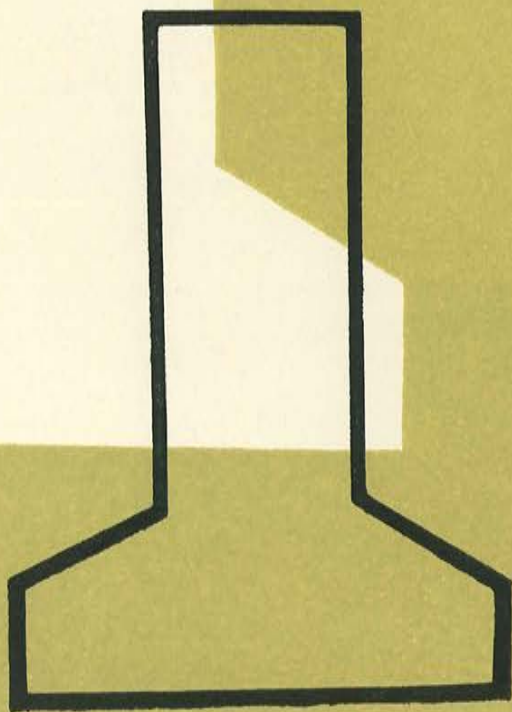


ULTIMAS NOTICIAS SOBRE

# hormigón pretensado



BOLETIN NUM. 27 DE LA ASOCIACION ESPAÑOLA DEL HORMIGON PRETENSADO  
DEL INSTITUTO TECNICO DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO

a

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS  
Patronato "Juan de la Cierva" de Investigación Técnica

U L T I M A S N O T I C I A S  
Técnicas on Estructuras  
Hormigón Pretensado  
Boletín de circulación limitada  
Nº 27

Julio-Agosto 1955

-- INSTITUTO TECNICO DE LA CONSTRUCCION Y DEL CEMENTO --

I N D I C E

=====

457-0-16	Método para calcular las cubiertas laminadas de hormigón con vigas de borde pretensadas.- V.M. Silvera . . . . .	pág. 1
457-2-8	El cálculo a rotura de piezas sometidas a esfuerzo normal, momento flector y esfuerzo cortante.- V. Franciosi y E. Gian greco . . . . .	" 16
457-8-11	Labor desarrollada por el Laboratorio de Ensayos del Ministerio de Obras Públicas de Inglaterra.- C.S.A. División: Ministry of Works . . . . .	" 33
591-2-14	Puente sifón-carretero, de hormigón pretensado, sobre el río Loncomilla: A. Solari Cánopa. . . . .	" 40

- - -

**N o t a:** El Instituto, una de cuyas finalidades es divulgar los trabajos de investigación sobre la construcción y edificación, no se hace responsable del contenido de ningún artículo, y el hecho de que patrocine su difusión, no implica, en modo alguno, conformidad con la tesis expuesta.

xión de las vigas del contorno, pudiendo así considerarlas como membranas, sin apreciables tensiones de flexión.

En el artículo que a continuación se reproduce, se trata de estudiar el efecto producido, sobre las estructuras laminares de pequeño espesor, por el esfuerzo de pretensado introducido por medio de cables convenientemente dispuestos. Se hace también referencia a las estructuras laminares poligonales, y se hace notar que el trazado curvo de los cables, al originar cargas verticales dirigidas hacia arriba, puede dar lugar a importantes economías en determinados tipos de estructuras tales como grandes vigas continuas y placas rectangulares de gran luz.

- - -

Según se ha podido comprobar mediante las numerosas experiencias realizadas sobre una gran variedad de tipos de estructura, los elementos de hormigón pretensado convenientemente proyectados son capaces de resistir, sin agrietarse, las tensiones de tracción originadas, tanto por su peso propio y las cargas permanentes como por las sobrecargas accidentales. Otra de las características del hormigón pretensado es la de poder calcular su armadura, de forma que las flechas que se produzcan, bajo las cargas de servicio, en la estructura, queden limitadas a una magnitud previamente determinada; pudiendo conseguirse, por ejemplo, que, bajo la acción combinada del esfuerzo de pretensado y de la carga permanente, sea nula la flecha. Esta última propiedad es, precisamente, la que justifica el empleo del pretensado en la construcción de estructuras de cubiertas laminares delgadas.

Supóngase, primeramente (Fig. 1), una viga de hormigón, sometida exclusivamente a su propio peso, descansando sobre el encofrado mientras endurece la mezcla, y por debajo de la cual se ha dis -

puesto, para aguantar el peso de la pieza una vez terminada, un tirante curvo de acero con montantes verticales intermedios. Al retirar el encofrado, la carga de la viga se transmitirá al tirante de acero, que se deformará dando lugar a que aparezca una determinada flecha en la viga. Pero si, por medio de gatos dispuestos en los extremos del tirante, se introduce en éste un esfuerzo de tracción, dicho esfuerzo, al descomponerse, producirá unas cargas verticales dirigidas hacia arriba, que se transmitirán a la viga a través de los montantes e impedirán que la pieza adquiera flecha alguna. Se comprende, fácilmente, que si se eleva demasiado la tensión del tirante, puede llegar a producirse una contraflecha, por lo que resulta necesario limitar adecuadamente la magnitud del esfuerzo de pretensado. De esta manera, las únicas tensiones que actuarán sobre la viga serán las creadas por la compresión que se produce a lo largo del eje neutro A-A. Es decir, que la viga actúa como tornapunta del tirante curvo. Un efecto equivalente puede conseguirse sustituyendo el tirante colocado por debajo de la pieza, por un cable pretensado introducido en un conducto adecuadamente dispuesto en el interior de la viga (Fig. 2). En el caso de que los anclajes extremos no coincidan con el eje neutro de la sección de la viga, el empuje excéntrico puede producir flechas, pero, en ningún caso, se originarán tensiones cortantes.

Sea, ahora, la estructura de una cubierta laminar delgada, del tipo indicado en la Fig. 3, constituida por una serie de superficies cilíndricas, con vigas verticales de rigidez en los bordes y cerradas por los extremos mediante tímpanos, también verticales, apoyados sobre columnas. Si la luz de las vigas de borde es pequeña en comparación con la distancia entre ellas, la cubierta puede ser cal

culada de acuerdo con la teoría de membranas. Todas las fuerzas que actúan sobre un elemento cualquiera de la cubierta darán lugar, únicamente, a tensiones normales y transversales contenidas siempre en un plano tangencial a la membrana y sin que la flexión de la cubierta alcance nunca una magnitud apreciable. La teoría de membranas es exactamente aplicable cuando las cubiertas laminares delgadas son de contorno cerrado, según se ha podido comprobar en numerosos casos de torres de refrigeración, de considerable altura y diámetro y pequeño espesor. En la mayor parte de los países europeos, las estructuras para cubiertas laminares delgadas de contorno cerrado (Fig. 4) se calculan como membranas. Sin embargo, no puede, en general, seguirse este método cuando se trata de estructuras de tipo análogo al indicado en la Fig. 3, que son las más corrientes. Si la luz de las vigas de borde es sensiblemente mayor que la del arco de la sección de la cubierta, no es posible desprestigiar las tensiones normales y transversales que se originan en los bordes y que quedan sin equilibrar al interrumpirse bruscamente la membrana. Un cálculo exacto de las tensiones en dichos bordes pone de manifiesto la existencia de tensiones cortantes crecientes y de tensiones de flexión, que hacen necesario aumentar el espesor de la membrana o proveerla de nervios de rigidez.

Evidentemente, una cubierta laminar delgada es más apropiada para actuar como membrana que para resistir las tensiones de flexión a que dan lugar las perturbaciones originadas en los bordes. La cubierta representada en la Fig. 3 trabajará como membrana únicamente si se disponen apoyos rígidos a lo largo de todos sus bordes. Los timpanos de los extremos pueden considerarse como apoyos rígidos, teniendo en cuenta su gran canto y pequeña luz, pero el conseguir, por

los métodos ordinarios, la suficiente rigidez de las vigas longitudinales de borde, conduciría a dimensiones imposibles de alcanzar en la práctica. En vigas de borde corrientes, con una relación canto/luz de  $1/15$  a  $1/20$ , las flechas son considerables y dan lugar a perturbaciones en los bordes y flexiones en la membrana.

Por el contrario, se ha demostrado, que las vigas de hormigón pretensado, con una relación canto/luz pequeña, pueden proyectarse de tal modo que no se originen flechas en ellas bajo unas determinadas condiciones de carga. Tal característica resulta de inestimable valor para las estructuras de cubiertas laminares delgadas, en las cuales la mayor parte de la carga de cálculo actúa constantemente por ser su peso propio. Una cubierta laminar delgada, provista de las adecuadas vigas de borde de hormigón pretensado, puede, por consiguiente, considerarse como membrana mientras actúe solamente el peso propio, quedando así limitadas, en tiempo y valor, las perturbaciones de borde a las originadas por la, relativamente, poca duración y pequeña magnitud de las sobrecargas.

#### Aplicación a las cubiertas cilíndricas

En las estructuras laminares cilíndricas destinadas a cubrir varias naves sucesivas (Fig. 5), proyectadas de tal forma que, bajo su peso propio, actúan como membranas, se producen, en las lima-hoyas, unos esfuerzos verticales dirigidos hacia abajo y en las cumbres, esfuerzos inclinados dirigidos también hacia abajo. Para absorber las cargas verticales se disponen en las lima-hoyas vigas de hormigón pretensado. Al poner en tensión los cables, el peso propio, que hasta entonces actuaba sobre el encofrado, se transmite a

la propia viga sin que ésta fleete, y el trazado curvo de la armadura proporciona a la estructura un apoyo tan eficaz como el constituido por muros verticales. Análogamente, en las cumbreras se colocan, o bien vigas inclinadas de hormigón pretensado, o bien dos vigas capaces de absorber las dos componentes del esfuerzo producido en dichas zonas. En la parte superior de las vigas se colocan también armaduras pretensadas rectas, destinadas a resistir los esfuerzos corrientes que siempre se originan en los bordes. Como quiera que el conjunto de la estructura (vigas y cubierta) ha de actuar como tornapunta de la armadura curva de las vigas de borde, es necesario disponer rigidizadores en los tímpanos con el fin de distribuir uniformemente las tensiones de compresión. No es preciso adoptar precaución alguna para absorber el esfuerzo de compresión que actúa a lo largo de la fibra neutra de la sección del tornapunta. Cualquier compresión excéntrica produciría la misma flecha vertical en todos los puntos de la viga y de la cubierta, en cualquier sección de la estructura y, por consiguiente, tales flechas no originarían perturbaciones en los bordes.

