cortante según el Eje Y se ha realizado mediante la posición Q4. De los resultados obtenidos se puede extraer que:

- Existe una gran dispersión del comportamiento de los diferentes modelos, siendo la forma en que se realiza el corte longitudinal y asignación de inercias a flexión y áreas entre las barras longitudinales lo único que determina el comportamiento del modelo.
- La rigidez del modelo aumenta a medida que se asigna más porción de tablero a las barras longitudinales exteriores.
- Los Modelos de Emparrillado Plano Emp 3.j, en los que el corte longitudinal se realiza de forma equidistante entre las barras exteriores BL1 y las interiores BL2, muestran el comportamiento más parecido al del *Modelo Patrón*, siendo en los tres tableros entre un 5% y 6% más rígidos que este.

### 5.2. Respuesta Estática. Tensiones

El cálculo de las tensiones en los *Modelos de Emparrillado Plano* se ha realizado utilizando la formulación siguiente:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad (30)$$



Los momentos de inercia y las distancias z e y se han calculado respecto al eje de la barra correspondiente del *Modelo de Emparrillado Plano*.

Al igual que en el caso de los desplazamientos, los resultados obtenidos para los tres tableros son muy similares desde el punto de vista cualitativo, por lo que, en esta ocasión, sólo se incluyen los correspondientes al tablero c. En las Figuras 17, 18 y 19 se muestran las tensiones normales, expresadas en MPa, en el contorno exterior del tablero de una sección situada en x=3,1 m. Para cada carga se han superpuesto los gráficos correspondientes a modelos con el mismo criterio de obtención de la inercia de torsión de las barras, observándose la coincidencia de los mismos y, por tanto, la nula influencia que ejerce de forma general este criterio sobre las tensiones normales calculadas.

#### 5.2.1. Comportamiento a Flexión sobre Eje Y y Cortante sobre Eje Z.

En la Figura 17 se indican las tensiones bajo la acción de la posición Q1, deduciéndose que:

- Todos los modelos aproximan muy bien el estado tensional causado por este tipo de cargas.
- La forma en que se realizan los cortes longitudinales carece de influencia sobre las tensiones obtenidas.

#### 5.2.2. Comportamiento a Flexión según el Eje Y, Cortante y Torsión.

- Todos los *Modelos de Emparrillado Plano* aproximan peor los resultados para este tipo de carga, ofreciendo valores mayores tanto en la zona de compresión como de

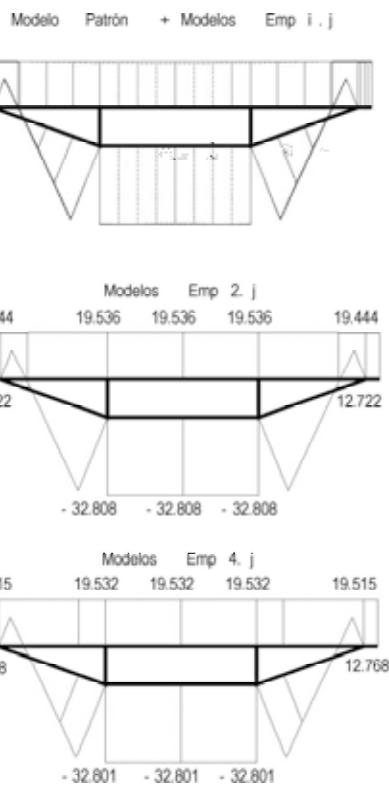


Figura 17. Tablero c. Tensiones normales en MPa en la sección x=3,1 m. bajo Q1.

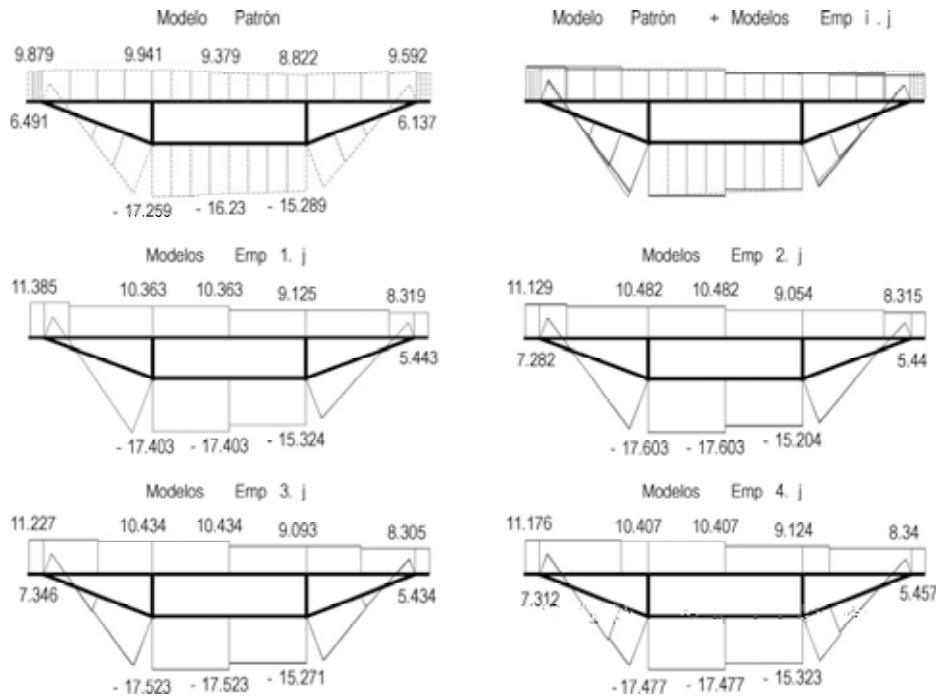


Figura 18. Tablero c. Tensiones normales en MPa en la sección x=3,1 m. bajo Q3.

tracción máximas, por lo que los resultados podrían ser utilizados para el dimensionamiento en E.L.U., teniendo siempre en consideración que las compresiones mínimas que ofrecen también son menores que las reales.

- La forma en que se distribuyen los cortes longitudinales en el tablero no influye sobre los resultados obtenidos.

#### 5.2.3. Comportamiento a Flexión según el Eje Z y Cortante según el Eje Y.

- Los resultados ofrecidos por los modelos tienen un error mayor para este tipo de carga, llegando a ser de cierta entidad para las tensiones máximas.

- Los modelos Emp 3.j, es decir, aquellos con los cortes longitudinales equidistantes de las barras, proporcionan una distribución de tensiones más uniforme, al tiempo que aproximan mejor las tensiones normales máximas que se producen en ambos bordes laterales del tablero. Sin embargo, estas tensiones máximas quedan del lado de la inseguridad.

#### 5.3. Respuesta Dinámica. Modos de Vibración

Para analizar el comportamiento dinámico de los modelos se han empleado los primeros modos de vibración, comparando los períodos de vibración de los mismos con los del *Modelo Patrón*. Las Tablas 3, 4 y 5 muestran la relación entre

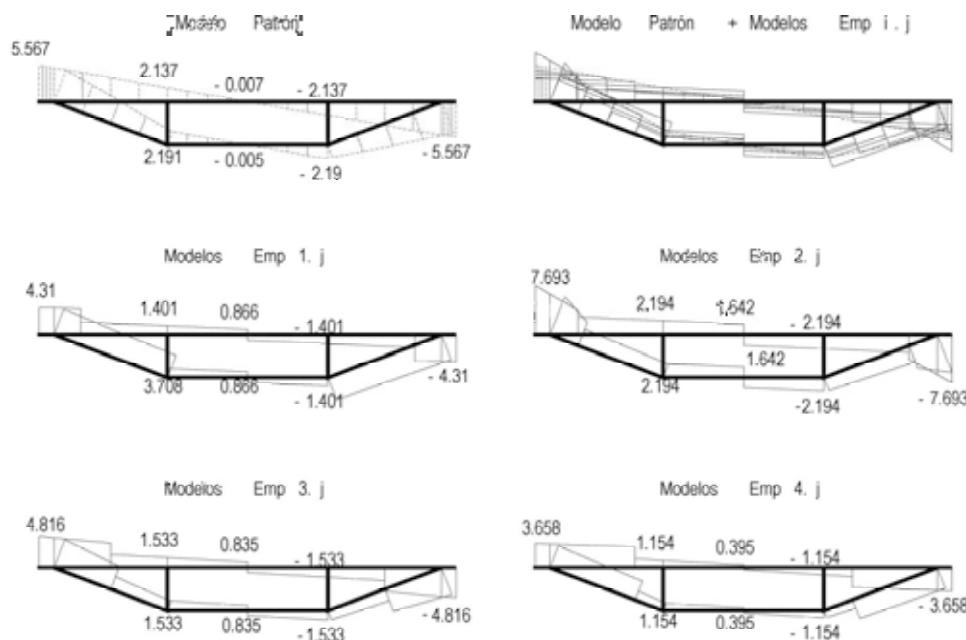


Figura 19. Tablero c. Tensiones normales en MPa en la sección x=3,1 m. bajo Q4.

los períodos de vibración de cada uno de los modelos con los del *Modelo Patrón*. En esta ocasión se incluyen los resultados de los tres tableros estudiados.