#### Estado de membrana en las cubiertas laminares cilíndricas de directriz circular

Sea  $R$  el radio de la directriz circular de la cubierta (Figura 5) y  $l$  la luz de las vigas de borde. Cualquier punto de la cubierta quedará perfectamente definido por su distancia  $x$  al punto medio de la luz  $l$  y por el ángulo  $\beta$  medido a partir de la clave del arco. Si  $p$  es la carga permanente uniformemente distribuida, por unidad de superficie medida a lo largo de la curva, la cubierta, en su comportamiento como membrana, estará sometida a las siguientes tensiones:



Compresión transversal a lo largo de la curva:  $m = p.R. \cos \beta$

Tensión cortante transversal y longitudinal:  $s = 2 p.x. \sen \beta$

Compresión longitudinal:  $n = 2 p. \cos \beta \cdot \frac{1}{R} \left( \frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right)$

Estas tensiones se miden por unidad de longitud, y en los bordes toman los valores siguientes:

$$m_e = p.R. \cos \beta_o,$$

que permanece constante todo a lo largo de la distancia comprendida entre tímpanos;

$$s_e = 2 p.x. \sen \beta_o,$$

que varía del mismo modo que las tensiones cortantes en una viga de sección constante, simplemente apoyada y sometida a una carga uniformemente distribuida; y

$$n_e = \frac{2 p. \cos \beta_o}{R} \left( \frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right),$$

que varía como las tensiones de flexión en una viga simplemente apoyada, de sección constante, bajo una carga uniformemente distribuida.

#### Elástica longitudinal de la cubierta laminar

La compresión longitudinal en el centro de la luz, medida por unidad de superficie, es igual a  $\frac{2 p.l^2}{8 R.t}$  en la clave y a  $\frac{2 p.l^2 \cos \beta_o}{8 R.t}$  en los bordes, siendo  $t$  el espesor de la cubierta.

La elástica de la cubierta, que tiene la misma forma que la de una viga uniformemente cargada, de sección constante, tendrá un máximo en el centro del tramo, siendo su valor aproximado:

$$\delta = \frac{5}{48} \frac{2 p l^2}{8 R \cdot t} (1 - \cos \beta_0) \frac{l^2}{h \cdot E}$$

En esta expresión se desprecian las deformaciones producidas por es fuerza cortante. Como  $h = R (1 - \cos \beta_0)$ , la fórmula anterior queda reducida a:

$$\delta = \frac{5}{48} \cdot \frac{2 p \cdot l^4}{8 R^2 \cdot t} \cdot \frac{1}{E}$$

#### Reacciones en las vigas situadas en las lima-hoyas

Cada una de las vigas situadas en las lima-hoyas recibe, de las cubiertas adyacentes, dos empujes de igual magnitud, uniformemente distribuidos a lo largo de la luz  $l$ , que dan lugar a una resultante vertical de valor:  $2 p \cdot R \cdot \cos \beta_0 \cdot \sin \beta_0$ . Esta sollicitación, combinada con el peso propio de la viga, origina una carga total, por unidad de longitud, igual a  $W$ .

La cabeza superior de la viga se encuentra también sometida a tensiones cortantes (Fig. 6) que actúan desde el centro hacia los apoyos, siendo nulas en el centro del tramo y aumentando linealmente hasta alcanzar el valor  $2 p \cdot \sin \beta \cdot l$ , por unidad de longitud, sobre los apoyos. Estas tensiones cortantes crean una tracción, en la cabeza superior de la viga, cuyo valor máximo:  $F_0 = p \cdot \sin \beta_0 \cdot \frac{l}{2}$  corresponde a la sección situada en el punto medio de la luz. Dicha tracción disminuye, a medida que la sección se aproxima a los apoyos, de acuerdo con la ley parabólica:

$$F_x = F_0 \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \quad (\text{Fig. 6})$$

Armadura de pretensado para las vigas situadas en las lima-hoyas

La armadura de pretensado en las vigas situadas en las li  
ma-hoyas, se dispone según un trazado curvo calculado de tal manera  
que origine un esfuerzo final vertical  $W'$  dirigido de abajo a arri-  
ba, uniformemente distribuido y de valor igual a  $W$ . En la cabeza su  
perior de la viga se coloca otra armadura de pretensado, capaz de ori  
ginar una compresión  $F'_x = F'_0 \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right)$  igual, en valor absoluto,  
a  $F_x$ . Esta armadura está constituida por una serie de cables horizon-  
tales, interrumpidos en los puntos convenientes para que el esfuer-  
zo total originado se ajuste, lo más aproximadamente posible, al dia-  
grama variable de tensiones a que se refiere la Fig. 6. Cuando el hor-  
migón ha endurecido, la tensión del cable se va aumentando gradual-  
mente hasta su valor final, al mismo tiempo que las cargas permanen-  
tes se van transmitiendo a la viga de tal forma que, en todo momen-  
to, la suma algébrica de los esfuerzos verticales y cortantes que ac-  
túan sobre la viga, es igual a cero. Finalmente, se dispone un ter-  
cer sistema de cables, por encima de la fibra neutra de la pieza, pa-  
ra crear una compresión en la cabeza superior de la viga, igual a la  
compresión longitudinal  $n_e = \frac{2 p \cdot \cos \beta_0}{R \cdot t} \left(\frac{l^2}{8} - \frac{x^2}{2}\right)$  en el borde de  
la cubierta laminar, y una flecha así mismo igual a  $\delta$ .

Como resultado de estos tres sistemas de cables, las fle-  
chas en la viga y en la cubierta son iguales en cualquier punto del  
tramo; lo mismo ocurre con las compresiones en la viga y la cubier-  
ta en ambos bordes. De esta manera, se cumplen exactamente las con-  
diciones necesarias para poder considerar la cubierta como membrana.

Como ya se ha indicado anteriormente, tanto las vigas como la cubierta deben también actuar como elemento comprimido por la armadura curva; esta acción, sin embargo, no perturba el equilibrio de tensiones internas en el borde, ya que da lugar a compresiones y flechas que son iguales a ambos lados de dicho borde.

Los tres sistemas de cables anteriormente mencionadas pueden reducirse a dos, a saber:

1 - Una armadura curva que produzca, por unidad de longitud, una carga uniformemente distribuida igual a  $W'$ .

2 - Una armadura horizontal, en la parte superior de la viga, que origine, en el centro del tramo, una compresión máxima  $F'_0$  y en un punto cualquiera de dicho tramo una compresión

$$F'_x = F'_0 \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \quad (\text{Fig. 7})$$

Las dos cantidades incógnitas  $W'$  y  $F'_0$  pueden ser deducidas a partir de las ecuaciones que expresan la igualdad de flechas y tensiones de borde en la viga y en la cubierta en el centro del tramo.

Siendo:  $I$  = momento de inercia de la viga,

$A$  = área de la sección transversal de la viga,

$j$  = distancia del eje neutro al borde superior de la sección,

$e$  = distancia del eje neutro al punto de aplicación de la resultante del esfuerzo producido por los cables colocados en la parte superior de la viga,

las dos ecuaciones pueden expresarse en la forma siguiente:

$$\text{Flechas: } (W + W') \frac{5}{384} \frac{l^4}{EI} + (F'_0 + F'_0) e \frac{5}{48} \frac{l^2}{EI} = \delta$$

$$\begin{aligned} \text{Tensiones de borde: } & (W + W') \frac{l^2}{8} \frac{j}{I} + (F_o + F'_o) e \frac{j}{I} + \frac{(F_o + F'_o)}{A} = \\ & = \frac{2 p \cdot \cos \beta_o}{R \cdot t} \frac{l^2}{8} \end{aligned}$$

introduciendo, en estas expresiones, los valores de  $W$ ,  $W'$ ,  $F_o$  y  $F'_o$  con sus signos correspondientes. En el caso de que  $\delta$  sea igual, aproximadamente, a cero, las citadas ecuaciones tomarán la siguiente forma:

$$(W + W') \frac{l^2}{8} + (F_o + F'_o) e = 0 \quad \frac{(F_o + F'_o)}{A} = \frac{2 p \cdot \cos \beta_o \cdot l^2}{R \cdot t \cdot 8}$$

En realidad, la totalidad de la estructura se encuentra sometida a compresión por actuar como tornapunta del tirante constituido por la armadura curva. Tanto la viga como la cubierta se encuentran, por consiguiente, capacitadas para actuar como tirante y resistir el esfuerzo cortante producido en los bordes; en algunos casos específicos, por lo tanto, puede resultar suficiente disponer una sola armadura, con trazado curvo, para producir un esfuerzo  $W'$ , dirigido hacia arriba, de magnitud igual a  $W$ . En determinadas circunstancias, resulta factible colocar la armadura curva en la propia cubierta, pudiéndose reducir, de esta forma, el canto de las vigas de borde. Dicha armadura debe originar en la cubierta un esfuerzo inclinado, dirigido hacia arriba, uniformemente distribuido y actuando en la línea de acción del empuje.

#### Armaduras de las vigas de cumbrera

En las cumbreras de la cubierta es necesario colocar una viga horizontal y otra vertical para absorber las componentes del empuje en sus direcciones respectivas. En el cálculo de tales vigas se

siguen los mismos principios que se han indicado al tratar de las vigas de las lima-hoyas. En algunas ocasiones, puede prescindirse de la viga horizontal, colocando la armadura de pretensado que dicha viga habría de llevar, en el propio cuerpo de la cubierta y conservándose, únicamente, la viga vertical que actúa como un rigidizador de borde.

#### Trazado de la armadura curva

Una longitud diferencial  $\Delta \sigma$  de la armadura curva, sometida a la tensión T, produce, sobre el hormigón que la rodea, un esfuerzo de valor:

$$\frac{T}{r} \Delta \sigma ,$$

siendo r el radio de la curva en el punto considerado. La componente horizontal de este esfuerzo es despreciable y la vertical vale:

$$\frac{T}{r} \Delta \sigma \cdot \cos \gamma ,$$

siendo  $\gamma$  el ángulo que forma con la horizontal la tangente a la curva en dicho punto. El esfuerzo por unidad de longitud, medido horizontalmente, es igual a:

$$\frac{T}{r} \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} \cdot \cos \gamma = \frac{T}{r} .$$

Como quiera que T es prácticamente constante todo a lo largo de la viga, para conseguir una carga uniforme deberá hacerse r también constante, es decir, que la armadura deberá disponerse según un trazado circular.

En realidad ocurre que, en los trazados curvos, se producen pérdidas de tensión a consecuencia del rozamiento y, por lo tan

to, el valor de  $T$  es ligeramente superior en los extremos que en el centro de la viga. Para compensar esta pequeña variación es por lo que suele darse a la armadura un trazado parabólico en vez de circular.

#### Influencia de la sobrecarga

Como se ha demostrado, mediante el pretensado se consigue que la estructura laminar de la cubierta se comporte como membrana bajo un determinado estado de carga. Pero en el caso de que el régimen de cargas varíe y sea distinto del previsto como normal en el proyecto, las tensiones no podrán ser calculadas de acuerdo con la teoría de membranas, siendo necesario recurrir a métodos aproximados tales como el de "teoría de la viga". Si se quiere una mayor aproximación, habrá que realizar un completo y cuidadoso estudio de las perturbaciones en los bordes. Como la sobrecarga de una cubierta es pequeña, generalmente, comparada con su carga permanente, suele bastar un cálculo aproximado para valorar las tensiones originadas por las variaciones de carga. Teniendo, por ejemplo una carga permanente de  $200 \text{ Kg/m}^2$  (peso total del hormigón más el del aislante y el impermeabilizante) y una sobrecarga de  $60 \text{ Kg/m}^2$ , el esfuerzo de pretensado puede calcularse para una carga media de  $230 \text{ Kg/m}^2$ , la cual estará sometida a una variación, en más o en menos, de sólo  $30 \text{ Kg/m}^2$ .