### 5.3.1. Modos de Vibración de Flexión en torno al Eje Y

De las Tablas 3, 4 y 5 se deduce que:

- Los *Modelos de Emparrillado Plano* tienen un comportamiento muy similar, siendo mínimo el error que cometen en el primer modo de vibración.

- Tanto la distribución de los cortes longitudinales como el criterio de cálculo de la inercia de torsión de las barras carece de influencia sobre el resultado.
- El período de vibración ligeramente mayor que el del *Modelo Patrón*, que muestran los modelos correspondientes a los tableros c y d, está de acuerdo con su respuesta estática: ligeramente más flexible.
- En todos los modelos el error es creciente en el segundo y tercer modo de vibración.

**Tabla 3. Tablero b. Relación de los períodos de vibración Tmodelo /Tpatrón**

	Modelo Emparrillado										
	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3
Flexión Y	1,0006	1,0006	1,0005	1,0005	1,0004	1,0000	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006	1,0005
	0,9599	0,9601	0,9588	0,9588	0,9587	0,9571	0,9605	0,9604	0,9619	0,9621	0,9619
	0,9084	0,9094	0,9067	0,9069	0,9067	0,9103	0,9172	0,9163	0,9255	0,9277	0,9263
Torsión	1,1126	1,1128	0,9826	0,9425	0,8942	1,1037	1,0688	1,0157	1,2129	1,1839	1,1212
	1,0885	1,0917	0,9862	0,9532	0,9154	1,0945	1,0743	1,0310	1,1946	1,1786	1,1306
	1,0244	1,0327	0,9620	0,9417	0,9150	1,0573	1,0575	1,0254	1,1396	1,1419	1,1098
Flexión Z	0,9690	0,9690	1,1508	1,1508	1,1508	1,0006	1,0006	1,0006	0,9098	0,9098	0,9098
	1,0676	1,0676	1,2049	1,2049	1,2049	1,0881	1,1220	1,0980	1,0343	1,0343	1,0343

**Tabla 4. Tablero c. Relación de los períodos de vibración Tmodelo /Tpatrón**

	Modelo Emparrillado										
	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3
Flexión Y	1,0035	1,0036	1,0033	1,0033	1,0033	1,0033	1,0033	1,0033	1,0033	1,0036	1,0033
	0,9630	0,9632	0,9615	0,9616	0,9616	0,9620	0,9620	0,9620	0,9626	0,9630	0,9626
	0,9073	0,9079	0,9054	0,9054	0,9053	0,9083	0,9085	0,9083	0,9118	0,9124	0,9118
Torsión	1,0980	1,0951	0,9862	0,9397	0,8911	1,0960	1,0511	1,0000	1,1932	1,1551	1,0956
	1,0592	1,0553	0,9742	0,9340	0,8955	1,0667	1,0301	0,9888	1,1516	1,1179	1,0726
	0,9745	0,9711	0,9247	0,8954	0,8693	0,9955	0,9719	0,9431	1,0606	1,0380	1,0090
Flexión Z	0,9736	0,9736	1,1499	1,1499	1,1499	1,0041	1,0041	1,0041	0,9152	0,9154	0,9152
	1,0653	1,0653	1,2002	1,2002	1,2002	1,0854	1,0854	1,0854	1,0318	1,0320	1,0317

**Tabla 5. Tablero d. Relación de los períodos de vibración Tmodelo /Tpatrón**

	Modelo Emparrillado										
	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3
Flexión Y	1,0038	1,0039	1,0032	1,0032	1,0032	1,0032	1,0033	1,0032	1,0028	1,0028	1,0028
	0,9694	0,9697	0,9666	0,9666	0,9666	0,967	0,9671	0,967	0,9671	0,9671	0,9671
	0,9087	0,9092	0,9052	0,9052	0,9052	0,9072	0,9073	0,9072	0,9089	0,9092	0,909
Torsión	1,156	1,1544	1,0302	0,9833	0,9378	1,1331	1,0862	1,0414	1,2258	1,1856	1,1339
	1,0507	1,0475	0,9657	0,9291	0,898	1,0424	1,0071	0,976	1,1164	1,083	1,0497
	0,93	0,9267	0,8875	0,8628	0,8446	0,9388	0,9168	0,8983	0,9897	0,9681	0,9503
Flexión Z	0,9129	0,9129	1,1053	1,1053	1,1053	0,964	0,964	0,964	0,8785	0,8785	0,8785
	1,0474	1,0474	1,201	1,201	1,2009	1,0821	1,0821	1,0821	1,0274	1,0274	1,0274

**Tabla 6. Resumen de la influencia de los dos criterios estudiados sobre el comportamiento del modelo y criterio que ofrece la mejor respuesta**

		Disposición Cortes Longitudinales		Inercia de Torsión de las Barras	
		Influencia	Mejor criterio	Influencia	Mejor criterio
Flexión Y	Deformaciones	-		-	
	Tensiones	-		-	
	Modos Vibración	-		-	
Flexión Z	Deformaciones	***	Cortes Equidistantes	-	
	Tensiones	***		-	
	Modos Vibración	***		-	
Torsión	Deformaciones	*	Cortes Equidistantes	***	$J_{\text{integrada}}$
	Modos Vibración	**		**	
*** Grande   ** Media   * Pequeña – Nula					

### 5.3.2. Modos de Vibración de Torsión

- El comportamiento de los diferentes *Modelos de Emparrillado Plano* está muy disperso y es claramente dependiente de la distribución transversal de las masas, áreas e inercias, aumentando los períodos de vibración a medida que se concentra más masa e inercia sobre las barras exteriores. Así, los modelos Emp 4.j tienen modos de vibración de mayor período, mientras que en los Emp 2.j ocurre lo contrario.
- El criterio de obtención de la inercia de torsión de las barras también influye en los resultados obtenidos aunque en menor medida.
- El criterio para calcular la inercia de torsión que se propone,  $J_{\text{integrada}}$  proporciona modelos más rígidos, mientras que si se utiliza el reparto de la inercia  $J_T$  del tablero se obtienen los modelos más flexibles.
- Los *Modelos de Emparrillado Plano*, Emp 3.3 y Emp 2.1, para los tres tipos de tablero son los que menor error cometan en el conjunto de los tres primeros modos observados.

### 5.3.3. Modos de Vibración de Flexión en torno al Eje Z

- El comportamiento de los *Modelos de Emparrillado Plano* es claramente dependiente de la distribución transversal de las masas, áreas e inercias, agrupando los errores cometidos por los modelos con la misma distribución de cortes longitudinales.
- Los *Modelos de Emparrillado Plano* Emp 3.j, es decir, con los cortes longitudinales equidistantes de las barras BL1 y BL2, proporcionan la mejor aproximación cometiendo para el primer modo de vibración un error mínimo en los tableros b y c y de un -3,6% en el tablero d.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha realizado un estudio sobre el comportamiento tanto estático como dinámico de 33 *Modelos de Emparrillado Plano* de tableros tricelulares. Estos modelos se elaboraron con la combinación de dos criterios: la forma en que se divide el tablero y se asigna cada porción al correspondiente ner-

vio longitudinal y la obtención de la inercia de torsión de las barras. El objetivo del estudio ha sido establecer la influencia que ejercen dichos criterios sobre la respuesta del modelo y, en consecuencia, determinar aquéllos que hacen que el modelo reproduzca de la forma más precisa posible el comportamiento real del tablero. Los resultados obtenidos se han resumido en la Tabla 6. En ella se muestra de manera compacta y resumida la influencia de la disposición de los cortes longitudinales y de la forma de calcular las inercias de torsión de las barras. También se indican los criterios que mejor reproducen cada comportamiento del tablero: flexiones sobre los Ejes Y y Z y torsión.

Se puede concluir finalmente que:

- La formulación propuesta para el cálculo de la inercia de torsión de las barras del emparrillado proporciona unos resultados sensiblemente mejores en el comportamiento a torsión del tablero, tanto de forma estática en deformaciones como dinámica.
- La mejor estrategia a seguir para la división longitudinal del tablero, y la asignación de las áreas, inercias y masas a las barras longitudinales correspondientes, es la disposición de los cortes de forma equidistante de las barras longitudinales exteriores y las adyacentes.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Junta de Comunidades de Castilla La Mancha la financiación recibida a través del proyecto de investigación PBI-05-031.

## REFERENCIAS

- [Hambly, 1976] Hambly, E. C. (1976). *Bridge Deck Behaviour*. Chapman and Hall, 1<sup>a</sup> edition.
- [Manterola, 2000] Manterola, J. (2000). *Puentes*, volumen 5. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.
- [Walther et al, 1999] R. Walther, B. Houriet, W. I., P. M., J. F. K. (1999). *Cable Stayed Bridges*. Thomas Telford Publishing, 2 edition.

# RESUMEN DE COMISIONES Y GRUPOS DE TRABAJO DE ACHE

MAYO 2006

Comisión	Grupo de trabajo	Coordinador
<b>C1 Proyecto</b> Presidente: Juan Carlos Arroyo Portero Secretario: Ángel Vidal Vacas	GT1/1 Análisis de estados límite en forjados compuestos de hormigón estructural	Manuel Burón Maestro
	GT1/2 Representación gráfica de estructuras de hormigón	Roberto Brufau Niubó
	GT1/3 Proyectos de estructuras de hormigón en zona sísmica	José Romo Martín
	GT1/4 Adherencia en elementos prefabricados con armadura pretesa	Fernando Martínez Abella
	GT1/5 .Proyecto de Edificios de gran altura	Jesús Gómez Hermoso
<b>C2 Materiales</b> Presidente: David Fernández Ordóñez Hernández	GT2/1 Armaduras activas	José Quereda Laviña
	GT2/3 Aditivos químicos para el hormigón estructural	Joana Roncero
	GT2/4 Estadística aplicada. Modelos tecnométricos	Juan Carlos López Agüí
	GT2/5 Hormigón reciclado	Pilar Alaejos Gutiérrez
<b>C3 Ejecución</b> Presidente: Manuel Burón Maestro Secretario: José A. del Rosario	GT3/2 Hormigonado no convencional	Fernando Hué García
	GT 3/4 Seguridad y Salud	Manuel Burón Maestro
	GT 3/5 Andamios y Apeos	Manuel Burón Maestro
	GT 3/6 Edificios de altura media	Jesús Gómez Hermoso
	GT 3/7 Muros-Pantalla	José García de Miguel
<b>C4 Uso y mantenimiento</b> Presidente: Javier León González Secretario: Ariel Dante Espeche	GT4/1 Sistemas de protección para garantizar la durabilidad	Marta García Guillot
	GT4/2 Demoliciones	Agustín Prudencio Díaz
<b>C5 Estructuras y elementos estructurales</b> Presidente: José María Arrieta Torrealba Secretario: Concepción Velando Cabañas	GT5/1 Puentes de ferrocarril	Ignacio Granell Vicent
	GT5/2 Resistencia a cortante en elementos sin armadura transversal	Alejandro Pérez Caldentey
	GT 5/4 Estudio normativo sobre el proyecto de pilas esbeltas	Juan Luis Belloc Thomas
	GT 5/5 Diseño de estructuras de hormigón frente a los efectos de las deformaciones impuestas	Alejandro Pérez Caldentey
	GT 5/6 Forjados mixtos con chapa nervada (9)	Guillermo Corres Peiretti
<b>GGT Tirantes</b>		
Coordinador: Florencio del Pozo Vindel Secretario: José E. Herrero Benítez		

## Jornada sobre la nueva terminal T4 del Aeropuerto de Barajas



estructura y ejecución, son los motivos que justificaban la celebración de la Jornada con la intención de dar a conocer los trabajos llevados a cabo en esta obra, no sólo a nuestros asociados, sino a la comunidad técnica en general.

Esta Nueva Área Terminal que, sin duda, está llamada a convertirse en la puerta de entrada por la que accedan a nuestro país millones de visitantes, forma parte del Plan Director para el Aeropuerto de Madrid/Barajas que ha desarrollado Aena. Este Plan engloba, además de la obra objeto de la Jornada, un conjunto importante de infraestructuras, que incluye nuevas pistas y plataformas de estacionamiento, nuevos accesos y viales internos, centrales eléctricas y de cogeneración, etc., para dotar al Aeropuerto de una capacidad de 70 millones de pasajeros al año y convertirlo en un aeropuerto de referencia, especialmente en las conexiones entre Europa y América.

La Nueva Área Terminal se organiza en torno a tres edificios: un **Aparcamiento** de vehículos con más de 300.000 m<sup>2</sup> para albergar 9000 plazas, el **Edificio Terminal** y el **Edificio Satélite**, que suman 800.000 m<sup>2</sup> construidos adicionales.

El pasado 19 de abril de 2006 se desarrolló la Jornada Monográfica sobre la Nueva Área Terminal del Aeropuerto de Barajas, que organizó Ache con la colaboración de AENA, y el patrocinio de las empresas encargadas de la construcción de la obra: Acciona Infraestructuras, Dragados, FCC Construcción, Ferrovial-Agromán, OHL y Sacyr.

La celebración de esta Jornada monográfica fue aprobada por el Consejo de Ache, siguiendo la tradición que inauguró el año 2004 la Jornada sobre el Dique de Mónaco. Las características singulares de la Nueva Área Terminal del Aeropuerto de Barajas, que está considerada como la mayor obra que se ha edificado recientemente en Europa, su excepcional concepción arquitectónica, su funcionalidad, su dimensión y la presencia de aspectos destacados en su



Caminos de la UPM. Luis Viñuela Rueda y José Martínez Salcedo ofrecieron la segunda conferencia de esta sesión sobre la estructura metálica de cubierta y fachadas tensadas del nuevo Edificio Terminal, como autores del proyecto de construcción de las mismas.

La Jornada se estructuró en tres sesiones: una de apertura y dos sesiones técnicas. En la sesión de apertura, José M<sup>a</sup> de Villar Luengo, Presidente de Ache, inauguró la Jornada y dio paso a José Manuel Hesse Martín, Director del Plan Barajas, que expuso el planteamiento aeroportuario de la Nueva Área Terminal, y a Carlos Lamela y de Vargas, del Estudio Lamela, que relató los conceptos arquitectónicos que guiaron el proyecto de la Nueva Área Terminal.

En la primera sesión técnica se incluyeron dos conferencias relativas al proyecto estructural de los nuevos edificios, y estuvo presidida por el Presidente del Comité de Eventos Técnicos de Ache, Luis M. Viartola Laborda. La primera exposición se dedicó a la concepción estructural y a las obras de hormigón, y corrió a cargo de Hugo Corres Peiretti, Catedrático de hormigón estructural de la Escuela de



mismo. La tercera intervención sobre este edificio fue de Manuel Gutiérrez Bueno de Ferrovial-Agromán, y Jefe del Departamento de Estructuras de Oficina Técnica de la obra, que contó los aspectos relacionados con el seguimiento técnico de la ejecución de la estructura; le acompañó José M. Peña para explicar aspectos más específicos relativos al proceso de tensado de la estructura de fachada. La cuarta y última conferencia relativa al Edificio Terminal la dio Diego García Archilla, de Sacyr, que fue Jefe de Área dentro la UTE constructora de este edificio, y habló fundamentalmente sobre la ejecución de la cubierta. Alguno de los aspectos destacados del Aparcamiento de la Nueva Área Terminal los expuso su Jefe de Obra, Alberto Rodríguez Calle, de Dragados, que se centró en la detallada planificación de los ciclos constructivos, en aspectos técnicos derivados de la gran distancia entre las juntas de dilatación, y en la novedosa cubierta ecológica del edificio. Por último, y para terminar la sesión, la sexta conferencia se dedicó al tercero de los edificios integrantes de la Nueva Área Terminal: el Edificio Satélite. Luis Paz, de OHL, y Jefe de Producción de este edificio, hizo una descripción del mismo prestando especial atención a los aspectos que lo diferencian del Edificio Terminal.



Por último, la tercera sesión, se dedicó a la ejecución de la obra. Intervinieron en esta sesión los actores directamente relacionados con la ejecución, bajo la presidencia del Director de Obra de la Nueva Área Terminal, Jesús Mendiluce Lacalle. Tras una introducción de la sesión a cargo de su presidente, participó un representante de cada una de las seis empresas que llevaron a cabo la construcción de la obra. Del Edificio Terminal se expusieron cuatro conferencias. La primera se dedicó a la relación entre el proyecto, la ingeniería de detalle y la ejecución, y la impartió Jesús Gómez Hermoso, de FCC Construcción, como Jefe de la Oficina Técnica del Terminal Barajas UTE. Le siguió en el turno de exposición José Mª Núñez Araque, de Acciona Infraestructuras, que habló sobre la organización y planificación de la obra del Edificio Terminal, como Jefe de Obra del



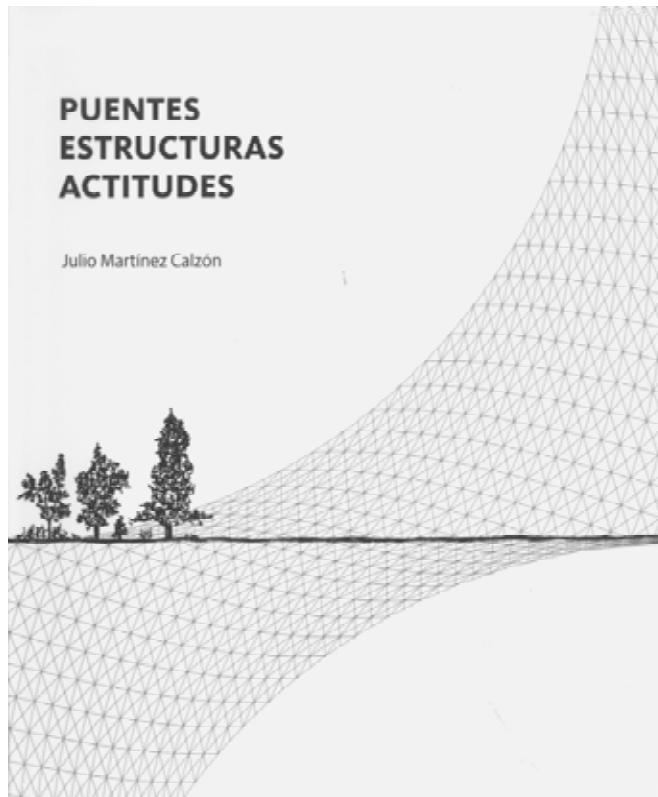
Terminada esta tercera sesión, su presidente Jesús Mendiluce dio por clausurada la jornada.