#### Cubiertas laminares con directriz en forma de catenaria

Los anteriores cálculos están basados en las reacciones de borde de una cubierta laminar cuyo comportamiento se asimila al de una membrana, y pueden ser aplicados a cualquier tipo de cubierta laminar. Supongamos, por ejemplo, una cubierta con directriz en forma

de catenaria, representada en sección transversal por la ecuación:

$$y = a \cdot \cos h \frac{x}{a} ,$$

y sometida a la acción de una carga superficial, de intensidad constante, igual a  $p$ . En estas condiciones, la compresión a lo largo de la curva valdrá:

$$a \cdot p \cdot \cos h \frac{x}{a} ;$$

y en los bordes:

$$a \cdot p \cdot \cos h \frac{b}{a} .$$

No existen tensiones cortantes ni longitudinales en el conjunto de la membrana y, debido a la ausencia de tales tensiones, el total de la longitud de la cubierta entre tímpanos extremos, puede dividirse en un número cualquiera de anillos, cada uno de los cuales será estable por sí mismo, siempre que en los arranques se disponga de las necesarias reacciones de apoyo. Esta propiedad, facilita el moldeo y desmolde de la cubierta, al poder construirla en trozos independientes, por medio de encofrados móviles. Puede, también, conseguirse una mejor iluminación, dejando espacios libres entre dos anillos consecutivos, para cubrirlos después con cristal.

#### Cubiertas planas de hormigón

Las cubiertas de hormigón, planas o poligonales, del tipo indicado en la Fig. 8, se usan con bastante frecuencia, desde hace algún tiempo, tanto en el Continente como en Estados Unidos. Recientemente, han comenzado también a emplearse en Inglaterra. En una es



estructura de esta clase, las placas AB, BC, CD y DE pueden considerarse como formando parte de una placa continua que se apoya sobre los soportes fijos B, C y D, actuando en voladizo los tramos AB y DE. En esta hipótesis, aparecen una serie de reacciones, en la forma indicada en la Fig. 9, las cuales pueden transformarse en sus componentes según el plano de las placas, como se señala en la Fig. 10. Cada placa actúa así como una viga de gran canto, que se extiende de tímpano a tímpano, y se encuentra sometida a una carga uniforme, permanente. En las construcciones corrientes, estas vigas no pueden actuar independientemente y sus acciones mutuas originan esfuerzos internos en los bordes. Generalmente, se supone que estos esfuerzos son, principalmente, esfuerzos cortantes, cuyos valores se deducen igualando los valores finales de las tensiones normales de las dos vigas a cada lado de su borde común. En esta hipótesis, se supone que cada viga puede flectar independientemente de las demás, dada la gran flexibilidad de las placas en la dirección transversal (Fig. 11).

En algunas ocasiones, para evitar el pandeo, o con cualquier otro fin práctico, se colocan nervios de rigidez que aumentan la rigidez transversal de las placas. Como consecuencia, en estos casos, dejan de ser aplicables las hipótesis anteriormente citadas, relativas a las flechas.

Si se emplea la técnica del pretensado, para eliminar las flechas longitudinales basta con disponer, en cada viga, una armadura de directriz curva, que produzca un esfuerzo igual y contrario a la carga permanente. De esta forma, se suprimen también las tensiones internas en los bordes y así éstos proporcionan, a las placas que se extienden en dirección transversal, verdaderos apoyos fijos. Las perturbaciones en los bordes quedan así reducidas a las originadas por las sobrecargas. R.P.

- - -

457-2-8 EL CALCULO A ROTURA DE PIEZAS SOMETIDAS A ESFUERZO NORMAL,  
MOMENTO FLECTOR Y ESFUERZO CORTANTE

(Il calcolo a rottura in presenza di sforzo normale, momento flettente e sforzo di taglio)

por Vincenzo Franciosi y Elio Giangreco

"GIORNALE DEL GENIO CIVILE", Mayo 1954

- S i n o p s i s -

Basándose en las hipótesis, sobre la plasticidad, de Henky y von Mises, de Beltrami y de Coulomb, los autores deducen un método de cálculo a rotura para piezas sometidas a esfuerzo cortante, en presencia de un esfuerzo normal y de un momento flector, y establecen las leyes de dependencia entre los tres tipos de sollicitación para los casos siguientes: 1º) cuando no existe plastificación en toda la sección; 2º) cuando se alcanza la plastificación en un solo borde de la sección, y 3º) cuando se alcanza la plastificación en los dos bordes.

Finalmente, representan geoméricamente dichas leyes y examinan distintos casos particulares.

- - -

- Introducción -

Los estudios teóricos y ensayos experimentales efectuados, principalmente en estos últimos años, con el fin de conocer el comportamiento de los materiales más allá de su límite elástico, han señalado un nuevo camino a los técnicos especializados en los problemas de la elasticidad.

Las nuevas orientaciones dadas al cálculo, al permitir proyectar estructuras muy audaces y aprovechar al máximo la capacidad resistente de los materiales, han abierto, en el dominio de los equilibrios elásticos, un nuevo y sugestivo capítulo en la "ciencia de la construcción": el cálculo a rotura.

Dichas orientaciones, por estar íntimamente ligadas a los fenómenos físicos, se prestan a numerosas críticas, dada la dificultad que presenta el método de cálculo en el caso, por ejemplo, de una estructura de alto grado de hiperestatismo y la posibilidad de que la capacidad resistente del sistema disminuya, a consecuencia de un fallo local de la estructura, antes de llegar al estado final de rotura. El "limit design" (cálculo a rotura) (1) y (2)\* aun teniendo el mérito de haber resuelto ingeniosamente el problema del equilibrio en fase de rotura, sin necesidad de tener que recurrir a los complicados cálculos de la teoría de la elasticidad, resulta todavía extremadamente laborioso (3) cuando se emplea para calcular estructuras de un alto grado de hiperestatismo, como son, por ejemplo, las estructuras de edificios. Por el contrario, se presta magníficamente al cálculo de estructuras de menor grado de hiperestatismo y a otras muchas aplicaciones muy frecuentes en la técnica corriente.

En este orden de ideas, Galli y Franciosi (4) en un artículo publicado, en el número de Agosto de 1953, de la revista "L'Ingegnere" han examinado la posibilidad de introducir el esfuerzo cortante en el cálculo a rotura, estudiando las leyes que ligan el momento

---

\* Los números entre paréntesis corresponden a las referencias bibliográficas que aparecen al final del artículo.

flector con dicho esfuerzo cortante, cuando se alcanza el estado de plastificación total. Dichos autores; partiendo de ciertas condiciones de plastificación, que se traducen en una relación entre las componentes, normal y tangencial, de la tensión en un punto y la correspondiente tensión normal de plastificación, llegan a las siguientes importantes conclusiones, particularizadas al caso de la sección rectangular:

- 1ª) Variación elíptica de las tensiones tangenciales en la zona, todavía elástica, de la sección.
- 2ª) Leyes parabólicas de dependencia entre las características de las solicitaciones M y T.
- 3ª) Obtención de resultados numéricos comparables al aplicar las hipótesis de Hencky y von Mises, de Boltramí y de Coulomb.

Se ha estimado, por lo tanto, interesante generalizar el problema, considerando la acción simultánea del esfuerzo normal, del momento flector y del esfuerzo cortante; o lo que es igual, introducir en el cálculo a rotura el esfuerzo cortante en presencia de un esfuerzo normal excéntrico.

Relación entre las componentes de las tensiones y la tensión normal de plastificación; Introducción de la tensión tangencial de plastificación.

Se adopta como condición de plastificación la definida por la ecuación (5):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_0^2, \quad [1]$$

deducida de la teoría de Hencky y von Mises [(6) y (7)]. En dicha ecuación  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  representan las tensiones principales en un punto y  $\sigma_0$  la tensión normal de plastificación. En este caso, por tratarse de un problema en el plano, una de las tensiones principales,  $\sigma_1$ , es igual a cero. Por lo tanto, la ecuación [1] se transforma en la siguiente:

$$\sigma_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_3^2 = 2 \sigma_0^2 \quad [2]$$

de donde:

$$\sigma_2^2 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_0^2 \quad (1) \quad [3]$$

En relación con el problema que se estudia, y análoga -mente a lo que sucede en régimen elástico, el estado de tensiones en un punto, queda definido por dos únicas componentes: la normal  $\sigma$ , debida al esfuerzo normal excéntrico, y la tangencial  $t$ , debida al esfuerzo cortante.

Las tensiones principales  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , expresadas en función de  $\sigma$  y  $t$ , son:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + t^2} \quad [4]$$

- 
- (1) La ecuación [3], en coordenadas cartesianas de ejes  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , representa una elipse cuyos semiejes respectivos son  $a = \sigma_0 \sqrt{2}$  y  $b = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ , llamada por Nadai "elipse de plasticidad" (fig. 12).

Luego la ecuación [3] se puede escribir:

$$\sigma^2 + 3 t^2 = \sigma_o^2, \quad [5]$$

ecuación, que, referida a un par de ejes cartesianos  $\sigma$  y  $t$ , se convierte en:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_o^2} + \frac{t^2}{\left(\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \quad [6]$$

la cual, representa una elipse de semiejes  $\sigma_o$  y  $\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$  (fig. 13).

El valor de la tensión tangencial de plastificación se obtiene haciendo  $\sigma = 0$ , en la ecuación [5], con lo que resulta:

$$t_o = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}, \quad [7]$$

puediéndose, entonces, expresar la ecuación [6] de la siguiente forma:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_o^2} + \frac{t^2}{t_o^2} = 1 \quad [8]$$

Si, ahora, en lugar de adoptar la hipótesis de Hencky y von Mises, se consideran las teorías de Beltrami y de Coulomb, se obtienen, respectivamente, las siguientes condiciones de plastificación: (8).

$$\frac{1}{2E} (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{mE} \sigma_2 \sigma_3 = \frac{\sigma_0^2}{2E} \quad [9]$$

$$\sigma_3 - \sigma_2 = \sigma_0$$

que expresadas en función de las componentes tensionales  $\sigma$  y  $t$  se transforman en: <sup>(2)</sup>

$$\sigma^2 + \frac{2m+1}{m} t^2 = \sigma_0^2$$

$$\sigma^2 + 4t^2 = \sigma_0^2 \quad [10]$$

Finalmente, llamando  $t_{0,H}$ ,  $t_{0,B}$  y  $t_{0,C}$  a las tensiones tangenciales de plastificación obtenidas, respectivamente, de acuerdo con cada una de las tres teorías que quedan mencionadas, se deducen las siguientes expresiones:

$$t_{0,B} = \frac{m}{2(m+1)} \sigma_0 = \frac{3m}{2(m+1)} t_{0,H}$$

$$t_{0,C} = \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t_{0,H} \quad [11]$$

las cuales permiten emplear los resultados obtenidos, de acuerdo con una de las tres hipótesis, para conocer los valores que se obtendrían aplicando cualquiera de las otras dos.

(2) En general, para cualquier estado plano de tensiones, se obtiene, en función de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $t_{xy}$ :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{\sigma_x \sigma_y + t_{xy}^2}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sqrt{t_{xy}^2 + 4t^2}$$

y, por lo tanto, la condición de plastificación será:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3t_{xy}^2 = \sigma_0^2$$

Leyes de dependencia entre esfuerzo normal, momento flector y esfuerzo cortante en una sección totalmente plastificada.