La organización de la Jornada la realizó, siguiendo la costumbre en Ache, un comité específico dependiente del Comité de Eventos Técnicos. Este Comité Organizador contó con la Presidencia de Honor de D. Manuel Azuaga Moreno, Presidente de Aena. El resto de componentes fueron José Manuel Hesse Martín y Jesús Mendiluce Lacalle, de Aena, y Luis M. Viartola Laborda, Conchita Lucas Serrano, Jesús Gómez Hermoso, Juan Carlos López Agüí, Luis Ortega Basagoiti y Santiago Pérez-Fadón Martínez, de Ache, que contaron con la ayuda de Beatriz Gutiérrez Matínez de la Casa. También queremos destacar la colaboración de las empresas patrocinadoras de la Jornada, y transmitir a todos nuestro agradecimiento por ello.

La Jornada se celebró en el Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, y el éxito de asistencia, con más de 240 inscripciones, es reflejo del interés que despierta esta obra. Como documentación, se repartió entre los asistentes el número monográfico que nuestra revista Hormigón y Acero dedicó a la Nueva Área Terminal del Aeropuerto de Barajas.

Para nuestra Asociación, que persigue el fomento de los progresos técnicos y científicos relacionados con la ingeniería estructural, ha sido una oportunidad excepcional el poder colaborar con Aena en la realización de esta Jornada Monográfica, y de esta forma contribuir a divulgar los aspectos técnicos de esta gran obra que es la Nueva Área Terminal del Aeropuerto de Barajas.

# Puentes, estructuras, actitudes



**Estructuras.** Se refiere a las estructuras de edificios de características muy diferentes, realizadas en estrecha colaboración con los arquitectos que los proyectaron. Esta parte se centra en la búsqueda de un sistema resistente adaptado, de la mejor forma posible, a un cierto planteamiento arquitectónico.



por las vivencias, ya que está ampliamente nutrido por las experiencias emocionales y sensibles de la actividad técnica que se efectúa durante el proyecto y construcción de las obras.

El conjunto de la obra manifiesta, de forma enérgica, un discurso técnico-humanístico, que pone todo su énfasis en vincular dos culturas, la ciencia y el arte. Técnica, estética y construcción se entrelazan en esta magnífica publicación.

Este libro, ubicado entre la autobiografía y la memoria profesional, ofrece, en primera persona, una visión de la larga y fecunda trayectoria de un ingeniero de caminos, compañero y maestro, especializado en el proyecto de grandes puentes y estructuras singulares de edificios.

La obra se articula en tres apartados: Puentes, Estructuras y Actitudes, con el propósito de definir, con la mayor nitidez posible, los conceptos y criterios que dieron lugar a las soluciones empleadas en las diferentes obras y realizaciones que se exponen.

**Puentes.** Describe los principales puentes proyectados y construidos, expuestos en orden cronológico, aunque divididos en dos conjuntos: en el primero nos presenta las realizaciones que considera de mayor relevancia en el conjunto de su obra; en el segundo ha incluido otros casos que considera interesantes para completar una visión general.



**Actitudes** Este apartado, absolutamente atípico, es un reflejo de las líneas de pensamiento y sentimiento del autor en el ámbito personal. Su espíritu humanista determina muchos de los aspectos que van configurando el diseño en su fase inicial, cuando aún no se ha plasmado en una forma y se encuentra en un periodo conceptual muy lúbil. Por otra parte, dicho espíritu humanístico está intensamente influido por el pensamiento técnico; y no sólo por el pensamiento, sino también



## Situación actual de los Eurocódigos estructurales

Hace varios años se comenzó a realizar la conversión de los Eurocódigos Estructurales, de normas experimentales ENV a normas europeas EN, dentro del Comité Europeo de Normalización CEN.

La tarea consistía en la modificación de las versiones ENV de los Eurocódigos para tener en cuenta, por un lado, los comentarios enviados por los diversos países y, por otro, el avance del estado del conocimiento y de las prácticas constructivas durante estos últimos años. El resultado ha sido una modificación de bastante profundidad, tanto en el contenido de los documentos como en su organización.

En la tabla adjunta se incluye una relación de estos Eurocódigos Estructurales, indicando para cada uno de ellos las partes de que está compuesto y la disponibilidad de las versiones en inglés y castellano, según información facilitada por AENOR.

<b>EUROCÓDIGO 0: Bases de cálculo de estructuras</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1990	Bases de cálculo de estructuras	X	X
EN 1990/A1	Anejo A2. Aplicación a Puentes	X	

<b>EUROCÓDIGO 1: Acciones en estructuras</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1991-1-1	Acciones generales. Pesos específicos, pesos propios y sobrecargas de uso en edificios.	X	X
EN 1991-1-2	Acciones generales. Acciones en estructuras expuestas al fuego.	X	X
EN 1991-1-3	Acciones generales. Cargas de nieve	X	X
EN 1991-1-4	Acciones generales. Acciones del viento	X	
EN 1991-1-5	Acciones generales. Acciones térmicas	X	X
EN 1991-1-6	Acciones generales. Acciones durante la ejecución	X	
EN 1991-1-7	Acciones generales. Acciones accidentales	próximamente	
EN 1991-2	Cargas de tráfico en puentes	X	X
EN 1991-3	Acciones inducidas por grúas y maquinaria	próximamente	
EN 1991-4	Acciones en silos y depósitos	próximamente	

<b>EUROCÓDIGO 2: Proyecto de estructuras de hormigón</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1992-1-1	Reglas generales y reglas para edificación.	X	
EN 1992-1-2	Reglas generales. Estructuras expuestas al fuego	X	
EN 1992-2	Puentes de hormigón. Reglas de diseño y detalles	X	
EN 1992-3	Depósitos y estructuras de contención.	próximamente	

<b>EUROCÓDIGO 3: Proyecto de estructuras de acero</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1993-1-1	Reglas generales y reglas para edificios	X	
EN 1993-1-2	Estructuras expuestas al fuego	X	
EN 1993-1-3	Perfiles y chapas de paredes delgadas conformadas en frío	próximamente	
EN 1993-1-4	Aceros inoxidables	próximamente	
EN 1993-1-5	Placas planas cargadas en su plano	próximamente	
EN 1993-1-6	Láminas		
EN 1993-1-7	Placas planas cargadas transversalmente		
EN 1993-1-8	Uniones	X	
EN 1993-1-9	Fatiga	X	
EN 1993-1-10	Tenacidad de fractura y resistencia transversal	X	

<b>EUROCÓDIGO 3: Proyecto de estructuras de acero (Continuación)</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1993-1-11	Cables y tirantes	próximamente	
EN 1993-1-12	Reglas adicionales para la aplicación de la norma EN 1993 hasta aceros de grado S700		
EN 1993-2	Puentes	próximamente	
EN 1993-3-1	Torres y mástiles	próximamente	
EN 1993-3-2	Chimeneas	próximamente	
EN 1993-4-1	Silos		
EN 1993-4-2	Depósitos		
EN 1993-4-3	Conducciones		
EN 1993-5	Pilotes y tablestacas		
EN 1993-6	Vigas carril		

<b>EUROCÓDIGO 4: Proyecto de estructuras mixtas de acero y hormigón</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1994-1-1	Reglas generales y reglas para edificación	X	
EN 1994-1-2	Reglas generales. Estructuras expuestas al fuego	X	
EN 1994-2	Reglas generales y reglas para puentes	X	

<b>EUROCÓDIGO 5: Proyecto de estructuras de madera</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1995-1-1	Reglas generales y reglas para edificación	X	
EN 1995-1-2	Reglas generales. Estructuras expuestas al fuego	X	
EN 1995-2	Puentes	X	

<b>EUROCÓDIGO 6: Proyecto de estructuras de fábrica (albañilería)</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1996-1-1	Reglas generales para estructuras de fábrica y fábrica armada	X	
EN 1996-1-2	Reglas generales. Estructuras expuestas al fuego	X	
EN 1996-2	Consideraciones de proyecto, selección de materiales y ejecución de la fábrica	X	
EN 1996-3	Métodos de cálculo simplificado para estructuras de fábrica sin armar.	X	

<b>EUROCÓDIGO 7: Proyecto geotécnico</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1997-1	Reglas generales	X	
EN 1997-2	Investigación del suelo y ensayos	X	

<b>EUROCÓDIGO 8: Proyecto para resistencia al sismo de las estructuras</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1998-1	Reglas generales, acciones de sismo y reglas para edificación	X	
EN 1998-2	Puentes	X	
EN 1998-3	Evaluación y rehabilitación de edificios	X	
EN 1998-4	Silos, depósitos y tuberías		
EN 1998-5	Cimentaciones, estructuras de contención y aspectos geotécnicos	X	
EN 1998-6	Torres, mástiles y chimeneas	X	

<b>EUROCÓDIGO 9: Proyectos de estructuras de aleación de aluminio</b>		<b>Inglés</b>	<b>Castellano</b>
EN 1999-1-1	Reglas generales		
EN 1999-1-2	Estructuras expuestas al fuego		
EN 1999-1-3	Estructuras sometidas a fatiga		
EN 1999-1-4	Condiciones para láminas conformadas en frío		
EN 1999-1-5	Estructuras laminares		



## PETICIÓN DE PUBLICACIONES

Dirección de la Secretaría de ACHE:

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos; Laboratorio de Estructuras  
Avda. Profesor Aranguren, s/n 28040 Madrid - Tf: 91 336 66 98 - Fax: 91 336 67 02 NIF: G28813442  
info@e-ache.net

Complete los datos requeridos a continuación. Luego rellene el número de unidades de las publicaciones que desee solicitar.  
Recuerde que NO SE REALIZARÁ LA COMPRA Y EL ENVÍO hasta no haberse procedido al pago de la forma elegida en el formulario.

### Datos de Envío

Nombre completo ..... Empresa.....

Dirección ..... Población ..... C.P. ....

Provincia ..... Email ..... Fax ..... Teléfono .....

### Datos de Facturación

Nombre completo ..... Empresa..... CIF/NIF .....

Dirección ..... Población ..... C.P. ....

Provincia ..... Email ..... Fax ..... Teléfono .....

¿ Es miembro de ACHE ?

Forma de pago:

- Cheque nominal a nombre de ACHE
- Transferencia bancaria a: Banco Español de Crédito, c.c. 0030-1125-19-0001560271

### LISTA DE PRECIOS

#### LIBROS

Código	Título	PVP	PV Miembros	Pedido en Unidades
B-1	Evaluación de la capacidad portante de estructuras mediante pruebas de carga	4,81	3,61	.....
B-2	Inyección de fisuras con formulaciones de resinas epoxídicas	6,01	4,51	.....
B-4	Morteros de reparación	6,01	4,51	.....
B-5	Modelos de análisis de estructuras de hormigón	13,22	9,22	.....
B-7	Recomendaciones CEB para empalmes mecánicos de armaduras	12,02	9,02	.....
B-8	Tecnología del hormigón Código MC-90 e instrucciones EH-91	12,02	9,02	.....
B-9	Recomendaciones CEB para separadores, calzos y atado de armaduras	6,01	4,51	.....
B-10	Encuesta sobre patología de estructuras de hormigón	9,02	6,77	.....
B-11	Recomendaciones CEB para uniones soldadas en barras de armado	6,01	4,51	.....
B-12	Durabilidad de estructuras de hormigón. Guía de diseño CEB	24,04	18,03	.....
B-13	Consideraciones de seguridad para variables hidráulicas	7,81	5,86	.....
B-14	Reparación y refuerzo de estructuras de hormigón. Guía FIB de buena práctica	12,02	9,02	.....
B-15	Comentarios a las modificaciones de la EH-91 relativas a la calidad de hormigones	12,02	9,02	.....
B-16	Estado límite de fisuración en el hormigón estructural	9,62	7,21	.....
B-17	Cálculo simplificado de flechas en estructuras de edificación	9,62	7,21	.....
B-18	El fenómeno de tensión-stiffening en las estructuras mixtas	6,01	4,51	.....
B-19	Propuesta de Documento Nacional de Aplicación del Eurocódigo 4. Estructuras mixtas. Parte 1.1	3,01	2,25	.....
B-20	Hormigón de alta resistencia. Fabricación y puesta en obra	12,02	9,02	.....
B-21	Demolición y reutilización de estructuras de hormigón	12,02	9,02	.....
B-22	Caracterización de las propiedades diferidas del hormigón y su incidencia estructural	12,02	9,02	.....
B-23	Ánalisis de estructuras mixtas en ordenador	9,02	6,76	.....
E-1	Recomendaciones para la conservación de puentes pretensados HP 7-92	12,02	9,02	.....
E-4	Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural	60,10	45,08	.....
E-5	Recomendaciones para el proyecto y construcción de losas postesadas con tendones no adherentes HP-9-96	25,24	18,93	.....
E-6	Proyecto y construcción de puentes y estructuras con pretensado exterior HP 10-96	24,04	18,03	.....
E-8	Problemas de vibraciones en estructuras	30,05	24,04	.....
E-9	Hormigones de ejecución especial (seis tipos)	24,00	20,00	.....
E-10	Recomendaciones para el Proyecto, ejecución y montaje de elementos prefabricados	55,00	44,00	.....
	Comunicaciones al 1º Congreso ACHE 1999 (Vol. 1,2,3)	62,51	56,25	.....
	Comunicaciones II Congreso ACHE 2002. Puentes y Estructuras de Edificación (4 volúmenes + CD)	112,00	75,00	.....

Código	Título	PVP	PV Miembros	Pedido en Unidades
G-1 3ª Edición	Recomendaciones para el proyecto, construcción y control de anclajes al terreno	16,25	13,00	.....
	Hormigón pretensado. Realizaciones españolas. Tomo 1	12,02	9,02	.....
	Hormigón pretensado. Realizaciones españolas. Tomo 2	12,02	9,02	.....
	Hormigón pretensado. Realizaciones españolas. Tomo 3	12,02	9,02	.....
	Hormigón pretensado. Realizaciones españolas. Tomo 4	24,04	18,03	.....
	Estructuras pretensadas en España 1994 -1997	36,06	30,05	.....
	Estructuras de edificación prefabricadas	39,67	29,75	.....
	Comunicaciones presentadas a las Jornadas sobre El Estado del Arte en Reparación y Refuerzo de Estructuras de Hormigón	24,04	18,03	.....
	Primeras Jornadas de ACHE sobre la enseñanza del hormigón estructural	30,05	2,54	.....
	Patología y control de calidad del hormigón	28,25	16,23	.....
	Comunicaciones Primer Congreso Nacional de Prefabricación (Libro+CD)	60,00	45,00	.....
	Comunicaciones "Jornada Comportamiento de Estructuras de Hormigón en zonas Sísmicas Madrid 5/6 Mayo 2004"	50,00	37,50	.....
	Comunicaciones "Seminario Proyecto de Estructuras de Hormigón de Alta Resistencia Madrid 30 Noviembre 2004"	50,00	37,50	.....
	Comunicaciones III Congreso ACHE 2005. Puentes y Estructuras de Edificación (5 volúmenes + CD)	120,00	90,00	.....
M-1	Armaduras pasivas en la EHE	19,83	15,03	.....
M-2	Manual de tecnología del hormigón reforzado con fibras de acero	19,83	15,03	.....
M-3	Principios generales para el proyecto de detalles de armado	19,83	15,03	.....
M-4	Manual de ejemplos de aplicación a la EHE a la edificación	27,05	21,64	.....
M-5	Conceptos de aseguramiento de la calidad aplicados al control de recepción del hormigón estructural adaptado a la EHE	19,83	15,03	.....
M-6	Método de Bielas y Tirantes	25,00	20,00	.....
M-7	Control estadístico del hormigón estructural	35,00	30,00	.....
M-8	Recomendaciones para el proyecto de estructuras de hormigón de alta resistencia	25,00	20,00	.....
M-9	Pruebas de Carga de Estructuras	25,00	20,00	.....
M-10	Comprobación de un tablero mixto	25,63	20,50	.....
<b>TESIS DOCTORALES</b>				
	Reparación de elementos lineales de hormigón armado. Comportamiento en servicio - Manuel Octavio Valcuende Payá	18,03	9,02	.....
	Comportamiento en servicio del hormigón estructural. Estudio teórico y experimental - Alejandro Pérez Caldentey	24,04	12,02	.....
	El efecto del tamaño y mecanismos de rotura en el ensayo de compresión diametral - Claudio Rocco	30,05	15,03	.....
	Influencia del tamaño y de la adherencia en la armadura mínima de vigas en flexión - Gonzalo Ruiz López	30,05	15,03	.....
	Análisis acoplado de los fenómenos de fluencia, retracción y fisuración y efectos de segundo orden en estructuras de hormigón armado - José Antonio Martínez	30,05	15,03	.....
	Ánálisis técnico-económico de la influencia que presenta el empleo de diferentes materiales y tipologías estructurales en el proyecto de estructuras de edificios - Jesús Gómez Hermoso	30,05	15,03	.....
	Estudio de los mecanismos combinados de fisuración y adherencia en elementos de hormigón armado y pretensado- Bahaa Sharaf Tork	19,83	15,03	.....
	Estudio experimental y numérico del comportamiento en servicio y rotura de puentes continuos prefabricados monoviga - Gustavo Ariel Pérez	19,83	15,03	.....
	Influencia de la puesta en obra del hormigón en la durabilidad de las estructuras de hormigón armado y pretensado(+ separata) - Manuel Burón Maestro	19,83	15,03	.....
	Comportamiento y optimización de puentes atirantados continuos - Juan Rodado López	19,83	15,03	.....
	Establecimiento de índices de calidad de la unión entre tongadas en presas de hormigón HCR - Jesús M. de la Fuente González	19,83	15,03	.....
	Ánálisis estructural de puentes arco de fábrica. Criterios de comprobación - José A. Martín Caro Álamo	19,83	15,03	.....
	Comportamiento estructural y criterios de diseño de los puentes con pretensado extradosado - Gustavo Chio Cho	19,83	15,03	.....
	Estudio de la adherencia de cordones de pretensado en elementos prefabricados de hormigones de altas prestaciones iniciales - Cristina Vázquez Herrero	19,83	15,03	.....
	Estudio experimental de la adherencia de cordones pretensados en hormigones de altas prestaciones iniciales - José Rocío Martí Vargas	19,83	15,03	.....
	Comportamiento diferido del hormigón estructural considerando la no linealidad mecánica. Estudio teórico y experimental - Mirian Valentina Sánchez Pérez	19,83	15,03	.....
	Shear Strength of Reinforced High-Strength Concrete Beams - Antoni Cladera Bohigas	19,83	15,03	.....
	Estudio del comportamiento del hormigón con fibras de acero en elementos laminares de pequeño espesor y su comportamiento posfisuración- Alberto Domingo Cabo	19,83	15,03	.....
	Evaluación no lineal de los efectos estructurales producidos por las deformaciones diferidas del hormigón y el acero - Miguel Fernández Ruiz	19,83	15,03	.....
	Hormigones con áridos reciclados procedentes de demoliciones: Dosificaciones, propiedades mecánicas y comportamiento estructural a cortante - Belén González Fonteboa	19,83	15,03	.....
	Estudio del comportamiento a flexión y cortante de puentes de dovelas de hormigón con pretensado exterior y junta seca - José Turmo Codérque	27,33	20,50	.....
<b>REVISTA HORMIGÓN Y ACERO</b>				
Revista N° .....		24,00	20,00	.....