Se inicia el estudio del problema partiendo de la sección rectangular. Deben examinarse los tres casos siguientes: a) - cuando no existe plastificación en toda la sección; b) cuando se alcanza la plastificación en un solo borde de la sección, y c) cuando se alcanza  $\sigma_0$  (tensión de plastificación) en los dos bordes ( fig. 14):

a) Cuando no existe plastificación en toda la sección.-- Tomando los ejes indicados en la figura 15, se tiene, para la única tensión normal existente, la expresión:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y}{I}$$

y para la tensión tangencial (3)

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}} = t_0 \sqrt{1 - \frac{N^2}{\sigma_0^2 A^2} - \frac{M^2}{\sigma_0^2 I^2} y^2 - \frac{2NM y}{\sigma_0^2 A I}}$$
$$= t_0 \sqrt{a y^2 + 2 b y + c,}$$

(3) El valor  $t = t_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}}$  presupone, implícitamente, que no se cumple el principio de simetría de las tensiones tangenciales. En el estado de rotura, a causa de los elevados valores de las deformaciones, no puede considerarse ya válido dicho principio.



en donde:

$$a = - \frac{M^2}{\sigma_o^2 I^2} = - \frac{4}{h^2} \frac{M^2}{M_s^2} < 0$$

$$b = - \frac{NM}{\sigma_o^2 AI} = - \frac{2}{h} \frac{N}{N_o} \frac{M}{M_s}$$

$$c = 1 - \frac{N^2}{\sigma_o^2 A^2} = 1 - \frac{N^2}{N_o^2} > 0$$

Si se hace:

$$\Delta = a c - b^2 = - \frac{4}{H^2} \frac{M^2}{M_s^2},$$

siempre que  $\Delta < 0$  se tendrá:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{ay^2 + 2by + c} dy = \frac{1}{2a} \left[ (b+ay) \sqrt{ay^2 + 2by + c} + \Delta X \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

siendo:

$$X = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sen} \frac{ay+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{h}{2} \frac{M_s}{M} \operatorname{arc\,sen} \left( -\frac{2}{h} \frac{M}{M_s} y - \frac{N}{N_0} \right)$$

y entonces:

$$T = b t_0 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sqrt{ay^2 + 2by + c} \, dy = \frac{T_0}{4} \left[ \left( 1 + \frac{N}{N_0} \frac{M_s}{M} \right) \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - \left( \frac{N}{N_0} + \frac{M}{M_s} \right)^2} + \left( 1 - \frac{N}{N_0} \frac{M_s}{M} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{N}{N_0} - \frac{M}{M_s} \right)^2} + \frac{M_s}{M} \right.$$

$$\left. \operatorname{arc\,sen} \left( \frac{M}{M_s} + \frac{N}{N_0} \right) - \frac{M_s}{M} \operatorname{arc\,sen} \left( \frac{N}{N_0} - \frac{M}{M_s} \right) \right] \quad (4)$$

[12

b) Plastificación en un solo borde de la sección. Es conveniente en este caso, para simplificar la fórmula, tomar como origen de coordenadas el punto O, correspondiente a la fibra neutra de la sección (fig. 16).

(4) Para  $N = 0$ , se tiene:

$$T = \frac{T_0}{2} \left[ \sqrt{1 - \frac{M^2}{M_s^2}} + \frac{M_s}{M} \operatorname{arc\,sen} \frac{M}{M_s} \right]$$

La componente normal de la tensión, viene entonces dada por la expresión:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{y}{d}$$

y la tangencial por:

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{d^2}}$$

De aquí se deduce:

$$T = \frac{t_0 b}{d} \int_{-h_2}^d \sqrt{d^2 - y^2} dy = \frac{T_0}{2dh} \left[ \frac{\pi d^2}{2} + h_2 \sqrt{d^2 - h_2^2} - d^2 \arcsen \frac{h_2}{d} \right] \quad [13]$$

Aplicando la ecuación de equilibrio, respecto al corrimiento en la dirección de N, se obtiene:

$$N = \sigma_0 b \left( h - h_2 - \frac{d}{2} - \frac{h_2^2}{2d} \right) = N_0 \left( 1 - \frac{h_2 - d - \frac{h_2^2}{2d}}{h} \right)$$

y de la ecuación de equilibrio respecto a la rotación alrededor del centro O:

$$M = \sigma_0 b \left( -\frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{2} + \frac{hd}{2} + \frac{hh_2^2}{2d} + 2h_2h - \frac{3}{2} h_2^2 - h_2 d - \frac{2}{3} \frac{h_2^3}{d} \right) =$$

$$= M_o \left( -\frac{2}{3} \frac{d^2}{h^2} - 2 + 2 \frac{d}{h} + 2 \frac{h_2^2}{hd} + 8 \frac{h_2}{h} - \frac{1}{6} \frac{h_2^2}{h^2} - 4 \frac{h_2 d}{h^2} - \frac{8}{3} \frac{h_2^3}{h^2 d} \right)^*$$

La relación entre las tres solicitaciones características de la sección, expresada en forma paramétrica (de parámetros  $h_2$  y  $d$ ), resulta así la siguiente:

$$T = \frac{T_o}{2dh} \left( \frac{\pi d^2}{2} + h_2 \sqrt{d^2 - h_2^2} - d^2 \arcsen \frac{h_2}{d} \right)$$

$$N = N_o \left( 1 - \frac{h_2}{h} - \frac{d}{2h} - \frac{h_2^2}{2dh} \right) \quad [14]$$

$$M = M_o \left( -\frac{2}{3} \frac{d^2}{h^2} - 2 + 2 \frac{d}{h} + 2 \frac{h_2^2}{hd} + 8 \frac{h_2}{h} - \frac{1}{6} \frac{h_2^2}{h^2} - 4 \frac{h_2 d}{h^2} - \frac{8}{3} \frac{h_2^3}{h^2 d} \right)$$

c) Plastificación en los dos bordes de la sección (fig. 17).-- Las ecuaciones de equilibrio respecto al corrimiento, en la dirección de  $N$ , y a la rotación alrededor de  $O$  son, respectivamente:

$$N = \sigma_o b (h_1 - d) + \sigma_o b \frac{d}{2} - \sigma_o b (h_2 - d) - \frac{\sigma_o b d}{2}$$

$$M = \sigma_o b \frac{h_1^2 - d^2}{2} + \sigma_o b \frac{d^2}{3} + \sigma_o b \frac{d^2}{3} + \sigma_o b \frac{h_2^2 - d^2}{2} - N \frac{(h_1 - h_2)}{2}$$

\* N. del T. A lo largo de la traducción realizada, se han venido corrigiendo diversas erratas observadas en el texto original. Esta expresión, sin embargo, aún cuando en la misma, ciertos coeficientes parecen equivocados, se ha mantenido tal y como figura en la revista italiana ya que, como no se sigue operando con ella, no ha sido posible comprobar los errores. No obstante, si algún lector desea alguna aclaración, gustosamente nos ofrecemos a su disposición para solicitarla de los autores.

de donde: (5)

(5) Si en la primera de las ecuaciones [15] se hace  $N = 0$  se tiene:

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$$

Si se sustituyen, ahora, los valores  $h_1$  y  $h_2$  en la segunda, resulta:

$$M = \sigma_0 b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{d^2}{3} \right),$$

que para  $d = \frac{h}{2}$  da:

$$M = M_s = \frac{\sigma_0 b h^2}{6},$$

y para  $d = 0$ :

$$M = M_0 = \frac{\sigma_0 b h^2}{4}$$

Si en las ecuaciones [15] se hace  $d = 0$ , resulta:

$$N = \sigma_0 b (h_1 - h_2)$$

$$M = \sigma_0 b h_1 h_2$$

Conviene recordar que cuando se alcanza la plastificación total de la sección por esfuerzo normal se verifica  $N_0 = \sigma_0 b h$ , mientras que si se produce por la acción del momento flector resulta:

$$M_0^* = \sigma_0 b h_1 h_2 = \frac{\sigma_0 b h^2}{4} \left[ 1 - \frac{N^2}{N_0^2} \right] = M_0 \left[ 1 - \frac{N^2}{N_0^2} \right]$$

En efecto, siendo:

$$h_1 - h_2 = \frac{N}{\sigma_0 b} \quad " \quad h_1 + h_2 = h,$$

resolviendo el sistema, se obtiene:

$$h_1 = \frac{N_0 + N}{2 N_0} h \quad " \quad h_2 = \frac{N_0 - N}{2 N_0} h$$

y, por lo tanto:

$$M_0^* = \sigma_0 b h_1 h_2 = \sigma_0 b h^2 \frac{N_0^2 - N^2}{4 N_0^2} = \frac{\sigma_0 b h^2}{4} \left( 1 - \frac{N^2}{N_0^2} \right)$$

$$N = \sigma_o b (h_1 - h_2)$$

$$M = \sigma_o b \left( h_1 h_2 - \frac{d^2}{3} \right) \quad [15]$$

Si se considera, ahora, el esfuerzo cortante se tiene:

$$t^2 = \frac{\sigma_o^2 - \sigma^2}{3} = \frac{\sigma_o^2}{3} \left( 1 - \frac{y^2}{d^2} \right) = t_o^2 \frac{d^2 - y^2}{d^2}$$

es decir que, el diagrama de  $t$  es elíptico, con tangentes horizontales en los extremos.

Siendo:

$$T = 2b \int_0^d t dy = \frac{bd t_o \pi}{2}$$

el valor de  $d$  será:

$$d = \frac{2T}{b \pi t_o}, \quad [16]$$

que sustituido en la 2ª de las dos ecuaciones [15] da:

$$M = \sigma_o b \left( h_1 h_2 - \frac{4T^2}{3 \pi^2 b^2 t_o^2} \right)$$

y como  $T_o = t_o b h$  se obtiene:

$$M = \sigma_o b h_1 h_2 \left( 1 - \frac{4T^2}{3 \pi^2 T_o^2} \cdot \frac{h^2}{h_1 h_2} \right),$$

pero siendo:

$$M_o^* = \sigma_o b h_1 h_2$$

$$M = M_o^* \left( 1 - \frac{4T^2}{3 \pi^2 T_o^2} \cdot \frac{h^2}{h_1 h_2} \right),$$

obteniéndose, finalmente, el valor de M:

$$M = M_0 \left[ 1 - \frac{N^2}{N_0^2} \right] \left[ 1 - \frac{4T^2}{3\pi^2 T_0^2} \cdot \frac{h^2}{h_1 h_2} \right], \quad [17]$$

de donde se deduce que para  $T = 0$ , el valor de M es: (9)

$$M = M_0 \left[ 1 - \frac{N^2}{N_0^2} \right], \quad [18]$$

que viene representado por la rama parabólica de la figura 18 y para  $N = 0$  (en cuyo caso  $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ )

$$M = M_0 \left[ 1 - \frac{16T^2}{3\pi^2 T_0^2} \right] \quad [19]$$

representado por la rama parabólica de la figura 20. (6)

(6)

Es importante señalar que el valor  $M = 0$  da una relación puramente ficticia y físicamente inadmisibles. En efecto, según se sabe, considerando únicamente el esfuerzo normal  $N$  y el cortante  $T$ , la ley de dependencia es del tipo: (figura 19)

$$\frac{N^2}{N_0^2} + \frac{T^2}{T_0^2} = 1,$$

o sea una elipse de semidiámetros  $N_0$  y  $T_0$ . La anterior ley de dependencia se encuentra de la forma siguiente:

$$t^2 = \frac{\sigma_0^2 - \sigma^2}{3} = \frac{\sigma_0^2}{3} \left( 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \right) = \frac{\sigma_0^2}{3}$$

$$\left( 1 - \frac{N^2}{\sigma_0^2 A^2} \right) = t_0^2 \left( 1 - \frac{N^2}{N_0^2} \right)$$

Transformando, ahora, convenientemente la ecuación [17] para encontrar la ecuación de la superficie espacial correspondiente a N, M, y T. Se tiene:

$$h_1 h_2 = \frac{N_o^2 - N^2}{4 N_o^2} h^2$$

y, por lo tanto:

$$M = M_o \left( \frac{N_o^2 - N^2}{N_o^2} \right) \left( 1 - \frac{4 T^2}{3 \pi^2 T_o^2} \cdot \frac{4 N_o^2}{N_o^2 - N^2} \right) \quad [20]$$

de donde, haciendo operaciones, se llega a:

$$\frac{M}{M_o} = 1 - \frac{N^2}{N_o^2} - \frac{16 T^2}{3 \pi^2 T_o^2}, \quad [20]$$

que es la ecuación de un paraboloides elíptico. Las intersecciones según los planos  $N = 0$  y  $T = 0$  son parábolas y según el plano  $M = 0$  y sus paralelos son elipses (fig. 21).

Teniendo en cuenta que:

$$M_o = \frac{\sigma_o b h^2}{4} \quad N_o = \sigma_o b h = \frac{4 M_o}{h} \quad T_o = \frac{\sigma_o b h}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{M_o}{h}$$

la ecuación [20] se puede escribir:

$$\frac{M}{M_o} = 1 - \frac{(N h)^2}{(4 M_o)^2} - \frac{(T h)^2}{(\pi M_o)^2}, \quad [21]$$



la cual, tomando como ejes coordenados  $M = z$ ,  $Nh = x$  y  $Th = y$ , se convierte en:

$$\frac{z}{z_0} = 1 - \frac{x^2}{(4z_0)^2} - \frac{y^2}{(\pi z_0)^2} \quad [21^*]$$

Siguiendo las teorías de Beltrami y de Coulomb la ecuación [21\*] se transforma, respectivamente, en las siguientes relaciones:

$$\frac{z}{z_0} = 1 - \frac{x^2}{(4z_0)^2} - \frac{y^2}{\left(\pi \sqrt{\frac{3m}{2(m+1)}} z_0\right)^2}$$

$$\frac{z}{z_0} = 1 - \frac{x^2}{(4z_0)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{3} z_0\right)^2}$$

Todas las intersecciones con los planos  $z = \text{constante}$  tienen un significado físico, exceptuando la que corresponde al plano  $z = 0$

Puesto que:

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{3} < \pi \sqrt{\frac{3m}{2(m+1)}} < \pi \quad (7)$$

para cualquier valor de  $z$ , distinto de cero, ( $K = \frac{z}{z_0} < 1$ ); se obtendrán siempre tres elipses análogas a las de la fig. 22.

(7) En efecto, siempre se verifica que  $\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{\frac{m}{m+1}}$

B I B L I O G R A F I A

- (1) J.A. VAN DEN BROEK: Theory of Limit Design. John Wiley Nueva York 1948.
- (2) H.J. GREENBERG, W. PRAGER: Limit design of beams and frames "Proceeding of the American Society of Civil Engineers" 1951.
- (3) F. LEVI: Fenomeni di adattamento e calcoli a rottura. "Rend. dell'Acc. dei Lincei" Roma 1953
- (4) A. GALLI, V. FRANCIOSI: Introduzione della caratteristica tagliante nel calcolo a rottura. "L'Ingegneria" 1953, Nº 8.
- (5) A. NADAI: Plasticity. Mc. Graw Hill Book Company. Nueva York 1941.
- (6) H. HENCKY: Zur Theorie plastischer Deformationen. Z. Ang. Math. n. Mech. vol-IV-1924.
- (7) R.V. MISES: Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand Nachr. d. Gesellsch. d. Wissensch. Zü Gottingen. 1913.
- (8) A. GALLI: Scienza delle Costruzioni, vol. I y II, ed. Pellerano, Nápoles 1952.
- (9) V. FRANCIOSI: Discussion of the limit design of beams and frames. "Proc. of the A.S.C.E. 1952
- (10) V. FRANCIOSI: Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elasto-plastico. "Giornale del Genio Civile" Agosto 1952.

457-8-11 LABOR DESARROLLADA POR EL LABORATORIO DE ENSAYOS DEL MINISTERIO DE OBRAS PUBLICAS DE INGLATERRA

(Development work at the Field Test Unit)

por C.S.A. Division, Ministry of Works

"MAGAZINE OF CONCRETE RESEARCH", Julio 1950

- S i n o p s i s -

Se hace un breve resumen de la labor realizada en el Laboratorio de Ensayos (Barnet By-pass) del Ministerio de Obras Públicas de Inglaterra, durante el período Agosto 1948 - Abril 1949, en relación con las viguetas de hormigón pretensado, prefabricadas, utilizadas para la construcción de forjados para pisos de viviendas.

- - -

Viguetas de hormigón pretensado para viviendas

Se encuentra en estudio, un nuevo tipo de viguetas de hormigón pretensado, con el fin de ver si es posible sustituir con ellas a las de madera que hasta ahora se vienen utilizando, normalmente, en la construcción de forjados para pisos de viviendas. La sección de este nuevo tipo de viguetas es en I, con alas de 5 cm de anchura y un canto total de 14 cm. Está prevista su colocación a 46 cm de distancia entre ejes o a 53,5 cm, según que el espesor de la placa del forjado sea de 2 ó 2,3 cm.

Como, por regla general, en las plantas bajas no se emplean viguetas de madera, al principio sólo se pensó utilizar las de hormigón pretensado, también para las plantas altas. Posteriormente, sin embargo, se vió que este nuevo tipo de vigueta resulta muy recomendable para los pisos bajos, especialmente cuando el terreno es inclinado y no se estima económico hacer una explanación sobre la cual construir después una solera de hormigón. Empleando viguetas pretensadas en las plantas bajas, se evitan los peligros de la putrición y, en la mayor parte de los casos, el tener que construir muros de defensa o contención.

En las construcciones inglesas tradicionales, la mitad aproximadamente de la madera empleada se destinaba a los forjados de piso. De esta cantidad, un 50% se invertía en viguetas y el otro 50% en el entablado. Toda esta madera puede ahora ahorrarse utilizando forjados constituidos por viguetas de hormigón pretensado combinadas con bloques huecos cerámicos. Sin embargo, no debe esperarse que un forjado todo de hormigón pueda competir en precio con otro en el que se utilice entablado de madera, ya que, en este último caso, los tableros, al propio tiempo que sirven para salvar los vanos entre viguetas, proporcionan la superficie adecuada para constituir el piso del forjado, sin que sea necesario un nuevo solado. Además, no es posible encontrar, a precio aceptable, un solado de piso que resulte tan caliente y agradable para las habitaciones en general y sobre todo para los dormitorios, como la madera.

Por todo ello, parece lógico adoptar, para la construcción de viviendas, una solución intermedia empleando viguetas de hormigón pretensado recubiertas con un entablado de madera. Aún así, el

ahorro de madera conseguido sería muy considerable, pudiéndose cifrar en unos  $0,85 \text{ m}^3$  por casa de tipo normal.

Las viguetas de hormigón pretensado requieren muy poco acero, unos  $0,65 \text{ Kg/m}^2$  ó  $27 \text{ Kg}$  por planta. Un forjado normal a base de viguetas y losas de hormigón armado ordinario, consumiría una cantidad de acero ocho o diez veces superior. Otra de las ventajas de las viguetas pretensadas es su poco peso. Para una luz de  $3,65 \text{ m}$  su peso es inferior a los  $46 \text{ Kg}$ , por lo que pueden ser manejadas y transportadas fácilmente por dos operarios.

Un cierto número de estas viguetas se encuentran, actualmente, sometidas a ensayo en el "Field Test Unit", en donde se las conservará, durante varios años, bajo carga constante, con el fin de estudiar los efectos de las deformaciones lentas. Estas viguetas han sido calculadas para la carga de  $146 \text{ Kg/m}^2$  que es la que marcan las normas para los pisos de viviendas. Dos de ellas, se mantuvieron durante tres meses bajo una carga de  $659 \text{ Kg/m}^2$ . Al final de dicho periodo, la flecha en el centro era de  $9 \text{ cm}$  y se podía apreciar (ver Fig. 23) una serie de grietas regularmente dispuestas a lo largo de la pieza. Al retirar la carga, todas las grietas desaparecieron y se recuperó un  $76\%$  de la flecha. Una semana más tarde la recuperación había aumentado hasta el  $78\%$ .

Los ensayos realizados sobre un cierto número de viguetas, demuestran que su coeficiente de seguridad total es del orden de  $2,5$  y que la primer fisura aparece bajo una sollicitación ligeramente inferior a  $1,5$  veces el momento flector de cálculo. Cuando se añade a las viguetas el forjado y solado correspondientes, el coeficiente de seguridad aumenta. Las viguetas para estos ensayos se fabricaron em

pleando mezclas en la proporción 1:1,5:3, en peso, con una relación agua-cemento, también en peso, de 0,45 y utilizando grava de 9,5 mm de tamaño máximo.

En la construcción de estas piezas se han seguido dos métodos diferentes: el de producción en cadena y el de fabricación en moldes individuales. Unas se curaron de acuerdo con los procedimientos ordinarios, en atmósfera húmeda, y otras sometién<sup>do</sup>las a corriente de vapor caliente. En ambos casos, los alambres de pretensado se anclaron por medio de pequeños casquillos cilíndricos en los que ajustan unas cuñas cónicas especiales. Este dispositivo ha sido proyectado en el propio "Field Test Unit" y se designa con el nombre de "anclaje Gladwin" (Gladwin grips).

La bancada de tesado para la fabricación en cadena tiene 18 m de longitud y en cada extremo lleva una robusta placa de anclaje. La placa de uno de los extremos es fija, pero la del otro se mueve mediante dos gatos hidráulicos que la empujan hacia afuera hasta conseguir que los alambres alcancen la longitud requerida. Todos los alambres se anclan primero en la placa fija y, después de atravesar los distintos moldes de las viguetas que forman la cadena de producción, se sujetan a la placa móvil, dándoles la misma tensión inicial. A continuación, se les da la carga definitiva, tesándolos simultáneamente por medio de los gatos hidráulicos.