# Normas para la publicación de contribuciones en la revista HORMIGÓN Y ACERO

## 1. GENERALIDADES

*Hormigón y Acero*, revista trimestral de la Asociación Científico-técnica del Hormigón Estructural (ACHE), acoge para su publicación contribuciones que estén relacionadas con el campo de las estructuras de obra civil y edificación y los materiales que las conforman.

La presentación de contribuciones para publicación en la revista está abierta a todos los técnicos o científicos interesados en publicar y divulgar sus experiencias, conocimientos u opiniones sobre diferentes aspectos de las estructuras y sus materiales.

## 2. TIPOS DE CONTRIBUCIONES

Las contribuciones, según su extensión y profundidad, podrán clasificarse como artículos, Comunicaciones y Comentarios o Notas.

Los artículos constituyen la base de la revista y podrán referirse, entre otros, a estudios y trabajos de investigación, proyectos y realizaciones, o aspectos relacionados con la explotación, mantenimiento, rehabilitación o demolición de las estructuras y sus materiales. Básicamente deberán contemplar aspectos científicos y técnicos de las estructuras y sus materiales, pero además podrán también referirse a aspectos estéticos, socio-económicos o ambientales de las mismas.

Además de los artículos, podrán presentarse asimismo otras contribuciones más breves para su publicación en la sección del Rincón de ACHE. Estas contribuciones podrán ser, entre otras, comentarios a artículos publicados anteriormente en la revista, recomendaciones, revisiones de normas, etc.

La revista se imprime en blanco y negro, salvo el artículo central. El artículo central es seleccionado por el Comité de Redacción entre los artículos que se vayan a incluir en cada número. Normalmente se tratará de un artículo sobre alguna realización estructural significativa, que se imprime en color y con el texto completo en español e inglés.

## 3. CONDICIONES GENERALES

Solo podrá solicitarse la publicación de artículos que no hayan sido previamente publicados o que no estén en proceso de revisión en otros medios de difusión. Se exceptúan los resúmenes publicados sobre el tema y las tesis doctorales elaboradas por alguno de los autores.

Es responsabilidad del autor el disponer de un permiso por escrito para poder reproducir cualquier material (texto, imágenes, tablas, etc.) que haya sido publicado en otra publicación o página web, por lo que Ache no se hace responsable del copyright anterior del material recibido.

El procedimiento para solicitar la publicación de una contribución se describe detalladamente en el apartado 4. Los originales de

las contribuciones que se deseen publicar en *Hormigón y Acero* deberán redactarse cumpliendo estrictamente las normas que se especifican en el apartado 5.

Cualquier contribución que ACHE reciba y que incumpla el procedimiento de solicitud de publicación o la normativa de redacción será devuelta a su autor para su oportuna rectificación.

## 4 PRESENTACIÓN DE CONTRIBUCIONES ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN HORMIGÓN Y ACERO

El autor o autores que deseen publicar una contribución en la revista *Hormigón y Acero* deberán remitir a ACHE la siguiente documentación:

1. Escrito solicitando la publicación de la contribución enviada, lo que supone la aceptación de estas Normas de Presentación de artículos.

En el mismo escrito deberán incluirse los siguientes datos:

- Nombre completo del autor con el que se desea que se mantenga la comunicación mientras dure el proceso de publicación de la contribución.
- Dirección postal, dirección de correo electrónico, teléfono y fax de dicho autor.

2. Original completo de la contribución (incluyendo figuras y fotos) en formato .pdf o alternativamente impreso en papel, siendo necesario en este caso enviar tres copias. En este fichero las figuras y fotos se insertarán en el texto con el tamaño aproximado con el que el autor desearía que cada figura fuera publicada y en las posiciones aproximadas dentro del texto en las que desearía que quedasen finalmente insertadas según la estructura indicada en el apartado 5.8.

3. Texto de la contribución (**sin figuras**) en un archivo con formato Word (.doc) (ver apartado 5 de estas normas). Las figuras quedarán referenciadas en el texto y se incluirá una lista con los textos de los pies de las mismas al final del escrito.

4. Ficheros independientes de cada una de las figuras, en alta resolución (ver 5.3), cuyos nombres permitan identificar claramente su contenido (v.gr. Figura 3). Se admiten los siguientes formatos de archivo de figura: post script, jpg, .tiff, .pict, .pdf y .dxf. Además se aceptan los gráficos generados por los programas Excel, Freehand (versión 9 o posterior), CorelDraw e Ilustrador. **No se admite como archivo de figura la simple inclusión de la figura en el archivo de texto Word (.doc.), o los archivos en formato Power Point (.ppt).**

La dirección de envío de toda la documentación anteriormente indicada, necesaria para solicitar la publicación de una contribución es la siguiente:

– PARA ENVÍOS POSTALES:

Revista Hormigón y Acero  
ACHE

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Laboratorio de Estructuras  
Av. Profesor Aranguren s/n - Ciudad Universitaria  
28040 - Madrid

– PARA ENVÍOS POR CORREO ELECTRÓNICO:

info@e-ache.net

## 5. CARACTERÍSTICAS Y ESTRUCTURA DE LAS CONTRIBUCIONES

### 5.1. EXTENSIÓN

Los artículos no deberán tener una extensión superior a las 15.000 palabras ni inferior a las 3.000 palabras, sin incluir tablas y figuras.

Las Comunicaciones y Comentarios tendrán un límite máximo de 3.000 palabras sin incluir tablas y figuras e incluyendo éstas no podrán equivaler finalmente a más de 6 páginas de la revista con el formato habitualmente empleado.

### 5.2. FORMATO DEL TEXTO

El texto de las contribuciones deberá estar escrito en español con interlineado doble, márgenes de al menos 3 cm. y en hojas numeradas de tamaño UNE A4.

El texto no debe duplicar información o resultados incluidos en las tablas de la contribución.

Si un artículo es seleccionado por el Comité de Redacción de la revista para aparecer como artículo central, se solicitará a los autores que envíen también el texto completo del mismo en inglés (incluidos los pies de las figuras y fotos).

### 5.3. GRÁFICOS, FIGURAS Y FOTOS

Los gráficos, figuras y fotos deberán ir numerados correlativamente en el orden que se citen en el texto. **La numeración no distinguirá entre gráficos, figuras y fotos.**

Las figuras, gráficos y fotografías se citarán en el texto mediante la palabra *Figura* y su número correspondiente.