El método de producción en cadena, aplicado a la prefabricación de piezas pretensadas de pequeñas dimensiones, tiene la ventaja de exigir solamente una operación de tesado y anclaje para el conjunto de todos los elementos que constituyen la cadena, la cual puede llegar a tener hasta 150 m de longitud, o más, sin que, en ge

neral, nunca baje de los 75 m. En cambio, presenta el inconveniente de que, tanto la mezcla fresca de hormigón, como las piezas ya fabricadas, tienen que ser trasladadas en el taller a través de distancias relativamente largas, pudiendo además no resultar fácil la aplicación de los sistemas de curado por calor. Por otra parte, la longitud de las bancadas de producción exige naves de grandes dimensiones lo cual supone un fuerte aumento en el capital necesario para los gastos de primera instalación.

Estos inconvenientes desaparecen en el caso de que la fabricación se realice por unidades, en moldes individuales, si bien, entonces, para cada pieza, habrá que efectuar una operación completa de tesado y anclaje. Será conveniente, por lo tanto, en este caso, emplear moldes suficientemente resistentes para poder soportar el esfuerzo de pretensado hasta que el hormigón haya fraguado y endurecido, y que dichos moldes sean aptos para resistir, sin deteriorarse, el tratamiento térmico a que se ha de someter la pieza para su curado. Es aconsejable, además, que los dispositivos de tesado y anclaje de los alambres, sean de sencilla y rápida aplicación. Como quiera que los moldes habrán de resistir, por término medio, un esfuerzo total de pretensado de unas 5 T, aplicado excéntricamente en sus extremos, no cabe duda que el mejor material que puede utilizarse para su construcción es el acero. Si, además, se construyen empleando la misma clase de acero que para fabricar los alambres, se conseguirá que la magnitud del esfuerzo de pretensado no se vea afectada por el tratamiento térmico de curado.

En el primer modelo ensayado, el cuerpo principal del molde estaba constituido por dos perfiles C de 15 x 5 cm montados sobre una placa de base de 13 x 1,27 cm. Para formar el alma de la viga-

ta se soldaban dos placas de acero a la cara interior de los perfiles C que constituían los costeros del molde. En cada extremo de éste se fijaba una placa metálica suficientemente resistente y provista de los orificios adecuados para mantener en correcta posición los seis alambres de pretensado. Por fuera de cada una de estas placas de extremo se colocaba otra de anclaje, de 15 cm de espesor, análogamente perforada y atravesada por tres robustos pernos roscados que se apoyaban sobre la placa situada en la cabeza del molde. Una vez convenientemente colocados y sujetos a las placas de anclaje, los seis alambres de 2,5 mm de diámetro que constituían la armadura de pretensado de las viguetas, para tensarlos, se hacía girar a los tres grandes pernos de cada extremo hasta conseguir que los alambres alcanzasen la longitud requerida. Después de fraguado y endurecido el hormigón de las viguetas se aflojaban los pernos y, de esta manera, la tensión de los alambres se transfería al hormigón, por adherencia.

Posteriormente, se proyectó otro modelo con el cual se consiguieron dos importantes mejoras. La primera consistía en poder tesar, moldear y curar dos viguetas, simultáneamente en un solo molde. En Francia, se había logrado ya, con anterioridad, fabricar las viguetas por parejas, colocando dos moldes juntos, unidos, pero no se había podido llegar a la obtención de las dos piezas en un solo molde. La segunda mejora la constituye un dispositivo especial que permite aplicar cierta presión al hormigón fresco mientras se vibra. Mediante este procedimiento se consigue: 1º Obtener hormigones más densos y, por consiguiente, más resistentes; 2º Un acabado más perfecto de la superficie superior de las piezas, y 3º Reducir el tiempo de curado.



En la Fig. 24 puede verse este tipo perfeccionado de molde. Como puede apreciarse, se trata de un modelo experimental y mucho más pesado de lo que sería conveniente para una producción industrial. En el modelo comercial, la presión se aplica al hormigón por medio de una máquina automática y las placas de anclaje son independientes de los moldes, de forma que éstos pueden ser retirados antes de la transferencia del pretensado al hormigón. Mediante la combinación de presión, vibración y curado al vapor, pueden obtenerse hormigones con una resistencia de  $350 \text{ Kg/cm}^2$  a las cuatro horas, lo que permite utilizar, cada molde, dos veces por jornada normal de trabajo. R.P.

- - -

591-2-14 FUENTE SIFON-CARRETERO, DE HORMIGON PRETENSADO, SOBRE EL RÍO LONCOMILLA

por A. Solari Cánepa

"REVISTA DE CAMINOS", IV trimestre 1954

- S i n o p s i s -

Se describen en este artículo las principales características de un nuevo puente sifón-carretero construido, en hormigón pretensado, sobre el río Loncomilla, en Chile. Su longitud total es de 316 m y está dividido en ocho tramos: dos centrales de 33,5 m y los otros seis de 41,5 m. Se indican los más importantes detalles constructivos y se resumen las características de los materiales empleados.

- - -

Esta importante obra, en construcción sobre el río Loncomilla, a unos 23 Km de la ciudad de Linares (Chile), servirá para proporcionar riego a una superficie aproximada de 20.000 hectáreas, de la región de Melozal. Al propio tiempo, y desde el punto de vista de las comunicaciones, dará salida a los productos de la zona y servirá para enlazar las ciudades de Cauquenes y Linares. Las aguas, procedentes del río Putagán, llegarán al puente a través de una tubería de hormigón armado de 2,4 m de diámetro, a una presión máxima de 1,3 Kilogramos por centímetro cuadrado.

La longitud total del puente proyectado es de 316 m, divididos en ocho tramos: los dos centrales tienen 33,5 m y los seis restantes 41,5 m. La calzada, en los tramos centrales, alcanza los 6 m de anchura y en los demás 3,5 m.

El tablero del puente está constituido por cuatro o seis vigas de sección en I, prefabricadas, que se colocan una junto a otra dejando pequeñas separaciones entre las alas que, posteriormente, se rellenan con hormigón (Fig. 25). De este modo, se forman unos conductos, que quedan perfectamente estancos gracias a la triple compresión del tablero y que sirven para la circulación del agua a presión.

Los tramos largos están formados por dos vigas centrales B (Fig. 26a) y dos vigas de borde A: todas ellas de 41,44 m de longitud. Las vigas B son de sección constante de 2 m de canto total y alma de espesor uniforme de 0,18 m en una altura de 0,78 m. Las alas tienen 1,06 m de anchura, siendo su espesor mínimo, de 0,18 m en la superior y 0,14 m en la inferior. El acuerdo del alma con las alas se realiza mediante un arco circular de 0,44 m de radio, para facilitar el desmolde. Las vigas A de borde difieren de las vigas B en que tienen el ala inferior cortada exteriormente, en forma vertical, a 0,26 m del eje de la viga.

Los tramos cortos (Fig. 26b) se componen de dos vigas centrales E, dos vigas intermedias D, y dos vigas de borde C, de 33,44 metros de longitud. Las vigas E y D tienen la misma sección que las B de los tramos largos, y las vigas C son de sección idéntica a la de las vigas A.

La unión entre las vigas y los aparatos de apoyo se realiza mediante bloques de hormigón, armados con redondos de acero dulce ordinario, que se colocan bajo las caras inferiores de los extremos de las vigas.

Cada viga va pretensada mediante cables longitudinales y verticales, excepto las vigas C que carecen de estos últimos. Los cables longitudinales se anclan, bien en la cara extrema de la viga o bien en su cara superior, y se colocan en el siguiente número:

En las vigas A .....	26
En las vigas B .....	29
En las vigas C .....	16
En las vigas D y E .....	17

Los cables verticales, con trazado en forma de U, se anclan en la cara superior de las vigas y su separación media es de 0,65 m. Estos cables tienen una excentricidad media, a la mitad de la altura del alma, de 0,03 m en las vigas A y D, y nula en las vigas B y E.

La distancia entre el eje de la viga de borde y el de la viga contigua es de 1,08 m; y en las otras vigas, la distancia entre ejes es de 1,20 m. Los intervalos de 0,02 m y 0,14 m que quedan entre bordes de alas se hormigonan "in situ", y el pretensado transversal de las losas superior e inferior, que forman las alas de las vigas del tablero del puente, se efectúa por medio de cables rectos colocados cada 1 m.

Todos los cables de pretensado están constituidos por doce alambres de 5 mm de diámetro, de acero de alta resistencia, con

una carga de rotura que oscila entre los 140 y 160 Kg/mm<sup>2</sup> y un límite elástico convencional de 115 a 120 Kg/mm<sup>2</sup>. Se entiende por límite elástico convencional la tensión que, mantenida durante diez segundos, produce un alargamiento permanente de 0,2%. Esta tensión puede ser ampliamente sobrepasada sin que por ello haya de alcanzarse, necesariamente, la rotura del alambre.

En la Fig. 27 se representa el diagrama tensión-deformación correspondiente al promedio de siete ensayos realizados sobre muestras extraídas de una de las partidas de alambre recibidas en la obra. Estos ensayos se efectuaron sobre probetas de 50 cm de largo, midiéndose los alargamientos sobre una longitud inicial de 25 cm. Como puede observarse, dicho diagrama no tiene discontinuidades, a diferencia de lo que ocurre en las curvas correspondientes al acero dulce que normalmente se emplea como armadura del hormigón armado ordinario, las cuales presentan una zona de alargamiento plástico, en la cual la tensión se mantiene constante mientras que la deformación continúa aumentando. Esta zona es, precisamente, la que define el límite elástico en esta clase de aceros, límite que varía entre los 22 y 24 Kg/mm<sup>2</sup>. En el diagrama de la Fig. 27 puede observarse un punto límite de proporcionalidad, correspondiente a los 102 Kg/mm<sup>2</sup> (2.000 Kilogramos de carga para el alambre de 5 mm de diámetro). Hasta este punto, las deformaciones pueden considerarse como perfectamente elásticas, es decir, que la probeta, para dichos valores, después de descargada, no presenta ninguna deformación remanente. La tensión máxima de 153 Kg/mm<sup>2</sup> alcanzada en el diagrama, define la carga de rotura del acero de alta resistencia ensayado.

Los cables se construyen agrupando los alambres de 5 mm de diámetro alrededor de un núcleo central y engrasándolos para envol-

verlos, seguidamente, con tres capas de papel Kraft que también se engrasan. Hay que tener cuidado, para que no quede ninguna rebaba interna de alambre que pueda ostaculizar el alargamiento del cable durante su puesta en tensión. De esta manera, se obtiene una envoltura lo suficientemente blanda y flexible para evitar los rozamientos durante el tesado. Además, para evitar su endurecimiento, no debe dejarse transcurrir demasiado tiempo desde que se construye el cable hasta que se tesa.

Los extremos de los cables deben quedar totalmente limpios de óxido y grasa, en una longitud suficiente para evitar el deslizamiento de los alambres en los conos de anclaje y en la zona de amarre de los gatos. El tesado de los cables se realiza mediante gatos hidráulicos especiales, tipo Freyssinet, de 62 Kg de peso cada uno, que se apoyan contra el propio hormigón de la viga, ya endurecido. La tensión final de los alambres, una vez experimentadas las diversas pérdidas originadas por la retracción, deformaciones lentas, etc, debe ser de  $85 \text{ Kg/mm}^2$ .

Los cables se anclan mediante conos Freyssinet (Fig. 28). Posteriormente, y una vez cortados los extremos sobrantes de los alambres y rellenados los huecos que se dejan para la colocación de los gatos, se inyecta, por el conducto dejado al efecto en el núcleo de los cables, una lechada de cemento (proporción volumétrica 1:1) para asegurar la protección de la armadura contra la oxidación y procurar su adherencia. Bajo cada cono de anclaje se coloca, en el hormigón, un zuncho de acero dulce ordinario con el fin de reforzar su resistencia.

Las vigas del puente se construyen en un molde metálico, reforzado, que se apoya sobre travesaños de madera, los cuales, a su

vez, descansan sobre placas de goma colocadas sobre unos dados de hormigón armado. Este sistema permite la colocación, en el fondo y en los costados del molde, de vibradores que facilitan el hormigonado. Los extremos del molde se cierran mediante placas de hormigón armado que van provistas de orificios necesarios para el paso de los cables que constituyen la armadura de las vigas.

La dosificación del hormigón utilizado en la obra es de 425 Kg de supercemento (10 sacos) por metro cúbico de hormigón, obteniéndose resistencias del orden de los  $350 \text{ Kg/cm}^2$ , a los siete días. La relación agua-cemento varía entre 0,36 y 0,38, según la plasticidad requerida. Además, se añade al supercemento, y en la proporción del 1% de su peso, un producto en polvo que retarda su fraguado (Plastiment), con el fin de favorecer la operación de vibrado del hormigón.

El desmolde de todas las vigas se efectúa, generalmente, a las 24 horas de haber terminado el hormigonado. Las vigas se trasladan, sobre rodillos, desde el lugar en que se fabrican hasta el puente, en donde son recogidas por una viga de lanzamiento que las coloca en su posición definitiva sobre los apoyos. Esta viga de lanzamiento es una viga armada, metálica, de 70 m de longitud total, y un contrapeso de 18 toneladas que sirve para equilibrar la parte en voladizo de la viga de lanzamiento mientras ésta va avanzando para alcanzar el apoyo en la pila correspondiente (Fig. 29).

Cada una de las vigas descansa sobre las pilas del puente a través de una rótula fija, de una articulación, en uno de los extremos y de una rótula móvil, de dos articulaciones, en el otro. Estos apoyos son prefabricados y del tipo Freyssinet. Sus ejes se en-

cuentran a 0,55 m del eje de la pila, de modo que las luces de las vigas resultan de 40,4 m ó de 32,4 m. El enlace de las vigas con sus respectivos aparatos de apoyo se efectúa, una vez rellenos los huecos entre ellos con hormigón fluido, mediante la puesta en tensión de dos cables rectos, de doce alambres, de 5 mm de diámetro.

Todas las piezas que constituyen los aparatos de apoyo han sido calculadas para poder resistir los esfuerzos horizontales originados por los posibles movimientos sísmicos.

Para el cálculo de las vigas se consideraron las siguientes sobrecargas por vía de calzada:

- 1ª - Sobrecarga, uniformemente repartida, de 0,952 toneladas por metro lineal.
- 2ª - Sobrecarga concentrada de 8,2 toneladas, para el cálculo de los momentos flectores, y
- 3ª - Sobrecarga concentrada de 11,8 toneladas, para el cálculo de los esfuerzos cortantes.

La losa superior del tablero del puente se calculó suponiendo una sobrecarga, uniformemente repartida, de 0,686 toneladas por metro cuadrado.

Para tener en cuenta los efectos dinámicos, todos los valores anteriormente citados se aumentaron de acuerdo con los coeficientes que a continuación se indican:

- 1,20 para los tramos de 41,5 m
- 1,22 para los tramos de 33,5 m

Para el cálculo de la losa de las aceras se consideró una



sobrecarga de 0,400 toneladas por metro cuadrado y como sobrecargas de acera en el cálculo de las vigas se tomaron las siguientes:

0,250 tm/m<sup>2</sup> para los tramos largos,  
0,280 tm/m<sup>2</sup> para los tramos cortos.

La sección total para paso de agua en los tres conductos que se utilizan es de 4,58 m<sup>2</sup>, es decir, equivalente a la de una tubería circular de 2,4 m de diámetro (4,524 m<sup>2</sup>).

El efecto sísmico se supuso igual al 1% de los esfuerzos verticales que actúan sobre la estructura.

En el Pliego de condiciones de la obra se exige que el hormigón pretensado de la estructura tenga, como mínimo, una resistencia a la rotura por compresión, a los 90 días, de 450 Kg/cm<sup>2</sup>, y se fijan, como tensiones límites de trabajo, las siguientes:

Tensión máxima de compresión .....	126 Kg/cm <sup>2</sup>
Tensión máxima de compresión (para la flexión longitudinal) .....	5 Kg/cm <sup>2</sup>
Tensión principal de tracción (en condiciones normales de trabajo) .....	2 Kg/cm <sup>2</sup>
Tensión principal de tracción (en circunstancias especiales, como por ejemplo: manipulación de las vigas, vaciado de un conducto, etc) .....	Hasta 10Kg/cm <sup>2</sup>

R.P.

- - -

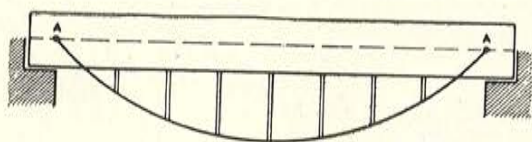


Fig. 1.

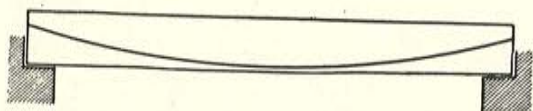


Fig. 2.

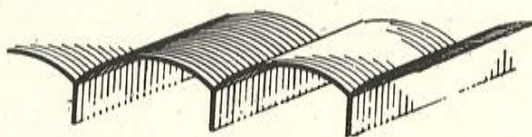


Fig. 3.

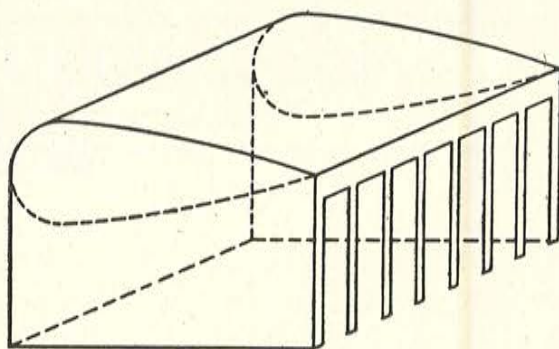


Fig. 4.

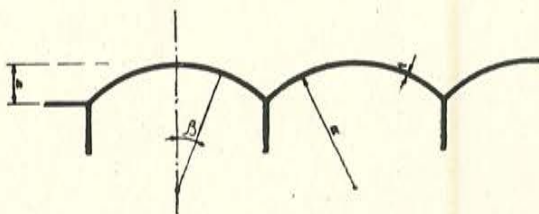
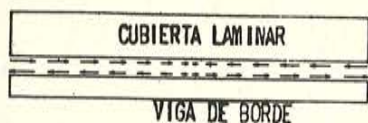


Fig. 5.



TENSIONES CORTANTES EN EL BORDE (TENSIONES INTERNAS)



DIAGRAMA DE LAS TENSIONES CORTANTES EN EL BORDE



DIAGRAMA DE LAS CARGAS ORIGINADAS POR LOS ESFUERZOS CORTANTES EN LA PARTE SUPERIOR DE LA VIGA DE BORDE

$$F_x = \int \frac{1}{2} S_x dx$$

Fig. 6.

Fig. 1.—Viga «apoyada», a lo largo de su luz, en un tirante curvo colocado debajo.

Fig. 2.—Viga «apoyada», a lo largo de su luz, en un cable teso de directriz curva.

Fig. 3.—Estructura laminar (contorno abierto).

Fig. 4.—Estructura laminar (contorno cerrado). Con el fin de eliminar las perturbaciones en los bordes, se disponen en los nudos diversos soportes próximos uno a otros.

Fig. 5.—Secciones de una cubierta laminar circular: diagrama superior, sección transversal; diagrama inferior, sección longitudinal.

Fig. 6.—Tensiones cortantes en los bordes de una cubierta laminar que actúa como membrana.

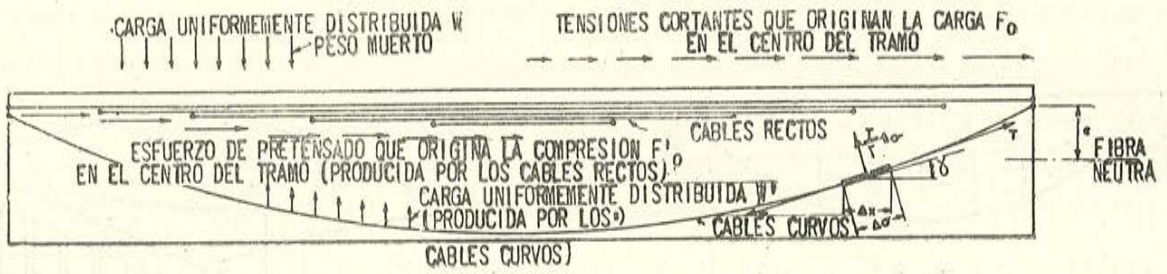


Fig. 7.

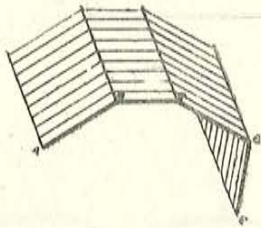


Fig. 8.

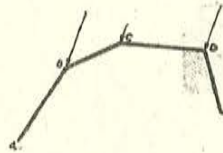


Fig. 9.

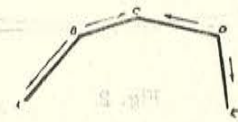


Fig. 10.



Fig. 11.

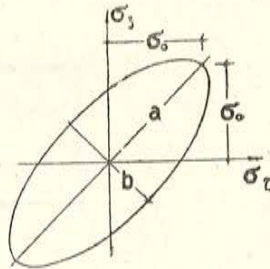


Fig. 12.

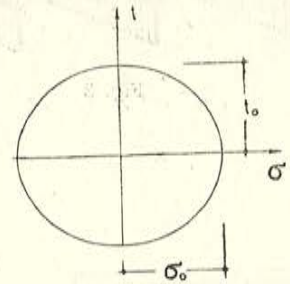


Fig. 13.

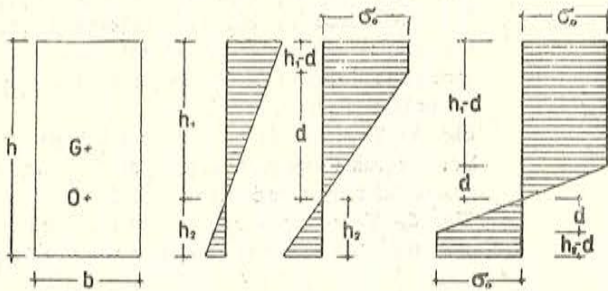


Fig. 14.

Fig. 7.—Sección longitudinal de una viga de borde, pretensada. En ella se indican los distintos esfuerzos que actúan a lo largo del tramo.

Fig. 8.—Cubierta laminar poligonal.

Fig. 9.—Cargas permanentes que actúan en los vértices o nudos.

Fig. 10.—Descomposición de las cargas permanentes, según los planos de la cubierta.

Fig. 11.—Flexión de las placas, producida por las flechas de las vigas.