Dado que la mayor parte de la revista se publica en blanco y negro deberán tenerse en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Las fotos, especialmente si el original es en color, deberán tener el contraste suficiente para que cuando se impriman en blanco y negro permitan distinguir claramente su contenido e información.
- Es recomendable que no se incluyan gráficos y figuras cuya información se distinga por el color de las curvas, sugiriéndose el empleo de distintos trazos, puntos y/o tramas que permitan la distinción clara de las curvas y de la información contenida en la figura o gráfico al imprimirla en blanco y negro.

Las figuras y gráficos se publican habitualmente en la revista con tamaños aproximados de 8, 12 ó 18 cm. de anchura. Esta circunstancia deberá ser tenida en cuenta al preparar las fotos y figuras que ilustren el artículo.

Las fotos deberán tener, al tamaño al que el autor pretenda que aparezcan publicadas, una resolución mínima de 300 pixels por pulgada (120 pixels por cm. aproximadamente).

En cuanto a los dibujos delineados y gráficos deberán ser claros, esquemáticos (no con excesivos detalles) y deberán contener el mínimo posible de información en forma de texto, números y símbolos. En todo caso ésta última deberá ser claramente legible al tamaño al que se pretende que aparezca la figura en la publicación. Debe, por tanto, evitarse incluir en las figuras información innecesaria para la adecuada comprensión de la contribución. Este aspecto afecta especialmente a los planos en los artículos sobre realizaciones estructurales, que habitualmente incluyen información excesivamente prolífica para el artículo e innecesaria para su comprensión, con el agravante de que al reducir el tamaño del plano al necesario para la publicación en la revista, el texto y números quedarían apelmazados e ilegibles. En estos casos se solicitará al autor la sustitución del plano por una figura análoga más adecuada al artículo.

### 5.4. TABLAS

Las tablas deberán ir numeradas correlativamente en el orden en que se citen en el texto, en el cual deberá indicarse el lugar adecuado de su colocación. Cada tabla tendrá su título.

Las tablas se citarán en el texto mediante la palabra *Tabla* y su número correspondiente, que será independiente a la numeración de las *Figuras*.

### 5.5. UNIDADES

Las magnitudes se expresarán en unidades del Sistema Internacional (S.I.) según las normas UNE 82 100 y UNE 82 103.

### 5.6. ECUACIONES Y EXPRESIONES MATEMÁTICAS

En las ecuaciones se procurará la máxima calidad de escritura y el empleo de las formas más reducidas siempre que no entrañen riesgo de incomprensión. Para su identificación se utilizará un número entre paréntesis a la derecha de la formula.

Las ecuaciones se numerarán consecutivamente y se citarán en el texto mediante la palabra *Ecuación* y su número correspondiente.

Se elegirá un tipo de letra (Times New Roman u otra similar) tal que las letras griegas, subíndices y exponentes resulten perfectamente identificables.

Se diferenciarán claramente mayúsculas y minúsculas y aquellos tipos que puedan inducir a error (*v. gr.* la l y el uno (1); la O y el cero (0); la K y la k, etc.).

### 5.7. CITAS DE OTROS AUTORES

Las citas en el texto deberán ir acompañadas de un número entre corchetes que permita localizar el documento citado en las referencias bibliográficas incluidas al final del artículo.

### 5.8. ESTRUCTURA GENERAL DE LAS CONTRIBUCIONES

En la página web de la revista hay, a disposición de los autores, una plantilla en Word (.doc) para la redacción de los manuscritos.

Como norma general la estructura de los artículos se ajustará al siguiente esquema:

**Título:** El título deberá presentarse en español e inglés, ser breve y explícito y reflejar claramente el contenido de la contribución. Deberá evitarse el uso de siglas y nombres comerciales.

**Autores y filiación:** Se hará constar el nombre y apellidos completos del autor o autores, su titulación profesional y el Centro o Empresa donde desarrollan sus actividades.

**Resumen:** Todo artículo deberá ir acompañado de un resumen en español e inglés, de extensión no inferior a cincuenta (50) palabras ni superior a ciento cincuenta (150) palabras.

**Palabras clave:** Se incluirán cinco (5) palabras clave, en español e inglés, que faciliten la búsqueda y clasificación del artículo en las bases de datos.

**Texto del artículo:** Se organizará con un esquema numerado de apartados y subapartados. Normalmente contendrá una breve introducción, el cuerpo principal del artículo y unas conclusiones o comentarios finales, así como un apartado final de agradecimientos (si procede).

**Apéndices:** En artículos de carácter científico en los que haya una cierta profusión de expresiones matemáticas es recomendable la inclusión de un apéndice que resuma la notación empleada.

**Referencias Bibliográficas:** Las referencias bibliográficas citadas en el texto se recogerán al final del mismo dando todos los datos precisos sobre la fuente de publicación para su localización. En lo posible se seguirán los siguientes criterios de referencia adoptados por la normativa internacional:

a) *Referencias a artículos publicados en revistas:*

Apellidos e iniciales del autor o autores; título del artículo; nombre de la publicación; número del volumen y fascículo; fecha de publicación; número de la primera y última de las páginas que ocupa el artículo al que se refiere la cita.

b) *Referencias de libros:*

Apellidos e iniciales del autor o autores; título del libro; edición; editorial y año de publicación.

En la estructura de contribuciones que no sean artículos sólo requerirá obligatoriamente la existencia de título, autores, filiación de los autores y el texto.

## 6. REVISIÓN DE CONTRIBUCIONES ORIGINALES PARA PUBLICACIÓN

Todas las contribuciones recibidas que cumplan con los requisitos de recepción exigidos serán revisadas por al menos dos miembros del Comité de Redacción, ya sean Vocales o Asesores. En ocasiones, el Comité de Redacción podrá requerir para esta labor de revisión, la intervención de algún experto ajeno a él, que sea especial conocedor del tema tratado en el artículo.

Como consecuencia de esa revisión, el Comité de Redacción decidirá sobre la aceptación o no de la contribución presentada para su

publicación en *Hormigón y Acero*. En caso de aceptación ésta podrá estar condicionada a que el autor realice los cambios que, a juicio del Comité, deban efectuarse para que la contribución pueda ser finalmente publicada en *Hormigón y Acero*.

## 7. CESIÓN DE DERECHOS

Una vez que la contribución haya sido aprobada por el Comité de Redacción de la revista, la Secretaría de ACHE remitirá a los autores un “Acuerdo de Publicación”, que deberá ser firmado por todos y cada uno de los autores de la contribución y devuelto a ACHE, por el cual cedan todos los derechos de publicación de dicha contribución a ACHE como editora de *Hormigón y Acero*.

## 8. MAQUETACIÓN, PRUEBAS DE IMPRESIÓN Y PUBLICACIÓN

Tras la aceptación del original definitivo con los formatos adecuados para su impresión, ACHE lo entregará a la imprenta para que realice la maquetación y prepare las pruebas de impresión correspondientes.

La prueba de impresión se remitirá al autor en formato .pdf para que dé su visto bueno definitivo o, en su caso, corrija los posibles errores. El autor deberá devolver esta prueba de impresión con sus correcciones en un plazo máximo de 10 días para no retrasar la publicación a un número posterior de la revista. No se admitirán correcciones que alteren sustancialmente el texto o la ordenación de la contribución original.

Finalmente, tras la corrección de los posibles errores de la prueba de imprenta, la contribución se incluirá y publicará en la revista.

## 9. SEPARATAS

En el caso de contribuciones en forma de artículos, ACHE enviará, sin coste adicional, diez separatas y el archivo .pdf del Artículo publicado al autor responsable.

El autor de un artículo podrá encargar un mayor número de separatas (mínimo 50), lo cual deberá indicar al remitir la versión final de su artículo. El coste de estas separatas adicionales correrá a cargo de los autores del artículo.

En el caso de los artículos centrales, y siempre y cuando se publiquen en ese número de la revista anuncios de empresas que estén directamente relacionadas con el artículo central correspondiente (proyectista, constructora, asistencia técnica, subcontratistas o proveedores, etc.), ACHE ofrece a esas empresas anunciantes la posibilidad de encargar separatas especiales (mínimo 50) de ese artículo central, en las que figurará como portada la del número correspondiente de la revista y como contraportada el anuncio de la empresa que encargue las separatas. Este encargo de separatas especiales deberá ser abonado a ACHE por la empresa anunciante que lo solicite, conforme a las tarifas que se establezcan para cada año.



## Boletín de inscripción en ACHE

La Asociación Científico-técnica del Hormigón Estructural, ACHE, fusión de la Asociación Técnica Española del Pretensado, ATEP, y del Grupo Español del Hormigón, GEHO, de carácter no lucrativo, tiene como fines fomentar los progresos de todo orden referentes al hormigón estructural y canalizar la participación española en asociaciones análogas de carácter internacional.

Entre sus actividades figura el impulsar el campo de las estructuras de hormigón en todos sus aspectos (científico, técnico económico, estético, etc.) mediante actividades de investigación, docencia, formación continua, prenormalización, ejercicio profesional y divulgación; el proponer, coordinar y realizar trabajos de investigación científica y desarrollo tecnológico relacionados con los diversos aspectos del hormigón estructural y del hormigón en general, así como desarrollar todo tipo de actividades tendentes al progreso de las estructuras de hormigón.

La concreción de estas actividades se plasma en las publicaciones de sus Comisiones Técnicas y Grupos de Trabajo, en la organización de diversos eventos como conferencias, jornadas técnicas y un Congreso trianual, en la publicación de monografías no periódicas sobre hormigón estructural así como la edición de la revista Hormigón y Acero, de carácter trimestral. Los Estatutos de ACHE contemplan los siguientes tipos de miembro:

- 1. Miembro Patrocinador.** Es la máxima categoría establecida para personas jurídicas. Tiene derecho a nombrar tres representantes, cada uno de los cuales tendrá los mismos derechos que el miembro personal excepto el de voto. La relación de miembros patrocinadores aparece en todas las publicaciones que edita ACHE. El voto del miembro patrocinador se computa con peso 5. Además tiene derecho a recibir gratuitamente un juego más de las monografías y de la revista.
- 2. Miembro Protector.** Es la categoría intermedia para personas jurídicas. Tiene derecho a nombrar dos representantes, cada uno de los cuales tendrá los mismos derechos que el miembro peatonal excepto el de voto. La relación de miembros protectores aparece en las publicaciones de ACHE que decida el Consejo. El voto del miembro protector se computa con peso 3. Además tiene derecho a recibir gratuitamente un juego más de las monografías y de la revista.
- 3. Miembro colectivo.** Es la menor categoría para personas jurídicas. Tiene derecho a nombrar dos representantes, cada uno de los cuales tendrá los mismos derechos que el miembro personal excepto el de voto. El voto del miembro colectivo se computa con peso 2. Además tiene derecho a recibir gratuitamente un juego más de las monografías y de la revista.
- 4. Miembro personal.** Es la categoría que corresponde a las personas físicas mayores de 230 años. Tiene derecho a recibir gratuitamente la revista y aquellas publicaciones periódicas que decida el Consejo. El voto del miembro personal se computa con peso 1.
- 5. Miembro Menor de 30 años-** Es la categoría que corresponde a las personas físicas menores de 30 años. Tiene derecho a recibir gratuitamente la revista y aquellas publicaciones aperiódicas que decida el Consejo. El voto del miembro menor de 30 años se computa con peso 1.
- 6. Miembro Estudiante.** Es la categoría que corresponde a las personas físicas de edad igual o menor que 30 años, admitiéndose también en esta categoría a los doctorandos en disfrute de una beca que hubiesen rebasado dicho límite de edad. Tiene los mismos derechos que el miembro persona, incluido el de voto.

---

ASOCIACIÓN CIENTÍFICO-TÉCNICA DEL HORMIGÓN ESTRUCTURAL  
ACHE - Secretaría  
ETSI Caminos, Canales y Puertos  
Ciudad Universitaria  
Avda. Profesor Aranguren, s/n - 28040 Madrid

---

Señores:

La persona física o jurídica cuyos datos se relacionan seguidamente:

Nombre.....

NIF ..... Calle.....

Ciudad ..... Código Postal ..... País.....

Nombre de la persona de contacto (sólo para Personas Jurídicas).....

Teléfono..... Fax ..... E-mail .....

desea hacerse miembro de ACHE en la modalidad de     solicita más información sobre la modalidad de Miembro

Estudiante (1º y 2º ciclo y menores de 30 años) ..... (20 €)

Menor de 30 ..... (40 €)

Personal ..... (80 €)

Colectivo ..... (187 €)

Protector ..... (337 €)

Patrocinador ..... (675 €)

Autorizando a cargar el importe de la cuota anual correspondiente en la entidad bancaria indicada más abajo.

Lugar, fecha y firma.....

(sello de la entidad para personas jurídicas)

---

Sr. Director del Banco de .....

Agencia.....

Calle .....

Ciudad ..... Código Postal.....

Muy Sr. mío:

Le ruego que, con cargo a la cuenta cuyos datos relaciono más abajo, atienda hasta nuevo aviso los recibos emitidos por la Asociación Científico-técnica del Hormigón Estructural ACHE.

Atentamente,

Lugar, fecha y firma .....

DATOS DE LA CUENTA BANCARIA

Titular .....

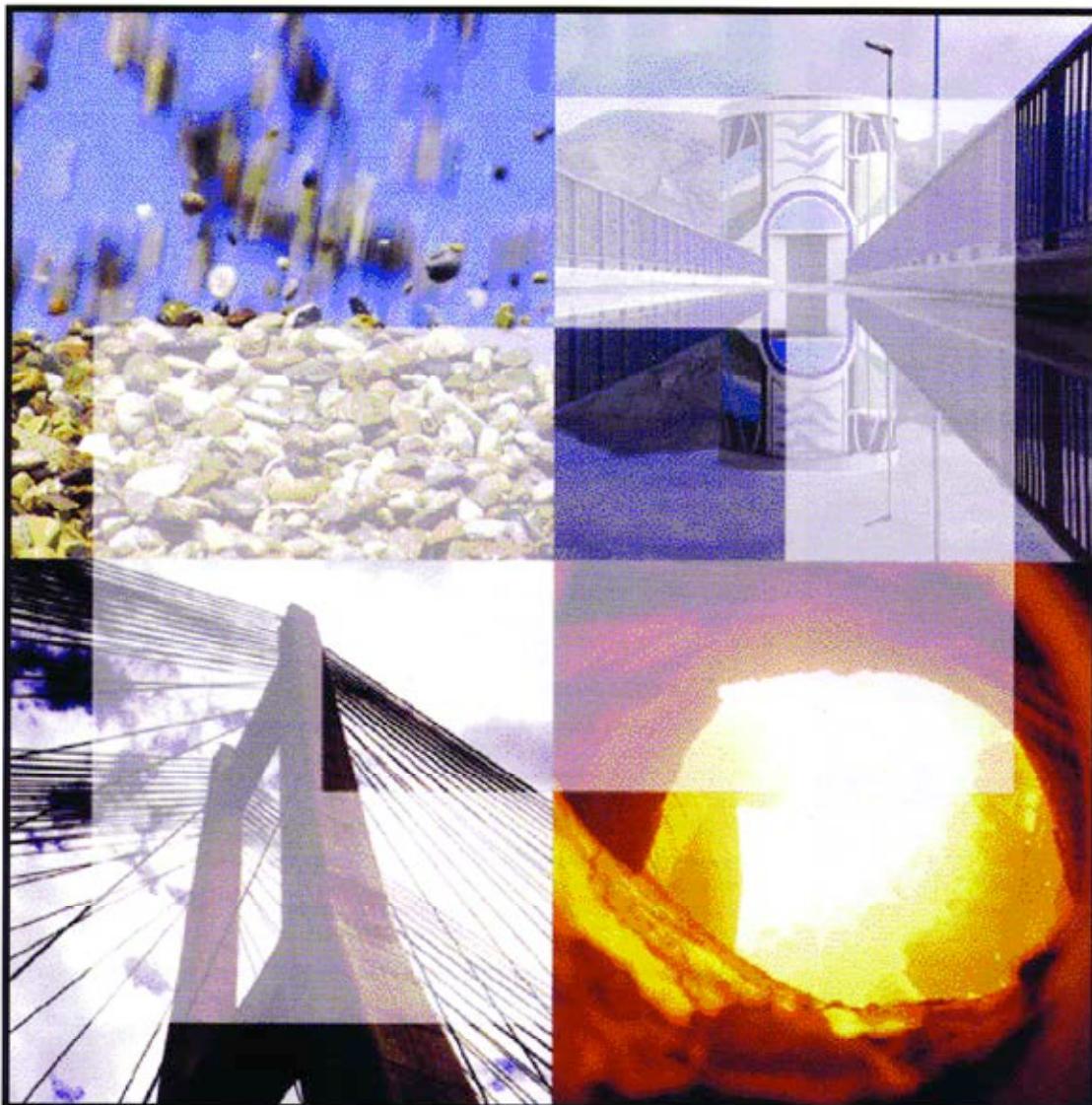
NIF .....

Código cuenta cliente: Banco..... Sucursal ..... Dígitos control .....

Número cuenta .....



# Cimentando soluciones



- ✓ Asistencia técnica a la Administración y usuarios del cemento y el hormigón.
- ✓ Investigación.
- ✓ Normalización y Certificación.
- ✓ Publicaciones técnicas.



José Abascal, 53, 2º. 28003 MADRID.  
Teléf.: 91 442 93 11. Fax: 91 442 72 94.  
<http://www.ieca.es>

Delegaciones en:  
Madrid, Barcelona, Valencia,  
Sevilla, Bilbao, León y Canarias.



**A s o c i a c i ó n  
C i e n t í f i c o - t é c n i c a  
d e l H o r m i g ó n  
E s t r u c t u r a l**