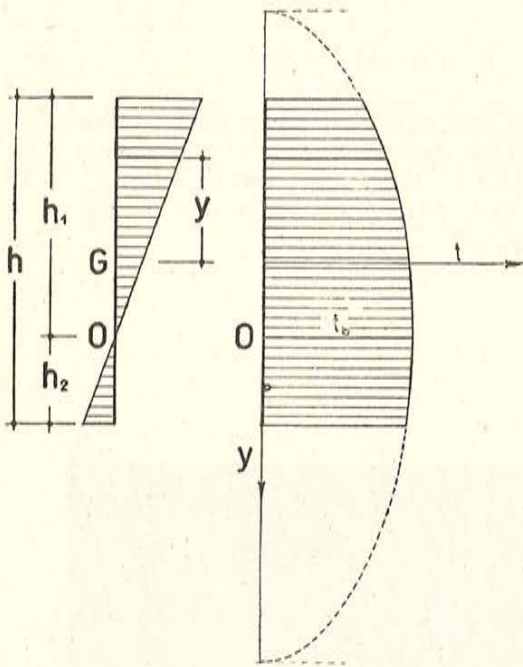


Fig. 15.

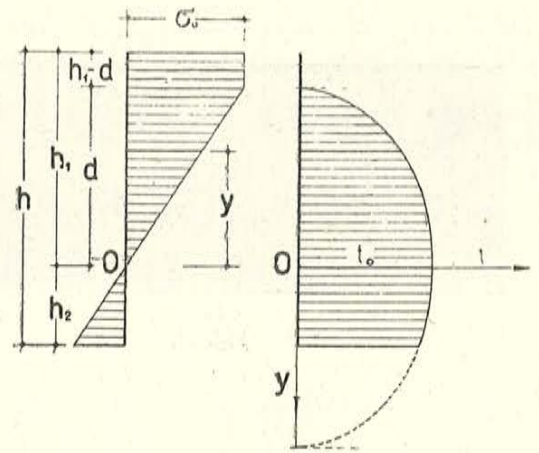
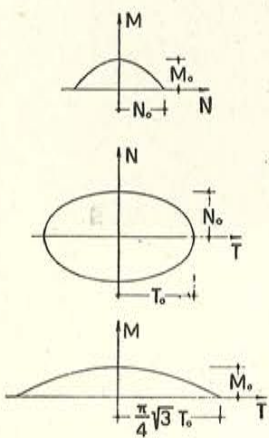


Fig. 16.



Figs. 18, 19 y 20.

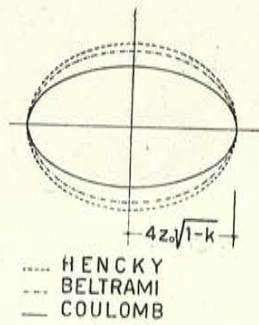


Fig. 22

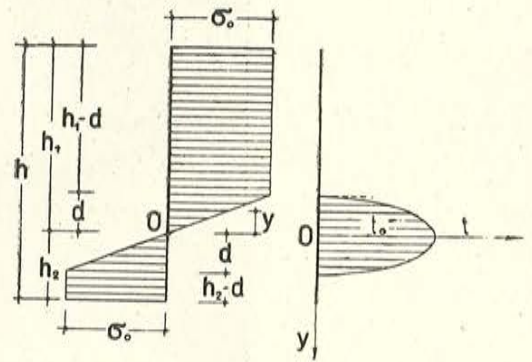


Fig. 17.

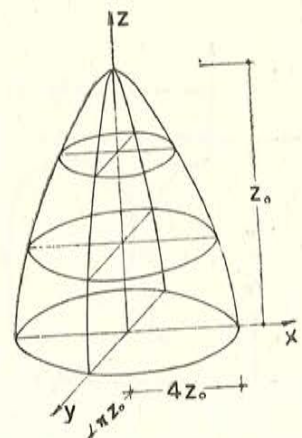


Fig. 21.

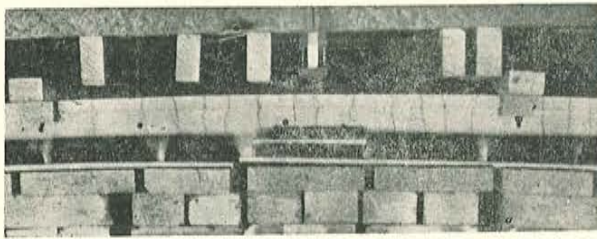


Fig. 23.

Fig. 23.—Fisuración de la vigueta después de haberla tenido, durante tres meses, bajo una carga igual al 82 por 100 de la de rotura.

Fig. 24.—Vista del molde y dispositivo de pretensado.

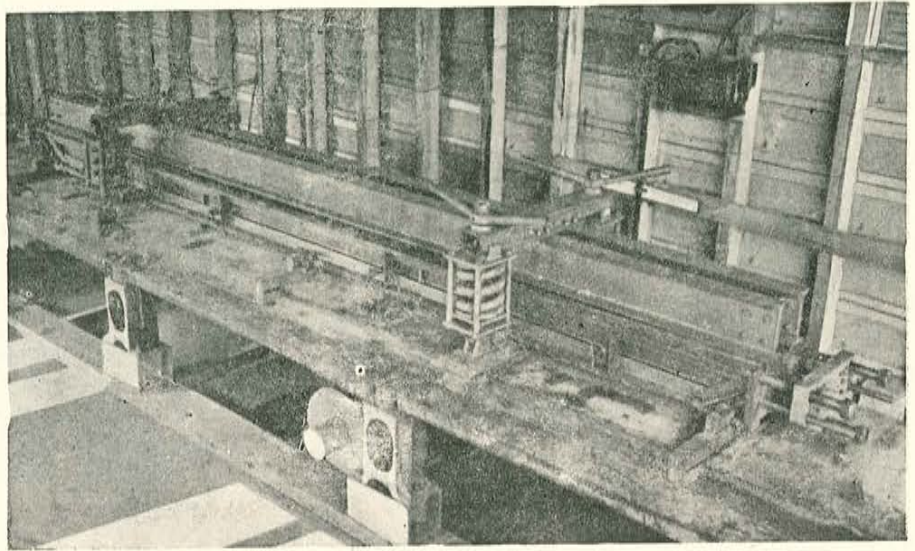
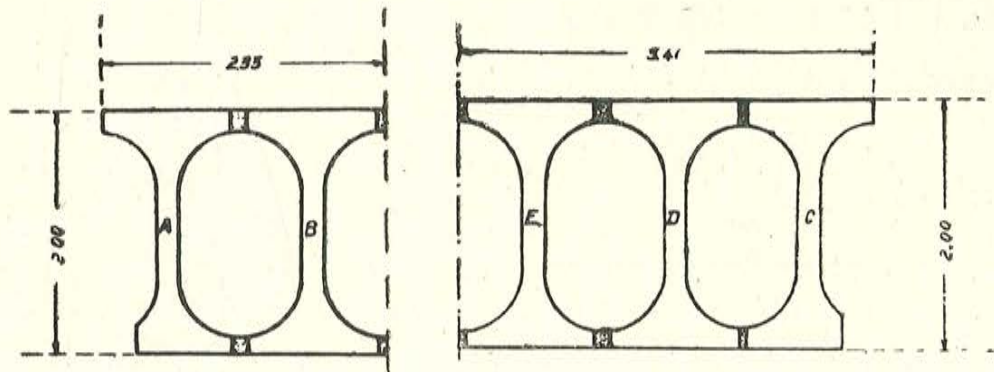


Fig. 24.



a) SEMI-SECCION VIGAS TRAMO LARGO

b) SEMI-SECCION VIGAS TRAMO CORTO

Fig. 26.

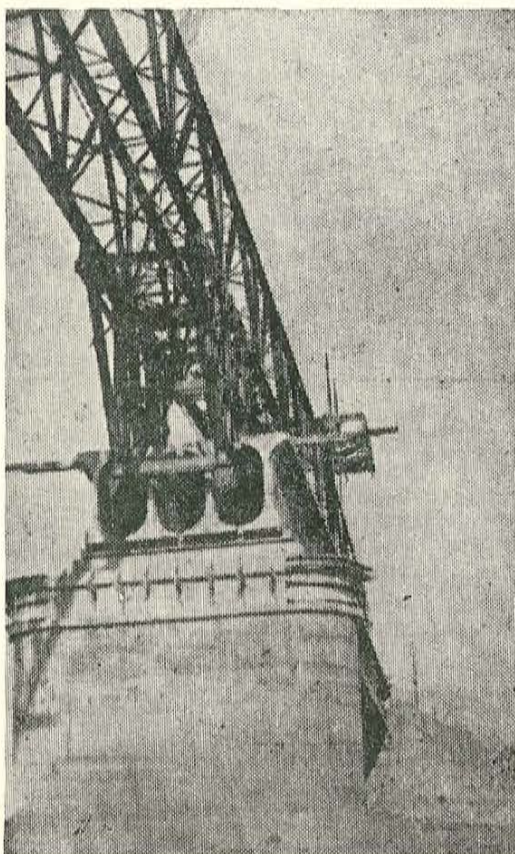


Fig. 25.

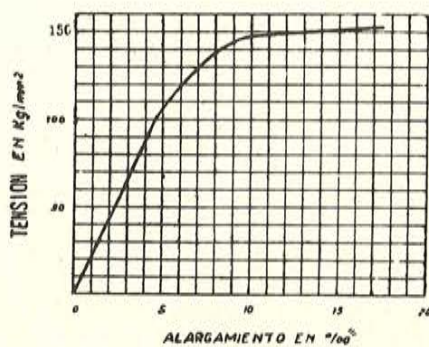


Fig. 27

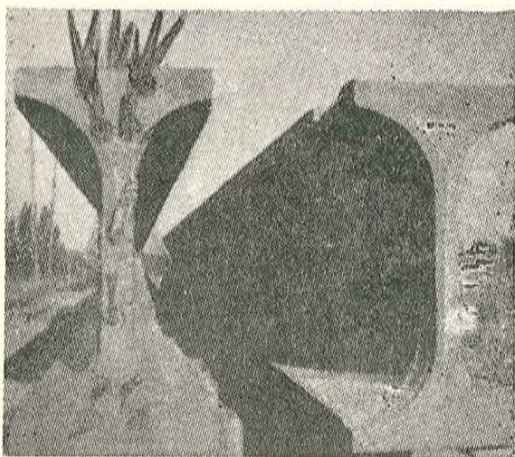


Fig. 28.

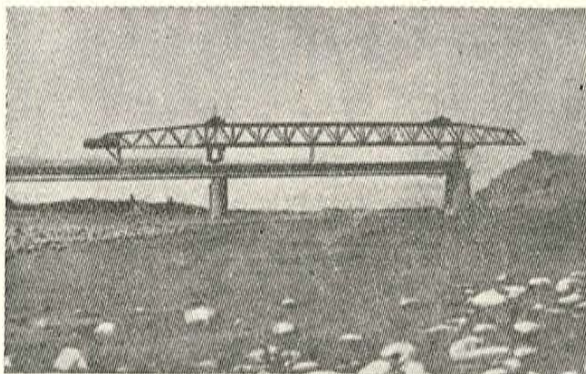


Fig. 29.

